

01204212 Abstract Data Types and Problem Solving

Assignment #4: Basic Complexity Analysis

ข้อกำหนด

- พัฒนาโปรแกรมตามที่เงื่อนไขโจทย์กำหนด
 - งานที่มอบหมายนี้เป็นงานเดี่ยว ขอให้รับผิดชอบด้วยตนเอง
 - งานข้อ 1-3 ส่งคำตอบเป็นไฟล์นามสกุล .PDF เท่านั้น ผ่าน Google Classroom (ไม่จำเป็นต้องล็อกโจทย์ เขียนกระดาษแล้วสแกนหรือถ่ายรูปได้)
 - งานข้อ 4-5 ส่งเป็นโปรแกรมผ่านเชิฟเวอร์
 - กำหนดส่งวันจันทร์ที่ 26 กรกฎาคม 2564 ก่อนเที่ยงคืน
1. พิจารณาฟังก์ชัน $A(n)$ และ $B(n)$ ดังตาราง จงระบุว่าฟังก์ชัน A เป็น $O, o, \Omega, \omega, \Theta$ ของฟังก์ชัน B หรือไม่ (Is $A(n) = O(B(n))$?) เมื่อกำหนดให้ k, ε, c เป็นค่าคงที่ โดย $k \geq 1, \varepsilon > 0$ และ $c > 1$ ให้เขียนคำตอบว่า “ใช่” หรือ “ไม่ใช่” ลงในแต่ละช่องตาราง พร้อมแสดงวิธีการพิสูจน์

	$A(n)$	$B(n)$	O	o	Ω	ω	Θ
1.1	$\log^k n$	n^ε	ใช่	ไม่ใช่	ไม่ใช่	ไม่ใช่	ไม่ใช่
1.2	n^k	c^n	ใช่	ไม่ใช่	ไม่ใช่	ไม่ใช่	ไม่ใช่
1.3	\sqrt{n}	$n^{\sin n}$	ไม่ใช่	ไม่ใช่	ไม่ใช่	ไม่ใช่	ไม่ใช่
1.4	2^n	$2^{n/2}$	ไม่ใช่	ไม่ใช่	ใช่	ใช่	ไม่ใช่
1.5	$n^{\log m}$	$m^{\log n}$	ใช่	ไม่ใช่	ใช่	ไม่ใช่	ใช่
1.6	$\log(n!)$	$\log(n^n)$	ใช่	ไม่ใช่	ใช่	ไม่ใช่	ใช่

$$1.1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^k n}{n^\varepsilon} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log n}{n^{\frac{\varepsilon}{k}}} \right)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^{\frac{\varepsilon}{k}}} \right)^k$$

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^{\frac{\varepsilon}{k}}} = 0 \quad \therefore \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^{\frac{\varepsilon}{k}}} \right)^k = 0^k = 0$

$$1.2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{c^n} = 0 \quad (c^n \text{ โตเร็วกว่า } n^k)$$

$$1.3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\sin n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2} - \sin n}$$

เนื่องจาก $-1 \leq \sin n \leq 1$
 $1 \geq -\sin n \geq -1$
 $\frac{3}{2} \geq \frac{1}{2} - \sin n \geq -\frac{1}{2}$

พิจารณา $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2} - \sin n}$ จะเห็นว่า $\frac{1}{2} - \sin n$ มีค่าอยู่ระหว่าง $-\frac{1}{2}$ ถึง $\frac{3}{2}$ ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2} - \sin n}$ ไม่สามารถหาค่าได้แน่นอน

$$1.4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{n}{2}} = \infty$$

$$1.5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\log n}}{n^{\log n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\log n}}{n^{\log n}} = 1$$

$$1.6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{\log(n^n)}$$

we know $\log(n!) = \log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots + \log n = \sum_{i=1}^n \log i$

$$\sum_{i=1}^n \log i \approx \int_1^n \log x \, dx = [x \log x - x]_1^n$$

$$= n \log n - n + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n \log n} \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n - n + 1}{n \log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{n}{n \log n} + \frac{1}{n \log n} = 1$$

2. พิจารณาโปรแกรมต่อไปนี้ แสดงวิธีการหา big-oh notation

```

1: #include <stdio.h>
2:
3: long long euclidGCD(long long n, long long m) {
4:     long long t;
5:     while (m != 0) {
6:         t = m;
7:         m = n % m;
8:         n = t;
9:     }
10:    return n;
11: }
12:
13: int main(void) {
14:     long long n, m;
15:     scanf("%lld %lld", &n, &m);
16:     if (n > m)
17:         printf("%lld\n", euclidGCD(m, n));
18:     else
19:         printf("%lld\n", euclidGCD(n, m));
20:     return 0;
21: }

```

10 2

ℳ((a_k, b_k)) mod (n, m) na euclidGCD-ის გამოყენებით, მოგვითხოვთ ყველა

$a_k = c b_k + r_1$ или $a_{k+1} = b_k$ или $a_k = c b_k + b_{k+1}$ или $c \geq 1$
 $a_{k+1} = c b_{k+1} + r_2$

also worst case was euclid GCD algorithm analysis

1.) $a, n \mid b, \text{ZGCD} = 1$

2.) C τω=1, τότε η μέση αναλογία των ατόμων της ηλικίας a_k , $b_n + b_{k+1}$ στο $1 < \frac{a_k}{b_n} < 2$

ဆိုရင် input ခုနစ်ဆောင်ရင် ရှာရင် ပေး Fibonacci ရှာရင် ပေးရမှာပေါ့

(maka fibonucci dlo $1 < \frac{F_n}{F_{n-1}} < 2$ har $\text{GCD}(F_n, F_{n-1}) = 1$ ηη n (Jusuhuku))

isortat (n, m) $u^0(a, b) = (f_n, f_{n-1})$ $n, n-1$ sunt numere naturale a, b .

பிளாஸ்திக்

$$\left. \begin{array}{c} (F_n, F_{n-1}) \\ \downarrow \\ (F_{n-1}, F_{n-2}) \\ \downarrow \\ (F_{n-2}, F_{n-3}) \\ \vdots \\ (F_2, F_1) \end{array} \right\}$$

พื้ ๓๔๓๕๓๓ ๓-๑-๑ ๑๑ ๓ ๓-๑๘๐๐

und n-ten;
$$\text{fib}_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{5} \text{ Fib}_n \approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$n \approx \frac{\log(\sqrt{5} \cdot \text{Fib}_n)}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

nahelzu sein, so dass man sich für das Konzept argumentieren kann, dass es sich um ein nützliches Werkzeug handelt.

\therefore function f_{nsm} and complexity = $O(\log m)$

Time complexity = $O(n) + O(\log n)$

finds m to $\max(m, n)$ (with input), with $O(\log(\max(m, n))) \stackrel{\text{edge}}{=} O(\log(m+n))$
 \therefore complexity $= O(\log(m+n))$

```

2.2  1: #include <stdio.h>
      2: #include <stdlib.h>
      3:
      4: int isPalin(char* text, int beginPos, int endPos) {
      5:     if(beginPos == endPos)
      6:         return 1;
      7:     else if(beginPos+1 == endPos)
      8:         return text[beginPos] == text[endPos];
      9:     else if(text[beginPos] != text[endPos])
      10:         return 0;
      11:     return isPalin(text, beginPos+1, endPos-1);
      12: }
      13:
      14: int main(void) {
      15:     int length;
      16:     char* text;
      17:     scanf("%d", &length);
      18:     text = (char*)malloc(sizeof(char)*(length+1));
      19:     scanf("%s", text);
      20:     printf("%d\n", isPalin(text, 0, length-1));
      21:     return 0;
      22: }

```

$O(1)$

if length = 1
if 1 character

1 2 3 ... l-2 l-1 l

2 3 ... l-2 l-1

beginPos+1 = endPos

$1 \Rightarrow O(1)$

$2 \Rightarrow O(1)$

\vdots

համար $\frac{l}{2}$ օր

if 1 character

1 2 3 ... l-2 l-1 l

2 3 ... l-2 l-1

beginPos = endPos

$1 \Rightarrow O(1)$

$2 \Rightarrow O(1)$

\vdots

համար $\frac{l-1}{2}$ օր

$O(\text{length})$

if worst case (1 character) օր complexity $O(1) O(\text{length})$

\therefore complexity ամենամեծ = $O(\text{length}) + O(1)$

complexity ամենամեծ = $O(\text{length})$

```

2.3  1: #include <stdio.h>
      2:
      3: int P(int x, int n) {
      4:     int y;
      5:     if (n == 0)
      6:         return 1;
      7:     if (n%2 == 1) {
      8:         y = P(x, (n-1)/2);
      9:         return x*y*y;
     10:     } else {
     11:         y = P(x, n/2);
     12:         return y*y;
     13:     }
     14: }
     15:
     16: int main(void) {
     17:     int x, n;
     18:     scanf("%d %d", &x, &n);
     19:     printf("%d\n", P(x, n));
     20:     return 0;
     21: }

```

การหาค่า $P(x, n)$ จะใช้การหาค่า $P(x, n/2)$ หรือ $P(x, (n-1)/2)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/4)$ หรือ $P(x, (n-1)/4)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/8)$ หรือ $P(x, (n-1)/8)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/16)$ หรือ $P(x, (n-1)/16)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/32)$ หรือ $P(x, (n-1)/32)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/64)$ หรือ $P(x, (n-1)/64)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/128)$ หรือ $P(x, (n-1)/128)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/256)$ หรือ $P(x, (n-1)/256)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/512)$ หรือ $P(x, (n-1)/512)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/1024)$ หรือ $P(x, (n-1)/1024)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/2048)$ หรือ $P(x, (n-1)/2048)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/4096)$ หรือ $P(x, (n-1)/4096)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/8192)$ หรือ $P(x, (n-1)/8192)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/16384)$ หรือ $P(x, (n-1)/16384)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/32768)$ หรือ $P(x, (n-1)/32768)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/65536)$ หรือ $P(x, (n-1)/65536)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/131072)$ หรือ $P(x, (n-1)/131072)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/262144)$ หรือ $P(x, (n-1)/262144)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/524288)$ หรือ $P(x, (n-1)/524288)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/1048576)$ หรือ $P(x, (n-1)/1048576)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/2097152)$ หรือ $P(x, (n-1)/2097152)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/4194304)$ หรือ $P(x, (n-1)/4194304)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/8388608)$ หรือ $P(x, (n-1)/8388608)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/16777216)$ หรือ $P(x, (n-1)/16777216)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/33554432)$ หรือ $P(x, (n-1)/33554432)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/67108864)$ หรือ $P(x, (n-1)/67108864)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/134217728)$ หรือ $P(x, (n-1)/134217728)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/268435456)$ หรือ $P(x, (n-1)/268435456)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/536870912)$ หรือ $P(x, (n-1)/536870912)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/1073741824)$ หรือ $P(x, (n-1)/1073741824)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/2147483648)$ หรือ $P(x, (n-1)/2147483648)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/4294967296)$ หรือ $P(x, (n-1)/4294967296)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/8589934592)$ หรือ $P(x, (n-1)/8589934592)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/17179869184)$ หรือ $P(x, (n-1)/17179869184)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/34359738368)$ หรือ $P(x, (n-1)/34359738368)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/68719476736)$ หรือ $P(x, (n-1)/68719476736)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/137438953472)$ หรือ $P(x, (n-1)/137438953472)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/274877906944)$ หรือ $P(x, (n-1)/274877906944)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/549755813888)$ หรือ $P(x, (n-1)/549755813888)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/1099511627776)$ หรือ $P(x, (n-1)/1099511627776)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/2199023255552)$ หรือ $P(x, (n-1)/2199023255552)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/4398046511104)$ หรือ $P(x, (n-1)/4398046511104)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/8796093022208)$ หรือ $P(x, (n-1)/8796093022208)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/17592186044416)$ หรือ $P(x, (n-1)/17592186044416)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/35184372088832)$ หรือ $P(x, (n-1)/35184372088832)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/70368744177664)$ หรือ $P(x, (n-1)/70368744177664)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/140737488355328)$ หรือ $P(x, (n-1)/140737488355328)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/281474976710656)$ หรือ $P(x, (n-1)/281474976710656)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/562949953421312)$ หรือ $P(x, (n-1)/562949953421312)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/1125899906842624)$ หรือ $P(x, (n-1)/1125899906842624)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/2251799813685248)$ หรือ $P(x, (n-1)/2251799813685248)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/4503599627370496)$ หรือ $P(x, (n-1)/4503599627370496)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/9007199254740992)$ หรือ $P(x, (n-1)/9007199254740992)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/18014398509481984)$ หรือ $P(x, (n-1)/18014398509481984)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/36028797018963968)$ หรือ $P(x, (n-1)/36028797018963968)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/72057594037927936)$ หรือ $P(x, (n-1)/72057594037927936)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/144115188075855872)$ หรือ $P(x, (n-1)/144115188075855872)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/288230376151711744)$ หรือ $P(x, (n-1)/288230376151711744)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/576460752303423488)$ หรือ $P(x, (n-1)/576460752303423488)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/1152921504606846976)$ หรือ $P(x, (n-1)/1152921504606846976)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/2305843009213693952)$ หรือ $P(x, (n-1)/2305843009213693952)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/4611686018427387904)$ หรือ $P(x, (n-1)/4611686018427387904)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/9223372036854775808)$ หรือ $P(x, (n-1)/9223372036854775808)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/18446744073709551616)$ หรือ $P(x, (n-1)/18446744073709551616)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/36893488147419103232)$ หรือ $P(x, (n-1)/36893488147419103232)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/73786976294838206464)$ หรือ $P(x, (n-1)/73786976294838206464)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/147573952589676412928)$ หรือ $P(x, (n-1)/147573952589676412928)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/295147905179352825856)$ หรือ $P(x, (n-1)/295147905179352825856)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/590295810358705651712)$ หรือ $P(x, (n-1)/590295810358705651712)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/1180591620717411303424)$ หรือ $P(x, (n-1)/1180591620717411303424)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/2361183241434822606848)$ หรือ $P(x, (n-1)/2361183241434822606848)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/4722366482869645213696)$ หรือ $P(x, (n-1)/4722366482869645213696)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/9444732965739290427392)$ หรือ $P(x, (n-1)/9444732965739290427392)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/18889465931478580854784)$ หรือ $P(x, (n-1)/18889465931478580854784)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/37778931862957161709568)$ หรือ $P(x, (n-1)/37778931862957161709568)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/75557863725914323419136)$ หรือ $P(x, (n-1)/75557863725914323419136)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/151115727451828646838272)$ หรือ $P(x, (n-1)/151115727451828646838272)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/302231454903657293676544)$ หรือ $P(x, (n-1)/302231454903657293676544)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/604462909807314587353088)$ หรือ $P(x, (n-1)/604462909807314587353088)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/1208925819614629174706176)$ หรือ $P(x, (n-1)/1208925819614629174706176)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/2417851639229258349412352)$ หรือ $P(x, (n-1)/2417851639229258349412352)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/4835703278458516698824704)$ หรือ $P(x, (n-1)/4835703278458516698824704)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/9671406556917033397649408)$ หรือ $P(x, (n-1)/9671406556917033397649408)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/19342813113834066795298816)$ หรือ $P(x, (n-1)/19342813113834066795298816)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/38685626227668133590597632)$ หรือ $P(x, (n-1)/38685626227668133590597632)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/77371252455336267181195264)$ หรือ $P(x, (n-1)/77371252455336267181195264)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/154742504910672534362390528)$ หรือ $P(x, (n-1)/154742504910672534362390528)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/309485009821345068724781056)$ หรือ $P(x, (n-1)/309485009821345068724781056)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/618970019642690137449562112)$ หรือ $P(x, (n-1)/618970019642690137449562112)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/1237940039285380274899124224)$ หรือ $P(x, (n-1)/1237940039285380274899124224)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/2475880078570760549798248448)$ หรือ $P(x, (n-1)/2475880078570760549798248448)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/4951760157141521099596496896)$ หรือ $P(x, (n-1)/4951760157141521099596496896)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/9903520314283042199192993792)$ หรือ $P(x, (n-1)/9903520314283042199192993792)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/19807040628566084398385987584)$ หรือ $P(x, (n-1)/19807040628566084398385987584)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/39614081257132168796771975168)$ หรือ $P(x, (n-1)/39614081257132168796771975168)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/79228162514264337593543950336)$ หรือ $P(x, (n-1)/79228162514264337593543950336)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/158456325028528675187087900672)$ หรือ $P(x, (n-1)/158456325028528675187087900672)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/316912650057057350374175801344)$ หรือ $P(x, (n-1)/316912650057057350374175801344)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/633825300114114700748351602688)$ หรือ $P(x, (n-1)/633825300114114700748351602688)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/1267650600228229401496703205376)$ หรือ $P(x, (n-1)/1267650600228229401496703205376)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/2535301200456458802993406410752)$ หรือ $P(x, (n-1)/2535301200456458802993406410752)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/5070602400912917605986812821504)$ หรือ $P(x, (n-1)/5070602400912917605986812821504)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/10141204801825835211973625643008)$ หรือ $P(x, (n-1)/10141204801825835211973625643008)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/20282409603651670423947251286016)$ หรือ $P(x, (n-1)/20282409603651670423947251286016)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/40564819207303340847894502572032)$ หรือ $P(x, (n-1)/40564819207303340847894502572032)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/81129638414606681695789005144064)$ หรือ $P(x, (n-1)/81129638414606681695789005144064)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/162259276829213363391578010288128)$ หรือ $P(x, (n-1)/162259276829213363391578010288128)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/324518553658426726783156020576256)$ หรือ $P(x, (n-1)/324518553658426726783156020576256)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/649037107316853453566312041152512)$ หรือ $P(x, (n-1)/649037107316853453566312041152512)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/1298074214633706907132624082305024)$ หรือ $P(x, (n-1)/1298074214633706907132624082305024)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/2596148429267413814265248164610048)$ หรือ $P(x, (n-1)/2596148429267413814265248164610048)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/5192296858534827628530496329220096)$ หรือ $P(x, (n-1)/5192296858534827628530496329220096)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/10384593717069655257060992658440192)$ หรือ $P(x, (n-1)/10384593717069655257060992658440192)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/20769187434139310514121985316880384)$ หรือ $P(x, (n-1)/20769187434139310514121985316880384)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/41538374868278621028243970633760768)$ หรือ $P(x, (n-1)/41538374868278621028243970633760768)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/83076749736557242056487941267521536)$ หรือ $P(x, (n-1)/83076749736557242056487941267521536)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/166153499473114484112975882535043072)$ หรือ $P(x, (n-1)/166153499473114484112975882535043072)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/332306998946228968225951765070086144)$ หรือ $P(x, (n-1)/332306998946228968225951765070086144)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/664613997892457936451903530140172288)$ หรือ $P(x, (n-1)/664613997892457936451903530140172288)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/1329227995784915872903807060280344576)$ หรือ $P(x, (n-1)/1329227995784915872903807060280344576)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/2658455991569831745807614120560689152)$ หรือ $P(x, (n-1)/2658455991569831745807614120560689152)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/5316911983139663491615228241121378304)$ หรือ $P(x, (n-1)/5316911983139663491615228241121378304)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/10633823966279326983230456482242756608)$ หรือ $P(x, (n-1)/10633823966279326983230456482242756608)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/21267647932558653966460912964485513216)$ หรือ $P(x, (n-1)/21267647932558653966460912964485513216)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/42535295865117307932921825928971026432)$ หรือ $P(x, (n-1)/42535295865117307932921825928971026432)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/85070591730234615865843651857942052864)$ หรือ $P(x, (n-1)/85070591730234615865843651857942052864)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/170141183460469231731687303715884105728)$ หรือ $P(x, (n-1)/170141183460469231731687303715884105728)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/340282366920938463463374607431768211456)$ หรือ $P(x, (n-1)/340282366920938463463374607431768211456)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/680564733841876926926749214863536422912)$ หรือ $P(x, (n-1)/680564733841876926926749214863536422912)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/1361129467683753853853498429727072845824)$ หรือ $P(x, (n-1)/1361129467683753853853498429727072845824)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/2722258935367507707706996859454145691648)$ หรือ $P(x, (n-1)/2722258935367507707706996859454145691648)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/5444517870735015415413993718908291383296)$ หรือ $P(x, (n-1)/5444517870735015415413993718908291383296)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/10889035741470030830827987437816582766592)$ หรือ $P(x, (n-1)/10889035741470030830827987437816582766592)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/21778071482940061661655974875633165533184)$ หรือ $P(x, (n-1)/21778071482940061661655974875633165533184)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/43556142965880123323311949751266331066368)$ หรือ $P(x, (n-1)/43556142965880123323311949751266331066368)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/87112285931760246646623899502532662132736)$ หรือ $P(x, (n-1)/87112285931760246646623899502532662132736)$ แล้วคูณด้วย x หรือ 1 แล้วจึงหาค่า $P(x, n/1742245718635204932932477990050653242654$

```

2.4 1: #include <stdio.h>
2:
3: int main(void) {
4:     int m, n, p, q, c, d, k;
5:     int first[10][10], second[10][10], multiply[10][10];
6:
7:     printf("Enter # of rows and columns of 1st matrix: ");
8:     scanf("%d %d", &m, &n);
9:
10:    for (c=0; c<m; c++)
11:        for (d=0; d<n; d++) {
12:            printf("Enter matrix1[%d][%d]: ", c, d);
13:            scanf("%d", &first[c][d]);
14:        }
15:
16:    printf("Enter # of rows and columns of 2nd matrix: ");
17:    scanf("%d %d", &p, &q);
18:
19:    if (n != p) {
20:        printf("The multiplication isn't possible.\n");
21:    } else {
22:        for (c=0; c<p; c++)
23:            for (d=0; d<q; d++) {
24:                printf("Enter matrix2[%d][%d]: ", c, d);
25:                scanf("%d", &second[c][d]);
26:            }
27:
28:            for (c=0; c<m; c++)
29:                for (d=0; d<q; d++) {
30:                    multiply[c][d] = 0;
31:                    for (k=0; k<p; k++)
32:                        multiply[c][d] += first[c][k]*second[k][d];
33:                }
34:
35:            printf("Product of the matrices:\n");
36:            for (c=0; c<m; c++) {
37:                for (d=0; d<q; d++)
38:                    printf("%d\t", multiply[c][d]);
39:                printf("\n");
40:            }
41:        }
42:        return 0;
43:    }

```

Handwritten annotations for complexity analysis:

- $O(1)$ for lines 4-5 (initialization of arrays).
- $O(mn)$ for the nested loops in lines 10-14.
- $O(pq)$ for the nested loops in lines 22-26.
- $O(mpq)$ for the triple nested loops in lines 28-33.
- $O(1) + O(mq)$ for the printing loops in lines 36-40.

$$\begin{aligned}
 \text{complexity} &= O(1) + O(mn) + O(1) + O(pq) + O(mpq) + O(1) + O(mq) \\
 &= O(mpq)
 \end{aligned}$$

3. แสดงวิธีการหา big-oh notation ของ recurrence relation ต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $T(n)$ เป็นค่าคงที่สำหรับ $n \leq 1$

3.1 $T(n) = T\left(\frac{9n}{10}\right) + n$

3.2 $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$

3.3 $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$

3.4 $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{8}\right) + n$

3.5 $T(n) = T(n-1) + \lg n$

3.1) $T(n) = T\left(\frac{9n}{10}\right) + n$

master theorem; $a=1, \frac{n}{b} = \frac{9n}{10} \rightarrow b = \frac{10}{9}, f(n) = n$

พิจารณา; $n^{\log_{\frac{10}{9}} 1} = n^0 = 1$

$f(n) = n = \Omega(n^{\log_{\frac{10}{9}} 1 + \epsilon})$, เมื่อ $0 < \epsilon < 1$

พิจารณา $a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c f(n)$ for some $c < 1$

$1 f\left(\frac{9n}{10}\right) \leq c f(n)$

$1\left(\frac{9n}{10}\right) \leq cn, \quad c = \frac{9}{10} < 1$

\therefore เป็น case 3 ได้ $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n)$

$\therefore T(n) = O(n)$

3.2) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$

master theorem; $a=2, b=4, f(n) = \sqrt{n}$

พิจารณา $n^{\log_4 2} = n^{\log_4 2} = \sqrt{n}$

$f(n) = \sqrt{n} = \Theta(n^{\log_4 2}) = \Theta(\sqrt{n})$

\therefore เป็น case 2 ได้ $T(n) = \Theta(n^{\log_4 2} \log n) = \Theta(\sqrt{n} \log n)$

$\therefore T(n) = O(\sqrt{n} \log n)$

3.3) $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$

Let $n = 2^m$ so $m = \lg n$ and $T(2^m) = T(2^{\frac{m}{2}}) + 1$

Let $T'(m) = T(2^m)$ and $T'(m) = T'(\frac{m}{2}) + 1$

master theorem, $a=1, b=2, f(m)=1$

since $m^{\log_2 a} = m^{\log_2 1} = 1$

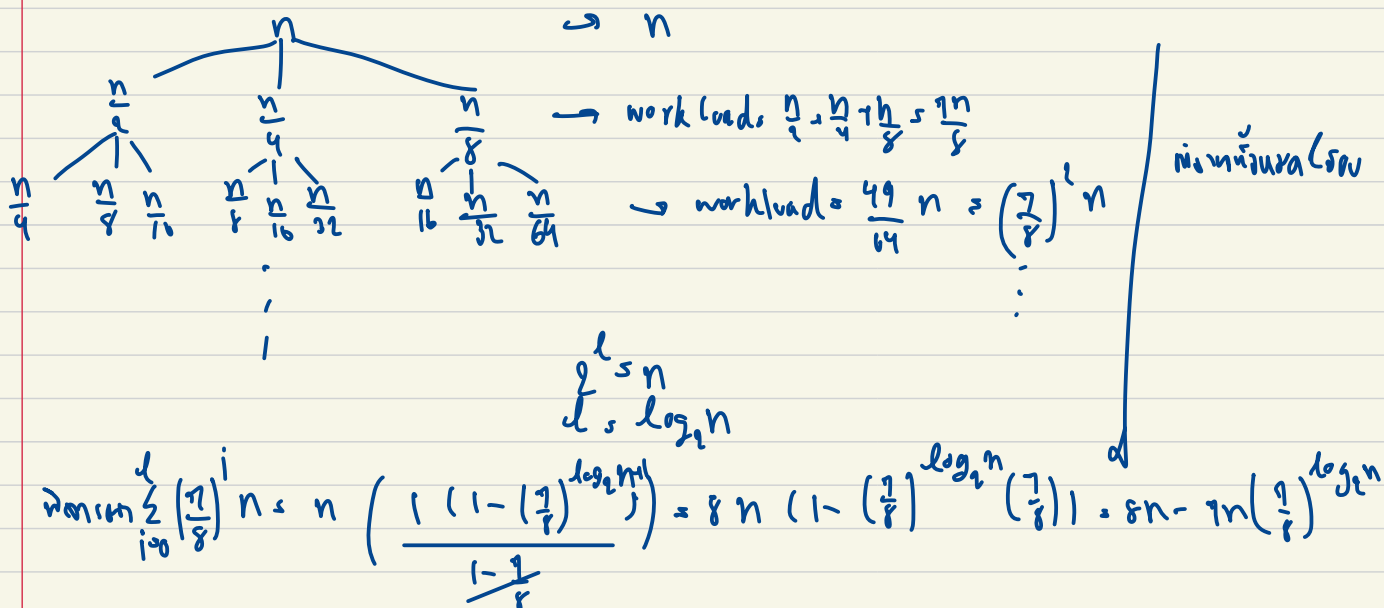
with $f(m)=1 = \Theta(m^{\log_2 a}) = \Theta(1)$

with case 2 and with $T'(m) = \Theta(\log m)$

on $T'(m) = T(2^m) = T(2^{\lg n}) = T(n) \therefore T(n) = \Theta(\log(\lg(n)))$

$\therefore T(n) = O(\log(\log(n)))$

3.4) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + T(\frac{n}{8}) + n$



$\therefore T(n) = O(n)$

3.5) $T(n) = T(n-1) + \lg n$

$T(n) = \lg(n) + \lg(n-1) + \lg(n-2) + \dots + \lg(1)$

$= \lg(n!)$

$T(n) = O(\log(n!))$

