工程电磁场与波

Part1 数理基础

1.1 数学基础

（只有直角坐标系下的公式要记，其他坐标系会给）

- 梯度

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\dot{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{e}_z \\ &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\dot{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\dot{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{e}_z \\ &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\dot{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\dot{e}_\theta + \frac{1}{\rho sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{e}_\phi\end{aligned} \tag{1.1}$$

- 散度（代表了一个区间里是否有源）

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{F} = & \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\phi}{\rho \partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta sin\theta) + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\end{aligned} \tag{1.2}$$

- 旋度

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \dot{e}_x & \dot{e}_y & \dot{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

- 散度定理（高斯定理）

$$\oint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{F})\mathrm{d}V \tag{1.4}$$

- 旋度定理（斯托克斯定理）

$$\oint_l \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{F})\mathrm{d}S \tag{1.5}$$

剩下一些感觉用得不多？主要集中在推导层面而非应用。举几个简单的例子：

1. 标量场的梯度的旋度为0
2. 矢量场的旋度的散度为0
3. 亥姆霍兹定理：任何一个场由其旋度和散度决定，能分解为标量函数的梯度（无旋场）+矢量函数的旋度（无散场）

1.2 物理基础

- Maxwell方程组积分形式

$$\begin{cases} \oint_l H \cdot \mathrm{d}l = \int_S J_c \cdot \mathrm{d}S + \int_S \frac{\partial D}{\partial t} \cdot \mathrm{d}S & \text{全电流定律} \\ \oint_l E \cdot \mathrm{d}l = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \mathrm{d}S & \text{电磁感应定律} \\ \oint_S B \cdot \mathrm{d}S = 0 & \text{磁通连续性原理} \\ \oint_S D \cdot \mathrm{d}S = \int_V \rho \mathrm{d}V = q & \text{静电场高斯定理} \end{cases} \tag{1.6}$$

- 微分形式

$$\begin{cases} \nabla \times H = \begin{cases} J_c \\ J_v \end{cases} + \frac{\partial D}{\partial t} & \text{全电流定律} \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} & \text{电磁感应定律} \\ \nabla \cdot B = 0 & \text{磁通连续性原理} \\ \nabla \cdot D = \rho & \text{静电场高斯定理} \end{cases} \tag{1.7}$$

[注]：上面的量都是矢量！都有箭头！考试的时候必须写上矢量标志！只是我懒得打了。

- 其他

$$\begin{array}{cccc} \text{静电场} & \rightarrow \begin{cases} \text{恒定电场} \\ \text{恒定磁场} \end{cases} & \rightarrow \text{动态电磁场} \\ q & \rightarrow I & \rightarrow \dot{I} \\ \text{描述方式：} E, D & \rightarrow \begin{cases} J, E \\ H, B \end{cases} & \rightarrow B, H, D, E \\ \text{描述方式：} \varepsilon & \rightarrow \begin{cases} \gamma \\ \mu \end{cases} & \rightarrow \varepsilon, \gamma, \mu \end{array}$$

Part2 对应关系

2.1 物理量与公式

描述	静电场	恒定电场	恒定磁场
场	E	E	B
	D	J	H
描述	ε	γ	$\frac{1}{\mu}$
	q	I	I
	$\nabla \cdot D = 0$	$\nabla \cdot J_c = 0$	/
	$D = \varepsilon E$	$J = \gamma E$	$H = \frac{1}{\mu} B$
	C	G	
能量	$W_e = \int \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \mathrm{dV}$	$p = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} = EJ = \gamma E^2 = \frac{J^2}{\gamma}$	$W_e = \int \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \mathrm{dV}$
力	$F = \frac{\partial W_e}{\partial g}\|_{\varphi=const} = -\frac{\partial W_e}{\partial g}\|_{q=const}$		$F = \frac{\partial W_m}{\partial g}\|_{I=const} = -\frac{\partial W_m}{\partial g}\|_{\varphi=const}$
法拉第观点	纵张力/侧压力$\frac{F}{S} = \frac{1}{2} DE$		纵张力/侧压力$\frac{F}{S} = \frac{1}{2} BH$

2.2 位函数描述

	静电场	恒定电场	恒定磁场（标）	恒定磁场（矢）
	电位φ	电位φ	标量磁位φ_m	矢量磁位A
位与场关系	$E=-\nabla\varphi$	$E=0$	$B=-\mu\nabla\varphi_m$	$B=\nabla\times\vec{A}$
范定方程	$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$	$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$	$\nabla^2\varphi_m=0$（无源区）	$\nabla^2\vec{A}=-\mu J_c$
边界条件	$\begin{cases}E_{1t}=E_{2t}\\D_{2n}-D_{1n}=\sigma\end{cases}$	$\begin{cases}E_{1t}=E_{2t}\\J_{1n}=J_{2n}\end{cases}$	$\begin{cases}B_{1n}=B_{2n}\\H_{1t}-H_{2t}=K\end{cases}$	$\begin{cases}B_{1n}=B_{2n}\\H_{1t}-H_{2t}=K\end{cases}$
位函数描述	$\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2\\\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\sigma\end{cases}$	$\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2\\\gamma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\gamma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\end{cases}$	$\begin{cases}\varphi_{m1}=\varphi_{m2}\\\mu_1\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}\end{cases}$	$\begin{cases}\vec{A}_1=\vec{A}_2\\\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_1}{\partial n}-\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_2}{\partial n}=K\end{cases}$
导出条件	$\nabla\times E=0$	$\begin{cases}\nabla\times E=0\\\nabla\cdot J=0\end{cases}$	$\nabla\times H=0$（无源区）	$\begin{cases}\nabla\cdot B=0\\\nabla\times B=\mu J\\\nabla\cdot A=0\text{（洛伦兹规范）}\end{cases}$
折射定律	$\frac{tan\alpha_1}{tan\alpha_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$	$\frac{tan\alpha_1}{tan\alpha_2}=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$	$\frac{tan\alpha_1}{tan\alpha_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}$	$\frac{tan\alpha_1}{tan\alpha_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}$

- 学的时候老折磨了，...我尽量用表格的形式，为了能直观的看到电磁场的区别和相似。毕竟电磁场的对称性我感觉还是挺强的，我想试着从这方面着手来观察他们的变化。
- 注意一下这里B和E，H和D不是完完全全对称的，这里t（切向）和n（法向）也要换

Part3 需要记的电磁场公式

3.1 静电场

- 电容与部分电容：

平行板	圆柱形	球形
$C=\frac{\varepsilon S}{d}$	$C=\frac{2\pi\varepsilon l}{ln\frac{b}{a}}$	$C=\frac{4\pi\varepsilon R_1R_2}{R_2-R_1}$

记（部分电容）：

1. $\{q\}=[\alpha]^{-1}\{\varphi\}=[\beta]\{\varphi\}$
2. $C_{i0}=\sum_j\beta_{ij}$；$C_{ij}=-\beta_{ij}(i\neq j)$

- 电场：

描述	电场强度	电势
点电荷	$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}$	$U=-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r}$
无限大带电平面	$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon}$	
电偶极子	$E=\frac{p}{4\pi\varepsilon r^3}(2cos\theta\dot{e}_r+sin\theta\dot{e}_\theta)$	$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{pl}{r^2}$
均匀带电导线	$E=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon r}(sin\theta_1+sin\theta_2)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}$	$U=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\rho$

- 镜像法

系统	镜像描述
点电荷—无限大接地平面	等大反向同距$-q$
电轴—无限大接地平面	等大反向同距$-\tau$，电位$\varphi=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$，等电位线同心圆
电轴法	$h^2=a^2+b^2$，导线间距2h，电轴间距2b，圆半径a
点电荷—无限大介质平面	$\begin{cases}上半空间q'=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q\\下半空间q''=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q\end{cases}$
	q‘ 在下方同距处，q“ 在上方同距处
点电荷—接地导体球	$q'=-\frac{r}{d}q;d'=\frac{r^2}{d}$（不接地圆心多一个q“ = q'）

3.2 恒定电流场

- 接地电阻与跨步电压

1. 深埋电阻$G=4\pi\gamma a$，半埋电阻$G=2\pi\gamma a$
2. 任意一点电势$\varphi=\frac{I}{2\pi\gamma r}$，或者从电场角度理解$E=\frac{I}{2\pi\gamma r^2}$，（$E=\frac{J}{\gamma}=\frac{I/2}{\gamma\cdot\pi r^2}$）
3. 跨步电压$U=\frac{I}{2\pi\gamma}(\frac{1}{r-b}-\frac{1}{r})\approx\frac{Ib}{2\pi\gamma r^2}$

- 磁场

描述	磁场强度
电流元	$B=\frac{\mu}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e_R}}{r^2}$
长直导线	$B=\frac{\mu I}{4\pi\rho}(sin\theta_1+sin\theta_2)=\frac{\mu I}{2\pi\rho}$
无限大导电片	$B=-\frac{\mu K}{2}\vec{e_x}$（跟电场挺像的）
无限大导板	$B=\begin{cases}-\frac{\mu Jd}{2}\vec{e_x}, & \|y\|>\frac{d}{2}\\-\mu Jy\vec{e_x}, & \|y\|<\frac{d}{2}\end{cases}$
磁偶极子（小电流环）	$B=\frac{\mu m}{4\pi r^3}(2cos\theta\dot{e_r}+sin\theta\dot{e_\theta})$
镜像：线电流—无限大媒质	$\begin{cases}I'=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2}I\\I''=\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}I\end{cases}$
	注意他跟电荷镜像是反的！（或者可以用$\frac{1}{\mu}-\varepsilon$推导）

- 电感

描述	电感大小
计算公式	$L=\frac{\Psi}{I}=\frac{2W}{I^2}$
同轴电缆外自感	$L_o=\int\frac{\mu}{2\pi\rho}l\mathrm{d}\rho=\frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$
同轴电缆内自感	$L_i=\frac{\rho^2}{a^2}\int\frac{\mu}{2\pi\rho}l\mathrm{d}\rho=\frac{\mu l}{8\pi}$
两传输线	上面公式翻个倍
通电螺线管	$L=\frac{NBS}{I}=\frac{N\mu_0 nIS}{I}=\frac{\mu_0 N^2 S}{l}$

Part4 动态电磁场

4.1 基本模型

- 时谐电磁场：
  - 求导——> $j\omega$
- 有损媒质（我觉得不考因为我记不住）：
  - $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon'-j\varepsilon''=\varepsilon'-j\frac{\gamma}{\omega}$
- 坡印廷定理
  - $S=E\times H$
  - $\begin{cases}\nabla(E\times H)=-\frac{\partial}{\partial t}(\omega_e+\omega_m)-EJ\\-\oint(E\times H)=\frac{d}{dt}(W_e+W_m)+P\end{cases}$
- 电磁位
  - 洛伦兹规范$\nabla\cdot A=-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}$
  - $E=-\nabla\varphi-\frac{\partial A}{\partial t}$（多了后面一项）
  - 方程（感觉不会要你解吧？）：$\begin{cases}\nabla^2A-\mu\varepsilon\frac{\partial^2A}{\partial t^2}=-\mu J\\\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}$
- 关于电磁波
  - $$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}};k=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi}{\lambda};\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

4.2 准静态

描述	电准静态场	磁准静态场
忽略项	$\frac{\partial B}{\partial t}$	$\frac{\partial D}{\partial t}$
方程组	$\begin{cases}\nabla\times E=0\\\nabla\cdot D=\rho\end{cases}$	$\begin{cases}\nabla\times H=J\\\nabla\cdot B=0\end{cases}$

- 电荷弛豫与磁屏蔽
  - 反正就是以$Ae^{-\frac{t}{\tau}}$的形式衰减
- 集肤效应
  - 扩散方程（复数形式就是求导变jω）：$\begin{cases}\nabla^2E=\mu\gamma\frac{\partial E}{\partial t}\\\nabla^2H=\mu\gamma\frac{\partial H}{\partial t}\end{cases}$
  - 透射深度：$d=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$
  - 衰减系数：$p=\frac{1+j}{d}$，反正就是以Ae^{-px}形式衰减，两边大中间小
  - 交流电阻随频率增大而增大，交流电感反之（公式不写了）

4.3 电磁辐射

- 均匀平面电磁波：

场	近场	远场
E	$\frac{\dot{q}\Delta lcos\theta}{2\pi\varepsilon r^3}\dot{e}_r+\frac{\dot{q}\Delta lsin\theta}{4\pi\varepsilon r^3}\dot{e}_\theta$	$j\frac{I\Delta lk^2}{4\pi\omega\varepsilon r}sin\theta e^{-jkr}\dot{e}_\theta$
H	$\frac{I\Delta lsin\theta}{4\pi r^2}\dot{e}_\phi$	$j\frac{I\Delta lk}{4\pi r}sin\theta e^{-jkr}\dot{e}_\phi$
S		$S_{av}=\eta(\frac{I\Delta l}{2\lambda r})^2sin^2\theta\,\dot{e}_r$
R		$R=\frac{2\pi}{3}(\frac{\Delta l}{\lambda})^2\eta$

- 正入射：

理论依据	方程	解
$E_{1t}=E_{2t}$	$E_{10}^++E_{10}^-=E_{20}$	$E_{10}^-=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_1+\eta_2}E_{10}^+$
$H_{1t}-H_{2t}=K=0$	$\frac{E_{10}^+}{\eta_1}-\frac{E_{10}^-}{\eta_1}=\frac{E_{20}}{\eta_2}$	$E_{20}=\frac{2\eta_2}{\eta_1+\eta_2}E_{10}^+$

- 注：理想导体（γ为正无穷）中，没有电场也没有磁场，所以E、H直接全都是0

池子

- 理想导体中γ趋近于无穷大，内部没有磁场，没有电场。但是外面会有电荷分布（σ和K）
- 一般题目（各向同性介质）的外面没有面电荷/体电荷等分布
-