توابع مختلط دکتر رضی

پرهام طالبیان

۲۹ آبان ۱۴۰۳

فهرست مطالب

فصل ۱

یادآوری

۱.۱ اعداد مختلط

فرض کنید

$$\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y), x, y \in \mathbb{R}\}$$

حاصلضرب دکارتی اعداد حقیقی باشد در اینصورت مجموعه اعداد مختلط که با $\mathbb{C}$ نمایش داده می‌شود عبارت از $\mathbb{R}^2$ به همراه اعمال جبری زیر:

۱. عمل جمع

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

۲. عمل ضرب

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

۳. عمل ضرب اسکالر

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{C} = \{x + iy, x, y \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$$

۱.۱.۱ ویژگی ها

۱. هر دو عدد مختلط یک زوج مرتب $z = (x, y)$ می‌باشد که

$$x = Re(z) \qquad y = Im(z)$$

۲. برای هر عدد مختلط $z=(x,y)$ قدرمطلق z به صورت زیر تعریف می‌شود

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

۳. مزدوج عدد مختلط $z=(x,y)$ ، $\bar{z}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\bar{z}=(x,-y)$$

۴. برای هر عدد مختلط z داریم: $\qquad z\bar{z}=|z|^2$

۵. قسمت حقیقی و موهومی عدد مختلط $z=x+iy$ بر حسب z و $\bar{z}$ به صورت زیر است

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2} \qquad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

۶. تقسیم $\frac{z_1}{z_2}$ به صورت زیر است

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z_2}}{z_2\bar{z_2}}=\frac{z_1\bar{z_2}}{|z_2|^2}=(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_1^2+x_2^2})$$

بین اعداد مختلط و زیر مجموعه ماتریس ها تناظر یک به یک به صورت زیر برقرار است.

$$a+ib \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

اگر $a+ib\neq 0$ آن‌گاه

$$a+ib \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \Leftrightarrow |a+ib|\exp^{i\phi}$$

که شامل یک دوران با اندازه ϕ حول مبدا و یک تجانس با ضریب $\sqrt{a^2+b^2}$ می‌باشد.
همچنین برای ضرب در عدد مختلط هم ارزی های زیر را داریم:

$$(a+ib)\times(x+iy) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

مثال: فرض کنید $k>0$ ، z_1 و z_2 اعداد مختلط ثابتی باشند. مکان هندسی $|\frac{z-z_1}{z-z_2}|=k$ را مشخص کنید.

$$|\frac{z-z_1}{z-z_2}|^2=k^2 \Leftrightarrow (\frac{z-z_1}{z-z_2})(\frac{\bar{z}-\bar{z_1}}{\bar{z}-\bar{z_2}})=k^2$$

$$\Leftrightarrow (k^2-1)z\bar{z} + (z_1 - k^2 z_2)\bar{z} + (\bar{z_1} - k^2\bar{z_2})z - z_1\bar{z_1} + k^2 z_2\bar{z_2} = 0$$

اگر $k \neq 1$ آنگاه معادله فوق معادله یک دایره است که توسط رابطه زیر مشخص می‌شود

$$|z - \frac{z_1 - k^2 z_2}{1-k^2}| = \frac{k}{|1-k^2|}|z_1 - z_2|\,,\; z_1 \neq z_2$$

اگر $k = 1$

$$(z_1 - z_2)\bar{z} + (\bar{z_1} - \bar{z_2})z - z_1\bar{z_1} + z_2\bar{z_2} = 0 \Leftrightarrow |z - z_1| = |z - z_2|$$

که معادله عمود منصف خطی است که z_1 را به z_2 وصل می‌کند.

نکته: دو بردار z_1 و z_2 را موازی گویند هر گاه عدد حقیقی غیر صفر k وجود داشته باشد بطوریکه

$$z_1 = kz_2 \Leftrightarrow z_1\bar{z_2} = k|z_2|^2 \Rightarrow Im\{z_1\bar{z_2}\} = 0$$

دو بردار z_1 و z_2 عمود بر هم گویند اگر و تنها اگر عدد حقیقی غیر صفر k وجود داشته باشد بطوریکه $z_1 = kz_2 e^{i\frac{\pi}{2}}$

۲.۱.۱ شناسه یا آرگومان

اندازه ای از زاویه θ که بردار غیر صفر z با محور حقیقی مثبت می‌سازد یک شناسه یا آرگومان نامیده می‌شود و با $\arg z$ نمایش داده می‌شود

$$\cos(\arg z) = \frac{Re\{z\}}{|z|} \qquad \sin(\arg z) = \frac{Im\{z\}}{|z|}$$

$Arg\, z$ را برای مقدار مشخص و منحصر به فرد از

$$-\pi < \arg z \leq \pi \quad or \quad 0 \leq \arg z < 2\pi$$

به کار می‌بریم این مقدار θ به مقدار اصلی شناسه مرسوم است.

برای هر عدد حقیقی θ داریم

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

برای عدد مختلط z نیز برابر است یعنی $e^{iz} = \cos z + i\sin z$

نمایش قطبی اعداد مختلط:

$$z = x + iy = |z|(\cos(Argz) + isin(Argz)) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{iArgz} = re^{i\theta}$$

۳.۱.۱ توان عدد مختلط

برای عدد مختلط غیر صفر $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ توان n ام به فرمول دموآر مدوف است به صورت زیر داریم

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n \exp^{in\theta}\ ,\ n \in \mathbb{Z}$$

مثال: مقدار $(1-i)^{16}$ را بدست آورید.

$$1 - i = \sqrt{1^2 + (-1)^2}e^{i(-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \Rightarrow (1-i)^{16} = \sqrt{2}^{16}(\cos(-\frac{-16\pi}{4}) + i\sin(-\frac{-16\pi}{4})) = 2^8(1+0i) = 2^8$$

ریشه عدد مختلط

عدد مختلط z را درنظر بگیرید عدد مختلط w را ریشه n ام z می‌گیریم هرگاه $\qquad w^n = z$

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta_0 + isin\theta_0)$$

$$w = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{2k\pi + \theta_0}{n} + i\sin\frac{2k\pi + \theta_0}{n}); k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

مثال: ریشه معادله $z^4 - 1 = i$ را بدست آورید.

$$z^4 = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$$

$$z = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{4} + i\sin\frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{4}); k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16})$$

$$z_1 = (\cos\frac{2\pi + \frac{\pi}{4}}{4} + i\sin\frac{2\pi + \frac{\pi}{4}}{4}) = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16})$$

$$z_2 = z_3$$

۲.۱ همسایگی

یک همسایگی عدد حقیقی x_0 فاصله ای به شکل $(x_0 - r, x_0 + r)$ است که r یک عدد حقیقی و مثبت است.

$$N_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < r\} \subseteq \mathbb{R}$$

۳.۱ نقطه درونی

نقطه درونی z_0 را نقطه درونی $S \subseteq \mathbb{C}$ گوییم هر گاه همسایگی از z_0 داشته باشد که درون S است.

۴.۱ مجموعه باز

مجموعه $S \subseteq \mathbb{C}$ را باز گوییم هرگاه دو نقطه آن درونی باشد.

۱.۴.۱ نقطه خارجی

نقطه z_0 را نقطه خارجی $S \subseteq \mathbb{C}$ گوییم هرگاه یک همسایگی z_0 در مجموعه S نباشد.

۲.۴.۱ نقطه مرزی

نقطه z_0 را نقطه مرزی مجموعه $S \subseteq \mathbb{C}$ گوییم هرگاه نه نقطه داخلی و نه نقطه خارجی باشد.

۵.۱ نقطه حدی

نقطه z_0 را نقطه حدی $S \subseteq \mathbb{C}$ گوییم هرگاه

$$\forall r > 0 \quad N_r(z_0) \cap S \backslash \{z_0\} \neq \emptyset$$

۶.۱ مجموعه بسته

مجموعه $S \subseteq \mathbb{C}$ بسته است هرگاه شامل همه نقاط حدی اش باشد.

۷.۱ بستار مجموعه

بستار مجموعه $S \subseteq \mathbb{C}$ را با $\bar{S}$ نمایش می‌دهند و شامل نقاط S و نقاط حدی S است.

۸.۱ صفحه مختلط توسعه یافته

$$\mathbb{C}^\star = \mathbb{C} \cup \{\mp\infty\}$$

مثال: $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z(|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon)$$

$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (\frac{1}{|z|} < \delta) \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon)$$

$\lim_{z\to -\infty} = w_0$ در کامپلکس ها منفی نداریم چون ترتیب ندارد.

$$d(x,y) = |x| + |y| \qquad d(x,y) = |x+y|$$

$$\mathbb{C}^\star = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \qquad \lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z(\frac{1}{|z|} < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon)$$

مثال: $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$

$$\forall > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z, (|z - z_0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{f(z)} < \epsilon)$$

نکته:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = w_0$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} f(\frac{1}{f(z)} = 0$$

۹.۱ نگاشت مختلط

فرض کنید S یک مجموعه باشد تابع مختلط w را از متغیر های $z = x = iy$ به صورت $f : S \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$g : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$w = g(t) = x(t) + iy(t) = (x(t), y(t))$$

نمایش می‌دهیم.

تابع $w = f(z)$ تک کقداری است اگر به ازای هر مقدار از z در حوزه تعریف S یک و تنها یک مقدار به w نسبت داده می‌شود.

مثال

۱. تابع $w = f(z) = z^2$ تک مقداریست.

۲. تابع $Arg(z)$ تک مقداری است.

۳. $|z| \quad , \quad Re\{z\} \quad , \quad Im\{z\}$ تک مقداریست.

تعریف: تابع $w = f(z)$ چند مقداری است اگر برای بعضی یا تمام مقادیر z در حوزه تعریف S ، مقادیر مختلفی به w نسبت داده شود.

مثال:

۱. تابع $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$

$$z = i \qquad (i)^{\frac{1}{2}} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i1)$$

۲. تابع چند مقداری $k \in \mathbb{Z} \qquad k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots \qquad \arg z = 2k\pi + Argz,$

فصل ۲

فصل دوم

۱.۲ حد

فرض کنید تابع $w = f(z)$ در همه نقاط z از یک همسایگی محذوف z_0 تعریف شده باشد حد تابع $w = f(z)$ در نقطه z_0 را با نماد

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

نمایش می دهیم و بدان معنی است که

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z > 0 (|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon)$$

نکته: وقتی که $z \to z_0$ ممکن است z در امتداد مسیر های مختلف به z_0 نزدیک شود در صورت وجود حد ، حاصل تمامی حدود باهم برابر هستند. **مثال:** ثابت کنید نگاشت $f(z) = Argz$ روی قسمتم منفی محور حقیقی حد ندارد.

اثبات: فرض کنید $z_0 \in (-\infty, 0)$

$$z_n = z_0 + \frac{i}{n} \quad ; \quad z' = z - \frac{i}{n}$$

$$f(z_n) = Arg(z_n) = \arctan(\frac{1}{nz_0}) = n$$

$$f(z'_n) = Arg(Z'_n) = \arctan(\frac{-1}{nz_0}) = -\arctan(\frac{1}{nz_0}) = -n$$

۲.۲ پیوستگی

تابع $f : S \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ در نقطه z_0 پیوسته است هرگاه

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

مثال: پیوستگی تابع زیر را در $z_0 = (0,0)$ را بررسی کنید.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{z} & z \neq (0,0) \\ 1 & z = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{z \to (0,0)} f(z) = \lim_{y \to 0} \frac{-iy}{iy} = -1$$

$$\lim_{z \to (0,0)} f(z) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

حد نداریم.

- روش دوم(قطبی):

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

$$\lim_{z \to (0,0)} f(z) = \lim_{r \to 0} \frac{r(\cos\theta - i\sin)}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \lim_{r \to 0} \frac{(\cos\theta - i\sin)}{(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{(\cos\theta - i\sin)}{(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

حد ندارد.

۳.۲ پیوستگی یکنواخت

تابع $w = f(z)$ را در ناحیه $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت می‌گوییم

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z_1, z_2 (|z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon)$$

مثال: تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ روی مجموعه $R = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$ پیوسته یکنواخت نیست.

مثال: تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ روی مجموعه

$$R_\eta = \{z \in \mathbb{C}; |z| \geq \eta, \eta > 0\}$$

پیوسته یکنواخت هست.

۴.۲ مشتق

فرض کنید تابع $w = f(z)$ را در دامنه $D \subseteq \mathbb{C}$ دراین صورت مشتق $f(z)$ در نقطه z_0 که آن را با $f'(z_0)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

مثال: نشان دهید تابع $f(z) = \bar{z}$ در صفحه مختلط مشتق پذیر نیست.
فرض کنید $z_0 \in \mathbb{C}$ دلخواه باشد $\quad z_0 = x_0 + iy_0 \quad , \quad z = x + iy$

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}$$

$$\overset{x=x_0, z=x_0+iy}{=} \lim_{y \to y_0} \frac{x_0 - iy - x_0 + iy_0}{x_0 - iy - x_0 - iy_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{-iy + iy_0}{iy - iy_0} = -1$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \overset{y=y_0, z=x+iy_0}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{x - iy_0 - x_0 + iy_0}{x - iy_0 - x_0 - iy_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

۵.۲ معادلات کشی-ریمان

تابع $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ مشتق پذیر باشد آنگاه معادلات زیر برقرار است.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \end{cases}$$

شرط لازم مشتق پذیری در نقطه $z_0 = (x_0, y_0)$

$$\begin{cases} u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) = v_x(z_0) \end{cases}$$

مشتق تابع در نقطه z_0 به صورت

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

یا

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

مثال: برای تابع

$$f(z)=\bar{z}=x-iy \quad , \quad u(x,y)=x, v(x,y)=y$$

معادلات کشی ـ ریمان در نقطه دلخواه $z=z_0$ به صورت زیر است:

$$u(x,y)=x \quad , \quad v(x,y)=-y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

شرط لازم مشتق پذیر را ندارد پس در هیچ نقطه ای از $\mathbb{C}$ مشتق پذیر نیست. **مثال:**

$$f(z)=\begin{cases}\frac{(1+i)xy}{x^3+y^3} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$$

مشتق پذیری تابع فوق را در $z=0$ بررسی کنید.

$$f(z)=\begin{cases}\frac{xy}{x^3+y^3}+i\frac{xy}{x^3+y^3} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$$

$$u(x,y)=\frac{xy}{x^3+y^3} \quad , \quad v(x,y)=\frac{xy}{x^3+y^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

$$f'(0,0)=\lim_{z\to(0,0)}\frac{f(z)-f(0,0)}{z}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{(1+i)xy}{x^3+y^3}-0}{x+iy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{(1+i)xy}{x^3+y^3}-0}{x+iy}\overset{x=y}{=}$$

$$\lim_{z\to(0,0)}\frac{(1+i)xy}{(x^3+y^3)(x+iy)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+i)x^2}{2x^3(1+i)x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+i)}{2x^2(1+i)}=\infty$$

تابع در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست.

۶.۲ معادلات کشی‌ـ ریمان در مختصات قطبی

از آنجایی که $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ می‌باشد اگر تابع $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ مشتق پذیر باشد آنگاه

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}(z_0) \end{cases}$$

و مشتق تابع در نقطه z_0 به صورت

$$f'(z_0) = e^{i\theta}(\frac{\partial u}{\partial r}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial r}(z_0)) = e^{-i\theta}(\frac{\partial f}{r}(z_0))$$

مثال: برای تابع $f(z) = \ln z$ با $-\pi < Argz < \pi$ و $r > 0$ ، معادلات کشی‌ـ ریمان در نقطه دلخواه $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}\%(-\infty, 0)$ بررسی کنید.

$$f(z) = \ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + \ln(e^{i\theta}) = \ln r + i\theta$$

که

$$u(r,\theta) = \ln r \quad , \quad v(r,\theta) = i\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} == 0$$

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(\frac{\partial f}{\partial r]}(z_0)) = e^{-i\theta_0}(\frac{1}{r_0} + ix_0) = e^{-i\theta_0}\frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_0e^{i\theta_0}} = \frac{1}{z_0}$$

۷.۲ تابع تحلیلی

تابع $w = f(z)$ در نقطه z تحلیلی گوییم هرگاه یک همسایگی از این نقطه z وجود داشته باشد به طوریکه در همه جا این همسایگی مشتق پذیر باشد.

تعریف تابع تام: تابعی که در همه جای دامنه تابع تحلیلی باشد تابع تام نامیده می‌شود.

قضیه(شرط کافی تحلیلی بودن): فرض کنید $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در دامنه D تعریف شده و توابع $u(x,y), v(x,y)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند و در تمام نقاط دامنه f ، معادلات کشی‌ـ ریمان برقرار باشد در این صورت $f(z)$ در D تحلیلی است.

۸.۲ نقطه تکین

نقطه z_0 را تکین تابع $w = f(z)$ گوییم هرگاه در z_0 تحلیلی باشد و در نقطه ای از همسایگی z_0 تحیلی باشد. **مثال:** $z = 0$ برای تابع $\frac{1}{z}$ یک نقطه تکین است.

۹.۲ تابع همساز

هر تابع حقیقی

$$\begin{cases} u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \to u(x, y) \end{cases}$$

که دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد و در معادلات لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ صدق کند تابع همساز نامیده می‌شود.

قضیه: اگر تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در دامنه D تحلیلی باشد توابع مولفه ای آن یعنی u, v در D همساز هستند.

تعریف:

v مزدوج همسازی از u نامیده می‌شود.

۱۰.۲ رابطه همسازی برای تابع تحلیلی در نمایش قطبی

اگر تابع $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ در دامنه D تحلیلی باشد آنگاه

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

مثال: نشان دهید $u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$ یک تابع همساز است. تابع مزدوج همسازی آن را بدست آورید.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy + 4x \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6y + 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 - 4y \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6y - 4$$

در معادلات لاپلاس صدق می‌کند.

فرض کنید v مزدوج همساز u است در اینصورت $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ یک تابع تحلیلی است پس در معادلات کشی-ریمان صدق می‌کند

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 6xy + 4x \Rightarrow v(x, y) = \int (6xy + 4x)dy = 3xy^2 + 4xy + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 - 4y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -3x^2+3y^2+4y = 3y^2+4y+g'(x) \Rightarrow g'(x) = -3x^2 \Rightarrow g(x) = \int -3x^2\,dx$$

$$g(x) = -x^3 + c$$
$$v(x,y) = 3xy^2 + 4xy - x^3 + c$$

۱۱.۲ توابع مقدماتی

۱.۱۱.۲ تابع نمایی

تابع نمایی را به ازای هر عدد مختلط $z = x+iy$ به فرم $\exp(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + e^x\sin y$ تعریف می‌کنیم. تابع نمایی e^z در شرط کشی‌ـریمان صدق می‌کند و مشتقات جزئی پیوسته دارد بنابراین در هر نقطه از صفحه مختلط مشتق پذیر است $(e^z)' = e^z$ لذا تابع تحلیلی است.

مثال: $\exp(\bar{z}) = e^{\bar{z}} = e^x(\cos y - i\sin y) = e^x\cos y - i\sin y$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -e^x\cos y \end{cases}$$

پس شرط لازم مشتق پذیر ندارد پس تحلیلی نیست.

۲.۱۱.۲ خواص تابع نمایی

۱. برای هر عدد مختلط $z = x+iy$ داریم: $e^z \neq 0$

۲. $|e^z| = e$

$$\arg(e^z) = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

۳.

$$e^{2\pi i} = 1 \quad , \quad e^{z+2\pi i} = e^z$$

یعنی تابع e^z متتناوب است و دوره متناوب آن $2\pi i$

$$\arg(e^z) = \tan^- 1(\frac{Im(e^z)}{Re(e^z)}) = \tan^- 1(\frac{e^x\sin y}{e^x\cos y}) = y$$

۳.۱۱.۲ توابع مثلثاتی

برای هر عدد مختلط z فرمول اویلر به صورت زیر است

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

در این صورت برای هر z در صفحه مختلط با توجه به فرمول اویلر داریم:

$$e^{\mp iz} = \cos z \mp i\sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

۴.۱۱.۲ خواص توابع مثلثاتی

۱. توابع $\sin z$ و $\cos z$ در صفحه مختلط تحلیلی است. (چون تابع e^z تحلیلی است)

۲. $(\cos z)' = -\sin z \qquad (\sin z)' = \cos z$

۳.

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

۴.

$$\sin(i\theta) = i\sinh\theta$$

$$\sin(i\theta) = \frac{e^{i(i\theta)}-e^{-i(i\theta)}}{2i} = \frac{e^{-\theta}-e^{+\theta}}{2i} = i\sinh\theta$$

۵.

$$\cos(i\theta) = \cosh\theta$$

۶.

$$\sin(z) = \sin(x+iy) = \sin x\cos(iy) + cosx\sin(iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$$

$$Re(\sin z) = \sin x\cosh y \qquad Im(\sin z) = i\cos x\sinh y$$

۵.۱۱.۲ توابع هایپربولیک

$$\sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

۶.۱۱.۲ خواص توابع هایپربولیک

۱. $\sinh z$ و $\cosh z$ در صفحه مختلط تحلیلی است.

۲.

$$(\cosh z)' = \sinh z \qquad (\sinh z)' = \cosh z$$

۳.

$$\cosh^2 - \sinh^z = 1$$

۴.

$$\cosh(iz) = \cos z$$

۵.

$$\sinh(z) = \sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

۶.

$$\cosh(z) = \cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

۷.۱۱.۲ تابع لگاریتم

لگاریتم را می‌توان به عنوان مقداری چون w به طوریکه $e^w = z$ باشد، تعریف کرد.
اما این تعریف با توجه به متناوب بودن تابع نمایی، وجود لگاریتم منحصر به فرد را خنثی می‌کند.
زیرا اگر $e^w = z$ آنگاه برای هر عدد صحیح k داریم:

$$e^{w+2k\pi i} = z$$

از این رو لگاریتم عدد مختلط z را که با $\ln z$ نمایش می‌دهیم، به صورت مجموعه ای از همه مقادیر

$$w = \ln z \quad , \quad e^w = z$$

باشد بنابراین

$$Ln(z) = \{w \in \mathbb{C}; e^w = z\}$$

L بزرگه چون چند مقداری است.
فرض کنیم $z = re^{i(\theta+2k\pi)}$ که k عدد صحیح و $r \neq 0$ است. از معادله $e^w = z$ که $w = u + iv$ داریم

$$e^w = z \to e^{u+iv} = re^{i(\theta+2k\pi)} \qquad e^u = r, v = \theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین $w = u + iv = Ln(z) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$$w = Ln(z) = \ln|z| + i\arg z$$

از آنجایی که $argz$ چند مقداری است تابع $Ln(z)$ چند مقداری می‌باشد. با انتخاب $\arg z = Argz$ لگاریتم

$$Lnz = \ln z = \ln|z| + iArgz$$

که در آن $-\pi < Argz \leq \pi$ را لگاریتم اصلی می‌نامیم.

مثال:

$$Ln1 = \{w \in \mathbb{C}; e^w = 1\} = \{2k\pi i; k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\ln 1 = \{2k\pi i; k = 0\} = 0$$

مثال:

$$Ln(-1) = \ln|-1| + iarg(-1) = \pi i + 2k\pi i; k \in \mathbb{Z}$$
$$\ln(-1) = \pi i$$

مثال:

$$Ln(1-\sqrt{-3}) = \{\ln 2 + i(2k\pi - \frac{\pi}{3}); k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\ln(1-\sqrt{-3}) = \ln 2 - \frac{\pi}{3}$$

نکته: از آنجاییکه تابع تک مقداری $Argz$ در

$$\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] = \{z \in \mathbb{C}; z + |z| \neq 0\}$$

پیوسته است لذا تابع لگاریتم اصلی

$$\ln z = \ln|z| + iArgz \qquad -\pi < Argz < \pi$$

در $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ پیوسته است.

مشتق تابع لگاریتم اصلی برای هر $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ تابع

$$\ln z = \ln|z| + iArgz = \ln r + i\theta = u(r,\theta) + iv(r,\theta) \qquad \ln r = u(r,\theta), \theta = v(r,\theta)$$

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} = v_\theta \\ \theta_r = -\frac{1}{r}u_\theta \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_r = \frac{1}{r} \\ u_\theta = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

$$u_r = 0, u_\theta = 0 \Rightarrow v_r = -\frac{1}{r}$$

$$\frac{d}{dz}\ln z = e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial r} = e^{-i\theta(u_r + iv_r)} = e^{-i\theta(\frac{1}{r}+0)} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

۸.۱۱.۲ نمایی کسری

برای دو عدد صحیح و مثبت m و n که نسبت به هم اول باشند، تعریف می‌کنیم.

$$(z^{\frac{1}{n}})^m = e^{\frac{m}{n}Lnz} = e^{\frac{m}{n}}(\ln|z|+i(Argz+2k\pi)) = e \qquad z\neq 0, k=0,1,2,\dots,n-1$$

دارای n مقدار متمایز می‌باشد.
فرض کنید c یک عدد مختلط باشد تعریف می‌کنیم

$$z^c = e^{cLnz} = e^{c(\ln|z|+i(Argz+2k\pi))} = |z|^2 e^{i(Argz)} e^{i(2k\pi)} \quad z\neq 0, k\in\mathbb{Z}$$

نکته: اگر C گویا نباشد، آنگاه z^c دارای بی‌نهایت مقدار است. **مثال:** مقادیر $5^{\frac{1}{2}}$ را بدست آورید.

$$5^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}Ln5} = e^{\frac{1}{2}(\ln 5+i(Arg5+2k\pi))} = \sqrt{5}e^{k\pi i} = \mp\sqrt{5} \quad ; \quad k=0,1$$

مثال: مقادیر i^i را بدست آورید.

$$e^{iLni} = e^{i(\ln|i|+i(Arg5+2k\pi))} = e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi i} \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$$

تابع $z^{\frac{1}{n}}$ یک تابع n مقداری در ریشه n ام z است یعنی

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}Lnz} = e^{\frac{1}{n}(\ln|z|+i(Argz+2k\pi))} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{Arg(z)}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad ; \quad k=0,1,2,\dots,n-1$$

۱۲.۲ تبدیل خطی

$$w = az+b$$

۱. اگر $a=1$ یک انتقال داریم و شکل در صفحه w همانند شکل در صفحه z است اما نسبت به مرکز مختصات به صورت متفاوت جایگذاری شده اند.

۲. اگر $z_2\to w_2 \qquad z_1\to w_1$ آنگاه

$$|z_1-z_2| = |w_1-w_2| \qquad \arg(z_1-z_2) = \arg(w_1-w_2)$$

۳. اگر $a\neq 0$ و $b=0$ آنگاه

(آ) اگر a حقیقی باشد آنگاه

$$|w| = |a||z| \quad , \quad \arg w = \arg z$$

اگر $a > 1$ یک انبساز داریم
اگر $a < 1$ یک انقباض داریم.

(ب) اگر a مختلط باشد یعنی

$$a = |a|e^{i\alpha}$$

آنگاه نگاشت شامل یک دوران به اندازه α حول مبدا یک اقباض یا انبساط است.
نگاشت

$w = \frac{1}{z}$ این نگاشت تناظری یک به یک بین نقاط غیر صفر صفحه z و نقاط صفحه w برقرار می‌کند با فرض $z = re^{i\theta}$

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

مثال: نگاشت $\frac{1}{z}$ هر دایره با خط راست را به یک دایره با خط راست تضویر می‌کند.

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \tag{۱.۲}$$

$$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

با توجه به نگاشت $w = \frac{1}{z}$ داریم:

$$z = \frac{1}{w} = \frac{1}{u + iv} = \frac{1 \times (u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = x + iy$$

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \, , \, y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

در این صورت ب جایگذاری تساوی های فوق در ۱.۲ خواهیم داشت.

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cu + A = 0$$

که معادله کلی خط یا دایره در صفحه w است.

فصل ۳

انتگرال

۱.۳ خم پیوسته یا کمان

شکل پارامتری یک خم پیوسته یا کمان به صورت

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad a \leq t \leq b$$

می‌باشد که φ, ψ در فاصله $[a, b]$ پیوسته هستند و با فرض پیوستگی φ و ψ کمان

$$z(t) = \varphi(t) + i\psi(t); \quad a \leq t \leq b$$

منحنی پیوسته ای را تعریف می‌کند که در صفحه z نقطه $A = z(a)$ را به نقطه $B = z(b)$ وصل می‌کند. **مثال:** خط شکسته

$$z(t) = \begin{cases} t + it & 0 \leq t \leq 1 \\ t + i & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

متشکل از پاره خطی که از 0 تا $1 + i$ و به دنبال آن پاره‌خطی از $1 + i$ تا $2 + i$ یک خم پیوسته یا کمان است.

۲.۳ منحنی ساده

اگر منحنی پیوسته یا کمان

$$z(t) = \varphi(t) + i\psi(t); \quad a \leq t \leq b$$

خودش را قطع نکند و یا خودش مماس نباشد.
اگر $t_1 \neq t_2$ داشته باشیم

$$z(t_1) \neq z(t_2)$$

آن را منحنی ساده یا کمان جردن می‌نامیم.
مثال: $0 \leq t \leq 1 \qquad z(t) = t + i\ln(1+t)$ یک منحنی ساده یا کمان جردن است که $A = z(0) = 1$ را به نقطه $B = z(1) + 1 + i\ln 2$ وصل می‌کند.

۳.۳ کمان ساده هموار

خم پیوسته یا کمان $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t); \quad a \leq t \leq b$ را کمان ساده هموار گوییم، هرگاه توابع φ, ψ دارای مشتقات پیوسته در $a \leq t \leq b$ باشند.
مثال: منحنی $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \quad z(t) = |t| + i\ln(1+t)$ کمان ساده هموار است.
مثال: $0 \leq t \leq 2\pi \quad z(t) = (t - \sin t) + i(1 - \cos t)$ مکان ساده هموار است.

۴.۳ انتگرال خط

فرض کنید C یک منحنی ساده‌ـ هموار باشد که به صورت

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad a \leq t \leq b$$

نمایش داده شده باشد انتگرال $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ روی C را با -

$$\int_C f(z)dz \quad or \quad \oint_C f(z)dz$$

نمایش داد و آن را انتگرال خطی می‌نامیم و به صورت

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int (v\,dx + u\,dy)$$

یا

$$\int_C f(z)dz = \int_C f(z(t))z'(t)\,dt = \int_a^b f(x(t)+iy(t))(x'(t)iy'(t))dt$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x = \mp\sqrt{1-y^2}$$

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{cases} y = y \\ x = \mp\sqrt{1-y^2} \qquad -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

نکته: اگر $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ دو نوع نمایش پارامتری متفاوت برای فهم C باشند آنگاه

$$\int_C f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt = \int_C f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt$$

یعنی مقدار انتگرال به نحوه پارامتری کردن خم C بستگی ندارد.
مثال:

$$\int_C f(z)dz \qquad f(z)_= x^2 + iy^3 \qquad (0,0) \to (1,1), \quad C: y - x^2$$

$$\int_C f(z)dz = \int_0 1 f(z(t))z'(t)dt = \int_0^1 = (t^2+it^6)(1+2ti)dt = \int_0^1 (t^2-2t^7+i(2t^3+t^6))dt$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{9}{14}i$$

۵.۳ کاربرد انتگرال خط

حاصل عبارت $Re\int_C \overline{f(z)}dz$ را به عنوان مقدار کار انجام شده بوسیله نیروی $\vec{f} = \vec{u} + v\vec{i}$ در مسیر C تعبیر کرد که در آن $\vec{f} = u - iv$ مزدوج $f = u + iv$ است. **مثال:** کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = (x+y^2)\vec{i} + x^3\vec{j}$ را در مسیر مستقیم از نقطه $A = (0,0)$ تا نقطه $B = (1,2)$ را بیابید. **حل:** معادله خط گذرنده از نقاط A ، B به صورت $y = 2x$ است.

$$z(t) = t + 2ti \; ; \; 0 \leq t \leq 1$$

$$f(z) = x + y^2 + ix^3$$

$$\text{کار انجام شده} = Re\int_C \overline{f(z)}dz = Re\int_0^1 \overline{f(z(t))z'(t)}dt = Re\int_0^1 (t+4t^3-it^3)(1+2i)dt$$

$$= Re(1+2i)\int_0^1 (t+4t^3-it^3)dt = Re(1+2i)(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}-\frac{1}{4}i)$$

$$Re(1+2i)(\frac{11}{6}-\frac{1}{2}i) = \frac{11}{6}+\frac{1}{2} = \frac{7}{3}$$

مثال: نشان دهید

$$\int_C (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n=-1 \end{cases}$$

که C دایره $z-z_0 = re^{i\theta}$ جهتی عکس عقربه های ساعت می‌باشد. **حل:** $\int_C (z-z_0)^n dz =$
$\int_C (re^{i\theta})^n dz = r^n \int (e^{i\theta})^n dz = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta$
$z = z_0 + re^{i\theta} \Rightarrow dz = ire^{i\theta} d\theta$

$$\int_C (z-z_0)^n dz = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = ir^{n+1}(\frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)\theta})_0^{2\pi} = r^{n+1}(\frac{1}{(n+1)} e^{i(n+1)\theta})_0^{2\pi}$$

$$\begin{cases} 2\pi & n=-1 \\ ir^{n+1}(\frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)\theta})_0^{2\pi} & n \neq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

$$e^{i(n+1)\theta}\Big|_0^{2\pi} = \cos(2\pi(n+1)) + i\sin(2\pi(n+1)) = -e^0 = 0$$

۶.۳ دامنه همبند ساده

دامنه D را همبند ساده می‌گوییم هرگاه درون خم ساده بسته واقع در D تماما در D باشد.

$$D = \{x+iy | x, y \in \mathbb{Q}\}$$

قضیه کشی-گورسا اگر تابع $f(z)$ در درون و روی مرز ساده بسته C تحلیلی باشد آنگاه

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

مثال:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{\cos z} = 0$$

نکته: فرض کنید $f(z)$ بر مرز C که به درازای L است پیوسته باشد و بر C M $> |f(z)|$ آنگاه

$$|\int_C f(z)dz| \leq \int_C |f(z)||dz| \leq M \qquad |dz| = ML$$

۷.۳ فرمول انتگرال کشی

فرض کنید تابع $f(z)$ در دامنه همبند ساده که شامل مرز ساده C است تحلیلی باشد اگر z_0 درون C باشد آنگاه

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

]مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z^2-2z}\,dz$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\frac{\cosh z}{z-2}}{z-0}dz = 2\pi f(0) = 2\pi i \times (-\frac{1}{2}) = -\pi i$$

$$f(z) = \frac{\cosh}{z-2} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{-2}$$

۸.۳ تعمیم فرمول انتگرال کشی

فرض کنید تابع $f(0)$ در دامنه همبند ساده که شامل مرز ساده c است، تحلیلی باشد اگر z_0 درون c باشد آنگاه $f(z)$ در نقطه z_0 دارای مشتق از هر مرتبه ای است که تحلیلی اند و از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = 2\pi i\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

مثال: اگر c دایره واحد $|z| = 1$ باشد در جهت مثبت باشد و $f(z) = \exp(2z)$ آنگاه $\int_C \frac{\exp(2z)}{z^4}dz$ را محاسبه کنید.

$$\int_C \frac{\exp(2z)}{z^4}dz = \frac{2\pi i}{3!}f^{(3)}(0) = \frac{2\pi i}{3!} \times 8$$

$$f(z) = \exp(2z) \qquad f'(z) = 2\exp(2z)$$

$$f''(z) = 4\exp(2z) \qquad f'''(z) = 8\exp(2z) \Rightarrow f'''(0) = 8$$

مثال: حاصل انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{|z|=\frac{7}{2}} \frac{e^z}{(z-3)(z+1)^2}\,dz$$

نقاط غیر تحلیلی $z=-1,3$ در داخل $|z|=\frac{7}{2}$ قرار دارند.

$$\int_C \frac{e^z}{(z-3)(z+1)^2}\,dz = \int_{C_1} \frac{e^z}{(z-3)(z+1)^2}\,dz + \int_{C_2} \frac{e^z}{(z-3)(z+1)^2}\,dz$$

$$\int \frac{e^z}{(z-3)(z+1)^2}\,dz = \int_{C_1} \frac{\frac{e^z}{z-3}}{(z+1)^2}\,dz + \int_{C_2} \frac{\frac{e^z}{(z+1)^2}}{(z-3)}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}f'(-1) + 2\pi i g(3)$$

$$f(z) = \frac{e^z}{z-3} \Rightarrow f'(z) = \frac{e^z(z-3)-e^z}{(z-3)^2} \Rightarrow f'(-1) = \frac{\frac{1}{e}(-4)-\frac{1}{e}}{16} = -\frac{5}{16e}$$

$$g(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2} \Rightarrow g(3) = \frac{e^3}{16}$$

$$\int_C \frac{e^z}{(z-3)(z+1)^2}\,dz = 2\pi i(-\frac{5}{16e} + \frac{e^3}{16})$$

قضیه مررآ(عکس قضیه کشی_ گورسا)
فرض کنید $f'(z)$ در دامنه D پیوسته باشد اگر بر هر مرز ساده بسته c درون D ، $\oint_C f(z)dz = 0$ ، $f(z)$ در D تحلیلی است.

۹.۳ نامساوی کشی

فرض کنید C دایره $|z-z_0|=r$ و M یک کران بالای $|f(z)|$ یعنی $|f(z)| \le M$

$$|f^{(n)}(z_0) \le \frac{Mn!}{r^n} \quad ; \quad n=0,1,2\dots$$

اثبات:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi}|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz|$$

$$\le \frac{n!}{2\pi}\frac{|f(z)|}{|(z-z_0)^{n+1}|}dz \le \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}\oint dz = \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi(r) = n! \times \frac{M}{r^n}$$

قضیه لیوویل: اگر تابع $f(z)$ تحلیلی و $|f(z)| \le M$ آن‌گاه تابع $f(z)$ تابع ثابت است. **قصیه معادله چندجمله ای**

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0\ ,\ a_n \ne 0$$

دقیقا n ریشه دارد در $\mathbb{C}$
قضیه مقدار میانگین گاس: اگر $f(z)$ در داخل و روی مرز دایره $C: |z-a| = r$ تحلیلی باشد آن‌گاه $f(a)$ میانگین مقدار $f(z)$ روی C خواهد بود یعنی

$$2\pi \times f(a) = \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\frac{\pi}{6} + 2e^{i\theta}) d\theta = \frac{3}{4} \times 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

$$f(z) = \cos^2(z) \Rightarrow \cos^2(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{4}$$

قضیه ماکزیمم توابع

اگر تابع $f(z)$ را در دامنه کراندار D تحلیلی و غیر ثابت باشد و بر بستار آن یعنی $\overline{D}$ پیوسته باشد آن‌گاه $|f(z)|$ مقدار ماکزیمم خود را روی مرز اختیار می‌کند.

قضیه مینیمم تابع

اگر تابع $f(z)$ در دامنه کراندار D تحلیلی و بر $z \in D$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$ همچنین بستار آن یعنی $\overline{D}$ پیوسته و $\overline{D}$ فشرده باشد آن‌گاه $|f(z)|$ مقدار مینیمم خود را در مرز اختیار می‌کند.

مثال: مقدار ماکزیمم و مینیمم $|f(z)|$ با تعریف $f(z) = e^z$ را روی $|z| = r$ با $r > 0$ پیدا کنید.

طبق قضیه min و max توابع مختلط min و max بر نقاط مرزی دامنه اتفاق می‌افتد.

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x||e^{iy}| = e^x|\cos y + i\sin y| = e^x$$

تابع e^x بر $[-r, r]$ صعودی است لذا $e^{-r} < e^r$ پس

$$\min_{|z|=r} |e^z| = \min e^x = e^{-r}$$

$$\max_{|z|=r} |e^z| = \max e^x = e^r$$

———————- امتحان میان ترم تا اینجا—————————————

فصل ۴

دنباله و سری های مختلط

تعریف دنباله: تابعی مختلط است که دامنه آن اعداد مختلط طبیعی و بر آن مجموعه غیر تهی مختلط است

$$\underset{n\to f(n)=z_n}{f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}}$$

مقادیر برد را با z_n یا به طور خلاصه $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ نمایش می‌دهیم.
دنباله $\{z_n\}$ را همگرا می‌گوییم هرگاه

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = C$$

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists N\forall n(n>N \Rightarrow |z_n-c|<\epsilon)$$

قضیه: دنباله‌ی $\{z_n\}=\{x_n+iy_n\}_{n=1}^{\infty}$ را همگرا به $z=a+ib$ گوییم هرگاه دنباله های متشکل از قسمت های حقیقی $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ موهومی به ترتیب به a و b همگرا باشند

مثال: همگرایی دنباله $z_n=s:n(\frac{1}{n})+i(-1)^n$ را بررسی کنید.
همگرا نیست زیرا $(-1)^n$ در $n\to\infty$ همگرا نسیت.

مثال: همگرایی دنباله $z_n=\frac{1}{n^3}+i$ را بررسی کنید.

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{n^3}=0 \quad ,\lim_{z\to\infty}1=1\Rightarrow z_n\to i$$

تعریف: سری نامتناهی $\Sigma z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \ldots$ از اعداد مختلط است اگر دنباله‌ی $s_n = \Sigma_{k=1} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ از مجموع های جزئی به s همگرا باشد. در این صورت می‌نویسیم

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} z_n = s$$

مثال: سری هندسی $\Sigma z^n = 1 + z^1 + z^2 + \cdots + z^n + \ldots$ را بدست آورید.

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad (|z| < 1)$$

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{1+z} \qquad (|z| < 1)$$

مثال:

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} z^{2n} =? \Rightarrow \Sigma_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2} \quad (|z| < 1\, or\, |z^2| < 1)$$

دنباله توابع: فرض کنید $f_1(z), f_2(z), \ldots$ که به طور خلاصه به صورت $f(z)$ نمایش داده می‌شوند دنباله‌ای از توابع تک مقداری تعریف شده بر حسب z در ناحیه مشخص از صفحه‌ی مختلط باشد.

تعریف: تابع $F(z)$ واحد $\{f_n\}$ می‌نامیم و می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = F(z)$ هرگاه

$$pointwise : \forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon, z)\, ;\, \forall n (n > N(\epsilon, z) \Rightarrow |f_n(z) - F(z)| < \epsilon)$$

در بعضی مقدار N با تغییر ϵ و z تغییر خواهد کرد.

تعریف: همگرایی یکنواخت: دنباله توابع $\{f_n(z)\}$ به $f(z)$ به طور یکنواخت همگراست هرگاه

$$uniformly : \forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon)\, ;\, \forall z\, ,\, \forall n (n > N(\epsilon) \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon)$$

مثال:

$$f_n(z)=\frac{1}{nz}\quad z\neq(0,0)$$

$$f_n(z)\overset{P.W}{\to}0\quad |z|<1$$

طبق خاصیت ارشمیدسی $\exists N$ بطوریکه $\frac{1}{N}<\epsilon$ برای هر $n\geq N$ و هر $|z|>1$ داریم:

$$|f_n(z)-f(z)|=|\frac{1}{nz}-0|=|\frac{1}{nz}|=\frac{1}{n}\frac{1}{|z|}\leq\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<\epsilon$$

قضیه: اگر $\Sigma_{n=0}^{\infty}M_n$ همگرا باشد آن‌گاه $\Sigma_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ همگرای یکن.اخت روی D است.

قضیه: اگر $\Sigma_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ در ناحیه D همگرای یکینواخت به تابع $f(z)$ باشد در این ناحیه تمام توابع $f_n(z)$ پیوسته باشند و منحنی c در D واقع باشد آن‌گاه داریم:

$$\int_c\Sigma_{n=0}^{\infty}f_n(z)dz=\Sigma_{n=0}^{\infty}\int\}_{n=1}f_n(z)dz\quad(z\in D)$$

مثال: با انتگرال گیری از سری زیر روی منحنی c از $t=0$ تا $t=z$ نتیجه را بیان کنید.

$$\Sigma_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{1-t}\quad |t|<1$$

سمت چپ:

$$\int_0^z\frac{1}{1-t}dt=\ln(1-t)|_0^z=-\ln(1-z)$$

سمت راست:

$$\int\Sigma_{n=0}^{\infty}t^ndt=\Sigma_{n=0}^{\infty}\int_0^z t^ndt=\Sigma_{n=0}^{\infty}(\frac{t^{n+1}}{n+1})|_0^z=\Sigma_{n=0}^{\infty}(\frac{z^{n+1}}{n+1})=\Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

قضیه: اگر $\Sigma_{n=1}^{+\infty}f_n(z)$ در ناحیه $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت تابع $f(z)$ باشد و در این ناحیه تمام توابع $f_n(z)$ تحلیلی باشند. آنگاه در هر نقطه داخل $z\in\mathbb{R}$ ، داریم:

$$\frac{df(z)}{dz}=\Sigma_{n=1}^{+\infty}\frac{df_n(z)}{dz};z\in\mathbb{R}$$

مثال: با مشتق گیری از سری $\Sigma_{n=1}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ در دامنه $|z| < 1$ نتیجه زا بیان کنید.

$$\frac{d}{dz}\Sigma_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1}; |z| < 1$$

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2} \Rightarrow \Sigma_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} \qquad |z| < 1$$

قضیه: آزمون های همگرایی سری های مختلط

۱. آزمون نسبت اگر $\lim_{n\to+\infty} |\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}| = L$

اگر $L < 1$، آن‌گاه $\Sigma_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ همگراست

اگر $L > 1$ آن‌گاه سری فوق واگراست.

۲. آزمون ریشه.اگر

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(z)|^{\frac{1}{n}} = L$$

اگر $L < 1$ سری فوق همگراست.

اگر $L < 1$ سری واگراست.

۳. آزمون مقایسه اگر برای $n > N$ داشته باشیم $|f_n(z)| > |g_n(z)|$ و $\Sigma_{n=1}^{+\infty} g_n(z)$ همگرا باشد آن‌گاه $\Sigma_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ همگراست و اگر $\Sigma_{n=1}^{+\infty} g_n(z)$ واگرا شود آنگاه $\Sigma_{n=1}^{+\infty} g_n(z)$ واگراست.

۴. آزمون رابه :اگر داشته باشیم

$$\lim_{n\to+\infty} n|1 - \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}| = L$$

اگر $L < 1$ آن‌گاه سری $\Sigma_{n=1}^{+\infty}$ واگراست

اگر $L > 1$ سری فوق همگراست.

مثال: ناحیه همگرایی $\Sigma_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}| = \lim_{n\to+\infty} |\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}| = \lim_{n\to+\infty} |\frac{z}{n+1}| = 0 < 1$$

پس ناجیه همگرایی صفجه مختلط است.

مثال: ناحیه همگرایی $\Sigma_{n=0}^{+\infty} n e^{-nz^2}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{n\to+\infty} (|ne^{-nz^2}|)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} |e^{-nz^2}|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} |e^{-z^2}| = |e^{-z^2}| = |e^{-(x+iy)^2}| = e^{y^2-x^2} < 1$$

۱.۴ سری توانی

یک سری به فرم $\Sigma_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ سری توانی zz_0 نامیده می‌شود. با استفاده از آزمون نسبت تعریف می‌کنیم
$$R = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$$
که R شعاع همگرایی نامیده می‌شود. در این صورت اگر $|z-z_0| < R$ آن‌گاه سری توانی همگرای یکنواخت است و اگر $|z-z_0| > R$ آن‌گاه سری واگراست و برای $|z-z_0| = R$ باید بررسی شود و آزمون نسبت جواب نمی‌دهد

۲.۴ سری تیلور

فرض کنید $f(z)$ در دامنه D تحلیلی و مرز D ، c است. اگر $z_0 \in D$ آن‌گاه نمایش دیگری برای $f(z)$ به صورت زیر می‌باشد.

$$f(z) = \Sigma_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{2\pi i}\frac{f^(n)(z_0)}{n!} = \frac{f^(n)(z_0)}{n!} \quad n = 1, 2, \ldots$$

مثال: تابع $f(z) = \frac{1}{1-z}$ برای $z \neq 1$ نمایش سری تیلور حول $z = z_0 \neq 1$ به صورت زیر است
$$f(z) = \Sigma_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(2n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$
برای وقتی که $|z-z_0| < |1-z_0|$ برقرار است.

۳.۴ سری مکلورن

اگر مقدار z_0 در سری تیلور برابر صفر باشد، سری را مکلورن می‌نامیم.

۴.۴ نمایش سری مکلورن توابع خاص

.۱
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \quad |z| < \infty$$

.۲

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1} = \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad |z| < \infty$$

.۳

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^{n} = \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad |z| < \infty$$

.۴

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots = \Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} = \frac{z^{n}}{n} \qquad |z| < 1$$

۵.۴ تکین ها

نقطه z_0 را تکین تابع $f(z)$ گوییم هرگاه در z_0 تحلیلی باشد و در نقطه‌ای از همسایگی z_0 تحلیلی باشد.

مثال: $z = 0$ برای تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ تکین است.

۶.۴ تکین تنها

نقطه z_0 را تکین تنهای تابع $f(z)$ گوییم هرگاه z_0 تکین باشد و همسایگی محذوفی از z_0 وجود داشته باشد به طوریکه $f(z)$ در سرتاسر این همسایگی تحلیلی باشد.

۷.۴ تکین غیر تنها

نقطه z_0 را تکین تنهای تابع $f(z)$ گوییم هرگاه هر همسایگی z_0 شامل نقطه تکین دیگری غیر از z_0 باشد.

۸.۴ تکین غیر تنها از نوع انباشتگی

نقطه z_0 را تکین غیر تنها از نوع انباشتگی تابع $f(z)$ گوییم هرگاه دنباله ای از نقاط تکین مانند $\{z_n\}$ وجود داشته باشد به طوریکه $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$

مثال: تابع $\frac{1}{z}$ نقطه تکین $z=0$ که از نوع نکین تنهاست.
مثال:

$$f(z)=\frac{z+1}{z^3(z^2+1)} \quad z=0, z=i, z=-i$$

مثال:

$$f(z)=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{z})}e^{(\tan\frac{1}{z})}$$

$$z=\frac{1}{n} \quad ; \quad z=0 \quad n\in\mathbb{N}$$

$z=0$ نقطه تکین غیر تنهاست

$$\forall r>0 \quad ; \quad 0<|z|<r$$

$$\exists n_0\in\mathbb{N} \quad ; \quad \frac{1}{n_0}<r$$

و از طرفی $\frac{1}{n_0}$ نقطه تکین تنها متمایز از صفر است پس $z=0$ تکین غیر تنها است. از طرفی نقاط $z=\frac{1}{n}$ که $n\in\mathbb{N}$ است نقاط تکین تنها می‌باشند.

۹.۴ سری لوران

اگر تابع $f(z)$ در نقطه $z=z_0$ دارای تکین تنها باشد آن‌گاه در همسایگی z_0 ، تابع دارای سری لوران است فرض کنید $f(z)$ در داخل طوقه $r_1<|z-z_0|<r_2$ تحلیلی باشد در این صورت نمایش $f(z)$ به صورت زیر است

$$f(z)=\Sigma_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n(\text{قسمت تحلیلی})+\Sigma_{n=1}^{\infty}b_n(z-z_0)^{-n}=\Sigma_{-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

مثال: تابع:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{(z_{z0})^{n+1}}$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{(z_{z0})^{1-n}}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{(z_{z0})^{n+1}}$$

نکته:

$$\oint_c f(z)dz = \int \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n dz + \int \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n} dz = 2\pi i b_1$$

$$Resf(z) = b_1 \quad z=0$$

b_1 را مانده $f(z)$ در $z = z_0$ می‌نامیم.

مثال: سری لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ حول $z=0$ در دامنه $1 < |z| < 2$ بنویسید.

$$f(z) = \frac{1}{2z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2(z-2)}$$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} = \Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

$$\frac{1}{2(z-2)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{4}\Sigma_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n$$

در نهایت

$$f(z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{4}\Sigma_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n$$

مثال: تابع $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ را به یک سری لوران در ناحیه $0 < |z+1| < 2$ بسط دهید.

حل: فرض کنید $z+1 = u$ ؛ $0 < |u| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{2u(\frac{u}{2}+1)} = \frac{1}{2u}\Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{u}{2})^n$$

نکته: چون $|u| < 2$ پس $|\frac{u}{2}| < 1$ پس سری هندسی زسر همگراست.

$$\frac{1}{1+\frac{u}{2}} = \Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{u}{2})^n$$

پس

$$f(z) = \frac{1}{2u}\Sigma_{n=0}(-1)^n(\frac{u}{2})^n = \frac{1}{2u} + \Sigma_{n=0}(-1)^n(\frac{u^{n-1}}{2^{n+1}}) =$$

$$\frac{1}{2(z+1)} + \Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

۱۰.۴ انواع نقاط تکین تنها

۱. نقطه تکین برداشتنی: اگر بخش اصلی بسط سری لوران تابع $f(z)$ برابر باشد، تکین را برداشتنی گوییم.

۲. قطب: اگر بخش اصلی بسط سری لوران تابع $f(z)$ از تعداد نامتناهی جمله تشکیل شده باشد آن‌گاه تکین را قطب می‌نامیم. توان آخرین جمله (مثلا m) را مرتبه قطب می‌نامیم اگر $m = 1$ آن‌گاه قطب را ساده می‌گوییم.

$$f(z) = \Sigma_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \Sigma_{n=1}^{m} b_n (z - z_0)^{-n}$$

$$(z - z_0)^m f(z) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} + \Sigma_{n=1}^{m} b_n (z - z_0)^{m-n}$$

با $m - 1$ مشتق گیری از طرفین و سپس بررسی حد در طرف تساوی وقتی $z \to z_0$ خواهیم داشت:

$$b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) = Res_{z=z_0}(f(z))$$

۳. تکین اساسی: اگر بخش اصلی بسط سری لوران تابع $f(z)$ دارای تعداد نامتناهی جمله باشد تکین را اساسی گوییم.

مثال

۱. تابع

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{z^5}{5!} + \dots) = (1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{z^4}{5!} + \dots)$$

پس $z = 0$ تکین تنها از نوع برداشتنی است.

۲. تابع

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2}(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{z^5}{5!} + \dots) = (\frac{\sin z}{z} - \frac{1}{3!}z + \frac{z^3}{5!} + \dots)$$

۳. تابع

$$e^{\frac{1}{z}}$$