АРХИВ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ПО МАТЕМАТИКЕ В РОССИИ

УДК 51(091)

О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВЕЛИЧИНАХ В ПРЕПОДАВАНИИ И В НАУКЕ[*]

Н. Н. Лузин

Публикуется письмо выдающегося математика Н. Н. Лузина к М. Я. Выгодскому по поводу его учебника “Основы исчисления бесконечно малых”.

Ключевые слова: Н. Н. Лузин, математический анализ, бесконечно малая величина.

Ниже публикуется впервые письмо выдающегося русского математика акад. Николая Николаевича Лузина проф. М. Я. Выгодскому в связи с получением от него учебника “Основы исчисления бесконечно малых” (1931 г.). Этот учебник был построен на принципах, в корне отличавшихся от общепринятых тогда (да и в настоящее время): в основу преподавания математического анализа была положена не теория пределов, а постоянные бесконечно малые величины[**].

Письмо хранится в Государственном архиве Москвы[***] вместе с двумя другими письмами того же автора. Оно не имеет ни даты, ни подписи и, кажется, не окончено: вероятно, оно было в таком виде передано адресату лично. Дату написания

[*] Приведенное в этой рубрике письмо Н. Н. Лузина и предисловие И. Н. Бронштейна воспроизводятся в авторской редакции. Впервые этот материал опубликован в Сборнике научно-методических статей по математике (вып. 7. — М.: ВШ, 1978. С. 127–136).

[**] См. доклад М. Я. Выгодского “О принципах преподавания анализа бесконечно малых во втузе” (1930), воспроизведенный в вып. 1 сборника научно-методических статей по математике, 1971, с. 54–67.

[***] Личный фонд М. Я. Выгодского.

письма следует отнести между 1931 (выход в свет книги М. Я. Выгодского) и 1933 г. (во втором письме Н. Н. Лузина от 1933 г. имеется ссылка на это письмо).

Читателю, несомненно, будет интересно познакомиться с взглядами такого замечательного ученого и педагога, каким был Лузин, на вопросы обоснования и преподавания математического анализа. Написанное в своеобразной увлекательной манере письмо дает возможность читателю непосредственно ощутить и личность автора, и “аромат эпохи” математической жизни в Московском университете в начале нашего столетия.

И. Н. Бронштейн

Глубокоуважаемый Марк Яковлевич, позвольте искренне поблагодарить Вас за Ваш чудесный и ценный подарок: за присылку мне Вашего курса Анализа. Я давно слышал о его появлении и слышал о страстных спорах, возбуждаемых им. По-видимому совсем нет, или есть очень мало лиц, спокойно к нему относящихся. Всякий, знакомящийся с ним, становится или горячим его поклонником, или столь же страстным его противником. И это меня не удивляет ничуть, так как Вы мужественно коснулись самой болезненной точки Анализа вообще, современного — в особенности, метнув камень в “осиное гнездо”.

Чтение же Вашей книги меня окончательно убедило, что иначе и быть не могло и что, действительно, все категории лиц, знакомых с основами Анализа, должны чувствительно реагировать на нее.

Много времени прошло с момента её появления, и большинство успело так или иначе высказаться, и Вы, вероятно, знаете суждения о ней. Для Вас не ново, что, в то время как педагогические круги в своем большинстве чрезвычайно благоприятно встретили её появление[1*], отношение теоретических кругов, опять в их большинстве, было сдержанным. В Москве я слышал разговоры о возобновлении в науке теории флогистона или упреки в декадентстве. В Ленинграде, воспитанном более однообразно, говорили о том, что Дарвин начертил путь эволюции человека, описав его путь развития от ходьбы на четвереньках до вертикального положения, и что (следует) стремиться обратить этот процесс в математике... Короче, почти все теоретики высказываются за неизбежное базирование Анализа на теории пределов и лишь, снисходя к “человеческой слабости”, допускают, в виде возможности, краткий этап знакомства с Анализом без теории пределов, лишь для самых начинающих, с тем непременным условием, чтобы “уж потом всё было как следует...”.

Мне кажется, что то, что я написал, более или менее верно в отношении отзывов теоретических кругов. Ваше изложение встречает в них или чисто отрицательное отношение, или снисходительно допускается в виде педагогического приема. Попыток иного отношения я не встречал.

После изучения большей половины Вашей книги мне также захотелось высказаться. С этой целью я избираю форму письма к Вам. Я более люблю это: в письме можно остановиться и подумать, что затруднительно в жи-

[*] См. примечания в конце статьи.

вой речи. И потом, это более соответствует моему темпераменту. Извините меня, если письмо выйдет длинным. В такого рода вещах лучше быть длинным, но зато понятным до конца. Вероятно, это письмо я буду писать много дней, с перерывами и под влиянием разных состояний ума.

Конечно, я мог бы избавить Вас от чтения моего письма, просто присоединившись к той или иной группировке высказывающихся лиц. Но для меня затруднительно это, так как ни одна из них не отвечает моим мыслям. В противоположность моим коллегам, я думаю, что попытка пересмотра идеи бесконечно малого как переменного конечного количества есть совершенно научная попытка и что предложение заменить переменные бесконечно малые стационарными вовсе не имеет лишь одно чисто педагогическое значение, но имеет за собою нечто неизмеримо более глубокое, и что для нее в современном Анализе растут корни. Короче, если бы была нужна краткая формула, я бы её формулировал в виде положения: "современная наука не имеет возражений против этого рода идей".

Вот об этом-то я и хотел бы более пространно написать Вам. Сначала лишь замечу, что идея актуально малого имеет какие-то бесконечно глубокие корни в уме. Когда ум *начинает*[2] свое знакомство с анализом, словом, когда для него весна, он начинает всегда именно с актуально малых, которые можно называть "элементами" количеств. Но постепенно, шаг за шагом, по мере накопления у него знаний, теорий, пресыщения к абстракциям, усталости, ум начинает забывать свои первоначальные стремления, улыбаться их "ребячеству". Короче, когда приходит осень ума, он дает себя убедить в единственности правильного обоснования при помощи пределов.

Вашу книгу иногда обвиняют в излишней страстности, едкости, желчности. Для меня это так понятно, что, по-моему, иначе, в первых поисках, и быть не может. То, что считают желчностью, это есть просто отголосок сильного интеллектуального страдания и боли, и чем страдание сильнее, тем лучше, потому что оно есть источник творчества.

Для того, чтобы Вы не думали, что я стараюсь быть приятным для Вас, я расскажу Вам кое-что из своих личных воспоминаний: Вы увидите, что я кое-что понимаю в этих вещах, раз до сих пор сохранил столь живые воспоминания, навсегда врезавшиеся мне в память. Обычно такого рода страдания всегда тщательно скрывают и очень неохотно говорят другому о них, и то лишь в виде намеков. Не знаю, почему это так, но действительно приходится делать над собою усилие. Однако его нужно сделать.

Я вспоминаю себя студентом 2-го курса[3]. Обстановка была такая: в стороне стоял Л. К. Лахтин с его диктованием основ анализа. На его диктанты я не ходил: зачем, раз можно купить или занять для прочтения его литографированные записки? Тон был задан Болеславом Корнелиевичем Млодзеевским, пылким и властным геометром европейского масштаба и точным строгим Д. Ф. Егоровым, лишь начавшим свое вхождение в жизнь Университета. Л. К. Лахтин держался от них в стороне, Б. К. Млодзеевский властвовал, но считался с точно и строго работающим умом Д. Ф. Егорова.

Я начинал свое знакомство с анализом по беспорядочно и жадно читаемому разнообразию книг. Всё зависело от случая: есть или нет такой-то книги в библиотеке, и как она внешне выглядит, солидно или так себе. В голове была каша, хаос, обрывки нитей, срастающихся случайно. Руководства не было, контакта с профессурой никакого. Просто попал в воду и барахтался, должно быть, как умел, чтобы не утонуть. И кто знает, не лишило ли бы систематическое руководство того богатства и многоцветности, которое както сознаю в себе, и не придало ли бы оно, если бы было в действительности, однотонный колорит и скуку деятельности ума? Но не в этом дело.

Главное в том, что *я не знал ни Goursat'а, ни Jordan'а*, а воспитывался на старинных курсах Анализа: Lacroix и других[4]. Самым новым для меня был 7-томный курс Laurent'а ("Traite d' Analyse"). В нем автор гордился, что он — ученик Cauchy. Теория множеств и теория функций действительного переменного пришли ко мне лишь в момент окончания Университета, вернее, при стадии оставления при Университете. Такое старинное воспитание было обусловлено *чистою случайностью*, так как когда я был в Университете (1901–1908), курс Goursat был уже в полном ходу за границей и у нас в кругах, близких к профессорским; я же его не знал, и читал все "автодидактом".

Такое "старинное" воспитание, вернее, самовоспитание, которое я получил, и обусловливает мое своеобразие и свободу в отношении математических взглядов. Во всяком случае, когда я проходил Университет, у меня не было дисциплинирующих курсов Д. Ф. Егорова, ни Goursat, ни логически непреклонного Vallee-Poussin'а; был же хаос, может быть и творческого характера. Теория пределов вошла в меня механически, грубо, не утонченно, а скорее полицейски принудительно, по формуле: "замолчи, я тебе говорю!" Вообще, я люблю старинные курсы, где есть всё, что относится к делу, и где, еще больше, есть то, что прямо не относится к делу, но что важно для проникновения наукой. Современные же курсы напоминают мне французские канцелярии, где могут и накричать, если позабыл снять шляпу, и отправить с формальной отпиской. И в моих стараниях по Грэнвилю я невольно брал палитру с красками и раскрашивал Теорию пределов[5], живо помня, как угнетающе действовала на меня начавшая входить Теория пределов, нерасцвеченная ничем. Я живо помню состояние моих идей по Анализу бесконечно малых.

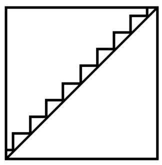
Я был на втором курсе. На заявления профессоров о том, что $\dfrac{dx}{dy}$ есть предел отношения, я думал: "Какая скука! Чудно и непонятно. Нет! Не надуют: просто отношение бесконечно малых, и только". Живо помню, как с величайшей болью я воспринимал кривую Weierstrass'а без касательной[6], не верил, пытался опровергнуть и десятки раз перечитывал доказательство Duhamel'а о том, что всякая непрерывная функция дифференцируема. Эта боль, действительно почти нестерпимая, при мысли о кривой Weierstrass'а понятна: ведь если $y(x)$ есть функция Weirstrass'а, то она непрерывна, и раз существует dx, то должен существовать и dy. И однако *нет* $\frac{dy}{dx}$! Почему? Короче, глубоко естественная идея актуально малых у меня начала подтачиваться кривой Weierstrass'а и *теория пределов в меня вошла как патология функций.*

Борьба с кривой Weierstrass'а была для меня родом кошмара. Я ею грезил во снах. Теперь я понимаю, что она была для меня чудовищем, с которым я нелепо боролся. И не будучи в состоянии победить, я предпринял обходное движение: я вознамерился показать, что кривая Weierstrass'а не диво и что с помощью элементарных построений можно сделать то же самое и притом СОХРАНЯЯ ИДЕЮ СТАЦИОНАРНОГО БЕСКОНЕЧНО МАЛОГО.

Собравшись с духом (я не любил соприкасаться с профессорами: будучи робким — просто боялся их. Не боялся лишь И. И. Жегалкина), я после лекции у нас по Геометрии Б. К. Млодзеевского, робко подошел к нему и попросил позволения побеседовать с ним относительно кривых без касательных.

Первая ошибка *уже* была сделана: я был слушателем, профессор казался высшим существом: я не думал, что он может чувствовать усталость. А между тем, я, молодой, сидел целый час и начал разговаривать с ним, когда он изнемогал от усталости. Поэтому голос Б. К. Млодзеевского, повысившийся до окрика, я принял на свой счет, а не за счет его усталости. Такие вещи нужно было обсуждать лишь с отдохнувшим человеком.

Итак, я начал: "Болеслав Корнелиевич, мне кажется, кривую без касательной можно построить совсем элементарно и я хотел бы знать Ваше мнение". Он: "Ммм..., ну давайте — у Вас есть чертеж?" Я: "Да, Болеслав Корнелиевич, вот он:



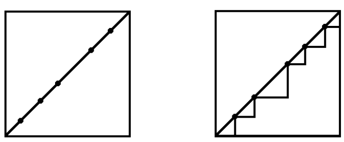
разделим диагональ квадрата на n частей, равных между собой, и на каждом делении, как на основании, построим равнобедренный прямоугольный треугольник. Получаем нечто вроде ажурной пилочки. Теперь делаю $n = \infty$. Пилочка делается непрерывной кривой, бесконечно мало отличающейся от самой диагонали. Значит, у ней касательной должна служить сама диагональ. И, однако, совершенно ясно, что у ней касательная то параллельна оси OX, то параллельна оси OY. Я думаю, что то же самое происходит и с пресловутой кривой Weierstrass'а". Он: "Ну, знаете ли, если Вы это серьезно... такой круг идей... Но ведь это же нелепость, то, что Вы говорите. Поймите, *актуальной бесконечности нет.* И ∞ не число. Стороны Ваших треугольников не $1/\infty$. И треугольников нет... И вообще ничего нет... Есть только Ваше непонимание. Поймите, что n есть конечное число. И для всякого n своя ажурная пилка, как выражаетесь Вы. И когда n безгранично возрастает, то у Вас на плоскости, как на экране кинематографа, — мелькание: пилка сменяет пилку с всё возрастающей быстротой. Вот и всё. Единой пилки нет. Есть серия пилок. Ну-с, о касательной к какой пилке Вы теперь говорите?!" Я: "О той, которая получится в пределе". Он (видимо теряя терпение): "Кажется, сказка о белом бычке... Поймите, ∞ не есть число. Серия пилок безгранично приближается к диагонали. Пределом же явится сама диагональ. Разумеется, касательная к диагонали есть: она сама для себя служит своей собственной касательной". Я сказал наивно: "Но ведь я же вижу, что касательные к сторонам треугольников параллельны оси OX и оси OY и никогда не параллельны диагонали". Он, мгновенно смягчившись и ласково... "Аааа... Вот что... запомните: *касательная к пределу не есть предел касательной.* Ведь сама касательная есть предел. Ну так вот: у Вас перестановка двух переходов к пределу, то, чего делать просто нельзя. Поймите (он взял мел):

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{m}{n+m}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n+m}=0$$

ну и, значит,

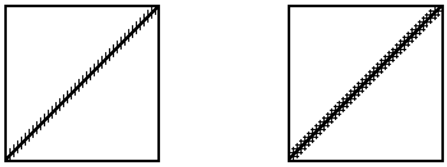
$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+n}\neq\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{m}{m+n}.$$

Это — история старая; *длина предела не равна пределу длины.* Ведь если Вы измерите длину Вашей ажурной пилки, то она равна 2. А ведь длина диагонали $\sqrt{2}$. Переворачивать пределы нельзя. Подумайте над этим. Это сразу Вам не дастся. До свиданья". И он ушел, оставив меня в недоумении на то, что я не был понят, как мне казалось тогда. Не надо забывать, что я был студентом 2-го курса. Через неделю случаю было угодно, чтобы один товарищ 4-го курса затащил меня на лекцию по действительному переменному того же самого Болеслава Корнелиевнча для студентов 4-го курса. И я выслушал его, блестящую по обыкновению, лекцию о понятии мощности и счетной мощности. Это было для меня почти откровением. Боясь пошевелиться, я слушал его вдохновенную речь про мощность, про N_0, а сам думал: "Да ведь это сплошные противоречия: в Анализе говорят, что всякое число конечно и скромно умалчивают о бесконечно удаленных точках прямых. В Геометрии, наоборот, твердят о бесконечно удаленных точках и выводят чудесные вещи. Неделю тому назад Болеслав Корнелиевич меня оборвал, вскрикнув, что "актуальной бесконечности нет". А теперь сам-то что он делает! Нет, чего-то я не понимаю. Должно быть напрасно я здесь: сделаться бы мне физиком!". Обдумав слова, я после лекции твердо подошел к нему и сказал: "Болеслав Корнелиевич, я к Вам с вопросом относительно непрерывных кривых без касательных..." Он болезненно сморщился и сказал удрученно: "Вы всё о том же... Вы находите дело неясным... в чем же дело?" Я: "Видите ли, Болеслав Корнелиевич, неделю тому назад я строил Вам треугольники и, должно быть, неудачно. Теперь я желал бы пересмотреть вопрос. Пусть на диагонали квадрата лежит конечное множество (тут он вздрогнул при слове "множество") точек:



Нужные мне треугольники я раньше строил постепенно, на каждом отрезке в отдельности. И в этом была моя ошибка. Теперь я это могу сделать *сразу.*

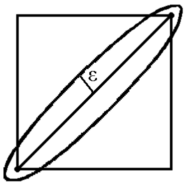
Возьмем совокупность всех параллелей осям OX и OY, проходящих через наши точки. И затем я обрезываю сразу все "лишние" части прямых и получаю сразу пилку...":



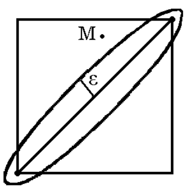
Он оборвал меня и сказал: "Не понимаю, к чему Вы всё это. Ну, ясно, что это так. Ну, а дальше?" Я: "Так вот, Болеслав Корнелиевич, вместо конечного множества я беру *счетное* множество, например, все точки диагонали, отстоящие от начала диагонали на соизмеримое расстояние.

И дальше повторяю всё то, что только что Вам сказал: беру все параллели, проходящие через точки этого множества и параллельные осям OX и OY и, наконец, уничтожаю "лишние" части прямых. Что я должен получить, *теперь уже без всякого перехода к пределу*? То же, что и раньше: т. е. п и л к у, но с актуально малыми зубцами!

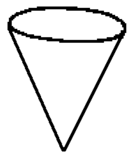
Значит, имеется *индивидуальная* неподвижная "кривая", бесконечно м а л о о т л и ч а ю щ а я с я от диагонали. В прошлый раз, когда я пришел с ней, Вы, Болеслав Корнелиевич, сказали, что мое построение основано на ошибке, так как "нет актуальной бесконечности". И Вы запретили мне употреблять ∞ как число. Но теперь, на лекции, Вы же сами говорили об актуальной бесконечности, о счетной мощности. И вот я изменил построение, в согласии с Вашим изложением, не употребляю ∞ как числа, а отправляюсь лишь от счетного множества и получаю то же самое: пилку с актуально малыми зубцами, т. е. неподвижную индивидуальную кривую, бесконечно мало отличающуюся от диагонали". Болеслав Корнелиевич внезапно затих, потом чрезвычайно деликатно с оттенком некоторой почтительности заговорил: "Не понимаю, как Вы попали на мою лекцию... Послушайте: не ходите больше; *Вам* это вредно, пока Вы не окрепнете. Что же касается до Вашей кривой, то она *логическая, не настоящая, не подлежащая интуиции* ("хорошо! хорошо!" — прервал он сам себя). Она существует в логике, но не геометрически. Она словесная, а не реальная. О ней говорить можно, но она не настоящая." Я мгновенно понял, что Болеслав Корнелиевич попался (не учитывая, что человек просто *устал* после лекции в чужой области и не мог ориентироваться в моих возражениях) и безжалостно насел на него: "Болеслав Корнелиевич, а кривая Weierstrass'а настоящая, или логическая? Она словесная, или существует в действительности? Она реальная, как синусоида или только мыслимая? Если последнее, то, обрывая тригонометрический ряд на каком-нибудь члене, мы, значит, имеем реальную кривую, а беря его весь мы уже имеем лишь словесное образование." Но я имел дело со страшным противником, который устал, растерялся от натиска, но который мгновенно оправился, просто *выгадывая время* своими словами о словесных кривых, и который, воспрянув, нанес мне страшный удар: “Послушайте, — сказал он с загоревшимся внезапно гневом, — что за галиматью Вы мне несете! Возьмите-ка гомофокальный эллипс[7] с фокусами в концах Вашей диагонали:



Отвечайте мне прямо, без увиливания: “Ваша пилка будет ведь внутри этого эллипса? Да!” Я: “Конечно, Болеслав Корнелиевич!” Он: “Но малая ось эллипса, обозначим её через ε, может быть мала как угодно. Да?” Я: “Да, Болеслав Корнелиевич!” Он: “Значит, Вы согласны, что Ваша кривая находится внутри всех эллипсов с фокусами в концах диагонали?” Я: “Разумеется, Болеслав Корнелиевич”. Он: “Но ведь *предел* такого гомофокального эллипса, когда ε стремится к нулю, есть лишь сама диагональ, а не Ваша пилка. Значит, её нет, этой Вашей пилки и всё Ваше подновленное рассуждение не стоит большего, чем то, что Вы показывали мне неделей раньше!” Я замолчал, справляясь с нанесенной мне раной. Но теперь роли переменились и он безжалостно добавил: “Поймите, ведь если какая-либо точка, M например, *не* лежит на диагонали,

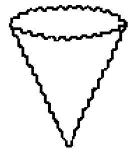


то ведь, при достаточно малом ε, она окажется *снаружи* гомофокального эллипса. Значит, *пределом* гомофокального эллипса будет только диагональ, в лице всех её точек, и никакая другая чужая точка M, не лежащая на диагонали. Ясно?” Но я уже оправился и сказал: “Всё это так, пока ε конечное. Но если ε есть актуальное малое...” Но меня прервала буря негодования: “Semper idem! — воскликнул он, — ведь я же толкую Вам полчаса о *пределах*, а не об Ваших актуально малых, которых нет в действительности. Ведь это же я доказываю в своем курсе. Походите на него, чего, впрочем, я Вам пока не советую, и Вы убедитесь в этом... Вы что-то еще хотите мне сообщить?” Я, действительно, был сильно задет и начал говорить, насколько я вспоминаю теперь, так: Я, Болеслав Корнелиевич, я думаю, что возможно отправляться не только от чисто математических рассуждений, но и от общенаучных тенденций. В химии, например, в действительности нет химически ЧИСТОЙ воды, ибо всегда, *в реальной воде*, будут иметься группы молекул, не входящие в состав воды. И, однако, химия — наука имеет H_2O и говорит нам о химически чистой воде H_2O. Что это такое? Абстракция? Нет, это есть идеализированная вода, идеализация! Процесс идеализации, видимо, неизбежен для всякой стадии науки. Пусть химически чистой воды нет в действительности, но H_2O *есть в науке* и говорить об H_2O есть дело науки. Возьмем теперь *гипс* и процесс образования формы. Вы, например, имеете полый конус, математически точный:



Но Вы наливаете туда раствор в виде жидкого гипса, чтобы снять форму конуса. Что же такое этот процесс? Гипс застывает и Вы вынимаете из пустого конуса его копию, *кажущуюся Вам точной*:

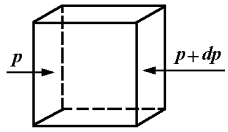
Но на деле это не так. Процесс застывания гипса есть процесс КРИСТАЛЛИЗАЦИИ и то, что Вы вынимаете из конуса, это не будет конус или его точная копия; это в действительности будет кристаллическое тело, лишь приближенное к конусу, почти по принципу Cavalieri. Если мы теперь *идеализируем этот процесс* и застывание идеального гипса будем понимать, как процесс идеальной кристаллизации, с актуально малыми кристалликами, то вынув форму, мы убедимся, что мы имеем не конус, а тело, актуально мало…":



Но он плохо кончился, этот разговор. Мне стыдно сказать, но Болеслав Корнелиевич просто ушел, посоветовав мне принести к следующему разу баночку *такого* гипса. Больше я уже с Болеславом Корнелиевичем не разговаривал никогда на эту тему, но через 2 года натолкнулся на взволновавшую меня картину.

Прежде чем о ней передать Вам, расскажу Вам еще одну черточку, характеризующую состояние тогда моего ума. Я помню себя студентом 3-го курса, сидящим на первой скамейке на лекции по механике Николая Егоровича Жуковского. Точнее: это была лекция по *гидродинамике*. Аудитория была огромная, профессор был человек крупный, массивный и очень умный.

Как сейчас помню, он стоял перед огромной во всю стену чистой черной доской и с мелом в руке говорил нам о силах, действующих на жидкость. “Возьмем, — говорил он, — элементик жидкости…”:



И с этими словами он, приняв во внимание размеры огромной аудитории, битком набитой студентами (3-го + 4-го курса: соединяли курсы ради экономии), нарисовал большой куб, *величиной с метр.* “Пусть, — продолжал он, — p и $p + dp$ суть давления на противоположные стенки этого элементика…” И он принялся делать сложное геометрическое построение внутри нарисованного им куба.

Меня точно кто подтолкнул: “Вот так элементик! — пронеслось у меня в голове, — да сюда можно свободно поместить живого гуся! *А ведь построение-то стационарное.* Вот они актуально малые, в которые из приличия никто не хочет верить, но которые то и дело употребляют, когда не думают о приличиях!” Но тут я сосредоточился на лекции и забыл о скандальной мысли.

Возвращусь теперь к Болеславу Корнелиевичу. Это было год спустя, когда я был на 4-м курсе, значит, 2 года спустя после последнего разговора с Болеславом Корнелиевичем о пилках. Помню: — нас двоих, Бюшгенса и меня, пригласили на заседание математического общества. Тогда студенты не допускались туда совсем и нужно было специальное приглашение профессуры. На заседании было немного членов, человек, должно быть, 12. Все они сидели за длинным столом, покрытым зеленым сукном и пили чай с сухариками (мне казалось удивительным совмещение прозаического чая с наукой). Доклад делал не помню кто именно *об уравнениях Pfaff'a.* Я сидел на стуле во втором ряду, позади Болеслава Корнелиевича и Д. Ф. Егорова, сидевшего за столом рядом с Млодзеевским. А тем временем докладчик покрывал доску уравнениями Pfaff'a *в полных дифференциалах*:

$$\omega_i' = \sum_{h,k} A_{ihk}\,(dx_h\,\delta x_k - dx_k\,\delta x_h),$$

$$\omega^{2m-6}\,df_1\,df_2\,df = 0,$$

$$\omega_i' \equiv k_i\,(dx_{r+1}\,\delta x_{r+2} - dx_{r+2}\,\delta x_{r+1})(\operatorname{mod}\omega_1, \ldots, \omega_r).$$

Формула струилась за формулой, значки полных дифференциалов d, δ текли изобильной струей, один за другим, складываясь, вычитались, умножались, подставлялись один в другой, выражались линейно через аналогичные значки d, δ полных дифференциалов. Я внимательно глядел на доску, сначала старался ухватить смысл, но не зная (как понимаю теперь) теории проблемы

Pfaff'а, заблудился мыслью и поймал себя на том, что просто любовался внешностью потока формул. И вдруг меня осенила мысль: "Ну вот, я не понимаю почему-то: но по крайней мере я знаю, что такое d, δ. А если бы кто другой сейчас пришел сюда, хорошо знающий алгебру, но незнакомый совсем с Дифференциальным Исчислением. Что бы он подумал? Подумал бы, что речь идет об алгебраических преобразованиях, о каких-то неизвестных количествах dx, δf и т. д. И он начал бы так же точно выражать одни через другие и решать их. Ведь это же, в самом деле, настоящая *алгебра* количеств d, δ".

Только что я подумал про себя это, как слышу оживленный голос Болеслава Корнелиевича, говорящий сидящему рядом Д. Ф. Егорову: "Я всегда думал, что символы полных дифференциалов являются особенными символами. Посмотрите, как он оперирует с ними! Ведь они в его руках просто *постоянные* числа: он их складывает, вычитает, множит, подставляет, преобразует. Ведь можно совсем забыть об их истинном происхождении и оперировать с ними, как с постоянными бесконечно малыми. И Вы знаете, Димитрий Федорович, что вовсе не безнадежна попытка, в духе Hilbert'а, аксиоматически..." Тут докладчик, которому мешал этот оживленный голос, с упреком взглянул на Болеслава Корнелиевича и тот, прервав себя, сказал, ему: "Я слушаю, слушаю!", а сам, поглядев на Димитрия Федоровича, спросил более тихо: "Что Вы об этом, Димитрий Федорович, думаете!" Но Димитрий Федорович Егоров тихо покачивал головою, как бы говоря: "Так-то оно так, Болеслав Корнелиевич, а все-таки..."

У меня внутри поднялась настоящая буря: "Ах, вот оно что! — пронеслось у меня, — нас, маленьких, учат одному, а сами-то взрослые, что между собою говорят. Значит, взаправду, дело не так уже стоит тут твердо, раз у них самих такие разговоры. Я впился глазами в них и чувствовал, как они у меня горели. Не знаю, что произошло: может быть подо мною скрипнул стул, или это была одна из тех таинственных случайностей, когда люди как будто чувствуют пронизывающий их сзади взгляд. Только Болеслав Корнелиевич внезапно оглянулся и, заметив мой горящий взгляд, наклонился и что-то тихо сказал Димитрию Федоровичу. Тот ему ответил что-то столь же тихо, и далее они не разговаривали более друг с другом.

Я это так подробно описываю Вам, просто желая дать психологический документ о состоянии ума в его ранней ступени развития. Может быть, Вам это и будет интересным. Вероятно, я смог бы, терпеливо побродив в сумраке воспоминаний, вынести из него на свет еще что-нибудь, может быть, даже и ценное (в отношении математического воспитания). Но, говоря откровенно, я боюсь уходить в этот сумрак. А страшусь вынести из него, на дневной свет, какие-нибудь вещи, глубоко связанные с первыми движениями математического ума или математического сознания, которые сильно захватят сейчас меня и лишат меня возможности проследовать намеченным в науке путем. То же, что я рассказал Вам — это всегда со мною, так как сильно врезалось в память.

Дальше же со мною было следующим образом. Воспитанный на старинных трактатах Анализа, я *прямо перешел к теории множеств и теории функций*, минуя теорию пределов. Это произошло по окончании Университета, когда я, получив от Д. Ф. Егорова предложение остаться при Университете, его отклонил и ушел на 1/2 года сначала на медицинский факультет (из моральных соображений), а затем на 1/2 года на бывший историко-филологический факультет, так как я не мог видеть трупов и хорошего медика из меня бы не вышло. Лишь после этих 1/2 года на историко-филологическом факультете, где я слушал всех известных тогда философов и не вынес, почему-то, страсти к их рассуждениям, я возвратился к математике, и, приняв предложение Д. Ф. Егорова, принялся за пополнение математического образования, не спрашивая советов и руководясь, как раньше, случаем.

Большая пережитая душевная драма с кривой Weierstrass'а заставила меня сосредоточить всё внимание на теории функций и вообще на микроматематике, как я называл изучение бесконечно малых структур функций или множеств.

Примечания к письму Н. Н. Лузина

[1]Н. Н. Лузин не совсем точно оценивает отношение “педагогических кругов” к книге М. Я. Выгодского. Оно было “в своем большинстве” не только не “чрезвычайно благоприятным”, а явно враждебным: автор отвергал в преподавании анализа и теорию пределов, и традиционный порядок изложения материала: сначала дифференциальное, а потом интегральное исчисление. Среди преподавателей вузов были и сторонники М. Я. Выгодского, в частности к ним принадлежал А. Ф. Бермант: в первом издании своего известного учебника он также начинал с интегрального исчисления. Но среди “теоретических кругов” Н. Н. Лузин был почти единственным защитником системы преподавания М. Я. Выгодского.

[2]В этом письме Н. Н. Лузин прибегает к трем видам выделения в тексте: подчеркиванию непрерывной чертой (передано здесь *курсивом*), подчеркиванию прерывистой чертой (здесь — р а з р я д к о й) и печатными буквами (здесь — ПРОПИСНЫМИ БУКВАМИ).

[3]Н. Н. Лузин поступил в Московский университет в 1901 г. Таким образом, начало этих воспоминаний относится к 1902 г. Ниже он упоминает профессоров, хорошо известных математикам старшего поколения, учившихся в МГУ. О деятельности этих ученых см. *А. П. Юшкевич.* “История математики в России”, а также воспоминания А. П. Юшкевича в вып. 6 сборника.

Леонид Кузьмич *Лахтин* (1853–1927, в МГУ с 1896) — видный алгебраист; много лет читал в МГУ курсы "Введение в анализ", "Дифференциальное исчисление" и "Интегральное исчисление"; неизменно дословно диктовал свои лекции. Два геометра — Болеслав Корнелиевич *Млодзеевский* (1858–1923, в МГУ с 1895) и Дмитрий Федорович *Егоров* (1869–1931, в МГУ с 1893) — руководящие деятели математического отделения МГУ конца XIX и первой четверти XX вв.; Млодзеевский впервые начал преподавать в МГУ теорию функций действительного переменного, а Егорова можно считать основателем московской школы ТФДП, главой и наиболее выдающимся представителем которой стал позже ученик Егорова Н. Н. Лузин. Иван Иванович *Жегалкин* (1869–1945, в МГУ с 1902) успешно культивировал в МГУ теорию множеств и математическую логику. Наконец, ученик Егорова геометр Сергей Сергеевич *Бюшгенс* (1882–1963, в МГУ с 1906) был товарищем Лузина по курсу.

[4]Н. Н. Лузин приводит учебную литературу по анализу того времени; она была исключительно французской (на русском языке выходили лишь литографированные лекции профессоров). Это два трехтомных курса Гурса и Жордана (первые два тома *Э. Гурса* "Курс математического анализа" были позже переведены на русский язык под ред. Б. К. Млодзеевского и изданы в 1911 и 1912 гг.; в советское время все три тома были переизданы в 1933–1934 гг. в переработке В. В. Степанова; книга C. Jordan'а "Cours d'Analyse a l'Ecole Polytechnique", 1882–1887, на русский язык не переводилась). Первое издание распространенного курса Лакруа (S. F. Lacroix. "Traite du calcul differentiel et du calcul integral") вышло в свет еще в 1797–1798 гг., а "самый новый" 7-томный трактат Лорана (H. Laurent. "Traite d'Analyse") вышел в 1885–1891 гг. Наконец, "дисциплинирующие" курсы Д. Ф. Егорова по различным отделам анализа и дифференциальной геометрии выходили до революции только в литографированном виде, а логически непреклонный Валле-Пуссен (Ch. — J. de la Vallee-Poussin. "Cours d'Analyse infinitesimal") дважды переводился на русский язык и издавался уже значительно позже времени, о котором идет речь в письме.

[5]Говоря о "раскрашивании" теории пределов, Н. Н. Лузин вспоминает известный очень формальный английский учебник дифференциального и интегрального исчислений В. Грэнвиля, перевод которого он переработал настолько, что позднее учебник стал издаваться уже под именем Лузина.

[6]Кривая Вейерштрасса — пример графика функции, не имеющей производной ни в одной точке — был указан Вейерштрассом в 1887 г. Позже было установлено, что пример такой кривой был уже предложен Б. Больцано еще в 1835 г.

[7]Гомофокальные эллипсы — очевидно, эллипсы, имеющие общие фокусы (софокусные).

ON INFINITESIMALS IN TEACHING AND IN SCIENCE

N. N. Lusin

A letter from an outstanding mathematician Nikolai Lusin to Mark Vygodski with reference to his manual “Fundamentals of Infinitesimals Calculation”.

Keywords: mathematical analysis, infinitesimal, Lusin N. N.