MATEMATIČKA GIMNAZIJA

MATURSKI RAD

iz predmeta

Fizika

na temu

GPS sistem. Dokaz specijalne i opšte teorije relativnosti u vašem džepu

Učenik:
Damjan Denić, IV_d

Mentor:
Milan Jocić

Beograd, maj 2018.

Sadržaj

1 Specijalna teorija relativnosti

1.1 Uvod u specijalnu teoriju relativnosti

Ljudi su se od davnina pitali šta je svetlost. u petom veku pre nove ere Starogrčki filozofi su smatrali da je svet sačinjen od četiri elementa: vode, vatre vazduha i zemlje, a da je naše oko stvoreno od kombinacije ta četiri elementa i u njemu zapaljena vatra zbog koje vidimo sve oko nas. Ali ta pretpostavka je brzo oborena zbog nemogućnosti da vidimo u mraku, da bi je zamenila prva značajnija čestična teorija, koju su zastupali Grčki atomisti. Rimski filozof Luktrecije, koji je i sam bio atomista, u prvom veku pre nove ere je zapisao: "Svetlost i toplota Sunca, komponovani su od posebnih čestica koji, kada se oslobode, putuju u trenutku do svoje destinacije". Od tog doba do početka osamnaestog veka smenjivale su se razne teorije. Isak Njutn objavljuje svoju čestičnu teoriju svetlosti 1704, u svojoj knjizi “Opticks” i u senci ostavlja teoriju o talasnoj prirodi svetlosti, koju je zastupala većina naučnika tog doba, među kojima je bio i Holandski matematičar Hajgens.

Mišljenje da je svetlost čestične prirode je bila opšteprihvaćena sve do početka devetnaestog veka, kada je fizičar Tomas Jung objavio eksperiment sa dva proreza kojim je dokazao interferenciju svetlosti, što je talasna osobina i time smatrao da je konačno pokazao talasnu prirodu svetlosti. Kako su naučnici tog vremena zaključivali da je talas u stvari posledica međusobne interacije izmedju čestica postavljeno je pitanje "Kroz koju sredinu se prostire svetlost?". Eksperimentalno su dokazali da to nije vazduh puštajući svetlost kroz neidealni vakuum i tada ustanovili postojanje etra, to jest neke supstance koja se prostire svuda i koju je nemoguce detektovati i kroz koju se prostiru elektromagnetni talasi.

1.2 Majkelson-Morlijev eksperiment

Majkelson i Morli su 1887. godine pokušali da izmere brzinu kojom se Zemlja kreće kroz etar. Sa tadašnjim znanjem astronomije bilo je neprihvatljivo tvrditi da smo centar svemira ili da je etar, ako postoji, uvek stacionaran u odnosu na Zemlju. Merili su brzinu svetlosti u različitim pravcima i očekivali su, zbog brzine kojom se zemlja kreće oko Sunca (30 kilometara u sekundi [2]), razliku u frekvencijama svetlosti reda veličine $\frac{V^2}{c^2} = 10^{-8}$. Rezultat eksperimenta je bio negativan, nisu izmerili nikakvu razliku u frekvencijama svetlosti iako su imali instrumente koji bi mogli izmeriti i mnogo manje odstupanje. I tako ozbiljno uzdrmali dotadašnje razumevanje svetlosti i teoriju postojanja etra. Mnogi fizičari i matematičari kraja devetnaestog i početka dvadesetog veka su pokušavali da nađu objašnjenje za ovakav ishod eksperimenta. Prvi koji je uspeo u tome bio je mladi Albert Ajnštajn 1905. godine, u svom radu *O elektrodinamici tela u pokretu*[1] koji se smatra početkom specijalne teorije relativnosti.

1.3 Osnovni pojmovi specijalne teorije relativnosti [3]

Da bi precizno mogli da definišemo Ajnštajnovu specijalnu teoriju relativnosti prvo moramo uvesti i precizno definisati neke pojmove kao što su, dogadjaj, inercijalni i neinercijalni sistem, uočavanje i tako dalje.
Događaj je trenutna pojava u određenoj tački u svemiru.
Trajanje događaja je je neizmerivo malo. Zato je dobra aproksimacija eksplozija ili svetlosni bljesak. Dodeljujemo svakom događaju koordinate da bismo znali gde se i kada dogodio. Često se koriste pravougli (x,y,z) i sferni (r, Θ, Φ) koordinatni sistem za određivanje pozicije događaja.
Referentni sistem je sistem u odnosu na koji se određuju koordinate događaja. Sastoji se od sistema sinhronizovanih satova i sistema prostornih koordinata koji omogućavaju određivanje pozicije i trenutka u kojem se događaj desio.
U jednom referentnom sistemu ako zamislimo da u svakoj tački postoji sat, onda su oni sinhronizovani i pokazuju isto vreme. Kada noću gledamo u zvezde najbliža zvezda je udaljena od nas više od 4 svetlosne godine što znači da svetlost putuje 4 godine do našeg oka. I kako su svi satovi u svakom referentnom sistemu, pa i onom vezanom za nas usklađeni, svetlost putuje duže od četiri godine

do našeg oka. Zaključujemo da kada gledamo u zvezde vidimo ono što se desilo u prošlosti i da **videti nije isto što i izmeriti** vreme nekog događaja. Specijalna teorija relativnosti se bavi samo inercijalnim referentnim sistemima.
Referentni sistemi koji miruju ili se kreću ravnomerno pravolinijski jesu sistemi u kojima važi zakon inercije i nazivaju se **inercijalni referentni sistemi**. To su sistemi bez sile ili ubrzanja, u njima važi drugi Njutnov zakon, da telo teži da ostane u stanju mirovana ili konstantnog pravolinijskog kretanja. **Posmatrač** je bilo koji objekat koji posmatra događaje iz svog referentnog sistema. I bilo šta što izmeri u svom referentnom sistemu, ne mora biti tačno u nekom drugom.

1.4 Postulati specijalne teorije relativnosti

Već u 17. veku su naučnici primetili da svi zakoni mehanike koji važe u inercijalnom sistemu koji miruje u odnosu na Zemlju, važe identično i u sistemima koji se kreću ravnomerno pravolinijski. Jedan od prvih naučnika koji je to zaključio bio je Galileo Galilej, primetivši da se igre sa loptom mogu igrati na brodu koji se kreće sporo i da neće biti razlike u odnosu na igranje istih na obali. Kako nije pronađen eksperiment koji zavisi od odabira inercijalnog sistema Albert Ajnštajn je postavio **prvi postulat specijalne teorije relativnosti** na toj pretpostavci.
Svi zakoni fizike se mogu zapisati isto u svim inercijalnim sistemima.[3]
Oslanjajući se na prvi postulat, Ajnštajn je primetio da ako se magnetno i električno polje ponaša isto u svakom inercijalnom sistemu, pa da su i dielektrična konstanta (ϵ_0) i magnetna permeabilnost u vakuumu (μ_0) jednake u svakom referentnom sistemu. Kako je brzina elektromagnetnog talasa definisana kao $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ odatle je zaključio **drugi postulat specijalne teorije relativnosti**:
Brzina svetlosti u vakuumu ima istu, konstantnu brzinu c (približno $3*10^8 ms^{-1}$) u svim inercijalnim referentnim sistemima.[3]
Ovo Ajnštajnovo tvrđenje dolazi u direktan sukob sa intuitivnim zakonom slaganja brzina. Ako stojimo na obali mora i gledamo kako se brod udaljava od nas brzinom v, a na njemu automobil koji se kreće brzinom u u istom smeru, rekli bismo da se automobil kreće u odnosu na nas brzinom $v + u$. Prema principu konstantne brzine svetlosti kada bi neko na brodu upalio lampu, svetlost iz lampe ne bi putovala brzinom $v + c$,vec brzinom c i u odnosu na posmatrača na brodu i u odnosu na posmatrača na Zemlji. Ajnštajna je to zaintrigiralo, zašto bi se svetlost ponašala drugačije? Ako ne postoje izuzeci i svetlost podleže istim zakonima kao i sve ostalo oko nas, da li se onda auto zaista kreće brzinom $v + c$?

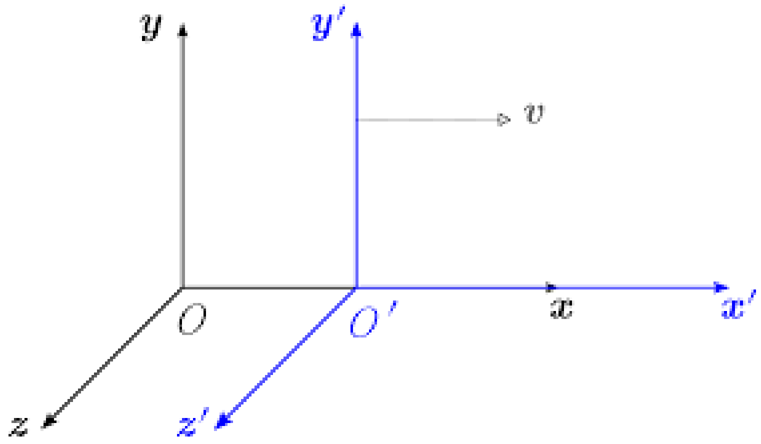
1.5 Transformacije koordinata

Svaki događaj ima svoje tačno određene koordinate i vreme koji su određeni u odnosu na referentni sistem posmatranja. kako se specijalna teorija relativnosti bavi samo inercijalnim sistemima, moramo uvideti kako različiti referentni sistemi gledaju na isti događaj i utvrditi matematučku osnovu za prelaz iz jednog u drugi referentni sistem.
Uzmimo u razmatranje 2 inercijalna sistema, S i S' sa koordinatama (t,x,y,z) i (t',x',y',z') (slika 1). Radi lakseg računa odredimo par pravila koji ne umanjuju opštost:
1. Sistem S' se kreće brzinom V u odnosu na S, duž ose x.
2. Koordinate x,y,z su uvek redom paralelne koordinatama x',y',z'.
3. Vreme u kojem su su se poklopili počeci koordinatnih sistema S i S' se označava sa $t = 0$ u sistemu S, a sa $t' = 0$ u sistemu S'.

1.5.1 Galilejeve transformacije

Galilejeve transformacije je Njutn koristio za prelaske iz jednog u drugi referentni sistem i to na sledeći način:

$$t' = t$$



Slika 1: Dva inercijalna sistema koji se jedan u odnosu na drugi kreću brzinom v

$$x' = x - Vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Glavna dogma ovakvih transformacija je pretpostavka da je vreme isto za svaki inercijalni referentni sistem ($t' = t$), to jest da je vreme **apsolutno**, u šta je Njutn i verovao. Zbog toga je Ajnštajn shvatio da ne može da koristi ovakve tranformacije u svojoj teoriji, tako da se okrenuo Lorencovim transformacijama i nad njima zasnovao ono što danas nazivamo specijalna teorija relativnosti.

1.5.2 Lorencove transformacije

Lorencove, za razliku od Galilejevih ne pretpostavljaju apsolutnost vremena, a pošto je Ajnštajn hteo da svoju teoriju bazira samo na dva postulata nije to prepustio slučaju i došao je do istih formula koje je pre njega utvrdio Holandski fizičar, Hendrik Anton Lorenc:

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$
$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Lorencove transformacije se značajno razlikuju od Galilejevih jer protok vremena zavisi od referentnog sistema u kojem se meri. Uvešćemo novu oznaku γ koju nazvamo gama faktor koja je jednaka:

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Primetićemo da gama teži jedan kada je brzina jednog referentnog sistema u odnosu na drugi mnogo manja od brzine svetlosti. Tada Lorencove transformacije teže Galilejevim, što znači da Lorencove

transformacije zadovoljavaju našu intuiciju kada je svakodnevni život u pitanju.
Formule nisu jedini način zapisa, često se sreće i matrični zapis:

$$X' = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gde je $\Lambda(v)$ **Lorencova matrica transformacije**, $\beta = V/c$ i važi $X' = \Lambda(v)X$. Dakle transformacija se može kraće zapisati $X' = \Lambda(v)X$.

1.5.3 Transformacije intervala

Do sada smo se bavili samo transformacijama jednog događaja, to jest jednog trenutka određenog vremenskom i 3 prostorne koordinatama. U realnim okolnostima ne možemo izvršiti merenja u trenutku, već samo na intervalima, zato ćemo izvesti transformaciju intervala koju ćemo koristiti u realnim merenjima **dužine i vremena**.
Posmatrajmo interval preko samo 2 tačke, početne i krajnje:

$$\begin{aligned} t'_1 &= \gamma(t_1 - Vx_1/c^2) & t'_2 &= \gamma(t_2 - Vx_2/c^2) \\ x'_1 &= \gamma(x_1 - Vt_1) & x'_2 &= \gamma(x_2 - Vt_2) \\ y'_1 &= y_1 & y'_2 &= y_2 \\ z'_1 &= z_1 & z'_2 &= z_2 \end{aligned}$$

Intervale možemo napisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_2 - t_1 & \Delta t' &= t'_2 - t'_1 \\ \Delta x &= x_2 - x_1 & \Delta x' &= x'_2 - x'_1 \\ \Delta y &= y_2 - y_1 & \Delta y' &= y'_2 - y'_1 \\ \Delta z &= z_2 - z_1 & \Delta z' &= z'_2 - z'_1 \end{aligned}$$

Konačno zamenom i kombinovanjem formula dobijamo:

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - V\Delta x/c^2)$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t)$$

$$\Delta y' = \Delta y$$

$$\Delta z' = \Delta z$$

1.5.4 Posledice Lorencovih transformacija

Već smo ranije primetili da se Lorencove transformacije ne razlikuju mnogo od Galilejevih kada su brzine mnogo manje od brzine svetlosti, ali kako se Lorencove transformacije razlikuju od Galilejevih kada je brzina jednog referentnog sistema u donosu na drugi uporediva sa brzinom svetlosti? Pokazaćemo kako dva sistema mere vremenski interval na istom mestu kao i razdaljinu između dva događaja.
Pretpostavimo da se u sistemu S' nalazi sat koji otkucava i u odnosu na njega je stacionaran.

Iz sistema S merimo vremenski interval između dva otkucaja Δt. Želimo da utvrdimo koliki je vremenski interval između dva otkucaja u sistemu S':

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - V\Delta x/c^2) \tag{1.1}$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t) \tag{1.2}$$

Kako znamo da se otkucaj desio na istom mestu u odnosu na referentni sistem S' odatle zaključijemo:

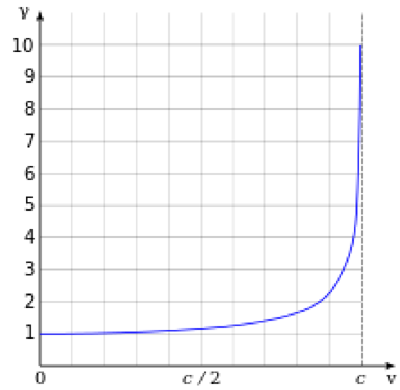
$$0 = \gamma(\Delta x - V\Delta t) = (\Delta x - V\Delta t)$$

$$\Delta x = V\Delta t \tag{1.3}$$

Zamenom Δx koristeći (1.3) i (1.1) dobijamo:

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \Delta t V^2/c^2) = \gamma\Delta t(1 - V^2/c^2) = \gamma\Delta t\frac{1}{\gamma^2} = t/\gamma$$

Konačno zaključujemo da je $t' = t/\gamma$
Pojava neapsolutnosti vremena u različitim referentnim sistemima naziva se **dilatacija vremena**. Obratimo ponovo pažnju na konstantu $\gamma(V) = 1/\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ i kako vreme u različitim referentnim sistemima zavisi od njega, γ zavisi samo od brzine V i uzima vrednosti od 1 do beskonačnosti (slika 2). Odatle zaključujemo da vreme najbrže protiče u sopstvenom referentnom sistemu. Određene čestice ne bismo mogli da detektujemo da nema dilatacije vremena, da je vreme apsolutno u svakom sistemu vreme postojanja određenih čestica ne bi bilo izmerljivo. Zbog pojave dilatacije vremena život čestice u laboratorijskom sistemu refence je znatno duži od njegovog sopstvenog, tako da ga je lakše izmeriti.
Kako smo zaključili da vreme nije apsolutno u različitim sistemima i prostorne koordinate (u našem



Slika 2: Zavisnost gama faktora od brzine referentnog sistema S'

slučaju samo x, zbog pretpostavke da se sva kretanja događaju po toj osi) zavise od vremena možemo očekivati i neapsolutnost prostornih intervala, to jest neapsolutnost dužine. Pretpostavimo da su u sistemu S' nalazi štap dužine $\Delta t'$ koji miruje u odnosu na njega i prostire se duž x' ose, pokazaćemo koju dužinu meri sistem S tog štapa. Da bi nam račun bio lakši koristićemo **inverzne Lorencove transformacije** koje transformišu koordinate iz S' u S sistem.

$$t = \gamma(t' + Vx'/c^2) \tag{1.4}$$

$$x = \gamma(x' - Vt') \tag{1.5}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

Inverzna transformacija je direktno izvedena iz Lorencovih, pa kako se Lorencove transformacije mogu koristiti na intervalima, možemo primeniti i inverznu:

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' - V\Delta x'/c^2) \tag{1.6}$$

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' - V\Delta t') \tag{1.7}$$

$$\Delta y = \Delta y'$$

$$\Delta z = \Delta z'$$

Kako su svi satovi usklađeni u sistemu S' pri merenju dužine $\Delta t' = 0$ pa možemo računati iz (1.4):

$$0 = \gamma(\Delta t' - V\Delta x'/c^2)$$

$$\Delta t' = V\Delta x'/c^2 \tag{1.8}$$

Kombinovanjem (1.7) i (1.8) dobijamo:

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' - \Delta x' V^2/c^2) = \gamma \Delta x'(1 - V^2/c^2) = \Delta x'/\gamma$$

Konačno zaključujemo da je $x' = \gamma x$
Pojava skraćenja dužine određenog tela u referentnom sistemu u kojem se telo kreće nenultom brzinom u odnosu na referentni sistem u kojem telo miruje (**sopstveni referentni sistem**) naziva se **kontrakcija dužine**. Kako su dužine tela po y' i z' osama jednake dužinama merenim po koordinatama y i z zaključujemo da se dužina kontrakuje samo po pravcu kretanja tela.

1.5.5 Relativnost istovremenosti

Setimo se jednačine koju smo izveli transformacijom vremenskog intervala iz referentnog sistema S u S'

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - V\Delta x/c^2)$$

Primećujemo da čak i kada su događaji istovremeni u sistemu S ($\Delta t = 0$), može doći do njihove neistovremenosti u nekom drugom referentnom sistemu. I to ne samo u konačno mnogo, već u svakom referentnom sistemu S' koji se krece proizvoljnom brzinom u odnosu na S, za takva dva događaja koji imaju nenulto rastojanje ($|x| > 0$). Njutnova pretpostavka istovremenosti događaja u svim referentnim sistemima se opravdava činjenicom da su eksperimenti koje je mogao da izvede samo na rastojanjima neuporedivim sa svetlosnom godinom i brzinama neuporedivih sa brzinom svetlosti.

1.5.6 Transformacija brzine

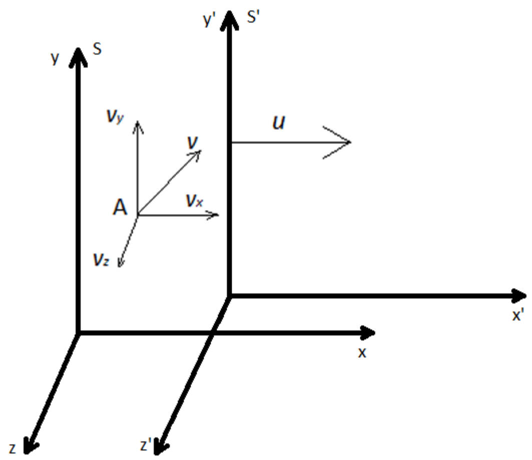
Kako smo do sada primetili da rastojanje između dva događaja, kao i vreme koje je proteklo između dva događaja nisu konstantni pri promeni referentnih sistema, više nam ništa ne garantuje ispravnost **klasičnog zakona slaganja brzina**.
Pretpostavimo da se telo A kreće brzinom V, u odnosu na referentni sistem S (slika 3). Po klasičnom zakonu slaganja brzina, telo u sistemu S', koji se kreće brzinom u duž x ose u odnosu na sistem S (koordinatne ose sistema S i S' se poklapaju) ima sledeće vrednosti brzina:

$$\vec{V}_x' = \vec{u} - \vec{V}_x$$

$$\vec{V}_y' = \vec{V}_y$$

$$\vec{V}_z' = \vec{V}_z$$

Iako je klasičan zakon slaganja brzina veoma dobra aproksimacija pri nerelativističkim brzinama, ne može se primeniti kada se radi o brzinama bliskim brzini svetlosti (na relativističkim česticama).



Slika 3: Dva inercijalna referentna sistema S i S' i telo A koje se kreće brzinom V u sistemu S

Zbog toga se javlja potreba za izvođenjem novog zakona iz Lorencovih transformacija. Krenuvši od transformacija intervala u specijalnoj teoriji relativnosti dolazimo do:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - u\Delta t))}{\gamma(\Delta t - u\Delta x/c^2)}$$

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma(\Delta t - u\Delta x/c^2)}$$

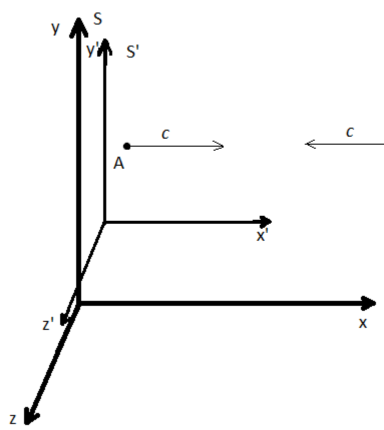
$$\frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{\Delta z}{\gamma(\Delta t - u\Delta x/c^2)}$$

Kako je brzina pređeni put u vremenu i nakon sređivanja jednačine dolazimo do:

$$V'_x = \frac{V_x - u}{1 - uV_x/c^2}$$

$$V'_y = \frac{V_y}{\gamma(1 - uV_x/c^2)}$$

$$V'_z = \frac{V_z}{\gamma(1 - uV_x/c^2)}$$



Slika 4: Dve čestice koje se u referentnom sistemu posmatrača kreću brzinama c i $-c$

Koristeći izvedene Lorencove transformacije za brzinu razmotrićemo sledeći problem. Dve čestice se, u odnosu na referentni sistem posmatrača S, kreću jedna ka drugoj duž x ose (slika 4). Svaka u odnosu na posmatrača ima brzinu svetlosti, c. Naći ćemo kojom se brzinom kreće druga čestica u odnosu na prvu.

$$V'_x = \frac{V_x - u}{1 - uV_x/c^2}$$

$$V'_x = \frac{c - (-c)}{1 - (-c) * c/c^2} = c$$

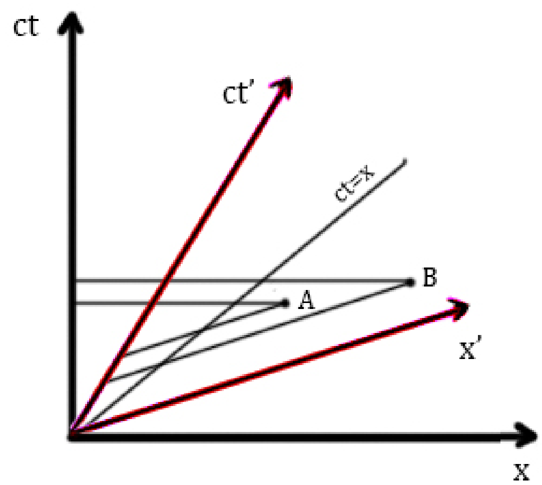
Dobili smo čisto relativistički rezultat. U jednom sistemu se jedna čestica kreće brzinom +c, a druga -c, po klasičnom slaganju brzina očekivali bismo da se jedna u odnosu na drugu krecu brzinom 2c. Zaključujemo da je po klasičnoj teoriji ovo paradoksalan rezultat.

1.6 Prostor-vreme Minkovskog

Nemački fizičar Herman Minkovski, mentor Alberta Anjštajna je zastupao mišljenje da vreme mora biti povezano sa prostorom. I da samo povezani vreme i prostor mogu postojati. Četvorodimenzioni prostor, kao unija vremena i prostora naziva se **Prostor-vreme Minkovskog**.

1.6.1 Grafička reprezentacija prostor-vremena

Koristeći Lorencove transformacije, Minkovski je nastojao da napravi grafičku reprezentaciju događaja, radi lakšeg razumevanja i razvijanja intuitivnijeg shvatanja specijalne teorije relativnosti. Kako je svaki događaj određen svojom prostornom i vremenskom koordinatom, uprošćavanjem sistema došao je do reprezentacije prostor-vremena u referentnom sistemu S preko ct i x osa. Sledeći korak je bio način da se predstave ose ct' i x' sistema S' na zadatom dijagramu. Analizom Lorencovih jednačina Minkovski je došao do zaključka da možemo predstaviti osu x' kao skup svih događaja u kojima je $ct' = 0$, a ct' osu kao skup događaja u kojima važi $x' = 0$:



Slika 5: Grafički prikaz dva prostorno vezana događaja A i B na u sistemima S i S'

$$ct' = 0 = \gamma(ct - Vx/c) \tag{1.9}$$

$$ct = \frac{V}{c}x$$

$$x' = 0 = \gamma(x - Vt) \tag{1.10}$$

$$ct = \frac{c}{V}x$$

Dobijamo da se osa x' na grafiku dobija kao prava sa koeficijentom pravca V/c, a osa ct' kao prava sa koeficijentom pravca c/V. Primećujemo da svi događaji koji se nalaze na pravoj paralelnoj ct' su se dogodili na istom mestu, a svi događaji koji se nalze na pravoj paralelnoj x' osi su se dogodili istovremeno u sistemu S'. Na slici 5 su prikazana dva događaja, A i B. U sistemu S događaj A se dogodio pre događaja B, dok u sistemu S' događaj B je prethodio događaju A.
Primetimo pravu $ct = x$, ona predstavlja putanju svetlosti koja je pošla iz koordinate $x = 0$ u trenutku $t = 0$ i ista je za svaki referentni sistem S' kome se početak koordinata poklapa sa sistemom S, a od svakog sistema možemo dobiti referentni sistem sa traženim parametrima, bez gubitka informacija. Tu pravu nazivamo **svetlosna linija**. Sa povećanjem brzine referentog sistema S' koordinatne ose ct' i x' sve više prilaze svetlosnoj liniji.
Pogledajmo ponovo sliku i primetimo da je redosled događaja A i B promenljiv u odnosu na odabir referentnog sistema iz kojeg se posmatra. Da li će to promeniti klasičnu definiciju **uzroka** događaja? Da li postoji referentni sistem u kojem je bomba eksplodirala pre nego što je pritisnuto dugme za aktivaciju i da li je u tom slučaju sve već predodređeno i nemamo nikakav uticaj na budućnost?
Na sreću, specijalna teorija relativnosti garantuje da se ništa ne kreće brže od svetlosti, tako dva uzročno-posledična događaja mogu biti povezana pravom iznad svetlosne linije. Zaključujemo da je njihov redosled isti u svim referentnim sistemima.

1.6.2 Metrika Minkovskog

Kada smo definisali koordinate događaja u dvodimenzionalnom modelu, pokušaćemo da proširimo sliku na sve četiri dimenzije, jer je prostor oko nas određen sa 3 prostorne koordinate, a ne sa jednom. Rastojanje između dva događaja u Euklidskom trodimenzionalnom prostoru je:

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

I pri svakoj promeni koordinata rotacijom i translacijom, u novodobijenom prostoru i izmenjenim koordinatama rastojanje između dva događaja se ne menja:

$$\Delta s' = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2}$$

Kako svi eksperimenti vekovima unazad pokazuju da se naš svet ponaša slično. I da je ista povezanost svake prostorne koordinate sa vremenskom. Javila se potreba za metrikom četvorodimenzionog prostora koji će održati prostor-vremensko rastojanje između događaja. I Minkovski je pronašao metriku koja ne zavisi od Lorencovih transformacija, to jest invarijantna je na sistem reference:

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

Ova formula prikazuje **razdvajanje koordinata prostor-vremena**. U zavisnosti od veličine Δs^2 vezu između 2 događaja delimo na 3 moguća tipa:

- $\Delta s^2 < 0 \implies$ **Prostorni događaj**, događaji ne mogu biti uzročno-posledično povezani i referentni sistemi se ne moraju složiti oko redosleda kojim su se dogodili
- $\Delta s^2 = 0 \implies$ **Svetlosni događaj**, događaji mogu biti povezani svetlosnim signalom i svi referentni sistemi se mogu složiti oko toga
- $\Delta s^2 > 0 \implies$ **Vremenski događaj**, događaji mogu biti uzročno-posledično vezani i svi referentni sistemi se slažu oko njihovog redosleda.

2 Opšta teorija relativnosti

Problem preciznog lociranja objekta na Zemlji, na prvi pogled može se jednostavno opisati specijalnom teorijom relativnosti, o kojoj smo pričali u prošlom poglavlju. Možemo postaviti problem smestivši posmatrani objekat na Zemlju i uvodeći pretpostavku da se svi sateliti kreću nepromenljivom brzinom u odnosu na posmatrani objekat. Ako bismo nastavili rešavanje problema lociranja sa ovim pretpostavkama dobili bismo velike greške u merenju, jer smo pretpostavili da specijalna teorija relativnosti važi za dati sistem i zanemarili činjenicu da dati sistemi, vezani za svaki od satelita nisu inercijalni zbog pojave centripetalnog ubrzanja usled delovanje gravitacije Zemlje na njih.
Kada je Ajnštajn uvideo da se njegova teorija ne može primeniti ni na jedan realan eksperiment, jer ne postoji sistem koji je čisto inercijalan, tragao je za načinom da proširi svoju teoriju i nađe način da njom opiše interakciju između tela. Odgovor je tražio u matematici. U tome mu je pomogao Švajcarski matematičar i prijatelj, Marsel Grosman rekavši mu da će odgovore naći u Rimanovoj geometriji [3].

2.1 Geometrija i zakrivljeno prostor-vreme

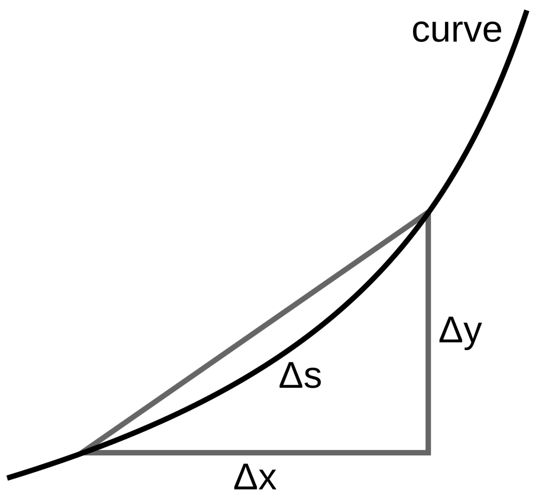
Da bismo stigli do Rimanove geometrije i zaključaka koje je Ajnštajn izveo, počećemo od Euklidove geometrije.
Euklid je Starogrčki matematičar koji zasnovao geometriju još u 3. veku pre nove ere koja se i danas uči u srednjim školama. Jedni od glavnih zaključaka koje je izveo su:

- Zbir uglova u trouglu iznosi 180°
- Krug poluprečnika R ima obim dužine $2R\pi$
- Sfera poluprečnika R ima površinu $4R^2\pi$

I sva tri zaključka važe u Euklidskoj geometriji, ali je bilo pokušaja nalaženja modela koji bi mogao da opiše svet u kome živimo, a da nije Euklidski. To je pošlo za rukom Nemačkom matematičaru Bernardu Rimanu. U Rimanovoj geometriji ne mora da važi ni jedan Euklidov zaključak.

2.1.1 Dužina krive

Da bi rešili problem rotacije satelita oko zemlje, počećemo od jednostavnijeg primera. Razmatraćemo prvenstveno dužinu krive linije u dvodimenzionom sistemu sa koordinatama x i y, da bi kasnije mogli izračunati dužinu putanje u prostorima koji imaju više od 2 dimenzije.



Slika 6: Infinitezimalno mali deo krive

Krivu koja se prostire od tačke A do tačke B možemo podeliti sa $n - 1$ približno uniformno raspoređenih tačaka na toj krivoj, gde je n veliki broj. Svaki deo krive između susednih tačaka dužina $\Delta s_1, \Delta s_2, ...\Delta s_n$ koje se nalaze na njoj možemo aproksimirati dužima $\Delta l_1, \Delta l_2, ...\Delta l_n$ (Slika 6) pa je dužina krive S približno jednaka sumi aproksimiranih duži

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$$

Svaku dužinu Δl_i možemo izraziti pomoću dužina na koordinatama Δx_i i Δy_i preko Pitagorine teoreme $\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$. Zaključujemo da je

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

Jedan od načina za izračunavanje dužine S je preko parametrizacije krive. Parametrizacija krive je pronalaženje zavisnosti prostornih koordinata x i y od izabranog parametra t. Na primer:

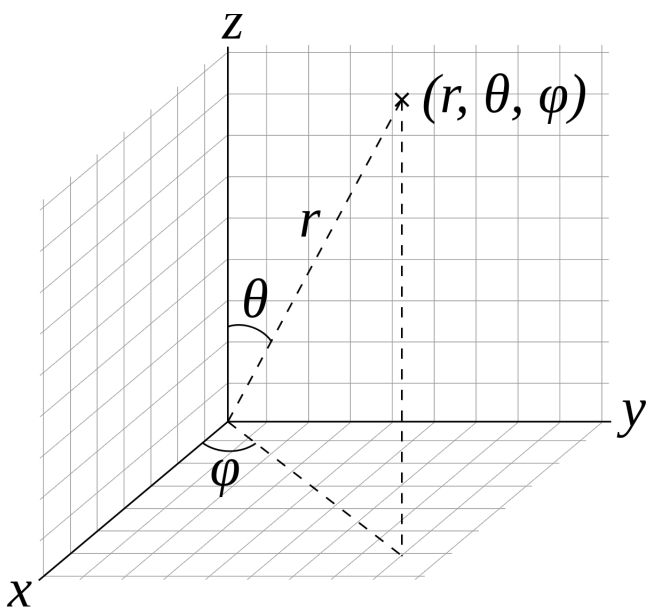
- Kriva $y = x^2$ se može parametrizovati kao $x(u) = u$ i $y(u) = u^2$
- Dok se hiperbola oblika $x^2 - y^2 = 1$ može paratrizovati kao $x(u) = sec(u)$ i $y(u) = tan(u)$

Parametrizovanjem krive možemo zapisati gornju jednačinu u konačnom obliku primenom jednakosti $\Delta x = \frac{\Delta x}{\Delta u}\Delta u = \frac{dx}{du}du$ i $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta u}\Delta u = \frac{dy}{du}du$ koju smemo primeniti jer smo n definisali kao veliki broj, pa su i dužine Δx i Δy male:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \int_{u_A}^{u_B} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$$

2.1.2 Dužina i zakrivljenost krive u trodimenzionalnom prostoru

Sličnom podelom krive kao u dvodimenzionalnom modelu na kratke duži dužine $\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}$ dobijamo da je dužina krive (S) približno jednaka sumi aproksimiranih dužina.



Slika 7: Sferni koordinatni sistem

Kako je naš problem sferne prirode, olakšaćemo račun prelaskom na sferne koordinate (slika 7):

$$x = rcos(\phi)sin(\theta) \qquad y = rsin(\phi)sin(\theta) \qquad z = rcos(\theta)$$

Pa dobijamo za vrednosti dx, dy i dz u sfernim koordinatama:

$$dx = rcos\theta cos\phi d\theta + rcos\theta cos\phi d\theta - rsin\theta sin\phi d\phi$$

$$dy = sin\theta sin\phi dr + rcos\theta cos\phi d\theta + rsin\theta cos\phi d\phi$$

$$dz = cos\theta dr - rsin\theta d\theta$$

Nakon malo sređivanja dobija se izraz za dl:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2$$

Iskoristićemo dobijeni izraz za izračunavanje obima kruga na sferi. Računaćemo obim kruga čije se sve tačke nalaze na na sferi poluprečnika R, čiji se centar poklapa sa koordinatnim početkom i čija je svaka tačka pod uglom $\theta = const$:

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{(}R^2 sin^2\theta d\phi^2) = 2\pi Rsin\theta$$

Primetićemo da smo računom u sfernim koordinatama dobili rezultat $2\pi Rsin\theta$, a kada bi ovu kružnicu posmatrali kao kružnicu u ravni, za poluprečnik bismo izračunali $R\theta$, a za obim $2\pi Rsin\theta$. Dolazimo do zaključka da se ravanska geometrija ne može primeniti na sfernu površinu. Ako formiramo trougao od tačaka preseka x, y i z ose sa već opisanom sferom, dobićemo trougao takav da su mu sva 3 ugla prava. Zaključujemo da ni Euklidova pretpostavka o stalnom zbiru uglova u trouglu ne važi za zakrivljenu površ sfere.
Uzmimo sada list papira dužine l, na x-osi i proizvoljne konstantne visine, na y osi. Kakvu god figuru da na njemu nacrtamo, ako bi ga savili u valjak spojivši sve tačke sa koordinatama $(0, y_i)$ sa tačkama (l, y_i) rastojanje između svake dve tačke na već postojaćoj krivoj neće biti izmenjena za sva *dvodimenzionalna bića* koja žive na tom papiru, pa se Euklidska geometrija može primeniti na takav sistem. Ako pomenute osobine koje važe u Euklidovom prostoru ne važe za sferu, a važe za valjak. Kako možemo biti sigurni kada je prostor stvarno zakriljen, a kada samo prividno? I ako dvodimenzionalna bića imaju načina da provere da li žive u zakrivljenom prostoru, kako mi možemo proveriti da li je naš prostor zakrivljen u prostor-vremenu?

2.2 Metrika

U prošlom poglavlju zaključili smo da razdaljinu između dve tačke na sferi merimo drugačije mi, kao trodimenzionalna bića od dvodimenzionalnih bića koja koja žive na toj sferi. **Metrika** ili funkcija razdaljine je funkcija koja definiše udaljenost između elemenata nekog skupa. Po Ajnštajnovoj pretpostavci, mi ne živimo u perfektnom svetu u kojem vladaju pravila Euklidove geometrije, već u četvorodimenzionalnom prostor-vremenu, u kojem se prostorne koordinate *krive* u četvrtoj dimenziji. Zbog toga se okreće Rimanovoj geometriji koja može opisati njegovu teoriju.

2.2.1 Metrika i Rimanova geometrija

Nemački matematičar Bernard Riman hteo je da uspostavi metriku kojom se mogu definisati n-dimenzioni prostori, ali ne i obrnuto. Ne mogu se svi n-dimenzioni prostori opisati Rimanovom metrikom, ali prostor koji bi odgovarao Ajnštajnovoj teoriji je moguće opisati na taj način.
Vratimo se na rastojanje između dve tačke u ravni. Definisano je Pitagorinom teoremom i glasi $\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, dok u trodimenzionalnom Euklidovom prostoru se definiše kao $\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$. Riman je, donekle ugledajući se na već postojaće metrike definisao univerzalnu formulu rastojanja koja može opisati svaki n-dimenzioni sistem Rimanove geometrije

$$dl^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j$$

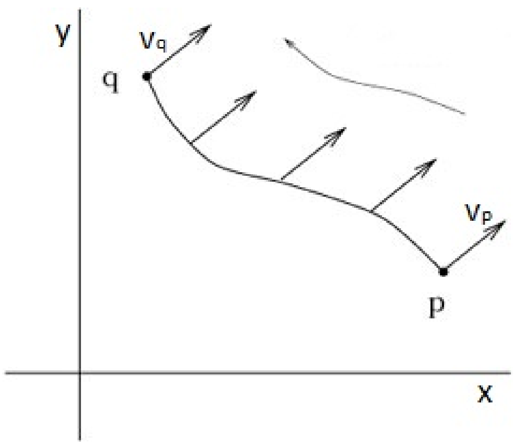
U ovoj jednačini $dx^1, dx^2, ...dx^n$ su diferencijali rastojanja svake od n koordinata za datu razdaljinu, a g_{ij} je **metrički koeficijent**, to jest **funkcija koordinata** koja je definisana za svaki par brojeva (i, j) gde i i j uzimaju vrednosti iz skupa $\{1, 2...n\}$. Za metričke koeficijente važi $g_{ij} = g_{ji}$. Skup svih metričkih koeficijenata naziva se **metrika** ili još **metrički tenzor** ($[g_{ij}]$). Metrika se često prikazuje pomoću matrice n x n. Na primer, metrika Euklidskog prostora se može predstaviti kao:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kada su svi metrički koeficijenti određeni i definišu metriku, smatramo da je prostor definisan.

2.2.2 Povezanosti i paralelni transport

Nakon što smo definisali metriku prostora i svako telo možemo opisati jasno definisanim koordinatama, sledeći korak je uočavanje međusobne zavisnosti koordinata. S obzirom da u našem problemu satelita koji kruže oko Zemlje učestvuju samo vremenska i prostorne koordinate, nećemo razmatrati opšti n-dimenzioni sistem, već samo deo koji je nama potreban.



Slika 8: Paralelni transport vektora v_p

Zavisnost koju ćemo razmatrati je promena prostornih koordinata u odnosu na vremensku. Prvi problem koji srećemo jeste upoređivanje brzina dve različite tačke u prostoru. Na primer, u Euklidskom prostoru, sa Dekartovim koordinatama (x,y,z) Da bi se brzina tela 1 u tački P uporedila sa brzinom tela 2 u tački Q, moramo izvršiti *prenos* vektora brzine v_{1p} u tačku Q v_{1q} i onda uporediti sa vektorom brzine v_{2q}. Proces prenošenja vektora iz jedne u drugu tačku prostora pomoću serije infinitezimalnih koraka pri kojima se vrednost vektora ne menja naziva se **Paralelni prenos**. U datom primeru (slika 8) dovoljno je razložiti brzinu po sve tri koordinate: $\vec{v}_{1p} = v_{1px}\vec{x} + v_{1py}\vec{y} + v_{1pz}\vec{z}$. Zbog osobina Euklidovog prostora i Dekartovog koordinatnog sistema znamo da je $\vec{v}_{1q} = v_{1qx}\vec{x} + v_{1qy}\vec{y} + v_{1qz}\vec{z}$, pa zaključujemo da je u ovom slučaju za paralelni transport dovoljno sačuvati vrednosti skalara (v_{1px}, v_{1py} i v_{1pz}).
Kada smo zaključili kako možemo izvršiti paralelni prenos u Dekartovom koordinatnom sistemu, setimo se da smo naš problem GPS-a u prošlom poglavlju predstavili preko sfernih koordinata. Kao i u prošlom primeru, vektor se u svakom sistemu može razložiti na zbir bazisnih vektora pomnoženih skalarima:

$$\vec{v}(u) = \sum_i v_i(u)\vec{e_i}$$

Gde je u parametar od kojeg zavise skalari $v_i(u)$. Možemo sada zapisati i promenu vektora v u zavisnosti od promene parametra u. Treba napomenuti da oznaku za vektor više nećemo pisati radi jednostavnosti zapisa.

$$\frac{dv(u)}{du} = \sum_i \frac{dv_i(u)}{du} e_i + v_i(u) \frac{de_i}{du}$$

Dobili smo sumu po dva člana. Prvi član predstavlja promenu intenziteta vektora, to jest skalara v_i. U našem problemu predstavlja promenu brzine satelita po izabranoj koordinati. Dok drugi član predstavlja promenu pravca vektora. Promena vektora e_i se može predstaviti kao suma promena vektora po svakoj od koordinata $x^1, x^2, ...x^n$

$$\frac{dv(u)}{du} = \sum_i \Big(\frac{dv_i(u)}{du} e_i + \sum_k v_i(u) \frac{\partial e_i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{du} \Big)$$

Kako je $\partial e_i / \partial x^k$ vektorska veličina, možemo je predstaviti preko sume bazisnih vektora pomnoženih skalarom Γ^j_{ik}. taj skalar nazivamo **koeficijentom povezanosti (Kristofelov simbol)**.

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^k} = \sum_j \Gamma^j_{ik} e_j$$

Zamenom ovog izraza u poslednju formulu dobijamo

$$\frac{dv(u)}{du} = \sum_i \Big(\frac{dv_i(u)}{du} e_i + \sum_{j,k} v_i(u) \Gamma^j_{ik} e_j \frac{dx^k}{du} \Big)$$

$$\frac{dv(u)}{du} = \sum_i \Big(\frac{dv_i(u)}{du} + \sum_{j,k} v_j(u) \Gamma^i_{jk} \frac{dx^k}{du} \Big) e_i$$

Izraz koji smo dobili predstavlja promenu vektora v pri paralelnom transportu. Po definiciji promena vektora pri paralelnom transportu je jednaka 0 pa i dobijeni izraz treba da bude jednak 0. A kako je svaki član sume nezavisno predstavlja promenu po jednoj od n dimenzija (e_i je bazisni vektor) zaključujemo da svaki sabirak ove sume mora biti jednak 0:

$$\frac{dv(u)}{du} = \sum_i \Big(\frac{dv_i(u)}{du} + \sum_{j,k} v_j(u) \Gamma^i_{jk} \frac{dx^k}{du} \Big) e_i = 0$$

$$\frac{dv_i(u)}{du} + \sum_{j,k} v_j(u) \Gamma^i_{jk} \frac{dx^k}{du} = 0$$

$$\frac{dv_i(u)}{du} = - \sum_{j,k} v_j(u) \Gamma^i_{jk} \frac{dx^k}{du}$$

$$v_i(u + \Delta u) - v_i(u) = - \sum_{j,k} v_j(u) \Gamma^i_{jk} \frac{dx^k}{du} \tag{2.1}$$

Glavni nam je cilj da nađemo koeficijent transporta Γ. Označimo mali pomeraj paralelnog transporta sa dl. Možemo ga prestaviti na sledeći način:

$$dl = \sum_i e_i x_i$$

$$dl^2 = (\sum_i e_i x_i) * (\sum_j e_j x_j) = \sum_{i,j} (e_i e_j) * x_i x_j$$

A kako smo na početku poglavlja definisali važi:

$$dl^2 = \sum_{i,j} g_{ij} * x_i x_j$$

Zaključujemo iz prošle 2 jednačine da važi jednakost $g_{ij} = e_i e_j$. Diferenciranjem ove jednakosti po x^k dobijamo:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial e_i}{\partial x^k} e_j + \frac{\partial e_j}{\partial x^k} e_i$$

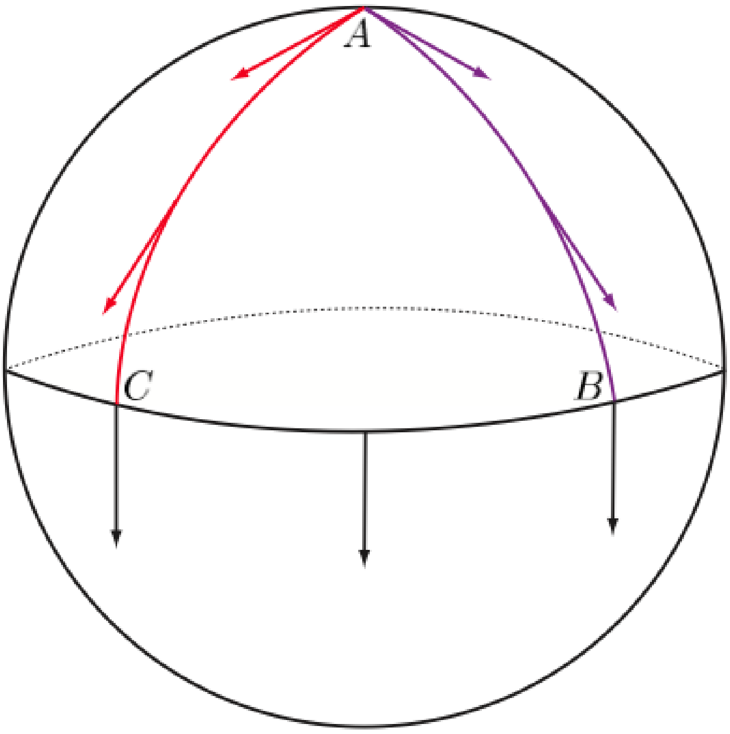
Svrstavanjem jednakosti $\partial e_i / \partial x^k = \sum_j \Gamma^j_{ik} e_j$ u poslednju, dobijamo:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \sum_m \Gamma^m_{ik} e_m e_j + \sum_m e_i \Gamma^m_{jk} e_m$$

Korišćenjem ove jednakosti u jednačini (2.1) konačno dobijamo izraz za Γ:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \sum_l g^{il} \Big(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} \Big)$$

Gde se sa g^{il} označava **dualna metrika** i matrično predstavljena $[g^{il}]$ predstavlja inverz matrice metrike $[g_{ij}]$. Ona takođe jedinstveno određuje metriku za određen n-dimenzioni prostor.



Slika 9: Prikaz paralelnog transporta na sferi

2.2.3 Geodezik

Kada merimo rastojanje, to radimo metrom, lenjirom ili nekim slicnim alatom. Primećujemo da su svi alati kojima merimo razdaljinu pravi, jer je prava linija najkraće rastojanje u Euklidskom prostoru, a na malim rastojanjima i pri slaboj gravitaciji, kakva je na Zemlji, svet oko nas se ponaša po približno Euklidskim pravilima. Ali uzmimo na primer dvodimenzionalna bića koja žive na površini sfere, da li je naša trodimenzionalna prava koja povezuje dve tačke na sferi i njima najkraće rastojanje ili oni imaju drugačiji *lenjir* kojim mere rastojanje? U ovom odeljku ćemo se upoznati sa pojmom najbližeg rastojanja u Rimanovoj geometriji. Uzmimo neku krivu u n-dimenzionalnom sistemu koji je definisan metrikom g_{ij} i vektorom povezanosti Γ^i_{jk} i označimo polaznu tačku na toj krivoj sa A. I neka je vektor tagente u toj tački A na datu krivu označen sa t. Vršeći paralelni trasport vektora duž te krive definišemo sledeće:

$$\frac{dt}{du} = f(u)t$$

Gde je u parametar, a $f(u)$ funkcija koja zavisi od parametra u. Rastavljanjem vektora t dobijamo:

$$\frac{dt^i}{du} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} t^j \frac{dx^k}{du} = f(u)t$$

Pa kako je t^i u stvari promena koordinate x^i u odnosu na parametar u, jer posmatramo paralelni transport po vektoru t važi $t^i = dx/du$. Zamenom u dobijenu jednačinu dobijamo:

$$\frac{d^2x^i}{du^2} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{du} \frac{dx^k}{du} = f(u)\frac{dx^i}{du}$$

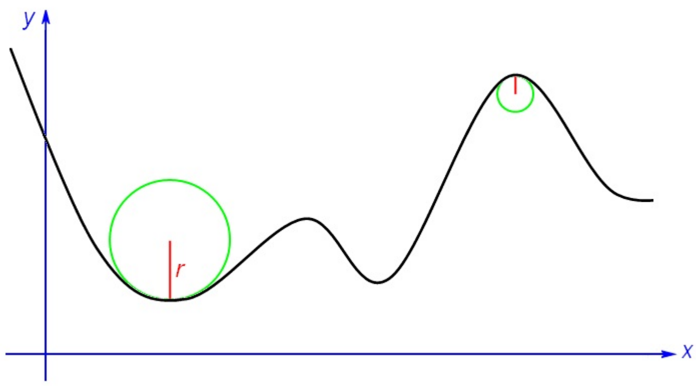
Pošto smo *pomeranje* vektora t definisali kao paralelni transport, on mora ostati isti nakon pomeraja. Pa važiti da je $dt/du = 0$, odatle zaključujemo i $f(u) = 0$. Parametar za koji važi da je funkcija $f(u)$ jednaka nuli naziva se afini parametar i označava se sa λ. Primenom ovog uslova dobijamo **geodezijsku jednačinu**, to jest krivu koja predstavlja najbliže rastojanje između 2 tačke je ona koja celom svojom dužinom zadovoljava ovu jednačinu:

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = 0$$

Primenom geodezijske jednačine na ranije pomenuti problem dvodimenzionalnih bića koja žive na sferi zaista se ispostavlja da njihovo najbliže rastojanje nije *prava linija*, bar ne kako je mi zamisljamo, već deo velike kružnice sfere koja povezuje dve tačke između kojih se meri rastojanje.

2.2.4 Krivina

U ovom delu poglavlja definisaćemo zakrivljenost krivih. Glavni cilj nam je definisanje zakrivljenosti u prostor-vremenu, ali prvo ćemo krenuti od dvodimenzionalne krive. Na slici 10 vidimo krivu u



Slika 10: Prikaz krive u ravni i dve kružnice
koje određuju zakrivljenost u tačkama dodira krive

ravni. Krivinu linije ćemo definisati kao $k = 1/R$ gde je R poluprečnik kružnice koja bi najbolje aproksimirala krivu u infinitezimalno maloj okolini posmatrane tačke na toj krivoj 10. Dok se Gausova zakrivljenost dela krive površi u trodimenzionalnom Euklidskom prostoru definiše kao $K = k_{max}k_{min}$ gde su $k_{min} = 1/R_{max}$ i $k_{max} = 1/R_{min}$, a R_{min} i R_{max} poluprečnici elipse koja najbolje moguće aproksimira krivinu u infinitezimalnoj okolini posmatrane tačke krive površi.
Pomenuta dva primera su specijalni slučajevi koji se mogu lako pokazati i koji se mogu grafički lako prikazati. Ali da bi definisali zakrivljenje u prostor-vremenu moramo definisati zakrivljenje u n-dimenzionoj Rimanovoj geometriji.
Uzmimo neki vektor v i paralelno ga preslikajmo menjajuci pri tome samo vrednost parametra x^i za neko dx^i, nakon toga slično promenimo parametar x^j za dx^j. Još dva puta izvršimo paralelni

transport, prvo za $-dx^i$, a nakon za $-dx^j$ i time smo vratili vektor u početnu tačku i vrednost vektora je sada $v_{||}$. Ukoliko važi je prostor zakrivljen razlika između početnog i transponovanog vektora bi trebalo da sadrži informaciju o tome. Ako prostor nije zakrivljen važi da je $v_{||} = v$. Pišemo sumu promena svih koordinata tokom paralelnog transporta na sledeći način [3]:

$$v_{||}^l - v^l = \sum_{i,j,k} R_{ijk}^l v^i dx^j dx^k$$

Gde R_{ijk}^l predstavlja meru zakrivljenosti. Daljim algebarskim sređivanjem može se pokazati da je:

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^k} + \sum_m \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l - \sum_m \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l$$

Ovom izrazom smo odredili transformator koordinata R_{ijk}^l. Ova veličina naziva se Rimanov tenzor. Skup svih Rimanovih tenzora $[R_{ijk}^l]$ opisuje zakrivljenost prostora.

2.2.5 Zakrivljenje prostor-vremena

Rastojanje između dve tačke smo definisali preko Rimanove geometrije kao $dl^2 = \sum_{i,j} g_{ij} x_i x_j$. Kako je prostor-vreme četvorodimenziona struktura, razdaljina se može zapisati u ovom obliku:

$$ds^2 = \sum_{i,j=0}^{3} g_{ij} x_i x_j$$

Ostaje nam samo da nađemo vrednost metrike $[g_{ij}]$ takvu da se poklapa sa metrikom Minkovskog koju smo definisali na kraju prvog poglavlja:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Gde su x, y, z i ct koordinatne ose. Izjednačavanjem ove dve jednačine za metriku prostor-vremena dobijamo vrednost:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Kako smo zaključili još u prvom poglavlju, ds, koje tumačimo kao rastojanje između dva događaja može biti pozitivno, što zadovoljava kriterijum Rimanovog prostora, ali može biti i nulto rastojanje ($ds = 0$), takve događaje nazivamo svetlosno povezanim. Može se desiti i da rastojanje bude negativno ($ds < 0$), takve događaje nazivamo prostorno povezanim. Kako Rimanova geometrija zahteva da sva rastojanja budu pozitivna, prostor-vreme se svrstava u pseudo-Rimanove prostore. Nulta kriva je linija na kojoj je rastojanje između svake dve tačke $ds = 0$. Poseban slučaj nulte krive je nulti geodezik čija tangenta uvek pokazuje duž krive tokom paralelnog prenosa, mada se u ovom primeru gubi osobina geodezije, da je najkraće rastojanje između dve tačke. Na nultoj geodeziji leže svi događaji koji bi mogli biti povezani elektromagnetnim talasom u prostor-vremenu.

2.3 Osnovni principi opšte teorije relativnosti

Definisavši geometriju koja je bila potrebna Ajnštajnu da proširi svoju specijalnu teoriju relativnosti i na neinercijalne sisteme, vreme je da se upoznamo sa načinom na koji je definisao svoju novu teoriju, danas poznatu kao opšta teorija relativnosti. Kao i svaka druga fizička teorija, ni ova se nije mogla bazirati isključivo na logici. Ajnštajn je zasnovao svoju teoriju na tri principa. I svaki od njih će biti objašnjen u ovom poglavlju, kako bismo bolje razumeli smisao i značaj Ajnštajnovog rada.

Zamislimo da smo se probudili i da se nalazimo u dovoljno velikoj kutiji da možemo komotno da stanemo unutra, kao i da sa sobom imamo bilo koju aparaturu i da možemo izvršiti bilo koji eksperiment koji naumimo unutar te kutije. Ne osećamo nikakvu silu koja bi delovala na nas. Gde bi ta kutija mogla biti smeštena? S obzirom da da ni jedna sila ne deluje na saržaj kutije, tj nalazimo se u bestežinskom stanju, kutija bi mogla biti u svemiru, daleko od bilo kojeg drugog tela, a mogla bi nalaziti i u slobodnom padu pod uticajem gravitacije bliskog masivnog tela, kao što je primer planeta Zemlja. Ajnštajn je vršio razna merenja u sistemima pod uticajem gravitacije, kao i ubrzanja koje je poteklo od sile. Poredio je dve Njutnove formule:

- Jednačinu gravitacije $F_g = G\frac{m_g M}{r^2}$ i
- Treći Njutnov zakon $F_i = m_i a$

Gde je m_g gravitaciona masa, a m_i inercijalna masa. Koliko god da je precizno merio uvek se ispostavljalo da za svako telo kojem je merio inercijalnu i gravitacionu masu, one budu jednake ($m_g = m_i$). I tu čudnu, naizgled, slučajnost je uzeo za prvi princip opšte teorije relativnosti, **princip ekvivalentnosti**.

S obzirom da je želeo da u svom proširenju zadrži većinu osobina specijalne teorije relativnosti, bio mu je potrebno da zadrži i kovarijantnost u opštoj teoriji relativnosti. **Princip kovarijantnosti** uopštava prvi postulat STR-a, pretpstavljajući da svi fizički zakoni moraju važiti u svim inercijalnim, kao i neinercijalnim sistemima. I da je moguće iz bilo kog sistema utvrditi matematički šta bi posmatrač u bilo kom drugom referentnom sistemu izmerio. Očigledno je već sad da će se ova teorija znatno razlikovati od od Njutnovskog pogleda na svet. Zato je Ajnštajnu bio potreban i treći princip da bi njegova teoteorija mogla da bude potpuna. **Princip konzistentnosti** zahteva od OTR da bude konzistentna sa svim dosadašnjim fizičkim dostignućima. Konkretno Ajnštajnova jednačina polja (2.2), koja je produkt opšte teorije relativnosti nije smela da naruši njegovu specijalnu teoriju relativnosti, kao ni Njutnov zakon gravitacije. Ajnšajnova jednačina polja:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

Gde su $R_{\mu\nu}$ - Ričijev tenzor, R - Ričijev skalar, $g_{\mu\nu}$ - metrički tenzor, Λ - kosmološki tenzor, G - Njutnova gravitaciona konstanta i $T_{\mu\nu}$ - sres-energijski tenzor.[3]

3 Švarcšildovo prostor-vreme

Nemački astrofizičar Karl Švarcšild je, nakon što je Albert Ajnštajn objavio OTR, izneo prvo rešenje za Ajnštajnovu jednačinu polja 2.2 i to za sfernosimetričan slučaj. Kako ćemo Zemlju aproksimirati loptom u našem GPS problemu koristićemo Švarcšildovo rešenje. Kako se svaka tačka prostor-vremena može jedinstveno predstaviti sa četiri koordinate x^0 (ct), $x^1(r)$, x^2 (θ), x^3 (ϕ), rešenje Ajnštajnove jednačine je tenzor sa 16 argumenata. Zbog toga je i sam Ajnštajn bio zadivljen tako jednostavnim rešenjem koje sadrži samo 4 nenulta argumenta. Rešenje možemo prikazati matrično

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1-\frac{2GM}{c^2r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1-\frac{2GM}{c^2r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

ili u standardnom obliku, u jednačini:

$$(ds)^2 = \Big(1-\frac{2GM}{c^2r}\Big)c^2(dt)^2 - \frac{(dr)^2}{1-\frac{2GM}{c^2r}} - r^2(d\theta)^2 - r^2sin^2\theta(d\phi)^2$$

3.1 Osobine Švarcšildove metrike

Kako bismo mogli da iskoristimo Švarcšildovu metriku za rešavanje našeg problema, moramo se prvo bolje upoznati sa njenim osobinama. I da utvrdimo sličnosti i razlike sistema satelita i prijemnika na Zemlji.

3.1.1 Svernosimetričnost

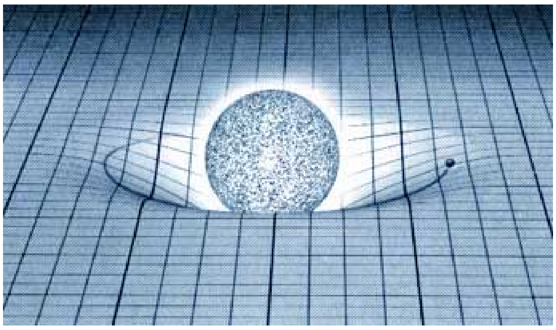
Moramo utvrditi kako se Švarcšildova jednačina menja, pri promeni ugaonih koordinata (θ,ϕ) pri stalnom prečniku i vremenu (r, t). Deo jednačine koji zavisi od promene ugaonih koordinata je $ds = -r^2(d\theta)^2 - r^2 sin^2\theta(d\phi)^2$. Kako je naše telo sferno simetrično mi koordinate θ i ϕ smemo postaviti kako želimo. Ali to mora biti potvrđeno i matematički, korišćenjem Švrcšildove metrike. Kako ϕ ne figuriše u jednačini, očigledno je da se može proizvoljno izabrati, dok član θ učestvuje u jednačini. Ali kako je naš objekat sfera i naš koordinatni sistem zahteha odabir ravni Z u kojoj je $\theta = 0$, a to nema nikakav značaj za fizičke zakone, možemo ustanoviti da Švarcšildova metrika jeste sfernosimetrična.

3.1.2 Asimptotski ravna

S obzirom da razmatramo gravitaciono polje ovom metrikom na velikom rastojanju bi trebalo da svaki gravitacioni element postane zanemarljiv na dovoljno velikom rastojanju ($r \to \infty$). Jednačina tada glasi:

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 sin^2\theta(d\phi)^2$$

jer važi $2GM/c^2r \to 0$. A kako dobijena formula polja ne zavisi od gravitacionog uticaja tela kada su na velikom rastojanju od njega, taj deo prostor-vremena nazivamo *ravnim*.



Slika 11: Grafička pretpostavka zakrivljenja prostor-vremena

3.1.3 Vremenska zavisnost

Kao što nam je intuitivno jasno da jačina polja, kao ni stanje tela ne sme zavisiti od toga da li je to telo smešteno u sadašnjem trenutku ili u trenutku pre 10 milijardi godina, ako su ostale veličine identične telo će se ponašati isto. Švarcšildova metrika opravdava tu tvrdnju kako t ne figuriše u jednačini. Što ne znači da ne može doći do određenih promena u vremenskom intervalu (dt).

3.1.4 Singulariteti

Švarcšildova metrika ima dva očigledna problema u svojoj formulaciji. To jest tačke u kojima je $r \to 0$ i $r \to R_s = 2GM/c^2$. Tačka u kojoj je $r = 0$ je pravi singularitet i za nulti prečnik metrika, kao i prostor-vreme nisu dobro definisani. Dok se oko tačke $r = R_s$ dešava na prvi pogled prost prekid funkcije. Nemogućnost definisanja stanja tela ove specifične gustine inspirisalo je razne naučnike da izraze ovaj problem u drugim koordinatnim sistemima. Problem je dao rešenja u koordinatnim sistemima kao što su Lemaitreov i Edigton–Finkelštainov koordinatni sistemi. Ali to ne menja specifičnost ovog radijusa. Sva nebeska tela relativno blizu (nekoliko hiljada svetlosnih godina) Sunčevog sistema su gustine manje od kritične. Na primer Švarcšildov radijus (R_s) Sunca bio bi $3km$, a sunce ima prečnik od oko $700000km$. Sva tela čiji je radijus manji od kritičnog nazivaju se **Švarcšildovim crnim rupama**. Kritični radijus se još naziva i *tačka bez povratka*, jer čak ni svetlost ne može pobeći kad jednom upadne u Švarcšildov radijus.

3.2 Švarcšildova dilatacija vremena

Izučavanjem specijalne teorije relativnosti shvatili smo da vreme ne teče isto u svim inercijalnim referentnim sistemima. U Švarcšildovom prostor-vremenu smo već ustanovili da zbog sferne simetričnosti i vremenske nezavisnosti,to jest vreme isto protiče u dva sistema u kojima se jedino razlikuju veličine t, θ i ϕ. Ali da li isto važi kada dva referentna sistema nemaju istu vrednost koordinate r?
Uzmimo dve tačke sa istim vrednostima koordinata t, θ i ϕ i različitom koordinatom rastojanja, $r_1 \neq r_2$. Neka svaka od te dve tačke emituje 2 svetlosna, sa istim vremenskim razmakom u sopstvenom referentnom sistemu ($dt_1 = dt_2 = dt$). Kako bismo uporedili vremensku razliku između dva vremenska intervala koja su protekla između svaka dva svetlosna signala treba nam posmatrač koji može da izmeri i uporedi, i kao prenosioca informacije imamo svetlost koja se kroz prostor-vreme kreće jednakom brzinom. Vremenske intervale možemo predstaviti dužinom prostor-vrenskog *puta* koji je prešla svetlost, $d\tau = ds/c$. Koristeći se Švarcšildovom metrikom možemo zapisat:

$$d\tau_1 = \frac{ds_1}{c} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}}dt \qquad d\tau_2 = \frac{ds_2}{c} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}}dt$$

Posmatrača ćemo staviti na jako veliku razdaljinu, $r \to \infty$ i dobiti da za njega vreme protiče bez uticaja gravitacionog polja:

$$d\tau_{pos} = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}}dt_{pos} \approx dt_{pos}$$

Iznačavanjem dt_{pos} sa dt dobijamo:

$$d\tau_1 = \frac{ds_1}{c} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}}d\tau_{pos} \qquad d\tau_2 = \frac{ds_2}{c} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}}d\tau_{pos}$$

Konačno preko posmatrača možemo dobiti vezu između $d\tau_1$ i $d\tau_2$, kao i definisati γ faktor Švarcšildove metrike koji ćemo kasnije koristiti kako bismo rešili problem GPS-a:

$$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}}}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}}}$$

$$\gamma = d\tau/d\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}}}$$

4 GPS sistem

GPS (Globalni pozicioni sistem) je Američki sistem baziran na satelitskoj razmeni informacija sa prijemnicima na Zemlji (slika 12). U svakom trenutku Zemljom kruži 31 satelit. Prvi GPS sateliti bili su lansirani još 70-ih godina dvadesetog veka. Prvobitno ih je koristila isključivo Američka vojska za lociranje i navođenje raketa. Sistem nadgleda celu površinu Zemlje od 80-ih, a globalno je koristi od početka 21. veka. Sateliti, da bi imali približno stacionarne orbite oko Zemlje, kruže na visini od $20200km$ od Zemlje i obiđu otprilike dva kruga oko planete za 24 časa. Orbite GPS-ovih satelita su raspoređene tako da uvek bar 5 satelita ima direktan vazdušni put do bilo koje tačke na Zemlji. Svaki satelit ima u sebi ugrađen atomski časovnik. Naš je zadatak da predvidimo grešku atomskog časovnika kada bi merio vreme radeći na istoj frekvenciji kao kada je na Zemlji i predložimo rešenje.

4.1 Posledica specijalne teorije relativnosti

Kao što smo već ustanovili sateliti nisu stacionarni u odnosu na površinu Zemlje, pa njihova brzina može imati znatnu dilataciju vremena za posledicu. Radi jednostavnosti računanja koristićemo Njutnovu gravitacionu jednačinu. Izjednačavamo gravitacionu silu sa centrifugalnom silom:

$$G\frac{mM}{r^2} = \frac{mV^2}{r}$$

Slika 12: GPS

$$G\frac{M}{r} = V^2$$

$$V = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

$$V = 3.87534389m/s$$

Gde je V tražena brzina, M masa Zemlje $(5,98 * 10^{24}\text{kg})$, a r poluprečnik orbite satelita (26541km). Iz izvedene formule za dilataciju vremena zaključujemo da je vreme mereno na satelitu (t') sporije kuca od vremena izmerenog na Zemlji (t) γ puta, gde je vrednost za gama:

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - V^2/c^2}}$$

Pa važi:

$$t' = t/\gamma = t(1 - \frac{V^2}{2c^2})$$

Zaključujemo da je $\Delta t = t' - t = 8.349 * 10^{-11}s$ kašnjenje svake nanosekunde. Množenjem brojem nanosekundi u danu dobijamo kašnjenje od $\tau_{str} = 7214ns$.

4.2 Posledica opšte teorije relativnosti

Satelit se, kao i prijemnik nalazi u gravitacionom polju Zemlje, ali su na velikom rastojanju jedan od drugog. Proverićemo da li razlika u gravitacionom polju u ovom slučaju može znatno uticati na merenje vremena. Aproksimirajući Zemlju kao loptu možemo se koristiti jednačinom za dilataciju vremena u opštoj teoriji relativnosti:

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2GM}{r_1 c^2}}}$$

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2GM}{r_2 c^2}}}$$

$$\Delta\frac{1}{\gamma} = \Delta\tau$$

Gde je $\Delta\tau$ tražena razlika u vremenima. Koristeći se ovim formulama i aproksimacijom za $M/r << 1$ dobijamo:

$$\Delta\tau = \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2} = 1 - \frac{GM}{r_1 c^2} - 1 + \frac{GM}{r_2 c^2} = \frac{GM}{c^2}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

Računamo vrednosti $\Delta\tau = 5.307 * 10^{-10}$ koristeći se poznatim vrednostima: $M_{zemlje} = 5,974 * 10^{24}kg$, $r_1 = r_{zemlje} = 6.357km$, $r_2 = r_{satelita} = 26551km$. Kako $\Delta\tau$ predstavlja grešku u jednoj nanosekundi, jer je učestalost otkucaja atomskih časovnika reda veličine jedne nanosekunde, množenjem vrednosti $\Delta\tau$ sa brojem nanosekundi u danu dobijamo da bi isti atomski časovnik u satelitu otkucao $\tau_{otr} = 45850$ puta više od identičnog časovnika na Zemlji.

4.3 Ukupna relativička greška i rešenje

Razlike u merenju vremena na Zemlji i na GPS-ovom satelitu koje smo dobili zbog efekata STR-a i OTR-a ćemo sabrati da bismo dobili ukupnu razliku koja bi se napravila za jedan da između 2 atomska časovnika za 1 dan. Kako efekti OTR predviđa brže kucanje satelitskog atomskog časovnika, a STR sporije važi:

$$\tau = \tau_{otr} - \tau_{str} = 45850ns - 7214ns = 38636ns$$

Dobijamo da je greška koja bi se dobila u merenjem vremena nemenjajući frekvenciju atomskog časovnika u orbiti svakog dana rasla za $38,6\mu s$. Što ne samo da bi ugrozilo preciznost lociranja prijemnika već i preciznost velikog broja časovnika, kao i transakcija u berzama širom sveta, koje koriste preciznost satelitskih satova pri obavljanju transakcija i raznih vojnih operacija. Zato atomski časovnici u satelitima moraju raditi na *popravljenoj* frekvenciji kako bi merili tačno vreme na površini Zemlje. Ukupna razlika u vremenima nakon svakog otkucaja atomskog časovnika frekvencije $10,23MHz$ koji je u satelitu u odnosu na časovnik koji bi se nalazio na Zemlji je $\Delta\tau_{otr} + \Delta\tau_{str} = 5,307 * 10^{-10}s - 8,349 * 10^{-11}s = 4,4721 * 10^{-10}s$. Popravljenu frekvenciju dobijamo oduzimanjem dobijene grške od broja jedan, koji predstavlja 1 odkucaj i daljim množenjem sa frekvencijom Zemljinog časovnika:

$$10,23MHz * (1 - 4.4721 * 10^{-10}) = 10.2299999954MHz$$

4.4 Način funkcionisanja GPS-a

Svaki od satelita koji orbitiraju na visini od oko $20184km$ nadmorske visine u svakom trenutku nosi barem dve informacije:

- Lokaciju na kojoj se nalazi
- Tačno vreme proračunato atomskim časovnikom.

Te informacije sinhronizovanu šalju svi sateliti elektromagnetnim talasom određene frekvencije (oko $1500MHz$). Nakon što uređaj primi informaciju od bar 5 satelita, poređenjem vremena potrebnom signalu da stigne od svakog od satelita do prijemnika i korišćenjem lokacija svakog od satelita, prijemnik računa svoju lokaciju na Zemlji ili u njenoj atmosferi.

4.5 Ostali efekti koji mogu uticati na preciznost GPS-a

Sada kada smo ustanovili način rada GPS-a možemo se osvrnuti na probleme koji mogu uticati na tačnost. S obzirom da su svi satovi međusobno sinhronizovani kao i učestalost kojom šalju elekromagnetne talase, greška koja nastaje **kašnjenjem jednog satelita** u odnosu na drugi i drugim elektronskim nepreciznostima je u okviru $10ns$, što može rezultirati greškom od maksimalno 3 metra. Nakon što satelit pošalje elektromagnetni signal, on mora preći oko 20 000 kilometara da bi stigao do prijemnika. Veći deo puta je razređen vazduh koji ne smeta elektromagnetnom talasu. Jedini deo atmosfere koji znatno može poremetiti signal je **jonosfera** koja se nalazi između $50km$ i $80km$ nadmorske visine. Zbog visoke količine pozitivnih i negativnih jona, može uticati znatno na putanju elektromagnetnog talasa. Jonosfera može da prouzrokuje najveću grešku (oko 5 metara), ali je pronađen način za minimiziranje takve greške koji se još uvek koristi samo u vojne svrhe. Slanjem uporedo 2 elektromagnetna talasa dovoljno sličnih frekvencija (talasa L1 i L2) može se prema razlici puteva ova dva talasa odrediti približan uticaj jona na kretanje poslatih signala i greška se smanjuje do reda veličine od nekoliko centimetara. Takođe greška može nastati zbog pogrešnih informacija o

lokacijama satelita koje se ažuriraju svakih 12,5 minuta. Kako znamo da satelitu treba oko 12 sati da obiđe krug oko Zemlje, za 12,5 minuta može se pomeriti za čak 2 900 km , Što je i dalje skoro deset puta manje od rastojanja između satelita i prijemnika. Kao posledica skoprog ažuriranja pozicija satelita javlja se greška do 2 metra. Ako se neki signal emitovan sa emitera **reflektuje** o neki objekat i stigne do prijemnika prelazeći duži put. Tako oslabljen signal ne može putovati previše dugo, pa je greška do koje može doći manja od 1 metra.
Iako je potrebno elektromagnetnom talasu manje od jedne desetine sekunde da stigne do prijemnika i da se greška od $1\mu s$ može značiti greška od nekoliko stotina metara, globalni GPS sistem ne pravi grešku veću od 15m računajući s ve moguće faktore, što je zaista impresivno.

5 Zaključak

Ovaj rad ima za cilj približavanje specijalne i opšte teorije relativnosti čitaociima sa srednjoškolskim stepenom znanja matematike i fizike. Nastojao sam da pokažem da se osnovno razumevanje i znanje Ajnštajnovih dostignuća može steći bez potrebe za naprednom matematikom. Kada se STR radi u srednjim školama deluje apstraktno i neprimenljivo, povezuje se samo sa brzinama bliskim brzini svetlosti i asocira isključivo na eksperimente izvođene u fizičkim laboratorijama, pod specijalnim uslovima. U stvari svaki foton, u svakom trenutku se kreće brzinom svetlosti, kao i svaki radio talas kojim radio stanica emituje Vašu omiljenu pesmu. Primene relativističkih efekata su svuda, pa i u vašem džepu. Jer svaki put kada potražite svoju lokaciju na mobilnom telefonu, saznaćete u kojoj ste tački na mapi Zemlje od 510 miliona kilometara kvadratnih sa tačnošću od nekoliko metara, zahvaljujući upravo teorijama relativiteta.

6 Literatura

[1] Albert Einstein. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper.* 1905.

[2] James B. Hartle. *An Introduction to Einstein's General Relativity.* Pearson, 2003.

[3] Robert J. A. Lambourne. *Relativity, Gravitation and Cosmology.* The Open University, 2010.