

**Fonctions de plusieurs variables – 2ème année –  
Laurent Pujo-Menjouet**

# Sommaire

<b>1</b>	<b>Fonctions de plusieurs variables – 2ème année – Laurent Pujo-Menjouet</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Notion de topologie dans <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>3</b>
1	Espaces métriques, distance	3
2	Normes des espaces vectoriels	5
3	Boules ouvertes, fermées et parties bornée	6
4	Ouverts et fermés	7
5	Position d'un point par rapport à une partie de $E$	7
6	Suites numériques dans un espace vectoriel normé	9
7	Ensemble compact	11
8	Ensemble convexe	12
9	<b>HORS PROGRAMME : Applications d'une e.v.n. vers un e.v.n.</b>	12
9.1	Généralités	12
9.2	Opérations sur les fonctions continues	13
9.3	Extension de la définition de la continuité	13
9.4	Cas des espaces de dimension finie	13
9.5	Notion de continuité uniforme	13
9.6	Applications linéaires continues	14
<b>3</b>	<b>Fonctions de plusieurs variables. Limite. Continuité.</b>	<b>15</b>
1	Fonctions réelles de variable réelle	16
2	Notion de limite	17
3	Fonctions continues	18
4	Coordonnées polaires	19
5	Continuité sur un compact	19
6	Théorème des valeurs intermédiaires	20
<b>4</b>	<b>Calcul différentiel</b>	<b>22</b>
1	Dérivées partielles	22
2	Opérateurs différentiels classiques	23
2.1	Gradient	23
2.2	Divergence	23
2.3	Rotationnel	24
3	Propriétés des dérivées partielles	24
4	Notion de différentiabilité	25
5	Opérations sur les fonctions différentiables	28
6	Propriétés géométriques des fonctions de plusieurs variables	28
6.1	Gradient et ligne de niveau	28
6.2	Le gradient indique la ligne de plus grande pente	29
6.3	Plan tangent à un graphe d'une fonction de 2 variables	29
<b>5</b>	<b>Théorème des accroissements finis</b>	<b>31</b>

1	Fonction d'une variable réelle à valeurs réelles . . . . .	31
2	Fonction d'une valeur sur un espace $\mathbb{R}^p$ et à valeurs réelles . . . . .	31
3	Fonction d'une variable réelle . . . . .	32
4	Théorème général . . . . .	33
5	Application . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Difféomorphismes</b> . . . . .	<b>34</b>
1	Introduction . . . . .	34
2	Théorème d'inversion locale . . . . .	34
3	Théorème des fonctions implicites . . . . .	35
<b>7</b>	<b>Formules de Taylor</b> . . . . .	<b>37</b>
1	Applications deux fois différentiables . . . . .	37
2	Exemples de différentielles d'ordre 2 . . . . .	38
3	Matrice Hessienne . . . . .	38
4	Différentielle d'ordre $k$ . . . . .	39
5	Formule de Taylor avec reste intégral . . . . .	40
5.1	Fonction d'une variable réelle à valeur réelle . . . . .	40
5.2	Fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ . . . . .	40
5.3	Fonction de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ . . . . .	41
6	Formule de Taylor-Lagrange . . . . .	42
6.1	Fonction d'une variable réelle à valeur dans $\mathbb{R}^q$ . . . . .	42
6.2	Fonction de $\mathbb{R}^p$ à valeur dans $\mathbb{R}^q$ . . . . .	42
7	Formule de Taylor-Young . . . . .	42
<b>8</b>	<b>Extrema</b> . . . . .	<b>43</b>
1	Rappels d'algèbre . . . . .	43
2	Extrema libres . . . . .	45
2.1	Conditions nécessaires du premier ordre . . . . .	45
2.2	Conditions du second ordre . . . . .	46
2.3	Critères avec les matrices Hessiennes . . . . .	46
2.4	Cas particulier où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	47
3	Extrema liés . . . . .	47
3.1	Contraintes . . . . .	47
3.2	Extrema liés avec une seule contrainte . . . . .	47
3.3	Extrema liés avec plusieurs contraintes . . . . .	48
4	Convexité et minima . . . . .	49

FIGURE 1.1 – Représentation de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  définie par  $(x, y) \mapsto z = \frac{\sin(x^2 + 3y^2)}{0.1 + r^2} + (x^2 + 5y^2) \cdot \frac{\exp(1 - r^2)}{2}$ , avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , et projection des courbes de niveau sur les plans  $z = 0$  et  $z = 9$ .

Le but de ce cours est de **généraliser la notion de dérivée** d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles à partir de la théorie du calcul différentiel appliquée aux fonctions de plusieurs variables. L'idée fondamentale de cette théorie est d'**approcher** une application "quelconque" (de plusieurs variables réelles ici) par une application **linéaire** au **voisinage** d'un point.

Le cadre général pour la mettre en œuvre est celui **des espaces vectoriels** (ce qui donne un sens au mot "**linéaire**" comme nous le verrons dans les chapitres qui suivent), munis d'une **norme** sur l'espace de départ (pour avoir une notion de **voisinage**) et une **norme** sur l'espace d'arrivée (pour savoir "**approcher**").

Nous verrons que de cette théorie découle plusieurs propriétés et théorèmes classiques importants ainsi que plusieurs applications notamment pour l'optimisation (voir le dernier chapitre du cours).

Toutefois, avant de s'attaquer au calcul différentiel proprement dit, il paraît nécessaire de bien définir les notions de bases en topologie associées à cette théorie, à savoir :

- les distances, boules ouvertes, fermées,

- les ensembles ouverts, fermés, les normes, etc.

Nous ne le ferons pas dans le contexte des espaces vectoriels de dimension infinie (hors programme), mais dans le cas particulier des espaces  $\mathbb{R}^n$  (et le plus souvent les espaces où  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ ) qui sont des espaces vectoriels particuliers de dimension  $n$  (dimension finie).

Rappelons qu'en dimension 2 ( $n = 2$ ), on identifie un vecteur  $x$  de coordonnées  $(x_1, x_2)$  avec un point du plan de coordonnées  $(x_1, x_2)$  une fois fixée une origine.

Ici, on généralisera cette identification en désignant le point ou le vecteur de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  par  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Rappelons enfin que l'**ON NE PEUT PAS DIVISER PAR UN VECTEUR !**

Or, dans  $\mathbb{R}$ , la définition de la dérivée fait intervenir le rapport  $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ . Elle implique donc de pouvoir diviser par  $(x - x_0)$ . Mais dans  $\mathbb{R}^n$  ça n'a pas de sens car la division par un vecteur n'est pas définie. Que faire alors si on ne peut pas définir la dérivée d'une fonction  $D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ? C'est tout le but de ce cours : introduire une notion généralisée de la dérivée : la **DIFFERENTIABILITE**.

# Notion de topologie dans $\mathbb{R}^n$

[Leonhard Euler (1707-1783) : en résolvant en 1736 le problème des sept ponts enjambant la rivière Pregolia à Königsberg en Prusse, il a ouvert la voie de la topologie. En effet, par la généralisation de ce problème, Cauchy et L'Huilier entre autres commencèrent à développer la théorie liée à cette discipline.] [Maurice René Fréchet (1878-1973) : c'est à lui que l'on doit en 1906 les d'espaces métriques et les premières notions de topologie en cherchant à formaliser en termes abstraits les travaux de Volterra, Arzelà, Hadamard et Cantor.] [Johann Benedict Listing (1808-1882) : il est le premier à avoir employé le mot "topologie"]

FIGURE 2.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à la topologie.

## 1. Espaces métriques, distance

Nous allons dans ce cours, nous intéresser aux fonctions  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  ( $p, q \in \mathbb{N}^*$ ). Pour cela il faudra étudier tout d'abord la structure du domaine  $U$  car le domaine est aussi important que la fonction comme nous le verrons. Nous allons donc définir de nouvelles notions : distances, normes, ouverts, fermés, etc. dans les domaines inclus dans  $\mathbb{R}^n$  qui nous seront utiles tout au long de ce semestre pour tous les nouveaux outils abordés. Toutefois, même si nous travaillerons principalement dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  ou de façon générale  $\mathbb{R}^n$ , nous pourrons de temps à autre donner des résultats plus généraux qui resteront valables dans des espaces autres que ceux-ci (ce sera le cas de ce premier chapitre). Mais ce ne seront pas n'importe quels espaces. Les définitions et propositions ci-dessous font en effet intervenir des combinaisons entre eux des éléments d'un même espace, des multiplications par des scalaires, etc. Par conséquent il est nécessaire que cet espace reste stable par combinaison linéaires de ses éléments, et les plus appropriés ici seront les espaces vectoriels que nous rappelons ci-dessous.

### Définition 1 (ESPACES VECTORIELS).

Soit  $E$  un ensemble. On dispose sur cet ensemble d'une opération (notée additivement) et on dispose par ailleurs d'une application  $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$  qui à tout couple  $(\lambda, x)$  associe  $\lambda x$ . On dit que  $E$  est un espace vectoriel lorsque

1.  $E$  est un groupe commutatif (pour l'addition)
2. pour tout vecteur  $x$  de  $E$ ,  $1.x = x$  (1 désignant le neutre de la multiplication de  $\mathbb{K}$ ).
3. pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et pour tout vecteur  $x$  de  $E$ ,  $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
4. pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et pour tout vecteur  $x$  de  $E$ ,  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
5. pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  et tous vecteurs  $x, y \in E$ ,  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ .

### Exemple 1.

L'espace

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-fois}} \\ &= \{x = (x_1, \dots, x_n), \text{ tel que } x_i \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}\}.\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^n$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ . C'est celui que nous utiliserons le plus souvent ici.

Une fois donné l'espace vectoriel, il faut pouvoir évaluer ses éléments les uns par rapport aux autres. D'où la notion de distance.

**Définition 2 (DISTANCE).**

Soit  $E$  un ensemble non vide (on utilisera le plus souvent  $\mathbb{R}^n$  ici). On dit qu'une application

$$\begin{aligned} d : E \times E &\rightarrow \mathbb{R}^+, \\ (x, y) &\mapsto d(x, y), \end{aligned}$$

est une distance sur  $E$  si elle vérifie

1. (SEPARATION) pour tout  $(x, y) \in E \times E$ ,  $\{x = y\} \iff \{d(x, y) = 0\}$ ,
2. (SYMETRIE) pour tout  $(x, y) \in E \times E$ ,  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
3. (INEGALITE TRIANGULAIRE) pour tout  $(x, y, z) \in E \times E \times E$ ,  

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

**Définition 3 (ESPACE METRIQUE).**

On appelle espace métrique tout couple  $(E, d)$  où  $E \neq \emptyset$  est un espace vectoriel et  $d$  est une distance.

**Exemple 2.**

1.  $E = \mathbb{R}$ , muni de la distance  $d$  définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  par  $d(x, y) = |x - y|$  est un espace métrique.
2.  $E = \mathbb{R}^n$ , muni de la DISTANCE DE MANHATTAN  $d_1$  définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  par

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

3.  $E = \mathbb{R}^n$ , muni de la DISTANCE EUCLIDIENNE  $d_2$  définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  par

$$d_2(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

4.  $E = \mathbb{R}^n$ , muni de la DISTANCE DE MINKOWSKI  $d_p$  définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  par

$$d_p(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

5.  $E = \mathbb{R}^n$ , muni de la DISTANCE INFINIE ou distance TCHEBYCHEV  $d_\infty$  définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  par

$$d_\infty(x, y) = \sup_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|.$$

Il est à noter que la distance de Manhattan est la distance de Minkowski pour  $p = 1$ , la distance Euclidienne est la distance de Minkowski pour  $p = 2$  et la distance de Tcheychev est la distance de Minkowski quand  $p \mapsto \infty$ . Voir figure 2.2 pour une illustration des différentes distances abordées dans cet exemple.

FIGURE 2.2 – Représentation de trois distances. 1. Plan de Manhattan qui, par ses rues quadrillées a donné son nom à la distance de Manhattan. 2. Cette distance est représentée en bleu, jaune et rouge dans la figure 2. On peut noter que la distance euclidienne dans cette figure est représentée en vert et correspond à la somme des diagonales des petits carrés (d'après le théorème de Pythagore). 3. Enfin dans la figure 3, est représentée la distance infinie qui correspond au nombre minimum de mouvements nécessaire au roi pour se déplacer de sa case (ici f6) à une autre case.

Pour rendre le cours plus simple, nous utiliserons plutôt la notion de norme dans tout le reste de notre cours, et les espaces vectoriels normés plutôt que les espaces métriques. Il se trouve que toute norme induit une distance (mais attention toute distance induit n'induit pas nécessairement une norme). Donc ce qui va suivre peut s'adapter parfaitement dans le cadre des espaces métriques, tout en étant plus facilement compréhensible.

## 2. Normes des espaces vectoriels

### Définition 4 (NORME).

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  (on utilisera en général  $E = \mathbb{R}^n$ ). On appelle norme sur  $E$  une application

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \mathbb{R}^+, \\ x &\mapsto \|x\|, \end{aligned}$$

et vérifie

1. (SEPARATION) pour tout  $x \in E$ ,  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,
2. (HOMOGENEITE POSITIVE) pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pour tout  $x \in E$   $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ,
3. (INEGALITE TRIANGULAIRE) pour tous  $x, y \in E$ ,  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

### Définition 5 (ESPACE VECTORIEL NORME).

Un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  muni de la norme est appelé espace vectoriel normé, que l'on notera souvent *e.v.n.*.

On a la relation entre norme et distance dans le résultat suivant.

### Proposition 1 (DISTANCE INDUITE PAR UNE NORME).

Soit  $E$  un *e.v.n.* L'application

$$\begin{aligned} d : E \times E &\rightarrow \mathbb{R}^+, \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) := \|x - y\|, \end{aligned}$$

est une distance sur  $E$ . On l'appelle DISTANCE INDUITE sur  $E$  par la NORME.

**Preuve :** Faite en cours.

### Proposition 2 (PROPRIETES DES DISTANCES INDUITES PAR DES NORMES).

Cette distance possède les propriétés suivantes :

1. pour tout  $x \in E$ ,  $d(0, x) = \|x\|$ ,
2. pour tout  $(x, y) \in E^2$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ ,
3. pour tout  $(x, y, z) \in E^3$ ,  $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ .

**Preuve :** Pas faite en cours.

### Remarque.

ATTENTION : toute norme induit une distance, mais toutes les distances ne proviennent pas d'une norme.

### Exemple 3.

IMPORTANT : normes classiques sur  $\mathbb{R}^n$  :

Soient  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , avec  $x_i \in \mathbb{R}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , et  $p \in \mathbb{R}$  tel que  $p \geq 1$ ,

1.  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  (NORME MANHATTAN),
2.  $\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$  (NORME EUCLIDIENNE),
3.  $\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$  (NORME  $p$ ,  $p \geq 1$ ),
4.  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$  (NORME INFINIE),

sont des normes sur  $\mathbb{R}^n$ .

### Proposition 3 (PROPRIETE DES NORMES).

Toute norme  $\|\cdot\|$  dans un *e.v.n*  $(E, \|\cdot\|)$  vérifie, pour tous  $x, y \in E$

$$|||x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

**Preuve :** Faite en cours.

### Définition 6 (NORMES EQUIVALENTES).

Deux normes  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  sur  $E$  sont EQUIVALENTES s'il existe deux constantes réelles  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$  telles que

pour tout  $x \in E$

$$\lambda \|x\| \leq \|x\|' \leq \mu \|x\|.$$

On note alors :  $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$ .

**Proposition 4.**

*Cette définition induit une relation d'équivalence.*

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Proposition 5 (NORMES EQUIVALENTES ET DIMENSION FINIE).**

*Sur  $\mathbb{R}^n$  (et tout autre espace vectoriel normé de dimension finie) TOUTES les normes sont équivalentes.*

**Preuve :** Pas faite en cours (abordé en TD).

**Remarque.**

Dans la suite du cours on notera donc (sauf précision)  $\|\cdot\|$  pour désigner une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^n$ .

Nous nous plaçons désormais dans des espaces vectoriels normés  $(E, \|\cdot\|)$ . En général nous prendrons  $E = \mathbb{R}^n$ . Il nous faudra ensuite nous approcher d'un élément de cet espace et regarder ce qu'il se passe autour de lui (comme par exemple, le définir comme la limite d'une suite d'éléments de l'espace métrique). Il nous faudra donc définir la notion de voisinage. Et les outils que nous utiliserons ici sont les boules.

### 3. Boules ouvertes, fermées et parties bornée

**Définition 7 (BOULE OUVERTE, FERMÉE, SPHERE).**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. Soient  $a$  un point de  $E$  et  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ .

1.  $\bar{B}_{\|\cdot\|}(a, r) = \{x \in E; \|x - a\| \leq r\}$  est appelé boule FERMÉE de centre  $a$  et de rayon  $r$ .
2.  $B_{\|\cdot\|}(a, r) = \{x \in E; \|x - a\| < r\}$  est appelé boule OUVERTE de centre  $a$  et de rayon  $r$ .
3.  $S_{\|\cdot\|}(a, r) = \{x \in E; \|x - a\| = r\}$  est appelé SPHERE de centre  $a$  et de rayon  $r$ .

Dans le cas où  $a = 0$  (vecteur nul) et  $r = 1$  on a ce qu'on appelle les boules ou sphères unités.

**Définition 8 (BOULE UNITE OUVERTE, FERMÉE, SPHERE).**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n.

1.  $\bar{B}_{\|\cdot\|}(0, 1) = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$  est appelé boule UNITE FERMÉE.
2.  $B_{\|\cdot\|}(0, 1) = \{x \in E; \|x\| < 1\}$  est appelé boule UNITE OUVERTE.
3.  $S_{\|\cdot\|}(0, 1) = \{x \in E; \|x\| = 1\}$  est appelé SPHERE UNITE.

FIGURE 2.3 – Exemples sur  $\mathbb{R}^2$  avec la norme euclidienne d'une boule fermée (1.), ouverte (2.), et d'une sphère (3.) centrée en  $a$  et de rayon  $r$ .

FIGURE 2.4 – Exemples sur  $\mathbb{R}^2$  avec la norme de Minkowski  $p$  de la sphère unité (centrée en 0 et de rayon 1, avec  $p = 1, 2, 4$  et  $\infty$ ). Le cas  $p = 0.5$  est à part puisqu'on rappelle que  $\|\cdot\|_p$  avec  $0 < p < 1$  n'est pas une norme sur  $\mathbb{R}^n$ . On dessine juste l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_{0.5} = 1\}$

**Remarque.**

Dans la suite et pour éviter les lourdeurs d'écriture nous ne mettrons pas la norme en indice et nous écrirons juste  $\bar{B}(a, r)$ ,  $B(a, r)$ , et  $S(a, r)$  lorsque l'on désignera respectivement la boule fermée, ouverte ou la sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$  pour une norme  $\|\cdot\|$  quelconque. Si jamais la norme devait être spécifiée, nous l'ajouterons alors en indice.

**Remarque.**

**ATTENTION :** les boules ont des formes différentes selon les espaces métriques utilisés. Voir un exemple dans  $\mathbb{R}^2$  pour la distance euclidienne dans la figure 2.3, ou la figure 2.4 pour des distances  $p$ , où  $p = 0.5, 1, 2, 4$  et  $\infty$ .



**Définition 9 (PARTIE BORNEE).**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. Une partie bornée  $P$  de  $E$  est une partie de  $E$  pour laquelle on peut trouver une boule (ouverte ou fermée) qui contient tous les points de  $P$  (voir figure 2.5 pour un exemple).

FIGURE 2.5 – Exemples sur  $\mathbb{R}^2$  de partie bornée, avec la norme euclidienne.

## 4. Ouverts et fermés

**Définition 10 (PARTIE OUVERTE).**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. Une partie ouverte (ou un ouvert) de  $E$  est une partie  $U$  de  $E$  telle que pour tout  $x \in U$ , il existe  $r > 0$  réel, tel que  $B(x, r) \subset U$ . Autrement dit, tout point de  $U$  est le centre d'une boule ouverte de rayon non-nul, incluse dans  $U$  (voir figure 2.6 pour un exemple).

FIGURE 2.6 – Exemples sur  $\mathbb{R}^2$  de partie ouverte, avec la distance euclidienne.**Définition 11 (PARTIE FERMEE).**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. Une partie fermée (ou un fermé) de  $E$  est une partie telle que son complémentaire  $U$  de  $E$  est un ouvert.

**Proposition 6 (BOULES OUVERTES, FERMEES).**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. On a alors :

1. une boule ouverte est un ouvert,
2. une boule fermée est un fermé.

**Preuve :** Faite en cours.

**Proposition 7 (INTERSECTION, REUNIONS D'OUVERTS, DE FERMES).**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n.

1. toute union finie ou infinie d'ouverts de  $E$  est un ouvert,
2. toute intersection FINIE d'ouverts de  $E$  est un ouvert,
3. toute union FINIE de fermés de  $E$  est un fermé,
4. toute intersection finie ou infinie de fermés de  $E$  est un fermé,
5. les ensembles à la fois ouverts et fermés de  $E$  sont  $\emptyset$  et  $E$ , et si ce sont les seuls on dira que l'espace est CONNEXE,
6. un ensemble fini de points de  $E$  est fermé.

**Preuve :** Faite en cours (en partie).

## 5. Position d'un point par rapport à une partie de $E$

Avant toute chose, énonçons la définition de voisinage d'un point. Toutes les autres définitions découleront de cette notion.

**Définition 12 (VOISINAGE).**

On dit qu'une partie  $V$  de  $E$  est un voisinage de  $x \in E$  si  $V$  contient un ouvert contenant  $x$ .

**Remarque.**

Cette définition revient à dire qu'une partie  $V$  de  $E$  est un voisinage de  $x \in E$  si  $V$  contient une boule ouverte contenant  $x$  (la boule peut être ou non centrée en  $x$ ).

FIGURE 2.7 – Exemples sur  $\mathbb{R}^2$  de voisinage  $V$  de  $x$ , avec la norme euclidienne.

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. Soit  $A \subset E$  une partie quelconque de  $E$ . Alors  $A$  contient au-moins un ouvert (en effet  $\emptyset \subset A$ ). Soit  $\mathcal{O}_A$  l'ensemble de toutes les parties ouvertes de  $E$  contenues dans  $A$ . Alors  $\bigcup_{P \in \mathcal{O}_A} P$  est un ouvert (comme réunion de parties quelconques d'ouverts).

**Définition 13** (INTERIEUR).

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. et  $A \subset E$ . Un point  $x$  de  $E$  est dit intérieur à  $A$  si  $A$  est un voisinage de  $x$ , autrement dit, si  $A$  contient une boule ouverte contenant  $x$ .

L'intérieur de  $A$ , noté  $\overset{\circ}{A}$  ou  $\text{Int}(A)$  est l'ensemble des points intérieurs à  $A$ .

**Proposition 8** (PROPRIETE DE L'INTERIEUR).

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. et  $A \subset E$ . L'intérieur de  $A$  est la plus grande partie ouverte incluse dans  $A$ .

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Remarque.**

On a  $x \in \overset{\circ}{A} = \bigcup_{P \in \mathcal{O}_A} P$ .

**Remarque.**

On a :

1.  $\overset{\circ}{A}$  est un ouvert,
2.  $\overset{\circ}{A} \subset A$ ,
3.  $A$  est un ouvert  $\iff \overset{\circ}{A} = A$ .

**Preuve :** (3.) fait en cours.

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. Soit  $A$  une partie quelconque de  $E$ . Alors  $E$  contient au-moins une partie fermée contenant  $A$  (en effet  $E$  est fermé).

Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des parties fermées contenant  $A$ . Alors  $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$  est la plus petite partie fermée contenant  $A$ . Et  $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$  est bien une partie fermée (comme intersection de familles fermées).

**Définition 14** (ADHERENCE).

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. et  $A \subset E$ . Un point  $x$  de  $E$  est dit adhérent à  $A$  si tout voisinage de  $x$  rencontre  $A$ , autrement dit, si toute boule ouverte contenant  $x$  contient au-moins un élément de  $A$ .

L'adhérence de  $A \subset E$ , notée  $\bar{A}$  ou  $\text{adh}(A)$ , est l'ensemble des points adhérents à  $A$ .

**Proposition 9** (PROPRIETE DE L'ADHERENCE).

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. et  $A \subset E$ . L'adhérence de  $A$  est la plus petite fermée contenant

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Remarque.**

On a  $x \in \bar{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ .

**Remarque.**

On a :

1.  $\bar{A}$  est un fermé,
2.  $A \subset \bar{A}$ ,
3.  $A$  est un fermé  $\iff A = \bar{A}$ .

**Preuve :** (3.) fait en cours.

**Proposition 10** (ADHERENCE DU COMPLEMENTAIRE).

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. et  $A \subset E$ . Alors

$$\overline{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{\bar{A}}.$$

**Preuve :** Faite en cours.

**Définition 15 (FRONTIERE).**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. On appelle frontière de  $A \subset E$ , notée  $Fr(A)$  l'ensemble défini par  $Fr(A) = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$ .  
On dit que  $x$  est un point frontière de  $A$  si et seulement si  $x \in Fr(A)$ .

**Proposition 11 (INTERSECTION OUVERT ET FERME).**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. Soient  $A \subset E$  et  $P$  un ouvert de  $E$ . Alors

$$A \cap P \neq \emptyset \iff \bar{A} \cap P \neq \emptyset$$

**Preuve :** Faite en cours.

**Proposition 12 (OUVERT, FERME, FRONTIERE).**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. Soient  $A \subset E$ ,  $x \in E$  et  $r > 0$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . On a alors :

1.  $x \in \overset{\circ}{A} \iff$  il existe  $r > 0$ , tel que  $B(x, r) \subset A$ ,
2.  $x \in \bar{A} \iff$  pour tout  $r > 0$ ,  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ ,
3.  $x \in Fr(A) \iff$  pour tout  $r > 0$ ,  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$  et  $B(x, r) \cap \complement_E A \neq \emptyset$ .

**Preuve :** Faite en cours.

**Proposition 13 (BOULE UNITE).**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n.

1.  $Adh(B(0, 1)) = \bar{B}(0, 1)$ ,
2.  $Int(B(0, 1)) = B(0, 1)$ ,
3.  $Fr(B(0, 1)) = \{x \in E; d(0, x) = 1\}$ .

**Preuve :** Pas faite en cours.

Maintenant que les notions de bases qui nous intéressent sont établies, nous pouvons nous intéresser à des outils qui nous seront utiles dans certaines preuves du cours : les suites et la notion d'ensemble compact.

## 6. Suites numériques dans un espace vectoriel normé

Dans cette section, nous nous plaçons (sauf exception spécifiée) dans un  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n quelconque.

**Définition 16 (SUITE).**

On appelle **suite** dans  $E$  toute **application**

$$\begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & E \\ n & \mapsto & x_n. \end{cases}$$

On note une telle application  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Définition 17 (SUITE BORNEE).**

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de  $E$  muni de la norme  $\|\cdot\|$ . La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite bornée si et seulement si l'ensemble  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  est borné. Autrement dit, il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|x_n\| \leq M$ .

**Proposition 14 (SUITES BORNEES ET ESPACE VECTORIEL).**

L'ensemble des suites bornées dans un espace vectoriel normé est un espace vectoriel.

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Définition 18 (SUITE ET CONVERGENCE).**

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de  $E$  muni de la norme  $\|\cdot\|$ . On dit que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $(E, \|\cdot\|)$ , si et seulement s'il existe  $l \in E$ , tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $\|x_n - l\| < \varepsilon$ .

**Proposition 15 (LIMITE ET UNICITE).**

La limite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie ci-dessus est **UNIQUE**.

**Preuve :** Faite en cours.

**Proposition 16** (SUITES CONVERGENTES ET ESPACE VECTORIEL).

*L'ensemble des suites convergentes dans un espace vectoriel normé est un espace vectoriel.*

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Proposition 17** (CONVERGENCES ET NORMES - DIMENSION FINIE).

*Sur  $\mathbb{R}^n$ , comme toutes les normes sont équivalentes, toute suite convergente pour l'une des normes est convergente pour l'autre.*

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Définition 19** (SUITES ET PARTIES).

Soit  $A \subset E$ . On dit que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de points de  $A$  si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in A$ .

**Proposition 18** (LIMITE ET ADHERENCE).

*Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de points de  $A$  et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ , alors  $l \in \bar{A}$ .*

**Preuve :** Faite en cours.

**Proposition 19** (CARACTERISATION DES FERMES PAR LES SUITES).

*Soit  $A \subset E$ , alors  $A$  est fermé si et seulement TOUTE suite de points de  $A$  qui converge a sa limite qui appartient à  $A$ .*

**Preuve :** Faite en cours.

**Définition 20** (SUITES DE CAUCHY).

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $E$ . On dit que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$ , tel que pour tous  $n, m \geq N$ ,  $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ .

**Proposition 20** (CAUCHY ET CONVERGENCE).

*Si une suite est convergente alors elle est de Cauchy.*

**Preuve :** Faite en cours.

**Remarque.**

**ATTENTION :** la réciproque n'est pas vraie en général. Par contre, le fait de travailler sur un espace où la réciproque est vraie serait bien pratique. En effet nous pourrions montrer la convergence d'une suite sans avoir à calculer la limite de cette suite. Les espaces dont la réciproque de la propriété ci-dessus.

**Définition 21** (ESPACE COMPLET).

*Si dans un ensemble, toute suite de Cauchy est convergente, on dit que l'ensemble est complet.*

**Remarque.**

- Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.
- Les e.v.n.  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  dans lesquels nous travaillerons pratiquement tout le temps, sont des espaces de Banach. Donc toute suite de Cauchy dans ces espaces sera convergente.

**Présentons ci-dessous quelques résultats en dimension finie.**

Nous allons considérer les espaces  $\mathbb{R}^p$  ici. Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  une base de  $\mathbb{R}^p$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$ , il existe un unique

$p$ -uplet  $(x^1, x^2, \dots, x^p) \in \mathbb{R}^p$  tel que  $x = \sum_{i=1}^p x^i e_i$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on aura donc (un élément d'une suite par exemple qui s'écrit)

$$x_n = \sum_{i=1}^p x_n^i e_i.$$

**Proposition 21** (SUITES ET DIMENSION FINIE).

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente vers  $l = (l_1, \dots, l_p)$  dans  $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^i = l_i,$$

pour tout  $i = 1, \dots, p$ .

## 7. Ensemble compact

La notion de compacité sera utile dans la théorie de fonctions de plusieurs variables. Il est donc utile de la rappeler ici. Et pour la définir, nous utilisons les sous-suites, d'où l'intérêt d'avoir rappelé quelques résultats sur les suites dans la section précédente. Encore une fois, dans tout ce qui suit, nous nous placerons dans l'e.v.n.  $(E, \|\cdot\|)$ .

**Définition 22** (SOUS-SUITE OU SUITE EXTRAITE).

Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $E$  et  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante, alors la suite  $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  est appelée suite extraite ou sous-suite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Définition 23** (RECOUVREMENT OUVERT).

Soit  $A \subset E$ , un recouvrement ouvert de  $A$  est une famille d'ouverts  $(\mathcal{O}_i)_i$  tels que  $A \subset (\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i)$ .

**Définition 24** (SOUS-RECOUVREMENT OUVERT).

Considérer un sous-recouvrement ouvert d'un recouvrement donné d'une partie  $A \subset E$ , consiste à prendre une partie  $J \subset I$  tel que  $A \subset (\bigcup_{j \in J} \mathcal{O}_j)$ .

**Proposition 22** (SOUS-SUITE ET SOUS-RECOUVREMENT).

Soit  $A \subset E$ , alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

1. De toute suite de points de  $A$  on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point de  $A$ .
2. De tout recouvrement ouvert de  $A$  on peut extraire un sous-recouvrement fini.

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Définition 25** (COMPACT).

Une partie  $A$  qui vérifie une de ces deux propriétés est un COMPACT.

**Définition 26** (COMPACT EN DIMENSION FINIE).

Soit  $A \subset E$ . Si  $A$  est FERME et BORNE dans  $E$  on dit qu'il est COMPACT.

**Remarque.**

ATTENTION : on a toujours la propriété suivante :

-Si  $A$  est compact alors  $A$  est un FERME BORNE.

-MAIS la réciproque n'est pas toujours vraie en dimension infinie (elle l'est TOUJOURS par contre dans  $\mathbb{R}^n$  (ce qui nous intéresse ici)).

-Nous verrons quels sont les avantages de la compacité un peu plus tard. Notamment la compacité et la continuité : toute fonction continue sur un compact est uniformément continue (nous verrons ce que cela veut dire) sur ce compact et toute fonction continue sur un compact admet un minimum et un maximum.

-On peut également énoncer la propriété suivante grâce à la compacité :

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie  $n$ , alors  $E$  est ISOMORPHE à  $\mathbb{R}^n$  (un corollaire à ce résultat nous permettrait de montrer l'équivalence des normes en dimension finie).

## 8. Ensemble convexe

La notion d'ensembles convexes (et plus tard de fonctions convexes) seront très utiles dans le chapitre sur les extrema (maxima et minima) de fonctions. Il est donc utile de la rappeler ici dans cette dernière section.

**Définition 27** (ENSEMBLE CONVEXE).

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  et  $C$  une partie de  $E$ . On dit que  $C$  est un convexe si et seulement si pour tous  $x, y \in C$ , pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on a

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Et on a enfin le résultat suivant.

**Proposition 23** (SOUS-SUITE ET SOUS-RECouvreMENT).

Si  $C$  est un ensemble convexe,  $\overline{C}$  est également un convexe.

## 9. HORS PROGRAMME : Applications d'une e.v.n. vers un e.v.n.

### 9.1. Généralités

Cette partie présente des résultats généraux intéressants qui restent hors programme pour la deuxième année de licence. Cependant ils pourront quand même être très utiles pour les années suivantes.

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  et  $(F, \|\cdot\|)$  deux espaces vectoriels normés et  $U$  une partie ouverte non vide de  $E$ . On considère l'application  $f : U \rightarrow F$ .

**Définition 28** (APPLICATION CONTINUE).

Soient  $f : U \rightarrow F$  et  $a \in U$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x \in U$  tels que

$$\|x - a\| < \eta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

**Définition 29** (CONTINUITÉ SUR  $U$ ).

On dit que  $f$  est continue sur  $U$  si et seulement si  $f$  est continue en tout point de  $U$ .

**Proposition 24** (CONTINUITÉ ET IMAGE RECIPROQUE).

Soit  $f : U \subset E \rightarrow F$ . On a les équivalences suivantes.

- $f$  est continue sur  $U$  si et seulement si l'image réciproque de toute partie ouverte de  $F$  est un ouvert de  $U$ .
- $f$  est continue sur  $U$  si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de  $F$  est un fermé de  $U$ .

**Proposition 25** (CONTINUITÉ ET NORMES EQUIVALENTES).

Si  $f : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  est continue sur  $U \subset E$  et si  $\|\cdot\|_E^* \sim \|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F^* \sim \|\cdot\|_F$ . Alors  $f : (E, \|\cdot\|_E^*) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F^*)$  est également continue sur  $U$  relativement à ces nouvelles normes.

**Proposition 26** (CONTINUITÉ ET SUITE).

Soit  $f : U \subset E \rightarrow F$  continue sur  $U$ . Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $U$  convergeant vers un point  $x \in U$ . Alors  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(x)$ .

**Proposition 27** (RECIPROQUE).

Soit  $f : U \subset E \rightarrow F$  une application. Si pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $x \in U$  on a la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $f(x)$  alors  $f$  est continue en  $x$ .

**Proposition 28** (CONTINUITÉ ET ADHERENCE).

Soient  $f : U \subset E \rightarrow F$ ,  $a \in U$ ,  $A \subset U$  et  $a \in \overline{A}$ . Si  $f$  est continue en  $a$  alors  $f(a) \in \overline{f(A)}$ .

## 9.2. Opérations sur les fonctions continues

**Proposition 29** (ENSEMBLE DES FONCTIONS CONTINUES).

*L'ensemble des fonctions continues en un point  $x \in U \subset E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions.*

**Proposition 30** (CONTINUITÉ ET COMPOSITION).

*Soient*

$$\begin{aligned} f : U \subset E &\rightarrow F & \text{et } g : U' \subset F &\rightarrow G \\ x &\mapsto f(x) \in U, & y = f(x) &\mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

*$f$  est continue en  $a$  et  $g$  est continue en  $f(a)$  alors  $g \circ f$  est continue en  $a$ .*

## 9.3. Extension de la définition de la continuité

**Définition 30** (CONTINUITÉ RELATIVE).

Soient  $f : D \subset (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  avec  $D \neq \emptyset$  et  $a \in D$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  relativement à  $D$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$ , pour tout  $x \in D$ ,

$$\|x - a\|_E < \eta \implies \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon.$$

**Remarque.**

La notion de continuité relative correspond au fait que la restriction de  $f$  à la partie  $D$  de  $E$ , noté  $f|_D$  est continue en  $a$ . On notera que  $f|_D$  peut être continue sans que  $f$  soit continue en un seul point de  $E$  (on pourrait par exemple prendre la fonction caractéristique d'une partie  $D$  de  $E$ , où  $D$  est dense sur  $E$  ainsi que son complémentaire. Si cette application est définie de  $E$  dans l'espace discret  $\{0, 1\}$  alors elle n'est continue en aucun de ses points mais sa restriction à  $D$  l'est.

**Proposition 31** (CONTINUITÉ RELATIVE ET SUITE).

*Soient  $f : D \subset E \rightarrow F$ ,  $D \neq \emptyset$ . L'application  $f$  est continue en  $a$  relativement à  $D$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $D$  qui converge vers  $a$ , la suite image  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(a)$ .*

**Proposition 32** (CONTINUITÉ RELATIVE ET COMPACTITÉ).

*Soient  $f : K \subset E \rightarrow F$ ,  $K \neq \emptyset$ ,  $K$  compact. Si  $f$  est continue sur  $K$  relativement à  $K$  alors  $f(K)$  est compact.*

**Proposition 33** (CONTINUITÉ RELATIVE ET COMPACTITÉ - APPLICATION).

*Soient  $f : K \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $K \neq \emptyset$ ,  $K$  compact. Si  $f$  est continue sur  $K$  relativement à  $K$ ,*

1.  *$f$  est bornée sur  $K$ ,*
2.  *$f$  atteint ses bornes.*

## 9.4. Cas des espaces de dimension finie

Soit  $f : D \subset (\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}) \rightarrow (\mathbb{R}^q, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^q})$ ,  $D \neq \emptyset$ . Soit  $B = \{b_1, \dots, b_p\}$  une base de  $\mathbb{R}^p$ , alors pour tout  $x \in D$ ,  $x$  se décompose d'une manière unique dans  $B$ . Autrement dit, il existe  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$  tel que  $x = \sum_{i=1}^p x_i b_i$ . Donc  $f(x) = \sum_{i=1}^p f_i(x) h_i$  où  $\{h_1, \dots, h_p\}$  est une base de  $\mathbb{R}^q$ .

**Proposition 34** (CONTINUITÉ RELATIVE).

*Pour tout  $i = 1, \dots, q$ ,  $f_i$  est continue en  $a \in D$  relativement à  $D$  si et seulement si  $f$  est continue en  $a$  relativement à  $D$ .*

## 9.5. Notion de continuité uniforme

Soit  $f : D \rightarrow F$ , une application continue en tout point  $a \in D$  relativement à  $D$ . Il y a alors un problème de "transfert" des suites de Cauchy. D'où la définition suivante.

**Définition 31** (CONTINUITÉ UNIFORME).

Soient  $f : D \subset (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  avec  $D \neq \emptyset$ . On dit que  $f$  est uniformément continue sur  $D$  relativement à  $D$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$ , pour tous  $x, y \in D$ ,

$$\|x - y\|_E < \eta \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon.$$

**Remarque.**

Pour bien faire la différence entre la continuité simple et la continuité uniforme en un point  $x$  de  $E$ , on peut faire la comparaison entre les deux définitions suivantes (sans passer par la continuité relative pour simplifier les définitions) (qui mettront les choses au clair) :

l'application  $f$  est continue de  $E$  dans  $F$  si et seulement si pour tout  $x \in E$ , pour tout  $\varepsilon_x > 0$ , il existe  $\eta_{\varepsilon, x} > 0$ , pour tout  $y \in E$ ,

$$\|x - y\|_E < \eta_{\varepsilon, x} \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon_x.$$

Et d'autre part

l'application  $f$  est uniformément continue de  $E$  dans  $F$  si et seulement si  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta_\varepsilon > 0$ , pour tous  $x, y \in E$ ,

$$\|x - y\|_E < \eta_\varepsilon \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon.$$

Autrement dit, dans la continuité uniforme le choix de  $\varepsilon$  ne dépend pas de  $x$ , et celui de  $\eta$  ne dépend que de celui de  $\varepsilon$ .

**Proposition 35** (CONTINUITÉ RELATIVE).

Soient  $f : D \subset (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  avec  $D \neq \emptyset$  une application uniformément continue sur  $D$  relativement à  $D$ . Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy de points de  $D$  alors  $f(x_n)$  est une suite de Cauchy dans  $F$ .

## 9.6. Applications linéaires continues

**Proposition 36** (APPLICATIONS LINEAIRE CONTINUES).

Soient  $f : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  une application linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est continue en un point  $a$  de  $E$ ,
2.  $f$  est continue en tous points de  $E$ ,
3.  $f$  est bornée sur la boule unité fermée de  $E$ ,
4.  $f$  est bornée sur la sphère unité de  $E$ ,
5.  $f$  est bornante, c'est à dire que l'image d'un borné de  $E$  est un borné de  $F$ .

**Proposition 37** (APPLICATIONS LINEAIRE CONTINUES EN DIMENSION FINIE).

Soient  $f : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  une application linéaire avec  $\dim E < +\infty$ , alors  $f$  est continue.

**Remarque.**

Cette dernière proposition sera très utile pour nous étant donné que dans ce cours nous travaillerons principalement en dimension finie. Pour montrer la continuité de  $f$  il faudra juste montrer alors  $f$  est linéaire.

$(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux e.v.n., alors l'ensemble des applications linéaires continues de  $E$  vers  $F$ , noté  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace vectoriel. Comment normer cet espace ?

**Proposition 38** (APPLICATIONS LINEAIRE CONTINUES EN DIMENSION FINIE).

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors

$$\sup_{x \in \overline{B}(0,1)} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in S(0,1)} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in E, x \neq 0} \|f(x)\|_F,$$

et l'application  $\|\cdot\|$  est une norme dans  $\mathcal{L}(E, F)$ .



# Fonctions de plusieurs variables. Limite. Continuité.

[James Gregory (1638-1675) : mathématicien écossais, qui en 1667 donne une des premières définitions formelles de fonctions de plusieurs variables dans son ouvrage *Vera circuli et hyperbolae quadratura*.] [Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) : mathématicien italien, a étudié (entre autres), les extrema relatifs de fonctions de plusieurs variables.] [Gaspard Monge (1748-1818) : mathématicien français, il étudie les surfaces et dans son ouvrage *Application de l'analyse à la géométrie* il introduit la notion de ligne de courbure et les termes ellipsoïde, hyperboloïde et paraboloides. Dès 1801, il est le premier à utiliser systématiquement les équations aux dérivées partielles pour étudier les surfaces.]

FIGURE 3.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude de fonctions de plusieurs variables.

**Que sont les fonctions de plusieurs variables ?** Dans ce chapitre nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables dans des cadres particuliers ( $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ), mais également dans un cadre très général ( $\mathbb{R}^n$ ). Nous n'étudierons pas le cas encore plus général dans lequel la dimension des espaces est infinie. Nous laissons cela pour un cours un peu plus avancé. Ces fonctions seront donc de la forme

$$f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow F \subset \mathbb{R}^q,$$

où  $p$  et  $q$  sont des entiers naturels  $> 0$ . Autrement dit, les éléments de l'ensemble de départ  $E$  seront des vecteurs du type  $x = (x_1, \dots, x_p)$ , et les éléments de l'ensemble d'arrivée seront des vecteurs du type  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))$ , où  $x$  est un vecteur de  $E$ .

Nous considérons plusieurs cas de fonctions à plusieurs variables, donc voici quelques illustrations graphiques.

Exemples de représentations graphiques de certaines classes de fonctions de plusieurs variables.

1.  $p = 1, q = 1$ .  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}$  : c'est le cas le plus simple, celui qui est connu depuis le lycée, nous rappellerons si nécessaire quelques résultats concernant ce type de fonctions.
2.  $p = 1, q > 1$ .  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F \subset \mathbb{R}^q$  : elles sont représentées par exemple par des courbes paramétrées ( $q = 2$  ou  $3$ ),
3.  $p = 2, q = 1$ .  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow J \subset \mathbb{R}$  : elles sont représentées par exemple par des surfaces (on les appelle également champs scalaires), ou des courbes de niveau,
4.  $p = 2, q > 1$ .  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow F \subset \mathbb{R}^q$  : elles sont représentées par exemple par des surfaces paramétriques, ou des champs vectoriels ( $q = 2$  ou  $3$ ).
5.  $p = 3, q = 3$ .  $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow F \subset \mathbb{R}^3$  : elles sont représentées par exemple par des champs vectoriels.

[(cas  $p = q = 1$ ) Courbe représentant la fonction  $x \mapsto x \sin(x)$ .] [(cas  $p = 1, q = 3$ ) Courbe représentant la fonction  $t \mapsto ((2 + \cos(1.5t)) \cos(t), (2 + \cos(1.5t)) \sin(t), \sin(1.5t))$  (nœud de trèfle). ]  
[(cas  $p = 2, q = 1$ ) Courbe représentant la fonction  $(x, y) \mapsto -x \cdot y \cdot e^{(-x^2 - y^2)}$ . ] [(cas  $p = 2, q = 3$ ) Courbe représentant la fonction  $(u, v) \mapsto ((2 + \sin(v)) \cos(u), (2 + \sin(v)) \sin(u), u + \cos(v))$ . ]

FIGURE 3.2 – Quelques représentations graphiques illustrant des fonctions de plusieurs variables.

FIGURE 3.3 – Représentation du champ de vecteur donné par  $(x, y, z) \mapsto (y/z, -x/z, z/4)$ .

Dès que  $p$  et  $q$  sont  $> 3$ , il est assez difficile d'avoir une vision graphique de leur représentation, mais cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas d'interprétation possible. Les variables peuvent représenter bien autre chose que l'espace : cela

peut être des populations, des traits caractéristiques (taille, âge, maturité, gènes,...), etc. Nous essaierons de donner quelques illustrations tout au long de ce cours.

Dans la suite de ce cours, nous distinguerons parfois des résultats pour deux types bien distincts de fonctions :

- les fonctions scalaires  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  (qu'on appelle aussi fonctions réelles de variables réelles),
- les fonctions vectorielles  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $q > 1$ .

ATTENTION : certains résultats seront donnés pour les fonctions scalaires alors que d'autres le seront pour les fonctions vectorielles.

## 1. Fonctions réelles de variable réelle

**Définition 32** (FONCTION REELLE DE PLUSIEURS VARIABLES REELLES).

Soient  $E$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $G$  une partie de  $E \times \mathbb{R}$  telle que pour tout vecteur  $x \in E$ , il existe un nombre réel  $y$  et un seul tel que le couple  $(x, y)$  appartienne à  $G$ . Alors le triplet  $(f, E, \mathbb{R})$  s'appelle fonction définie sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

-on dit que  $E$  est l'ensemble de départ de  $f$  (ou le domaine de définition), et on le désigne par  $D(f)$ .

-le sous-ensemble  $\{y \in \mathbb{R}, \text{ il existe } x \in E, f(x) = y\}$  est appelé l'image de  $E$  par  $f$  et il est noté  $Im(f)$ .

-l'UNIQUE nombre réel  $y$  correspondant à l'élément  $x \in E$  par  $f$  s'appelle l'image de  $x$  par  $f$  et se note  $f(x)$ .

-la notation  $f = (G, E, \mathbb{R})$  n'est pas utilisée en pratique. On lui préfère la notation

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Définition 33** (GRAPHES D'UNE FONCTION  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ).

Soient  $E$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle de deux variables.

1. L'ensemble des points de  $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in E, z = f(x, y)\}$$

est appelé SURFACE REPRESENTATIVE de  $f$ .  $S$  est également appelé GRAPHE de la fonction  $f$ .

2. Soit  $A = (a, b)$  un point intérieur de  $E$ . Les fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $x \rightarrow f(x, b)$  et  $y \rightarrow f(a, y)$  définies sur des intervalles ouverts contenant respectivement  $a$  et  $b$  sont appelées FONCTION PARTIELLES associées à  $f$  au point  $A$ .

3. Soit  $k \in \mathbb{R}$ . L'ensemble  $L_k = \{(x, y) \in E; f(x, y) = k\}$  est appelé LIGNE DE NIVEAU  $k$  de la fonction  $f$ .

FIGURE 3.4 – Illustration de la définition 33 avec l'image de la couverture : représentation de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  définie par  $(x, y) \mapsto z = \frac{\sin(x^2+3y^2)}{0.1+r^2} + (x^2+5y^2) \cdot \frac{\exp(1-r^2)}{2}$ , avec  $r = \sqrt{x^2+y^2}$ , et projection des courbes de niveau sur les plans  $z = 0$  et  $z = 9$ .

**Remarque.**

Pour les fonctions de 3 variables, la notion analogue à la ligne de niveau est celle de la SURFACE de niveau.

FIGURE 3.5 – Surfaces de niveau pour illustrer la fonction  $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Les surfaces de niveaux sont données par l'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , où  $a = 1, 2, 3$  et elles ont été coupées pour laisser entrevoir les surfaces des différents niveaux.

## 2. Notion de limite

**Définition 34** (FONCTION DEFINIE AU VOISINAGE D'UN POINT).

On dit qu'une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est définie au voisinage d'un point  $x_0$ , si  $x_0$  est un point intérieur à  $E \cup \{x_0\}$ .

**Définition 35** (LIMITE D'UNE FONCTION  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ).

On dit qu'une fonction  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $x_0$  admet pour limite le nombre réel  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut associer un nombre  $\eta > 0$  tel que les relations  $x \in E$  et  $0 < \|x - x_0\| < \eta$  impliquent  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . On écrit alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

**Remarque.**

1. La notion de limite ici ne dépend pas des normes utilisées.
2. La limite, si elle existe est unique.
3. Nous pouvons généraliser ces définitions aux fonctions de  $E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ .

**Proposition 39** (LIMITES ET SUITES D'UNE FONCTION  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ ).

Une fonction  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  définie au voisinage de  $x_0$  admet une limite  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\{x \in E, x \neq x_0\}$  qui converge vers  $x_0$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ .

**Preuve :** Faite en cours.

**Proposition 40** (OPERATIONS SUR LES LIMITES).

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  telles que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ , alors

1. pour tout couple de nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$ , la limite de la fonction  $\alpha f + \beta g$  lorsque  $x \rightarrow x_0$  existe et est égale à  $\alpha l_1 + \beta l_2$ .
2. la limite de la fonction  $f g$  quand  $x \rightarrow x_0$  existe et elle est égale à  $l_1 l_2$ .
3. la limite de  $f/g$  si  $l_2 \neq 0$  lorsque  $x \rightarrow x_0$  existe et est égale à  $l_1/l_2$ .

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Proposition 41** (LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSEE).

Soient :

-  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ ,

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = l,$$

-soient  $g_1, \dots, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n$  fonctions réelles telles que  $\lim_{t \rightarrow a} g_i(t) = b_i$ , pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

-supposons de plus qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $t$  avec  $0 < |t - a| < \alpha$  on ait  $(g_1(t), \dots, g_n(t)) \neq (b_1, \dots, b_n)$  alors,

$$\lim_{t \rightarrow a} f(g_1(t), \dots, g_n(t)) = l.$$

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Proposition 42** (PERMUTATION DES LIMITES).

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$ . Supposons de plus que pour tout  $x \in \mathbb{R}$   $\lim_{y \rightarrow b} f(x,y)$  existe et que pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x,y)$  existe. Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x,y)) = \lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x,y)) = l.$$

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Théorème 1** (THEOREME DES GENDARMES).

Soient  $f, g$  et  $h$  trois fonctions de  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  vérifiant les deux propriétés suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

2. il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in \{x \in E, 0 < \|x - x_0\| < \alpha\}$  tel que  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ .  
Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ .

**Preuve :** Faite en cours.

### 3. Fonctions continues

**Définition 36** (FONCTION CONTINUE EN UN POINT).

Soit  $x_0$  un point intérieur de  $E \subset \mathbb{R}^p$ . Une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^q$  est continue en  $x_0$  si et seulement  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

On peut formuler cette définition de façon équivalente à l'aide des suites.

**Définition 37** (CONTINUITÉ ET SUITES).

Soit  $x_0$  un point intérieur de  $E \subset \mathbb{R}^p$ . Une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^q$  est continue en  $x_0$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  qui converge vers  $x_0$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(x_0)$ .

**Définition 38** (FONCTIONS PARTIELLES DANS  $\mathbb{R}^n$ ).

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $a = (a_1, \dots, a_p) \in E$ , alors les  $p$  fonctions  $f_1, \dots, f_p$  définies par

$$\begin{aligned} f_j : \{x \in \mathbb{R}, (a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_p) \in E\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_j(x) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_p), \end{aligned}$$

pour  $j = 1, \dots, p$  sont appelées fonctions partielles en  $a$ .

**Proposition 43** (CONTINUITÉ FONCTIONS PARTIELLES).

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction continue au point  $a = (a_1, \dots, a_p)$ , alors les  $p$  fonctions  $f_1, \dots, f_p$  définies par

$$\begin{aligned} f_j : \{x \in \mathbb{R}, (a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_p) \in E\} &\rightarrow \mathbb{R}^q \\ x &\mapsto f_j(x) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_p), \end{aligned}$$

pour  $j = 1, \dots, p$  sont continues en  $a_j$ .

**Preuve :** Faite en cours.

**Remarque.**

-ATTENTION :

-en général la réciproque est fausse!

-Soit  $l \in \mathbb{R}$ , si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \alpha x) = l$ . Peut-on en conclure que  $f$  est continue au point  $(0, 0)$ ? La réponse est non.

**Théorème 2** (OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES).

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$  continues en  $x_0$ . Alors,

1. pour tout couple de nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$ , la fonction  $\alpha f + \beta g$  est continue en  $x_0$ .
2. de même  $f g$  et  $f/g$  (avec  $g(x) \neq 0$  sur un voisinage de  $x_0$ ) et  $\|f\|$  sont continues en  $x_0$ .
3. enfin, la composée de fonctions continues est continue.

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Définition 39** (PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ).

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Soit  $x_0$  un point adhérent à  $E$  n'appartenant pas à  $E$ . Si  $f$  a une limite  $l$  lorsque  $x \rightarrow x_0$  on peut étendre le domaine de définition de  $f$  à  $E \cup \{x_0\}$  en posant  $f(x_0) = l$ . On dit que l'on a prolongé  $f$  par continuité au point  $x_0$ .

**Théorème 3** (CRITÈRES DE CONTINUITÉ).

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow F \subset \mathbb{R}^q$  une fonction continue. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1.  $f$  est continue en tout point de  $E$ ,
2. pour tout ouvert  $U$  de  $F$ ,  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $E$ .
3. pour tout fermé  $V$  de  $F$ ,  $f^{-1}(V)$  est un fermé de  $E$ .
4. pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  convergeant vers  $z$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(z)$  pour tout  $z \in E$ .

**Preuve :** Pas faite en cours.

## 4. Coordonnées polaires

Lorsque l'on considère des application  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , il est quelques fois plus facile de prouver des résultats de limite, continuité, etc. en passant par les coordonnées polaires en faisant le changement de variables de la façon suivante.

Soit  $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$ . Deux cas possibles se présentent.

1. Soit  $r = 0$ , et dans ce cas là, l'angle  $\theta$  peut prendre toutes les valeurs sur  $[0, 2\pi[$  étant donné que l'on reste au même point : l'origine.
2. Soit  $r \neq 0$ . On a alors  $x$  et  $y$  qui ne peuvent être tous les deux nuls en même temps, et alors on peut définir une application bijective de  $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$  vers  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$  donnée par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[ &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\} \\ (r, \theta) &\mapsto (x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)), \end{aligned}$$

Son application réciproque est l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[ \\ (x, y) &\mapsto (r, \theta), \end{aligned}$$

où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\theta$  est défini de la façon suivante :

$$\theta = \begin{cases} \arctan(x/y) & \text{si } x > 0 \text{ et } y \geq 0, \\ \arctan(x/y) + 2\pi & \text{si } x > 0, \text{ et } y < 0, \\ \arctan(x/y) + \pi & \text{si } x < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0. \end{cases}$$

Donc en particulier, on a  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Dans certains exemples d'étude de continuité des fonctions, il est utile de passer aux coordonnées polaires : en effet, la condition sur deux variables  $(x, y) \rightarrow 0$  devient une condition sur une seule variable  $r \rightarrow 0$  et prouver la continuité d'une fonction devient plus facile (voir les exemples du cours).

On aurait également pu considérer  $\theta$  sur l'intervalle  $]-\pi, \pi]$  au lieu de  $[0, 2\pi[$  mais alors il aurait fallu changer la fonction réciproque  $\arctan \dots$  (à faire en exercice).

**Exemple 4.**

Voir en cours.

## 5. Continuité sur un compact

**Définition 40** (EXTREMA DE FONCTIONS A VALEURS SUR  $\mathbb{R}$ ).

Soient  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M$  (respectivement  $m$ ) un nombre réel vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. pour tout élément  $x \in E$ ,  $f(x) \leq M$  (respectivement  $f(x) \geq m$ ).
2.  $M$  (respectivement  $m$ ) appartient à l'ensemble  $Im(f) = \{f(x); x \in E\}$ .

Alors le nombre réel  $M$  (respectivement  $m$ ) est appelé le maximum (respectivement le minimum) de la fonction  $f$  sur  $E$  et il est noté  $\max_{x \in E} f(x)$  (respectivement  $\min_{x \in E} f(x)$ ).

D'autre part, si pour  $x_0 \in E$ ,  $f(x_0) = \max_{x \in E} f(x)$ , (respectivement  $f(x_0) = \min_{x \in E} f(x)$ ), nous dirons que la fonction  $f$  atteint son maximum (respectivement son minimum).

**Théorème 4** (CONTINUITÉ ET COMPACT).

Soient  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction continue sur une partie  $E \subset \mathbb{R}^p$  et  $K$  une partie compacte de  $\mathbb{R}^p$  contenue dans  $E$ . Alors  $f(K)$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}^q$ .

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Corollaire 1** (FONCTION BORNEE).

*Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.*

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Remarque.**

**IMPORTANT :** si  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  le corollaire précédent signifie que les deux nombres réels  $\min_{x \in E} f(x)$  et  $\max_{x \in E} f(x)$  existent et sont atteints.

## 6. Théorème des valeurs intermédiaires

**Définition 41** (ARC CONTINU).

On dit qu'une partie  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^p$  est un arc continu si on peut trouver une application continue  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  dont l'image soit  $\Gamma$ . L'application  $\gamma$  est appelée un paramétrage de  $\Gamma$ . Les points de  $\Gamma$ ,  $A = \gamma(a)$  et  $B = \gamma(b)$  s'appellent les extrémités de  $\Gamma$ .

**Remarque.**

**ATTENTION :**

1.  $\Gamma$  est un objet géométrique tandis que  $\gamma$ , fonction continue, est un objet analytique.  
Un arc continu admet une infinité de paramétrages possibles.
2. Ne pas confondre ensemble CONVEXE et ensemble CONNEXE. Dans un ensemble CONVEXE, le segment reliant deux points de cet ensemble doit se trouver en entier dans cet ensemble. Tandis qu'un ensemble CONNEXE (ensemble "en un seul morceau" peut ne pas être CONVEXE et posséder des éléments dont le segment qui relie deux de ces éléments puisse sortir de cet ensemble (voir figure 3.6).

FIGURE 3.6 – Exemples sur  $\mathbb{R}^2$  d'un ensemble CONVEXE  $E$  à gauche et d'un ensemble CONNEXE non convexe  $F$  à droite.

**Définition 42** (CONNEXE PAR ARCS).

Soit  $E$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^p$ . On dit que  $E$  est connexe par arc si étant donnés deux points arbitraires  $A$  et  $B$  de  $E$  on peut trouver un arc continu  $\Gamma$ , d'extrémités  $A$ , et  $B$  entièrement contenu dans  $E$ .

**Exemple 5.**

Voir la figure 3.7.

FIGURE 3.7 – Exemples sur  $\mathbb{R}^2$  d'un arc continu dans un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^2$

**Exemple 6.**

1. Dans  $E = \mathbb{R}$ , tous les intervalles  $I$  sont connexes par arc.
2.  $\mathbb{R}^*$  n'est pas connexe par arc.
3. Les ensembles convexes sont connexes par arc.
4. Les boules étant convexes, elles sont connexes par arc.
5. La réunion de deux connexes par arc non disjoints est connexe par arc.

Voir une illustration de connexité par arc sur la figure 3.8.

FIGURE 3.8 – Exemples sur  $\mathbb{R}^2$  de partie connexe par arc  $E$  et de partie non connexe par arc  $E_1 \sqcup E_2$ .

**Théorème 5** (THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES).

*Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  un fonction continue sur une partie  $E \subset \mathbb{R}^p$  connexe par arc. Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $E$ . Pour tout nombre réel  $r$  compris entre  $f(A)$  et  $f(B)$  il existe un point  $C$  de  $E$  tel que  $f(C) = r$ .*

**Preuve :** Pas faite en cours.

# Calcul différentiel

[Pierre de Fermat (1605/1608-1665) : mathématicien français, il développe une méthode générale pour trouver les tangentes aux courbes, méthode qui sera considérée par la suite comme le fondement du calcul différentiel.]  
[Charles Gustave Jacob Jacobi, ou Carl Gustav Jakob Jacobi, (1804 - 1851) , un mathématicien allemand, il est entre autre connu pour avoir été l'un des fondateurs du calcul des déterminants de matrices et notamment celui de la matrice jacobienne.] [Hermann Schwarz (1843-1921), mathématicien allemand connu entre autre pour son célèbre théorème concernant les différentielles d'ordre 2, énoncé dans ce chapitre.]

FIGURE 4.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude du calcul différentiel.

## 1. Dérivées partielles

Rappel : DERIVEE Soit  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ . La dérivée de  $f$  au point  $a \in I$  est donnée par :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Comme nous l'avons écrit dans l'introduction, si  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $a \in E$ . Une expression du type du rappel précédent n'a pas de sens parce que l'on ne peut pas diviser par un vecteur. Par contre, si on fixe toutes les composantes du vecteur  $x$  sauf une, on peut définir les dérivées partielles de cette fonction  $f$  de la façon suivante.

**Définition 43** (DERIVEE PARTIELLE).

Soient  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in E$ . Pour  $i = 1, \dots, p$ , on appelle dérivée partielle par rapport à  $x_i$  de  $f$  en  $a = (a_1, \dots, a_p)$ , et on note  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  la dérivée de la fonction partielle de  $f$  prise en  $a_i$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_p)}{x_i - a_i}.$$

Pour une fonction de deux variables  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  en un point  $a = (a_1, a_2) \in E$  les dérivées partielles de  $f$  en  $(a_1, a_2)$  sont les dérivées des fonctions partielles  $x_1 \rightarrow f(x_1, a_2)$  et  $x_2 \rightarrow f(a_1, x_2)$ , où  $x_1$ , et  $x_2 \in \mathbb{R}$  qui se calculent de la façon suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h},$$

et,

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + k) - f(a_1, a_2)}{k}.$$

On les note parfois  $f'_{x_1}(a_1, a_2)$  et  $f'_{x_2}(a_1, a_2)$ .

**Remarque.**

Si  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow$

$\mathbb{R}^q$  ce sont les composantes  $f_j$  de  $f$  pour  $j = 1, \dots, q$  qui admettent  $p$  dérivées partielles. Nous le verrons un peu plus bas dans la définition de la matrice jacobienne.



**Remarque.**

Attention : une fonction peut posséder des dérivées partielles en un point sans pour autant être continue en ce point ! C'est pour cela que l'on donne la condition suffisante suivante pour qu'une fonction soit continue en un point

**Théorème 6 (CONDITION SUFFISANTE DE CONTINUITÉ).**

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que les  $p$  fonctions  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, p$  soient continues au point  $(a_1, \dots, a_p) \in E$ . Alors  $f$  est aussi continue en ce point.

**Preuve :** Faite en cours.

**Définition 44 (MATRICE JACOBIENNE).**

La matrice des dérivées partielles de  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  s'appelle la matrice jacobienne ou la Jacobienne de  $f$ . On la note  $J(f)_{x_0}$ , elle a  $p$  colonnes et  $q$  lignes :

$$J(f)_{x_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_q(x_0)}{\partial x_p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R}).$$

Autrement dit, si  $x = (x_1, \dots, x_p)$  pour une fonction vectorielle  $f(x_1, \dots, x_p)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^q$ , la Jacobienne a pour colonnes les vecteurs  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ . En particulier, pour une fonction de  $p$  variables à valeurs réelles, la matrice jacobienne est juste une matrice ligne :

$$J(f)_{(x_1, \dots, x_p)} = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_p} \right)$$

et la transposée de ce vecteur est la matrice colonne

$$\text{grad}(f)_{(x_1, \dots, x_p)} = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_p} \right)^t.$$

$\text{grad}$  est appelé gradient de  $f$  et il est noté  $\nabla f(x)$  (qui se lit *nabla f* de  $x$ ).

On résume les cas particuliers dans la section suivante.

## 2. Opérateurs différentiels classiques

### 2.1. Gradient

Pour une fonction à valeurs scalaires ( $q = 1$ )

$$f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$$

dont les dérivées partielles existent, le gradient est défini par

$$\begin{aligned} \text{grad}(f) : E \subset \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ x &\mapsto (\text{grad}(f))(x) := \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_p} \right)^t. \end{aligned}$$

### 2.2. Divergence

Pour une fonction  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  ( $q = p$ ) de composante  $f_1, \dots, f_p$ , dont toutes les dérivées partielles existent, on définit sa divergence par

$$\begin{aligned} \text{div}(f) : E \subset \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\text{div}(f))(x) := \text{tr}(J(f)_x) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x), \end{aligned}$$

où  $\text{tr}(J(f)_x)$  est la trace de la matrice jacobienne. On peut écrire parfois  $\text{div}(f) = \nabla \cdot f$ , où le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^p$  est défini par

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^p x_i y_i.$$

ATTENTION : ne pas confondre les notions de gradient et de divergence.  $\text{grad}(f)$  est un vecteur alors que  $\text{div}(f)$  est un scalaire !

## 2.3. Rotationnel

Si  $p = 3$  et  $q = 3$  pour une fonction  $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de composante  $f_1, \dots, f_3$  dont toutes les dérivées partielles existent on définit le rotationnel de  $f$  par

$$\begin{aligned} \text{rot}(f) : E \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto (\text{rot}(f))(x), \end{aligned}$$

où

$$(\text{rot}f)(x) = \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \right) = \nabla \times f,$$

où  $x \times y$  désigne le produit vectoriel entre les vecteurs  $x$  et  $y$ .

## 3. Propriétés des dérivées partielles

Les dérivées partielles d'une fonction qui est obtenue par des opérations algébriques sur d'autres fonctions (somme, produit, fraction) suivent les mêmes règles.

Les dérivées partielles d'une composition de fonctions sont plus compliquées. Rappelons tout d'abord ce que l'on connaissait pour les applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 44** (REGLE DES CHAINES).

*Soient*

$$\begin{aligned} g : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow J \subset \mathbb{R}, & h : J \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto g(x), & y &\mapsto h(y), \end{aligned}$$

*et,*

$$\begin{aligned} f : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(x) = h(g(x)). \end{aligned}$$

*On a*

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{dh}{dy}(g(x_0)) \cdot \frac{dg}{dx}(x_0),$$

*que l'on écrivait plus souvent de la façon suivante :  $f'(x_0) = h'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ .*

**Preuve :** Pas faite en cours.

En généralisant aux fonctions de  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , on obtient le résultat suivant pour les dérivées partielles.

**Proposition 45** (DERIVÉE PARTIELLE D'UNE FONCTION COMPOSÉE).

*Soient*

$$\begin{aligned} g : D \subset \mathbb{R}^p &\rightarrow E \subset \mathbb{R}^m, & h : E \subset \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^q, \\ x &\mapsto g(x), & y &\mapsto h(y), \end{aligned}$$

*et,*

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^q, \\ x &\mapsto f(x) = h(g(x)). \end{aligned}$$

*des fonctions telles que les  $p$  dérivées partielles de chacune des  $m$  composantes de  $g$  en  $x_0 \in D$  existent et  $h$  en  $g(x_0) \in E$  soit une fonction continûment dérivable (i.e. ses dérivées partielles existent et sont continues) alors pour tout  $i = 1, \dots, p$ , et pour tout  $j = 1, \dots, q$  on a :*

1. chaque  $f_j$  possède une dérivée partielle par rapport à  $x_i$  au point  $x_0$ ,
2. on a la formule suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) &= \frac{\partial (h \circ g)_j}{\partial x_i}(x_0), \\ &= \frac{\partial h_j}{\partial y_1}(g(x_0)) \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x_0) + \dots + \frac{\partial h_j}{\partial y_m}(g(x_0)) \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(x_0), \end{aligned}$$

*ce qui donne les entrées d'une matrice jacobienne de  $f$  qui est un produit des matrices jacobiniennes de  $h$  et  $g$ . Autrement dit,*

$$J(h \circ g)_x = J(h)_{g(x)} \cdot J(g)_x.$$

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Remarque.**

Attention : si dans l'énoncé de la proposition on ne suppose pas que les dérivées partielles de  $f$  sont toutes continues au point  $g(x_0)$  alors le résultat peut très bien cesser d'être vrai !

Par contre, si en plus les applications partielles de  $g$  sont de continûment dérivables alors  $f$  aura ses dérivées partielles continues également en  $x_0$ .

## 4. Notion de différentiabilité

Nous avons pour l'instant étudié la dérivabilité des composantes de  $f$  pour se ramener aux cas que l'on connaissait des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Mais cela n'est pas satisfaisant dans le sens où l'on n'a pas de résultats propre à  $f$  sans passer par les dérivées partielles. D'où l'intérêt de cette section de la notion de différentielle de  $f$ , qui pourrait être abordé dans le cas de la dimension infinie mais que l'on ne traitera qu'en dimension finie pour rester dans le cadre du programme. Nous donnerons des résultats permettant de relier la différentielle d'une fonction avec ses dérivées partielles.

**Définition 45** (DIFFÉRENTIELLE EN UN POINT  $a$ ).

Soient  $E$  un ouvert inclus dans  $\mathbb{R}^q$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^q$  une application et  $a \in E$ . On dit que  $f$  est différentiable au point  $a$  si et seulement s'il existe une application linéaire  $l \in \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  vérifiant

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{\|f(x) - f(a) - l(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0,$$

ou encore, en posant  $h = x - a$ ,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|f(a + h) - f(a) - l(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

**Remarque.**

-l'application  $l$  est linéaire et continue (ici c'est évident puisqu'elle est linéaire en dimension finie, donc forcément continue),

-cette application  $l$  lorsqu'elle existe est unique et on la note  $df_a$ ,

-on peut également écrire cette définition sous la forme, pour tout  $h \in \mathbb{R}^p$

$$\|f(a + h) - f(a) - l(h)\| = r(h),$$

où  $r(h) = o(\|h\|)$  est le reste. C'est à dire que pour tout  $h \in \mathbb{R}^p$ ,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

-LIEN ENTRE DERIVEE ET DIFFERENTIABILITE : la fonction  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$  est différentiable si et seulement si elle est dérivable et pour tout  $x \in I$ , et  $h \in \mathbb{R}$ , on a

$$df_x(h) = hf'(x),$$

-DIFFÉRENTIELLE D'UNE APPLICATION LINEAIRE : si  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  est linéaire, alors  $f$  est différentiable sur  $E$  et pour tous  $x \in E$  et  $h \in \mathbb{R}^p$ ,

$$df_x(h) = f(h),$$

-DIFFÉRENTIELLE D'UNE APPLICATION BILINEAIRE : si  $B : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}^q$ , où  $E_1 \subset \mathbb{R}^{p_1}$  et  $E_2 \subset \mathbb{R}^{p_2}$ , alors  $B$  est différentiable sur  $E_1 \times E_2$  et pour tous  $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$  et pour tous  $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2}$ ,

$$dB_{(x_1, x_2)}(h_1, h_2) = B(x_1, h_2) + B(h_1, x_2).$$

**Proposition 46** (DERIVEE DIRECTIONNELLE).

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction différentiable sur  $E$  alors pour tous  $x \in E$  et  $h \in \mathbb{R}^p$  la fonction

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q \\ x &\mapsto g(t) := f(x + th), \end{aligned}$$

est dérivable en  $t = 0$  et

$$g'(0) = df_x(h) (= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}).$$

C'est la dérivée de  $f$  en  $x$  suivant la direction  $h$  (si  $h$  est non nul), ou encore dérivée directionnelle.

**Proposition 47** (DIFFÉRENTIELLE ET CONTINUITÉ).

Une fonction  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  différentiable en un point  $x \in E$  au sens de la définition précédente est nécessairement continue au point  $x$ .

**Preuve :** Faite en cours.

**Définition 46** (DIFFÉRENTIELLE SUR UN OUVERT  $E$ ).

On dit que l'application  $f$  est différentiable sur  $E$  si elle est différentiable en tout point  $x \in E$ . Dans ce cas, on appelle la différentielle de  $f$  la fonction

$$\begin{aligned} df &: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q) \\ x &\mapsto df_x, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$  est l'ensemble des fonctions linéaires (donc continues car nous sommes en dimension finie) de  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^q$ .

Si de plus  $df$  est continue, on dit que  $f$  est continûment différentiable ou de façon équivalente que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Remarque.**

ATTENTION : bien remarquer que la formulation ci-dessus correspond à  $df$  et non pas à  $df_x$  qui est d'après la définition toujours linéaire et continue de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$ . Autrement dit, ne pas confondre  $df$  et  $df_x$  !

**Remarque.**

Il faudra bien distinguer deux cas. Les fonctions à valeurs dans un espace produit, autrement dit  $f(x)$  sera un vecteur de composantes  $f_i(x)$  pour tout  $x$  dans l'espace de départ. Et le cas où  $f$  est définie sur un espace produit, c'est à dire que  $f$  sera définie pour tout  $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x$  étant un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

Bien entendu, la plupart du temps nous travaillerons sur le cas général qui est un mélange de ces deux cas, et donc  $f$  sera une fonction définie de  $E \subset \mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}^p$ . Il faudra alors garder à l'esprit les résultats suivants.

1. Une fonction  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$  définie pour tout  $x$  dans  $I$  par  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))$  est différentiable en un point  $x \in I$  si et seulement si toutes composantes  $f_i$  de  $f$ ,  $i = 1, \dots, q$  sont différentiables et  $df_x(h) = (df_{1,x}(h), \dots, df_{q,x}(h)) = hf'(x)$ , où dans ce cas  $h$  est un réel (scalaire) et  $f'(x)$  est le vecteur de composantes les dérivées  $f'_i(x)$ . Attention, cela ne marche que si l'espace de départ est  $\mathbb{R}$  ici. Cela ne marche plus du tout si l'espace de départ est inclus dans  $\mathbb{R}^p$ . On aura alors le résultat suivant.
2. On considère une fonction  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $x = (x_1, \dots, x_p)$  dans  $E$  par  $f(x) \in \mathbb{R}$ .  
Si  $f$  est différentiable en un point  $x \in E$  alors les dérivées partielles seront différentiables. Mais la réciproque sera FAUSSE en général.  
On peut résumer ce dernier point de la façon suivante :  
-Si  $f$  est différentiable alors les applications partielles sont dérivables (c'est le résultat de la proposition 48).  
-PAR CONTRE, l'existence de la dérivée des applications partielles n'implique pas nécessairement la différentiabilité de  $f$ .  
-Mais, si les applications partielles sont continûment différentiables alors  $f$  est continûment différentiable (ce sera le résultat de la proposition 49).

Nous allons énoncer ces résultats dans les deux propositions suivantes.

**Proposition 48** (DIFFÉRENTIABILITÉ ET DÉRIVÉES PARTIELLES).

Soient  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $a \in E$ . On suppose  $f$  différentiable en  $a$ , alors  $f$  admet en  $a$  les dérivées partielles : pour tout  $i = 1, \dots, p$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  et

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a(e_i),$$

où  $e_i$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^p$  dont la  $i$ ème composante est 1 et le reste est 0.

Attention : quand on parle des dérivées partielles de  $f$ , il s'agit en fait des dérivées partielles de chacune des applications

$f_j$  (avec  $f = (f_1, \dots, f_q)$ ,  $j = 1, \dots, q$ , car ne l'oublions pas,  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^q$ ).

**Preuve :** Faite en cours.

**Remarque.**

Si l'on pose  $h = (h_1, \dots, h_p)$ , et si  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  (attention ici l'application est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ !), on a

$$\begin{aligned} df_a(h_1, \dots, h_p) &= df_a\left(\sum_{i=1}^p h_i e_i\right), \\ &= \sum_{i=1}^p h_i df_a(e_i), \\ &= \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \\ &= \langle \nabla f(a) | h \rangle, \end{aligned}$$

où  $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)$  et  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^p$ , c'est dire

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^p x_i y_i.$$

On peut en déduire une partie du résultat suivant.

**Proposition 49** (DERIVEES PARTIELLES ET DIFFERENTIABILITE).

Soient  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in E$ . On suppose qu'il existe une boule ouverte centrée en  $a$  et de rayon  $\varepsilon > 0$  telle que pour tout  $x \in B(a, \varepsilon)$ , les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ,  $i = 1, \dots, p$  existent et soient continues en  $a$ . Alors  $f$  est différentiable en  $a$  et de plus on a

$$df_a(h) = \langle \nabla f(a) | h \rangle.$$

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Proposition 50** (GENERALISATION).

Soient  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $a \in E$ . On suppose qu'il existe une boule ouverte centrée en  $a$  et de rayon  $\varepsilon > 0$  telle que pour tout  $x \in B(a, \varepsilon)$ , les dérivées partielles  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ ,  $j = 1, \dots, p$  et pour tout  $i = 1, \dots, q$ , existent et soient continues en  $a$ . Alors  $f$  est différentiable en  $a$  et de plus on a

$$df_a(h) = J(f)_a \cdot h,$$

où  $J(f)_a$  est la matrice jacobienne de  $f$  en  $a$  avec  $p$  colonnes et  $q$  lignes.

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Remarque.**

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $f$  est-elle différentiable en  $a \in E$ ?

-calculer sa matrice jacobienne et donc les dérivées partielles  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$  pour tous  $i = 1, \dots, q$  et  $j = 1, \dots, p$ , s'il existe  $j_0$

tel que  $\frac{\partial f_j}{\partial x_{j_0}}(a)$  pour un  $j$  n'existe pas alors  $f$  n'est pas différentiable.

-sinon, considérons l'application linéaire  $l : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  où  $l(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  pour tout  $i = 1, \dots, p$ , et on regarde si

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|f(a+h) - f(a) - l(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

## 5. Opérations sur les fonctions différentiables

### Proposition 51 (LINEARITE).

Soient  $f, g : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $x \in E$ . On suppose  $f$  et  $g$  différentiables en  $x$ , alors

-  $f + g$  est différentiable et  $d(f + g)_x = df_x + dg_x$ ,

- pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f$  est différentiable et  $(\lambda f)_x = \lambda df_x$ .

En termes de Jacobiennes :

-  $J(f + g)_x = J(f)_x + J(g)_x$ ,

-  $J(\lambda f)_x = \lambda J(f)_x$ .

**Preuve :** Pas faite en cours.

### Proposition 52 (COMPOSITION).

Soient  $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  est différentiable en  $x \in E$  et  $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  différentiable en  $y = f(x) \in U$ , alors la composée  $g \circ f$  est différentiable en  $x$  et

$$d(g \circ f)_x(h) = dg_{f(x)}(df_x(h)),$$

pour tous  $x \in E$  et  $h \in \mathbb{R}^p$ . On l'écrit également sous la forme

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x,$$

pour tout  $x \in E$ .

En termes de Jacobiennes :

$$d(g \circ f)_x = J(g \circ f)_x = J(g)_{f(x)} \cdot J(f)_x.$$

**Preuve :** Pas faite en cours.

**Remarque.**

Cette dernière proposition peut s'avérer utile lorsque l'on veut exprimer la différentielle de fonctions un peu "compliquées". Il suffit alors d'essayer de décomposer ces fonctions en fonctions classiques dont les différentielles sont connues et de rassembler les "pièces du puzzle" par la formule de différentielle d'une fonction composée. Ce résultat est valable également en dimension infinie (hors programme), et il peut être utilisé lorsque le calcul des jacobiennes peut s'avérer trop long.

## 6. Propriétés géométriques des fonctions de plusieurs variables

Pour finir ce chapitre, nous allons donner quelques interprétations géométriques des différentielles.

### 6.1. Gradient et ligne de niveau

Avant de donner le résultat directement, rappelons la définition d'un vecteur normal à une courbe en un point de cette courbe ainsi que la définition d'une ligne de niveau pour une fonction définie sur un domaine de  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

#### Définition 47 (VECTEUR PERPENDICULAIRE A UNE COURBE).

Soient  $x$  un point d'une courbe  $\Gamma \subset \mathbb{R}^p$  et  $T$  une droite tangente à  $\Gamma$  au point  $x$ . On dit qu'un vecteur  $v$  est perpendiculaire à la courbe  $\Gamma$  au point  $x$  si  $v$  est perpendiculaire à  $T$ .

Dans ce cas, on dit aussi que  $v$  est normal à la courbe  $\Gamma$  au point  $x$ .

En particulier, cela signifie que le produit scalaire de  $v$  et du vecteur directeur de  $T$  est égal à 0.

Considérons  $E \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  et  $(x, y) \in E$  alors si  $f(x, y) = a$ ,  $(x, y)$  appartient à la ligne de niveau  $L_a(f)$ .

#### Proposition 53 (GRADIENT ET NORMALE).

Le vecteur gradient  $\nabla f(x, y)$  est normal à la courbe  $L_a(f)$  au point  $(x, y)$ .

**Preuve :** Faite en cours.

On en déduit alors facilement la proposition suivante.

**Proposition 54** (TANGENTE A UNE COURBE DE NIVEAU).

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable sur  $E$ . L'équation du plan tangent à la courbe de niveau  $L_a(f)$  correspondant à  $f(x, y) = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  en un point  $P_0(x_0, y_0)$  de  $L_a(f)$ , tel que le gradient de  $f$  en ce point soit non nul est donné par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

## 6.2. Le gradient indique la ligne de plus grande pente

Sur le graphe de la fonction  $f$  on prend un point  $(x, y, a)$ . Alors  $(x, y)$  est sur la ligne de niveau  $a = f(x, y)$ .

**Proposition 55** (GRADIENT ET PENTE).

Le vecteur gradient  $\nabla f(x, y)$  indique la direction de plus grande pente positive sur  $\Gamma_f$  à partir d'un point.

**Preuve :** Faite en cours.

**Remarque.**

-En suivant la ligne de plus grande pente dans  $E$  on a sur le graphe, le chemin le plus court à parcourir pour obtenir une variation donnée de  $f$ . Autrement dit, si l'on veut passer le plus vite possible du niveau  $a$  au niveau  $b$  à partir d'un point  $(x, y)$  donné de niveau  $f(x, y) = a$ , il faut suivre le gradient.

On a des résultats similaires pour les surfaces de niveau. Pour cela rappelons ce qu'est l'équation d'un plan dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition 56** (EQUATION D'UN PLAN).

Considérons un plan  $\mathcal{P}$  passant par le point  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  et de vecteur normal  $n = (a, b, c)$ . L'équation cartésienne de ce plan est alors

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

**Preuve :** Faite en cours.

**Proposition 57** (PLAN TANGENT A SURFACE DE NIVEAU).

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable sur  $E$ . L'équation du plan tangent à la surface de niveau  $\mathcal{S}$  correspondant à  $f(x, y, z) = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  en un point  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  de  $\mathcal{S}$ , tel que le gradient de  $f$  en ce point soit non nul est donné par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

**Preuve :** Faite en cours.

## 6.3. Plan tangent à un graphe d'une fonction de 2 variables

Attention ici, il ne faut pas confondre le graphe d'une fonction scalaire (à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ) de deux variables avec la surface de niveau. En effet, dans cette section nous nous intéressons à l'équation du plan tangent à la surface représentant une fonction  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui est donnée par  $f(x, y) = z$  pour tout  $(x, y) \in E$ , où  $z$  est un réel image de  $(x, y)$  par  $f$ . Rappelons que les surfaces de niveau pour une application  $g$  définie sur un domaine de  $\mathbb{R}^3$  la surface est donnée par  $g(x, y, z) = a$ , où  $a$  est un réel.

**Proposition 58** (PLAN TANGENT A UNE SURFACE).

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable sur  $E$ . L'équation du plan tangent à la surface  $\mathcal{S}$  définie par  $f(x, y) = z$ ,  $z \in \mathbb{R}$  en un point  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , où  $z_0 = f(x_0, y_0)$  de  $\mathcal{S}$ , tel que le gradient de  $f$  en ce point soit non nul est donné par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - z + z_0 = 0,$$

*ou encore*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$



# Théorème des accroissements finis

[Michel Rolle (1652-1719) : mathématicien français, à l'origine du célèbre théorème qui porte son nom, qu'il a énoncé pour la première fois en 1691.] [Pierre Varignon (1654-1722) : mathématicien français, à l'origine du formalisme de la définition de vitesse instantanée et d'accélération, un des fondateurs de la mécanique analytique. Il a réussi à convaincre Rolle de l'utilité du calcul infinitésimal.] [René Eugène Gateaux (1889-1914), mathématicien français à l'origine de la dérivée directionnelle portant son nom. ]

FIGURE 5.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à la théorie des accroissements finis.

Ce chapitre est dédié à l'un des résultats fondamentaux du calcul différentiel qui permettra de résoudre pas mal d'exercices. Nous allons commencer par des résultats connus pour des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles. Nous généraliserons un résultat analogue en dimension supérieure (pour l'espace de départ, puis pour l'espace d'arrivée). Nous terminerons enfin ce chapitre par une application.

## 1. Fonction d'une variable réelle à valeurs réelles

**Théorème 7** (RAPPEL : THEOREME DE ROLLE).

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $a < b$ , une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$  telle que  $f(a) = f(b)$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Preuve.** Faite en cours.

**Théorème 8** (EGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS).

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, dérivable sur  $]a, b[$ , où  $a < b$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

**Preuve.** Faite en cours.

## 2. Fonction d'une valeur sur un espace $\mathbb{R}^p$ et à valeurs réelles

Rappelons la définition d'un segment et d'un ensemble convexe (voir section (27)). Nous en aurons en effet besoin tout au long de ce chapitre étant donné que nous formulerons les résultats sur des convexes ouverts inclus dans l'ensemble de définition de  $f$ . Lorsque  $f$  sera définie sur un domaine de  $\mathbb{R}^p$  un tel ensemble sera un intervalle  $I$  du type  $]a, b[$  et si  $f$  est à valeurs sur un domaine de  $\mathbb{R}^p$  on notera cet ensemble convexe  $U$ .

**Définition 48** (SEGMENT).

On appelle segment fermé (respectivement segment ouvert) d'extrémités  $a$  et  $b$  d'une espace  $\mathbb{R}^p$ , l'ensemble

$$[a, b] \text{ (resp. } ]a, b[) = \{ta + (1 - t)b \text{ tel que } t \in [0, 1] \text{ (resp. } t \in ]0, 1[)\}.$$

**Définition 49** (ENSEMBLE CONVEXE).

On dit que  $A \subset \mathbb{R}^p$  est convexe si pour tout  $(a, b) \in A^2$ , le segment fermé  $[a, b] \subset A$ .

**Théorème 9** (DIFFÉRENTIABILITÉ SUR UN CONVEXE).

Soit  $U \subset \mathbb{R}^p$ , convexe et soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  continue, et  $[a, b] \subset U$ . Si  $f$  est différentiable en tout point de  $]a, b[$  alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = df_c(b - a)$ .

**Preuve.** Faite en cours.

**Remarque.**

**ATTENTION!** ce théorème ne s'applique pas au cas des applications  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , où  $q > 1$ , - voir exemple en cours.

### 3. Fonction d'une variable réelle

**Théorème 10** (INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS (1)).

Soit  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et à valeur dans  $\mathbb{R}^q$ . On suppose qu'il existe  $k > 0$  tel que

$$\|f'(t)\|_{\mathbb{R}^q} \leq k \text{ quel que soit } t \in I.$$

Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^q} \leq k|x - y| \text{ quel que soit } (x, y) \in I \times I. \quad (1)$$

**Preuve.** Pas faite en cours.

**Remarque.**

On remarque :

1. que l'on peut avoir une inégalité (1) plus fine en prenant

$$k = \sup_{t \in [0,1]} \|f'(ty + (1-t)x)\|_{\mathbb{R}^q}.$$

On pourra alors dire

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \sup_{t \in [0,1]} \|f'(ty + (1-t)x)\|_{\mathbb{R}^q} |x - y|,$$

pour tous  $x, y \in I$ .

2. que ce résultat s'applique même pour  $x$  et  $y$  au bord de l'intervalle  $I$  à condition que  $f$  soit continue sur l'intervalle fermé  $\bar{I}$  et que l'on ait une estimation de  $f'$  sur l'intervalle ouvert  $I$ .

Résultat un peu plus général.

**Théorème 11** (INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS (2)).

Soit  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et à valeur dans  $\mathbb{R}^q$ . On suppose qu'il existe une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable, telle que

$$\|f'(t)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \varphi'(t) \text{ quel que soit } t \in I.$$

Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^q} \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| \text{ quel que soit } (x, y) \in I \times I.$$

**Preuve.** Pas faite en cours.

## 4. Théorème général

**Théorème 12** (INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS (3)).

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction différentiable sur un ouvert CONVEXE  $U$ . On suppose qu'il existe  $k > 0$  tel que

$$\|df_u\| \leq k \text{ quel que soit } u \in U.$$

Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^q} \leq k \|x - y\|_{\mathbb{R}^p} \text{ quel que soit } (x, y) \in U \times U.$$

**Preuve.** Faite en cours.

**Remarque.**

On peut avoir en fait une inégalité plus fine

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \sup_{t \in [0,1]} \|df_{(x+t(y-x))}\| \|x - y\|_{\mathbb{R}^p}.$$

Et même mieux, par 2. de la Remarque 3, nous avons,

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \sup_{t \in ]0,1[} \|df_{(x+t(y-x))}\| \|x - y\|_{\mathbb{R}^p}.$$

Nous avons en fait un résultat un peu plus général qui ne nécessite pas le fait que  $U$  soit convexe. Il est donné dans la proposition suivante.

**Proposition 59** (INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS (4)).

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^p$ , et soient  $x, y \in U$ , tels que le segment  $[x, y] = \{x + t(y - x), t \in [0, 1]\} \subset U$ .

On suppose que  $f$  est continue sur  $[x, y]$  et différentiable sur  $]x, y[ = \{x + t(y - x), t \in ]0, 1[ \} \subset U$ . Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \sup_{t \in ]0,1[} \|df_{(x+t(y-x))}\| \|x - y\|_{\mathbb{R}^p}.$$

Grâce à cette proposition, nous pouvons démontrer le corollaire suivant.

**Corollaire 2** (FONCTION LIPSCHITZIENNE).

Soit  $U \subset \mathbb{R}^p$  convexe et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si  $M = \sup_{x \in \mathbb{R}^p} \|df_x\| < +\infty$ . Alors  $f$  est  $M$ -lipschitzienne sur  $U$ .

## 5. Application

**Définition 50** (ENSEMBLE CONNEXE).

Un sous-ensemble d'espace topologique  $X$  (par exemple  $\mathbb{R}^n$ ) est dit CONNEXE s'il ne peut s'écrire comme une réunion disjointe de deux ouverts non vides ou de façon équivalente comme réunion disjointe de deux fermés non vides.

Cette définition est équivalente à la définition suivante.

**Définition 51** (ENSEMBLE CONNEXE).

Un sous-ensemble d'un espace topologique  $X$  (par exemple  $\mathbb{R}^n$ ) est dit CONNEXE s'il n'admet pas de sous-ensemble à la fois ouvert et fermé autre que l'ensemble vide et lui-même.

**Théorème 13** (FONCTION CONSTANTE ET DIFFERENTIELLE NULLE).

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ .

1. Si  $f$  est constante sur  $U$ , alors  $f$  est différentiable sur  $U$  et pour tout  $x \in U$   $df_x \equiv 0$ .
2. Si  $U$  est CONNEXE,  $f$  différentiable sur  $U$  telle que  $df_x \equiv 0$ , alors  $f$  est constante sur  $U$ .

**Preuve.** Pas faite en cours.

# Difféomorphismes

## 1. Introduction

Soient  $U$  et  $V$  des OUVERTS ( non vides) de  $\mathbb{R}^p$ .

**Définition 52** (DIFFEOMORPHISME).

On dit qu'une application  $f : U \rightarrow V$  est un difféomorphisme de  $U$  sur  $V$  si et seulement si

1.  $f$  est une bijection,
2.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , c'est à dire continûment différentiable sur  $U$ ,
3.  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $V$ .

**Proposition 60** (DIFFEOMORPHISME ET RECIPROQUE).

Si  $f : U \rightarrow V$  est un difféomorphisme alors sa différentielle est en tout point de  $U$  un isomorphisme (de  $\mathbb{R}^p$  dans lui-même) et la différentielle de sa fonction réciproque  $f^{-1}$  est liée à celle de  $f$  par la formule

$$d(f^{-1})_y = (df_{f^{-1}(y)})^{-1}, \text{ pour tout } y \in V.$$

**Preuve.** Faite en cours.

**Proposition 61** (DIFFEOMORPHISME ET JACOBIENNE).

Si  $f : U \rightarrow V$  est un difféomorphisme alors sa différentielle est en tout point de  $U$  un isomorphisme (de  $\mathbb{R}^p$  dans lui-même) et la différentielle de sa fonction réciproque  $f^{-1}$  est liée à celle de  $f$  par la formule

$$J(f^{-1})_y = (J(f)_{f^{-1}(y)})^{-1}, \text{ pour tout } y \in V.$$

où  $J(f^{-1})_y$  et  $(J(f)_{f^{-1}(y)})^{-1}$  sont respectivement la jacobienne de  $f^{-1}$  en  $y$  et la jacobienne de  $f$  en  $f^{-1}(y)$ .

**Preuve.** Faite en cours.

## 2. Théorème d'inversion locale

**Théorème 14** (THEOREME D'INVERSION LOCALE).

Si

1.  $f : U \rightarrow V$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,
  2.  $a \in U$  est tel que  $df_a$  soit un isomorphisme (de  $\mathbb{R}^p$  dans lui-même),
- alors il existe un voisinage ouvert  $U_a$  de  $a$  dans  $U$  et un voisinage ouvert  $V_b$  de  $b = f(a)$  dans  $V$  tel que la restriction de  $f$  à  $U_a$  soit un difféomorphisme de  $U_a$  sur  $V_b$ .

**Preuve.** Pas faite en cours.

**Corollaire 3** (THEOREME D'INVERSION GLOBALE).

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  avec  $U$  un ouvert non vide. C'est un difféomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$  si et seulement si

1. elle est injective, et
2. sa différentielle est en tout point de  $U$  un isomorphisme (de  $\mathbb{R}^p$  dans lui-même).

**Preuve.** Pas faite en cours.

**Corollaire 4** (FORMULATION AVEC JACOBIENNE).

**Dimension finie.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  injective et de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors  $f$  est un difféomorphisme si et seulement si le déterminant de sa matrice jacobienne (que l'on appelle jacobien de  $f$ ) ne s'annule pas sur  $U$ .

**Preuve.** Pas faite en cours.

### 3. Théorème des fonctions implicites

Le théorème des fonctions implicites concerne la résolution d'équations non-linéaires de la forme

$$f(x, y) = 0,$$

et doit son nom au fait que, sous les hypothèses que l'on va préciser, on peut en tirer  $y$  comme fonction de  $x$  : on dit alors que  $f(x, y) = 0$  définit implicitement  $y$ , ou encore  $y$  comme fonction implicite de  $x$ .

Donnons d'abord une formulation générale (qui peut être utilisée sans passer par les matrices jacobienes), puis un cas particulier de fonctions de  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  pour finalement énoncé le résultat avec les matrices jacobienes.

**Théorème 15** (THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES).

Soient  $E, F$  et  $G$ , trois espaces de dimension finie. Soit  $U$  un ouvert de  $E \times F$  et  $f : U \rightarrow G$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose qu'il existe  $(a, b) \in U$  tel que  $f(a, b) = 0_G$  et la différentielle partielle de  $f$  par rapport à  $y$ ,  $d_2f$  est telle que  $d_2f_{(a,b)}$  soit un isomorphisme de  $F$  sur  $G$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $U_{(a,b)}$  de  $(a, b)$  dans  $U$ , un voisinage ouvert  $W_a$  de  $a$  dans  $E$  et une fonction de classe  $\mathcal{C}^1(W_a, F)$

$$\varphi : W_a \rightarrow F$$

telle que

$$((x, y) \in U_{(a,b)} \text{ et } f(x, y) = 0_G) \Leftrightarrow y = \varphi(x).$$

**Preuve.** Faite en cours.

**Proposition 62** (DIFFERENTIELLES FONCTION IMPLICITE).

Sous les hypothèses du théorème des fonctions implicites, et quitte à réduire  $W_a$  on a

$$d\varphi_x(h) = -(d_2f_{(x,\varphi(x))})^{-1}d_1f_{(x,\varphi(x))}(h)$$

pour tout  $x \in W_a$  et pour tout  $h \in E$ .

**Preuve.** Faite en cours.

**Proposition 63** (FONCTIONS DE  $E \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ).

Soient  $U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $U$  ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ . On suppose qu'il existe  $(a, b) \in U$  tel que  $f(a, b) = 0$  et que  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ . Alors il existe un voisinage  $U_{(a,b)}$  de  $(a, b)$  dans  $U$ , un voisinage ouvert  $W_a$  de  $a$  dans  $U$  et une fonction de classe  $\mathcal{C}^1(W_a, \mathbb{R})$

$$\varphi : W_a \rightarrow \mathbb{R},$$

telle que

$$((x, y) \in U_{(a,b)} \text{ et } f(x, y) = 0) \Leftrightarrow y = \varphi(x),$$

et quitte à réduire  $W_a$  on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \neq 0, \text{ et } \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

**Preuve.** Pas faite en cours.

**Proposition 64** (FONCTIONS DE  $U \subset \mathbb{R}^{p+q} \mapsto \mathbb{R}^q$ ).

Soient  $U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ ,  $U$  ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ . On note  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, q$  les composantes de  $f$  chacune définie de  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $(a, b) \in U$  tel que  $f(a, b) = 0$  et que la matrice définie par les coefficients  $\{(\frac{\partial f_i}{\partial x_{p+j}})(a, b)\}_{1 \leq i, j \leq q}$  est inversible (autrement dit le déterminant de cette matrice est non

nul). Alors il existe un voisinage  $U_{(a,b)}$  de  $(a, b)$  dans  $U$ , un voisinage ouvert  $W_a$  de  $a$  dans  $\mathbb{R}^p$  et une fonction de classe  $\mathcal{C}^1(W_a, \mathbb{R}^q)$

$$\varphi : W_a \rightarrow \mathbb{R}^q,$$

telle que

$$((x, y) \in U_{(a,b)} \text{ et } f(x, y) = 0) \Leftrightarrow y = \varphi(x),$$

et quitte à réduire  $W_a$  on a la jacobienne de  $\varphi$  en  $(x_1, \dots, x_p)$

$$J_\varphi(x_1, \dots, x_p) =$$

$$- \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}}(x, \varphi(x)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+q}}(x, \varphi(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_{p+1}}(x, \varphi(x)) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_{p+q}}(x, \varphi(x)) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x, \varphi(x)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x, \varphi(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(x, \varphi(x)) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(x, \varphi(x)) \end{pmatrix}.$$

**Preuve.** Pas faite en cours.

# Formules de Taylor

[Brook Taylor (1685-1731) : mathématicien britannique, à l'origine de la notion du calcul des différences finies, on lui doit également la méthode d'intégration par parties, et bien entendu, ces célèbres développements en séries que nous étudions ici. Il publia le tout en 1715 dans *Methodus incrementorum directa and reversed.*] [William Henry Young (1863-1942) : mathématicien britannique. L'une des plus importantes contributions fut dans l'étude des fonctions de plusieurs variables qu'il publia dans *The fundamental theorems of the differential calculus* en 1910. On lui doit entre autres la formule du développement de Taylor-Young.] [Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), mathématicien allemand (né en Pologne). On lui doit entre autres l'inégalité de Cauchy-Schwarz mais également le célèbre théorème de Schwarz énoncé dans ce chapitre. ]

FIGURE 7.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés aux différentielles d'ordre supérieures ou égales à 2.

Avant de donner les formules de Taylor, qui dépendent des différentielles d'ordre  $n \geq 1$  dans différents cas de fonctions : fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^q$  et fonctions de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$ , nous allons donner un aperçu de ce qu'est une différentielle d'ordre 2 dans un premier temps, avec un théorème de symétrie important : le théorème de Schwarz. Nous définirons également la matrice Hessienne qui nous servira beaucoup dans le chapitre 8 sur les extrema.

## 1. Applications deux fois différentiables

**Définition 53** (APPLICATIONS DEUX FOIS DIFFÉRENTIABLES).

Une fonction  $f$  définie sur un OUVERT (non vide)  $U \subset \mathbb{R}^p$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^q$  est dite deux fois différentiable en  $x \in U$  si

1. elle est différentiable dans un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$  et si,
2. sa différentielle  $df : U_x \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$  est différentiable en  $x$ .

On dit que  $f$  est deux fois différentiable dans  $U$  si elle est différentiable en tout point de  $U$ .

**Remarque.**

Par sa définition, la différentielle de  $df$  en  $x$ , que l'on écrit  $d(df)_x$  est une application linéaire continue de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$ . Autrement dit, on a

$$df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q),$$

et

$$d(df)_x : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)).$$

Mais elle s'identifie naturellement avec une application linéaire continue sur  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$  (c'est à dire une application bilinéaire continue sur  $\mathbb{R}^p$ ) grâce à la proposition suivante.

**Proposition 65** (HORS-PROGRAMME : ESPACES ISOMÉTRIQUES).

Les espaces  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathcal{L}(\mathbb{R}^q; \mathbb{R}^n))$  et  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q; \mathbb{R}^n)$  munis des normes usuelles sont isométriques.

**Preuve.** Pas faite en cours.

**Définition 54** (DIFFERENTIELLE SECONDE).

La différentielle seconde d'une fonction  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  deux fois différentiable est l'application

$$\begin{aligned} d^2f : U &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q) \\ x &\mapsto d^2f_x \end{aligned}$$

définie par

$$d^2f_x(h, k) = d(df)_x(h)(k) \text{ pour tout } (h, k) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p.$$

**Remarque.**

On peut interpréter cette définition de la façon suivante (qu'on utilise en pratique pour calculer  $d^2f$ ). Si  $f$  est deux fois différentiable sur  $U$ , alors, quel que soit  $k \in \mathbb{R}^p$ , l'application

$$\begin{aligned} g : U &\rightarrow \mathbb{R}^q \\ x &\mapsto df_x(k) \end{aligned}$$

est différentiable et

$$dg_x(h) = d^2f_x(h, k).$$

**Théorème 16** (THEOREME DE SCHWARZ).

Si  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  est deux fois différentiable en  $x$  alors  $d^2f_x$  est une application bilinéaire SYMETRIQUE. Autrement dit, pour tout  $(h, k) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ , on a

$$d^2f_x(h, k) = d^2f_x(k, h).$$

**Preuve.** Pas faite en cours.

## 2. Exemples de différentielles d'ordre 2

Donnons ici quelques différentielles d'ordre 2 pour deux types de fonctions classiques : les applications affines et les applications quadratiques.

1. Une application affine  $f : x \mapsto l(x) + b$  avec  $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$  et  $b \in \mathbb{R}^q$  est deux fois différentiable et sa différentielle seconde est identiquement nulle.
2. Une application quadratique  $f : x \mapsto \phi(x, x)$  avec  $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$  est deux fois différentiable et sa différentielle seconde est constante, et même égale à  $2\phi$  si  $\phi$  est symétrique.

## 3. Matrice Hessienne

**Définition 55** (MATRICE HESSIENNE).

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $(e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ . Si  $f$  est deux fois différentiable sur l'ouvert  $U$  alors pour tout  $x \in U$ , pour tous  $i, j \in \{1, \dots, p\}$

$$d^2f_x(e_i, e_j) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Alors la matrice

$$d^2f_x := \text{Hess } f_x := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(x) \end{pmatrix}$$

est appelée matrice hessienne de  $f$  en  $x$ .

Le théorème de Schwarz montre que les dérivées partielles croisées sont égales, c'est à dire

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$



pour tous  $i, j \in \{1, \dots, p\}$ . Et donc la matrice hessienne est symétrique. Ces dérivées sont en général notées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Par bilinéarité, si  $h$  et  $k$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  de composantes  $(h_1, \dots, h_p)$  et  $(k_1, \dots, k_p)$  respectivement, alors

$$d_x^2 f(h, k) = {}^t h \cdot \text{Hess } f_a \cdot k = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Autrement dit,  $\text{Hess } f_a$  est la matrice de la forme bilinéaire  $d^2 f_a$  par rapport à la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ . L'égalité de Schwarz assure de plus que la matrice hessienne est symétrique.

## 4. Différentielle d'ordre $k$

Pour les entiers  $k \geq 2$ , on définit par récurrence les notions suivantes, qui généralisent le cas  $k = 2$ .

**Définition 56** (APPLICATIONS  $k$ -FOIS DIFFÉRENTIABLES).

Soit une fonction  $f$  définie sur un ouvert (non vide)  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  et à valeurs dans un  $\mathbb{R}^q$ , et  $k$  un entier au moins égal à 2. On dit qu'elle est :

1.  $k$  fois différentiable en  $x \in U$  si sa différentielle  $df : U_x \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$  est  $(k-2)$  fois différentiable dans un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$ , et sa  $(k-1)^{\text{ième}}$  différentielle est différentiable en  $x$ .
2.  $k$  fois différentiable dans  $U$  si elle est  $k$  fois différentiable en tout point de  $U$ .
3. de classe  $\mathcal{C}^k$  si et seulement si sa différentielle est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ .
4. de classe  $\mathcal{C}^\infty$  si elle est de classe de  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $k \geq 1$ .

**Proposition 66** (APPLICATIONS LINEAIRES ET CLASSE  $\mathcal{C}^\infty$ ).

Les applications linéaires continues et plus généralement les applications  $k$ -linéaires continues sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Théorème 17** (COMPOSITION ET CLASSE  $\mathcal{C}^\infty$ ).

Considérons les espaces  $\mathbb{R}^p$ ,  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^q$ . Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $f(U)$ . Si  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  est  $k$  fois différentiable en  $x \in U$  et  $g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  est  $k$  fois différentiable en  $y = f(x) \in V$ , alors  $g \circ f$  est  $k$  fois différentiable en  $x$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $U$  et  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $V$  alors  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Théorème 18** (DIFFEOMORPHISME ET CLASSE  $\mathcal{C}^\infty$ ).

Si  $f$  est un difféomorphisme de  $U$  sur  $V$  et si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  alors  $f^{-1}$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Nous pouvons maintenant donner un résultat qui permettra d'établir de façon nécessaire et suffisante les différentielle d'ordre  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , qui généralisera le cas des différentielles d'ordre 2. Par généralisation du théorème de Schwarz, il vient que si une fonction  $f$  est  $k$  fois différentiable en un point  $x$ , sa différentielle d'ordre  $k$  sera une application  $k$ -linéaire symétrique (nous ne montrerons pas ce résultat ici). Il est donc tout naturel de définir un tel espace dans laa définition ci-dessous après avoir rappelé ce qu'est une permutation.

**Définition 57** (PERMUTATION).

On appelle **permutation** de  $\mathbb{N}$  une bijection de  $\mathbb{N}$  sur  $\mathbb{N}$ .

**Définition 58** (APPLICATIONS SYMETRIQUE).

Soit  $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$  l'espace des applications  $k$ -linéaires continues sur  $(\mathbb{R}^p)^k$ . Une application  $\phi \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$  est dite symétrique si pour tout permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $\{1, \dots, k\}$  et pour tout  $k$ -uplet  $(x_1, \dots, x_k) \in (\mathbb{R}^p)^k$ ,

$$\phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \phi(x_1, \dots, x_k).$$

On notera  $\mathcal{L}_k^s(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$  l'espace des applications  $k$ -linéaires continues et symétriques sur  $(\mathbb{R}^p)^k$ .

Nous pouvons dès lors donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $f$  soit  $k$ -fois différentiable.

**Théorème 19** (CNS APPLICATION DIFFÉRENTIABLE).

Une fonction  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  est  $k$  fois différentiable au point  $x \in U$  si et seulement s'il existe

1. un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$  dans  $U$ ,
2. des fonctions  $d^n f : U_x \rightarrow \mathcal{L}_n^s(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$  pour  $n \leq k-1$ , et
3.  $d^k f_x \in \mathcal{L}_k^s(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$

telles que

1.  $d^1 f = df$  dans  $U_x$ ,
2. pour tout  $n \leq k-2$ ,  $d^n f$  est différentiable sur  $U_x$ , avec pour tout  $y \in U_x$ , et pour tout  $(h_1, \dots, h_{n+1}) \in (\mathbb{R}^p)^{n+1}$  :

$$d^{n+1} f_y(h_1, \dots, h_{n+1}) = d_{n+1} g_{(h_1, \dots, h_n, y)}^{[n]}(h_{n+1})$$

où  $g^{[n]}(h_1, \dots, h_n, y) := d^n f_y(h_1, \dots, h_n)$ , et enfin,

3.  $d^{k-1} f$  est différentiable en  $x$  et

$$d^k f_x(h_1, \dots, h_k) = d_k g_{(h_1, \dots, h_{k-1}, x)}^{[k-1]}(h_k)$$

où  $g^{[k-1]}(h_1, \dots, h_{k-1}, y) := d^{k-1} f_y(h_1, \dots, h_{k-1})$ .

De façon analogue aux différentielles d'ordre 2, nous obtenons que si  $h$  et  $k$  et  $l$  sont trois vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  de composantes  $(h_1, \dots, h_p)$ ,  $(k_1, \dots, k_p)$  et  $(l_1, \dots, l_p)$  respectivement, alors

$$d_x^3 f(h, k, l) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{n=1}^p h_i k_j l_n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_n}(x).$$

Les différentielles d'ordre supérieure à 1 étant définies, nous pouvons nous intéresser désormais aux différents résultats concernant les formules de Taylor. Nous nous intéressons dans la section suivante aux formules de Taylor avec reste intégral, aux formules de Taylor-Lagrange et enfin aux formules de Taylor-Young.

## 5. Formule de Taylor avec reste intégral

### 5.1. Fonction d'une variable réelle à valeur réelle

Commençons cette section par la formule déjà étudiée durant les années précédentes et qui correspond à la formule de Taylor avec reste intégral pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un ouvert non vide, nous avons alors le résultat suivant :

**Théorème 20** (TAYLOR AVEC RESTE INTEGRAL  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ).

Soit  $f \in \mathcal{C}^{p+1}(I, \mathbb{R})$  et  $a, b = a + h \in I$ , alors

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{h^{p+1}}{p!} \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(a + th) dt.$$

**Preuve.** Faite en cours.

Poursuivons ensuite avec les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans  $\mathbb{R}^q$  (fonctions vectorielles).

### 5.2. Fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^q$

Avant de donner les différentes formules de Taylor associées à cette section, nous allons montrer un lemme qui sera une des clés de beaucoup de preuves de ce chapitre. Nous allons également rappeler quelques résultats sur les intégrales de Riemann pour des fonctions définies sur un intervalle  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^q$ .

**Lemme 1** (FORMULE DERIVEE  $n^{ieme}$ ).

Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction  $(n+1)$  fois dérivable. On note  $g^{(k)}$  ses dérivées successives,  $k \in \{1, \dots, n+1\}$ . Alors, pour tout  $t \in I$  on a

$$\frac{d}{dt} \left( g(t) + \sum_{k=1}^n \frac{(1-t)^k}{k!} g^{(k)}(t) \right) = \frac{(1-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t).$$

**Preuve.** Faite en cours.

**Proposition 67** (RAPPEL INTEGRALES).

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$ . Alors l'intégrale de Riemann sur le segment  $[a, b]$  définit une application linéaire continue sur l'espace  $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}^q)$  des fonctions continues sur  $[a, b]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^q$ , muni de la norme sup. Pour tout

$g \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}^q)$ , l'intégrale de Riemann de  $g$  sur le segment  $[a, b]$ , notée  $\int_a^b g(t)dt$ , vérifie l'inégalité

$$\left\| \int_a^b g(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\|dt \leq (b-a) \max_{t \in [a, b]} \|g(t)\|.$$

Quels que soient  $x, y \in [a, b]$ , on a par définition

$$\int_x^y g(t)dt = - \int_y^x g(t)dt,$$

et donc  $\int_x^x g(t)dt = 0$ , et

$$\int_x^y g(t)dt = \int_x^z g(t)dt + \int_z^y g(t)dt,$$

pour tout  $z \in [a, b]$ . De plus l'application  $y \mapsto \int_x^y g(t)dt$  est dérivable et sa dérivée est  $g$ .

Inversement, pour toute primitive  $G$  de  $g$ , on a

$$G(y) - G(x) = \int_x^y g(t)dt.$$

**Preuve.** Pas faite en cours.

**Remarque.**

Dans notre cas, nous sommes en dimension finie  $\mathbb{R}^q$  et pour simplifier  $\int_a^b g(t)dt$  est simplement le vecteur dont les composantes sont  $\int_a^b g_i(t)dt$  où les  $g_i$  sont les  $i \in 1, \dots, q$  sont les composantes de  $g$  dans la base canonique.

On obtient finalement le résultat suivant qui découle directement du lemme 1 :

**Corollaire 5** (LIEN ENTRE DERIVEE ET INTEGRALE).

Si  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $[0, 1]$ , et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{(n+1)}$ , alors

$$g(1) - g(0) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)dt.$$

Nous pouvons alors passer au cas le plus général de cette section qui sont les fonctions de  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^q$ .

### 5.3. Fonction de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$

Pour tout  $h \in \mathbb{R}^p$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on désigne par  $h^{[n]}$  le  $n$ -uplet de vecteurs tous égaux à  $h$ . En appliquant directement le résultat du corollaire 5 à la fonction

$$g : t \mapsto g(t) := f(x + th),$$

nous obtenons immédiatement le théorème suivant :

**Théorème 21** (TAYLOR AVEC RESTE INTEGRAL  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ).

Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ , et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ , alors pour tout  $(x, h) \in U \times \mathbb{R}^p$  tel que le segment  $[x, x + h]$  soit inclus dans  $U$ ,

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f_x(h^{[k]}) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} d^{n+1} f_{x+th}(h^{[n+1]})dt.$$

**Preuve.** Pas faite en cours.

**Remarque.**

Cette dernière formule à l'ordre 2 avec  $p = 1$ , s'écrit

$$f(x + h) = f(x) + df_x(h) + \int_0^1 (1-t) d^2 f_{x+th}(h, h)dt.$$

## 6. Formule de Taylor-Lagrange

### 6.1. Fonction d'une variable réelle à valeur dans $\mathbb{R}^q$

Dans cette section, les hypothèses de régularité de la fonction étudiée seront plus faibles que dans la section précédente (on ne demande plus à la fonction d'être de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ , mais "juste" d'être au-moins  $n+1$ -fois différentiable (ou dérivable si c'est une fonction d'une variable réelle). On perd par contre l'égalité avec le reste intégral précédent pour obtenir une inégalité définie dans les formules de Taylor-Lagrange ci-dessous.

**Proposition 68** (TAYLOR LAGRANGE  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ ).

*Si  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $[0, 1]$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction  $(n+1)$  fois différentiable telle que*

$$\|g^{(n+1)}(t)\| \leq M, \text{ pour tout } t \in [0, 1],$$

*alors*

$$\|g(1) - g(0) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} g^{(k)}(0)\| \leq \frac{M}{(n+1)!}.$$

**Preuve.** Faite en cours.

### 6.2. Fonction de $\mathbb{R}^p$ à valeur dans $\mathbb{R}^q$

**Théorème 22** (TAYLOR LAGRANGE  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ).

1. *Si  $U$  est un ouvert  $\mathbb{R}^p$*
2. *si  $(x, h) \in U \times \mathbb{R}^p$  est tel que le segment  $[x, x+h]$  soit inclus dans  $U$ , et*
3. *si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  est une fonction  $(n+1)$  fois différentiable telle que*

$$\max_{y \in [x, x+h]} \|d^{n+1} f_y\|_{L_{n+1}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)} \leq M,$$

*alors*

$$\|f(x+h) - f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f_x(h^{[k]})\| \leq \frac{M}{(n+1)!} \|h\|^{n+1}.$$

**Preuve.** Faite en cours.

La dernière inégalité qui généralise l'inégalité des accroissements finis, est connue sous le nom de formule de Taylor avec reste de Lagrange, le reste étant cependant connu à travers une majoration contrairement au reste intégral qui est exact.

## 7. Formule de Taylor-Young

Cette formule est valable sous des hypothèses encore moins fortes que dans les deux sections précédentes, et donc, pour cette raison, donne un résultat seulement local.

**Théorème 23** (TAYLOR YOUNG).

*Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  est une fonction  $n$  fois différentiable en  $x \in U$  alors*

$$\|f(x+h) - f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f_x(h^{[k]})\| = o(\|h\|^n).$$

**Remarque.**

Dans l'énoncé de ce théorème, la notation de Landau  $o$  signifie que le membre de gauche divisé par  $\|h\|^n$  tend vers 0 lorsque  $h$  tend vers 0. Il s'agit donc d'un résultat local, qui donne des renseignements sur le comportement de  $f$  au voisinage de  $x$  seulement.

**Preuve.** Faite en cours.

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de deux types d'extrema : les extrema libre et les extrema liés. Les seconds correspondent au cas où les extrema sont justement "liés" à des contraintes. Dans les deux cas, nous pourrions définir ce que l'on appelle extrema locaux (ou relatifs) et les extrema globaux (ou absolus). Il se pourra donc que des minima locaux par exemple ne soit pas globaux si l'on étend le domaine de définition de la fonction  $f$ . Nous ne nous intéresserons également qu'à l'étude de minima (pour simplifier le chapitre) étant donné que les maxima des fonctions  $f$  peuvent être vus comme les minima des fonction  $-f$ . Enfin, nous ne nous intéresserons qu'aux fonctions scalaires (autrement dit les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ).

Avant de commencer par l'étude des extrema libres, faisons quelques petits rappels d'algèbre.

## 1. Rappels d'algèbre

On munit  $\mathbb{R}^p$  d'une norme quelconque notée  $\|\cdot\|$ .

Soit  $B : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bilinéaire symétrique (autrement dit pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^p$ , les applications de  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  définies par  $B(x, \cdot) : y \mapsto B(x, y)$  et  $B(\cdot, y) : x \mapsto B(x, y)$  sont linéaires, et elle est symétrique si pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$  on a  $B(x, y) = B(y, x)$ ).

**Définition 59** (FORME QUADRATIQUE).

On appelle forme quadratique associée à la fonction bilinéaire symétrique  $B$  l'application

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto B(x, x). \end{aligned}$$

On a alors la proposition suivante.

**Proposition 69** (PROPRIÉTÉ FORME QUADRATIQUE).

Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^p$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  on a

$$B(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)],$$

et

$$q(\lambda x) = B(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 B(x, x) = \lambda^2 q(x).$$

**Définition 60** (FORME POSITIVE, NEGATIVE,...).

Une forme quadratique associée  $q$  est dite

1. positive si et seulement si pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$ ,  $q(x) \geq 0$ ,
2. définie positive si et seulement si pour tout  $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ ,  $q(x) > 0$ ,
3. négative si et seulement si pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$ ,  $q(x) \leq 0$ ,
4. définie négative si et seulement si pour tout  $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ ,  $q(x) < 0$ ,

5. elliptique sur  $\mathbb{R}^p$  si et seulement s'il existe  $\alpha > 0$ , tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$ ,

$$q(x) \geq \alpha \|x\|^2. \quad (1)$$

### Remarque.

On remarque qu'en dimension finie,  $q$  est elliptique si et seulement si  $q$  est définie positive. Si on n'est pas en dimension finie (hors programme) on a juste l'"ellipticité" qui implique  $q$  définie positive mais pas la réciproque.

Etant donné que certains résultats d'existence d'extrema font intervenir les matrices Hessiennes (qui sont des matrices symétriques), rappelons ici quelques résultats pour les matrices.

### Définition 61 (MATRICES SYMETRIQUES).

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$$

une matrice carrée,  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ . On dit que  $A$  est symétrique si  $a_{i,j} = a_{j,i}$  pour tout  $i, j = 1, \dots, p$ .

### Définition 62 (FORMES QUADRATIQUES).

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  une matrice symétrique, l'application  $x \in \mathbb{R}^p \mapsto q_A(x) = x^T A x$  est appelée forme quadratique associée à  $A$ .

### Définition 63 (DEFINIE POSITIVE).

Soient  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  une matrice symétrique et  $q_A$  sa forme quadratique associée. La matrice  $A$  est dite :

- SEMI-DEFINIE POSITIVE si  $q_A(x) = x^T A x \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$ ,
- DEFINIE POSITIVE si  $q_A(x) = x^T A x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ ,
- SEMI-DEFINIE NEGATIVE si  $q_A(x) = x^T A x \leq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$ .
- DEFINIE NEGATIVE si  $q_A(x) = x^T A x < 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ .

### Définition 64 ( $k^{\text{ième}}$ MINEUR DOMINANT).

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  une matrice, pour tout  $k = 1, \dots, p$ , on pose

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

la  $k^{\text{ième}}$  sous-matrice principale dominante et  $\Delta_k$  son déterminant de la  $k^{\text{ième}}$  appelé le  $k^{\text{ième}}$  mineur dominant de  $A$ .

On peut prouver facilement si une matrice symétrique est définie positive grâce au résultat suivant.

### Théorème 24 (DEFINIE POSITIVE).

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  une matrice symétrique, alors  $A$  est DEFINIE POSITIVE si et seulement si l'une des propriétés suivantes est satisfaite :

1.  $\Delta_k > 0$  pour tout  $k = 1, \dots, n$ ,
2.  $A$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont strictement positives.

**Preuve.** Pas faite en cours.

### Remarque.

1) On remarque que si une matrice  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  une matrice symétrique est DEFINIE POSITIVE on a les propriétés suivantes :

- tous les coefficients diagonaux de  $A$  sont des réels strictement positifs,
  - le déterminant de  $A$  est strictement positif (c'est à dire que  $A$  est inversible),
  - il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que  $x^T A x \geq \alpha \|x\|^2$ , pour n'importe quelle norme  $\|\cdot\|$ ,
- 2) Une matrice symétrique réelle est dite définie négative si son opposée (symétrique elle aussi) est définie positive.

## 2. Extrema libres

**Définition 65** (MINIMUM LOCAL ET GLOBAL).

Si  $f$  est une fonction définie sur une partie  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  et à valeurs réelles, un point  $a \in U$  est un minimum local (ou relatif) de  $f$  s'il existe un voisinage  $V_a$  de  $a$  ouvert dans  $U$  tel que

$$f(x) \geq f(a) \text{ pour tout } x \in V_a.$$

On dira que  $a$  est un minimum global (ou absolu) de  $f$  si

$$f(x) \geq f(a) \text{ pour tout } x \in U.$$

Un minimum est dit strict si l'inégalité est stricte, c'est à dire  $f(x) > f(a)$ , pour tout  $x \neq a$  (que ce soit local ou global).

**Définition 66** (POINT CRITIQUE).

Soient  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^p$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable en  $a \in U$ . On dit que  $a \in U$  est un point critique de  $f$  si  $df_a = 0$ .

**Remarque.**

1. Noter que si  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in U$  est un point critique de  $f$  si  $f'(a) = 0$ .
2. Nous allons voir dans la proposition suivant qu'un extremum est un point critique, mais attention, la réciproque est fautive. Ce n'est pas parce que l'on a un point critique que c'est un extremum. Par exemple, 0 est un point critique de  $f : x \mapsto x^3$  et pourtant ce n'est pas un extremum sur  $\mathbb{R}$ .

Dans toute la suite, nous allons donner des critères nécessaires (et on l'espère quelques fois suffisants) pour trouver l'existence de ces extrema locaux selon le degré de différentiabilité de la fonction  $f$ .

### 2.1. Conditions nécessaires du premier ordre

Rappelons ici un résultat pour les applications de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 70** (RAPPEL : EXTREMA ET POINT CRITIQUE).

Soit  $I$  un intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ . Si  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en  $a \in I$  et si  $f$  admet un extremum local en  $a$  alors  $f'(a) = 0$ .

Si l'on passe maintenant dans un cadre plus général des fonctions de  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous obtenons le résultat suivant.

**Proposition 71** (REGLE DE FERMAT).

Soient  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^p$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable en  $a \in U$ . Si  $f$  est un extremum local en  $a$  alors  $df_a = 0$  (autrement dit,  $a$  est un point critique), ce qui revient à dire que pour tout  $i = 1, \dots, p$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ , ou encore le gradient de  $f$  en  $a$  est nul.

**Remarque.**

Attention :

1. La condition précédente n'est pas suffisante car  $a$  peut être un point critique de  $f$  sans pour autant que  $f$  possède d'extremum local.
2. La condition  $U$  ouvert est importante. En effet, il se peut que  $f$  admette un extremum sur un domaine  $U$  inclus dans  $\mathbb{R}^p$  alors que ses dérivées partielles ne s'annulent pas sur  $U$ . Ce qui nous ramène au rappel suivant (voir la remarque de la section 7).

**Proposition 72** (EXTREMA SUR UN COMPACT).

Soit  $f : K \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^p$ , une fonction continue alors  $f$  atteint ses extrema dans  $K$ .

**Preuve.** Pas faite en cours.

## 2.2. Conditions du second ordre

Dans cette section nous allons non seulement donner des conditions nécessaires mais également suffisantes qui permettront d'identifier des minima locaux dans le cas où la fonction admet des différentielles secondes.

Commençons comme dans la section précédente par les fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Proposition 73** (RAPPEL : EXTREMA ET POINT CRITIQUE).

*Soit  $I$  un intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ . Si  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en  $a \in I$  et si  $f$  admet un MINIMUM local en  $a$  alors  $f'(a) = 0$  (comme on l'a vu dans la section suivante), mais si de plus  $f$  est deux fois dérivable en  $a$  alors  $f''(a) \geq 0$ .*

*Inversement : Si  $b \in I$  est tel que  $f'(b) = 0$  et  $f''(b) > 0$  alors  $b$  est un minimum local de  $f$ .*

**Preuve.** Pas faite en cours.

**Remarque.**

Attention !

1. Les conditions  $f'(a) = 0$  et  $f''(a) \geq 0$  ne sont pas suffisantes ! On a besoin d'avoir  $f''(a) > 0$ . On pourrait par exemple le voir avec  $f : x \mapsto x^3$  en  $x = 0$ .
2. D'autre part, la condition  $f''(a) > 0$  n'est pas nécessaire (autrement dit on peut avoir  $f''(a) \geq 0$ ). On pourrait par exemple le voir avec  $f : x \mapsto x^4$  en  $x = 0$ .

Passons ensuite aux fonctions de  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Proposition 74** (MINIMA LOCAUX ORDRE 2).

*Soient  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^p$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable en  $a \in U$ . Si  $f$  est un extremum local en  $a$  alors  $df_a = 0$  (comme on l'a vu dans la règle de fermat) mais si de plus  $f$  est deux fois différentiable en  $a$  alors  $d^2f_a(h, h) \geq 0$  pour tout  $h \in \mathbb{R}^p$ .*

*Inversement, si  $b \in U$  est telle que  $df_b = 0$  et s'il existe  $C > 0$  tel que  $d^2f_b(h, h) \geq C\|h\|^2$ , pour tout  $h \in \mathbb{R}^p$  alors  $b$  est un minimum local de  $f$ .*

**Remarque.**

1. On retrouve ici la notion de coercivité donnée dans le rappel tout au début de ce chapitre puisque  $d^2f_a$  est une application bilinéaire symétrique (d'après le théorème de Schwarz).
2. Comme nous sommes en dimension finie, la condition "s'il existe  $C > 0$  tel que  $d^2f_b(h, h) \geq C\|h\|^2$ , pour tout  $h \in \mathbb{R}^p$ " revient à dire "s'il existe  $C > 0$  tel que  $d^2f_b(h, h) > 0$ , pour tout  $h \in \mathbb{R}^p \setminus 0_{\mathbb{R}^p}$ " (car la coercivité est équivalent à dire que la fonction bilinéaire symétrique est définie positive en dimension finie).
3. Ce résultat peut s'interpréter facilement avec les matrices Hessiennes. C'est ce que nous allons voir dans la section suivante.

## 2.3. Critères avec les matrices Hessiennes

**Théorème 25** (HESSIENNE ET EXTREMA LOCAUX).

*Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois différentiable sur  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^p$ , et  $a \in U$  un point critique de  $f$ . Alors la Hessienne de  $f$ ,  $\text{Hess}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique et*

1. *si  $\text{Hess}f_a$  est DEFINIE POSITIVE alors  $a$  est un minimum local strict de  $f$  sur  $U$ ,*
2. *si  $\text{Hess}f_a$  est SEMI-DEFINIE POSITIVE alors  $a$  est un minimum local de  $f$  sur  $U$ ,*
3. *si  $\text{Hess}f_a$  est DEFINIE NEGATIVE alors  $a$  est un maximum local strict de  $f$  sur  $U$ ,*
4. *si  $\text{Hess}f_a$  est SEMI-DEFINIE POSITIVE alors  $a$  est un maximum local de  $f$  sur  $U$ ,*
5. *S'il existe un  $l$  tel que  $\Delta_{2l} < 0$ , ou s'il existe  $m$  tel que  $\Delta_1 \cdot \Delta_{2,m} < 0$ , alors  $A$  est indéfinie.*

**Preuve.** Pas faite en cours.

**Remarque.**

Pour appliquer ces résultats, il est utile d'utiliser les rappels d'algèbre du début de ce chapitre parmi lesquels : déterminer si  $\text{Hess}f_a$  est définie négative ou positive revient à déterminer les valeurs propres de  $\text{Hess}f_a$ .

1. Si toutes les valeurs propres sont  $> 0$ ,  $\text{Hess}f_a$  est définie positive.



2. Si toutes les valeurs propres sont  $< 0$ ,  $\text{Hess } f_a$  est définie négative.
3. Si les valeurs propres de  $\text{Hess } f_a$  sont non nulles mais de signes différents, on dit que  $a$  est un point col (ou un point selle).

Nous pouvons également donner des résultats sur les extrema globaux :

**Théorème 26** (EXTREMA GLOBAUX ET HESSIENNE).

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ , et  $f$  est deux fois différentiable sur  $U$ , soit  $a \in U$  un point critique de  $f$ , alors si

$$(x - a)^T \cdot \text{Hess } f(a) \cdot (x - a) \geq 0 \text{ (resp. } \leq 0),$$

pour tout  $x \in U$ , alors  $a$  est un minimum global de  $f$  sur  $U$  (resp. maximum global), et si les inégalités sont strictes les extrema sont stricts.

**Preuve.** Pas faite en cours.

## 2.4. Cas particulier où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Dans le cas où  $p=2$  ( $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , ce que l'on utilisera le plus souvent en exercice), nous utiliserons la notation de Monge qui nous sera bien utile, et plus rapide en général que les critères de section précédentes.

**Théorème 27** (NOTATION DE MONGE).

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois différentiable sur  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , et  $(a, b) \in U$  un point critique de  $f$ . On pose

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), \quad \text{et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

Alors

1. si  $rt - s^2 > 0$  et  $r > 0$ ,  $(a, b)$  est un minimum local de  $f$  sur  $U$ ,
2. si  $rt - s^2 > 0$  et  $r < 0$ ,  $(a, b)$  est un maximum local de  $f$  sur  $U$ ,
3. si  $rt - s^2 < 0$  la fonction n'admet pas d'extremum local, on dit alors que  $(a, b)$  est un point SELLE ou COL.

**Preuve.** Pas faite en cours.

## 3. Extrema liés

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la recherche des extrema sous certaines contraintes. Il paraît normal donc de définir ce que sont des contraintes.

### 3.1. Contraintes

**Définition 67** (CONTRAINTES).

Si  $f$  et  $g_1, \dots, g_k$  sont des fonctions définies sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , un point  $a \in U$  tel que  $g_1(a) = 0, \dots, g_k(a) = 0$  est un minimum local de  $f$  sous les contraintes  $g_1, \dots, g_k$  s'il existe un voisinage  $V_a$  de  $a$  tel que

$$f(x) \geq f(a)$$

pour tout  $x \in V_a$  et  $g_1(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0$ .

### 3.2. Extrema liés avec une seule contrainte

Commençons par les fonctions d'un espace  $\mathbb{R}^2$  avec une seule contrainte :

**Théorème 28** (EXTREMA LIÉS ET GRADIENTS).

Soient  $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , soit  $(a, b) \in U$  tels que

1.  $f$  soumise à la contrainte  $g(x, y) = 0$  admette un extremum au point  $(a, b)$ ,

2.  $\nabla g(a, b) \neq 0$ , alors il existe un nombre réel  $\lambda \neq 0$  tel que  $\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$ . Autrement dit, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \\ g(a, b) = 0. \end{cases}$$

**Preuve.** Pas faite en cours.

### 3.3. Extrema liés avec plusieurs contraintes

En généralisant le cas précédent, on peut donner les résultats sous les formes suivantes pour  $k$  contraintes.

**Définition 68** ( $\Gamma$  REGULIER).

Soit  $g : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^k$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ . On dit que  $\Gamma$  est régulier (ou encore qu'il satisfait à la condition de qualification non dégénérée) si pour tout  $a \in \Gamma$ ,  $dg_a : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^k$  est surjective.

**Remarque.**

Si  $g : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1$ ) (cas où l'on a une seule contrainte) la condition signifie seulement que pour tout  $a \in \Gamma$ ,  $dg_a \neq 0$ .

On retrouve sans surprise le résultat de la section précédente à une seule contrainte :

**Théorème 29** (EXTREMA LIÉS (UNE CONTRAINTE)).

Soient  $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , soit  $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$  régulière. Si  $a \in \Gamma$  est un extremum local de  $f|_{\Gamma}$ , alors il existe un unique  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$df_a + \lambda dg_a = 0.$$

**Preuve.** Pas faite en cours.

N.B. : Le réel  $\lambda$  est appelé multiplicateur de Lagrange.

Regradons maintenant ce qu'il se passe quand on a  $k$  contraintes.

**Théorème 30** (EXTREMA LIÉS ( $k$  CONTRAINTES)).

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $g : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^k$ , et  $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$  régulière. Si  $a \in \Gamma$  est un extremum local de  $f|_{\Gamma}$ , alors il existe un unique  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$  tel que

$$df_a + \sum_{i=1}^k \lambda_i (dg_i)_a = 0.$$

Si jamais on est mal à l'aise avec la notion de  $\Gamma$  régulière, il suffit juste de voir le résultat précédent de la façon suivante :

1. on suppose que les fonctions  $f$  et  $g_1, \dots, g_k$  définies de  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  sont continûment différentiables.
2. on dit que les contraintes  $g_1, \dots, g_k$  sont indépendantes au point  $a \in U$  si la famille de formes linéaires continues  $\{(dg_1)_a, \dots, (dg_k)_a\}$  est libre (ce qui revient exactement à dire que  $g$  est  $\Gamma$  régulière. Alors on a le résultat suivant équivalent au théorème précédent :

**Théorème 31** (CONDITION NECESSAIRE MINIMUM SOUS  $k$  CONTRAINTES).

Soient  $f$  et  $g_1, \dots, g_k$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  définies sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^p$  d'un à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $a \in U$  tel que  $g_1(a) = 0, \dots, g_k(a) = 0$  et les contraintes  $g_1, \dots, g_k$  sont indépendantes au point  $a$ . Si  $a$  est un minimum local de  $f$  sous les contraintes  $g_1, \dots, g_k$ , alors il existe des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tels que

$$df_a = \lambda_1 (dg_1)_a + \dots + \lambda_k (dg_k)_a.$$

**Preuve.** Pas faite en cours.

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont liés à des problèmes d'extremum essentiellement sur des ouverts : et il est à noter que les conditions nécessaires d'extremum local sont fausses lorsque  $U$  n'est pas un ouvert.

Nous allons dans la section suivante considérer des problèmes d'extremum sur des sous-ensemble convexes de  $E$ .

## 4. Convexité et minima

L'avantage de travailler sur des ensembles convexes avec des fonctions convexes (que l'on définit ci-dessous) c'est que lorsqu'il y a équivalence entre extremum local et global. Et du coup, l'étude des extrema se simplifie grandement dans le sens où l'on n'a pas besoin de chercher un extremum global parmi les extrema locaux.

**Définition 69** (FONCTION CONVEXE).

Un sous-ensemble  $C$  d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  est dit convexe si pour tous  $x, y \in C$ , pour tout  $\theta \in [0, 1]$ ,  $\theta x + (1 - \theta)y \in C$ . Une fonction  $f$  est définie sur un convexe  $C$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est dite convexe, si pour tous  $x, y \in C$ , pour tout  $\theta \in [0, 1]$ ,

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y).$$

Elle est dite strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte lorsque  $x \neq y$  et  $\theta \in ]0, 1[$ .

**Théorème 32** (FONCTION CONVEXE).

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  et soit  $C$  un sous-ensemble convexe de  $U$ . Alors  $f|_C$  est convexe si et seulement si, pour tous  $x, y \in C$ ,

$$f(y) \geq f(x) + df_x(y - x).$$

Elle est strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte pour  $x \neq y$ . En supposant en outre que  $f$  est deux fois différentiable,  $f|_C$  est convexe si et seulement si, pour tous  $x, y \in C$

$$d^2 f_x(y - x, y - x) \geq 0.$$

Elle est strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte pour  $x \neq y$ .

**Preuve.** Pas faite en cours.

**Théorème 33** (CONVEXITE ET MINIMUM).

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  et soit  $C$  un sous-ensemble convexe de  $U$ .

1. Si  $f|_C$  est convexe et admet un minimum local dans  $C$ , c'est un minimum global.
2. Si  $f|_C$  est strictement convexe alors elle admet au plus un minimum, et c'est un minimum strict.
3. Si  $f$  est différentiable, une condition nécessaire pour qu'un point  $a \in C$  soit un minimum de  $f|_C$  est

$$df_a(y - a) \geq 0,$$

pour tout  $y \in C$ . Si de plus  $f|_C$  est convexe, cette condition est également suffisante.

**Preuve.** Pas faite en cours.