傅里叶变换的意义

频域的意义：从连续信号出发

- 这里推荐一下B站的一个视频“https://www.bilibili.com/video/BV1aW4y1y7Hs”。他讲的内容跟我写的这一小章基本有相同的含义。

现在，我们有一个非常常见的时域内连续信号x(t)。但是大部分时域信号处理起来比较困难，所以在《微积分（甲）》中，我们学到了如下的三角傅里叶分解：

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \Sigma_n(a_n cos(n\omega_0 t) + b_n sin(n\omega_0 t)) = \frac{A_0}{2} + \Sigma_n A_n cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (1)$$

他的意思是：对于任何一个信号，都可以被分解为一堆三角函数的求和的形式，这些三角函数的频率各不相同。

接来下看两个概念：

1. 时域无限，频域受限

   比如说一个时域内无限长的信号$x_1(t) = Asin(2t) + Bsin(3t)$，是一个无限长的周期信号，那么他通过上方式子的分解，只会有两项，其中$n\omega_0$分别为2和3。那么，他在频域内的含义就是仅在$\omega = 2/3$时有值。

2. 时域受限，频域无限

   比如说一个时域内有限长的信号$x_2(t) = 1, (-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2})$，实际上就是一个门函数信号。那么他通过上方的式子的分解，形成了无穷多项：$x_2(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{T}t\right)$。

3. 当然，一个函数完全可能在时域和频域内同时无限，比如：

一个方波信号，其傅里叶级数表示为：$x = \frac{2}{\pi}(sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}sin(5\omega_0 t) + ...)$

信号在频域内的含义表明了该信号的频谱（频谱密度），也就是说这个信号由以哪种（哪几种）角速度ω的正余弦函数构成。比如上文中的x_1，就由角频率分别2和3的两种信号构成。然而众所周知，三角函数和复指数函数具有对应的关系，这样我们就把信号频谱分为了幅频和相频，也就是**振幅**和**幅角**。当我们知道了一个信号在频域中的形状，我们就知道了这个信号在时域中**由哪几种频率的正弦波构成，他们之间的相位差了多少，以及振幅之比是多少。**

- 这两条解释了**CFT和CFS变换对**。
  - CFS中时域是一个无限的周期函数，所以**频域有限**，并且由于时域信号仅由几个确定的波相加而成，因此**频域是离散**的，只在几个确定的频率上有值。根据采样定理我们知道，频域信号由一个具有不同幅值和幅角冲激函数串构成。

- CFT中时域是一个有限的非周期函数，所以**频域无限**，代表着时域由无穷多种正弦波构成。这个时候频域不再离散，而变成了频谱密度。

一般而言我们并不关心频域中的振幅具体是多少，只关心相对比值。就像音量可以随意调节，只要各个音高的音响度之比相同。

连续傅里叶变换对

在上文我们已经讲到最开始的傅里叶级数 $x(t)=\frac{a_0}{2}+\Sigma_n(a_n cos(n\omega_0 t)+b_n sin(n\omega_0 t))=\frac{A_0}{2}+\Sigma_n A_n cos(n\omega_0 t+\varphi_n)$。现在我们尝试把他再进一步改造，就能变成信号课程中的第一个傅里叶变换对：**CFS**。

众所周知，三角函数可以被指数函数替代，于是我们把上式中的A全都丢到求和函数里面，得到：

$$x(t)=\Sigma_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)\cdot e^{jn\omega_0 t} \tag{2}$$

这里用复指数e，加上X()中的角度来构成三角函数，用X()中的幅度来构成大小的分量。这里n取负值是数学推导所导致，在实际上没有很大的意义，仅用于数学推导，才有负数的频率。但是现在你还是不知道X()是多少啊，所以他的逆变换来了：

$$X(n\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t \tag{3}$$

这样我们的第一条变换对，CFS就出来了。注意到，傅里叶一开始对函数x(t)的展开是基于一个基频ω_0的，之后所有的分量都是这个频率的整数倍。因此，这解释了CFS变换对的性质：**他在频域中是离散的，仅仅在$\omega=n\omega_0$的时候有值。由于CFS的求和项一直展开到无穷项，所以频域中他有无穷多项，频域无限。**

好现在我们再来看一遍。CFS的正变换（公式3）把一个时域内的信号x(t)分解为以ω_0为间隔的一系列频域内的频谱函数，他的幅值代表了这个频率的信号有多重要，他的相位（因为这个函数是一个复数）代表了这个频率的信号相差了多少相位。

CFT对CFS在频域内做的变化非常简单。当周期T趋近于INF，那么积分上下限都变味无穷，$n\omega_0$变成ω，再把T移到左边变成频谱密度函数。频谱密度函数意味着他在每一个频率上都有对应的分量，而可以用$|X(\omega)|$或者$|X(\omega)\frac{d\omega}{2\pi}|$来表示他的振幅。对时域信号x同理，既然都用$|X(\omega)\frac{d\omega}{2\pi}|$来表示振幅了，那就直接换掉X，变成积分形式。

由此，CFT的公式为：

$$\begin{cases}x(t)=\frac{1}{2\pi}\int X(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\\ X(\omega)=\int x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t\end{cases} \tag{4}$$

采样与频谱分析

时域采样定理

在计算机中，不太容易处理一个连续信号，最好是处理一个离散值。因此我们需要对一个信号进行采样，用离散的$x_s(n)$代替$x(t)$。时域内信号采样的方法是乘上一个冲激函数串，即$x_s(t) = x(t) \times \delta_T(t)$，根据卷积定理，频域内有$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * \Delta_T(\omega) = \frac{1}{T_s}\Sigma_n X(\omega - n\omega_s)$。他发生了周期延拓。因此我们要求$\omega_s \geq 2\omega_m$，即$f_s \geq 2f_m$。

但是就像上文中所说的“时域受限，频域无限”，门函数等函数由无穷多个正余弦信号构成，因此其并不存在最大的频率f_m。这个时候，我们采用**抗混叠滤波器滤出该信号的高频分量**——比如，只用3-5个正弦信号的叠加来近似门函数——这样被近似的信号就存在了最大的频率。可以这么操作的原因是，对于一般的周期信号，在n趋近于inf时其傅里叶级数的系数也会趋近于0，因此高频分量对函数的影响极小。

频谱分析

假设我们现在已经熟练掌握了CFS，CFT，DFS，DTFT，DFT五种变换对（没掌握也没关系反正会翻书上的表格就行）。对于计算机而言信号频域离散+非周期。由于我们对时域信号进行了舍弃高频分量的处理，而其频域信号也是离散的，所以可以想象成：**在理想情况下，频域信号应当由一个又一个不同峰值冲激函数组成。**（详见书p157，图2-40最上方两个图）。但是我们不可能真的用连续信号来做傅里叶变化，由此DFT应运而生，提供了一个把信号从离散+非周期变换到离散+非周期的工具。

DFT重点对信号进行了两个处理：加窗和采样

1. 加窗——泄露

当我们对一个信号进行加窗处理之后，可以证明这个信号不可避免的会产生一定程度的泄露（即乘上了Sa()函数，见书p157，图2-40最下方两个图），原来的冲激函数现在变成了一个在以原冲激函数位置为峰值的函数，附近产生了其他频率的摆动。减小泄露的方法显而易见：

1. **增大窗函数**，随之而来的代价是更高的计算量。（很好理解吧，窗函数无穷大就是原函数了，而不用原函数的原因就是算不动）。
2. 选择**合适的窗**。 加窗带来的泄露有两个影响：**主瓣宽度和拖尾**，矩形窗导数大，高频分量多，拖尾长；其他窗导数小，主瓣宽度大。

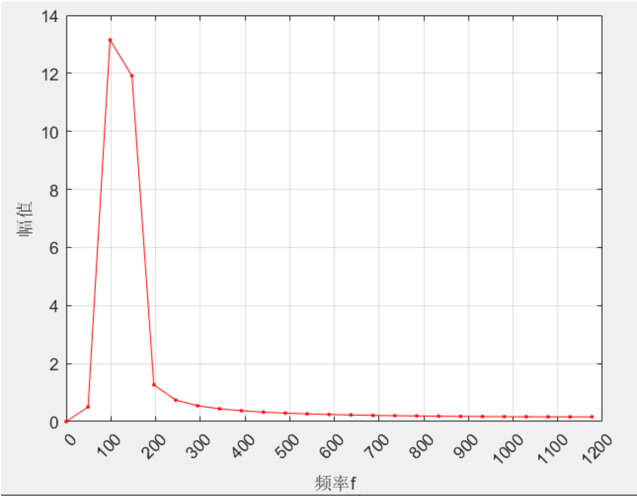
- **时域中与加窗有关的函数我们用下标0来表示。**比如，
  - 周期T_0表示采样信号记录长度/持续时间/加窗的宽度
  - 频率f_0（Ω_0）表示最小分辨率（基波频率），其具体含义之后再讲。

2. 采样——混叠

如果采样频率较低，那么信号在频域中将会发生**混叠**，指两个原本分立的频域中的冲激函数现在混到了一起，不再具有两个峰值，而是只有一个峰值，因此这两个频率的信号就不能被区分出来。反之，**若时域内信号的两个频率分量恰好能被区分出来，那么就把这个频率分量称作最小分辨率，数值为f_0。**有$f_0 = \frac{1}{T_0}$。

- **时域中与采样有关的函数我们用下标0来表示。**比如，
    - 周期T_s表示采样周期，f_s表示采样频率

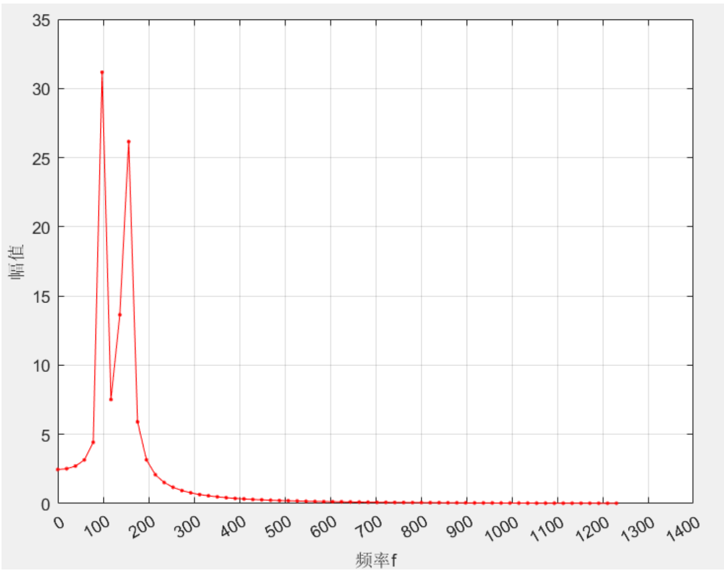
直观的理解一下混叠：信号 $x = 0.5 * sin(2 * pi * 100/fs * n) + 0.5 * sin(2 * pi * 150/fs * n)$具有100和150Hz两个频率分量，取N=51点采样，却得到下图，两个信号分不开。



信号分辨率$f_0 = \frac{f_s}{N}$。可以认为，信号分辨率受到**加窗宽度T_0**，**采样频率f_s**，**采样点数N**三者的影响。但是这三者并不独立，其中两者可以推出第三个变量（$N = \frac{T_0}{T_s}$）。提高分辨率的方案有：

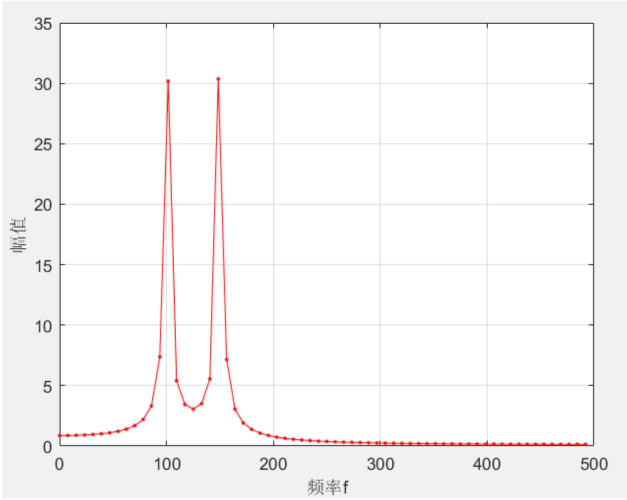
1. f_s不变，增加窗长T_0（即增加点数N）：

   将点数增加到128：

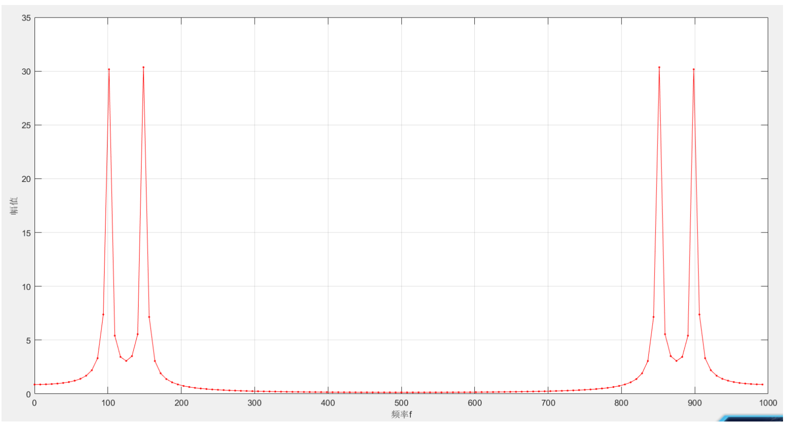


2. 点数N不变，直接减小频率域采样率f_s：（注意，不能过分减小，至少要在$2f_m$以上）

   将采样频率减小到1000：



- 解题：先根据题目条件（已知的f_m和要求的f_0），先假设一个$f_s=2f_m$，然后根据关系式算出此时至少需要采集的点数N。对于FFT计算，将N扩充到2^a，然后再修正f_s。
- 一个有趣的现象：DFT的对称共轭性
    - 对于DFT而言，X(m)=X*(N-m)，因此其产生的频谱函数应该是中心对称的。
    - 对于频谱函数中的第K个点，其对应的频率为$f=\frac{k}{N}f_s$，其推导为：$\Omega=\frac{2\pi}{N}k$；$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\Omega}{2\pi}f_s$
    - 因此，频谱函数对应的频率在0 ~ f_s中变化，而由于对称性，**后面一半是冗余的**，这也进一步解释了f_s为什么至少要是f_m的两倍，因为我们在考虑频谱图的时候后面一半都会被切掉。
    - 直观的理解一下，这个是上方的函数的DFT，如果我不加处理直接输出，那么频谱函数应该是：



    - MATLAB代码：

```
% Function
f1 = 100; f2 = 150; % 信号由100+150Hz组成
fs = 1000; % 采样频率
n = 0:1:127; N = length(n); % 采样点个数
x = 0.5*sin(2*pi*f1/fs*n)+0.5*sin(2*pi*f2/fs*n);
y = fft(x);
% Plot
figure(1); plot(n,x,"o-");
figure(2);
plot(n*fs/N,abs(y),"r.-"); % 信号中第k点对应（k/(N*Ts)）频率，k和n一样就不另设置变量k了
% plot(n(1:N/2)*fs/N,abs(y(1,1:N/2)),"r.-");
xlabel("频率f"); ylabel("幅值"); set(gca,'xtick',0:100:2500); grid on
```

离散信号的分析

上一章"采样与频谱分析"中提到了采样，采样是将时域连续信号转换成离散信号的必要方法。在采样的时候，当然有必要对采样的一些物理量做出说明和规定。还记得上面我们是怎么说明N和采样、加窗的关系的吗？$N=\frac{T_0}{T_s}$，所以N代表的是在一个周期内的采样点个数。如果他给了你连续信号和采样频率，那么你给他采集一个周期的时间然后这么算N；如果他直接给了你离散信号的表达式x(n)={1,1,4,5,1,4,...}，那么就直接把一个周期内的点数拿来当做N，采样频率也就显得不那么重要了。既然说了N是一个周期内的采样点个数，那么一个周期又可以认为是2π，那么对应到频域上的取值也就是只有2π了。**离散对周期这一说法的重要意义就是离散的信号可以被转换到频域中某一个确定范围之内，这个范围就是2π**。如果你对Z变换的最后一块内容还有影响，就知道Z变换就是laplace变换在圆周上的投影。

个人感觉离散信号的分析与连续信号的分析在这部分内容中没有过多的差别。就是给你任意一种时域信号，他一定可以被归结为四种傅里叶变换对中的一种：是否周期以及连续还是离散。反正总不可能搞混吧，没有任何一种信号不属于这四种分类或者同时属于两种分类。因此要求给定信号的频域上的内容，我们就查表，找对应的四个公式之一，然后给他转换到频域上去，这样就可以了。

卷积