Chap2. 线性规划

标准型：$\begin{cases}\max f(x)=\sum c_j x_j = CX \text{（只有 C 是行向量）}\\ st.\begin{cases}AX=b\\X\geq 0\end{cases}\end{cases}$

$\bar{A}=[A|b]$

$rank(A)=rank(\bar{A})=n$ 有唯一解

$rank(A)=rank(\bar{A})<n$ 无穷多解

$rank(A)<rank(\bar{A})$ 无解

转换：$\begin{cases}x_j\text{无约束}\rightarrow x_j = x_j' - x_j''\\ AX\leq b\rightarrow AX+x_{si}=b\end{cases}$

#凸集：$X_1, X_2 \in C \rightarrow aX_1+(1-a)X_2\in C\ (0<a<1)$

#定理：线性规划可行域是凸集，最优解是基可行解的线性组合。

#定义：对 n 个变量、m 个约束的问题，基解是 n-m 个（非基）变量为 0 的解，基 $B_{m\times m}$ 对应系数矩阵 A 的满秩子矩阵。即$\boldsymbol{X=[B^{-1}b\ 0]^T}$

单纯形法：定义：基变量$\overline{x_i}\in I_B$（带顶线），非基变量集合I_N

目标函数系数c_j →			$c_1 ... c_n$
C_B	X_B	b	$x_1 ... x_n$
基变量目标函数系数	基变量	约束右边项	系数矩阵 A
σ_j →			检验系数

单纯形表：

c_j →			C	0	
C_B	X_B	b	X'	X_S	
0	X_S	b	A	I	初始
σ_j →			C	0	
C_B	X_B	$B^{-1}b$	$\boldsymbol{B^{-1}A}$	$\boldsymbol{B^{-1}}$	最终
σ_j →			$\boldsymbol{C-C_BB^{-1}A}$	$\boldsymbol{-C_BB^{-1}}$	

1. 令（初始）基变量为单位阵（$B=I$）
2. **检验数**：$\boldsymbol{\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m}\overline{c_i}a_{ij} = c_j - C_BB^{-1}A}$
   $= c_j - C_BB^{-1}P_j$（P_j是第j列）
3. 若$\forall\sigma_j\leq 0$ 则为最优解，否则转 4. 换基迭代
4. 入基j选$\max\ \sigma_j$，**出基i选 $\min_i\{\frac{b_i}{a_{ij}}|a_{ij}>0\}$**，转 1.

大 M 法：若初始无法构筑基为单位阵（$B=I$），则更改约束，强行引入变量$x_k(k>n)$，在目标函数中添加$-Mx_k$，保证x_k取值一定为 0（$M\gg a_{ij}$）

两阶段法：变量与约束修改同上，更改目标函数为 $\max z=-\sum_{k=n}^{n+s}x_k$，保证$x_k$为 0，解完后换回原目标函数

#几种特殊情况（没列举完）：

1. 无界解：$\exists\sigma_j>0$, but $P_j\leq 0$
2. 无穷多解：$\forall\sigma_j\leq 0, \exists\sigma_j=0$

$\sigma_j>0$ $P_j\leq 0$ 无界解

$\sigma_j>0$ 有$a_{ij}>0$ 迭代

$\sigma_j\leq 0$ 有人工变量不为零 无可行解

$\sigma_j\leq 0$ 有非基变量σ_j为0 无穷个

$\sigma_j\leq 0$ 没有非基变量σ_j为0 唯一

Chap3. 对偶理论

#定义：对偶问题基本型（注：$Y_{1\times m}$为行向量）

$$\begin{cases}\max z = CX\\ st.\begin{cases}AX\leq b\\X\geq 0\end{cases}\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}\max w = Yb = b^TY\\ st.\begin{cases}YA\geq C\ \ (A^TY\geq C^T)\\Y\geq 0\end{cases}\end{cases}$$

#弱对偶性：对任一可行解，$C\overline{X}\leq b^T\overline{Y}$

#强对偶/最优性：最优解$CX^*=Y^*b$（由$X^*=B^{-1}b$得$Y^*=C_BB^{-1}$）

#最优对偶解：已知B^*，则$Y^*=C_BB^{*-1}$（证明：$X^*=B^{-1}b$）

#互补松弛性：X^*, Y^*为最优解的充要条件是$\boldsymbol{X_s^TY=0}$**且**$\boldsymbol{X^TY_s=0}$，

其中X_s, Y_s为松弛变量，即$AX+X_s=b,\ YA-Y_s=C$

即：当某资源存在剩余时，对应对偶解为 0，反之亦然。

原问：利润最大化的生产计划问题

对偶：资源定价底线问题 $(AX-b)^TY=0$ 和 $X^T(A^TY-C^T)=0$

#影子价格：即资源的边际利润$Y^*=\frac{\partial z}{\partial b}$，由互补松弛性，某资源存在剩余时（非紧约束），影子价格为 0；反之可取任意值。

对偶单纯形法：

1. 找对偶问题基可行解，即检验数$\sigma = C - C_BB^{-1}A\leq 0$，但变量$\boldsymbol{X=B^{-1}b}$**部分分量可为负**（最终要把$X=B^{-1}b$全部变正）
2. **出基变量 r：$\boldsymbol{r=\min_i\{b_i|b_i<0\}}$**
3. **入基变量 s：$\boldsymbol{s=\min_j\{\frac{\sigma_j}{a_{rj}}|a_{rj}<0\}}$**
4. 不断迭代直到$B^{-1}b\geq 0$

对偶单纯形法常用于灵敏度分析、整数规划二次求解。

灵敏性分析：

（1）**约束项b变化**：$b^{(1)}=X_B{}^{(1)}=X_B{}^{(0)}+B^{-1}\cdot\Delta b$

更改单纯形表的b后用对偶单纯性法求解

（2）**目标函数系数C变化**：直接在单纯形表中更正系数C和检验数，若检验数大于 0 则说明最优解改变。

（3）**工艺系数矩阵A变化**：若变量x_j对应的系数由$P_j{}^{(0)}$变为$P_j{}^{(1)}$，则更改单纯形表：添加新的一列，变量$\hat{x}_j$对应的列向量为$B^{-1}P_j{}^{(1)}$，令x_j出基，$\hat{x}_j$入基，重新求解单纯性表。

（4）**添加新变量**：单纯形表添列，计算新变量检验数σ_j

（5）**添加新约束**：看原解满不满足，不满足则添新变量入基

Chap4. 运输问题

一种特殊的、稀疏的线性规划问题，变量x_{ij}表示产地 i 运往销地 j 的物量，c_{ij}表示运费。$\min z=\sum_i\sum_j c_{ij}x_{ij}$

产地\销地	B1	B2	B3	产量
A1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	a_1
A2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	a_2
销量	b_1	b_2	b_3	

1. 初始基可行解：共 m+n-1 个变量不为 0（数字格），其余格子对应的变量均取 0（非数字格）。**产销不平衡：虚拟产/销地！**
2. 对非数字格求检验数，小于 0 的入基迭代（默认目标函数是成本，如果c_{ij}是利润那么要反一下）

闭回路法：从每一非数字格出发可以找到**唯一由数字格连成的闭回路**，检验数就是边际效应，即$\sigma_{kl}=\sum c_{ij}\cdot(-1)^{e_{ij}}$，其中$e_{ij}$是从非数字格$kl$到闭回路**顶点格**$ij$走的“步数”，需要算自己（$e_{kl}=0$）

入基 $\sigma_{ij}=\min_{ij}\{\sigma_{ij}|\sigma_{ij}<0\}$

出基 沿闭回路调整 最先为 0 的变量

位势法：

对数字格：$c_{ij}=u_i+v_j$，解方程组（令任一$u_i/v_i=0$）

对非数字格：$\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$

Chap5. 目标规划

目标函数$\boldsymbol{z=\min\sum P_j(\sum d_i^{\pm})}$，引入不同时为 0 的偏差变量$d_i^-, d_i^+$代替松弛变量，即 $\boldsymbol{\sum c_{ij}x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i}$

1. 希望尽可能大（不少于）：$\min P(d_i^-)$
2. 希望尽可能小（不超过）：$\min P(d_i^+)$
3. 希望相等（充分利用）：$\min P(d_i^- + d_i^+)$

单纯形法：检验数是P_j的函数，按优先级分多行计算。$\sigma<0$不满足，选 $\min\sigma_j$入基，$\min_i\{\frac{b_i}{a_{ij}}|a_{ij}>0\}$出基

① 先解松弛问题 如解得 $x^* = \begin{cases} 4.809 \\ 1.817 \end{cases}$ ② ⇒加条件 (2) $x_1 \le 4$ (3) $x_1 \ge 5$ 解 $\begin{cases} x_1=4 \\ x_2=2.1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=1.571 \end{cases}$

Chap6. 整数规划

分支定界法： ③ 此时 x_1 整数 x_2 再分枝. $x_2 \le 2$ (4) $x_2 \ge 3$ (5) 中 $x_2 \le 1$ (6) $x_2 \ge 2$ (7)

求解对应的线性规划，选最优解的某个变量往两侧分块

割平面法： 取法并不唯一(取最大分数所在行)

1. 保证松弛变量也为整数（$\frac{x_1}{3} \le \frac{5}{2} \to 2x_1 + x_2 = 15$）
2. 把最终约束化成：整数（数字和变量）＝非负真分数
3. 考虑新约束，如：$x_1 - x_3 + 1 = \frac{3}{4} - (\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4)$

则：$\frac{3}{4} - (\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4) \le 0 \to -3x_3 - x_4 + x_5 = -3$

（**为了对偶单纯性，最好新变量系数为 1，b 为负**）

0-1 规划与指派问题：

n 人共 n 项任务，变量x_{ij}为第 i 人执行第 j 项任务

	任务（n）
成员（n）	所需时间（n×n 矩阵）

#定理： 矩阵的一行（列）减去该行（列）中最小元素（得到 0 元素），新矩阵求得的最优解与原矩阵相同。

#独立 0 元素： 位于不同行不同列的 0 元素

#定理： n 个独立 0 元素所在单元格x_{ij}即为最优解

若 0 元素较少找不到 n 个，则**先找 m<n 个"独 0"**，然后：

1. 标记无'独 0'行→标记无'独 0'行中'非独 0'所在列→标记该列中'独 0'所在行→重复……
2. 对**非标记行**和**标记列**划线
3. 找**标记行**的最小元素 a，**标记行**减 a，**标记列**加 a
4. 这样能保证矩阵仍然不出现负值，继续找'独 0'

Chap7. 非线性规划

标准型： $\begin{cases} \min f(x) \\ st. \begin{cases} g_j(X) \ge 0 \\ h_i(X) = 0 \end{cases} \end{cases}$（用$\begin{cases} h_i(X) \ge 0 \\ -h_i(X) \ge 0 \end{cases}$可化为上式）

一阶极值必要条件： $\nabla f(X) = (\partial f/\partial x_1, \cdots, \partial f/\partial x_n)^T = 0$

充分条件： $\boldsymbol{Hesse(X) = \nabla^2 f(X) = [\partial f/\partial x_i \partial x_j]_{n \times n}}$正定

即$\nabla^2 f(X^*) > 0$，当半正定（≥0）时退化为必要条件

F-J 与 K-T 条件（后者就是把μ_0除掉，最优点一般都满足）

可行方向：

$\nabla g_j(X)^T \cdot P > 0$

$\nabla f(X)^T \cdot P < 0$

$$\begin{cases} \mu_0 \nabla f(X) - \sum \mu_j \nabla g_j(X) = 0 \\ \mu_j g_j(X) = 0 \text{（互补松弛性）} \\ \mu_j \ge 0 \text{ 且 } \sum \mu_j \ne 0 \text{（强非负）} \end{cases}$$

解析解法：$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k P^k$（步长×方向）

最优步长：$\nabla f(X^{(k)} + \lambda_k P^k) = 0$（即：取到 min 值）

1. **最速下降：** $P^{(k)} = -\nabla f(X^{(k)})$，$\lambda_k{}^* = \frac{\nabla f(X^k)^T \nabla f(X^k)}{\nabla f(X^k)^T H(X^k) \nabla f(X^k)}$
2. **牛顿法：** $X^{(k+1)} = X^{(k)} - H(X^{(k)})^{-1} \nabla f(X^{(k)})$（即步长默认为 1）
3. **变尺度法：** $p_k = X^{(k+1)} - X^{(k)}$，$q_k = \nabla f(X^{(k+1)}) - \nabla f(X^{(k)})$

$$\overline{H}_{k+1} = \overline{H}_k + \Delta\overline{H}_k \text{ , } \overline{H}_1 = I \text{ , } \Delta\overline{H}_k = \frac{p_k p_k{}^T}{p_k{}^T q_k} - \frac{\overline{H}_k q_k q_k{}^T \overline{H}_k}{q_k{}^T \overline{H}_k q_k}$$

4. **外点罚函数法：** $M_1 > 0, M_{k+1} = (5 \sim 10)M_k$，惩罚项 $< \varepsilon$ *退出*

罚函数：$\min P(X, M_k) = f(X) + M_k(\sum h_i{}^2(X) + \min\{0, g_i(X)\}^2)$

利用$\nabla P(X) = 0$ 求解。

迭代停止条件：$-g_j(X^k) < \varepsilon$ 且 $|h_i(X^k)| < \varepsilon$

5. **内点罚函数法：** $r_1 > 0, r_{k+1} = r_k/(5 \sim 10)$，惩罚项 $< \varepsilon$ 退出

罚函数：$\min P(X, r_k) = f(X) + r_k \sum 1/g_j(X)$（不能有等式约束）

迭代停止条件：$|r_k \sum_j \log g_j(X^k)| < \varepsilon$

Chap8. 动态规划

实际不是求和，只是集合一样列出来

#定义：状态s_k，决策$u_k(s_k) \in D_k(s_k)$，策略$p_{k,n} = \{\sum_{i=k}^n u_i(s_i)\}$

指标函数：$V_{k,n}(u_k, s_k, \cdots, s_n) = \phi_k(s_k, u_k, V_{k+1,n}(s_{k+1}, p_{k+1,n}))$

从后往前推，效益综合：$f_k(s_k) = \max(u_k(s_k) * f_{k+1}(s_{k+1}))$

最优性定理：$p^*_{1,n}$ 最优 当 $V_{1,n}(s_1, p^*_{1,n}) = \underset{p_{1,k-1} \in P_{1,k-1}}{opt}(V_{1,k-1}(s_1, p_{1,k-1}) + \underset{p_{k,n} \in P_{k,n}}{opt} V_{k,n}(s_k, p_{k,n}))$

Chap9. 图论

记 $Graph = (Vertex, Edge)$，度 $deg(v)$ 为端点连接的边数

Dijkstra 最短路算法：（要求边权 weight 均为正）

```
v = smallest unknown distance vertex;
T[v].known = true;
for (each w adjacent to v){
    if (!T[w].known && T[v].dist+Cvw < T[w].dist){
        T[w].dist = T[v].dist+Cvw;
        T[w].path = v; }}
```

逐次逼近法：（边权 weight 可以为负）

最多经过 k 个节点的最短路长：$T^{(k+1)}(v_j) = \min_i(T^{(k)}(v_i) + l_{ij})$

收敛时：$T^{(k+1)}(v_j) = T^{(k)}(v_j)$

节点	边权矩阵	初始路径长	第 i 次路径长
$[v]_{n\times1}$	$[W]_{n\times n}$	$[l_{sj}]_{n\times1}$	$[T]_{n\times m}$

最大流问题： 割集 $(V_1, \overline{V_1}) = \{(v_0, v_1, \cdots, v_i), (v_j, \cdots, v_n)\}$

图的最大流量为分离v_s到v_t的最小割集流量

割集为分离源 s 和汇 t 的点集

最小费用流： 每次找最小可增广费用路径，增加流量直到要求

Chap11. 排队论

（以 M/M/1/inf 为例）

记：**单位时间顾客到达数$\boldsymbol{\lambda}$，服务数$\boldsymbol{\mu}$**。顾客到达时间$t(n)$，间隔$\tau(n)$，店内人数$N(t)$为泊松分布，记$P_n(t) = P(N(t) = n)$。

1. 间隔$\tau(n)$为负指数分布，$E(\tau) = 1/\lambda$，$D(\tau) = 1/\lambda^2$
2. 时间$t(n)$为 n 阶 Erlang 分布，$E(n) = n/\lambda \triangleq \mu$
3. 人数$N(t)$为泊松分布，$P_n = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$，$E = D = \lambda t$

空闲概率$P_0 = 1 - \lambda/\mu$，**平均队长**$L = \sum nP_n = \lambda/(\mu - \lambda)$，**平均排队长**$L_q = \sum (n-1)P_n = \lambda^2/\mu(\mu - \lambda)$（队长的单位是时间）

平均逗留/等待时间 $W/W_q = (L/L_q)/\lambda$

Chap13. 博弈论

记：赢得（收益）矩阵 A，a_{ij}为局中人 1 做决策α_i，局中人 2 做决策β_j时，局中人 1 能获得的收益，2 要使对方收益最小

最优：局中人 1：$\max_i \min_j a_{ij}$ ；局中人 2：$\min_j \max_i a_{ij}$

纳什均衡：一方单独改变策略不能获得更高的收益，即上面两人的最优点相同（鞍点条件：$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$）

线性规划求解混合策略：

$$\begin{cases} \max \sum x_i{}' = \frac{1}{w} \\ st. \begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i{}' \ge 1 \\ X \ge 0 \end{cases} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \max \sum y_j{}' = \frac{1}{v} \\ st. \begin{cases} \sum_j a_{ij} y_i{}' \le 1 \\ X \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

一般两人收益的数学期望$w = v$，决策概率$x_i = wx_i{}', y_j = vj_j{}'$

可以给整个矩阵都加/减一个常数，最终结果不变。要求w和v均大于 0，如果为负那么可以给矩阵都加一个数。

可交换性：如果$(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$和$(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$均为博弈G的解则 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_2})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_1})$ 也为该博弈G的解。