

О влиянии вероятности дефолта на оптимальную стратегию инвестирования по логарифмическому критерию

Студент - Каменский Артемий Михайлович
Научный руководитель - Игнатов Алексей Николаевич,
доцент каф.804, к.ф.-м.н.

Институт №8 "Компьютерные науки и прикладная математика"
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Июнь 2024

- 1 Аналитический вид критериальной функции
- 2 Свойства критериальной функции $\Phi_L(u_1)$
- 3 Решение задачи оптимизации портфеля ценных бумаг
- 4 Моделирование капитала через N лет инвестирования
- 5 Основные результаты работы

При решении задачи по формированию оптимального портфеля ценных бумаг могут применяться различные критерии оптимальности. Самый очевидный - критерий в форме средней доходности приводит к так называемому «биржевому парадоксу», который заключается в том, что среднее значение капитала стремится в бесконечность, в то время как вероятность разорения стремится к 1. Для избежания этого парадокса можно в качестве критерия, например, рассматривать МО логарифма капитала [Кан Ю.С., Кибзун А.И. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. — М.: Физматлит, 2008.].

Портфель ценных бумаг инвестора

Будем формировать портфель ЦБ из:

купонной облигации, имеющей доходность

X_0	-1	b
P	p_0	$1 - p_0$

акции, доходность которой $X_1 \sim R[-1, 1 + 2m]$.

СВ X_0 и X_1 предполагаются независимыми.

В предположении, что начальный капитал равен 1, по окончании горизонта инвестирования капитал инвестора составит

$$\Phi(u, X) = 1 + u_0 X_0 + u_1 X_1. \quad (1)$$

$$\text{где } u \stackrel{\text{def}}{=} (u_0, u_1)^T, X \stackrel{\text{def}}{=} (X_0, X_1)^T. \quad (2)$$

Постановка задачи

Пользуясь логарифмическим критерием, получим критериальную функцию:

$$\Phi_0(u) = M[\ln(\Phi(u, X))]. \quad (3)$$

Считаем, что весь капитал инвестируется целиком. Множество допустимых стратегий имеет вид:

$$U_\epsilon = \{(u_0, u_1)^T : u_0 + u_1 = 1, u_0 \geq 0, u_1 \geq \epsilon > 0\}. \quad (4)$$

Здесь и далее предполагаем $\epsilon = 0.001$.

Таким образом, формальная постановка задачи имеет вид

$$u^* = \arg \max_{u \in U_\epsilon} \Phi_0(u). \quad (5)$$

- 1 Аналитический вид критериальной функции
- 2 Свойства критериальной функции $\Phi_L(u_1)$
- 3 Решение задачи оптимизации портфеля ценных бумаг
- 4 Моделирование капитала через N лет инвестирования
- 5 Основные результаты работы

Аналитический вид критериальной функции

В силу специфики множества допустимых стратегий имеет место

$$u_0 = 1 - u_1.$$

Будем оптимизировать функцию

$$\Phi_L(u_1) = M[\ln(1 + (1 - u_1)X_0 + u_1X_1)]. \quad (6)$$

Для поиска максимума критериальной функции отыщем её аналитический вид, получение которого связано с использованием формулы полного математического ожидания:

$$\begin{aligned} M[\ln(1 + (1 - u_1)X_0 + u_1X_1)] = \\ M[\ln(1 + (1 - u_1)X_0 + u_1X_1)|X_0 = -1]P(X_0 = -1) + \\ + M[\ln(1 + (1 - u_1)X_0 + u_1X_1)|X_0 = b]P(X_0 = b). \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема 1

Критериальная функция $\Phi_L(u_1)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\Phi_L(u_1) = & \left(\ln(u_1) + \ln(2) + \ln(m+1) - 1 \right) \cdot P_0 + \\ & + \left[(1+2m) \ln \left(1 + b - bu_1 + u_1(1+2m) \right) - (1+2m) + \right. \\ & + \frac{1+b-bu_1}{u_1} \ln \left(1 + b - bu_1 + u_1(1+2m) \right) + \ln(1+b) + \ln(1-u_1) - 1 - \\ & \left. - \frac{1+b-bu_1}{u_1} \left(\ln(1+b) + \ln(1-u_1) \right) \right] \cdot \frac{1}{2+2m} \cdot (1-P_0).\end{aligned}$$

График критериальной функции $\Phi_L(u_1)$

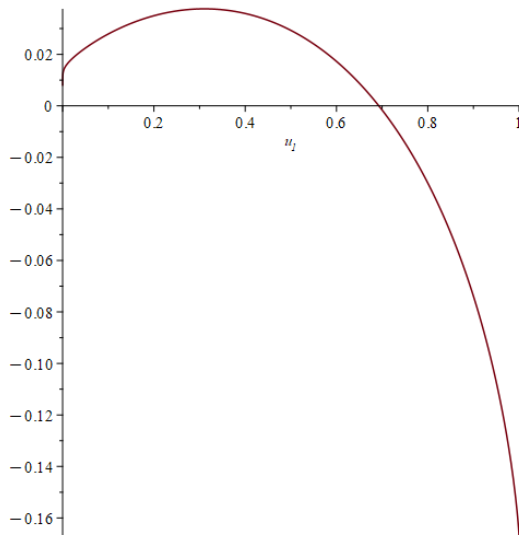


Рис.: График $\Phi_L(u_1)$ при $m = 0.15$, $b = 0.02$ и $p_0 = 0.001$

- 1 Аналитический вид критериальной функции
- 2 Свойства критериальной функции $\Phi_L(u_1)$**
- 3 Решение задачи оптимизации портфеля ценных бумаг
- 4 Моделирование капитала через N лет инвестирования
- 5 Основные результаты работы

Свойства критериальной функции $\Phi_L(u_1)$

Лемма 1

Критериальная функция $\Phi_L(u_1)$ является непрерывной на отрезке $[\epsilon, 1]$.

Лемма 2

Критериальная функция $\Phi_0(u)$ является вогнутой по u на множестве U_ϵ .

Следствие (Леммы 2)

Критериальная функция $\Phi_L(u_1)$ является вогнутой по u_1 на отрезке $[\epsilon, 1]$.

- 1 Аналитический вид критериальной функции
- 2 Свойства критериальной функции $\Phi_L(u_1)$
- 3 Решение задачи оптимизации портфеля ценных бумаг**
- 4 Моделирование капитала через N лет инвестирования
- 5 Основные результаты работы

Решение задачи оптимизации портфеля ценных бумаг

Найдём u_1^* методом дихотомии.

m	p_0	b	u_1^*
0.1	0.001	0.01	0.237
0.1	0.001	0.02	0.214
0.1	0.001	0.035	0.181
0.1	0.001	0.048	0.153
0.1	0.002	0.03	0.204
0.15	0.002	0.03	0.298

Таблица: Численное решение задачи оптимизации портфеля ЦБ

m	p_0	b	u_1^*
0.2	0.002	0.03	0.38
0.25	0.002	0.03	0.451
0.15	0.001	0.03	0.29
0.15	0.002	0.03	0.298
0.15	0.003	0.03	0.305
0.15	0.005	0.03	0.319

Таблица: Численное решение задачи оптимизации портфеля ЦБ. Продолжение

- 1 Аналитический вид критериальной функции
- 2 Свойства критериальной функции $\Phi_L(u_1)$
- 3 Решение задачи оптимизации портфеля ценных бумаг
- 4 Моделирование капитала через N лет инвестирования
- 5 Основные результаты работы

Моделирование капитала через N лет инвестирования

По прошествии i лет капитал вычисляется следующим образом:

$$K_{i+1} = K_i \cdot (1 + (1 - u_1)X_0 + u_1X_1), \quad i = 1..N, \quad \text{где } K_1 = 1.$$

- 1 Для моделирования равномерного распределения $\eta \sim R[0, 1]$ и $\xi \sim R[a, b]$ воспользуемся генератором из библиотеки `np.random` в `python`.
- 2 Моделировать дискретную СВ X_0 будем через $\eta \sim R[0, 1]$ следующим образом:

$$\zeta = \begin{cases} b & \eta > p_0 \\ -1 & \eta \leq p_0 \end{cases}$$

Моделирование капитала через 100 лет инвестирования

Полагая $N = 100$ смоделируем X_0 и X_1 . Повторим операцию 5000 раз. Получим 5000 значений капитала $K = (K_1^N, K_2^N \dots K_M^N)$.

Минимальное значение: K_{\min}

Максимальное значение: K_{\max}

Среднее значение: K_{mean}

Медиана: K_{median}

k-й процентиль: K_k

Среднеквадратическое отклонение: σ_K

Частота получения убытков: P_{lose}

Моделирование капитала через 100 лет инвестирования

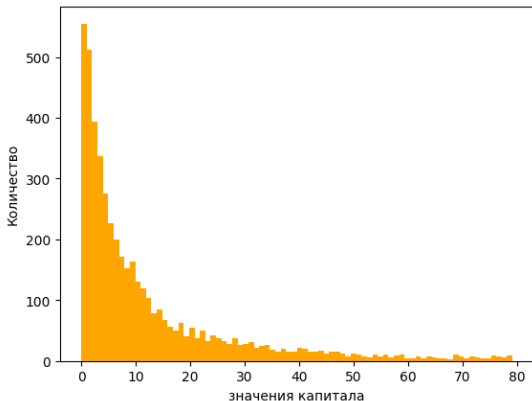


Рис.: Диаграмма частот первых 95% значений капитала для случая
($m = 0.1, p_0 = 0.001, b = 0.01, u_1^* = 0.237$)

K_{min}	0.000486
K_{mean}	21.114
$K_{mediana}$	6.92
σ_K	57.309
K_{max}	1668.515
$K_{5\%}$	0.434
$K_{95\%}$	79.553
P_{lose}	0.112

Таблица: Результаты статмоделирования капитала через 100 лет инвестирования для параметров
($m = 0.1, p_0 = 0.001, b = 0.01, u_1^* = 0.237$)

Моделирование капитала через 100 лет инвестирования

$m / p_0 / b / u_1^*$	K_{min}	$K_{mean}/K_{mediana}$	σ_K	K_{max}
0.1 / 0.001 / 0.02 / 0.214	0.001	36.691 / 14.805	80.281	2046.999
0.1 / 0.001 / 0.035 / 0.181	0.003	91.715 / 48.566	146.963	3010.137
0.1 / 0.001 / 0.048 / 0.153	0.009	218.227 / 140.35	267.932	4449.725
0.1 / 0.002 / 0.03 / 0.204	0.001	68.435 / 28.594	141.518	3425.245
0.15 / 0.002 / 0.03 / 0.298	0.003	550.637 / 83.762	2691.286	104355.532
0.2 / 0.002 / 0.03 / 0.38	0.004	8254.558 / 356.246	79268.813	3883506.668
0.15 / 0.001 / 0.03 / 0.29	0.006	524.401 / 93.943	2322.554	86630.314
0.15 / 0.003 / 0.03 / 0.305	0.001	553.725 / 74.109	2898.021	122584.019
0.15 / 0.005 / 0.03 / 0.319	0.0002	562.97 / 56.232	3546.249	168259.195

Таблица: Результаты стаомоделирования капитала через 100 лет инвестирования

Моделирование капитала через 100 лет инвестирования

$m / p_0 / b / u_1^*$	$K_{5\%}/K_{95\%}$	P_{lose}
0.1 / 0.001 / 0.02/ 0.214	1.175 / 134.244	0.042
0.1 / 0.001 / 0.035 / 0.181	5.006 / 310.408	0.01
0.1 / 0.001 / 0.048 / 0.153	16.98 / 668.008	0.005
0.1 / 0.002 / 0.03 / 0.204	1.717 / 254.965	0.033
0.15 / 0.002 / 0.03 / 0.298	2.344 / 2027.473	0.026
0.2 / 0.002 / 0.03 / 0.38	3.89 / 21911.296	0.017
0.15 / 0.001 / 0.03 / 0.29	3.654 / 1943.086	0.013
0.15 / 0.003 / 0.03 / 0.305	1.725 / 2027.816	0.033
0.15 / 0.005 / 0.03 / 0.319	0.85 / 1998.688	0.054

Таблица: Результаты стаомоделирования капитала через 100 лет инвестирования. Продолжение

- 1 Аналитический вид критериальной функции
- 2 Свойства критериальной функции $\Phi_L(u_1)$
- 3 Решение задачи оптимизации портфеля ценных бумаг
- 4 Моделирование капитала через N лет инвестирования
- 5 Основные результаты работы

- 1 Найдены аналитический вид критериальной функции в задаче инвестирования в облигацию с учётом вероятности дефолта и акцию. Доказана непрерывность и вогнутость данной функции. Разработано программное обеспечение поиска оптимального решения с использованием метода дихотомии.
- 2 Также была сформулирована концепция проверки качества логарифмической стратегии для капитала с продолжительным горизонтом инвестирования.