

به نام خالق دانش

۴۰۱۱۳۰۹۰۱۲

پرهام پیشرو

تمرین تحویلی از فصل ۱۷ کتاب all of statistics

۳. فرض کنید X ، Y و Z توزیع های توأم زیر را داشته باشند:

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$.۴۰۵	.۰۴۵
$X = 1$.۰۴۵	.۰۰۵

$Z = 0$

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$.۱۲۵	.۱۲۵
$X = 1$.۱۲۵	.۱۲۵

$Z = 1$

(الف) توزیع شرطی X و Y با شرط $Z = 0$ و همچنین با شرط $Z = 1$ بیابید.

(ب) نشان دهید که $X \perp\!\!\!\perp Y|Z$.

(ج) توزیع حاشیه‌ای X و Y را بیابید.

(د) نشان دهید که X و Y مستقل حاشیه‌ای نیستند.

(الف)

$$P(Z = 0) = 0/405 + 0/045 + 0/045 + 0/005 = 0/5$$

$$P(Z = 1) = 0/125 + 0/125 + 0/125 + 0/125 = 0/5$$

$$f_{X,Y|Z}(x, y|z) = P(X, Y|Z) = \frac{P(X, Y \cap Z)}{P(Z)} \Rightarrow$$

$$P(X = 0, Y = 0|Z = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0, Z = 0)}{P(Z = 0)} = \frac{0/405}{0/5} = 0/81$$

$$P(X = 0, Y = 1|Z = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 1, Z = 0)}{P(Z = 0)} = \frac{0/045}{0/5} = 0/09$$

$$P(X = 1, Y = 0|Z = 0) = 0/09, \quad P(X = 1, Y = 1|Z = 0) = 0/01$$

$$P(X = \cdot, Y = \cdot | Z = 1) = \cdot/25, \quad P(X = \cdot, Y = 1 | Z = 1) = \cdot/25$$

$$P(X = 1, Y = \cdot | Z = 1) = \cdot/25, \quad P(X = 1, Y = 1 | Z = 1) = \cdot/25$$

	$Y = \cdot$	$Y = 1$	$f_X(x)$
$X = \cdot$	$\cdot/81$	$\cdot/9$	$\cdot/9$
$X = 1$	$\cdot/9$	$\cdot/1$	$\cdot/1$
$f_Y(y)$	$\cdot/9$	$\cdot/1$	

$Z = \cdot$

	$Y = \cdot$	$Y = 1$	$f_X(x)$
$X = \cdot$	$\cdot/25$	$\cdot/25$	$\cdot/5$
$X = 1$	$\cdot/25$	$\cdot/25$	$\cdot/5$
$f_Y(y)$	$\cdot/5$	$\cdot/5$	

$Z = 1$

ب) طبق تعریف ۱۷،۱، برای $X \amalg Y | Z$ داریم:

$$f_{X,Y|Z}(x, y|z) = f_{X|Z}(x|z)f_{Y|Z}(y|z)$$

حال، با توجه به جداول قسمت (الف) می‌توان نوشت که:

$$f_{X,Y|Z}(x = \cdot, y = \cdot | z = \cdot) = f_{X|Z}(x = \cdot | z = \cdot)f_{Y|Z}(y = \cdot | z = \cdot) \Rightarrow \cdot/81 = \cdot/9 \times \cdot/9$$

$$f_{X,Y|Z}(x = \cdot, y = 1 | z = \cdot) = f_{X|Z}(x = \cdot | z = \cdot)f_{Y|Z}(y = 1 | z = \cdot) \Rightarrow \cdot/9 = \cdot/9 \times \cdot/1$$

$$f_{X,Y|Z}(x = 1, y = \cdot | z = \cdot) = f_{X|Z}(x = 1 | z = \cdot)f_{Y|Z}(y = \cdot | z = \cdot) \Rightarrow \cdot/9 = \cdot/1 \times \cdot/9$$

$$f_{X,Y|Z}(x = 1, y = 1 | z = \cdot) = f_{X|Z}(x = 1 | z = \cdot)f_{Y|Z}(y = 1 | z = \cdot) \Rightarrow \cdot/1 = \cdot/1 \times \cdot/1$$

$$f_{X,Y|Z}(x = \cdot, y = \cdot | z = 1) = f_{X|Z}(x = \cdot | z = 1)f_{Y|Z}(y = \cdot | z = 1) \Rightarrow \cdot/25 = \cdot/5 \times \cdot/5$$

$$f_{X,Y|Z}(x = 1, y = \cdot | z = 1) = f_{X|Z}(x = 1 | z = 1)f_{Y|Z}(y = \cdot | z = 1) \Rightarrow \cdot/25 = \cdot/5 \times \cdot/5$$

$$f_{X,Y|Z}(x = \cdot, y = 1 | z = 1) = f_{X|Z}(x = \cdot | z = 1)f_{Y|Z}(y = 1 | z = 1) \Rightarrow \cdot/25 = \cdot/5 \times \cdot/5$$

$$f_{X,Y|Z}(x = 1, y = 1 | z = 1) = f_{X|Z}(x = 1 | z = 1)f_{Y|Z}(y = 1 | z = 1) \Rightarrow \cdot/25 = \cdot/5 \times \cdot/5$$

همان طور که در بالا مشاهده شد، تمامی روابط برای تعریف استقلال شرطی برقرار هستند؛ پس $X \amalg Y | Z$.

(ج)

	$Y = \cdot$	$Y = 1$	$f_X(x)$
$X = \cdot$	$\cdot/53$	$\cdot/17$	$\cdot/7$
$X = 1$	$\cdot/17$	$\cdot/14$	$\cdot/3$
$f_Y(y)$	$\cdot/7$	$\cdot/3$	

(د) همانند قسمت (ب)، طبق تعریف ۱۷,۱ باید روابط زیر برقرار باشند که البته اینگونه نخواهد بود:

$$f_{X,Y}(x = \cdot, y = \cdot) = f_X(x = \cdot)f_Y(y = \cdot) \Rightarrow \cdot/53 \neq \cdot/7 \times \cdot/7$$

$$f_{X,Y}(x = \cdot, y = 1) = f_X(x = \cdot)f_Y(y = 1) \Rightarrow \cdot/17 \neq \cdot/7 \times \cdot/3$$

$$f_{X,Y}(x = 1, y = \cdot) = f_X(x = 1)f_Y(y = \cdot) \Rightarrow \cdot/17 \neq \cdot/3 \times \cdot/7$$

$$f_{X,Y}(x = 1, y = 1) = f_X(x = 1)f_Y(y = 1) \Rightarrow \cdot/14 \neq \cdot/3 \times \cdot/3$$