

توابع مختلط دکتر رضی

پرهام طالبیان

۱۴۰۳ آذر ۶

فهرست مطالب

۳	۱ یادآوری
۳	۱.۱ اعداد مختلط
۳	۱.۱.۱ ویژگی ها
۵	۲.۱.۱ شناسه یا آرگومان
۶	۳.۱.۱ توان عدد مختلط
۶	۲.۱ همسایگی
۷	۳.۱ نقطه درونی
۷	۴.۱ مجموعه باز
۷	۱.۴.۱ نقطه خارجی
۷	۲.۴.۱ نقطه مرزی
۷	۵.۱ نقطه حدی
۷	۶.۱ مجموعه بسته
۷	۷.۱ بستار مجموعه
۸	۸.۱ صفحه مختلط توسعه یافته
۹	۹.۱ نگاشت مختلط
۱۰	۲ فصل دوم
۱۰	۱.۲ حد
۱۱	۲.۲ پیوستگی
۱۱	۳.۲ پیوستگی یکنواخت
۱۲	۴.۲ مشتق
۱۲	۵.۲ معادلات کشی-ریمان
۱۴	۶.۲ معادلات کشی-ریمان در مختصات قطبی
۱۴	۷.۲ تابع تحلیلی
۱۵	۸.۲ نقطه تکین
۱۵	۹.۲ تابع همساز
۱۵	۱۰.۲ رابطه همسازی برای تابع تحلیلی در نمایش قطبی

۱۶	توابع مقدماتی	۱۱.۲
۱۶	تابع نمایی	۱.۱۱.۲
۱۶	خواص تابع نمایی	۲.۱۱.۲
۱۷	توابع مثلثاتی	۳.۱۱.۲
۱۷	خواص توابع مثلثاتی	۴.۱۱.۲
۱۷	توابع هایپربولیک	۵.۱۱.۲
۱۸	خواص توابع هایپربولیک	۶.۱۱.۲
۱۸	تابع لگاریتم	۷.۱۱.۲
۲۰	نمایی کسری	۸.۱۱.۲
۲۰	تبدیل خطی	۱۲.۲

۲۲	انتگرال	۳
۲۲	خم پیوسته یا کمان	۱.۳
۲۲	منحنی ساده	۲.۳
۲۳	کمان ساده هموار	۳.۳
۲۳	انتگرال خط	۴.۳
۲۴	کاربرد انتگرال خط	۵.۳
۲۶	دامنه همبند ساده	۶.۳
۲۶	فرمول انتگرال کشی	۷.۳
۲۷	تعمیم فرمول انتگرال کشی	۸.۳
۲۸	نامساوی کشی	۹.۳

۳۰	دنباله و سری های مختلط	۴
۳۴	سری توانی	۱.۴
۳۴	سری تیلور	۲.۴
۳۴	سری مکلاورن	۳.۴
۳۴	نمایش سری مکلاورن توابع خاص	۴.۴
۳۵	تکین ها	۵.۴
۳۵	تکین تنها	۶.۴
۳۵	تکین غیر تنها	۷.۴
۳۵	تکین غیر تنها از نوع انباشتگی	۸.۴
۳۶	سری لوران	۹.۴
۳۸	انواع نقاط تکین تنها	۱۰.۴

فصل ۱

یادآوری

۱.۱ اعداد مختلط

فرض کنید

$$\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y), x, y \in \mathbb{R}\}$$

حاصلضرب دکارتی اعداد حقیقی باشد در اینصورت مجموعه اعداد مختلط که با \mathbb{C} نمایش داده می‌شود عبارت از \mathbb{R}^2 به همراه اعمال جبری زیر:

۱. عمل جمع

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

۲. عمل ضرب

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

۳. عمل ضرب اسکالر

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y), \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{C} = \{x + iy, x, y \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$$

۱.۱.۱ ویژگی‌ها

۱. هر دو عدد مختلط یک زوج مرتب $z = (x, y)$ می‌باشد که

$$x = \operatorname{Re}(z) \quad y = \operatorname{Im}(z)$$

۲. برای هر عدد مختلط $z = (x, y)$ قدرمطلق z به صورت زیر تعریف می‌شود

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

۳. مزدوج عدد مختلط $z = (x, y)$ ، \bar{z} به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\bar{z} = (x, -y)$$

۴. برای هر عدد مختلط z داریم:

$$z\bar{z} = |z|^2$$

۵. قسمت حقیقی و موهومی عدد مختلط $z = x + iy$ بر حسب z و \bar{z} به صورت زیر است

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

۶. تقسیم $\frac{z_1}{z_2}$ به صورت زیر است

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

بین اعداد مختلط و زیر مجموعه ماتریس ها تناظر یک به یک به صورت زیر برقرار است.

$$a + ib \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

اگر $a + ib \neq 0$ آن گاه

$$a + ib \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \Leftrightarrow |a + ib| \exp^{i\phi}$$

که شامل یک دوران با اندازه ϕ حول مبدا و یک تجانس با ضریب $\sqrt{a^2 + b^2}$ می‌باشد. همچنین برای ضرب در عدد مختلط هم ارزی های زیر را داریم:

$$(a + ib) \times (x + iy) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

مثال: فرض کنید $k > 0$ ، z_1 و z_2 اعداد مختلط ثابتی باشند. مکان هندسی $k = \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right|$ را مشخص کنید.

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right|^2 = k^2 \Leftrightarrow \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right) \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z} - \bar{z}_2} \right) = k^2$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - 1)z\bar{z} + (z_1 - k^2 z_2)\bar{z} + (\bar{z}_1 - k^2 \bar{z}_2)z - z_1 \bar{z}_1 + k^2 z_2 \bar{z}_2 = 0$$

اگر $k \neq 1$ آنگاه معادله فوق معادله یک دایره است که توسط رابطه زیر مشخص می‌شود

$$\left| z - \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2} \right| = \frac{k}{|1 - k^2|} |z_1 - z_2|, \quad z_1 \neq z_2$$

اگر $k = 1$

$$(z_1 - z_2)\bar{z} + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)z - z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 0 \Leftrightarrow |z - z_1| = |z - z_2|$$

که معادله عمود منصف خطی است که z_1 را به z_2 وصل می‌کند.
نکته: دو بردار z_1 و z_2 را موازی گویند هر گاه عدد حقیقی غیر صفر k وجود داشته باشد بطوریکه

$$z_1 = k z_2 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 = k |z_2|^2 \Rightarrow \operatorname{Im}\{z_1 \bar{z}_2\} = 0$$

دو بردار z_1 و z_2 عمود بر هم گویند اگر و تنها اگر عدد حقیقی غیر صفر k وجود داشته باشد بطوریکه $z_1 = k z_2 e^{i\frac{\pi}{2}}$

۲.۱.۱ شناسه یا آرگومان

اندازه ای از زاویه θ که بردار غیر صفر z با محور حقیقی مثبت می‌سازد یک شناسه یا آرگومان نامیده می‌شود و با $\arg z$ نمایش داده می‌شود

$$\cos(\arg z) = \frac{\operatorname{Re}\{z\}}{|z|} \quad \sin(\arg z) = \frac{\operatorname{Im}\{z\}}{|z|}$$

$\operatorname{Arg} z$ را برای مقدار مشخص و منحصر به فرد از

$$-\pi < \arg z \leq \pi \quad \text{or} \quad 0 \leq \arg z < 2\pi$$

به کار می‌بریم این مقدار θ به مقدار اصلی شناسه مرسوم است.
 برای هر عدد حقیقی θ داریم

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

برای عدد مختلط z نیز برابر است یعنی $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ نمایش قطبی اعداد مختلط:

$$z = x + iy = |z|(\cos(\operatorname{Arg} z) + i \sin(\operatorname{Arg} z)) = r(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i \operatorname{Arg} z} = re^{i\theta}$$

۳.۱.۱ توان عدد مختلط

برای عدد مختلط غیر صفر $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ توان n ام به فرمول دموآر مدوف است به صورت زیر داریم

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n \exp^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$$

مثال: مقدار $(1 - i)^{16}$ را بدست آورید.

$$1 - i = \sqrt{1^2 + (-1)^2} e^{i(-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \Rightarrow (1 - i)^{16} = \sqrt{2}^{16} (\cos(-\frac{16\pi}{4}) + i \sin(-\frac{16\pi}{4})) = 2^8 (1 + 0i) = 2^8$$

ریشه عدد مختلط

عدد مختلط z را در نظر بگیرید عدد مختلط w را ریشه n ام z می گیریم هرگاه $w^n = z$

$$z = r e^{i\theta} = r (\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$$

$$w = \sqrt[n]{r} (\cos \frac{2k\pi + \theta_0}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta_0}{n}); k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

مثال: ریشه معادله $z^4 - 1 = i$ را بدست آورید.

$$z^4 = 1 + i = \sqrt{2} (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}))$$

$$z = \sqrt[4]{2} (\cos \frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{4} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{4}); k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = \sqrt[4]{2} (\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16})$$

$$z_1 = (\cos \frac{2\pi + \frac{\pi}{4}}{4} + i \sin \frac{2\pi + \frac{\pi}{4}}{4}) = \sqrt[4]{2} (\cos \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16})$$

$$z_2 = z_3$$

۲.۱ همسایگی

یک همسایگی عدد حقیقی x_0 فاصله ای به شکل $(x_0 - r, x_0 + r)$ است که r یک عدد حقیقی و مثبت است.

$$N_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < r\} \subseteq \mathbb{R}$$

۳.۱ نقطه درونی

نقطه درونی z_0 را نقطه درونی $S \subseteq \mathbb{C}$ گوئیم هرگاه همسایگی از z_0 داشته باشد که درون S است.

۴.۱ مجموعه باز

مجموعه $S \subseteq \mathbb{C}$ را باز گوئیم هرگاه دو نقطه آن درونی باشد.

۱.۴.۱ نقطه خارجی

نقطه z_0 را نقطه خارجی $S \subseteq \mathbb{C}$ گوئیم هرگاه یک همسایگی z_0 در مجموعه S نباشد.

۲.۴.۱ نقطه مرزی

نقطه z_0 را نقطه مرزی مجموعه $S \subseteq \mathbb{C}$ گوئیم هرگاه نه نقطه داخلی و نه نقطه خارجی باشد.

۵.۱ نقطه حدی

نقطه z_0 را نقطه حدی $S \subseteq \mathbb{C}$ گوئیم هرگاه

$$\forall r > 0 \quad N_r(z_0) \cap S \setminus \{z_0\} \neq \emptyset$$

۶.۱ مجموعه بسته

مجموعه $S \subseteq \mathbb{C}$ بسته است هرگاه شامل همه نقاط حدی اش باشد.

۷.۱ بستار مجموعه

بستار مجموعه $S \subseteq \mathbb{C}$ را با \bar{S} نمایش می‌دهند و شامل نقاط S و نقاط حدی S است.

۸.۱ صفحه مختلط توسعه یافته

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\mp\infty\}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad \text{مثال:}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z (|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \left(\frac{1}{|z|} < \delta\right) \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} = w_0 \quad \text{در کامپلکس ها منفی نداریم چون ترتیب ندارد.}$$

$$d(x, y) = |x| + |y| \quad d(x, y) = |x + y|$$

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \left(\frac{1}{|z|} < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon\right)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \quad \text{مثال:}$$

$$\forall > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z, (|z - z_0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{f(z)} < \epsilon)$$

نکته:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{f(z)}\right) = 0$$

۹.۱ نگاشت مختلط

فرض کنید S یک مجموعه باشد تابع مختلط w را از متغیرهای $z = x + iy$ به صورت

$$f : S \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$g : S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$w = g(t) = x(t) + iy(t) = (x(t), y(t))$$

نمایش می‌دهیم.

تابع $w = f(z)$ تک‌مقداری است اگر به ازای هر مقدار از z در حوزه تعریف S یک و تنها یک مقدار به w نسبت داده می‌شود.
مثال

۱. تابع $w = f(z) = z^2$ تک‌مقداریست.

۲. تابع $Arg(z)$ تک‌مقداری است.

۳. $|z|$, $Re\{z\}$, $Im\{z\}$ تک‌مقداریست.

تعریف: تابع $w = f(z)$ چندمقداری است اگر برای بعضی یا تمام مقادیر z در حوزه تعریف S , مقادیر مختلفی به w نسبت داده شود.
مثال:

۱. تابع $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$

$$z = i \quad (i)^{\frac{1}{2}} = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$

۲. تابع چندمقداری $k \in \mathbb{Z}$ $\arg z = 2k\pi + Argz$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

فصل ۲

فصل دوم

۱.۲ حد

فرض کنید تابع $w = f(z)$ در همه نقاط z از یک همسایگی محذوف z_0 تعریف شده باشد حد تابع $w = f(z)$ در نقطه z_0 را با نماد

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

نمایش می دهیم و بدان معنی است که

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z > 0 (|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon)$$

نکته: وقتی که $z \rightarrow z_0$ ممکن است z در امتداد مسیر های مختلف به z_0 نزدیک شود در صورت وجود حد ، حاصل تمامی حدود باهم برابر هستند.

مثال: ثابت کنید نگاشت $f(z) = \text{Arg} z$ روی قسمت منفی محور حقیقی حد ندارد.
اثبات: فرض کنید $z_0 \in (-\infty, 0)$

$$z_n = z_0 + \frac{i}{n} \quad ; \quad z'_n = z_0 - \frac{i}{n}$$

$$f(z_n) = \text{Arg}(z_n) = \arctan\left(\frac{1}{nz_0}\right) = n$$

$$f(z'_n) = \text{Arg}(z'_n) = \arctan\left(\frac{-1}{nz_0}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{nz_0}\right) = -n$$

۲.۲ پیوستگی

تابع $f : S \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ در نقطه z_0 پیوسته است هرگاه

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

مثال: پیوستگی تابع زیر را در $z_0 = (0, 0)$ را بررسی کنید.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{z} & z \neq (0, 0) \\ 1 & z = (0, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{z \rightarrow (0,0)} f(z) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-iy}{iy} = -1$$

$$\lim_{z \rightarrow (0,0)} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

حد نداریم.

• روش دوم (قطبی):

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$\lim_{z \rightarrow (0,0)} f(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r(\cos \theta - i \sin \theta)}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)}{(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)}{(\cos \theta + i \sin \theta)}$$

حد ندارد.

۳.۲ پیوستگی یکنواخت

تابع $w = f(z)$ را در ناحیه \mathbb{R} پیوسته یکنواخت می‌گوییم

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z_1, z_2 (|z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon)$$

مثال: تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ روی مجموعه $R = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$ پیوسته یکنواخت نیست.

مثال: تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ روی مجموعه

$$R_\eta = \{z \in \mathbb{C}; |z| \geq \eta, \eta > 0\}$$

پیوسته یکنواخت هست.

۴.۲ مشتق

فرض کنید تابع $f(z) = w$ را در دامنه $D \subseteq \mathbb{C}$ در این صورت مشتق $f(z)$ در نقطه z_0 که آن را با $f'(z_0)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

مثال: نشان دهید تابع $f(z) = \bar{z}$ در صفحه مختلط مشتق پذیر نیست. فرض کنید $z_0 \in \mathbb{C}$ دلخواه باشد $z_0 = x_0 + iy_0$ ، $z = x + iy$

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}$$

$$\stackrel{x=x_0, z=x_0+iy}{=} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x_0 - iy - x_0 + iy_0}{x_0 - iy - x_0 - iy_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{-iy + iy_0}{iy - iy_0} = -1$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \stackrel{y=y_0, z=x+iy_0}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - iy_0 - x_0 + iy_0}{x - iy_0 - x_0 - iy_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

۵.۲ معادلات کشی-ریمان

تابع $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ مشتق پذیر باشد آنگاه معادلات زیر برقرار است.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \end{cases}$$

شرط لازم مشتق پذیری در نقطه (x_0, y_0)

$$\begin{cases} u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) = v_x(z_0) \end{cases}$$

مشتق تابع در نقطه z_0 به صورت

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

یا

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

مثال: برای تابع

$$f(z) = \bar{z} = x - iy \quad , \quad u(x, y) = x, v(x, y) = y$$

معادلات کشی – ریمان در نقطه دلخواه $z = z_0$ به صورت زیر است:

$$u(x, y) = x \quad , \quad v(x, y) = -y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

شرط لازم مشتق پذیر را ندارد پس در هیچ نقطه ای از \mathbb{C} مشتق پذیر نیست.

مثال:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(1+i)xy}{x^3+y^3} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

مشتق پذیری تابع فوق را در $z = 0$ بررسی کنید.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy}{x^3+y^3} + i \frac{xy}{x^3+y^3} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

$$u(x, y) = \frac{xy}{x^3+y^3} \quad , \quad v(x, y) = \frac{xy}{x^3+y^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{v(0, y) - v(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0, y) - u(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x, 0) - v(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$f'(0, 0) = \lim_{z \rightarrow (0,0)} \frac{f(z) - f(0,0)}{z} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{(1+i)xy}{x^3+y^3} - 0}{x + iy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{(1+i)xy}{x^3+y^3} - 0}{x + iy} \stackrel{x=y}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+i)x^2}{2x^3(1+i)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+i)}{2x^2(1+i)} = \infty$$

تابع در $(0, 0)$ مشتق پذیر نیست.

۶.۲ معادلات کشی-ریمان در مختصات قطبی

از آنجایی که $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ می‌باشد اگر تابع $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ مشتق پذیر باشد آنگاه

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}(z_0) \end{cases}$$

و مشتق تابع در نقطه z_0 به صورت

$$f'(z_0) = e^{i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial r}(z_0) \right) = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial r}(z_0) \right)$$

مثال: برای تابع $f(z) = \ln z$ با $-\pi < \text{Arg} z < \pi$ و $r > 0$ ، معادلات کشی-ریمان در نقطه دلخواه $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$ بررسی کنید.

$$f(z) = \ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + \ln(e^{i\theta}) = \ln r + i\theta$$

که

$$u(r, \theta) = \ln r, \quad v(r, \theta) = i\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

$$f'(z_0) = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial r}(z_0) \right) = e^{-i\theta_0} \left(\frac{1}{r_0} + ix_0 \right) = e^{-i\theta_0} \frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_0 e^{i\theta_0}} = \frac{1}{z_0}$$

۷.۲ تابع تحلیلی

تابع $w = f(z)$ در نقطه z تحلیلی گوییم هرگاه یک همسایگی از این نقطه z وجود داشته باشد به طوریکه در همه جا این همسایگی مشتق پذیر باشد.

تعریف تابع تام: تابعی که در همه جای دامنه تابع تحلیلی باشد تابع تام نامیده می‌شود.

قضیه (شرط کافی تحلیلی بودن): فرض کنید $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در دامنه D تعریف شده و توابع $u(x, y), v(x, y)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند و در تمام نقاط دامنه f ، معادلات کشی-ریمان برقرار باشد در این صورت $f(z)$ در D تحلیلی است.

۸.۲ نقطه تکین

نقطه z_0 را تکین تابع $w = f(z)$ گوئیم هرگاه در z_0 تحلیلی باشد و در نقطه ای از همسایگی z_0 تحلیلی باشد. مثال: $z = 0$ برای تابع $\frac{1}{z}$ یک نقطه تکین است.

۹.۲ تابع همساز

هر تابع حقیقی

$$\begin{cases} u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow u(x, y) \end{cases}$$

که دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد و در معادلات لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ صدق کند تابع همساز نامیده می شود.

قضیه: اگر تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در دامنه D تحلیلی باشد توابع مولفه ای آن یعنی u, v در D همساز هستند.

تعریف:

v مزدوج همسازی از u نامیده می شود.

۱۰.۲ رابطه همسازی برای تابع تحلیلی در نمایش قطبی

اگر تابع $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ در دامنه D تحلیلی باشد آنگاه

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

مثال: نشان دهید $u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$ یک تابع همساز است. تابع مزدوج همسازی آن را بدست آورید.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy + 4x \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6y + 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 - 4y \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6y - 4$$

در معادلات لاپلاس صدق می کند.

فرض کنید v مزدوج همساز u است در این صورت $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ یک تابع تحلیلی است پس در معادلات کشی-ریمان صدق می کند

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 6xy + 4x \Rightarrow v(x, y) = \int (6xy + 4x) dy = 3xy^2 + 4xy + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 - 4y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -3x^2 + 3y^2 + 4y = 3y^2 + 4y + g'(x) \Rightarrow g'(x) = -3x^2 \Rightarrow g(x) = \int -3x^2 dx$$

$$g(x) = -x^3 + c$$

$$v(x, y) = 3xy^2 + 4xy - x^3 + c$$

۱۱.۲ توابع مقدماتی

۱.۱۱.۲ تابع نمایی

تابع نمایی را به ازای هر عدد مختلط $z = x + iy$ به فرم $\exp(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ تعریف می‌کنیم. تابع نمایی e^z در شرط کشی-ریمان صدق می‌کند و مشتقات جزئی پیوسته دارد بنابراین در هر نقطه از صفحه مختلط مشتق پذیر است $(e^z)' = e^z$ لذا تابع تحلیلی است.

مثال: $\exp(\bar{z}) = e^{\bar{z}} = e^x(\cos y - i \sin y) = e^x \cos y - i \sin y$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -e^x \cos y \end{cases}$$

پس شرط لازم مشتق پذیر ندارد پس تحلیلی نیست.

۲.۱۱.۲ خواص تابع نمایی

۱. برای هر عدد مختلط $z = x + iy$ داریم: $e^z \neq 0$

۲. $|e^z| = e^x$

$$\arg(e^z) = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

۳.

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{z+2\pi i} = e^z$$

یعنی تابع e^z متناوب است و دوره متناوب آن $2\pi i$

$$\arg(e^z) = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im}(e^z)}{\operatorname{Re}(e^z)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{e^x \sin y}{e^x \cos y}\right) = y$$

۳.۱۱.۲ توابع مثلثاتی

برای هر عدد مختلط z فرمول اویلر به صورت زیر است

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$$

در این صورت برای هر z در صفحه مختلط با توجه به فرمول اویلر داریم:

$$e^{\mp iz} = \cos z \mp i \sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

۴.۱۱.۲ خواص توابع مثلثاتی

۱. توابع $\sin z$ و $\cos z$ در صفحه مختلط تحلیلی است. (چون تابع e^z تحلیلی است)

$$(\sin z)' = \cos z \quad (\cos z)' = -\sin z \quad ۲.$$

۳.

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

۴.

$$\sin(i\theta) = i \sinh \theta$$

$$\sin(i\theta) = \frac{e^{i(i\theta)} - e^{-i(i\theta)}}{2i} = \frac{e^{-\theta} - e^{+\theta}}{2i} = i \sinh \theta$$

۵.

$$\cos(i\theta) = \cosh \theta$$

۶.

$$\sin(z) = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\operatorname{Re}(\sin z) = \sin x \cosh y \quad \operatorname{Im}(\sin z) = \cos x \sinh y$$

۵.۱۱.۲ توابع هایپربولیک

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

۶.۱۱.۲ خواص توابع هایپربولیک

۱. $\sinh z$ و $\cosh z$ در صفحه مختلط تحلیلی است.

۲.

$$(\cosh z)' = \sinh z \quad (\sinh z)' = \cosh z$$

۳.

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

۴.

$$\cosh(iz) = \cos z$$

۵.

$$\sinh(z) = \sinh(x + iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

۶.

$$\cosh(z) = \cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

۷.۱۱.۲ تابع لگاریتم

لگاریتم را می‌توان به عنوان مقداری چون w به طوریکه $e^w = z$ باشد، تعریف کرد. اما این تعریف با توجه به متناوب بودن تابع نمایی، وجود لگاریتم منحصر به فرد را خنثی می‌کند. زیرا اگر $e^w = z$ آنگاه برای هر عدد صحیح k داریم:

$$e^{w+2k\pi i} = z$$

از این رو لگاریتم عدد مختلط z را که با $\ln z$ نمایش می‌دهیم، به صورت مجموعه‌ای از همه مقادیر

$$w = \ln z, \quad e^w = z$$

باشد بنابراین

$$Ln(z) = \{w \in \mathbb{C}; e^w = z\}$$

L بزرگه چون چند مقداری است. فرض کنیم $z = re^{i(\theta+2k\pi)}$ که k عدد صحیح و $r \neq 0$ است. از معادله $e^w = z$ که $w = u + iv$ داریم

$$e^w = z \rightarrow e^{u+iv} = re^{i(\theta+2k\pi)} \quad e^u = r, v = \theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$w = u + iv = Ln(z) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$w = Ln(z) = \ln |z| + i \arg z$$

از آنجایی که $arg z$ چند مقداری است تابع $Ln(z)$ چند مقداری می باشد. با انتخاب $arg z = Arg z$ لگاریتم

$$Ln z = \ln z = \ln |z| + i Arg z$$

که در آن $-\pi < Arg z \leq \pi$ را لگاریتم اصلی می نامیم.
مثال:

$$Ln 1 = \{w \in \mathbb{C}; e^w = 1\} = \{2k\pi i; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\ln 1 = \{2k\pi i; k = 0\} = 0$$

مثال:

$$Ln(-1) = \ln |-1| + i arg(-1) = \pi i + 2k\pi i; k \in \mathbb{Z}$$

$$\ln(-1) = \pi i$$

مثال:

$$Ln(1 - \sqrt{-3}) = \{\ln 2 + i(2k\pi - \frac{\pi}{3}); k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\ln(1 - \sqrt{-3}) = \ln 2 - \frac{\pi}{3}$$

نکته: از آنجاییکه تابع $Arg z$ تک مقداری در

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] = \{z \in \mathbb{C}; z + |z| \neq 0\}$$

پیوسته است لذا تابع لگاریتم اصلی

$$\ln z = \ln |z| + i Arg z \quad -\pi < Arg z < \pi$$

در $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ پیوسته است.

مشتق تابع لگاریتم اصلی برای هر $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ تابع

$$\ln z = \ln |z| + i Arg z = \ln r + i\theta = u(r, \theta) + iv(r, \theta) \quad \ln r = u(r, \theta), \theta = v(r, \theta)$$

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} = v_\theta \\ \theta_r = -\frac{1}{r}u_\theta \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} u_r = \frac{1}{r} \\ u_\theta = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

$$u_r = 0, u_\theta = 0 \Rightarrow v_r = -\frac{1}{r}$$

$$\frac{d}{dz} \ln z = e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r} = e^{-i\theta(u_r + iv_r)} = e^{-i\theta(\frac{1}{r} + 0)} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

۸.۱۱.۲ نمایی کسری

برای دو عدد صحیح و مثبت m و n که نسبت به هم اول باشند، تعریف می‌کنیم.

$$(z^{\frac{1}{n}})^m = e^{\frac{m}{n}Lnz} = e^{\frac{m}{n}(\ln|z| + i(Argz + 2k\pi))} = e \quad z \neq 0, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

دارای n مقدار متمایز می‌باشد.
فرض کنید c یک عدد مختلط باشد تعریف می‌کنیم

$$z^c = e^{cLnz} = e^{c(\ln|z| + i(Argz + 2k\pi))} = |z|^2 e^{i(Argz)} e^{i(2k\pi)} \quad z \neq 0, k \in \mathbb{Z}$$

نکته: اگر C گویا نباشد، آنگاه z^c دارای بی‌نهایت مقدار است. **مثال:** مقادیر $5^{\frac{1}{2}}$ را بدست آورید.

$$5^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}Ln5} = e^{\frac{1}{2}(\ln 5 + i(Arg 5 + 2k\pi))} = \sqrt{5} e^{k\pi i} = \pm \sqrt{5} \quad ; \quad k = 0, 1$$

مثال: مقادیر i^i را بدست آورید.

$$e^{iLni} = e^{i(\ln|i| + i(Arg 5 + 2k\pi))} = e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi i} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

تابع $z^{\frac{1}{n}}$ یک تابع n مقداری در ریشه n ام z است یعنی

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}Lnz} = e^{\frac{1}{n}(\ln|z| + i(Argz + 2k\pi))} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{Arg(z)}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

۱۲.۲ تبدیل خطی

$$w = az + b$$

۱. اگر $a = 1$ یک انتقال داریم و شکل در صفحه w همانند شکل در صفحه z است اما نسبت به مرکز مختصات به صورت متفاوت جایگذاری شده اند.

۲. اگر $z_1 \rightarrow w_1$ و $z_2 \rightarrow w_2$ آنگاه

$$|z_1 - z_2| = |w_1 - w_2| \quad \arg(z_1 - z_2) = \arg(w_1 - w_2)$$

۳. اگر $a \neq 0$ و $b = 0$ آنگاه

(آ) اگر a حقیقی باشد آنگاه

$$|w| = |a||z|, \quad \arg w = \arg z$$

اگر $a > 1$ یک انبساط داریم

اگر $a < 1$ یک انقباض داریم.

(ب) اگر a مختلط باشد یعنی

$$a = |a|e^{i\alpha}$$

آنگاه نگاشت شامل یک دوران به اندازه α حول مبدا یک اقباض یا انبساط است.
نگاشت

$w = \frac{1}{z}$ این نگاشت تناظری یک به یک بین نقاط غیر صفر صفحه z و نقاط صفحه w برقرار می‌کند با فرض $z = re^{i\theta}$

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

مثال: نگاشت $\frac{1}{z}$ هر دایره با خط راست را به یک دایره با خط راست تصویر می‌کند.

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (۱.۲)$$

$$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

با توجه به نگاشت $w = \frac{1}{z}$ داریم:

$$z = \frac{1}{w} = \frac{1}{u + iv} = \frac{1 \times (u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = x + iy$$

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

در این صورت ب جایگذاری تساوی های فوق در ۱.۲ خواهیم داشت.

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0$$

که معادله کلی خط یا دایره در صفحه w است.

فصل ۳

انتگرال

۱.۳ خم پیوسته یا کمان

شکل پارامتری یک خم پیوسته یا کمان به صورت

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

می‌باشد که φ, ψ در فاصله $[a, b]$ پیوسته هستند و با فرض پیوستگی φ و ψ کمان

$$z(t) = \varphi(t) + i\psi(t); \quad a \leq t \leq b$$

منحنی پیوسته ای را تعریف می‌کند که در صفحه z نقطه $A = z(a)$ را به نقطه $B = z(b)$ وصل می‌کند.

مثال: خط شکسته

$$z(t) = \begin{cases} t + it & 0 \leq t \leq 1 \\ t + i & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

متشکل از پاره خطی که از 0 تا $1 + i$ و به دنبال آن پاره خطی از $1 + i$ تا $2 + i$ یک خم پیوسته یا کمان است.

۲.۳ منحنی ساده

اگر منحنی پیوسته یا کمان

$$z(t) = \varphi(t) + i\psi(t); \quad a \leq t \leq b$$

خودش را قطع نکند و یا خودش مماس نباشد.
اگر $t_1 \neq t_2$ داشته باشیم

$$z(t_1) \neq z(t_2)$$

آن را منحنی ساده یا کمان جردن می‌نامیم.

مثال: $0 \leq t \leq 1$ یک منحنی ساده یا کمان جردن است که
 $A = z(0) = 1$ را به نقطه $B = z(1) = 1 + i \ln 2$ وصل می‌کند.

۳.۳ کمان ساده هموار

خم پیوسته یا کمان $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t); \quad a \leq t \leq b$ را کمان ساده هموار گوییم، هرگاه
توابع φ, ψ دارای مشتقات پیوسته در $a \leq t \leq b$ باشند.

مثال: منحنی $z(t) = |t| + i \ln(1+t) \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$ کمان ساده هموار است.

مثال: $z(t) = (t - \sin t) + i(1 - \cos t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ مکان ساده هموار است.

۴.۳ انتگرال خط

فرض کنید C یک منحنی ساده-هموار باشد که به صورت

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad a \leq t \leq b$$

نمایش داده شده باشد انتگرال $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ روی C را با-

$$\int_C f(z)dz \quad \text{or} \quad \oint_C f(z)dz$$

نمایش داد و آن را انتگرال خطی می‌نامیم و به صورت

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

یا

$$\int_C f(z)dz = \int_C f(z(t))z'(t) dt = \int_a^b f(x(t) + iy(t))(x'(t) + iy'(t))dt$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x = \mp \sqrt{1 - y^2}$$

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{cases} y = y \\ x = \mp \sqrt{1 - y^2} \end{cases} \quad -1 \leq y \leq 1$$

نکته: اگر $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ دو نوع نمایش پارامتری متفاوت برای فهم C باشند آنگاه

$$\int_C f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt = \int_C f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt$$

یعنی مقدار انتگرال به نحوه پارامتری کردن خم C بستگی ندارد.

مثال:

$$\int_C f(z)dz \quad f(z)=x^2+iy^3 \quad (0,0) \rightarrow (1,1), \quad C: y=x^2$$

$$\int_C f(z)dz = \int_0^1 f(z(t))z'(t)dt = \int_0^1 (t^2+it^6)(1+2ti)dt = \int_0^1 (t^2-2t^7+i(2t^3+t^6))dt$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{9}{14}i$$

۵.۳ کاربرد انتگرال خط

حاصل عبارت $Re \int_C \overline{f(z)}dz$ را به عنوان مقدار کار انجام شده بوسیله نیروی $\vec{f} = \vec{u} + v\vec{i}$ در مسیر C تعبیر کرد که در آن $\vec{f} = u - iv$ مزدوج $f = u + iv$ است.

مثال: کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = (x + y^2)\vec{i} + x^3\vec{j}$ را در مسیر مستقیم از نقطه $A = (0, 0)$ تا نقطه $B = (1, 2)$ را بیابید.

حل: معادله خط گذرنده از نقاط A ، B به صورت $y = 2x$ است.

$$z(t) = t + 2ti ; 0 \leq t \leq 1$$

$$f(z) = x + y^2 + ix^3$$

$$\begin{aligned} \text{کار انجام شده} &= Re \int_C \overline{f(z)} dz = Re \int_0^1 \overline{f(z(t))} z'(t) dt = Re \int_0^1 (t + 4t^3 - it^3)(1 + 2i) dt \\ &= Re(1 + 2i) \int_0^1 (t + 4t^3 - it^3) dt = Re(1 + 2i) \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{4}i \right) \\ &= Re(1 + 2i) \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{2}i \right) = \frac{11}{6} + \frac{1}{2} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

مثال: نشان دهید

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

که C دایره $z - z_0 = re^{i\theta}$ جهتی عکس عقربه های ساعت می باشد.

حل:

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \int_C (re^{i\theta})^n dz = r^n \int_C (e^{i\theta})^n dz = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta$$

$$z = z_0 + re^{i\theta} \Rightarrow dz = ire^{i\theta} d\theta$$

$$\begin{aligned} \int_C (z - z_0)^n dz &= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = ir^{n+1} \left(\frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)\theta} \right)_0^{2\pi} = \\ &= r^{n+1} \left(\frac{1}{(n+1)} e^{i(n+1)\theta} \right)_0^{2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2\pi & n = -1 \\ ir^{n+1} \left(\frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)\theta} \right)_0^{2\pi} & n \neq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

$$e^{i(n+1)\theta} \Big|_0^{2\pi} = \cos(2\pi(n+1)) + i \sin(2\pi(n+1)) = -e^0 = 0$$

۶.۳ دامنه همبند ساده

دامنه D را همبند ساده می‌گوییم هرگاه درون خم ساده بسته واقع در D تماماً در D باشد.

$$D = \{x + iy | x, y \in \mathbb{Q}\}$$

قضیه کشی-گورسا اگر تابع $f(z)$ در درون و روی مرز ساده بسته C تحلیلی باشد آنگاه

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

مثال:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{\cos z} dz = 0$$

نکته: فرض کنید $f(z)$ بر مرز C که به درازای L است پیوسته باشد و بر C $|f(z)| < M$ آنگاه

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq M \int_C |dz| = ML$$

۷.۳ فرمول انتگرال کشی

فرض کنید تابع $f(z)$ در دامنه همبند ساده که شامل مرز ساده C است تحلیلی باشد اگر z_0 درون C باشد آنگاه

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z^2 - 2z} dz$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\frac{\cosh z}{z-2}}{z-0} dz = 2\pi f(0) = 2\pi i \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

$$f(z) = \frac{\cosh z}{z-2} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{-2}$$

۸.۳ تعمیم فرمول انتگرال کشی

فرض کنید تابع $f(0)$ در دامنه همبند ساده که شامل مرز ساده c است، تحلیلی باشد اگر z_0 درون c باشد آنگاه $f(z)$ در نقطه z_0 دارای مشتق از هر مرتبه ای است که تحلیلی اند و از رابطه زیر محاسبه می شود

$$\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

مثال: اگر c دایره واحد $|z| = 1$ باشد در جهت مثبت باشد و $f(z) = \exp(2z)$ آنگاه $\int_C \frac{\exp(2z)}{z^4} dz$ را محاسبه کنید.

$$\int_C \frac{\exp(2z)}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(0) = \frac{2\pi i}{3!} \times 8$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp(2z) & f'(z) &= 2\exp(2z) \\ f''(z) &= 4\exp(2z) & f'''(z) &= 8\exp(2z) \Rightarrow f'''(0) = 8 \end{aligned}$$

مثال: حاصل انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{|z|=\frac{7}{2}} \frac{e^z}{(z-3)(z+1)^2} dz$$

نقاط غیر تحلیلی $z = -1, 3$ در داخل $|z| = \frac{7}{2}$ قرار دارند.

$$\int_C \frac{e^z}{(z-3)(z+1)^2} dz = \int_{C_1} \frac{e^z}{(z-3)(z+1)^2} dz + \int_{C_2} \frac{e^z}{(z-3)(z+1)^2} dz$$

$$\int \frac{e^z}{(z-3)(z+1)^2} dz = \int_{C_1} \frac{\frac{e^z}{z-3}}{(z+1)^2} dz + \int_{C_2} \frac{\frac{e^z}{(z+1)^2}}{(z-3)} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(-1) + 2\pi i g(3)$$

$$f(z) = \frac{e^z}{z-3} \Rightarrow f'(z) = \frac{e^z(z-3) - e^z}{(z-3)^2} \Rightarrow f'(-1) = \frac{\frac{1}{e}(-4) - \frac{1}{e}}{16} = -\frac{5}{16e}$$

$$g(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2} \Rightarrow g(3) = \frac{e^3}{16}$$

$$\int_C \frac{e^z}{(z-3)(z+1)^2} dz = 2\pi i \left(-\frac{5}{16e} + \frac{e^3}{16} \right)$$

قضیه مررآ (عکس قضیه کشی - گورسا)
 فرض کنید $f'(z)$ در دامنه D پیوسته باشد اگر بر هر مرز ساده بسته c درون D ، $\oint_C f(z)dz = 0$ ، $f(z)$ در D تحلیلی است.

۹.۳ نامساوی کشی

فرض کنید C دایره $|z - z_0| = r$ و M یک کران بالای $|f(z)|$ یعنی $|f(z)| \leq M$

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{r^n} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

اثبات:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z_0) &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{|f(z)|}{|(z - z_0)^{n+1}|} dz \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \oint dz = \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi(r) = n! \times \frac{M}{r^n} \end{aligned}$$

قضیه لیوویل: اگر تابع $f(z)$ تحلیلی و $|f(z)| \leq M$ آن گاه تابع $f(z)$ تابع ثابت است.

قضیه معادله چندجمله ای

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0$$

دقیقا n ریشه دارد در \mathbb{C}

قضیه مقدار میانگین گاس: اگر $f(z)$ در داخل و روی مرز دایره $|z - a| = r$: C تحلیلی باشد آن گاه $f(a)$ میانگین مقدار $f(z)$ روی C خواهد بود یعنی

$$2\pi \times f(a) = \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{\pi}{6} + 2e^{i\theta}\right) d\theta = \frac{3}{4} \times 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

$$f(z) = \cos^2(z) \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$$

قضیه ماکزیمم توابع

اگر تابع $f(z)$ را در دامنه کراندار D تحلیلی و غیر ثابت باشد و بر بستر آن یعنی \overline{D} پیوسته باشد آن گاه $|f(z)|$ مقدار ماکزیمم خود را روی مرز اختیار می کند.

قضیه مینیمم تابع

اگر تابع $f(z)$ در دامنه کراندار D تحلیلی و بر D داشته باشیم $f(z) \neq 0$ همچنین بستر آن یعنی \overline{D} پیوسته و \overline{D} فشرده باشد آن گاه $|f(z)|$ مقدار مینیمم خود را در مرز اختیار می کند.

مثال: مقدار ماکزیمم و مینیمم $|f(z)|$ با تعریف $f(z) = e^z$ را روی $|z| = r$ با $r > 0$ پیدا کنید.

طبق قضیه min و max توابع مختلط min و max بر نقاط مرزی دامنه اتفاق می افتد.

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| |e^{iy}| = e^x |\cos y + i \sin y| = e^x$$

تابع e^x بر $[-r, r]$ صعودی است لذا $e^{-r} < e^r$ پس

$$\min_{|z|=r} |e^z| = \min e^x = e^{-r}$$

$$\max_{|z|=r} |e^z| = \max e^x = e^r$$

————— امتحان میان تریم تا اینجا —————

فصل ۴

دنباله و سری های مختلط

تعریف دنباله: تابعی مختلط است که دامنه آن اعداد مختلط طبیعی و بر آن مجموعه غیر تهی مختلط است

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \\ n \rightarrow f(n) = z_n$$

مقادیر برد را با z_n یا به طور خلاصه $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ نمایش می دهیم. دنباله $\{z_n\}$ را همگرا می گوییم هرگاه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = C$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \forall n (n > N \Rightarrow |z_n - c| < \epsilon)$$

قضیه: دنباله $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}_{n=1}^{\infty}$ را همگرا به $z = a + ib$ می گوییم هرگاه دنباله های متشکل از قسمت های حقیقی $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ موهومی به ترتیب به a و b همگرا باشند

مثال: همگرایی دنباله $z_n = s : n(\frac{1}{n}) + i(-1)^n$ را بررسی کنید. همگرا نیست زیرا $(-1)^n$ در $n \rightarrow \infty$ همگرا نیست.

مثال: همگرایی دنباله $z_n = \frac{1}{n^3} + i$ را بررسی کنید.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0 \quad , \quad \lim_{z \rightarrow \infty} 1 = 1 \Rightarrow z_n \rightarrow i$$

تعریف: سری نامتناهی $\Sigma z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$ از اعداد مختلط است اگر دنباله‌ی $s_n = \Sigma_{k=1}^n z_k = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ از مجموع‌های جزئی به s همگرا باشد. در این صورت می‌نویسیم

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} z_k = s$$

مثال: سری هندسی $\Sigma z^n = 1 + z^1 + z^2 + \dots + z^n + \dots$ را بدست آورید.

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1)$$

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{1+z} \quad (|z| < 1)$$

مثال:

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} z^{2n} = ? \Rightarrow \Sigma_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2} \quad (|z| < 1 \text{ or } |z^2| < 1)$$

دنباله توابع: فرض کنید $f_1(z), f_2(z), \dots$ که به طور خلاصه به صورت $f(z)$ نمایش داده می‌شوند دنباله‌ای از توابع تک مقداری تعریف شده بر حسب z در ناحیه مشخص از صفحه‌ی مختلط باشد.

تعریف: تابع $F(z)$ واحد $\{f_n\}$ می‌نامیم و می‌نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = F(z)$ هرگاه

$$pointwise : \forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon, z) ; \forall n (n > N(\epsilon, z) \Rightarrow |f_n(z) - F(z)| < \epsilon)$$

در بعضی مقدار N با تغییر ϵ و z تغییر خواهد کرد.

تعریف: همگرایی یکنواخت: دنباله توابع $\{f_n(z)\}$ به $f(z)$ به طور یکنواخت همگراست هرگاه

$$uniformly : \forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) ; \forall z, \forall n (n > N(\epsilon) \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon)$$

مثال:

$$f_n(z) = \frac{1}{nz} \quad z \neq (0,0)$$

$$f_n(z) \xrightarrow{P.W} 0 \quad |z| < 1$$

طبق خاصیت ارشمیدسی $\exists N$ بطوریکه $\frac{1}{N} < \epsilon$ برای هر $n \geq N$ و هر $|z| > 1$ داریم:

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \frac{1}{nz} - 0 \right| = \left| \frac{1}{nz} \right| = \frac{1}{n} \frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$

قضیه: اگر $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ همگرا باشد آن گاه $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ همگرای یکن. اخت روی D است.

قضیه: اگر $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ در ناحیه D همگرای یکینواخت به تابع $f(z)$ باشد در این ناحیه تمام توابع $f_n(z)$ پیوسته باشند و منحنی c در D واقع باشد آن گاه داریم:

$$\int_c \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_c f_n(z) dz \quad (z \in D)$$

مثال: با انتگرال گیری از سری زیر روی منحنی c از $t = 0$ تا $t = z$ نتیجه را بیان کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \quad |t| < 1$$

سمت چپ:

$$\int_0^z \frac{1}{1-t} dt = \ln(1-t)|_0^z = -\ln(1-z)$$

سمت راست:

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^z = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{n+1}}{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

قضیه: اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ در ناحیه \mathbb{R} همگرای یکینواخت تابع $f(z)$ باشد و در این ناحیه تمام توابع $f_n(z)$ تحلیلی باشند. آنگاه در هر نقطه داخل \mathbb{R} ، $z \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\frac{df(z)}{dz} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{df_n(z)}{dz}; z \in \mathbb{R}$$

مثال: با مشتق گیری از سری $\sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ در دامنه $|z| < 1$ نتیجه را بیان کنید.

$$\frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1}; |z| < 1$$

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} \quad |z| < 1$$

قضیه: آزمون های همگرایی سری های مختلط

۱. آزمون نسبت اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = L$

اگر $L < 1$ ، آن گاه $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ همگراست

اگر $L > 1$ آن گاه سری فوق واگراست.

۲. آزمون ریشه. اگر

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(z)|^{\frac{1}{n}} = L$$

اگر $L < 1$ سری فوق همگراست.

اگر $L < 1$ سری واگراست.

۳. آزمون مقایسه اگر برای $n > N$ داشته باشیم $|g_n(z)| > |f_n(z)|$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z)$

همگرا باشد آن گاه $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ همگراست و اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z)$ واگرا شود آن گاه $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$

واگراست.

۴. آزمون رابه: اگر داشته باشیم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left| 1 - \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = L$$

اگر $L < 1$ آن گاه سری $\sum_{n=1}^{+\infty}$ واگراست

اگر $L > 1$ سری فوق همگراست.

مثال: ناحیه همگرایی $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{z}{n+1} \right| = 0 < 1$$

پس ناحیه همگرایی صفحه مختلط است.

مثال: ناحیه همگرایی $\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nz^2}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (|n e^{-nz^2}|)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} |e^{-nz^2}|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} |e^{-z^2}| = |e^{-z^2}| = |e^{-(x+iy)^2}| = e^{y^2-x^2} < 1$$

۱.۴ سری توانی

یک سری به فرم $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ سری توانی z_0 نامیده می‌شود. با استفاده از آزمون نسبت تعریف می‌کنیم

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

که R شعاع همگرایی نامیده می‌شود. در این صورت اگر $|z - z_0| < R$ آن گاه سری توانی همگرایی یکنواخت است و اگر $|z - z_0| > R$ آن گاه سری واگراست و برای $|z - z_0| = R$ باید بررسی شود و آزمون نسبت جواب نمی‌دهد

۲.۴ سری تیلور

فرض کنید $f(z)$ در دامنه D تحلیلی و مرز c ، D است. اگر $z_0 \in D$ آن گاه نمایش دیگری برای $f(z)$ به صورت زیر می‌باشد.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{2\pi i} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad n = 1, 2, \dots$$

مثال: تابع $f(z) = \frac{1}{1-z}$ برای $z \neq 1$ نمایش سری تیلور حول $z = z_0 \neq 1$ به صورت زیر است

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(2n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

برای وقتی که $|z - z_0| < |1 - z_0|$ برقرار است.

۳.۴ سری مکلورن

اگر مقدار z_0 در سری تیلور برابر صفر باشد، سری را مکلورن می‌نامیم.

۴.۴ نمایش سری مکلورن توابع خاص

۱.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad |z| < \infty$$

۲.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad |z| < \infty$$

۳.

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad |z| < \infty$$

۴.

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad |z| < 1$$

۵.۴ تکین ها

نقطه z_0 را تکین تابع $f(z)$ گوئیم هرگاه در z_0 تحلیلی باشد و در نقطه‌ای از همسایگی z_0 تحلیلی باشد.

مثال: $z = 0$ برای تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ تکین است.

۶.۴ تکین تنها

نقطه z_0 را تکین تنهای تابع $f(z)$ گوئیم هرگاه z_0 تکین باشد و همسایگی محذوفی از z_0 وجود داشته باشد به طوریکه $f(z)$ در سرتاسر این همسایگی تحلیلی باشد.

۷.۴ تکین غیر تنها

نقطه z_0 را تکین تنهای تابع $f(z)$ گوئیم هرگاه هر همسایگی z_0 شامل نقطه تکین دیگری غیر از z_0 باشد.

۸.۴ تکین غیر تنها از نوع انباشتگی

نقطه z_0 را تکین غیر تنها از نوع انباشتگی تابع $f(z)$ گوئیم هرگاه دنباله ای از نقاط تکین مانند $\{z_n\}$ وجود داشته باشد به طوریکه $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$

مثال: تابع $\frac{1}{z}$ نقطه تکین $z = 0$ که از نوع تکین تنهاست.
مثال:

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2+1)} \quad z=0, z=i, z=-i$$

مثال:

$$f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{z})} e^{(\tan \frac{1}{z})}$$

$$z = \frac{1}{n} \quad ; \quad z = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$z = 0$ نقطه تکین غیر تنهاست

$$\forall r > 0 \quad ; \quad 0 < |z| < r$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{1}{n_0} < r$$

و از طرفی $\frac{1}{n_0}$ نقطه تکین تنها متمایز از صفر است پس $z = 0$ تکین غیر تنهاست. از طرفی نقاط $z = \frac{1}{n}$ که $n \in \mathbb{N}$ است نقاط تکین تنها می باشند.

۹.۴ سری لوران

اگر تابع $f(z)$ در نقطه $z = z_0$ دارای تکین تنها باشد آن گاه در همسایگی z_0 تابع دارای سری لوران است فرض کنید $f(z)$ در داخل طوقه $r_1 < |z - z_0| < r_2$ تحلیلی باشد در این صورت نمایش $f(z)$ به صورت زیر است

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ (قسمت تحلیلی)} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

مثال: تابع:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{1-n}}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

نکته:

$$\oint_c f(z) dz = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n dz + \int \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} dz = 2\pi i b_1$$

$$\text{Res} f(z) = b_1 \quad z = 0$$

b_1 را مانده $f(z)$ در $z = z_0$ می‌نامیم.

مثال: سری لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ حول $z = 0$ در دامنه $1 < |z| < 2$ بنویسید.

$$f(z) = \frac{1}{2z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2(z-2)}$$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

$$\frac{1}{2(z-2)} = -\frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

در نهایت

$$f(z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

مثال: تابع $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ را به یک سری لوران در ناحیه $0 < |z+1| < 2$ بسط دهید.
حل: فرض کنید $z+1 = u$ ؛ $0 < |u| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{2u(\frac{u}{2}+1)} = \frac{1}{2u} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{u}{2}\right)^n$$

نکته: چون $|u| < 2$ پس $|\frac{u}{2}| < 1$ پس سری هندسی زسر همگراست.

$$\frac{1}{1+\frac{u}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{u}{2}\right)^n$$

پس

$$f(z) = \frac{1}{2u} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{u}{2}\right)^n = \frac{1}{2u} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{u^{n-1}}{2^{n+1}}\right) =$$

$$\frac{1}{2(z+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

۱۰.۴ انواع نقاط تکین تنها

۱. نقطه تکین برداشتنی: اگر بخش اصلی بسط سری لوران تابع $f(z)$ برابر باشد، تکین را برداشتنی گوییم.

۲. قطب: اگر بخش اصلی بسط سری لوران تابع $f(z)$ از تعداد نامتناهی جمله تشکیل شده باشد آن گاه تکین را قطب می نامیم. توان آخرین جمله (مثلا m) را مرتبه قطب می نامیم اگر $m = 1$ آن گاه قطب را ساده می گوییم.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^m b_n (z - z_0)^{-n}$$

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} + \sum_{n=1}^m b_n (z - z_0)^{m-n}$$

با $m - 1$ مشتق گیری از طرفین و سپس بررسی حد در طرف تساوی وقتی $z \rightarrow z_0$ خواهیم داشت:

$$b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) = \text{Res}_{z=z_0}(f(z))$$

۳. تکین اساسی: اگر بخش اصلی بسط سری لوران تابع $f(z)$ دارای تعداد نامتناهی جمله باشد تکین را اساسی گوییم.

مثال

۱. تابع

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) = \left(1 - \frac{1}{3!} z^2 + \frac{z^4}{5!} + \dots \right)$$

پس $z = 0$ تکین تنها از نوع برداشتنی است.

۲. تابع

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) = \left(\frac{\sin z}{z} - \frac{1}{3!} z + \frac{z^3}{5!} + \dots \right)$$

۳. تابع

$$e^{\frac{1}{z}}$$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

$|z| > 0$ تحلیلی است. $z = 0$ تکین تنهاست. از نوع اساسی است.

$$\text{Res}_{z=0}(f(z)) = 1$$

قضیه مانده کشی

فرض کنید $f(z)$ در درون و روی مرز ساده C ، مگر در نقاط تکین z_1, z_2, \dots, z_n در درون C تحلیلی باشد فرض کنید مانده ها در نقاط z_1, z_2, \dots, z_n به ترتیب $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ باشند در این صورت

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

مثال: حاصل انتگرال $\int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{z}{(z^2-1)^2(z^2+1)} dz$ را بدست آورید.

$$z = \mp 1, \quad z = \mp i$$

حال مانده ها را طبق مانده کشی می نویسیم.

$$z = 1 \quad z = i \quad z = -i$$

طبق قضیه مانده کشی کافی است

$$\text{Res}_{z=1} f(z), \text{Res}_{z=i} f(z), \text{Res}_{z=-i} f(z)$$

را حساب می کنیم.

$$\text{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{(m-1)!} \left(\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) \right)$$

$$\frac{i}{(i-1)^2(i+i)} = \frac{1}{8}$$

$$\text{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z}{(z^2-1)^2(z-i)} = \frac{-i}{(-2)^2 \times (-2i)} = \frac{1}{8}$$

$$\text{Res}(f(z)) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} (z-1)^2 \times f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)} = -\frac{1}{8}$$

تکته: فرض کنید تابع $f(z)$ در $z = z_0$ دارای قطب دوگانه در z_0 باشد یعنی $Q(z_0) = 0$, $Q'(z_0) \neq 0$ اما $Q''(z_0) \neq 0$ در این صورت

$$Res f(z) = \frac{2}{(Q''(z_0))^2} [p'(z_0)Q''(z_0) - \frac{1}{3}p(z_0)Q'''(z_0)]$$

مثال: مانده تابع $f(z) = \frac{\cos z}{(\ln z - 1)^2}$ را در نقطه $z = 0$ بیابید.

$$p'(z) = -\sin z \Rightarrow p'(e) = -\sin e$$

$$Q(z) = (\ln z - 1)^2$$

$$Q'(z) = 2(\ln z - 1) \times \left(\frac{1}{z}\right)$$

$$Q''(z) = 2\left(\frac{1}{z}\right)^2 - \frac{2}{z^2}(\ln z - 1)$$

$$Q'''(e) = 2\left(\frac{1}{e}\right)^2 - \frac{2}{e^2}(1 - 1) = \frac{2}{e^2}$$

$$Q'''(z) = 4\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right) + \frac{4}{z^3}(\ln z - 1) - \frac{2}{z^2}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{4}{z^3} + \frac{4}{z^3}(\ln z) - \frac{4}{z^3} - \frac{2}{z^3} = \frac{2}{z^3}(-5 + 2 \ln z)$$

$$Q'''(e) = \frac{2}{e^3}(-5 + 2) = -\frac{6}{e^3}$$

نکته: برای حل انتگرال از نوع $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ با تعویض متغیر

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}) \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(z^n - z^{-n})$$

$$z = e^{i\theta} \quad , \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

انتگرال به صورت

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right) \frac{dz}{iz}$$

مثال: حاصل انتگرال $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|3+1|\cos \theta}$