Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)

Факультет информационных технологий и прикладной математики
Кафедра мехатроники и теоретической механики

Лабораторная работа № 2
По курсу «Математическое моделирование»»

Работу выполнил:
Каменский Артемий Михайлович.
Группа: М8О-404Б-20

Преподаватель:
Майоров Андрей Юрьевич
Дата: ______________2023

Подпись: ______________

XV. Каменский Артемий

А) Постройте фазовый портрет колебаний механической системы, описываемый уравнением

$$\ddot{x} + \lambda^2 x = \beta x \dot{x}$$

Указание: ввести замену переменных вида $x = x,\ \ y = \dot{x}$, записать уравнение в новых переменных, разделить переменные в уравнении, интегрируя это уравнение получить первый интеграл. Далее, вводите функцию $U(y)$ так, чтобы записать первый интеграл в виде $x = \pm\sqrt{U(y) - C}$, строите фазовый портрет в координатах *x, y*. Укажите характерные элементы фазового портрета: положение равновесия $x = x_*,\ \dot{x} = 0$, типичные траектории, сепаратрису. Для случая $\lambda = \beta = 1$ получите зависимость $T(a)$ периода колебаний от начальной амплитуды в виде квадратуры, постройте график этой зависимости с помощью MAPLE, объясните поведение графика функции $T(a)$.

Б) Построить периодическое решение дифференциального уравнения методом Линштедта в окрестности устойчивого частного решения $x = 0,\ \dot{x} = 0$ для случая $\lambda = \beta = 1$. Для этого следует:

1. Разложить нелинейную функцию исследуемого уравнения в ряд по возмущениям $x, \dot{x}$ в окрестности точки покоя $x = 0,\ \ \dot{x} = 0$ и удержать члены до третьего порядка включительно. Ввести в уравнение колебаний малый параметр ε, используя замену переменных $x = \varepsilon y,\ \ \dot{x} = \varepsilon \dot{y}$, и новое время τ по формуле $\tau = \omega t$, где

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots$$

- искомая частота колебаний. Получить в явном виде периодическое решение $y = y(\tau),\ \dot{y} = \dot{y}(\tau)$ задачи Коши $y(0) = y_0,\ \ \dot{y}(0) = 0$ для преобразованного дифференциального уравнения с точностью до членов порядка ε^3. После этого следует вернуться к старым переменным $x, \dot{x}$ и получить приближенное выражение периодических колебаний в виде $x = x(t),\ \ \dot{x} = \dot{x}(t)$.

2. С помощью MAPLE постройте две сравнительные фазовые кривые на плоскости переменных $x, \dot{x}$, соответствующие аналитическому (приближенному) решению и строгому решению задачи Коши (полученному на основе численного счета). Рассмотрите два интервала изменения времени t: $t \in [0,10],\ \ t \in [0, 1/\varepsilon]$. Численные значения параметров и начальных условий таковы:

$y(0) = 1$	$\dot{y}(0) = 0$	$\varepsilon = 0.01$

```
> restart
```

> $with(LinearAlgebra):$

> $with(ComputationalGeometry):$

> $with(Optimization):$

> $with(plots):$
> $with(plottools):$

>

1. *Разложим нелинейность* в *ряд Тейлора* , *удерживая члены до третьего порядка включительно* :

> $mtaylor(xy, [x=0, y=0], 4)$

$$xy \tag{1}$$

2. *Введём* в *уравнение движения малый параметр* ε, *используя замену переменных* $x = \varepsilon y, \dot{x} = \varepsilon$,

> $\frac{d^2}{dt^2}(y(t)) + y(t) = \text{epsilon}\cdot y(t)\cdot\frac{d}{dt}(y(t))$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + y(t) = \epsilon\, y(t) \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) \tag{2}$$

3. *Делаем замену времени на* $\tau = \omega t$

. 4. *Представим частоту колебания* ω в *виде ряда по малому параметру* :

>

> $\omega^2 \frac{d^2}{d\,tau^2}(y(tau)) + y(tau) = \text{epsilon}\cdot y(tau)\cdot\text{omega}\cdot\frac{d}{d\,tau}(y(tau))$

$$\omega^2 \left(\frac{d^2}{d\tau^2} y(\tau)\right) + y(\tau) = \epsilon\, y(\tau)\, \omega \left(\frac{d}{d\tau} y(\tau)\right) \tag{3}$$

4 . :

> $y(tau) := y_0(tau) + y_1(tau)\cdot\text{epsilon} + y_2(tau)\cdot\epsilon^2$

$$y := \tau \mapsto y_0(\tau) + y_1(\tau)\cdot\epsilon + y_2(\tau)\cdot\epsilon^2 \tag{4}$$

5. Представим частоту колебания ω в виде ряда по малому параметру:

> $\text{omega} := \text{omega}_0 + \text{omega}_1\cdot\text{epsilon} + \text{omega}_2\cdot\epsilon^2$

$$\omega := \omega_2\,\epsilon^2 + \omega_1\,\epsilon + \omega_0 \tag{5}$$

$y(tau)$ и ω

> $\omega^2 \frac{d^2}{d\,tau^2}(y(tau)) + y(tau) - \text{epsilon}\cdot y(tau)\cdot\text{omega}\cdot\frac{d}{d\,tau}(y(tau)) = 0$

$$\left(\epsilon^2\omega_2 + \epsilon\,\omega_1 + \omega_0\right)^2 \left(\frac{d^2}{d\tau^2} y_0(\tau) + \left(\frac{d^2}{d\tau^2} y_1(\tau)\right)\epsilon + \left(\frac{d^2}{d\tau^2} y_2(\tau)\right)\epsilon^2\right) + y_0(\tau) + y_1(\tau)\,\epsilon + y_2(\tau)\,\epsilon^2 - \epsilon\left(y_0(\tau) + y_1(\tau)\,\epsilon + y_2(\tau)\,\epsilon^2\right)\left(\epsilon^2\omega_2 + \epsilon\,\omega_1 + \omega_0\right)\left(\frac{d}{d\tau} y_0(\tau) + \left(\frac{d}{d\tau} y_1(\tau)\right)\epsilon + \left(\frac{d}{d\tau} y_2(\tau)\right)\epsilon^2\right) = 0 \tag{6}$$

Сгруппируем по степеням параметра ϵ

> collect(%, epsilon)

$$-y_2(\tau)\,\omega_2\left(\frac{d}{d\tau}y_2(\tau)\right)\epsilon^7+\left(\omega_2^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y_2(\tau)\right)-\left(y_1(\tau)\,\omega_2+y_2(\tau)\,\omega_1\right)\left(\frac{d}{d\tau}y_2(\tau)\right)-y_2(\tau)\,\omega_2\left(\frac{d}{d\tau}y_1(\tau)\right)\right)\epsilon^6+\left(\omega_2^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y_1(\tau)\right)+2\,\omega_1\,\omega_2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y_2(\tau)\right)-\left(y_0(\tau)\,\omega_2+y_1(\tau)\,\omega_1+y_2(\tau)\,\omega_0\right)\left(\frac{d}{d\tau}y_2(\tau)\right)-\left(y_1(\tau)\,\omega_2+y_2(\tau)\,\omega_1\right)\left(\frac{d}{d\tau}y_1(\tau)\right)-y_2(\tau)\,\omega_2\left(\frac{d}{d\tau}y_0(\tau)\right)\right)\epsilon^5+\left(\left(2\,\omega_0\,\omega_2+\omega_1^2\right)\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y_2(\tau)\right)+2\,\omega_1\,\omega_2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y_1(\tau)\right)+\omega_2^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y_0(\tau)\right)-\left(y_0(\tau)\,\omega_1+y_1(\tau)\,\omega_0\right)\left(\frac{d}{d\tau}y_2(\tau)\right)-\left(y_0(\tau)\,\omega_2+y_1(\tau)\,\omega_1+y_2(\tau)\,\omega_0\right)\left(\frac{d}{d\tau}y_1(\tau)\right)-\left(y_1(\tau)\,\omega_2+y_2(\tau)\,\omega_1\right)\left(\frac{d}{d\tau}y_0(\tau)\right)\right)\epsilon^4+\left(2\,\omega_0\,\omega_1\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y_2(\tau)\right)+\left(2\,\omega_0\,\omega_2+\omega_1^2\right)\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y_1(\tau)\right)+2\,\omega_1\,\omega_2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y_0(\tau)\right)-y_0(\tau)\,\omega_0\left(\frac{d}{d\tau}y_2(\tau)\right)-\left(y_0(\tau)\,\omega_1+y_1(\tau)\,\omega_0\right)\left(\frac{d}{d\tau}y_1(\tau)\right)-\left(y_0(\tau)\,\omega_2+y_1(\tau)\,\omega_1+y_2(\tau)\,\omega_0\right)\left(\frac{d}{d\tau}y_0(\tau)\right)\right)\epsilon^3+\left(\omega_0^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y_2(\tau)\right)+2\,\omega_0\,\omega_1\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y_1(\tau)\right)+\left(2\,\omega_0\,\omega_2+\omega_1^2\right)\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y_0(\tau)\right)+y_2(\tau)-y_0(\tau)\,\omega_0\left(\frac{d}{d\tau}y_1(\tau)\right)-\left(y_0(\tau)\,\omega_1+y_1(\tau)\,\omega_0\right)\left(\frac{d}{d\tau}y_0(\tau)\right)\right)\epsilon^2+\left(2\,\omega_0\,\omega_1\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y_0(\tau)\right)+\omega_0^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y_1(\tau)\right)-y_0(\tau)\,\omega_0\left(\frac{d}{d\tau}y_0(\tau)\right)+y_1(\tau)\right)\epsilon+\omega_0^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y_0(\tau)\right)+y_0(\tau)=0 \tag{7}$$

5. *Приравнивая к нулю коэффициенты при последовательных степенях* ε, *получим уравнения для определения функций* $y0(\tau), y1(\tau), y2(\tau)$. *Затем последовательно решаем три задачи Коши. Обнуляя секулярные члены находим* $\omega 1$, $\omega 2$.

6. *Первая задача Коши.* $y_0(0)=a, y_0'(0)=0$

> $dsolve\left(\left\{\omega_0^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y_0(\tau)\right)+y_0(\tau)=0,\ y_0(0)=a,\ D(y_0)(0)=0\right\}, y_0(\tau)\right)$

$$y_0(\tau)=a\cos\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right) \tag{8}$$

> $subs\left(\omega_0=1, y_0(\tau)=a\cos\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right)\right)$

$$y_0(\tau)=a\cos(\tau) \qquad (9)$$

Получили $y_0(\tau)=a\cos(\tau)$

> $subs\left(\omega_0=1, y_0(\tau)=a\cos(\tau), 2\,\omega_0\,\omega_1\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\,y_0(\tau)\right)+\omega_0^{\,2}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\,y_1(\tau)\right)-y_0(\tau)\,\omega_0\left(\frac{d}{d\tau}\,y_0(\tau)\right)+y_1(\tau)=0\right)$

$$2\,\omega_1\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\,(a\cos(\tau))\right)+\frac{d^2}{d\tau^2}\,y_1(\tau)-a\cos(\tau)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\,(a\cos(\tau))\right)+y_1(\tau)=0 \qquad (10)$$

> $simplify(\%)$

$$-2\,\omega_1\,a\cos(\tau)+\frac{d^2}{d\tau^2}\,y_1(\tau)+a^2\sin(\tau)\cos(\tau)+y_1(\tau)=0 \qquad (11)$$

7. *Вторая задача Коши.* $y_1(0)=0, y_1'(0)=0$

> $dsolve\left(\left\{-2\,\omega_1\,a\cos(\tau)+\frac{d^2}{d\tau^2}\,y_1(\tau)+a^2\sin(\tau)\cos(\tau)+y_1(\tau)=0,\ y_1(0)=0, \mathrm{D}(y_1)(0)=0\right\}, y_1(\tau)\right)$

$$y_1(\tau)=\frac{a\sin(\tau)\,\left(a\cos(\tau)-a+3\,\omega_1\,\tau\right)}{3} \qquad (12)$$

> $subs(\omega_1=0, \%)$

$$y_1(\tau)=\frac{a\sin(\tau)\,(a\cos(\tau)-a)}{3} \qquad (13)$$

Получили $y_1(\tau)=\frac{a\sin(\tau)\,(a\cos(\tau)-a)}{3}$

>

> $subs\left(\omega_0=1, \omega_1=0,\ y_0(\tau)=a\cos(\tau), y_1(\tau)=\frac{a\sin(\tau)\,(a\cos(\tau)-a)}{3}, \left(\omega_0^{\,2}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\,y_2(\tau)\right)+2\,\omega_0\,\omega_1\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\,y_1(\tau)\right)+\left(2\,\omega_0\,\omega_2+\omega_1^{\,2}\right)\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\,y_0(\tau)\right)+y_2(\tau)-y_0(\tau)\,\omega_0\left(\frac{d}{d\tau}\,y_1(\tau)\right)-\left(y_0(\tau)\,\omega_1+y_1(\tau)\,\omega_0\right)\left(\frac{d}{d\tau}\,y_0(\tau)\right)\right)=0\right)$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\,y_2(\tau)+2\,\omega_2\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\,(a\cos(\tau))\right)+y_2(\tau)-a\cos(\tau)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right. \qquad (14)$$

$$\left(\frac{a\sin(\tau)\,(a\cos(\tau)-a)}{3}\right)\Bigg)-\frac{a\sin(\tau)\,(a\cos(\tau)-a)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\,(a\cos(\tau))\right)}{3}=0$$

> *simplify*(%)

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\,y_2(\tau)+y_2(\tau)+\frac{\left(-3\cos(\tau)^3+2\cos(\tau)^2+2\cos(\tau)-1\right)a^3}{3}-2\,\omega_2\,a\cos(\tau)=0 \qquad \textbf{(15)}$$

8. *Третья задача Коши.* $y_2(0)=0, y_2{}'(0)=0$

> *dsolve*$\left(\{\%,\ y_2(0)=0, \mathrm{D}(y_2)(0)=0\}, y_2(\tau)\right)$

$$y_2(\tau)=\frac{a\left(-3\,a^2\cos(\tau)^3+\frac{16\cos(\tau)^2a^2}{3}+\frac{a^2\cos(\tau)}{3}+\tau\left(a^2+24\,\omega_2\right)\sin(\tau)-\frac{8\,a^2}{3}\right)}{24} \qquad \textbf{(16)}$$

> *solve*$\left(a^2+24\,\omega_2=0, \omega_2\right)$

$$-\frac{a^2}{24} \qquad \textbf{(17)}$$

Решили уравнение, обнулили секуялрный член $\omega_2=-\frac{a^2}{24}$

> *subs*$\Bigg(\omega_2=-\frac{a^2}{24}, y_2(\tau)=\frac{1}{24}\left(a\left(-3\,a^2\cos(\tau)^3+\frac{16\cos(\tau)^2a^2}{3}+\frac{a^2\cos(\tau)}{3}+\tau\left(a^2+24\,\omega_2\right)\sin(\tau)-\frac{8\,a^2}{3}\right)\right)\Bigg)$

$$y_2(\tau)=\frac{a\left(-3\,a^2\cos(\tau)^3+\frac{16\cos(\tau)^2a^2}{3}+\frac{a^2\cos(\tau)}{3}-\frac{8\,a^2}{3}\right)}{24} \qquad \textbf{(18)}$$

Получили $y_2(\tau)=\frac{a\left(-3\,a^2\cos(\tau)^3+\frac{16\cos(\tau)^2a^2}{3}+\frac{a^2\cos(\tau)}{3}-\frac{8\,a^2}{3}\right)}{24}$

> $y(\mathrm{tau}) := y_0(\mathrm{tau})+y_1(\mathrm{tau})\cdot\mathrm{epsilon}+y_2(\mathrm{tau})\cdot\epsilon^2$

$$y:=\tau\mapsto y_0(\tau)+y_1(\tau)\cdot\epsilon+y_2(\tau)\cdot\epsilon^2 \qquad \textbf{(19)}$$

Подставляем в *решение задачи Коши исходного ДУ полученные коэффициенты*

> *subs*$\Bigg(y_2(\tau)=\frac{a\left(-3\,a^2\cos(\tau)^3+\frac{16\cos(\tau)^2a^2}{3}+\frac{a^2\cos(\tau)}{3}-\frac{8\,a^2}{3}\right)}{24}, y_1(\tau)=\frac{a\sin(\tau)\,(a\cos(\tau)-a)}{3}, y_0(\tau)=a\cos(\tau), y(\mathrm{tau})\Bigg)$

$$a\cos(\tau)+\frac{a\sin(\tau)\,(a\cos(\tau)-a)\,\epsilon}{3}+\frac{a\left(-3a^2\cos(\tau)^3+\frac{16\cos(\tau)^2a^2}{3}+\frac{a^2\cos(\tau)}{3}-\frac{8a^2}{3}\right)\epsilon^2}{24} \quad (20)$$

> $y(\mathrm{tau}) := a\cos(\tau)+\frac{a\sin(\tau)\,(a\cos(\tau)-a)\,\epsilon}{3}+\frac{a\left(-3a^2\cos(\tau)^3+\frac{16\cos(\tau)^2a^2}{3}+\frac{a^2\cos(\tau)}{3}-\frac{8a^2}{3}\right)\epsilon^2}{24}$

$$y:=\tau\mapsto a\cdot\cos(\tau)+\frac{a\cdot\sin(\tau)\cdot(a\cdot\cos(\tau)-a)\cdot\epsilon}{3}+\frac{a\cdot\left(-3\cdot a^2\cdot\cos(\tau)^3+\frac{16\cdot\cos(\tau)^2\cdot a^2}{3}+\frac{a^2\cdot\cos(\tau)}{3}-\frac{8\cdot a^2}{3}\right)\cdot\epsilon^2}{24} \quad (21)$$

ω *принимает вид*

> $\mathrm{omega} := \mathit{subs}\left(\omega_0=1,\ \omega_1=0,\ \omega_2=-\frac{a^2}{24},\ \mathrm{omega}\right)$

$$\omega := -\frac{a^2\epsilon^2}{24}+1 \quad (22)$$

Делаем обратные замены и *получаем* $x(t)$

> $\mathit{subs}(\mathrm{tau}=t\cdot\mathrm{omega},\ \mathrm{epsilon}\cdot y(\mathrm{tau}))$

$$\epsilon\left(a\cos\left(t\left(-\frac{a^2\epsilon^2}{24}+1\right)\right)+\frac{a\sin\left(t\left(-\frac{a^2\epsilon^2}{24}+1\right)\right)\left(a\cos\left(t\left(-\frac{a^2\epsilon^2}{24}+1\right)\right)-a\right)\epsilon}{3}+\frac{1}{24}\left(a\left(-3a^2\cos\left(t\left(-\frac{a^2\epsilon^2}{24}+1\right)\right)^3+\frac{16\cos\left(t\left(-\frac{a^2\epsilon^2}{24}+1\right)\right)^2a^2}{3}+\frac{a^2\cos\left(t\left(-\frac{a^2\epsilon^2}{24}+1\right)\right)}{3}-\frac{8a^2}{3}\right)\epsilon^2\right)\right) \quad (23)$$

> $x(t) := \epsilon\left(a\cos\left(t\left(-\frac{a^2\epsilon^2}{24}+1\right)\right)+\frac{a\sin\left(t\left(-\frac{a^2\epsilon^2}{24}+1\right)\right)\left(a\cos\left(t\left(-\frac{a^2\epsilon^2}{24}+1\right)\right)-a\right)\epsilon}{3}+\frac{1}{24}\left(a\left(\right.\right.\right.$

$$-3\,a^2\cos\left(t\left(-\frac{a^2\,\epsilon^2}{24}+1\right)\right)^3+\frac{16\cos\left(t\left(-\frac{a^2\,\epsilon^2}{24}+1\right)\right)^2 a^2}{3}+\frac{a^2\cos\left(t\left(-\frac{a^2\,\epsilon^2}{24}+1\right)\right)}{3}-\frac{8\,a^2}{3}\Bigg)\epsilon^2\Bigg)\Bigg)$$

$$x := t \mapsto \epsilon\cdot\left(a\cdot\cos\left(t\cdot\left(-\frac{a^2\cdot\epsilon^2}{24}+1\right)\right)+\frac{a\cdot\sin\left(t\cdot\left(-\frac{a^2\cdot\epsilon^2}{24}+1\right)\right)\cdot\left(a\cdot\cos\left(t\cdot\left(-\frac{a^2\cdot\epsilon^2}{24}+1\right)\right)-a\right)\cdot\epsilon}{3}+\frac{1}{24}\left(a\cdot\left(-3\cdot a^2\cdot\cos\left(t\cdot\left(-\frac{a^2\cdot\epsilon^2}{24}+1\right)\right)^3+\frac{16\cdot\cos\left(t\cdot\left(-\frac{a^2\cdot\epsilon^2}{24}+1\right)\right)^2\cdot a^2}{3}+\frac{a^2\cdot\cos\left(t\cdot\left(-\frac{a^2\cdot\epsilon^2}{24}+1\right)\right)}{3}-\frac{8\cdot a^2}{3}\right)\cdot\epsilon^2\right)\right) \qquad \textbf{(24)}$$

Подставлем начальное условие и *парметр* в $x(t)$

> $subs(\ a=1, \text{epsilon}=0.01, x(t)\ )$

$$0.01000001389\cos(0.9999958333\,t)+0.00003333333333\sin(0.9999958333\,t)\,(\cos(0.9999958333\,t)-1)-1.250000000\times10^{-7}\cos(0.9999958333\,t)^3+2.222222222\times10^{-7}\cos(0.9999958333\,t)^2-1.111111111\times10^{-7} \qquad \textbf{(25)}$$

Получили решение исходной задачи Коши

> $x(t) := 0.01000001389\cos(0.9999958333\,t)+0.00003333333333\sin(0.9999958333\,t)\,(\cos(0.9999958333\,t)-1)-1.250000000\times10^{-7}\cos(0.9999958333\,t)^3+2.222222222\times10^{-7}\cos(0.9999958333\,t)^2-1.111111111\times10^{-7}$

$$x := t\mapsto 0.01000001389\cdot\cos(0.9999958333\cdot t)+0.00003333333333\cdot\sin(0.9999958333\cdot t)\cdot(\cos(0.9999958333\cdot t)-1)-1.250000000\times10^{-7}\cdot\cos(0.9999958333\cdot t)^3+2.222222222\times10^{-7}\cdot\cos(0.9999958333\cdot t)^2-1.111111111\times10^{-7} \qquad \textbf{(26)}$$

> $dx(t) := \frac{d}{d\,t}(x(t))$

$$dx := t\to\frac{d}{dt}\,x(t) \qquad \textbf{(27)}$$

> $dx(t)$

$$-0.009999972223\sin(0.9999958333\,t) \qquad \textbf{(28)}$$

$+ 0.00003333319444 \cos(0.9999958333\, t)\, (\cos(0.9999958333\, t) - 1)$

$- 0.00003333319444 \sin(0.9999958333\, t)^2 + 3.749984375$

$\times 10^{-7} \cos(0.9999958333\, t)^2 \sin(0.9999958333\, t) - 4.444425926$

$\times 10^{-7} \cos(0.9999958333\, t) \sin(0.9999958333\, t)$

> $g(t) := \frac{d^2}{d\,t^2}(x(t))$

$$g := t \to \frac{d^2}{dt^2}\, x(t) \quad \textbf{(29)}$$

> $g(t)$

$$-0.009999930556 \cos(0.9999958333\, t) \quad \textbf{(30)}$$

$- 0.00003333305555 \sin(0.9999958333\, t)\, (\cos(0.9999958333\, t) - 1)$

$- 0.00009999916666 \cos(0.9999958333\, t) \sin(0.9999958333\, t) - 7.499937501$

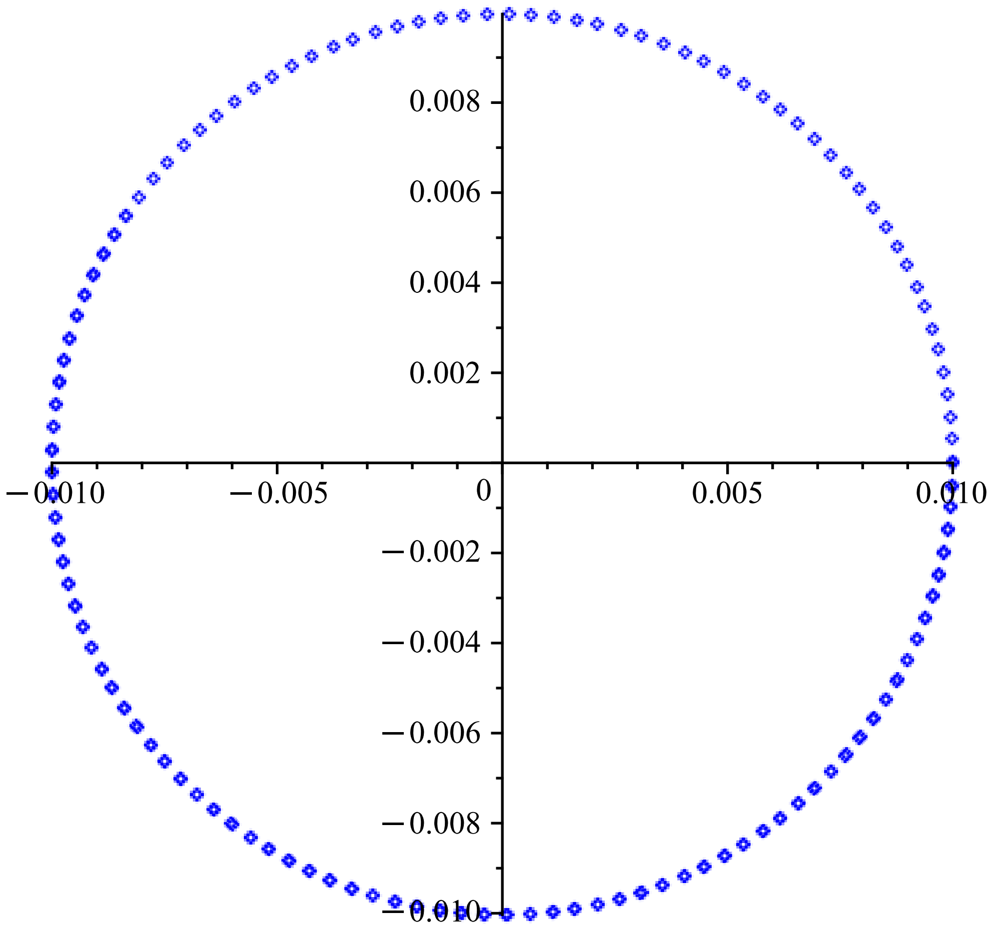
$\times 10^{-7} \cos(0.9999958333\, t) \sin(0.9999958333\, t)^2 + 3.749968750$

$\times 10^{-7} \cos(0.9999958333\, t)^3 + 4.444407407 \times 10^{-7} \sin(0.9999958333\, t)^2 - 4.444407407$

$\times 10^{-7} \cos(0.9999958333\, t)^2$

9. *Строим две сравнительные фазовые кривые на плоскости переменных*
x, x' ,
соответствующие аналитическому (*приближенному*) *решению* и *строгому решению задачи Коши*
(*полученному на основе численного счета*).
На промежутке $[0, 10]$ *аналитическое решение на фазовой плоскости выглядит так* :

> $plot([x(t), dx(t), t = 0..10], style = point, color = blue)$



Найдём C , удовлетворяющий начальным условиям $x = 0.01$, $x' = 0$

> $x(0)$

$$0.009999999999 \tag{31}$$

> $subs\left(x = 0.01, y = 0, 2 \cdot \ln(1 - y) + 2 \cdot y - \mathrm{C} = x^2\right)$

$$2\ln(1) - C = 0.0001 \tag{32}$$

> $solve(2\ln(1) - C = 0.0001, C)$

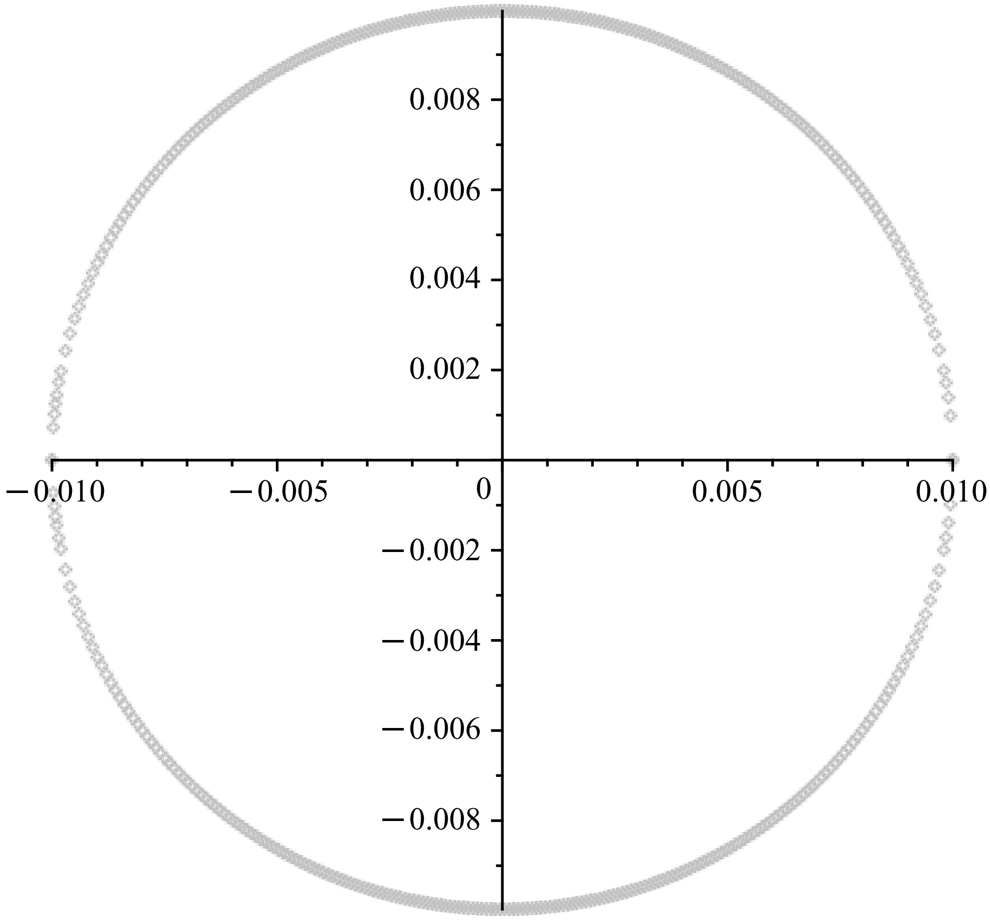
$$-0.0001000000000 \tag{33}$$

>

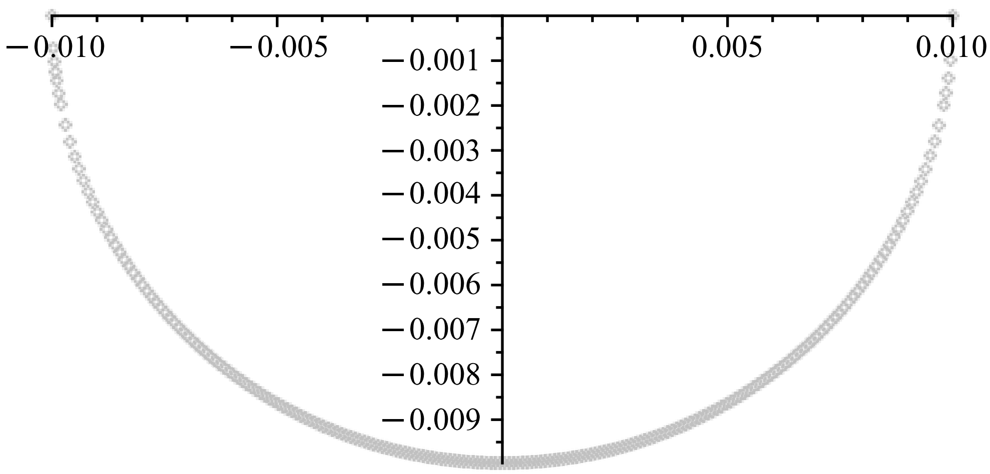
$$C \tag{34}$$

Строим график для строго решения

> $plot\left(\left[x, solve\left(2 \cdot \ln(1 - y) + 2 \cdot y + 0.0001 = x^2, y\right), x = -0.01 ..0.01\right], style = point, color = grey\right)$

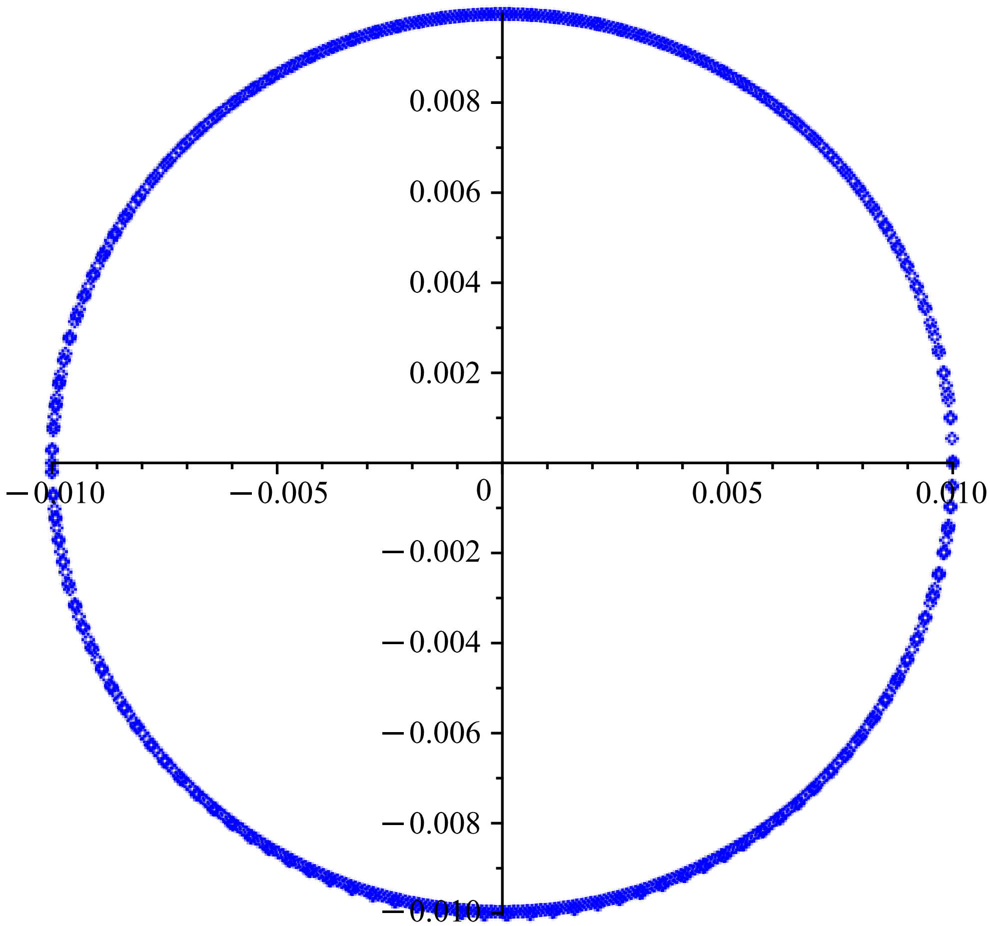


> $plot([x, -solve(\mathrm{sqrt}(2 \cdot \ln(1-y) + 2 \cdot y + 0.0001) = x, y), x = -0.01 .. 0.01], style = point, color = grey)$



Наложим полученные фазовые кривые друг на друга

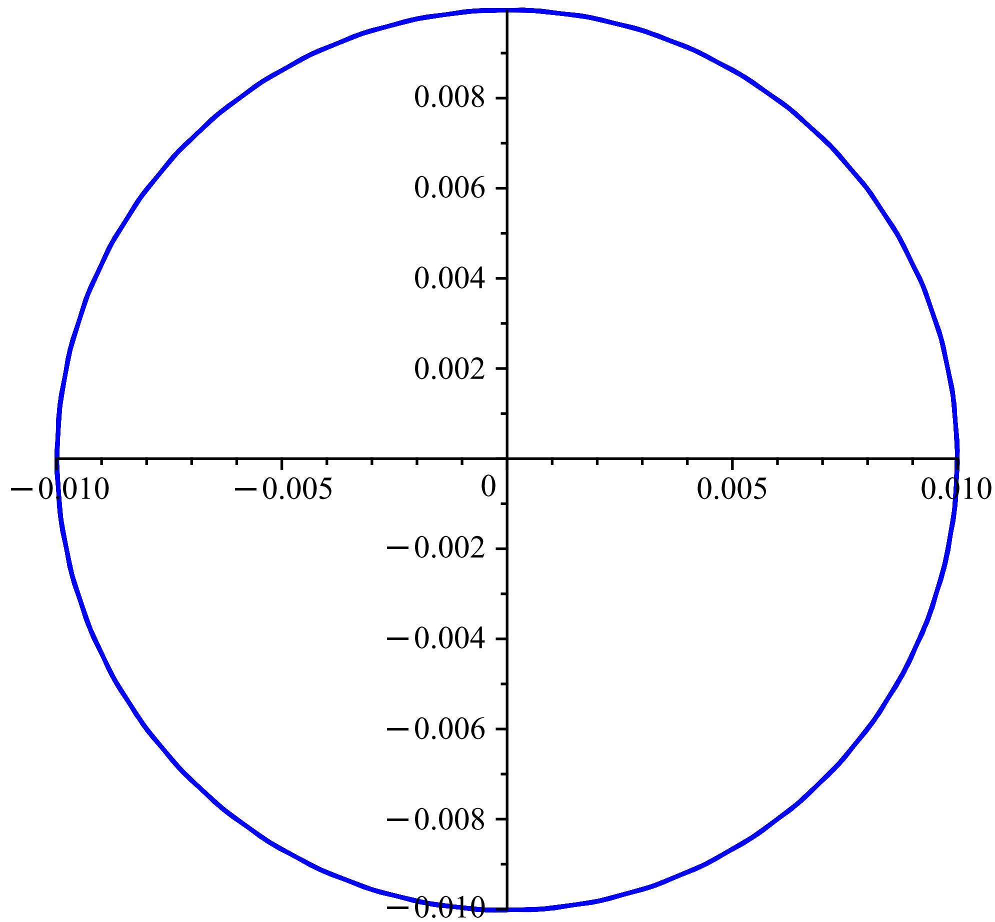
$$> plot\Big(\big[0.01000001389\cdot\cos(0.9999958333\cdot t) + 0.00003333333333\cdot\sin(0.9999958333\cdot t)\cdot(\cos(0.9999958333\cdot t) - 1) - 1.250000000\times10^{-7}\cdot\cos(0.9999958333\cdot t)^3 + 2.222222222\times10^{-7}\cdot\cos(0.9999958333\cdot t)^2 - 1.111111111\times10^{-7},\ -0.009999972223\sin(0.9999958333\,t) + 0.00003333319444\cos(0.9999958333\,t)\,(\cos(0.9999958333\,t) - 1) - 0.00003333319444\sin(0.9999958333\,t)^2 + 3.749984375\times10^{-7}\cos(0.9999958333\,t)^2\sin(0.9999958333\,t) - 4.444425926\times10^{-7}\cos(0.9999958333\,t)\sin(0.9999958333\,t),\ t=0..10\big],\ style=point,\ color=blue\Big)$$



Итак получили ,
что метод Лиштеда даёт хорошую точность в *малой окрестности устойчивого положения равновесия.*

На интервале $\left[0, \frac{1}{\text{epsilon}}\right]$ *график аналитиечского решение следующий* :

> $plot([x(t), dx(t), t = 0..100], style = line, color = blue)$



Значения, которые принимает x' строго решения при x = 0

> $solve(\mathrm{sqrt}(2\cdot\ln(1-y)+2\cdot y+0.0001)=0, y)$

$$0.009966694482, -0.01003336107 \qquad \mathbf{(35)}$$

Время, когда аналитический x(t) = 0

> $solve\big(0.01000001389\cdot\cos(0.9999958333\cdot t)+0.00003333333333\cdot\sin(0.9999958333\cdot t)\cdot(\cos(0.9999958333\cdot t)-1)-1.250000000\times10^{-7}\cdot\cos(0.9999958333\cdot t)^3+2.222222222\times10^{-7}\cdot\cos(0.9999958333\cdot t)^2-1.111111111\times10^{-7}=0, t\big)$

$$1.567469542, -0.4892202326+6.340736139\,\mathrm{I}, -2.649052181+6.335390870\,\mathrm{I}, -1.574136202, -2.649052181-6.335390870\,\mathrm{I}, -0.4892202326-6.340736139\,\mathrm{I} \qquad \mathbf{(36)}$$

$x(1.567469542)$

$$-4.5666\times10^{-12} \qquad \mathbf{(37)}$$

> $x(4.7)$

$$-0.00009044935516 \qquad \mathbf{(38)}$$

> $k(t) := -0.009999972223\sin(0.9999958333\,t) + 0.00003333319444\cos(0.9999958333\,t)\,(\cos(0.9999958333\,t)-1) - 0.00003333319444\sin(0.9999958333\,t)^2 + 3.749984375$

$\times 10^{-7} \cos(0.9999958333\, t)^2 \sin(0.9999958333\, t) - 4.444425926$
$\times 10^{-7} \cos(0.9999958333\, t) \sin(0.9999958333\, t)$

$$k := t \mapsto -0.009999972223 \cdot \sin(0.9999958333 \cdot t) + 0.00003333319444 \cdot \cos(0.9999958333 \cdot t) \cdot (\cos(0.9999958333 \cdot t) - 1) - 0.00003333319444 \cdot \sin(0.9999958333 \cdot t)^2 + 3.749984375 \times 10^{-7} \cdot \cos(0.9999958333 \cdot t)^2 \cdot \sin(0.9999958333 \cdot t) - 4.444425926 \times 10^{-7} \cdot \cos(0.9999958333 \cdot t) \cdot \sin(0.9999958333 \cdot t) \quad \textbf{(39)}$$

> $k(1.567469542)$

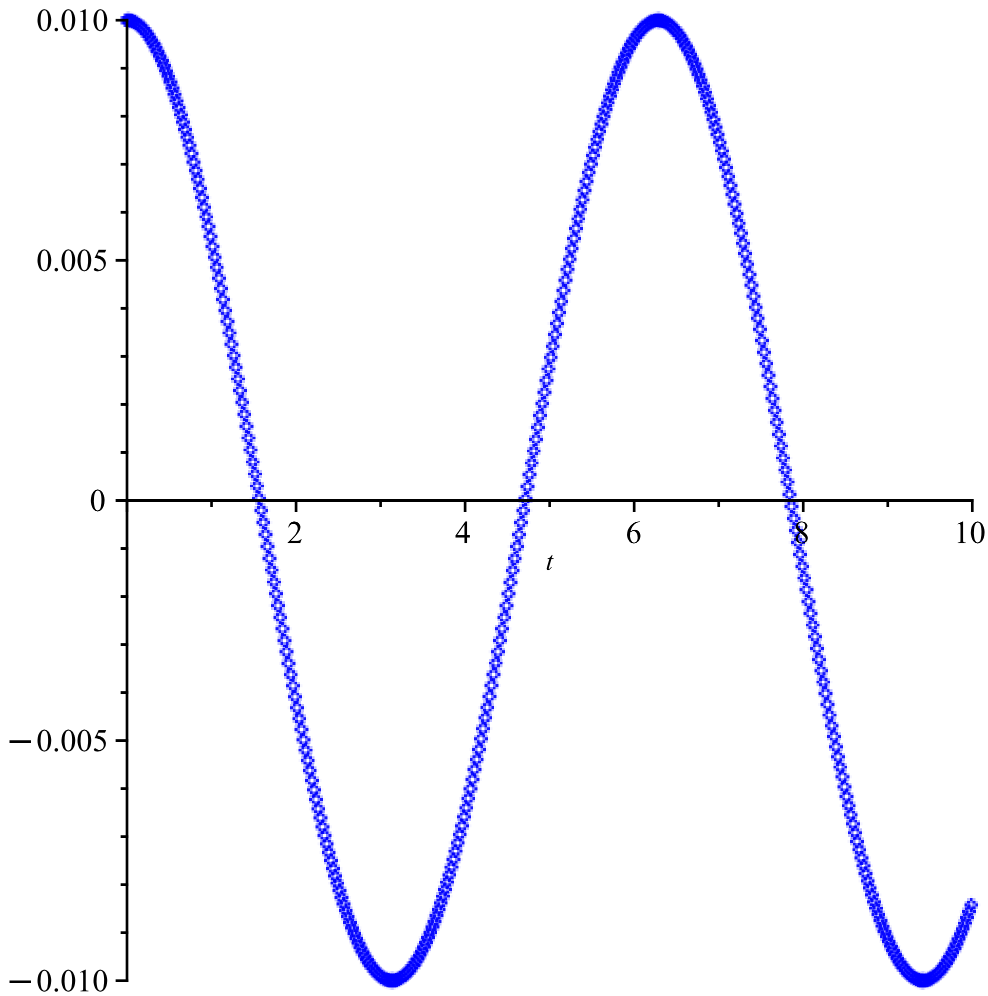
$$-0.01003336171 \quad \textbf{(40)}$$

> $k(4.7)$

$$0.009966287478 \quad \textbf{(41)}$$

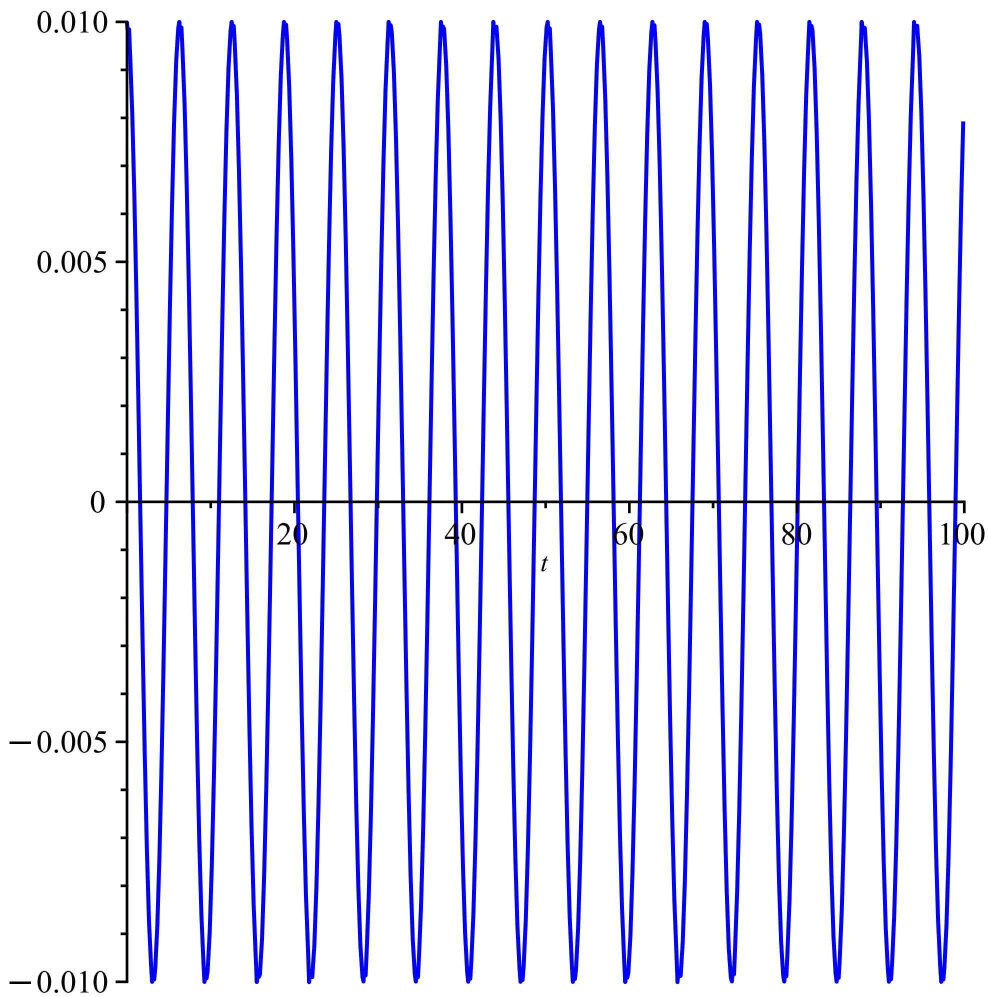
Теперь построим график аналитического решения $x(t)$ *на интервале* $[0, 10]$

> $plot(x(t), t = 0 ..10, style = point, color = blue)$



Теперь построим график аналитического решения $x(t)$ *на интервале* $\left[0, \frac{1}{\text{epsilon}}\right] = [0, 100]$

> $plot(x(t), t = 0 ..100, style = line, color = blue)$



Теперь решателями Maple попытаемся найти решение задачи Коши исходного ДУ. Для удобства примем $x(t)$ за $z(t)$

> $\frac{d^2}{dt^2}(z(t)) + z(t) = z(t)\cdot\frac{d}{dt}(z(t))$

>

> $solve(2\cdot\ln(1-y) + 2\cdot y + 0.0001 = x^2, y)$

$$\mathrm{LambertW}\left(-1.\,e^{0.5000000000\,x^2 - 1.000050000}\right) + 1. \quad \mathbf{(42)}$$

> $dsolve\left(\left\{\frac{d}{dt}(z(t)) = \mathrm{LambertW}\left(-1.\,e^{0.5000000000\cdot z(t)^2 - 1.000050000}\right) + 1, z(0) = 0\right\}, z(t)\right)$

$$z(t) = RootOf\left(t - \left(\int_0^{\_Z} \frac{1}{\mathrm{LambertW}\left(-e^{\frac{\_a^2}{2} - \frac{20001}{20000}}\right) + 1}\, d\_a\right)\right) \quad \mathbf{(43)}$$

>

Как можно увидеть оно не выражается в элементарных функциях, то есть построить график строго решения $x(t)$ не получается

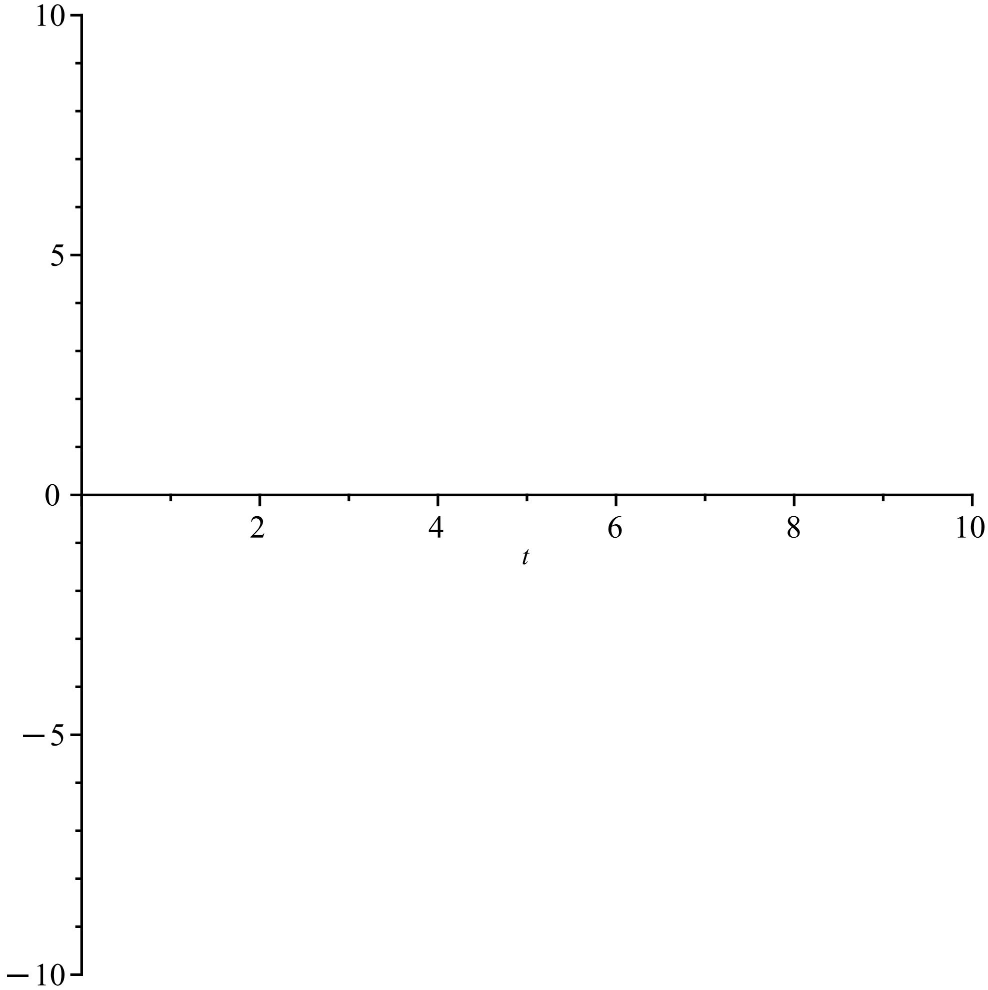
> $dsolve\left(\left\{\frac{d^2}{dt^2}(z(t)) + z(t) = z(t)\cdot\frac{d}{dt}(z(t)),\ z(0) = 0.01, D(z)(0) = 0\right\}, z(t)\right)$

$$z(t) = RootOf\left(\int_{\_z}^{\frac{1}{100}} \frac{1}{\mathrm{LambertW}\left(-\frac{e^{\frac{19999}{20000}}\, e^{\frac{\_a^2}{2}-1}}{e}\right)+1}\, d\_a + t\right) \quad \mathbf{(44)}$$

У *меня* и *Maple не получилось построить* $x(t)$

> $plot(z(t), t = 0..10, style = point, color = grey)$

Warning, expecting only range variable t in expression z(t) to be plotted but found name z



Итог.

Для решения задачи Коши данного ДУ с *нелинейной частью применён метод Линштеда.*

Он позволил получить решение задачи в *окрестности положения устойчивого равновесия.*

Построены фазовые кривые для строго и *аналитических решений на плоскости* x, x'.

Фазовые кривые при наложении друг на друга практически совпали.

>