Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)

Факультет информационных технологий и прикладной математики
Кафедра мехатроники и теоретической механики

Лабораторная работа № 1
По курсу «Математическое моделирование»

Работу выполнил:
Каменский Артемий Михайлович
Группа: М8О-404Б-20

Преподаватель:
Майоров Андрей Юрьевич
Дата: ______________2023

Подпись: ______________

Москва 2023

1 Условие

XV. Каменский Артемий

А) Постройте фазовый портрет колебаний механической системы, описываемый уравнением

$$\ddot{x} + \lambda^2 x = \beta x \dot{x}$$

Указание: ввести замену переменных вида $x = x,\ y = \dot{x}$, записать уравнение в новых переменных, разделить переменные в уравнении, интегрируя это уравнение получить первый интеграл. Далее, вводите функцию $U(y)$ так, чтобы записать первый интеграл в виде $x = \pm\sqrt{U(y) - C}$, строите фазовый портрет в координатах $x,\ y$. Укажите характерные элементы фазового портрета: положение равновесия $x = x_*,\ \dot{x} = 0$, типичные траектории, сепаратрису. Для случая $\lambda = \beta = 1$ получите зависимость $T(a)$ периода колебаний от начальной амплитуды в виде квадратуры, постройте график этой зависимости с помощью MAPLE, объясните поведение графика функции $T(a)$.

2 Решение ОДУ

$\ddot{x} = \dot{x}\frac{\dot{x}}{dx}, \qquad \dot{x} = y$

$y\frac{dy}{dx} + \lambda^2 x = \beta x y$

$\frac{ydy}{-\lambda^2 x + \beta y} = xdx$

$\frac{\lambda^2 \ln|\beta y - \lambda^2|}{\beta^2} + \frac{y}{\beta} = \frac{1}{2}x^2 + C$

$$x = \sqrt{2(\frac{\lambda^2 \ln|\beta\dot{x} - \lambda^2|}{\beta^2} + \frac{\dot{x}}{\beta}) - C} \tag{1}$$

Так как уравнение трансцендентное, то остановимся на зависимости $x(y)$

3 Фазовый портрет ОДУ

Строим график для уравнения:

$x = \sqrt{2(\frac{\lambda^2 \ln|\beta\dot{x} - \lambda^2|}{\beta^2} + \frac{\dot{x}}{\beta}) - C}$, при $\lambda = \beta = 1$

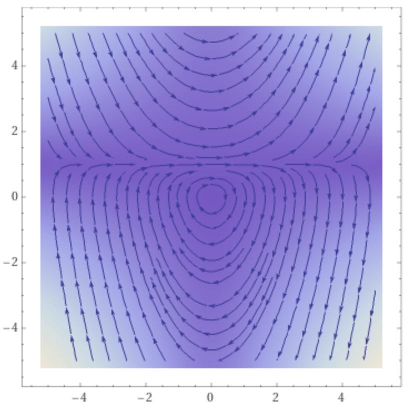

Figure 1: Фазовый портрет, построенный средствами WolframAlpha

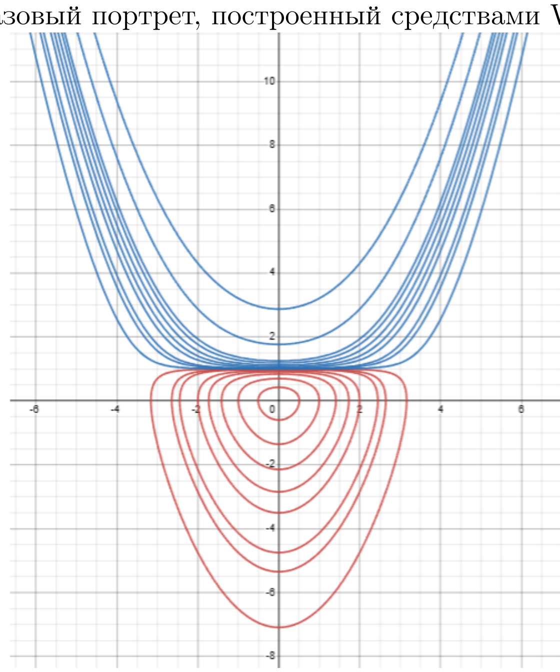

Figure 2: Фазовый портрет

Найдём особую точку. Представим ДУ в ввиде системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\lambda^2 x + \beta x y \end{cases}$$

По определению особая точка - это точка, в которой векторное поле ДУ

равно нулю.
$$\begin{cases} \dot{x} = y = 0 \\ \dot{y} = -\lambda^2 x + \beta x y = 0 \end{cases}$$
Значит особая точка (0,0).

Заметим, что прямая $y = 1$ разделяет циклическое и нециклическое поведение фазовых кривых.

4 Зависимость периода колебаний T(A) от начальной амплитуды A

$T = \int_a^b \frac{1}{\dot{x}} dx \overset{\dot{x} = y}{=} \int_a^b \frac{1}{y} dx$

Выразим dx через dy.

$\frac{ydy}{-1+y} = xdx \Rightarrow \frac{dy}{x(-1+y)} = \frac{dx}{y}$

Теперь с учетом ранее полученного решения (1) перейдем в интеграле периода колебаний к переменной y.

$$T(A) = \int_A^B \frac{1}{y-1} \frac{1}{-\sqrt{2\ln(1-y)+2y-C}} dy$$

Определим пределы интегрирования.

Выберем на оси OY точку A(0,y). Считаем, что значение A - ордината точки A.

Найдем C_A , при которой кривая проходит через точку A.

$2\ln(1-A) + 2A = C_A$

$C_A = C_B \Rightarrow 2\ln(1-B) + 2B = C_A = 2\ln(1-A) + 2A$. Откуда через функцию Ламберта можно выразить B.

$B(A) = 1 + \mathrm{LambertW}(-\mathrm{e}^{A+\ln(1-A)-1})$

$$T(A) = \int_A^{B(A)} \frac{1}{y-1} \frac{1}{-(2\ln(1-y) + 2y - 2\ln(1-A) - 2A)^{0.5}} dy \qquad (2)$$

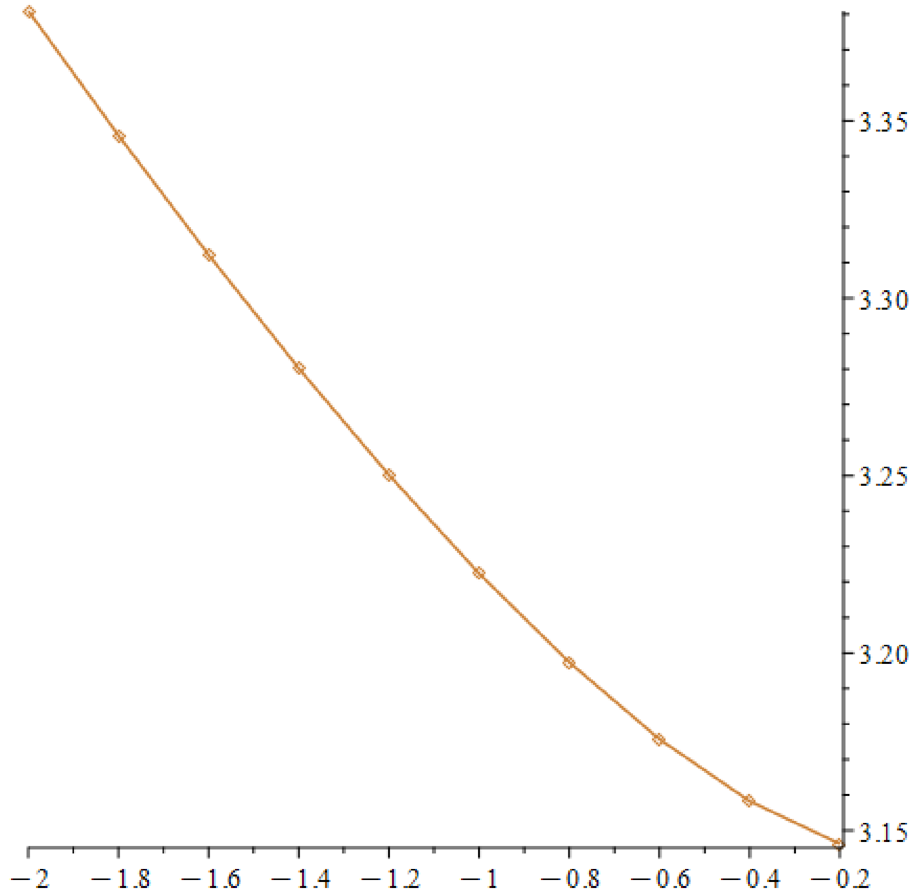

Figure 3: Зависимость периода колебаний T(A) от начальной амплитуды A, график построен средствами Maple

5 Итог лабораторной работы №1

- Получен первый интеграл для ДУ в неявном виде.
- Построен фазовый портрет ДУ.
- Получена ависимость периода колебаний T(A) от начальной амплитуды A. При уменьшении амплитуды уменьшается период T(A).