TODO

1. TODO

TODO : / EDP / Physique / rot / div / appl. physique / Schwartz / Poincaré / … / multiplicateur de Lagrange …

1.1. Intro : topologie de $\mathbb{R}^2$

1.2. Équations aux dérivées partielles

1.3.

1.4. Champs de vecteurs

Les équations aux dérivées partielles sont omniprésentes en physique. Elles relient entre elles les dérivées partielles d'ordre 1 et 2, et font intervenir des combinaisons de dérivées partielles comme le gradient, la divergence ou le rotationnel.

On rappelle que le gradient d'une fonction de deux variables f est le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

On dispose donc d'un opérateur, noté formellement, $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ sur les fonctions. De même, le gradient d'une fonction de trois variables f est le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

On dispose à nouveau d'un opérateur, noté formellement, $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

Définition 1.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $F : (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y))$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^2$. Une telle application est aussi appelée un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini sur U. On définit formellement le rotationnel du champ de vecteurs F comme étant le champ de vecteurs de $\mathbb{R}$ défini sur U par

$$\operatorname{rot}(F)(x, y) = \det(\nabla, F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \frac{\partial}{\partial y} & Q \end{vmatrix}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y).$$

Un champ de vecteurs sera noté indifféremment F ou $\overrightarrow{F}$. On vérifiera à partir de cette définiton et le théorème de Schwarz que, $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$.

Définition 2.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $F : (x,y,z) \mapsto (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^3$, appelée aussi champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini sur U.

1. Le rotationnel de F est le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donné par
$$\operatorname{rot}(F) = \nabla \wedge F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$
2. La divergence de F est la fonction $\operatorname{div}(F) = \langle \nabla, F \rangle = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$.

On vérifiera à partir de ces définitons et le théorème de Schwarz que, $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$ et que, pour un champ de vecteurs F de $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$.

Définition 3.
Soit F un champ de vecteurs défini sur U. On dit que F dérivé d'un potentiel sur U s'il existe une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ telle que $F = \nabla f$ sur U. Dans ce cas, on dira que f est un potentiel de F.

Théorème 1 (Poincaré).
Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) et F un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Alors F dérive d'un potentiel sur U si, et seulement si, $\operatorname{rot} F = 0$.

Méthode. Lorsqu'un champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel f, on écrit $\nabla f = \overrightarrow{F}$. En identifiant les coordonnées, on obtient un système d'équations dont la seule inconnue est f. Il faut donc intégrer ce système pour déterminer f.

Exemple. *Montrer que le champ de vecteurs $\overrightarrow{F}(x,y) = y^2\vec{i} + (2xy-1)\vec{j}$ dérive d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer les potentiels dont il dérive.*

Solution. Ici $P(x,y) = y^2$, $Q(x,y) = 2xy - 1$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Donc $\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = 0$ et, comme $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe, $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel f sur $\mathbb{R}^2$. On aura :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = y^2 \to f(x,y) = xy^2 + K(y)$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = 2xy - 1 \to K'(y) = -1 \to K(y) = -y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$
Les potentiels de $\overrightarrow{F}$ sur $\mathbb{R}^2$ sont les fonctions f définies par $f(x,y) = xy^2 - y + C$.

1.5. Exemples d'équations aux dérivées partielles

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. On note (x_0, y_0) un point de U et U_1 (resp. U_2) la projection de U sur l'axe $y = 0$ (resp. $x = 0$).

Proposition 1.
Soit h une fonction de classe $\mathscr{C}^0$ sur U. On note H la primitive de $h_1 : x \mapsto h(x,y)$ sur U_1 qui s'annule en x_0. Une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur U est une solution de

$$(E_1)\ :\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(x,y)$$

si, et seulement si, il existe une fonction k de classe $\mathscr{C}^1$ sur U_2 telle que

$$\forall (x,y) \in U,\ \ f(x,y) = H(x,y) + k(y).$$

Démonstration. Si f est une solution de (E_1) la fonction $\varphi : x \mapsto f(x,y) - H(x,y)$ est dérivable et de dérivée nulle. Elle est donc constante :

$$\forall x \in U_1,\ \varphi(x) = \varphi(x_0) \to f(x,y) = H(x,y) + f(x_0,y)$$

et $k : y \mapsto f(x_0,y)$ est bien une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U_2. Réciproquement, on vérifie qu'une fonction de cette forme est solution de (E_1).

Proposition 2.
Soit h une fonction de classe $\mathscr{C}^0$ sur U_1 et H une primitive de h sur U_1. Une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur U est une solution de

$$(E_2)\ :\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = h(x)$$

si, et seulement si, il existe une fonction K de classe $\mathscr{C}^2$ sur U_2 telle que

$$\forall (x,y) \in U,\ \ f(x,y) = yH(x) + K(y).$$

Démonstration. Si f est une solution de (E_2) la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est solution d'une équation du type (E_1). Donc

$$\forall (x,y) \in U,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = H(x) + k(y)$$

où k est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U_2. Ainsi f est une solution d'une équation du type (E_1). Donc de la forme ci-dessus. Réciproquement, on vérifie qu'une fonction de cette forme est solution de (E_2).

Proposition 3.
Une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur U est une solution de

$$(E_3)\ :\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$$

si, et seulement si, il existe deux fonctions K et H de classe $\mathscr{C}^2$ sur U_2 telles que

$$\forall (x,y) \in U,\ \ f(x,y) = xH(y) + K(y).$$

Démonstration. Si f est une solution de (E_3) la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est solution d'une équation du type (E_1). Donc

$$\forall (x,y) \in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = k(y)$$

où k est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U_2. Ainsi f est une solution d'une équation du type (E_1). Donc de la forme ci-dessus. Réciproquement, on vérifie qu'une fonction de cette forme est solution de (E_3).

Résolution à l'aide d'un difféomorphisme. Pour intégrer une EDP, (E) donnée, on utilise un changement de variables pour se ramener à une EDP plus simple. Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & U & \to & V \\ & & (x,y) & \mapsto & (u,v). \end{array}$$

un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. Pour une fonction f solution de (E), on pose $g = f \circ \Phi^{-1}$. C'est à dire $f = g \circ \Phi$.

1. On utilise la formule de dérivation des fonctions composées pour exprimer les dérivées partielles de f en fonction de g, u et u.
2. On remplace dans l'équation (E) ce qui donne l'EDP (E') satisfaite par g.
3. On intègre (E') et on en déduit les solutions f de (E).

Exemple. Intégrons dans $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ x > 0\}$ l'EDP suivante :

$$(E) \ : \ x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

On pose $V =]0,+\infty[\times \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, et on considère l'application $\Phi : V \to U$ définie par

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

1. L'application Φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de V sur U, et
$$\forall (x,y) \in U, \ \ \Phi^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right).$$
2. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ solution de (E) sur U. On considère la fonction g définie sur V par
$$g(r,\theta) = f(x,y) \text{ avec } (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$
   (a) On exprime les dérivées partielles premières de f en fonction de g, r et θ (cf. les relations $(\star\star)$ ci-dessus).
   (b) On reporte dans l'équation (E) ce qui donne :
   $$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r \iff \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 1.$$
   (c) On voit que g est une solution d'une équation du type (E_1), donc $g(r,\theta) = r + k(\theta)$ où k est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que toute solution f de (E) est de la forme :
   $$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + k\left(\arctan\frac{y}{x}\right).$$

Mini-exercices.

1.

Auteurs du chapitre