Fonctions de plusieurs variables – 2ème année – A. Hanani

Sommaire

Fonctions de plusieurs variables

1. Généralités

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire usuel de $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, noté $x.y$ ou $\langle x, y \rangle$, est défini par

$$x.y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ est la norme associée à ce produit scalaire. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, la norme euclidienne de x, notée $\|x\|$, est définie par

$$\|x\| = \sqrt{x.x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Définition 1.
Soit $A = (a_1, \dots, a_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$. On appelle boule ouverte de centre A et de rayon $r > 0$, notée $B_r(A)$, l'ensemble suivant :

$$B_r(A) = \{M \in \mathbb{R}^n \mid \|M - A\| < r\}.$$

Remarquez que, si $M = (x_1, \dots, x_n)$ alors $\|M - A\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}$.

Définition 2.
Soient U une partie de $\mathbb{R}^n$ et $A \in U$.

1. On dit que U est un voisinage de A si U contient une boule ouverte centrée en A.
2. On dit que U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si U est un voisinage de chacun de ses points.

Exemples. L'ensemble vide, $\mathbb{R}^2$, tout rectangle ouvert $]a, b[\times]c, d[$ et tout disque ouvert de $\mathbb{R}^2$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Définition 3.
Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^2$ est dit simplement connexe s'il n'a pas de trous. Autrement dit, si son bord ∂U est connexe (formé d'un seul morceau).

Exemples. Un disque de $\mathbb{R}^2$, un rectangle de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont simplement connexes.

Définition 4.
Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Une fonction f de n variables à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ est une application d'un domaine D de $\mathbb{R}^n$, appelé domaine de définition de f, dans $\mathbb{R}^m$. On la note

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & x & \mapsto & (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)). \end{array}$$

Le domaine de définition $\mathscr{D}_{f_i}$ de f_i est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ donné par
$$\mathscr{D}_{f_i} = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid f_i(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}\}$$
et le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f est $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_{f_1}\cap\mathscr{D}_{f_2}\cap\cdots\cap\mathscr{D}_{f\,m}$.

Nous nous limiterons souvent aux dimensions 2 et 3, la généralisation aux dimensions supérieures ne posant pas de problème particulier. Voici quelques exemples simples.

1. Distance d'un point à l'origine en fonction de ses coordonnées :
$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2}. \end{array}$$
2. Surface d'un rectangle en fonction de sa longueur et sa largeur :
$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & xy. \end{array}$$
3. Surface d'un parallélépipède en fonction de ses trois dimensions :
$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \mapsto & 2(xy+yz+xz). \end{array}$$
4. Surface et volume d'un parallélépipède en fonction de ses trois dimensions :
$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (2(xy+yz+xz), xyz). \end{array}$$
5. Coordonnées polaires d'un point du plan :
$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^+\times[0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}$$

Définition 5.
Soit f une fonction de 2 variables. Le graphe $\mathscr{G}_f$ de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ formé des points de coordonnées $(x,y,f(x,y))$ avec $(x,y)\in\mathscr{D}_f$. Cela se note :
$$\mathscr{G}_f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in\mathscr{D}_f \text{ et } z=f(x,y)\}.$$

Commentaire. Représenter graphiquement le graphe n'est possible que pour les fonctions d'une seule variable ou deux variables. Dans le second cas, le graphe est une surface de l'espace $\mathbb{R}^3$ et comme on ne sait pas faire des dessins dans l'espace, on se ramène à ce qu'on sait faire : c'est à dire faire des dessins dans un plan.

Définition 6.
Soit f une fonction de deux variables. La ligne de niveau $z=a\in\mathbb{R}$ est
$$L_a = \left\{(x,y)\in\mathscr{D}_f \mid f(x,y)=a\right\}$$
et la courbe de niveau $z=a$ est la trace de $\mathscr{G}_f$ dans le plan $\{z=a\}$:
$$\mathscr{G}_f\cap\{z=a\} = \{(x,y,a)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y)=a\}.$$

Remarque. On obtient la courbe de niveau a en remontant à l'altitude a la ligne de niveau a. En dessinant un nombre suffisant de courbes de niveau, on obtient une idée de l'allure de la courbe. Pour plus de précision, on peut aussi tracer, pour quelques valeurs de a, les graphes des fonctions partielles
$$f_1 : x\mapsto f(x,a) \quad \text{et} \quad f_2 : y\mapsto f(a,y).$$
La première représente l'intersection du graphe avec le plan $y=a$ et la seconde représente l'intersection du graphe avec le plan $x=a$.

Exemple. Soit f telle que $f(x,y)=x^2+y^2$. La ligne de niveau L_c est vide si $c<0$, se réduit à $\{(0,0)\}$ si $c=0$, et c'est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{c}$ si $c>0$. On remonte L_c à l'altitude $z=c$: le graphe est alors une superposition de cercle de centre $(0,0,c)$ et de rayon $\sqrt{c}$, $c>0$. Il prend l'allure suivante :

2. Limite et continuité

La notion de limite et continuité de fonctions d'une seule variable se généralise en plusieurs variables sans complexité supplémentaire : il suffit de remplacer la valeur absolue par la norme euclidienne.

Définition 7.
Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $A\in\mathbb{R}^n$, sauf peut être en A.

1. On dit que f admet l comme limite au point A, on écrit $\lim\limits_{M\to A} f(M)=l$, si
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall M\in\mathbb{R}^n,\ 0<\|M-A\|\leqslant\alpha\to|f(M)-l|\leqslant\varepsilon.$$
2. On dit que f admet $+\infty$ comme limite au point A, on écrit $\lim\limits_{M\to A} f(M)=+\infty$, si
$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\ \exists\alpha>0,\ \forall M\in\mathbb{R}^n,\ 0<\|M-A\|\leqslant\alpha\to f(M)\geqslant\varepsilon.$$
3. On dit que f admet $-\infty$ comme limite au point A, on écrit $\lim\limits_{M\to A} f(M)=-\infty$, si
$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\ \exists\alpha>0,\ \forall M\in\mathbb{R}^n,\ 0<\|M-A\|\leqslant\alpha\to f(M)\leqslant\varepsilon.$$

Pour calculer les limites, on ne recourt que rarement à cette définition. On utilise plutôt les théorèmes généraux : opérations sur les limites et encadrement.

Théorème 1 (Opérations sur les limites).
Soient $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ définies au voisinage de $A\in\mathbb{R}^n$. Si f et g admettent des limites en A, alors
$$\lim_A(f+g)=\lim_A f+\lim_A g\,,\qquad \lim_A(fg)=\lim_A f\times\lim_A g\,,$$
$$\lim_A\frac{1}{g}=\frac{1}{\lim_A g}\qquad \textit{et}\qquad \lim_A\frac{f}{g}=\frac{\lim_A f}{\lim_A g}.$$

Remarque. Les résultats ci-dessus sont aussi valables pour des limites infinies avec les conventions usuelles :
$$l+\infty=+\infty,\quad l-\infty=-\infty,\quad \frac{1}{0^+}=+\infty,\quad \frac{1}{0^-}=-\infty,\quad \frac{1}{\pm\infty}=0,$$
$$l\times\infty=\infty\ (l\neq0),\ \infty\times\infty=\infty\ \text{(avec règle de multiplication des signes)}.$$
Les formes indéterminées sont : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, 1^∞, 0^0 et $+\infty-\infty$.

Théorème 2 (Théorème d'encadrement).
Soient $f,g,h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ trois fonctions définies au voisinage de $A\in\mathbb{R}^n$ telles que $f\leqslant h\leqslant g$. Si $\lim_A f=\lim_A g=l$ alors h admet une limite au point A et $\lim_A h=l$.

Si une fonction admet une limite en un point, celle-ci est unique. D'où le résultat qui suit.

Proposition 1.
Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $A\in\mathbb{R}^n$, sauf peut être en A.

1. *Si f admet une limite ℓ au point A, alors la restriction de f à toute courbe passant par A admet une limite en A et cette limite est ℓ.*

2. Par contraposée, si les restrictions de f à deux courbes passant par A ont des limites différentes au point A, alors f n'admet pas de limite au point A.

Un point $M(x, y)$ du plan peut être repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) dans un repère dont l'origine est au point (a, b). Elles sont reliées aux coordonnées cartésiennes par les relations :

$$x = a + r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = b + r\sin\theta \qquad \text{avec } \theta \in [0, 2\pi[.$$

Or $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ donc (x, y) tend vers (a, b) si, et seulement si, r tend vers 0.

Théorème 3 (Calcul de limites en coordonnées polaires).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, sauf peut être en (a, b). Si

$$\lim_{r \to 0} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) = \ell \in \mathbb{R}$$

existe indépendamment de θ, alors $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \ell$.

Exemple 1. *La fonction f admet-elle une limite au point $(0, 0)$ dans les cas suivants ?*

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \quad f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2},$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

Définition 8.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est continue au point $A \in U$ si $\lim_{M \to A} f(M) = f(A)$. On dit que f est continue sur U si f est continue en tout point de U.

Commentaire. Pour étudier la continuité d'une fonction de plusieurs variables, le principe est le même qu'en une seule variable. On décompose la fonction proposée en somme, produit, quotient et composée de fonctions connues pour être continues.

Exemple 2. *Etudier la continuité de la fonction f dans les cas suivants :*

$$1.\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \qquad 2.\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

3. Dérivées partielles premières

Définition 9.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. La dérivée partielle première de f par rapport à x au point $(a, b) \in U$ est définie, si elle existe, par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}.$$

De façon analogue, la dérivée partielle première de f par rapport à y au point (a, b) est définie, si elle existe, par

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}.$$

Remarque. Les définitions sont similaires si $f : U \to R$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Par exemple, la dérivée partielle première par rapport à x au point $(a,b,c) \in U$ est définie, si elle existe, par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b,c)-f(a,b,c)}{x-a}.$$

Définition 10.
Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul. La dérivée directionnelle de f suivant le vecteur $\vec{v}$ au point A est définie, si elle existe, par

$$D_{\vec{v}}f(A) = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+t\vec{v})-f(A)}{t}.$$

Remarques.

1. Si $\vec{v} = \vec{i} = (1,0)$, on retrouve $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = D_{\vec{i}}f(A)$.
2. Si $\vec{v} = \vec{j} = (0,1)$, on retrouve $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = D_{\vec{j}}f(A)$.

Exemple. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \ \textit{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \textit{et} \quad f(0,0) = 0.$$

1. *Etudier l'existence des dérivées partielles premières de f au point $(0,0)$.*
2. *Etudier l'existence de la dérivée de f suivant un vecteur non nul au point $(0,0)$.*

Solution.

1. On a : $f(x,0) = x$ et $f(0,y) = y$. Donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y} = 1.$$
Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$.
2. Pour tout vecteur $\vec{v} = (v_1, v_2)$ non nul, on a :
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2)-f(0,0)}{t} = \frac{v_1^3+v_2^3}{v_1^2+v_2^2}.$$
Donc f admet une dérivée suivant tout vecteur non nul au point $(0,0)$.

Définition 11.
On suppose que f admet une dérivée partielle première par rapport à chaque variable en tout point de U. On appelle dérivée partielle première de f par rapport à x (resp. y) la fonction définie sur U par

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \left(resp.\ \frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).$$

Méthode. Pour calculer une dérivée partielle par rapport à une variable, il suffit de dériver par rapport à cette variable en considérant les autres comme des constantes paramétriques.

Exemple. *Calculer les dérivées partielles premières des fonctions f_i définies par*

$$f_1(x,y) = x^2y^3e^{xy}, \qquad f_2(x,y,z) = e^z\cos(x^2+y^2).$$

4. Différentielle et jacobienne

Définition 12.
On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles premières par rapport à chaque variable au point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle différentielle de f au point (a,b) l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (h,k) associe :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k.$$

Notation. En physique, on interprète h et k comme de petites variations des variables x et y et on les note plutôt $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$. En fait, les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\mathrm{d}x : (h,k) \mapsto h \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}y : (h,k) \mapsto k$$

forment une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et la différentielle de f au point (a,b) s'écrit dans cette base :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,\mathrm{d}y.$$

En notant $\mathrm{d}f$ la différentielle de f, ceci justifie l'écriture abrégée suivante :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Elle signifie

$$\forall (x,y) \in U, \;\; \mathrm{d}f_{(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \sin x \mathrm{e}^{2y}$.

On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \mathrm{e}^{2y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\sin x \mathrm{e}^{2y}$. La différentielle de f est définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \;\; \mathrm{d}f_{(x,y)} = \cos x \mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}x + 2\sin x \mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}y.$$

Par exemple, au point $(0,0)$, on aura : $\mathrm{d}f_{(0,0)} = \mathrm{d}x$.

Matrice jacobienne. Si les m fonctions coordonnées de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admettent des dérivés partielles premières par rapport à chaque variable en un point $A \in \mathbb{R}^n$, la différentielle de f au point A est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$. Sa matrice par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ est la jacobienne de f au point A. Pour plus de clarté, on donne la définition en dimension réduite.

Définition 13.
Soit $f : U \to \mathbb{R}^2$, où U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, telle que

$$\forall (x,y,z) \in U, \; f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)).$$

On appelle matrice jacobienne de f au point (a,b,c) la matrice des dérivées partielles premières de f_1 et f_2, lorsqu'elles existent :

$$\mathrm{J}_f(a,b,c) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(a,b,c) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(a,b,c) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(a,b,c) \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(a,b,c) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(a,b,c) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(a,b,c) \end{pmatrix}.$$

On appelle différentielle de f au point (a,b,c) l'application linéaire $\mathrm{d}f_{(a,b,c)}$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est $\mathrm{J}_f(a,b,c)$.

Exemple 1. Coordonnées polaires d'un point du plan :

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta), \end{array} \qquad \mathrm{J}_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x,y,z) = (\mathrm{e}^{xy}, z\sin x)$. La matrice jacobienne de f existe en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et est donnée par :

$$\mathrm{J}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^{xy} & x\mathrm{e}^{xy} & 0 \\ z\cos x & 0 & \sin x \end{pmatrix}.$$

Exemple 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par : $f(x,y) = (x^2+y^2, \mathrm{e}^{xy}, x+y)$. Alors la matrice jacobienne de f au point (x,y) est :

$$\mathrm{J}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y\mathrm{e}^{xy} & x\mathrm{e}^{xy} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Complément. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$, telle que les trois dérivées partielles premières au point $A \in U$ existent. Alors

$$\mathrm{J}_f(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(A) & \frac{\partial f}{\partial y}(A) & \frac{\partial f}{\partial y}(A) \end{pmatrix}$$

et, pour tout $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$,

$$\mathrm{d}f_A(\vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(A)v_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(A)v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(A) & \frac{\partial f}{\partial y}(A) & \frac{\partial f}{\partial z}(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

La différentielle peut être aussi vue comme l'application qui à un vecteur associe son produit scalaire par le vecteur des dérivées partielles au point A, qu'on appelle le gradient de f au point A, et que l'on note

$$\nabla f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), \frac{\partial f}{\partial z}(A) \right).$$

5. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 14.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur U.

Notation. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $(0,0)$. On dit que f est négligeable par rapport à $\|(x,y)\|^n$ au voisinage de $(0,0)$ et on note $f = o\left(\|(x,y)\|^n\right)$ si

$$\lim_{(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|^n} = 0.$$

Théorème 4.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles premières sur l'ouvert U qui soient continues au point $(a,b) \in U$. Alors pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a+h, b+k) \in U$,

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + o\left(\|(h,k)\|\right).$$

On dit que f admet un développement limité d'ordre 1 au point (a,b). En particulier, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f admet un développement limité d'ordre 1 en tout point de U.

Démonstration. Soit $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a+h, b+k) \in U$. On a :

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = [f(a+h,b) - f(a,b)] + [f(a+h,b+k) - f(a+h,b)].$$

Les fonctions $x \mapsto f(x,b)$ et $y \mapsto f(a+h, y)$ sont dérivables respectivement aux points a et b. Donc

$$f(a+h,b) - f(a,b) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + o(h)$$

et
$$f(a+h,b+k)-f(a+h,b)=k\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b)+o(k).$$
Or, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue au point (a,b), donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a+h,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)+o(1)$. D'où
$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+k\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+h\varepsilon_1(h)+k\varepsilon_2(k)$$
avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=0=\lim\limits_{k\to 0}\varepsilon_2(k)$. Or
$$\frac{|h\varepsilon_1(h)+k\varepsilon_2(k)|}{\|(h,k)\|}\leqslant 2\left(|\varepsilon_1(h)|+|\varepsilon_2(k)|\right)\underset{(0,0)}{\longrightarrow}0\,.$$
Donc
$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\,\mathrm{d}f_{(a,b)}(h,k)+o\left(\|(h,k)\|\right).$$
Ainsi f admet un développement limité d'ordre 1 au point (a,b).

Remarques.

1. On dit aussi que f est différentiable au point (a,b) si, et seulement si, $\mathrm{d}f_{(a,b)}$ existe et si
$$f(x,y)=f(a,b)+\,\mathrm{d}f_{(a,b)}(x-a,y-b)+o\left(\|(x-a,y-b)\|\right).$$
2. Comme en une seule variable, f est différentiable au point (a,b) si, et seulement si, f est continue au point (a,b) et y admet un développement limité d'ordre 1.
3. Le théorème précédent implique que, toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est différentiable. On retiendra que la réciproque est fausse.

Exemple 1. *Etudier la différentiabilité au point* $(0,0)$ *de la fonction* f *définie par*
$$f(x,y)=\frac{x^4}{x^2+y^2}\ \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\quad\text{et}\quad f(0,0)=0.$$
Il est clair que f est continue au point $(0,0)$. Par ailleurs,
$$f(x,0)=x^2\ \rightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$$
et
$$f(0,y)=0\ \rightarrow\ \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$
Ainsi $\mathrm{d}f_{(0,0)}=0$ et, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$, on a :
$$0\leqslant\frac{f(x,y)-f(0,0)-\,\mathrm{d}f_{(0,0)}(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^4}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\leqslant\frac{x^4}{|x|^3}=|x|\underset{(0,0)}{\longrightarrow}0\,.$$
Donc f est différentiable au point $(0,0)$.

Exemple 2. *Soit* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *telle que*
$$f(x,y)=y^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}\quad\textit{si } (x,y)\neq(0,0)\quad\textit{et}\quad f(0,0)=0.$$
Montrer que f *est différentiable en tout point de* $\mathbb{R}^2$ *sans être de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

Sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Les dérivées partielles
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$
existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$: f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et est donc différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Différentiabilité au point $(0,0)$. Calculons les dérivées partielles de f au point $(0,0)$:
$$f(x,0)=0\rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0.$$

et

$$f(0,y) = y^2 \sin\frac{1}{y^2} \to \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{y^2} = 0$$

Donc $\mathrm{d}f_{(0,0)}$ existe et $\mathrm{d}f_{(0,0)} \equiv 0$. De plus

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\mathrm{d}f_{(0,0)}(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Or, $\left|\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right| \leqslant |y| \underset{(0,0)}{\longrightarrow} 0$. Donc f est différentiable au point $(0,0)$.

<u>*Conclusion*</u>. La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs,

$$\lim_{t\to 0} f'_x(t,t) = \lim_{t\to 0}\left[-\frac{1}{2t}\cos\frac{1}{2t^2}\right]$$

n'existe pas. Donc f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

La définition de f de classe $\mathscr{C}^1$ sur U ne suppose pas que f est continue sur U. C'est une conséquence du résultat suivant :

Corollaire 1.
Si la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors f est continue en tout point de U.

Démonstration. Soit $(a,b) \in U$. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, on a :

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \mathrm{d}f_{(a,b)}(h,k) + o\left(\|(h,k)\|\right).$$

Or, $\lim\limits_{(0,0)} \mathrm{d}f_{(a,b)}(h,k) = 0$ car $\mathrm{d}f_{(a,b)}$ est continue. Donc $\lim\limits_{(0,0)} f(a+h,b+k) = f(a,b)$.

Plus intéressant, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors f admet des dérivées suivant toutes les directions en tout point de U.

Corollaire 2.
Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, alors, pour tout point $A \in U$ et tout vecteur non nul $\vec{v} = (v_1, v_2)$, f admet une dérivée suivant le vecteur $\vec{v}$ au point A et

$$D_{\vec{v}} f(A) = \mathrm{d}f_A(\vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(A)v_2.$$

Démonstration. Soit $(a,b) \in U$ et $\vec{v} = (v_1,v_2) \neq \vec{0}$. Avec le DL_1, on a :

$$f(a+tv_1, b+tv_2) = f(a,b) + t\,\mathrm{d}f_{(a,b)}(v_1,v_2) + o\left(\|(tv_1,tv_2)\|\right).$$

Donc

$$\frac{f(A+t\vec{v})-f(A)}{t} = \mathrm{d}f_A(v_1,v_2) + o(1)$$

car $o\left(\|(tv_1,tv_2)\|\right) = |t|\|(v_1,v_2)\|o(1)$. D'où le résultat.

On retiendra que la réciproque de ce résultat est fausse.

Exemple. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x,y) = \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}} \quad si\ (x,y) \neq (0,0) \quad et \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que f admet une dérivée suivant tout vecteur non nul au point $(0,0)$ mais qu'elle n'y est pas différentiable.

<u>*Solution.*</u>

1. Soit $\vec{v} = (v_1,v_2) \neq (0,0)$.

. Si $v_1 = 0$, on a $\dfrac{f(t\vec{v}) - f(0,0)}{t} = \dfrac{f(0,tv_2)}{t} = v_2$.

. Si $v_1 \neq 0$, on a $\left|\dfrac{f(t\vec{v}) - f(0,0)}{t}\right| = \left|\dfrac{v_2^3 t^2}{\sqrt{v_1^2 t^2 + v_2^4 t^4}}\right| \leqslant \left|\dfrac{v_2^3}{v_1}\right| |t| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi $D_{\vec{v}} f(0,0) = \begin{cases} v_2 & \text{si} \quad v_1 = 0 \\ 0 & \text{si} \quad v_1 \neq 0. \end{cases}$

2. Avec $\vec{v} = (1,0)$, on aura $f'_x(0,0) = 0$, avec $\vec{v} = (0,1)$, on aura $f'_y(0,0) = 1$ et f est continue au point $(0,0)$. Mais l'expression
$$\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \mathrm{d}f_{(0,0)}(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^3 - y\sqrt{x^2+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^4}},$$
n'a pas de limite en $(0,0)$ car $\lim\limits_{t\to 0^+} \varepsilon(0,t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} \varepsilon(t,t) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Donc f n'est pas différentiable au point $(0,0)$.

Remarque. La dérivée suivant le vecteur non nul $\vec{v}$ au point A décrit la variation de f autour de A lorsqu'on se déplace dans la direction $\vec{v}$. La direction selon laquelle la croissance est la plus forte est celle du gradient de f. En effet,
$$D_{\vec{v}} f(A) = \langle \nabla f(A), \vec{v} \rangle = \|\nabla f(A)\| \, \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\nabla f(A), \vec{v}}).$$
Le maximum est atteint lorsque $(\widehat{\nabla f(A), \vec{v}}) = 0$. C'est à dire lorsque $\vec{v}$ pointe dans la même direction que $\nabla f(A)$.

Définition 15.
Soit $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et S la surface définie par $S = \{(x,y,z) \in U \mid F(x,y,z) = 0\}$. Soit $M_0 \in S$ tel que $\nabla F(M_0) \neq \vec{0}$. Alors le plan tangent à S au point M_0 est le plan passant par M_0 et de vecteur normal $\nabla F(M_0)$.

Proposition 2.
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et $(a,b) \in U$. Le plan tangent au graphe de f existe en tout point du graphe et une équation cartésienne de ce plan au point $M_0 = (a,b,f(a,b))$, est
$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).(y-b).$$

Démonstration. On introduit la fonction F définie par
$$\forall (x,y,z) \in U \times \mathbb{R}, \;\; F(x,y,z) = z - f(x,y).$$
Le graphe de f est la surface $\mathscr{G}_f = \{(x,y,z) \in U \times \mathbb{R} \mid F(x,y,z) = 0\}$ et
$$\overrightarrow{\nabla} F(x,z,z) = (-f'_x(x,y), -f'_y(x,y), 1) \neq \vec{0}.$$
Donc le plan tangent au graphe de f existe en tout point du graphe.

6. Différentielle d'une fonction composée

Pour le calcul des différentielles, on est souvent amené à utiliser la règle de dérivation selon laquelle la différentielle d'une fonction composée est la composée des différentielles.

Théorème 5.
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $u, v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ par
$$\varphi(t) = (u(t), v(t))$$
et on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $\varphi(I) \subset U$. Alors la fonction $F = f \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et
$$\forall t \in I, \;\; F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t))u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t))v'(t).$$

Démonstration. Soit $t \in I$. En introduisant le vecteur dérivée $\varphi'(t) = (u'(t), v'(t))$, on a :

$$\varphi(t+h) = \varphi(t) + h\varphi'(t) + h\varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Ici ε est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Or f admet un DL_1 au point $\varphi(t)$:

$$f(\varphi(t+h)) = f(\varphi(t)) + \mathrm{d}f_{\varphi(t)}\left(h\varphi'(t) + h\varepsilon(h)\right) + o\left(\|h\varphi'(t) + h\varepsilon(h)\|\right)$$

et comme $\|h\varphi'(t) + h\varepsilon(h)\| = |h|\|\varphi'(t) + \varepsilon(h)\|$, on voit que

$$o\left(\|h\varphi'(t) + h\varepsilon(h)\|\right) = o(h).$$

En tenant compte de la linéarité de la différentielle, il en découle que

$$f(\varphi(t+h)) = f(\varphi(t)) + h\,\mathrm{d}f_{\varphi(t)}\left(\varphi'(t)\right) + h\,\mathrm{d}f_{\varphi(t)}(\varepsilon(h)) + o(h).$$

La forme linéaire $\mathrm{d}f_{\varphi(t)}$ étant continue, $\lim_{h\to 0} \mathrm{d}f_{\varphi(t)}(\varepsilon(h)) = 0$. Donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\varphi(t+h)) - f(\varphi(t))}{h} = \mathrm{d}f_{\varphi(t)}\left(\varphi'(t)\right).$$

Exemple.

1. *Soit $f(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y$. Calculer la dérivée de la fonction $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t^2, \sin t)$.*
2. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que*
$$g(t) = f(2t, 1+t^2).$$
Exprimer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

Une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si ses m fonctions coordonnées le sont.

Théorème 6.
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et $g : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par

$$\forall (u,v) \in V, \quad g(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v)),$$

de classe $\mathscr{C}^1$ sur V telles que $g(V) \subset U$. Alors la fonction $F = f \circ g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V. Au point $(u,v) \in V$, sa différentielle est $\mathrm{d}F_{(u,v)} = \mathrm{d}f_{g(u,v)} \circ \mathrm{d}g_{(u,v)}$ et sa jacobienne est

$$\mathrm{J}_F(u,v) = \mathrm{J}_f(g(u,v)) \times \mathrm{J}_g(u,v).$$

C'est à dire,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(u,v))\frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u,v))\frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(u,v))\frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u,v))\frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v). \end{aligned}\right.$$

Démontrastion. Soit $(u,v) \in V$. On applique le théorème précédent à la première fonction partielle :

$$F_1 : t \mapsto F(t,v) = f(g_1(t,v), g_2(t,v)).$$

Elle est dérivable au point u et

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = F_1'(u) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(u,v))\frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u,v))\frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v).$$

On fait de même avec la deuxième fonction partielle. On en déduit que F admet des dérivées partielles premières en tout point de V. Ces dérivées s'expriment comme composées de fonctions continues donc la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.

7. Dérivées partielles d'ordre 2, hessienne

Soit $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^3$. Les tois dérivées partielles premières sont encore des fonctions de U sur $\mathbb{R}$. Si elles-mêmes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. Leurs dérivées partielles, au nombre de 9, sont les dérivées partielles secondes de f. Le théorème de Schwarz dit que le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les dérivations.

Théorème 7 (**Théorème de Schwarz**).
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Pour tout $i,j = 1,\dots,n$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

La notation pour la dérivée partielle seconde par rapport à x_i et x_j est $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Leur matrice est la matrice hessienne de f, qui est symétrique d'après le théorème de Schwarz.

Définition 16.
Soit $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^3$. La matrice hessienne de f au point $A \in U$ est

$$\mathrm{H}_f(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A) \end{pmatrix}.$$

Exemple. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

On vérifie que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Le taux d'accroissement

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = 1 \xrightarrow[y \to 0]{} 1$$

ce qui montre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$. De même, le taux d'accroissement

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

ce qui montre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$. On en déduit que l'une des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Théorème 8 (Formule de Taylor).
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et soit $(a,b) \in U$. Alors, pour tout $(x,y) \in U$,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[(x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + (y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right] \\ &\quad + o\left(\|(x-a, y-b)\|^2\right). \end{aligned}$$

On dit aussi que f admet un développement limité d'ordre 2 au point (a,b).

8. Extremum et points critiques

Définition 17.
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, où U est un ouvert. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en $A \in U$, s'il existe une boule ouverte $B \subset U$, centrée en A, telle que :

$$\forall M \in B,\ f(M) \leqslant f(A), \text{ (resp. } f(M) \geqslant f(A).$$

On dit que f admet un extremum local en A, si elle y admet un maximum local ou un minimum local.

Proposition 3.
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U et $A \in U$. Si f possède un extremum local en un point A, alors le gradient de f au point A est nul : $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$.

Démonstration. Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. La fonction $\varphi : t \mapsto f(A + t\vec{v})$, définie pour t assez petit, est dérivable au voisinage de 0 et admet un extremum en 0. Donc $\varphi'(0) = 0$ et puis

$$0 = \varphi'(0) = \mathrm{d}_A f(\vec{v}) = \langle \nabla f(A), \vec{v} \rangle.$$

Or ceci est vrai pour tout vecteur $\vec{v}$, donc $\nabla f(A) = 0$.

Les points de U où le gradient de f s'annule sont appelés points critiques de f. Le résultat précédent dit que les extremums d'une fonction ne peuvent se produire qu'en un point critique. La réciproque est fausse.

Théorème 9.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur U et $(a,b) \in U$ un point critique de f.

1. *Si $\mathrm{H}_f(a,b)$ a toutes ses valeurs propres strictement positives, alors f présente un minimum en (a,b).*
2. *Si $\mathrm{H}_f(a,b)$ a toutes ses valeurs propres strictement négatives, alors f présente un maximum en (a,b).*
3. *Si $\mathrm{H}_f(a,b)$ a deux valeurs propres de signes opposés, alors f ne présente pas d'extremum en (a,b). On dit que (a,b) est un point selle.*
4. *Dans les autres cas, on ne peut rien dire (tout peut arriver).*

Démonstration. Pour h et k, assez petits, non nuls, la différence $f(a+h, b+k) - f(a,b)$ est du signe de

$$q(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2 = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \mathrm{H}_f(a,b) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Il se trouve que, comme pour toute matrice symétrique réelle, $\mathrm{H}_f(a,b)$ est diagonalisable : il existe une matrice orthogonale $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $P^{-1} = {}^tP$, et deux réels λ et μ tels que

$$\mathrm{H}_f(a,b) = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Posons

$$\begin{pmatrix} h^* \\ k^* \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} h^* & k^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} P.$$

La quantité $q(h,k)$ s'écrit

$$q(h,k) = \begin{pmatrix} h^* & k^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^* \\ k^* \end{pmatrix} = \lambda(h^*)^2 + \mu(k^*)^2.$$

Le signe de $q(h,k)$ dépend donc du signe des valeurs propres λ et μ.

- Si $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, alors $q(h,k) > 0$. On a un minimum local.
- Si $\lambda < 0$ et $\mu < 0$, alors $q(h,k) < 0$. On a un maximum local.
- Si $\lambda > 0$ et $\mu < 0$, alors $q(h,k) > 0$ dans la direction $(h^*,0)P$, et $q(h,k) < 0$ dans la direction $(0,k^*)P$. On a un point selle.

Rappel. Les valeurs propres de $\mathrm{H}_f(a,b)$ sont les racines du polynôme caractéristique de $\mathrm{H}_f(a,b)$ qui est défini par $\chi(X) = \det\big[\mathrm{H}_f(a,b) - XI_2\big]$.

Exemple 1. Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$. Le point $(0,0)$ est l'unique point critique de f et

$$\mathrm{H}_f(0,0) = 2I_2.$$

Les valeurs propres de la hessienne de f au point $(0,0)$ sont toutes les deux strictement positives. Donc f admet un minimum local en $(0,0)$.

Exemple 2. Soit $f(x,y) = x^2 - y^2$. On trouve un seul point critique : $(0,0)$. La hessienne de f au point $(0,0)$, $\mathrm{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. Donc $(0,0)$ n'est ni un maximum ni un minimum ; c'est un point selle (cf. Figure 1 : selle de cheval).

Exemple 3. Soit $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$. On trouve un seul point critique : $(0,0)$. La hessienne de f au point $(0,0)$, $\mathrm{H}_f(0,0) = (0)$, a deux valeur propre nulles. On ne peut pas conclure. Or, $f_0 : x \mapsto f(x,0) = x^3$ possède un point d'inflexion au point 0. Donc $(0,0)$ est un point selle (cf. Figure 2 : selle de singe).

Exemple 4. Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$. On trouve trois points critiques $(-1,0)$, $(1,0)$ et $(0,0)$. Par ailleurs,

$$\mathrm{H}_f(-1,0) = \mathrm{H}_f(1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On ne peut pas conclure. Or

$$f(x,y) = (x^2-1)^2 + y^4 - 1 \geqslant -1 = f(\pm 1, 0).$$

Donc f admet un minimum aux points $(\pm 1, 0)$. D'autre part, pour $|x| \leqslant 1$,

$$f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2-2) \leqslant 0 = f(0,0) \quad \text{et} \quad f(0,y) = y^4 \geqslant 0 = f(0,0).$$

Donc $(0,0)$ n'est ni un maximum ni un minimum ; c'est un point selle.

Exemple 5. Soit $f(x,y) = 2x^3 - y^4 - 3x^2$. On trouve deux points critiques $(0,0)$ et $(1,0)$. Par ailleurs,

$$\mathrm{H}_f(1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On ne peut pas conclure. Or, pour $|x-1| \leqslant 1$,

$$f(1,y) = -1 - y^4 \leqslant -1 = f(1,0) \quad \text{et} \quad f(x,0) = (x-1)^2(2x+1) - 1 \geqslant -1 = f(1,0).$$

Donc $(1,0)$ n'est ni un maximum ni un minimum ; c'est un point selle. D'autre part, pour $|x| \leqslant 1$,

$$f(x,y) = x^2(2x-3) - y^4 \leqslant 0 = f(0,0).$$

Donc f admet un maximum local au point $(0,0)$.

Difféomorphismes, EDP

1. Difféomorphismes

Les applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui sont bijectives et de classe $\mathscr{C}^1$ ainsi que leur réciproque, sont utilisées comme changements de variables. On les appelle des difféomorphismes.

Définition 18.
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi : U \to V$. On dit que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme si

1. Φ est une bijection de U sur V.
2. Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
3. Φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.

Du théorème de composition découle que les différentielles de Φ et Φ^{-1} sont elles aussi réciproques l'une de l'autre. Et donc les matrices jacobiennes, qui sont des matrices carrées $n \times n$, sont inverses l'une de l'autre.

Proposition 4.
Soit $\Phi : U \to V$ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme, $A \in U$ et $B \in V$. Alors

$$[\mathrm{J}_\Phi(A)]^{-1} = \mathrm{J}_{\Phi^{-1}}(\Phi(A)) \quad \textit{et} \quad \mathrm{J}_{\Phi^{-1}}(B) = \left[\mathrm{J}_\Phi\left(\Phi^{-1}(B)\right)\right]^{-1}.$$

Pour un difféomorphisme, le déterminant de la matrice jacobienne joue un rôle particulier.

Définition 19.
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi : U \to V$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On appelle jacobien de Φ au point $A \in U$ le déterminant de la matrice jacobienne de Φ au point A :

$$\mathrm{Jac}_\Phi(A) = \det(\mathrm{J}_\Phi(A)).$$

Il est clair que le jacobien d'un difféomorphisme ne s'annule pas, puisque la matrice jacobienne est inversible. La réciproque est donnée par le théorème d'inversion.

Théorème 10 (d'inversion)**.**
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi : U \to V$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Si Φ est bijective et si le jacobien de Φ ne s'annule pas sur U, alors Φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U sur V.

Exemple. Les passages en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques, sont très souvent utilisés. Détaillons le premier qui consiste à remplacer les coordonnées cartésiennes (x, y) d'un point du plan, par le module r et l'argument

θ du point dans le plan complexe.

$$\begin{array}{rcccl} \Phi & : & U=\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}^+\times\{0\}) & \to & V=]0,+\infty[\times]0,2\pi[\\ & & (x,y) & \mapsto & (r,\theta). \end{array}$$

Dans la pratique, on travaille avec la réciproque

$$\begin{array}{rcccl} \Psi & : & V & \to & U \\ & & (r,\theta) & \mapsto & (x,y) \end{array} \qquad \text{où} \left\{ \begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta. \end{array}\right.$$

On doit avoir $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et le point $(x/r,y/r)$ est dans le cercle unité privé du point $(1,0)$. Donc il existe un unique $\theta\in]0,2\pi[$ tel que

$$x=r\cos\theta \quad \text{et} \quad y=r\sin\theta.$$

Ainsi Ψ est bijective et il est évident qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$. Sa matrice jacobienne est

$$\mathrm{J}_\Psi(r,\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

et son jacobien, qui vaut r, ne s'annule pas sur V. Donc Ψ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de V sur U. Pour calculer les dérivées partielles de r et θ, on utilise l'inversion matricielle de la jacobienne. En effet, puisque $\Phi=\Psi^{-1}$,

$$\mathrm{J}_\Phi(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}=[\mathrm{J}_\Psi(r,\theta))]^{-1}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant une application $f:(x,y)\mapsto f(x,y)$ de U dans $\mathbb{R}$. Pour utiliser passer en coordonnées, on doit remplacer les anciennes coordonnées (x,y) par les nouvelles coordonnées (r,θ), et donc considérer la fonction g de V dans $\mathbb{R}$ qui à (r,θ) associe :

$$g(r,\theta)=f\left(\Phi^{-1}(r,\theta)\right)=f\left(x(r,\theta),y(r,\theta)\right).$$

La formule de dérivation des fonctions composées donne

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\dfrac{\partial r}{\partial x}(x,y)+\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\dfrac{\partial \theta}{\partial x}(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\dfrac{\partial r}{\partial y}(x,y)+\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\dfrac{\partial \theta}{\partial x}(x,y). \end{array}\right.$$

Donc, d'après $(*)$, on aura :

$$(**) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \cos\theta.\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)-\dfrac{\sin\theta}{r}.\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \sin\theta.\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)+\dfrac{\cos\theta}{r}.\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta). \end{array}\right.$$

2. Equations aux dérivées partielles

2.1. Champs de vecteurs

Les équations aux dérivées partielles sont omniprésentes en physique. Elles relient entre elles les dérivées partielles d'ordre 1 et 2, et font intervenir des combinaisons de dérivées partielles comme le gradient, la divergence ou le rotationnel.

On rappelle que le gradient d'une fonction de deux variables f est le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

On dispose donc d'un opérateur, noté formellement, $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ sur les fonctions. De même, le gradient d'une fonction de trois variables f est le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

On dispose à nouveau d'un opérateur, noté formellement, $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

Définition 20.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $F : (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y))$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^2$. Une telle application est aussi appelée un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini sur U. On définit formellement le rotationnel du champ de vecteurs F comme étant le champ de vecteurs de $\mathbb{R}$ défini sur U par

$$\operatorname{rot}(F)(x, y) = \det(\nabla, F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \frac{\partial}{\partial y} & Q \end{vmatrix}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y).$$

Un champ de vecteurs sera noté indifféremment F ou $\overrightarrow{F}$. On vérifiera à partir de cette définiton et le théorème de Schwarz que, $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$.

Définition 21.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $F : (x, y, z) \mapsto (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^3$, appelée aussi champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini sur U.

1. Le rotationnel de F est le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donné par
$$\operatorname{rot}(F) = \nabla \wedge F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$
2. La divergence de F est la fonction $\operatorname{div}(F) = \langle \nabla, F \rangle = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

On vérifiera à partir de ces définitons et le théorème de Schwarz que, $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$ et que, pour un champ de vecteurs F de $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$.

Définition 22.
Soit F un champ de vecteurs défini sur U. On dit que F dérivé d'un potentiel sur U s'il existe une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ telle que $F = \nabla f$ sur U. Dans ce cas, on dira que f est un potentiel de F.

Théorème 11 (Poincaré).
Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) et F un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Alors F dérive d'un potentiel sur U si, et seulement si, $\mathrm{rot}F = 0$.

Méthode. Lorsqu'un champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel f, on écrit $\nabla f = \overrightarrow{F}$. En identifiant les coordonnées, on obtient un système d'équations dont la seule inconnue est f. Il faut donc intégrer ce système pour déterminer f.

Exemple. *Montrer que le champ de vecteurs $\overrightarrow{F}(x,y) = y^2\vec{i} + (2xy-1)\vec{j}$ dérive d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer les potentiels dont il dérive.*

Solution. Ici $P(x,y) = y^2$, $Q(x,y) = 2xy-1$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Donc $\mathrm{rot}\overrightarrow{F} = 0$ et, comme $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe, $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel f sur $\mathbb{R}^2$. On aura :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = y^2 \to f(x,y) = xy^2 + K(y)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = 2xy-1 \to K'(y) = -1 \to K(y) = -y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Les potentiels de $\overrightarrow{F}$ sur $\mathbb{R}^2$ sont les fonctions f définies par $f(x,y) = xy^2 - y + C$.

2.2. Exemples d'équations aux dérivées partielles

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. On note (x_0, y_0) un point de U et U_1 (resp. U_2) la projection de U sur l'axe $y = 0$ (resp. $x = 0$).

Proposition 5.
Soit h une fonction de classe $\mathscr{C}^0$ sur U. On note H la primitive de $h_1 : x \mapsto h(x,y)$ sur U_1 qui s'annule en x_0. Une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur U est une solution de

$$(E_1) \ : \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(x,y)$$

si, et seulement si, il existe une fonction k de classe $\mathscr{C}^1$ sur U_2 telle que

$$\forall (x,y) \in U, \ \ f(x,y) = H(x,y) + k(y).$$

Démonstration. Si f est une solution de (E_1) la fonction $\varphi : x \mapsto f(x,y) - H(x,y)$ est dérivable et de dérivée nulle. Elle est donc constante :

$$\forall x \in U_1, \ \varphi(x) = \varphi(x_0) \to f(x,y) = H(x,y) + f(x_0, y)$$

et $k : y \mapsto f(x_0,y)$ est bien une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U_2. Réciproquement, on vérifie qu'une fonction de cette forme est solution de (E_1).

Proposition 6.
Soit h une fonction de classe $\mathscr{C}^0$ sur U_1 et H une primitive de h sur U_1. Une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur U est une solution de

$$(E_2) \ : \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = h(x)$$

si, et seulement si, il existe une fonction K de classe $\mathscr{C}^2$ sur U_2 telle que

$$\forall (x,y) \in U, \ \ f(x,y) = yH(x) + K(y).$$

Démonstration. Si f est une solution de (E_2) la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est solution d'une équation du type (E_1). Donc

$$\forall (x,y)\in U,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=H(x)+k(y)$$

où k est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U_2. Ainsi f est une solution d'une équation du type (E_1). Donc de la forme ci-dessus. Réciproquement, on vérifie qu'une fonction de cette forme est solution de (E_2).

Proposition 7.
Une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur U est une solution de

$$(E_3)\ :\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0$$

si, et seulement si, il existe deux fonctions K et H de classe $\mathscr{C}^2$ sur U_2 telles que

$$\forall (x,y)\in U,\ f(x,y)=xH(y)+K(y).$$

Démonstration. Si f est une solution de (E_3) la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est solution d'une équation du type (E_1). Donc

$$\forall (x,y)\in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=k(y)$$

où k est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U_2. Ainsi f est une solution d'une équation du type (E_1). Donc de la forme ci-dessus. Réciproquement, on vérifie qu'une fonction de cette forme est solution de (E_3).

Résolution à l'aide d'un difféomorphisme. Pour intégrer une EDP, (E) donnée, on utilise un changement de variables pour se ramener à une EDP plus simple. Soit

$$\begin{array}{cccc}\Phi & : & U & \to & V\\ & & (x,y) & \mapsto & (u,v).\end{array}$$

un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. Pour une fonction f solution de (E), on pose $g=f\circ\Phi^{-1}$. C'est à dire $f=g\circ\Phi$.

1. On utilise la formule de dérivation des fonctions composées pour exprimer les dérivées partielles de f en fonction de g, u et u.
2. On remplace dans l'équation (E) ce qui donne l'EDP (E') satisfaite par g.
3. On intègre (E') et on en déduit les solutions f de (E).

Exemple. Intégrons dans $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ x>0\}$ l'EDP suivante :

$$(E)\ :\ x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

On pose $V=]0,+\infty[\times\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, et on considère l'application $\Phi : V\to U$ définie par

$$\Phi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

1. L'application Φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de V sur U, et
$$\forall (x,y)\in U,\ \Phi^{-1}(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right).$$
2. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ solution de (E) sur U. On considère la fonction g définie sur V par
$$g(r,\theta)=f(x,y) \text{ avec } (x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta).$$
   (a) On exprime les dérivées partielles premières de f en fonction de g, r et θ (cf. les relations $(\star\star)$ ci-dessus).
   (b) On reporte dans l'équation (E) ce qui donne :
   $$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=r\iff\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=1.$$
   (c) On voit que g est une solution d'une équation du type (E_1), donc $g(r,\theta)=r+k(\theta)$ où k est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que toute solution f de (E) est de la forme :
   $$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+k\left(\arctan\frac{y}{x}\right).$$

Intégrales multiples

1. Intégrales doubles

1.1. Définition via le théorème de Fubini

Dans cette partie, on ne développe pas toute la théorie des intégrales doubles. Pour calculer de telles intégrales, l'idée est de se ramener à des intégrales simples, que vous savez calculer grâce au théorème fondamental de l'analyse.

Théorème 12 (Théorème fondamental de l'analyse).
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Alors f admet une primitive F sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

On transforme l'intégrale double en 2 intégrales simples emboîtées. Le théorème clé, qui permet de faire ceci, est le théorème de Fubini. Donnons d'abord la définition suivante :

Définition 23.
Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$.

1. On dit que D est élémentaire par rapport à x s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et $h_1, h_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$ tels que
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ h_1(x) \leqslant y \leqslant h_2(x)\right\}.$$
2. On dit que D est élémentaire par rapport à y s'il existe $c, d \in \mathbb{R}$ et $k_1, k_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ continues sur $[c,d]$ tels que
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leqslant y \leqslant d,\ k_1(y) \leqslant x \leqslant k_2(y)\right\}.$$

Théorème 13 (Théorème de Fubini).
Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est intégrable sur D. De plus, avec les notations précédentes,

1. *si D est élémentaire par rapport à x, l'intégrale de f sur D est*
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$
2. *si D est élémentaire par rapport à y, l'intégrale de f sur D est*
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{k_1(y)}^{k_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

3. Si D est élémentaire à la fois par rapport à x et par rapport à y alors

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_{k_1(y)}^{k_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

Commentaire.

1. En un mot, dans le premier mode, on dit qu'on intègre d'abord par rapport à y puis par rapport à x. Et dans le second, on intègre d'abord par rapport à x puis par rapport à y.
2. Si D est élémentaire à la fois par rapport à x et par rapport à y. On peut appliquer indifférement l'une des deux formules : le calcul est différent, mais le résultat est le même.
3. Dans la pratique, il peut se faire que l'un des deux modes de calcul soit plus commode que l'autre (cf. exemple 2 ci-dessous).

Corollaire 3.
Si D est le rectangle, $D = [a,b]\times[c,d]$, on a :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

Si, de plus, $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ alors

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y.$$

On ramène le calcul d'une intégrale double à celui de deux intégrales simples. L'intégrale double hérite donc de toutes les propriétés de l'intégrale simple.

Proposition 8 (Propriétés).
L'intégrale double vérifie les propriétés suivantes :

(I_1) *(Normalisation) Si f et g sont égales, sauf sur un nombre fini de courbes, alors*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(I_2) *(Linéarité) Pour tout $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\iint_D (\lambda f + \mu g)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lambda \iint_D f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mu \iint_D g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(I_4) *(Additivité selon le domaine) Si $D = D_1 \cup D_2$ tel que $D_1 \cap D_2$ est formée d'au plus un nombre fini de courbes, alors*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Exemples. Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $I = \displaystyle\iint_D x\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, avec $D = [0,1]\times[0,1]$. On a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[\int_0^1 x\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x\mathrm{e}^{x+y}\right]_0^1 \mathrm{d}x \\ &= (\mathrm{e}-1)\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (\mathrm{e}-1)[x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e}-1. \end{aligned}$$

2. $I = \iint_D e^{y^2}\,dx\,dy$, où D est le triangle de sommets $O=(0,0)$, $A=(0,1)$, $B=(1,1)$. Le domaine D est élémentaire à la fois par rapport à x et par rapport à y :
$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ x\leqslant y\leqslant 1\right\}$$
$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant y\right\}.$$
On a :
$$I = \int_0^1 \left[\int_x^1 e^{y^2}\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^y e^{y^2}\,dx\right] dy.$$
On ne peut finir le calcul avec de cette formule. On essaie donc avec l'autre mode :
$$I = \int_0^1 \left[\int_0^y e^{y^2}\,dx\right] dy = \int_0^1 y e^{y^2}\,dy = \left[\frac{e^{y^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

3. $I = \iint_D dx\,dy$ lorsque D est le quadrilatère de sommets $A=(1,0)$, $B=(4,0)$, $C=(2,1)$, $D=(3,1)$. Un dessin donne :
$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant y\leqslant 1,\ y+1\leqslant x\leqslant 4-y\right\}.$$
Donc $I = \int_0^1 \left[\int_{y+1}^{4-y} dx\right] dy = \int_0^1 (3-2y)\,dy = \left[3y-y^2\right]_0^1 = 2.$

4. $I = \iint_D (x^2-y^2)\,dx\,dy$ avec $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ |x|\leqslant y\leqslant 1\}$. Ici $D = D_1\cup D_2$ avec
$$D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -x\leqslant y\leqslant 1,\ -1\leqslant x\leqslant 0\}$$
$$D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant 1\}.$$
Or
$$\iint_{D_1} (x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_{-1}^0 \left[\int_{-x}^1 (x^2-y^2)\,dy\right] dx = -\frac{1}{6}$$
et
$$\iint_{D_2} (x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (x^2-y^2)\,dy\right] dx = -\frac{1}{6}.$$
Donc $I = \iint_{D_1} (x^2-y^2)\,dx\,dy + \iint_{D_2} (x^2-y^2)\,dx\,dy = -\frac{1}{3}.$

Interprétation géométrique. Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$.

1. On suppose que $f : D \to \mathbb{R}$ est positive sur D. Soit $\mathcal{V}_f$ le domaine dé fini par
$$\mathcal{V}_f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\leqslant z\leqslant f(x,y) \text{ et } (x,y)\in D\}.$$
C'est la partie de l'espace situé au-dessus de D et en-dessous du graphe de f. Alors, par définition le volume du domaine $\mathcal{V}_f$, est
$$V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$
2. En particulier, si f est constante de valeur 1, cette intégrale est ègale à l'aire de D :
$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx\,dy.$$

1.2. Changement de variables

Théorème 14.
Soient D et Δ deux domaines bornés de $\mathbb{R}^2$ et $\Phi : \Delta \to D$ un C^1-difféomorphisme :

$$\Phi : (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v)).$$

Alors, pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue sur D, on a :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta f\circ\Phi(u,v)\,|\mathrm{Jac}_\Phi|(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Noter le présence de la <u>valeur absolue</u> du jacobien de Φ et que $D = \Phi(\Delta)$ et $\Delta = \Phi^{-1}(D)$.

• Changement de variables affine.

On pose $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & au+bv \\ y & = & cu+dv \end{array}\right.$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et $ad-bc \neq 0$. Ici le jacobien est

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc.$$

Exemple. A l'aide du changement de variables $x = u+v$ et $y = u-v$, calculer $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x+y}$ où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, 0 \leqslant x+y \leqslant 2, \quad 0 \leqslant x-y \leqslant 2\}.$$

On a :

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

et

$$(x,y) \in D \iff 0 \leqslant x+y \leqslant 2 \text{ et } 0 \leqslant x-y \leqslant 2 \iff 0 \leqslant u \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant v \leqslant 1.$$

Donc $(x,y) \in D \iff (u,v) \in \Delta = [0,1]\times[0,1]$. Ainsi

$$I = 2\iint_\Delta \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{1+2u} = 2\left[\int_0^1 \mathrm{d}v\right]\left[\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+2u}\right] = [\ln(1+2u)]_0^1 = \ln 3.$$

• Passage en coordonnées polaires.

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour $(x,y) \in D$, on pose

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta. \end{array}\right.$$

On a : $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = r > 0$, et $(x,y) \in D \iff (r,\theta) \in \Delta$. Pour déterminer graphiquement Δ, on dessine le domaine D.

. On détermine les bornes de θ. Ce sont θ_1, $\theta_2 \in \mathbb{R}$ avec $0 < \theta_2 - \theta_1 \leqslant 2\pi$.

. Pour $\theta \in]\theta_1, \theta_2[$, on trace la droite d'angle θ passant par O. Remarquer les points M_1 et M_2.

. On pose $h_1(\theta) = \|\overrightarrow{OM_1}\|$ et $h_2(\theta) = \|\overrightarrow{OM_2}\|$.

Ainsi $\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\right\}$ et

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta.$$

Exemple 1. Calculer $I = \displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $D = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 | x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$.

On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On a :

$$(x,y)\in D \Leftrightarrow (r,\theta)\in\Delta = [0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = r.$$

Donc

$$I = \iint_\Delta r^3\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}.$$

Exemple 2. Calculer $I = \iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| \frac{1}{2}\leqslant x,\ x^2+y^2\leqslant 1\right\}$. On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on aura :

$$(x,y)\in D \Leftrightarrow (r,\theta\in\Delta = \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{2\cos\theta}\leqslant r\leqslant 1\right\}.$$

D'où

$$I = \iint_\Delta \cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^1 \cos\theta\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\theta = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$$

2. Intégrales triples

2.1. Théorème de Fubini

Théorème 15.
Soit $f : D\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur le domaine borné D de $\mathbb{R}^3$. L'intégrale triple de f sur D notée $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ est définie comme suit.

1. *Si l'on peux représenter D sous la forme*
$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D_0,\ k_1(x,y)\leqslant z\leqslant k_2(x,y)\},$$
où D_0 est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et k_1, k_2 sont continues sur D_0, alors
$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{D_0}\left(\int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
2. *Si l'on peux représenter D sous la forme*
$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D(z),\ a\leqslant z\leqslant b\},$$
où, pour tout $z\in[a,b]$, $D(z)$ est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, alors
$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b\left(\iint_{D(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z.$$

Remarques.

1. Le premier cas est appelé sommation par piles, on notera que D_0 est la projection orthogonale de D sur le plan $z=0$.
2. Le second cas est appelé sommation par tranches, on notera que $D(z)$ est la section plane de D par le plan de cote z.
3. Le volume de D, noté $\mathrm{Vol}(D)$, se calcule en choisissant $f = 1$:
$$\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Corollaire 4.
Si $D = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$ *alors*
$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{a_1}^{a_2} \left[\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$
et on peut permuter l'ordre des intégrations. Si, en plus, $f(x,y,z) = u(x)v(y)w(z)$*, alors*
$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left[\int_{a_1}^{a_2} u(x)\,\mathrm{d}x \right] \left[\int_{b_1}^{b_2} v(y)\,\mathrm{d}y \right] \left[\int_{c_1}^{c_2} w(z)\,\mathrm{d}z \right].$$

Exemple 1. Calculer le volume du tétraèdre $D = \left\{ (x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 \mid x + y + z \leqslant 1 \right\}$. On écrit
$$D = \left\{ (x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 \mid (x,y) \in D_0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y \right\}$$
avec $D_0 = \left\{ (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid x + y \leqslant 1 \right\}$. D'où
$$\begin{aligned} I &= \iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{D_0} \left(\int_0^{1-x-y} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Exemple 2. $I = \iiint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, où $D = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 \mid y^2 + z \leqslant 1, x^2 + z \leqslant 1\}$. C'est le second cas, on écrit
$$D = \left\{ (x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant 1,\ (x,y) \in D(z) \right\}$$
avec $D(z) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{1-z},\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-z} \right\}$. D'où
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\iint_{D(z)} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \int_0^1 \left[z \int_0^{\sqrt{1-z}} \mathrm{d}x \times \int_0^{\sqrt{1-z}} \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 [z(1-z)]\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Exemple 3. Calculer $I = \iiint_D xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, où $D = [0,1]^3$. On applique le corollaire :
$$I = \left[\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \right] \left[\int_0^1 y\,\mathrm{d}y \right] \left[\int_0^1 z\,\mathrm{d}z \right] = \frac{1}{8}.$$

Exemple 4. Calculer $I = \iiint_D x^2 y \mathrm{e}^{xyz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, où $D = [0,1]^3$. On applique à nouveau le corollaire :
$$I = \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 y \mathrm{e}^{xyz}\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \mathrm{e} - \frac{5}{2}.$$

2.2. Changement de variables

Théorème 16.
Soient D *et* Δ *deux domaines bornés de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\Phi : \Delta \to D$ *un* C^1*-difféomorphisme :*
$$\Phi : (u,v,w) \mapsto (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)).$$

> *Alors, pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue sur D, on a :*
> $$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Delta f(\Phi(u,v,w))\,|\mathrm{Jac}_\Phi(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.$$

Noter que $D = \Phi(\Delta)$ et $\Delta = \Phi^{-1}(D)$. Voici les cas les plus fréquents en pratique.

Coordonnées cylindriques. Un point $M(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ peut être repéré par un système de coordonnées cylindriques $(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \times \mathbb{R}$ reliées au coordonnées cartésiennes par
$$x = r\cos\theta\ , \qquad y = r\sin\theta\ , \qquad z = z.$$
Le jacobien du changement de variables est $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = r$.

Exemple. Calculer $I = \displaystyle\iiint_D z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ avec
$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant R^2,\ 0 \leqslant z \leqslant h\right\}.$$
Par passage en cylindriques :
$$\Delta = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant h\right\}.$$
Donc
$$I = \iiint_\Delta z^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \int_0^R r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^h z^2\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\pi R^2 h^3.$$

Coordonnées sphériques. Un point $M(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ peut être repéré par un système de coordonnées sphériques $(r,\theta,\varphi) \in \Delta = \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$ reliées au coordonnées cartésiennes par
$$x = r\sin\varphi\cos\theta\ , \qquad y = r\sin\varphi\sin\theta\ , \qquad z = r\cos\varphi.$$
Le jacobien du changement de variables est $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\varphi$.

Exemple. Calculer $I = \displaystyle\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ avec
$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\right\}.$$
Par passage en sphériques :
$$\Delta = \left\{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\right\}.$$
Donc
$$I = \iiint_\Delta r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi}{5}.$$

Intégrales curviligne et de surface

1. Intégrales curvilignes

1.1. Courbes paramétrées

Définition 24.
Une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$, de $\mathbb{R}^n$ est une application $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^k$. L'image $\Gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [a, b]\}$ qui est la courbe géométrique associée à γ est souvent confondu avec γ. On note alors $\Gamma = ([a, b], \gamma)$ et on dit que $([a, b], \gamma)$ est une paramétrisation de Γ.

1. Une telle courbe est dite simple si l'application γ est injective.
2. Et elle est dite fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Exemples.

1. **Segments :** Soient $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$. Le segment $[AB]$ parcouru de A à B a pour paramétrisation
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y(t) & = & a_2 + t(b_2 - a_2), \quad t \in [0, 1]. \end{array} \right.$$
2. **Cercles :** Le cercle C_r de centre $A = (a, b)$ et de rayon $r > 0$ a pour équation : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Une paramétrisation de C_r est donnée par
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & a + r\cos t \\ y(t) & = & b + r\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{array} \right.$$
3. **Ellipses :** L'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$, a pour paramétrisation
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & a\cos t \\ y(t) & = & b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{array} \right.$$

Lorsque la courbe γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, sa dérivée, aussi connue sous le nom de vecteur vitesse et notée parfois $\overrightarrow{\gamma'}$, est donnée par
$$\forall t \in I, \;\; \gamma'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)).$$

Pour plus de clarté dans la suite, on se restreint à $n = 2$ ou 3 et on note x, y et z les coordonnées.

1.2. Intégrale curviligne d'une fonction

Sur un axe, l'abscisse x d'un point M est $x = \displaystyle\int_0^x du$. Sa valeur absolue est la distance entre l'origine et le point M. On souhaite étendre cette notion à une courbe.

Définition 25 (Abscisse curviligne).
Soit $\Gamma = ([a,b],\gamma)$ une courbe de classe $\mathscr{C}^1$. Le point $A = \gamma(a)$ étant choisi comme origine, on appelle abscisse curviligne du point $M(t)$ la quantité

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\|\,\mathrm{d}u.$$

Remarquer que $\mathrm{d}s = \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$ et donc, pour tout $t_0 \in [a,b]$, $\displaystyle\int_{t_0}^t \mathrm{d}s = s(t) - s(t_0)$. La forme différentielle $\mathrm{d}s$ joue le même rôle dans les intégrales sur une courbe que $\mathrm{d}x$ dans les intégrales sur un axe. Et l'abscisse curviligne joue le même rôle pour une courbe que l'abscisse pour un axe. En particulier, la longueur de la courbe Γ est

$$L[\Gamma] = \int_\Gamma \mathrm{d}s = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Définition 26 (Proposition).
Soit $\Gamma = ([a,b],\gamma)$ une courbe de classe $\mathscr{C}^1$ et f une fonction continue sur Γ. L'intégrale curviligne de f sur Γ est par définition

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Cette valeur est indépendante du paramétrage choisi et on la note $\displaystyle\int_\Gamma f\,\mathrm{d}s$.

Exemple 1. Le graphe $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b] \text{ et } y = f(x)\}$ d'une fonction réelle f a pour paramétrisation

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t), \quad t \in [a,b] \end{cases} \to \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = f'(t). \end{cases}$$

Donc, sur Γ, $\mathrm{d}s = \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$ et la longueur de Γ est $L[\Gamma] = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 2. Soit Γ le cercle dans le plan $z = 1$ de centre $(0,0,1)$ et de rayon $r > 0$. Une paramétrisation de Γ est

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\sin t \\ z(t) = 1, \quad t \in [0,2\pi] \end{cases} \to \begin{cases} x'(t) = -r\sin t \\ y'(t) = r\cos t \\ z'(t) = 0. \end{cases}$$

Ainsi, sur Γ, $\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t = r\,\mathrm{d}t$ et la longueur du cercle est

$$L[\Gamma] = \int_\Gamma \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}t = 2\pi r.$$

Soit $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Sa restriction à Γ est

$$f(r\cos t, r\sin t, 1) = r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t + 1 = r^2+1$$

et son intégrale curviligne sur Γ est $\displaystyle\int_\Gamma f\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} r(r^2+1)\,\mathrm{d}t = 2\pi r(r^2+1)$.

1.3. Circulation d'un champ de vecteurs

Définition 27 (Orientation d'une courbe).
Orienter une courbe Γ c'est choisir un sens de parcours. On note par Γ^+ la courbe Γ lorsqu'on fixe un sens de parcours, et on note par Γ^- la même courbe mais avec le sens de parcours opposé à celui de Γ^+. On dit qu'une paramétrisation $([a,b],\gamma)$ de Γ est compatible avec Γ^+ si le point $\gamma(t)$ se déplace dans le sens de parcours de Γ^+ lorsque le paramètre croît de a à b.

Soit $\Gamma = (I,\gamma)$ une courbe de classe $\mathscr{C}^1$ régulière, c'est à dire $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. On définit le champ de vecteurs tangents unitaires, noté $\overrightarrow{\tau}$, par

$$\forall t \in I,\ \overrightarrow{\tau}(t) = \frac{\overrightarrow{\gamma'}(t)}{\|\overrightarrow{\gamma'}(t)\|}.$$

Pour tout $t \in I$, $\overrightarrow{\tau}(t)$ est un vecteur directeur unitaire de la tangente à la courbe au point $\gamma(t)$ et il pointe dans le sens de parcours de Γ.

Définition 28 (Proposition).
Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ contenant une courbe Γ de paramétrisation $\gamma : t \in [a,b] \to \Gamma$ et $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs continu sur D. La circulation de $\overrightarrow{V}$ sur Γ est par définition

$$\int_a^b \overrightarrow{V}(\gamma(t)).\overrightarrow{\gamma'}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette valeur est indépendante de toute paramétrisation compatible avec Γ^+. On la note $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}s}$ où $\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{\tau}\,\mathrm{d}s$ est le vecteur de l'abscisse curviligne.

Exemple 1. Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}s}$ où $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant 1 \text{ et } y = x^2\}$ allant du point $(-1,1)$ au point $(1,1)$ et $\overrightarrow{V} = y^2\overrightarrow{i} + xy\overrightarrow{j}$. Une paramétrisation de Γ est donnée par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2, \quad t \in [-1,1] \end{cases} \to \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 2t. \end{cases}$$

D'où

$$\overrightarrow{V}(\gamma(t)) = t^4\overrightarrow{i} + t^3\overrightarrow{j}, \qquad \overrightarrow{V}(\gamma(t)).\overrightarrow{\gamma'}(t) = 3t^4$$

et

$$\int_\Gamma \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_{-1}^1 3t^4\,\mathrm{d}t = \left[\frac{3}{5}t^5\right]_{-1}^1 = \frac{6}{5}.$$

Exemple 2. Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}s}$ où $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leqslant y\}$ parcouru dans le sens trigonométrique et $\overrightarrow{V} = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$. Une paramétrisation de Γ est donnée par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t, \quad t \in [0,\pi] \end{cases} \to \begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t. \end{cases}$$

D'où

$$\overrightarrow{V}(\gamma(t)) = -\sin t\,\overrightarrow{i} + \cos t\,\overrightarrow{j}, \qquad \overrightarrow{V}(\gamma(t)).\overrightarrow{\gamma'}(t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

et

$$\int_\Gamma \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_0^\pi \mathrm{d}t = \pi.$$

Proposition 9 (Propriétés de l'intégrale curviligne).

1. *Si on change l'orientation, l'intégrale curviligne d'un champ de vecteurs change de signe :*
$$\int_{\Gamma^+} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}s} = -\int_{\Gamma^-} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}s}.$$
2. *La relation de Chasles : soit Γ_1 et Γ_2 deux courbes dont l'intersection contient au plus un nombre fini de points. Alors*
$$\int_{\Gamma_1^+\cup\Gamma_2^+} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_{\Gamma_1^+} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}s} + \int_{\Gamma_2^+} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}s}.$$
3. *Si un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel f sur U, alors pour toute courbe $\Gamma = ([a,b],\gamma)$ de U, on a :* $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Démonstration.

1. Soit Γ^+ la courbe orientée par $\gamma : t \in [a,b] \mapsto (x(t,y(t))$. Alors Γ^- est orientée par le paramétrage $\delta : t \in [a,b] \mapsto \gamma(a+b-t)$. On a donc
$$\int_{\Gamma^-} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{ds}} = \int_a^b \left[V_1(\gamma(a+b-t))\delta_1'(t) + V_2(\gamma(a+b-t))\delta_2'(t)\right] \mathrm{d}t$$
On pose $u = a+b-t$. Du fait que $\delta_1'(t) = -x'(a+b-t)$ et $\delta_2'(t) = -y'(a+b-t)$, on obtient :
$$\int_{\Gamma^-} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{ds}} = \int_b^a \left[-V_1(\gamma(u))x'(u) - V_2(\gamma(u))y'(u)\right](-\mathrm{d}u) = -\int_{\Gamma^+} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{ds}}.$$
2. On se ramène à la relation de Chasles classique moyennant le choix d'un paramétrage.
3. On a : $\nabla f.\overrightarrow{ds} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))x'(t)\right] \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}(f\circ\gamma)(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$. Donc
$$\int_\Gamma \nabla f.\overrightarrow{\mathrm{ds}} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}(f\circ\gamma)(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = [(f\circ\gamma)(t)]_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Corollaire 5.
Soit Γ une courbe fermée de U, de classe $\mathscr{C}^1$. Si un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel sur U, alors
$$\int_\Gamma \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{ds}} = 0.$$
Par contraposée, si $\int_\Gamma \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{ds}} \neq 0$, alors $\overrightarrow{V}$ ne dérive pas d'un potentiel sur U.

Exemple. Soit $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs défini sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par
$$\overrightarrow{V} = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$
On vérifie que $\overrightarrow{V}$ satisfait la condition du théorème de Poincaré pour dériver d'un potentiel :
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \to \mathrm{rot}\left(\overrightarrow{V}\right) = 0.$$
On calcule la circulation de $\overrightarrow{V}$ sur le cercle unité C^+ paramétré comme suit
$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \quad t\in[0,2\pi] \end{cases} \to \begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t. \end{cases}$$
On aura $\overrightarrow{V}(x(t),y(t)).\overrightarrow{\gamma'}(t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$, et donc,
$$\int_{C^+} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{ds}} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$
Donc $\overrightarrow{V}$ ne dérive pas d'un potentiel sur U car sa circulation sur une courbe fermée n'est pas nulle.

1.4. Théorème de Green-Riemann

Orientation du bord. Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ dont le bord est formé d'un nombre k de courbes simples et fermées $C_1,\ldots,C_k$. On oriente son bord suivant la convention de la matière à gauche : "lorsque l'on parcourt n'importe qu'elle courbe C_i du bord on doit avoir le domaine D sur sa gauche". On dit que le bord est orienté dans le sens direct.

Théorème 17 (Green-Riemann).
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné dont le bord Γ est une réunion de courbes fermées simples de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et orientée dans le sens direct. Soit $\overrightarrow{V} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$ sur D. Alors
$$\int_{\Gamma^+} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{ds}} = \iint_D \mathrm{rot}\left(\overrightarrow{V}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Exemples.

1. Calculons la circulation du champ $\overrightarrow{V}(x,y)=(y+3x,2y-x)$ le long de l'ellipse $\Gamma : 4x^2+y^2=4$ parcourue dans le sens trigonométrique. Posons $P(x,y)=y+3x$ et $Q(x,y)=2y-x$. Ainsi
$$\frac{\partial P}{\partial y}=1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1$$
P et Q étant de classe $\mathscr{C}^1$ à l'intérieur de l'ellipse, on peut donc utiliser la formule de Green-Riemann :
$$\int_\Gamma \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\iint_K\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2\iint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2\mathrm{Aire}(K)=-4\pi.$$

2. Calculons la circulation du champ $\overrightarrow{V}(x,y)=(3xy,x^2)$ le long de la frontière Γ du rectangle $R=[-1,3]\times[0,2]$ parcourue dans le sens trigonométrique.

   Les fonctions P et Q sont de classe $\mathscr{C}^1$ à l'intérieur du rectangle, on peut donc appliquer la formule de Green-Riemann :
$$\int_\Gamma \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\iint_R(-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^3(-x)\,\mathrm{d}x\times\int_0^2\mathrm{d}y=-8.$$

2. Intégrales de surface

2.1. Surfaces paramétrées

Définition 29.
Une surface paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ est une application
$$\begin{array}{cccc}\varphi & : & D & \to & \mathbb{R}^3\\ & & (u,v) & \mapsto & (\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v),\varphi_3(u,v))\end{array}$$
de classe $\mathscr{C}^1$ sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $S=\varphi(D)$ est la surface géométrique associée à φ. On le notera $S=(D,\varphi)$ et on dira que (D,φ) est une paramétrisation de S. On notera aussi $M(u,v)$ le point image de (u,v). Enfin, on dira que S est simple si φ est injective.

Définition 30.
On dit que le point $M(u,v)=\varphi(u,v)$ de la surface $S=(D,\varphi)$ est régulier si la jacobienne de φ au point (u,v) est de rang 2 et on dit aussi que la surface S est lisse si tout point M de S est régulier.

Soit $S=(D,\varphi)$ une surface paramétrée. On notera $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}$ les champs de vecteurs définis par
$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u},\frac{\partial\varphi_2}{\partial u},\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\right)$$
et
$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial v},\frac{\partial\varphi_2}{\partial v},\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\right).$$
Le point $M(u_0,v_0)$ est régulier si, et seulement si, les vecteurs $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0)$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)$ ne sont pas colinéaires, ou encore, si, et seulement si, leur produit vectoriel
$$\overrightarrow{N}(u_0,v_0)=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0)\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)$$
est non nul.

Proposition 10 (Définition).
Soit $M_0(u_0,v_0)$ un point régulier de la surface $S=(D,\varphi)$. Le plan tangent à la surface S au point M_0 est le plan

passant par M_0 et de vecteurs directeurs

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0).$$

C'est aussi le plan passant par M_0 et de vecteur normal $\overrightarrow{N}(u_0, v_0)$.

Remarque. Le vecteur $\overrightarrow{n}(u_0, v_0) = \dfrac{\overrightarrow{N}(u_0, v_0)}{\|\overrightarrow{N}(u_0, v_0)\|}$ est un vecteur unitaire normal au plan tangent à la surface S au point M_0. Ce vecteur nous permet d'orienter la surface S.

Exemple. La shpère $S_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ de centre O et de rayon r est paramétrée par $\Psi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ avec

$$\Psi(\varphi, \theta) = (r \sin\varphi \cos\theta\,,\ r \sin\varphi \sin\theta\,,\ r \cos\varphi)\,.$$

Les vecteurs directeurs de l'espace tangent au point $M(\varphi, \theta)$ sont

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) = (r \cos\varphi \cos\theta\,,\ r \cos\varphi \sin\theta\,,\ -r \sin\varphi) \\[2ex] \dfrac{\partial \Psi}{\partial \theta}(\varphi, \theta) = (-r \sin\varphi \sin\theta\,,\ r \sin\varphi \cos\theta\,,\ 0)\,. \end{cases}$$

Le vecteur normal $\overrightarrow{N}$ au point $M(\varphi, \theta)$ est le produit vectoriel de ces deux vecteurs :

$$\overrightarrow{N}(\varphi, \theta) = r^2 \sin\varphi\,(\sin\varphi \cos\theta\,,\ \sin\varphi \sin\theta\,,\ \cos\varphi)\,.$$

2.2. Intégrale de surface d'une fonction

Rappelons que l'aire d'un parallélogramme de côté $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$. Soit $S = (D, \varphi)$ une surface paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$. Supposons que les paramètres u et v varient de $\mathrm{d}u$ et $\mathrm{d}v$; le point $M(u, v)$ décrit le parallélogramme de côtés $\mathrm{d}u\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\mathrm{d}v\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$. L'aire de ce parallélogramme est l'élément d'aire :

$$\mathrm{d}\sigma = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Remarquer que l'élément d'aire s'écrit aussi : $\mathrm{d}\sigma = \|\overrightarrow{N}\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

Définition 31 (Proposition).
Soit $S = (D, \varphi)$ une surface de classe $\mathscr{C}^1$ et f une fonction continue sur S. L'intégrale de surface de f sur S est par définition

$$\iint_D f\,(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Cette valeur est indépendante du paramétrage choisi et on la note $\displaystyle\iint_S f\,\mathrm{d}\sigma$.

Par définition, l'aire de S est obtenue en prenant pour f la fonction constante égale à 1 :

$$\text{Aire}(S) = \iint_S \mathrm{d}\sigma = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Exemple 1. Calculer l'aire de la calotte sphérique $S_\alpha = \{M(\varphi, \theta) \in S_r \mid 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha\}$. Une parmétrisation de S_α est donnée ci-dessus. Pour $(\varphi, \theta) \in \Delta = [0, \alpha] \times [0, 2\pi]$, le vecteur normal au point $M(\theta, \varphi)$ est

$$\overrightarrow{N}(\varphi, \theta) = r^2 \sin\varphi\,(\sin\varphi \cos\theta\,,\ \sin\varphi \sin\theta\,,\ \cos\varphi)\,.$$

Sa norme est $\|\overrightarrow{N}(\varphi,\theta)\| = r^2\sin\varphi$. Donc $\mathrm{d}\sigma = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$ et l'aire de S_α est

$$\mathrm{Aire}(S_\alpha) = \iint_\Delta r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = r^2\int_0^\alpha \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi r^2(1-\cos\alpha).$$

En particulier, pour $\alpha=\pi$, S_α est la sphère S_r et son aire est $4\pi r^2$.

Exemple 2. L'aire de la surface $S = \left\{(x,y,f(x,y))\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D\right\}$, où D est un domaine de $\mathbb{R}^2$ et f est une fonction de $\mathscr{C}^1$ sur D est

$$\mathrm{Aire}(S) = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

En effet, une paramétrisation de la surface S est donnée par

$$\varphi(x,y) = (x,y,f(x,y)) \quad\to \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Or

$$\overrightarrow{N} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right).$$

Donc $\mathrm{d}\sigma = \|\overrightarrow{N}\|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

2.3. Flux d'un champ de vecteurs

Pour définir le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface de $\mathbb{R}^3$, on aura besoin du concept de surface orientable. Une surface de $\mathbb{R}^3$ est dite orientable si elle comporte deux côtés distincts. Un des deux côtés est dit extérieur et l'autre intérieur. Lorsque la notion d'extérieur et d'intérieur n'est pas clair, on précisera quel côté est quoi.

En chaque point régulier d'une telle surface, il existe deux vecteurs unitaires normaux $\overrightarrow{n}$ et $-\overrightarrow{n}$. L'un est dirigé vers l'extérieur de la surface et donc l'autre (qui est son opposé) vers l'intérieur de la surface. Le choix d'un de ces vecteurs oriente la surface.

Exemple. La sphère, le cylindre, le tore dans $\mathbb{R}^3$ sont des surfaces orientables. Le ruban de Möbius dans $\mathbb{R}^3$ est l'exemple type de surface non-orientable.

Définition 32 (Proposition).
Soit $S=(D,\varphi)$ une surface dans $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{F}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini et continu sur S. On note $\overrightarrow{n}$ le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur. Le flux de $\overrightarrow{F}$ à travers la surface S est par définition

$$\iint_D \overrightarrow{F}(\varphi(u,v)).\overrightarrow{n}(\varphi(u,v))\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Cette valeur est indépendante du paramétrage choisi à condition de respecter l'orientation et on la note

$$\iint_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

Remarque. Si on change d'orientation pour la surface, le flux est changé en son opposé.

Exemple. Calculer le flux du champ $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(x,y,0)$ à travers la shère S_r. Une paramétrisation de S_r est donnée par $\Psi : D=[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ avec

$$\Psi(\varphi,\theta) = (r\sin\varphi\cos\theta\,,\,r\sin\varphi\sin\theta\,,\,r\cos\varphi).$$

Le vecteur normal $\overrightarrow{N}$ au point $M(\varphi,\theta)$

$$\overrightarrow{N}(\varphi,\theta) = r^2\sin\varphi\,(\sin\varphi\cos\theta\,,\,\sin\varphi\sin\theta\,,\,\cos\varphi) = r\sin\varphi\Psi(\varphi,\theta)$$

est non nul sur $]0,\pi[\times[0,2\pi]$ et le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{r}\Psi(\varphi,\theta)$ est bien dirigé vers l'extérieur. Ainsi $\overrightarrow{F}.\overrightarrow{n} = r\sin^2\varphi$ et, comme $\mathrm{d}\sigma = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$, alors

$$\iint_{S_r}\overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D r^3\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = r^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{8\pi r^3}{3}.$$

2.4. Théorèmes Stokes, Ostrogradsky

Définition 33.
Une surface admissible pour le théorème de Stokes, est une surface orientable S de $\mathbb{R}^3$ dont le bord $\Gamma = \partial S$ est réunion finie de courbes fermés de $\mathbb{R}^3$ orientées de sorte à ce que la surface S soit à gauche.

La formule du rotationnel ci-dessous relie l'intégrale curviligne d'un champ de vecteur sur un courbe fermé avec le flux du rotationel du même champ à travers la surface limitée par cette courbe. C'est une traduction de la formule de Green-Riemann pour une courbe fermée dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 18 (Stokes).
Soit S une surface admissible pour le théorème de Stokes. Soit $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$, défini sur un ouvert U contenant S. Alors la circulation de $\vec{F}$ sur le bord Γ est égale au flux du rotationnel de $\vec{F}$ à travers la surface S :

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{F}).\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

Rappel. Si la courbe Γ est paramétrée par $t\in[a,b]\mapsto(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))$ alors

$$\overrightarrow{F}.\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \left[F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right]\mathrm{d}t$$

et

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_a^b \left[F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right]\mathrm{d}t.$$

Exemple. Vérifier le théorème de Stokes lorsque $\overrightarrow{F}$ est le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini sur $\mathbb{R}^3$ par

$$F(x,y,z) = (z-y, x+z, -(x+y))$$

et S est la paraboloïde $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z = 4-x^2-y^2\ ,\ 0\leqslant z\leqslant 4\}$.

Le théorème de Stokes s'applique car S est une surface admissible pour ce théorème et $\overrightarrow{F}$ est un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}^3$.

Le bord ∂S de S est le cercle C de rayon 2 dans le plan $z=0$. Ainsi, une paramétrisation régulière de C, telle que la surface S soit à gauche, est

$$\gamma\ :\ t\in[0,2\pi]\mapsto(2\cos t, 2\sin t, 0)\ \to\ \gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0).$$

La circulation de $\overrightarrow{F}$ sur C est

$$\int_C \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \int_0^{2\pi}\overrightarrow{F}(\gamma(t)).\overrightarrow{\gamma'(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 4\,\mathrm{d}t = 8\pi.$$

Calculons maintenant le membre de gauche de la formule de Stokes. Une paramétrisation régulière de S, telle que le vecteur normal pointe vers l'extérieur, est donnée par

$$\begin{array}{rccl}\Psi & : & [0,2]\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3\\ & & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta\ ,\ 4-r^2).\end{array}$$

Le vecteur normal de cette paramétrisation est

$$\overrightarrow{N}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -2r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r^2\cos\theta \\ 2r^2\sin\theta \\ r \end{pmatrix}.$$

Il est bien dirigé vers l'extérieur. Un calcul immédiat donne $\operatorname{rot}(\overrightarrow{F}) = (-2,2,2)$. Ainsi

$$\iint_S \operatorname{rot}(\overrightarrow{F}).\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_\Delta \operatorname{rot}(\overrightarrow{F})(\Psi(r,\theta)).\overrightarrow{N}(\Psi(r,\theta))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

où $\Delta = [0,2]\times[0,2\pi]$. D'après Fubini, on obtient :

$$\iint_S \operatorname{rot}(\overrightarrow{F}).\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} 2r\,(2r(-\cos\theta+\sin\theta)+1)\,\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}r = 4\pi\int_0^2 r\,\mathrm{d}r = 8\pi.$$

La formule de la divergence relie le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée à l'intégrale triple de la divergence de ce champ sur le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par cette surface.

Théorème 19 (Ostrogradsky).
Soit $\overrightarrow{F} : U \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$, défini sur un ouvert U contenant la surface S et le volume V qu'elle limite. On suppose que S est orientée de sorte que le vecteur normal unitaire soit dirigé vers l'extérieur. Alors

$$\iint_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_V \operatorname{div}(\overrightarrow{F})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Remarque.

1. Ce théorème s'appelle aussi théorème de la divergence de Gauss, ou théorème de la divergence de Gauss-Ostrogradsky.
2. Le terme de droite est une intégrale de Riemann triple. Elle est bien définie car l'intégrant est continu sur son domaine de définition, et le domaine d'intégration est admissible au sens de Riemann.
3. Ce théorème est utilisé pour calculer l'intégrale de surface d'un champ de vecteurs car l'intégrale de Riemann est plus facile à évaluer.

Exemple. Calculer le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ à travers le bord du cube centré à l'origine et de côté de longueur 2.

Le théorème de la divergence s'applique car le cube V est un domaine admissible pour ce théorème et le champ $\overrightarrow{F}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}^3$. Or $\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) = 3$. Donc, d'après Fubini,

$$\iint_{\partial V} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_V 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3\left[\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\right]\times\left[\int_{-1}^1 \mathrm{d}y\right]\times\left[\int_{-1}^1 \mathrm{d}z\right] = 24.$$

Corollaire 6.
Soit S_1 et S_2 deux surfaces fermées telles que S_2 est dans l'intérieur de S_1. Soit $\overrightarrow{F}$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) \equiv 0$ sur un ouvert contenant le volume entre les deux surfaces. Alors

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\sigma = -\iint_{S_2} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$