Indicatori de performanţă în frecvenţă.
Studiu de caz: aplicarea criteriului Nyquist simplificat pentru sistemele de ordinul I şi ordinul II

Răspunsul în frecvenţă este o reprezentare a răspunsului unui sistem la intrări sinusoidale de diferite frecvenţe. Ieşirea unui sistem liniar la o intrare sinusoidală este o sinusoidă de aceeaşi frecvenţă, dar cu fază şi amplitudine diferite. Răspunsul în frecvenţă este definit ca fiind diferenţa de fază şi amplitudine între sinusoida de ieşire şi cea de intrare.

Pentru a putea analiza performanţele unei structuri de reglare automată (SRA) utilizând analiza în frecvenţă se va calcula funcţia de transfer a sistemului în buclă deschisă $H_d(s)$.

ATENȚIE!
Pentru a obţine informaţii legate de comportamentul unui sistem în buclă *închisă*, se va studia răspunsul în frecvenţă al acelui sistem în buclă *deschisă*.

Se consideră următoarea structură de reglare automată (SRA) cu un grad de libertate:

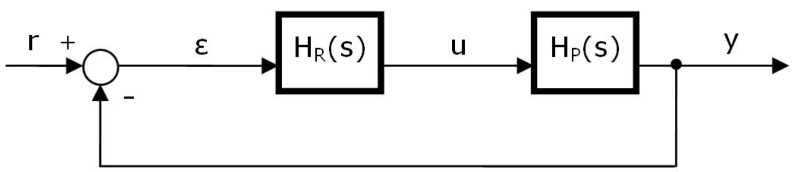


Figura 1. Structura de reglare automată cu un grad de libertate

Atunci se pot calcula:

- funcţia de transfer *în buclă deschisă (pe calea directă)*:

$$H_d(s)=H_R(s)\cdot H_P(s) \tag{1}$$

- funcţia de transfer *în buclă închisă*:

$$H_0(s)=\frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} \tag{2}$$

Alternativ, se poate scrie:

$$H_d(s)=\frac{H_0(s)}{1-H_0(s)} \tag{3}$$

Locul de transfer (Nyquist)

Locul de transfer (locul Nyquist sau hodograful) este reprezentarea funcţiei de transfer în buclă deschisă $H_d(s)$ în planul complex. Acest instrument poate fi utilizat pentru a verifica stabilitatea relativă a sistemului în buclă închisă, utilizând funcţia de transfer a sistemului în buclă deschisă, $H_d(s)$.

Criteriul Nyquist simplificat: ***un sistem în buclă închisă este stabil*** *în cazul în care $H_d(s)$ nu conţine poli sau zerouri în semiplanul drept şi* ***dacă locul de transfer al sistemului în buclă deschisă*** *trece prin* ***dreapta*** *punctului critic de coordonate (-1,0).*

Dacă locul Nyquist trece prin punctul critic, atunci sistemul se află la limita de stabilitate.

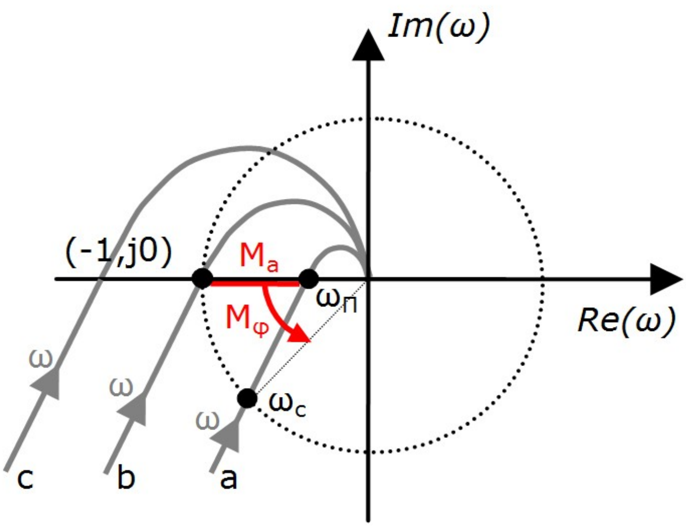


Figura 2. Locul Nyquist (hodograful) pentru $H_d(j\omega)=Re(\omega)+j\cdot Im(\omega)$

În figura 2 se observă reprezentările unor hodografe pentru:

(a) sistem în buclă închisă STABIL
(b) sistem în buclă închisă LA LIMITA DE STABILITATE
(c) sistem în buclă închisă INSTABIL

Analiza stabilităţii sistemului în circuit închis se poate face pe baza caracteristicilor de frecvenţă ale sistemului în circuit deschis, utilizând indicatori de performanță spefici.

Marginea de amplitudine a sistemului în circuit deschis:

$$M_a = \frac{1}{|H_d(j\omega_\Pi)|} \tag{4}$$

unde ω_Π este pulsaţia pentru care:

$$\Im(H_d(j\omega_\Pi)) = 0 \tag{5}$$

Marginea de amplitudine *M_a*:
- este reprezentată de un segment definit **numai pe axa reală negativă, la dreapta sau la stânga punctului critic**
- reliefează distanța de la punctul critic până la hodograf (i.e. intersecția hodografului cu axa imaginară negativă)

Marginea de fază a sistemului în circuit deschis:

$$M_\varphi = 180^o + arg(H_d(j\omega_c)) \tag{6}$$

unde ω_c este pulsaţia pentru care:

$$|H_d(j\omega_c)| = 1 \tag{7}$$

Marginea de fază *M_φ*:
- este reprezentată de un unghi definit **între axa reală negativă și dreapta ce unește originea axelor de intersecția hodografului cu cercul unitate**

!!! *Stabilitatea sistemului în buclă închisă în funcție de marginea de amplitudine și marginea de fază:*

- STABIL: $M_a > 0$ și $M_\varphi > 0$
- LA LIMITA DE STABILITATE: $M_a = 0$ și $M_\varphi = 0$
- INSTABIL: $M_a < 0$ și $M_\varphi < 0$

Empiric & 3D mental (that stuff dreams are made of): marginea de amplitudine M_a reprezintă distanța pe care se poate "deplasa" hodograful la stânga până a atinge punctul critic, în timp ce marginea de fază M_φ reprezintă cu cât se poate "roti" hodograful până a depăși punctul critic și a trece in stânga acestuia.

Trasarea hodografelor sistemelor de ordinul I și ordinul II

I Se calculează $H_d(s)$, daca este necesar
II Se calculează:
- polii și zerourile funcţiei $H_d(s)$
- amplificarea funcţiei $H_d(s)$
- excesul poli-zerouri al funcţiei $H_d(s)$

III Se calculează $H_d(j\omega) = Re(\omega) + jIm(\omega)$
IV Se calculează:
- $Re(0)$, $Im(0)$ *(originea hodografului)*
- $Re(\infty)$, $Im(\infty)$ *(finalul)*
- $Re(\omega)$ *și* $Im(\omega)$ *pentru polii imaginari*

Observaţie. Această metodă trasează locul de transfer pentru frecvențele pozitive. Pentru frecvențele negative, se desenează $H_d(j\omega)$ simetric față de axa reală.

Reprezentarea poli-zerouri-amplificare (ZPK)

$$H(s)=K\cdot\frac{\prod_{Z=1}^{m}\left(T_Z\cdot s+1\right)}{\prod_{P=1}^{n}\left(T_P\cdot s+1\right)}$$

Unde:
- K reprezintă amplificarea
- $-1/T_P$ reprezintă polii sistemului
- $-1/T_Z$ reprezintă zerourile sistemului

Excesul poli zerouri e_{pz}

Fie $H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$

Excesul poli zerouri al funcţiei $H(S)$ reprezintă diferenţa dintre numărul de poli și numărul de zerouri al acesteia:

$$e_{pz}=grad[A]-grad[B]=nr_{poli}-nr_{zerouri}$$

Observație. O funcţie de transfer implementabilă (proprie) are:
$e_{pz}\geqslant 0$

Utilizarea excesului poli-zerouri în trasarea hodografelor

Valoarea e_{pz} arată care axă este asimptotă a hodografului când acesta se apropie de zero (pentru $\omega \rightarrow \infty$).

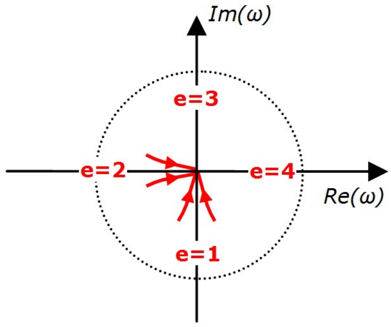


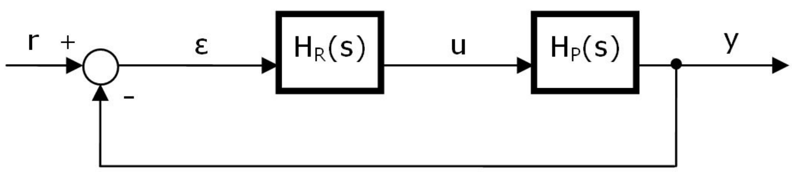
Figura 3. Asimptote la infinit

EXERCIȚIUL 1

Fie un proces $H_P(s)=\frac{K_P}{T_P \cdot s+1}=\frac{0.02}{20 \cdot s+1}$ și $H_R(s)=K_R=10$ un regulator proporțional.

Se cere:
a. Structura SRA
b. Locul Nyquist al funcţiei de transfer pe calea directă
c. Marginile de amplitudine și de fază

a. Structura SRA



b. Hodograful

I Calculul funcției de tranfer pe calea directă $H_d(s)$

$$H_d(s)=H_R(s) \cdot H_P(s)=\frac{0.02}{20 \cdot s+1} \cdot 10=\frac{0.2}{20 \cdot s+1}$$

II Calculul zerourilor (z), polilor (p), amplificării (K) și excesului poli-zeroruri (e) pentru funcţia $H_d(s)$

$$p=-\frac{1}{20}$$
$$z\in\emptyset$$
$$K=0.2$$
$$e=1-0=1$$

III Calculul funcţiei $H_d(j\omega)=Re(\omega)+j\cdot Im(\omega)$

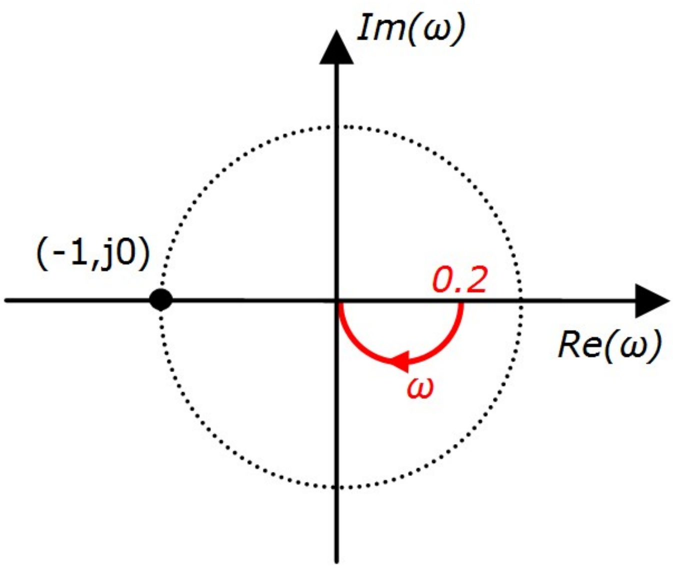
$$H_d(j\omega)=\frac{0.2}{20j\omega+1}=\frac{0.2(-20j\omega+1)}{1+400\omega^2}=\frac{0.2}{1+400\omega^2}+\frac{j\cdot-4\omega}{1+400\omega^2}$$

Asadar: $Re(\omega)=\frac{0.2}{1+400\omega^2}$ și $Im(\omega)=\frac{-4\omega}{1+400\omega^2}$

IV Calculul originii și finalului hodografului

$Re(0) = 0.2$	$Im(0)=0_-$	(origine)
$Re(\infty) = 0_+$	$Im(\infty)=0_-$	(final)

Semenele celor două puncte calculate mai sus arată în ce cadran se află hodograful. În cazul de față, acesta se va desena în cadranul IV (dreapta jos).



Din relația e=1 rezultă că hodograful se apropie de origine trecând aproape de axa *Im* negativă, fie din dreapta, fie din stânga. Deoarece hodograful se află in cadranul IV, atunci acesta va trece prin dreapta axei *Im* negative (i.e. axa *Im* negativă este asimptotă la stânga a locului de transfer când $\omega \to \infty$).

c. Marginile de amplitudine și de fază

M_a: oricât se crește amplificarea sistemului pe calea directă, hodograful NU va intersecta axa negativă, el deplasându-se numai înspre dreapta (hodograful nu părăsește cadranul IV); așadar, $M_a=\infty$

Acest lucru se poate demonstra și prin calcul (v. exercițiul 2).

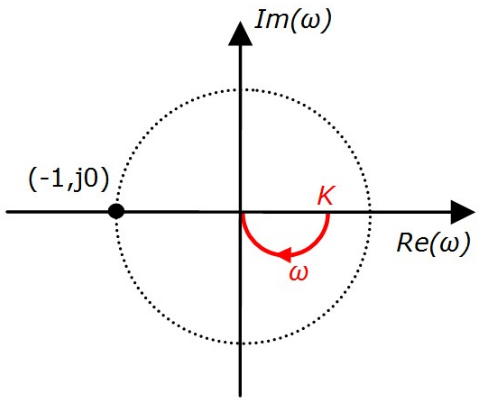
M_φ: oricât se crește faza sistemului (de ex. prin introducerea unui element de întârziere), hodograful se poate "roti" în jurul originii în sens anti-trigonometric "de o infinitate de ori" fără să intersecteze cercul unitate; așadar, $M_\varphi=\infty$

Atenție, aceasta interpretare este valabilă numai în cazul în care hodograful se află complet în interiorul cercului unitate; în cazul în care acesta intersecteaza cercul unitate, marginea de fază se poate calcula (v. exemplu de calcul în exercițiul 2).

Concluzii și generalizare

Sistemul în buclă închisă cu regulator proporțional și proces de ordinul I este mereu stabil, având:
- marginea de amplitudine infinită și pozitivă - $M_a=\infty$ și $M_a>0$
- marginea de fază pozitivă și cel puțin 90° - $M_\varphi \geq 90°$ și $M_\varphi>0$

Pentru o funcție de transfer $H_d(s)=\dfrac{K}{T \cdot s+1}$ având K>0 și T>0, locul de transfer are, ***mereu***, aceeași formă:



EXERCIȚIUL 2

Se presupune că din proiectare/acordare, se obține o funcție de transfer în buclă închisă de ordinul II:

$$H_0 = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Unde factorul de amortizare este egal cu 0.177, iar pulsația naturală a sistemului este 0.71.

Se cer:
a. hodograful funcției de transfer in bucla deschisă
b. marginea de amplitudine și marginea de fază
c. analiza stabilității sistemului în buclă închisă

a. Hodograful funcției $H_d(s)$

I Calculul funcției de tranfer pe calea directă $H_d(s)$

$$H_d(s) = \frac{H_0(s)}{1 - H_0(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s}$$

În forma ZPK, funcția de transfer devine:

$$H_d(s) = \frac{\frac{\omega_n}{2\zeta}}{s\left(\frac{1}{2\zeta\omega_n}s + 1\right)}$$

unde $K = \frac{\omega_n}{2\zeta}$ reprezintă amplificarea sistemului, iar $T_p = \frac{1}{2\zeta\omega_n}$ este constantă de timp.

Așadar, funcția de transfer pe calea directă este:

$$H_d(s) = \frac{\frac{0.71}{2 \cdot 0.177}}{s\left(\frac{1}{2 \cdot 0.177 \cdot 0.71}s + 1\right)} \simeq \frac{\frac{0.71}{0.354}}{s\left(\frac{1}{0.25}s + 1\right)} \simeq \frac{2}{s(4s + 1)}$$

II Calculul zerourilor (z), polilor (p), amplificării (K) și excesului poli-zeroruri (e) pentru funcţia $H_d(s)$

$p_1=0\,;\,p_2=-\frac{1}{4}$
$z\in\emptyset$
$K=2$
$e=2-0=2$

III Calculul funcţiei $H_d(j\omega)=Re(\omega)+j\cdot Im(\omega)$

$$H_d(j\omega)=\frac{2}{j\omega(4j\omega+1)}=\frac{2}{-4\omega^2+j\omega}=\frac{2\left(-4\omega^2-j\omega\right)}{16\omega^4+\omega^2}=\frac{-8\omega^2}{16\omega^4+\omega^2}+j\cdot\frac{-2\omega}{16\omega^4+\omega^2}$$

Așadar: $Re(\omega)=\frac{-8\omega^2}{16\omega^4+\omega^2}$ și $Im(\omega)=\frac{-2\omega}{16\omega^4+\omega^2}$

IV Calculul originii și finalului hodografului

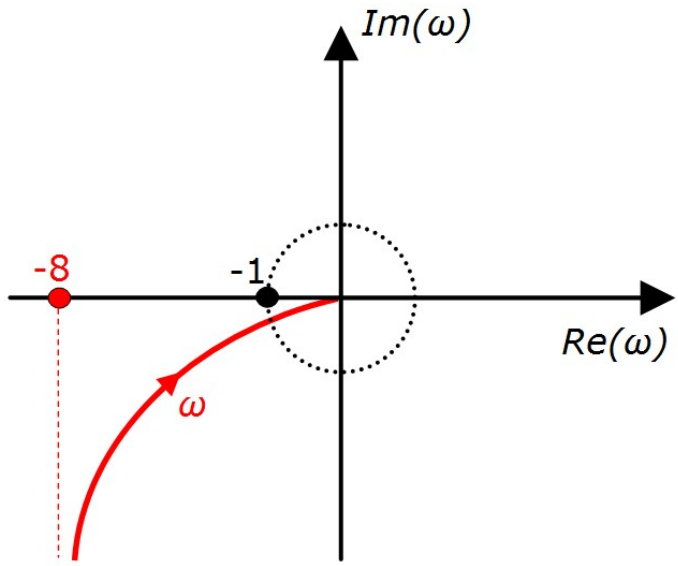
$$Re(0)=\lim_{\omega\to 0} Re(\omega)=\lim_{\omega\to 0}\frac{-8}{16\omega^2+1}=-8 \qquad Im(0)=\lim_{\omega\to 0} Im(\omega)=\lim_{\omega\to 0}\frac{-2}{16\omega^3+\omega}=-\infty$$

$$Re(\infty)=\lim_{\omega\to\infty} Re(\omega)=\lim_{\omega\to\infty}\frac{-8}{16\omega^2+4}=0_- \qquad Im(\infty)=\lim_{\omega\to\infty} Im(\omega)=\lim_{\omega\to\infty}\frac{-2}{16\omega^3+\omega}=0_-$$

Așadar:

$Re(0) = -8$	$Im(0)=0_-$	(origine)
$Re(\infty) = 0_-$	$Im(\infty)=0_-$	(final)

Hodograful se află în cadranul III și se apropie de origine trecând aproape de axa reală negativă (e=2).



b. Marginile de amplitudine și de fază

Marginea de amplitudine a sistemului în circuit deschis:

$$M_a = \frac{1}{\left|H_d(j\omega_\Pi)\right|}$$

unde ω_Π este pulsaţia pentru care: $Im(H_d(j\omega_\Pi)) = 0 \Rightarrow \omega_\Pi = \infty$

Înlocuind $\omega_\Pi = \infty$ în formula funcției de transfer pe calea directă:

$$H_d(j\omega_\Pi) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\left|H_d(j\omega_\Pi)\right|} = \infty \Rightarrow M_a = \infty$$

Marginea de fază a sistemului în circuit deschis:

$$M_\varphi = 180^o + arg(H_d(j\omega_c))$$

unde ω_c este pulsaţia pentru care: $\left|H_d(j\omega_c)\right| = 1$

Se reamintește modulul unui număr complex: $a + jb = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\left|H_d(j\omega_c)\right| = \sqrt{Re(\omega_c)^2 + Im(\omega_c)^2}$$

Se observă că termenul de sub radical este pozitiv, așadar:

$$Re(\omega_c)^2 + Im(\omega_c)^2 = 1 \Rightarrow \frac{64\omega_c^4}{\left(16\omega_c^4 + \omega_c^2\right)^2} + \frac{4\omega_c^2}{\left(16\omega_c^4 + \omega_c^2\right)^2} = 1$$

De unde se obține o ecuație de gradul 3 în variabila ω_c^2

$$64\omega_c^4 + 4\omega_c^2 = \left(16\omega_c^4 + \omega_c^2\right)^2 \Rightarrow 256\omega_c^6 + 32\omega_c^4 - 63\omega_c^2 - 4 = 0$$

Se obțin pentru ω_c^2 următoarele valori: 0.47, -0.53 și -0.06.

Dar $\omega_c^2 \in \mathbb{R}^+$. Atunci, se alege $\omega_c^2 = 0.47 \Rightarrow \omega_c \simeq \pm 0.685$

Ținând cont de faptul că se lucrează pentru frecvențele pozitive, se consideră, în final, soluția:

$$\omega_c \simeq 0.685[rad/s]$$

În continuare se calculează $arg(H_d(j\omega_c))$ și M_φ.

Se reamintește argumentul unui număr complex:

$$arg(a+jb)=\begin{cases} \frac{\Pi}{2}-arctg\left(\frac{a}{b}\right), & a\geqslant 0, b>0 \\ -\frac{\Pi}{2}-arctg\left(\frac{a}{b}\right), & a>0, b<0 \\ \Pi+arctg\left(\frac{b}{a}\right), & a<0, b\geqslant 0 \\ -\Pi+arctg\left(\frac{b}{a}\right), & a<0, b<0 \\ nedefinit, & a=0, b=0 \end{cases}$$

În cazul de față: *Re(ω)* și *Im(ω)* sunt negative.

$$arg(H_d(j\omega_c))=-\Pi+arctg\left(\frac{Im(\omega_c)}{Re(\omega_c)}\right)$$

Adică:

$$arg(H_d(j\omega_c))=-\Pi+arctg\left(\frac{\frac{-2\omega_c}{16\omega_c^4+\omega_c^2}}{\frac{-8\omega_c^2}{16\omega_c^4+\omega_c^2}}\right)=-\Pi+arctg\left(\frac{-2\omega_c}{-8\omega_c^2}\right)=-\Pi+arctg\left(\frac{1}{-4\omega_c}\right)$$

De unde se obține:

$$arg(H_d(j\omega_c))=-\Pi+arctg\left(\frac{1}{2.74}\right)=-\Pi+arctg(0.365)$$

Dacă *arctg()* se calculează în radiani:

$$arg(H_d(j\omega_c))=-\Pi+0.35[rad]=-2.79[rad]$$

Pentru calculul in grade, *Π* devine 180.

Atentie, marginea de fază se calculează în grade, așadar este necesară transformarea argumentului lui $H_d(j\omega)$ în grade.

Se reamintește:

$$rad = \frac{grade \cdot 180}{\Pi} \Leftrightarrow grade = \frac{rad \cdot \Pi}{180}$$

În final:

$$arg(H_d(j\omega_c)) = \frac{-2.79 \cdot 180}{\Pi} \simeq -159.95^o$$

De unde:

$$M_\varphi = 180^o - 159.95^o = 20.05^o$$

c. Stabilitatea sistemului în buclă închisă

Se observă că:
- marginea de amplitudine: $M_a = \infty > 0$
- marginea de fază: $M_\varphi = 20.05° > 0$

Așadar, **sistemul în buclă închisă este stabil.**

EXERCIȚIUL 3 (propus)

Se presupune că din proiectare/acordare, se obține o funcție de transfer în buclă deschisă de ordinul II:

$$H_d = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Se cer:
a. hodograful funcției de transfer in bucla deschisă
b. marginea de amplitudine și marginea de fază
c. analiza stabilității sistemului în buclă închisă

- The End -