به نام خدا

پرهام پیشرو

۹۷۱۸۱۳۰۸۰

موضوع: پی یر دو فرما

Pierre de Fermat

کلیات

نام کامل:	پییر دوفرما (به فرانسوی: Pierre de Fermat)
زمان تولد:	بین ۳۱ اکتبر و ۶ دسامبر ۱۶۰۱ میلادی
محل تولد:	مونتوبان فرانسه (به فرانسوی: Montauban)
رشته های فعالیت:	حقوق و ریاضیات
محل تحصیل:	دانشگاه اورلئان فرانسه (به فرانسوی: Universite d'Orleans)
محل کار:	کلژ دوفرانس پاریس (به فرانسوی: College de France)
زمان وفات:	۱۲ ژانویه ۱۶۶۵ میلادی
محل وفات:	کستر فرانسه (Caster)
دلایل شهرت:	اصل فرما، اعداد فرما، نقطه فرما، قضایای کوچک و بزرگ

زندگی نامه

پیِر دوفرما(Pierre de Fermat) درسال ۱۶۰۱ میلادی در نزدیکی مونتوبان فرانسه متولد شد. او فرزند یک تاجر ثروتمند چرم بود و تحصیلات اولیه خود را در منزل گذراند. سپس برای احراز پست قضاوت به تحصیل حقوق پرداخت. فرما لیسانس حقوق خود را از دانشگاه اورلئان درسال ۱۶۲۶ میلادی دریافت کرد. او بعدها درسال۱۶۳۱ به عنوانِ مشاور در پارلمان محلی شهر تولوز(Toulouse) انتخاب شد.

او باوجود علاقه بسیاری که به ریاضیات داشت هرگز به صورت رسمی و حرفه ای به این علم نپرداخت؛ اما با این حال، بسیاری او را بزرگترین ریاضی دان قرن هفدهم می دانند. در سال ۱۶۵۲، فرما به طاعون مبتلا شد، که در آن زمان در بسیاری از شهرها و کشورها بیداد می کرد. با این وجود، او موفق شد از این بیماری وحشتناک نجات یابد. پس از آن، فرما ۱۳سال دیگر زندگی کرد و در سن ۶۴ سالگی در شهر کَستر(Caster) درگذشت.

فرما و ریاضیات

فرما حقوق دان برجسته ای بود که برای تفریح به ریاضیات می پرداخت. او اغلب زمان های فراغتش را در خلوت خود به مطالعه ریاضیات و حل مسائل ریاضی می پرداخت. گرچه فرما یک ریاضی دان تمام وقت نبود؛ اما در همان اوقات فراغت چنان دست آوردهای خیره کننده ای به جهان ریاضیات عرضه کرد که می توان او را در زمره بزرگ ترین ریاضی دانان تاریخ به حساب آورد.

فرما، استاد بی بدیل نظریه اعداد بود و در توسعه ی نظریه احتمالات و همین طور شکل گیری حسابان نیز بسیار تأثیر گذاشت. او ظاهراً اولین کسی بود که از طریق معادله $f'(x) = 0$ نقاط ماکزیمم و مینیمم یک تابع را به دست آورد. همچنین او یک روش کلی برای یافتن مماس بر نقطه‌ای از یک منحنی که مختصات دکارتی آن معلوم باشد، ابداع کرد. از دیگر زمینه های مورد علاقه او می توان استفاده از هندسه تحلیلی در مقادیر بی نهایت کوچک یا بزرگ را نام برد.

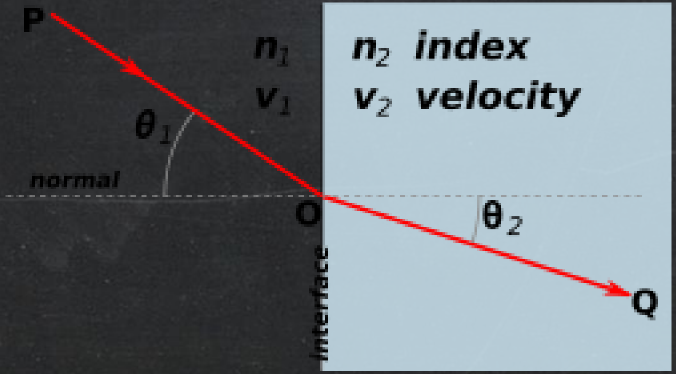
او با ریاضی دانان برجسته زمان خودش ارتباط داشت و بر نحوه تفکر دانشمندان هم دوره اش تأثیرگذار بود. با مکاتباتی که با پاسکال داشت، اساس علم احتمالات را پی ریزی کرد. سهم او در پیشرفت شاخه های مختلف ریاضی، آنقدر زیاد است که او را بزرگ ترین ریاضی دان قرن هفدهم می دانند.

Fermat’s Axiome اصل فرما

<u>اصل فرما</u> یا **<u>اصل کوتاه‌ترین زمان</u>** اصلی است که بیان می‌دارد که مسیر پیموده‌شده بین دو نقطه توسط یک پرتو نور مسیری خواهد بود که بتوان در کوتاه‌ترین زمان پیمود. این اصل گاهی به عنوان تعریف پرتو نور نیز بکار می‌رود. با این وجود این نسخه از تعریف عمومی نیست؛ یک بیان نوین‌تر از این اصل به این صورت است که پرتوهای نور، مسیر نوریِ ثابتی را می‌پیمایند.

از اصل فرما می‌توان برای تشریح ویژگی‌های پرتوهای نوری که از سطح آینه‌ها بازتاب می‌شوند، شکست نور و بازتابِ کلی استفاده کرد.

این اصل توسط فرما در سال ۱۶۵۷ میلادی کشف شد.



Fermat’s Numbers اعداد فرما

عدد فرما عددی صحیح و مثبت است به صورت $F_n = 2^{2^n} + 1$ که در آن n عددی صحیح و نامنفی است.
فرما که اغلب حدس هایش برای ریاضی دانان درخور توجه و قابل اعتماد بود، مشاهده کرد که با گذاشتن چند عدد ۰و۱ و۲و۳و۴ به جای n در فرمول بالا F اول می شود؛ به همین علت ادعا می کرد که همه اعدادی که از رابطه بالا به دست می آیند، اول هستند.

$$n = 0 \Rightarrow F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$$
$$n = 1 \Rightarrow F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$$
$$n = 2 \Rightarrow F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$$
$$n = 3 \Rightarrow F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$$
$$n = 4 \Rightarrow F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$$

نقض ادعای فرما

MATH

لئونارد اویلر در سال ۱۷۳۲ میلادی نشان داد که F_5 مرکب است. این یکی از اشتباهات معدود ولی بزرگ فرما بود.

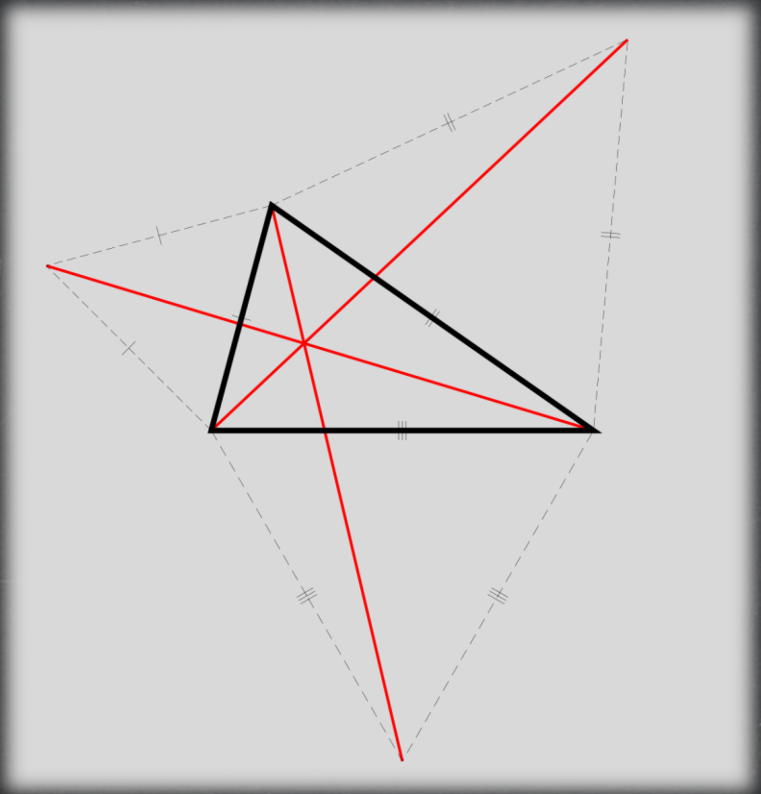
$$n = 5 \Longrightarrow F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4{,}294{,}967{,}297$$

$$641 = 625 + 16 = 5^4 + 2^4 \Rightarrow (5^4 + 2^4)\big|(5^4 + 2^4)2^{28} = 5^4 2^{28} + 2^{32}$$
$$\Rightarrow 641|(5^4 2^{28} + 2^{32}) \qquad \text{I}$$
$$641 = 640 + 1 = 5 \times 2^7 + 1 \Rightarrow (5 \times 2^7 + 1)|(5 \times 2^7 + 1)(5 \times 2^7 - 1) = 5^2 2^{14} - 1$$
$$\Rightarrow 641\big|(5^2 \times 2^{14} - 1)(5^2 \times 2^{14} + 1) \Rightarrow 641|(5^4 2^{28} - 1) \qquad \text{II}$$

$$\overset{I,II}{\Longrightarrow} 641\,\Big|(5^4 2^{28} + 2^{32}) - (5^4 2^{28} - 1) = 2^{32} + 1 = F_5 \Rightarrow 641\big|F_5$$
$$\Rightarrow F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

Fermat’s Point نقطه فرما

نقطه فرما به نقطه ای درون مثلث می گویند که کمترین مجموعِ فواصل از رئوس را دارد.



نحوه پیدا کردن نقطه فرما:

الف) اگر مثلث دارای یک زاویه بزرگتر یا مساوی۱۲۰درجه باشد؛ در این صورت، نقطه فرما رأس زاویه منفرجه است.

ب) اگر مثلث هیچ زاویه بزرگتر یا مساوی ۱۲۰درجه نداشته باشد؛ به صورت زیر عمل می کنیم:

- ❖ روی دو ضلع دلخواه مثلث داده شده مثلث های متساوی الاضلاع رسم کنید.
- ❖ از هر راس جدیدی که به دست آمده خطی را به راس مقابل آن در مثلث اصلی رسم کنید.
- ❖ این دو خط در نقطه ی فرما برخورد خواهند داشت.

قضیه کوچک Little Theorem

قضیه کوچک فرما بیان می کند که اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد که $p \nmid a$ در این صورت

$$a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$$

پیِر دوفرما اولین بار این قضیه را در ۱۸ اکتبر سال ۱۶۴۰ میلادی با دوست و محرم اسرار خود فرانکل بِسی مطرح کرد. طبق معمول فرما این ادعا را اثبات نکرد و تنها بیان کرد که این گزاره درست است. نخست لئونارد اویلر درسال ۱۷۳۶ اثباتی برای این قضیه منتشر کرد؛ اما مشخص شد که لایبنیتز اثباتی مشابه را در یک دست نوشته منتشر نشده از قبل در حدود سال ۱۶۸۳ انجام داده است. اصطلاح قضیه کوچک فرما(Fermat's Little Theorem) اولین بار درسال ۱۹۱۳ توسط کورت هنسل(برای تمایز با قضیه آخر فرما) استفاده شد.

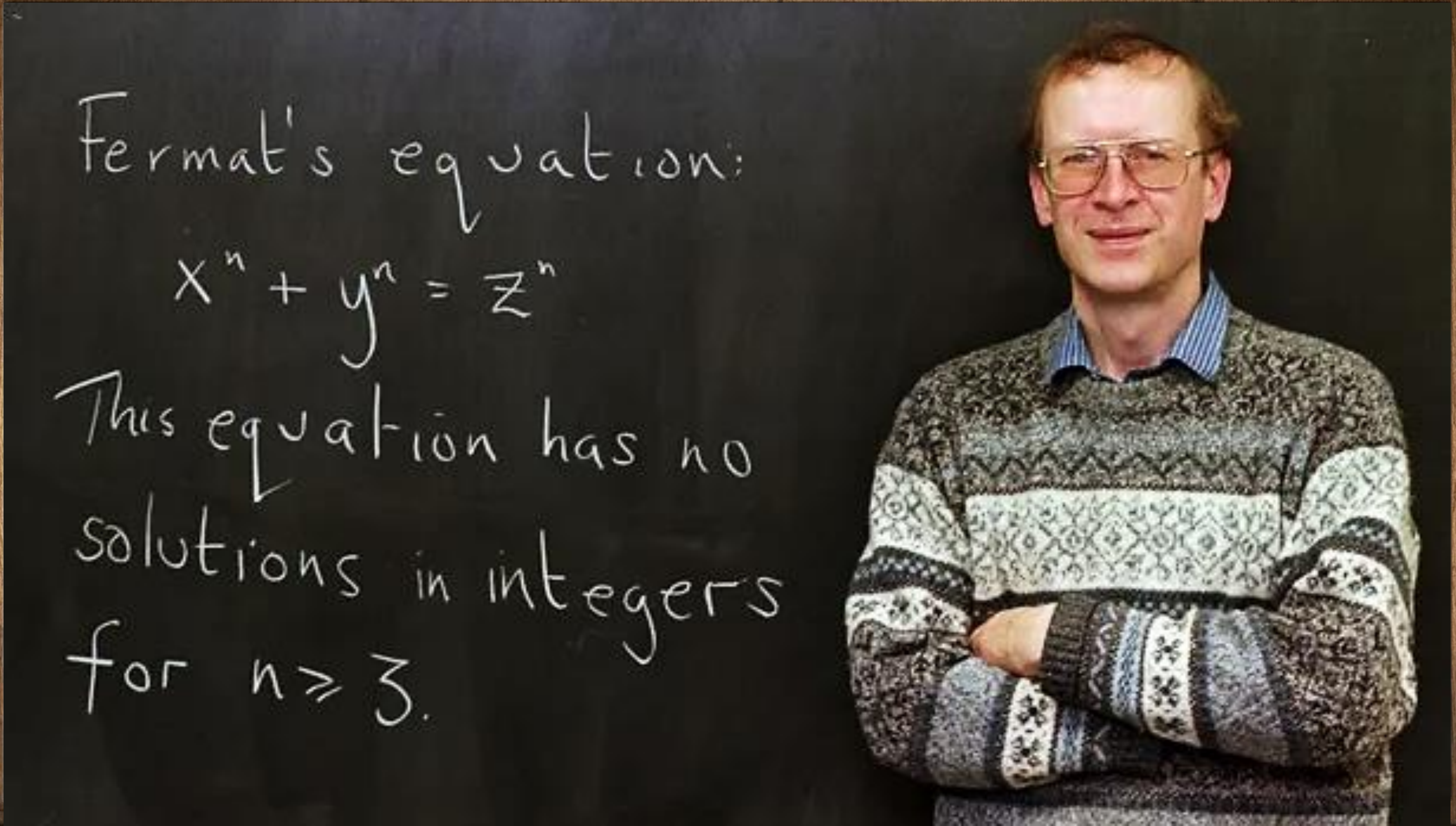
همچنین ریاضی دانان چینی نیز به طور مستقل (قبل از میلاد) فرضیه هایی شبیه قضیه کوچک فرما را بیان کرده اند که معمولاً تحت عنوان فرضیه های چینی شناخته می شوند. این فرضیه بیان می کند p اول است اگر و فقط اگر

$$2^{p} \equiv 2(mod\ p)$$

جنجالی ترین مسئله تاریخ ریاضی

«راه اثبات حیرت‌انگیزی برای این قضیه دارم، حیف که جا نیست!»

فرما


Fermat's equation:
$x^n + y^n = z^n$
This equation has no
solutions in integers
for $n \geq 3$.

$$x^n + y^n = z^n$$

در یکی از روزهای سال ۱۶۳۷ میلادی، فرما مشغول مطالعه ی کتاب آریثمتیکا(Arithmetica) اثر دیوفانتوس(Diophantus)، ریاضی دان بزرگ یونانی قرن سوم میلادی بود. در بخشی از این کتاب، مسئله ی چگونگی پیدا کردن ریشه های صحیح مثبت معادله مشهور فیثاغورس مطرح شده بود. معادله $x^2 + y^2 = z^2$ دارای بی نهایت ریشه ی صحیح مثبت است که اصطلاحاً به آن ها «اعداد سه گانه فیثاغورسی» گفته می شود.

با مطالعه این بخش از کتاب، ناگهان ایده ای در ذهن فرما شکل گرفت؛ این که با تبدیل توان دو در معادله فیثاغورس به توانی بزرگ تر، معادله جدید فاقد ریشه صحیح مثبت خواهد شد.

به این ترتیب، فرما ایده ی خود را به صورت قضیه ی زیر در حاشیه کتاب آریثمتیکا یادداشت کرد.

اما نکته عجیب تر، جمله دیگری بود که او در حاشیه کتاب اضافه کرده بود: « اثبات شگفت انگیزی برای این قضیه دارم، اما حیف که جا نیست! »

$$x^n + y^n = z^n$$

سرانجام فرما درسال ۱۶۶۵میلادی چشم برجهان بست و راز این اثبات شگفتاور را با خود به گور برد.

1665

$$x^n + y^n = z^n$$

دست نوشته فرما در میان انبوه نوشته ها و کتاب های او به فراموشی سپرده شد و به مدت ۳۰ سالِ تمام، کسی خبری از آن نداشت. تا این که سرانجام درسال ۱۶۷۰ میلادی، ساموئل پسر فرما نسخهِ کتاب آریثمتیکای دیوفانتوس(که حاوی حاشیه نویسی های فرما بود) را پیدا و منتشر کرد. تنها یکَ اثبات مرتبط با این قضیه درون کتاب وجود داشت؛ اثبات حالت خاص $n = 4$. بررسی و اثبات این حالت خاص $n = 4$ توسط خود فرما، کافی بود تا مشخص شود که اگر حدس او برای یک توان n غلط باشد؛ آنگاه برای یک n کوچک تر هم غلط خواهد بود، لذا تنها مقادیر اول n نیاز به بررسیِ بیشتر داشتند.

از همان زمان، ریاضی دانان بزرگ جهان، تلاش برای اثبات این قضیه را آغاز کردند. به عنوان مثال، لئونارد اویلر(Leonhard Euler) آن قدر از دست و پنجه نرم کردن بی نتیجه با این قضیه فرما، خسته شده بود که یکی از دوستانش را به خانه قدیمی فرما فرستاد تا با اجازه ی صاحب خانه، تمامِ خانه را برای پیدا کردن چیزی مربوط به این قضیه بگردد. اما این جست و جو هم بی نتیجه ماند. سرانجام خود اویلر در قرن هجدهم نهایتاً توانست قضیه را فقط برای حالت $n = 3$ اثبات کند.

1742

MATH

$$x^n + y^n = z^n$$

درسال ۱۸۲۵میلادی نیز لُژاندر(Legendre) و دیریکله(Dirichlet)، به طور مستقل از هم موفق شدند درستی قضیه را برای حالت $n = 5$ اثبات کنند. حدود یک دهه بعد، در سال ۱۸۳۹، گابریل لامه(Gabriel Lame) موفق شد آن را برای حالت $n = 7$ نیز اثبات کند.

در این میان، شاید موفقیت آمیزترین تلاش از آنِ سوفی ژرمن(Sophie Germain)، بانویِ ریاضی دان فرانسوی باشد که در اوایل قرن نوزدهم، ثابت کرد قضیه آخر فرما، برای تمامی n هایِ بزرگتر از ۲، که در آن هم n و هم $2n + 1$ اعداد اول هستند، صادق است.

ارنست کومر(Ernst Kummer) نیز رهیافت سوفی ژرمن را توسعه داد تا شامل کلیه اعداد اول منظم شد. دیگر ریاضی دانان براساس کارهای کومر و با کمک گیری از محاسبات پیشرفته رایانه ها، توانستند اثبات مورد نظر را به توان های تمام اعداد اول کوچک تر از ۴میلیون بسط دهند؛ اما اثباتی برای تمام توان ها دست نیافتنی به نظر می رسید.

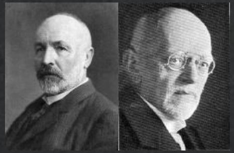
MATH

1839

$$x^n + y^n = z^n$$

در آغاز قرن بیستم، یعنی سال ۱۹۰۸، پائول ولفشکِل که یک کارخانه دار ثروتمند آلمانی بود، برای اثبات این قضیه جایزه۱۰۰هزار مارکی تعیین کرد.فقَط در یکی از شهرهای آلمان، طی ۳ سال،هزاران راه حل طرح شد که پس از بررسی همه آن ها رد می شدند. پس از جنگ جهانی اول، مبلغ جایزه که به علت تورم، جذابیت خود را از دست داده بود، توسط جامعه ریاضی دانان افزایش یافت.

سال ها گذشت و گذشت اما هیچ یک از ریاضی دانان بزرگ قرن بیستم، از جورج کانتور(Georg Cantor) گرفته تا دیوید هیلبرت(David Hilbert)، همچون دیگر ریاضی دانان برجسته ی دو قرن قبل، نتوانستند اثبات عمومی آخرین قضیه فرما را بیابند.



1908

$$x^n + y^n = z^n$$

در حدود سال ۱۹۵۵، گورو شیمورا(Goro Shimura) و یوتاکا تانیاما(Yutaka Taniyama) ریاضی دانان ژاپنی احتمال دادند که ارتباطی بین خم های بیضوی و فرم های مدولار، دو قلمرو کاملاً متفاوت ریاضیات، وجود داشته باشد. در آن زمان حدس این دو، به حدس شیمورا-تانیاما شناخته می شد(که در نهایت به نام قضیه مدولاریتی شناخته شد).

این حدس خود هویتی مستقل داشت و ظاهراً هیچ ارتباطی هم با آخرین قضیه فرما پیدا نمی کرد.

حدس شیمورا-تانیاما به خودی خود، مهم تر از قضیه فرما تلقی می شد ولی اثبات حالت کلی این حدس نیز همچون قضیه فرما، غیرممکن، بسیار سخت و یا حداقل براساس دانش موجود آن زمان دست نیافتنی به شمار می رفت.

1955

$$x^n + y^n = z^n$$

درسال۱۹۸۴، گرهارد فری(Gerhard Frey) متوجه یک ارتباط ظاهری بین این دو مسئله(حدس شیمورا-تانیاما و قضیه آخر فرما) شد، مسائلی که پیش از این غیرمرتبط و حل نشده بودند. فری به طور اجمالی نشان داد که می توان این ارتباط را اثبات نمود.

اثبات کامل ارتباط نزدیک این دو مسئله در سال ۱۹۸۶ توسط کن ریبت(Ken Ribet)، براساس اثباتی جزئی از ژان پیر سره(Jean-Pierre Serre) انجام شد. ژان پیر سره تمام قسمت ها به جز قسمتی که به نام حدس اپسیلون شناخته می شد را اثبات کرده بود و کن ریبت با تکمیل اثبات ژان به ارتباط بین حدس شیمورا-تانیاما و قضیه فرما رسید.

این ارتباط اولین مسیری بود که توسط آن، قضیه فرما می توانست توسعه یافته و برای تمام اعداد، نه فقط بخش خاصی از اعداد، اثبات شود.

1986

$$x^n + y^n = z^n$$

از طرفی دیگر اندرو وایلز(Andrew Wiles) که برای اولین بار در سال ۱۹۶۳ با قضیه فرما آشنا شده بود؛ پس از شنیدن درستی اثبات ارتباط فری، با پشتوانه ای که از کار کردن با خم های بیضوی به دست آورده بود، تصمیم گرفت تا با اثبات حدس تانیاما-شیمورا، راهی برای اثبات قضیه فرما بیابد. او درسال۱۹۸۶ کار متمرکزش روی این معمای به ظاهر حل نشدنی را کلید زد و هر روز، بدون توجه به صحبت دیگر ریاضی دانان، ساعت ها از وقت خود را در پشت میز کار، به کلنجار رفتن با آن سپری کرد.هفت سال تمام به همین منوال سپری شد تا سرانجام در یکی از روزهای زیبای بهار سال ۱۹۹۴، وایلز به این نتیجه رسید که پاسخ معما را پیدا کرده است.

پس از رفع نواقص راه حل با کمک دیگر ریاضی دانان، سرانجام اثبات نهایی در سال ۱۹۹۹میلادی به دنیا ارائه گردید.دستاور وایلز به طور گسترده در رسانه های عمومی گزارش شد و در کتاب ها و برنامه های تلویزیونی معروف شد. بخش های باقی مانده ی حدس شیمورا-تانیاما پس از مقاله وایلز توسطِ دیگر ریاضی دانان براساس کار وایلز بین سال های ۱۹۹۶ و ۲۰۰۱ اثبات شد و درنهایت به قضیه یِ مدولاریتی معروف گردید.

2001

چند سوال درمورد قضیه فرما

- آیا ادعای فرما مبنی بر یافتن اثبات این قضیه طاقت فرسا، درست بوده یا صرفا یک ادعای واهی و پوچ کرده؟

- در اثبات قضیه فرما از ریاضیات پیشرفته ای استفاده شده که هیچ یک در زمان فرما وجود نداشتند؛ پس فرما چگونه راه حلی برای اثبات ادعای خود پیدا کرده؟

- اثبات قضیه فرما بسیار طولانی بوده است؛ فرما چگونه راه حلی ساده برای این قضیه پیدا کرده بود؟

- اگر اثبات خود فرما ارائه می شد، آیا ممکن بود که اشکال و یا اشتباهی داشته باشد یا خیر؟

اثباتی کوچک برای قضیه بزرگ

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\xrightarrow{n=2} x^2 + y^2 = z^2$$

$$\xrightarrow{x=p-q\ ,\ z=p+q} (p-q)^2 + y^2 = (p+q)^2$$

$$\Rightarrow y^2 = (p+q)^2 - (p-q)^2$$

$$\Rightarrow y^2 = p^2 + 2pq + q^2 - p^2 + 2pq - q^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 4pq$$

$$\xrightarrow{p=a^2\ ,q=b^2} y = 2ab$$

$$x = a^2 - b^2\ , y = 2ab\ , z = a^2 + b^2$$

جدول اعداد فیثاغورسی

n=2		a^n-b^n	$2ab$	a^n+b^n	
a	b	x	y	z	$x^n+y^n=z^n$
2	1	3	4	5	25
3	1	8	6	10	100
4	1	15	8	17	289
6	1	35	12	37	1,369
8	1	63	16	65	4,225
10	1	99	20	101	10,201
3	2	5	12	13	169
4	2	12	16	20	400
5	2	21	20	29	841
7	2	45	28	53	2,809
9	2	77	36	85	7,225
4	3	7	24	25	625
5	3	16	30	34	1,156
8	3	55	48	73	5,329
10	3	91	60	109	11,881
12	3	135	72	153	23,409
14	3	187	84	205	42,025

		a^n-b^n	$2ab$	a^n+b^n	
a	b	x	y	z	$x^n+y^n=z^n$
5	4	9	40	41	1,681
7	4	33	56	65	4,225
9	4	65	72	97	9,409
6	5	11	60	61	3,721
8	5	39	80	89	7,921
10	5	75	100	125	15,625
7	6	13	84	85	7,225
8	7	15	112	113	12,769
9	8	17	144	145	21,025
10	9	19	180	181	32,761
11	10	21	220	221	48,841
14	11	75	308	317	100,489
15	12	81	360	369	136,161
16	13	87	416	425	180,625
17	14	93	476	485	235,225
51	29	1,760	2,958	3,442	11,847,364
…	…	…	…	…	…

تعمیم روش

$$y^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 - (p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - p^3) \Longrightarrow y^3 = 6p^2q + 2q^3$$

تعمیم روش به ازای n های مختلف:

$$y^n = z^n - x^n = (p+q)^n - (p-q)^n$$

$$(p+q)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k$$

$$(p-q)^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^{n-k} q^k$$

$$y^n = 2 \sum_{k=1} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k$$

کتاب ها و فیلم ها

سایت

https://mathigon.org

منابع

www.wikipedia.org
kamranb.ir
epmath.ir
onthisday.com
hupaa.com
riazidanan.blogfa.com

wikijoo.ir
theguardian.com
abadgar-q.com
wikizero.com
balatarin.com

mathroom.loxblog.com
sedma-med.blogfa.com
daneshname.roshd.ir
mathmag.blogsky.com
hassandinbali.blogfa.com
math.irancircle.com

کتاب تاریخ ریاضیات – هاوارد د.ایوز
کتاب آخرین قضیه فرما – سایمون سینگ