توابع مختلط دکتر رضی

پرهام طالبیان

۳۰ مهر ۱۴۰۳

فهرست مطالب

فصل ۱

یادآوری

۱.۱ اعداد مختلط

فرض کنید
$$\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y), x,y \in \mathbb{R}\}$$
حاصلضرب دکارتی اعداد حقیقی باشد در اینصورت مجموعه اعداد مختلط که با $\mathbb{C}$ نمایش داده می‌شود عبارت از $\mathbb{R}^2$ به همراه اعمال جبری زیر:

۱. عمل جمع
$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

۲. عمل ضرب
$$(x_1,y_1) \times (x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

۳. عمل ضرب اسکالر
$$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{C} = \{x + iy, x,y \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$$

۱.۱.۱ ویژگی ها

۱. هر دو عدد مختلط یک زوج مرتب $Z = (x,y)$ می‌باشد که

$$x = Re(Z) \qquad y = Im(z)$$

۲. برای هر عدد مختلط $Z=(x,y)$ قدرمطلق Z به صورت زیر تعریف می‌شود

$$|Z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

۳. مزدوج عدد مختلط $Z=(x,y)$ ، $\bar{z}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\bar{z}=(x,-y)$$

۴. برای هر عدد مختلط z داریم: $\quad z\bar{z}=|z|^2$

۵. قسمت حقیقی و موهومی عدد مختلط $z=x+iy$ بر حسب z و $\bar{z}$ به صورت زیر است

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2} \qquad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

۶. تقسیم $\frac{z_1}{z_2}$ به صورت زیر است

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z_2}}{z_2\bar{z_2}}=\frac{z_1\bar{z_2}}{|z_2|^2}=(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_1^2+x_2^2})$$

بین اعداد مختلط و زیر مجموعه ماتریس ها تناظر یک به یک به صورت زیر برقرار است.

$$a+ib \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

اگر $a+ib\neq 0$ آن‌گاه

$$a+ib \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \Leftrightarrow |a+ib|\exp^{i\phi}$$

که شامل یک دوران با اندازه ϕ حول مبدا و یک تجانس با ضریب $\sqrt{a^2+b^2}$ می‌باشد.
همچنین برای ضرب در عدد مختلط هم ارزی های زیر را داریم:

$$(a+ib)\times(x+iy) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

مثال: فرض کنید $k>0$ ، z_1 و z_2 اعداد مختلط ثابتی باشند. مکان هندسی $|\frac{z-z_1}{z-z_2}|=k$ را مشخص کنید.

$$|\frac{z-z_1}{z-z_2}|^2=k^2 \Leftrightarrow (\frac{z-z_1}{z-z_2})(\frac{\bar{z}-\bar{z_1}}{\bar{z}-\bar{z_2}})=k^2$$

$$\Leftrightarrow (k^2-1)z\bar{z}+(z_1-k^2z_2)\bar{z}+(\bar{z_1}-k^2\bar{z_2})z-z_1\bar{z_1}+k^2z_2\bar{z_2}=0$$

اگر $k \neq 1$ آنگاه معادله فوق معادله یک دایره است که توسط رابطه زیر مشخص می‌شود

$$|z-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}|=\frac{k}{|1-k^2|}|z_1-z_2|\,,\ z_1\neq z_2$$

اگر $k=1$

$$(z_1-z_2)\bar{z}+(\bar{z_1}-\bar{z_2})z-z_1\bar{z_1}+z_2\bar{z_2}=0 \Leftrightarrow |z-z_1|=|z-z_2|$$

که معادله عمود منصف خطی است که z_1 را به z_2 وصل می‌کند.

نکته: دو بردار z_1 و z_2 را موازی گویند هر گاه عدد حقیقی غیر صفر k وجود داشته باشد بطوریکه

$$z_1=kz_2 \Leftrightarrow z_1\bar{z_2}=k|z_2|^2 \Rightarrow Im\{z_1\bar{z_2}\}=0$$

دو بردار z_1 و z_2 عمود بر هم گویند اگر و تنها اگر عدد حقیقی غیر صفر k وجود داشته باشد بطوریکه $z_1=kz_2e^{i\frac{\pi}{2}}$

۲.۱.۱ شناسه یا آرگومان

اندازه ای از زاویه θ که بردار غیر صفر z با محور حقیقی مثبت می‌سازد یک شناسه یا آرگومان نامیده می‌شود و با $\arg z$ نمایش داده می‌شود

$$\cos(\arg z)=\frac{Re\{z\}}{|z|} \qquad \sin(\arg z)=\frac{Im\{z\}}{|z|}$$

$Arg\,z$ را برای مقدار مشخص و منحصر به فرد از

$$-\pi<\arg z\leq\pi \quad or \quad 0\leq\arg z<2\pi$$

به کار می‌بریم این مقدار θ به مقدار اصلی شناسه مرسوم است.

برای هر عدد حقیقی θ داریم

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

برای عدد مختلط z نیز برابر است یعنی $e^{iz}=\cos z+i\sin z$

نمایش قطبی اعداد مختلط:

$$z=x+iy=|z|(\cos(Argz)+isin(Argz))=r(\cos]\theta+i\sin\theta)=|z|e^{iArgz}=re^{i\theta}$$

۳.۱.۱ توان عدد مختلط

برای عدد مختلط غیر صفر $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ توان n ام به فرمول دموآر مدوف است به صورت زیر داریم

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n \exp^{in\theta}\,,\ n \in \mathbb{Z}$$

مثال: مقدار $(1-i)^{16}$ را بدست آورید.

$$1 - i = \sqrt{1^2 + (-1)^2} e^{i(-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \Rightarrow (1-i)^{16} = \sqrt{2}^{16}(\cos(-\frac{-16\pi}{4}) + i\sin(-\frac{-16\pi}{4})) = 2^8(1+0i) = 2^8$$

ریشه عدد مختلط

عدد مختلط z را درنظر بگیرید عدد مختلط w را ریشه n ام z می‌گیریم هرگاه $\qquad w^n = z$

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta_0 + isin\theta_0)$$

$$w = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{2k\pi + \theta_0}{n} + i\sin\frac{2k\pi + \theta_0}{n}); k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

مثال: ریشه معادله $z^4 - 1 = i$ را بدست آورید.

$$z^4 = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$$

$$z = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{4} + i\sin\frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{4}); k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16})$$

$$z_1 = (\cos\frac{2\pi + \frac{\pi}{4}}{4} + i\sin\frac{2\pi + \frac{\pi}{4}}{4}) = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16})$$

$$z_2 = z_3$$

۲.۱ همسایگی

یک همسایگی عدد حقیقی x_0 فاصله ای به شکل $(x_0 - r, x_0 + r)$ است که r یک عدد حقیقی و مثبت است.

$$N_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < r\} \subseteq \mathbb{R}$$

۳.۱ نقطه درونی

نقطه درونی z_0 را نقطه درونی $S \subseteq \mathbb{C}$ گوییم هر گاه همسایگی از z_0 داشته باشد که درون S است.

۴.۱ مجموعه باز

مجموعه $S \subseteq \mathbb{C}$ را باز گوییم هرگاه دو نقطه آن درونی باشد.

۱.۴.۱ نقطه خارجی

نقطه z_0 را نقطه خارجی $S \subseteq \mathbb{C}$ گوییم هرگاه یک همسایگی z_0 در مجموعه S نباشد.

۲.۴.۱ نقطه مرزی

نقطه z_0 را نقطه مرزی مجموعه $S \subseteq \mathbb{C}$ گوییم هرگاه نه نقطه داخلی و نه نقطه خارجی باشد.

۵.۱ نقطه حدی

نقطه z_0 را نقطه حدی $S \subseteq \mathbb{C}$ گوییم هرگاه

$$\forall r > 0 \quad N_r(z_0) \cap S \backslash \{z_0\} \neq \emptyset$$

۶.۱ مجموعه بسته

مجموعه $S \subseteq \mathbb{C}$ بسته است هرگاه شامل همه نقاط حدی اش باشد.

۷.۱ بستار مجموعه

بستار مجموعه $S \subseteq \mathbb{C}$ را با $\bar{S}$ نمایش می‌دهند و شامل نقاط S و نقاط حدی S است.

۸.۱ صفحه مختلط توسعه یافته

$$\mathbb{C}^\star = \mathbb{C} \cup \{\mp\infty\}$$

مثال: $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall z(|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon)$$

$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall(\frac{1}{|z|} < \delta) \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon)$$

$\lim_{z\to-\infty} = w_0$ در کامپلکس ها منفی نداریم چون ترتیب ندارد.

$$d(x, y) = |x| + |y| \qquad d(x, y) = |x + y|$$

$$\mathbb{C}^\star = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \qquad \lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$$

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall z(\frac{1}{|z|} < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon)$$

مثال: $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$

$$\forall > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall z, (|z - z_0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{f(z)} < \epsilon)$$

نکته:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = w_0$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} f(\frac{1}{f(z)} = 0$$

۹.۱ نگاشت مختلط

فرض کنید S یک مجموعه باشد تابع مختلط w را از متغیر های $z = x = iy$ به صورت
$f: S \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$g: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$w = g(t) = x(t) + iy(t) = (x(t), y(t))$$

نمایش می‌دهیم.
تابع $w = f(z)$ تک کقداری است اگر به ازای هر مقدار از z در حوزه تعریف S یک و تنها یک مقدار به w نسبت داده می‌شود.
مثال

۱. تابع $w = f(z) = z^2$ تک مقداریست.

۲. تابع $Arg(z)$ تک مقداری است.

۳. $|z| \quad , \quad Re\{z\} \quad , \quad Im\{z\}$ تک مقداریست.

تعریف: تابع $w = f(z)$ چند مقداری است اگر برای بعضی یا تمام مقادیر z در حوزه تعریف S ، مقادیر مختلفی به w نسبت داده شود.
مثال:

۱. تابع $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$

$$z = i \qquad (i)^{\frac{1}{2}} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i1)$$

۲. تابع چند مقداری $k \in \mathbb{Z} \qquad \arg z = 2k\pi + Argz, \quad k = 0, \mp1, \mp2, \ldots$

فصل ۲

فصل دوم

۱.۲ حد

فرض کنید تابع $w = f(z)$ در همه نقاط z از یک همسایگی محذوف z_0 تعریف شده باشد حد تابع $w = f(z)$ در نقطه z_0 را با نماد

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

نمایش می دهیم و بدان معنی است که

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z > 0 (|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon)$$

نکته: وقتی که $z \to z_0$ ممکن است z در امتداد مسیر های مختلف به z_0 نزدیک شود در صورت وجود حد ، حاصل تمامی حدود باهم برابر هستند. **مثال:** ثابت کنید نگاشت $f(z) = Argz$ روی قسمتم منفی محور حقیقی حد ندارد.

اثبات: فرض کنید $z_0 \in (-\infty, 0)$

$$z_n = z_0 + \frac{i}{n} \quad ; \quad z' = z - \frac{i}{n}$$

$$f(z_n) = Arg(z_n) = \arctan(\frac{1}{nz_0}) = n$$

$$f(z_n') = Arg(Z_n') = \arctan(\frac{-1}{nz_0}) = -\arctan(\frac{1}{nz_0}) = -n$$

۲.۲ پیوستگی

تابع $f : S \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ در نقطه z_0 پیوسته است هرگاه

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

مثال: پیوستگی تابع زیر را در $z_0 = (0,0)$ را بررسی کنید.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{z} & z \neq (0,0) \\ 1 & z = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{z\to(0,0)} f(z) = \lim_{y\to 0} \frac{-iy}{iy} = -1$$

$$\lim_{z\to(0,0)} f(z) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

حد نداریم.

- روش دوم(قطبی):

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

$$\lim_{z\to(0,0)} f(z) = \lim_{r\to 0} \frac{r(\cos\theta - i\sin)}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \lim_{r\to 0} \frac{(\cos\theta - i\sin)}{(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{(\cos\theta - i\sin)}{(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

حد ندارد.

۳.۲ پیوستگی یکنواخت

تابع $w = f(z)$ را در ناحیه $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت می‌گوییم

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall z_1, z_2(|z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon)$$

مثال: تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ روی مجموعه $R = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$ پیوسته یکنواخت نیست.

مثال: تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ روی مجموعه

$$R_\eta = \{z \in \mathbb{C}; |z| \geq \eta, \eta > 0\}$$

پیوسته یکنواخت هست.

۴.۲ مشتق

فرض کنید تابع $f(z) = w$ را در دامنه $D \subseteq \mathbb{C}$ دراین صورت مشتق $f(z)$ در نقطه z_0 که آن را با $f'(z_0)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

مثال: نشان دهید تابع $f(z) = \bar{z}$ در صفحه مختلط مشتق پذیر نیست.
فرض کنید $z_0 \in \mathbb{C}$ دلخواه باشد $\quad z_0 = x_0 + iy_0 \quad , \quad z = x + iy$

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}$$

$$\overset{x=x_0, z=x_0+iy}{=} \lim_{y \to y_0} \frac{x_0 - iy - x_0 + iy_0}{x_0 - iy - x_0 - iy_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{-iy + iy_0}{iy - iy_0} = -1$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \overset{y=y_0, z=x+iy_0}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{x - iy_0 - x_0 + iy_0}{x - iy_0 - x_0 - iy_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

۵.۲ معادلات کشی-ریمان

تابع $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ مشتق پذیر باشد آنگاه معادلات زیر برقرار است.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \end{cases}$$

شرط لازم مشتق پذیری در نقطه $z_0 = (x_0, y_0)$

$$\begin{cases} u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) = v_x(z_0) \end{cases}$$

مشتق تابع در نقطه z_0 به صورت

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

یا

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

مثال: برای تابع

$$f(z)=\bar{z}=x-iy \quad , \quad u(x,y)=x, v(x,y)=y$$

معادلات کشی ـ ریمان در نقطه دلخواه $z=z_0$ به صورت زیر است:

$$u(x,y)=x \quad , \quad v(x,y)=-y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

شرط لازم مشتق پذیر را ندارد پس در هیچ نقطه ای از $\mathbb{C}$ مشتق پذیر نیست. **مثال:**

$$f(z)=\begin{cases}\frac{(1+i)xy}{x^3+y^3} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$$

مشتق پذیری تابع فوق را در $z=0$ بررسی کنید.

$$f(z)=\begin{cases}\frac{xy}{x^3+y^3}+i\frac{xy}{x^3+y^3} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$$

$$u(x,y)=\frac{xy}{x^3+y^3} \quad , \quad v(x,y)=\frac{xy}{x^3+y^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

$$f'(0,0)=\lim_{z\to(0,0)}\frac{f(z)-f(0,0)}{z}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{(1+i)xy}{x^3+y^3}-0}{x+iy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{(1+i)xy}{x^3+y^3}-0}{x+iy}\overset{x=y}{=}$$

$$\lim_{z\to(0,0)}\frac{(1+i)xy}{(x^3+y^3)(x+iy)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+i)x^2}{2x^3(1+i)x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+i)}{2x^2(1+i)}=\infty$$

تابع در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست.

۶.۲ معادلات کشی_ریمان در مختصات قطبی

از آنجایی که $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ می‌باشد اگر تابع $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ مشتق پذیر باشد آنگاه

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}(z_0) \end{cases}$$

و مشتق تابع در نقطه z_0 به صورت

$$f'(z_0) = e^{i\theta}(\frac{\partial u}{\partial r}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial r}(z_0)) = e^{-i\theta}(\frac{\partial f}{r}(z_0))$$

مثال: برای تابع $f(z) = \ln z$ با $-\pi < Argz < \pi$ و $r > 0$ ، معادلات کشی_ریمان در نقطه دلخواه $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}\%(-\infty, 0)$ بررسی کنید.

$$f(z) = \ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + \ln(e^{i\theta}) = \ln r + i\theta$$

که

$$u(r,\theta) = \ln r \quad , \quad v(r,\theta) = i\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} == 0$$

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(\frac{\partial f}{\partial r]}(z_0)) = e^{-i\theta_0}(\frac{1}{r_0} + ix_0) = e^{-i\theta_0}\frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_0 e^{i\theta_0}} = \frac{1}{z_0}$$

۷.۲ تابع تحلیلی

تابع $w = f(z)$ در نقطه z تحلیلی گوییم هرگاه یک همسایگی از این نقطه z وجود داشته باشد به طوریکه در همه جا این همسایگی مشتق پذیر باشد.

تعریف تابع تام: تابعی که در همه جای دامنه تابع تحلیلی باشد تابع تام نامیده می‌شود.

قضیه(شرط کافی تحلیلی بودن): فرض کنید $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در دامنه D تعریف شده و توابع $u(x,y), v(x,y)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند و در تمام نقاط دامنه f ، معادلات کشی_ریمان برقرار باشد در این صورت $f(z)$ در D تحلیلی است.

۸.۲ نقطه تکین

نقطه z_0 را تکین تابع $w = f(z)$ گوییم هرگاه در z_0 تحلیلی باشد و در نقطه ای از همسایگی z_0 تحیلی باشد. **مثال:** $z = 0$ برای تابع $\frac{1}{z}$ یک نقطه تکین است.

۹.۲ تابع همساز

هر تابع حقیقی

$$\begin{cases} u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to u(x,y) \end{cases}$$

که دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد و در معادلات لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ صدق کند تابع همساز نامیده می‌شود.

قضیه: اگر تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در دامنه D تحلیلی باشد توابع مولفه ای آن یعنی u, v در D همساز هستند.

تعریف:

v مزدوج همسازی از u نامیده می‌شود.

۱۰.۲ رابطه همسازی برای تابع تحلیلی در نمایش قطبی

اگر تابع $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ در دامنه D تحلیلی باشد آنگاه

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

مثال: نشان دهید $u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$ یک تابع همساز است. تابع مزدوج همسازی آن را بدست آورید.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy + 4x \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6y + 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 - 4y \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6y - 4$$

در معادلات لاپلاس صدق می‌کند.

فرض کنید v مزدوج همساز u است در اینصورت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ یک تابع تحلیلی است پس در معادلات کشی–ریمان صدق می‌کند

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 6xy + 4x \Rightarrow v(x,y) = \int (6xy + 4x)dy = 3xy^2 + 4xy + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 - 4y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -3x^2+3y^2+4y = 3y^2+4y+g'(x) \Rightarrow g'(x) = -3x^2 \Rightarrow g(x) = \int -3x^2\,dx$$

$$g(x) = -x^3 + c$$
$$v(x,y) = 3xy^2 + 4xy - x^3 + c$$

۱۱.۲ توابع مقدماتی

۱.۱۱.۲ تابع نمایی

تابع نمایی را به ازای هر عدد مختلط $z = x+iy$ به فرم $\exp(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y) =$ $e^x\cos y + e^x \sin y$ تعریف می‌کنیم. تابع نمایی e^z در شرط کشی–ریمان صدق می‌کند و مشتقات جزئی پیوسته دارد بنابراین در هر نقطه از صفحه مختلط مشتق پذیر است $(e^z)' = e^z$ لذا تابع تحلیلی است.

مثال: $\exp(\bar{z}) = e^{\bar{z}} = e^x(\cos y - i\sin y) = e^x\cos y - i\sin y$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -e^x\cos y \end{cases}$$

پس شرط لازم مشتق پذیر ندارد پس تحلیلی نیست.

۲.۱۱.۲ خواص تابع نمایی

۱. برای هر عدد مختلط $z = x+iy$ داریم: $e^z \neq 0$

۲. $|e^z| = e$

۳.

$$\arg(e^z) = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{2\pi i} = 1 \quad , \quad e^{z+2\pi i} = e^z$$

یعنی تابع e^z متتناوب است و دوره متناوب آن $2\pi i$

$$\arg(e^z) = \tan^- 1(\frac{Im(e^z)}{Re(e^z)}) = \tan^- 1(\frac{e^x\sin y}{e^x\cos y}) = y$$

۳.۱۱.۲ توابع مثلثاتی

برای هر عدد مختلط z فرمول اویلر به صورت زیر است

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

در این صورت برای هر z در صفحه مختلط با توجه به فرمول اویلر داریم:

$$e^{\mp iz} = \cos z \mp i \sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

۴.۱۱.۲ خواص توابع مثلثاتی

۱. توابع $\sin z$ و $\cos z$ در صفحه مختلط تحلیلی است. (چون تابع e^z تحلیلی است)

۲. $(\cos z)' = -\sin z \qquad (\sin z)' = \cos z$

۳.

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

۴.

$$\sin(i\theta) = i\sinh\theta$$

$$\sin(i\theta) = \frac{e^{i(i\theta)} - e^{-i(i\theta)}}{2i} = \frac{e^{-\theta} - e^{+\theta}}{2i} = i\sinh\theta$$

۵.

$$\cos(i\theta) = \cosh\theta$$

۶.

$$\sin(z) = \sin(x+iy) = \sin x\cos(iy) + cosx\sin(iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$$

$$Re(\sin z) = \sin x\cosh y \qquad Im(\sin z) = i\cos x\sinh y$$

۵.۱۱.۲ توابع هایپربولیک

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

۶.۱۱.۲ خواص توابع هایپربولیک

۱. $\sinh z$ و $\cosh z$ در صفحه مختلط تحلیلی است.

۲.
$$(\cosh z)' = \sinh z \qquad (\sinh z)' = \cosh z$$

۳.
$$\cosh^2 - \sinh^z = 1$$

۴.
$$\cosh(iz) = \cos z$$

۵.
$$\sinh(z) = \sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

۶.
$$\cosh(z) = \cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

۷.۱۱.۲ تابع لگاریتم

لگاریتم را می‌توان به عنوان مقداری چون w به طوریکه $e^w = z$ باشد، تعریف کرد.
اما این تعریف با توجه به متناوب بودن تابع نمایی، وجود لگاریتم منحصر به فرد را خنثی می‌کند.
زیرا اگر $e^w = z$ آنگاه برای هر عدد صحیح k داریم:

$$e^{w+2k\pi i} = z$$

از این رو لگاریتم عدد مختلط z را که با $\ln z$ نمایش می‌دهیم، به صورت مجموعه ای از همه مقادیر

$$w = \ln z \quad , \quad e^w = z$$

باشد بنابراین

$$Ln(z) = \{w \in \mathbb{C}; e^w = z\}$$

L بزرگه چون چند مقداری است.
فرض کنیم $z = re^{i(\theta+2k\pi)}$ که k عدد صحیح و $r \neq 0$ است. از معادله $e^w = z$ که $w = u + iv$ داریم

$$e^w = z \to e^{u+iv} = re^{i(\theta+2k\pi)} \qquad e^u = r, v = \theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین $w = u + iv = Ln(z) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$$w = Ln(z) = \ln|z| + i\arg z$$

از آنجایی که $argz$ چند مقداری است تابع $Ln(z)$ چند مقداری می‌باشد. با انتخاب $\arg z = Argz$ لگاریتم

$$Lnz = \ln z = \ln|z| + iArgz$$

که در آن $-\pi < Argz \leq \pi$ را لگاریتم اصلی می‌نامیم.

مثال:

$$Ln1 = \{w \in \mathbb{C}; e^w = 1\} = \{2k\pi i; k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\ln 1 = \{2k\pi i; k = 0\} = 0$$

مثال:

$$Ln(-1) = \ln|-1| + iarg(-1) = \pi i + 2k\pi i; k \in \mathbb{Z}$$
$$\ln(-1) = \pi i$$

مثال:

$$Ln(1-\sqrt{-3}) = \{\ln 2 + i(2k\pi - \frac{\pi}{3}); k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\ln(1-\sqrt{-3}) = \ln 2 - \frac{\pi}{3}$$

نکته: از آنجاییکه تابع تک مقداری $Argz$ در

$$\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] = \{z \in \mathbb{C}; z + |z| \neq 0\}$$

پیوسته است لذا تابع لگاریتم اصلی

$$\ln z = \ln|z| + iArgz \qquad -\pi < Argz < \pi$$

در $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ پیوسته است.

مشتق تابع لگاریتم اصلی برای هر $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ تابع

$$\ln z = \ln|z| + iArgz = \ln r + i\theta = u(r,\theta) + iv(r,\theta) \qquad \ln r = u(r,\theta), \theta = v(r,\theta)$$

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} = v_\theta \\ \theta_r = -\frac{1}{r}u_\theta \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} u_r = \frac{1}{r} \\ u_\theta = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

$$u_r = 0, u_\theta = 0 \Rightarrow v_r = -\frac{1}{r}$$

$$\frac{d}{dz}\ln z = e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial r} = e^{-i\theta(u_r + iv_r)} = e^{-i\theta(\frac{1}{r}+0)} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

۸.۱۱.۲ نمایی کسری

برای دو عدد صحیح و مثبت m و n که نسبت به هم اول باشند، تعریف می‌کنیم.

$$(z^{\frac{1}{n}})^m = e^{\frac{m}{n}Lnz} = e^{\frac{m}{n}}(\ln|z|+i(Argz+2k\pi)) = e \qquad z \neq 0, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

دارای n مقدار متمایز می‌باشد.
فرض کنید c یک عدد مختلط باشد تعریف می‌کنیم

$$z^c = e^{cLnz} = e^{c(\ln|z|+i(Argz+2k\pi))} = |z|^2 e^{i(Argz)} e^{i(2k\pi)} \quad z \neq 0, k \in \mathbb{Z}$$

نکته: اگر C گویا نباشد، آنگاه z^c دارای بی‌نهایت مقدار است. **مثال:** مقادیر $5^{\frac{1}{2}}$ را بدست آورید.

$$5^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}Ln5} = e^{\frac{1}{2}(\ln 5+i(Arg5+2k\pi))} = \sqrt{5}e^{k\pi i} = \mp\sqrt{5} \quad ; \quad k = 0, 1$$

مثال: مقادیر i^i را بدست آورید.

$$e^{iLni} = e^{i(\ln|i|+i(Arg5+2k\pi))} = e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi i} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

تابع $z^{\frac{1}{n}}$ یک تابع n مقداری در ریشه n ام z است یعنی

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}Lnz} = e^{\frac{1}{n}(\ln|z|+i(Argz+2k\pi))} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{Arg(z)}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

۱۲.۲ تبدیل خطی

$$w = az + b$$

۱. اگر $a = 1$ یک انتقال داریم و شکل در صفحه w همانند شکل در صفحه z است اما نسبت به مرکز مختصات به صورت متفاوت جایگذاری شده اند.

۲. اگر $z_2 \to w_2 \qquad z_1 \to w_1$ آنگاه

$$|z_1 - z_2| = |w_1 - w_2| \qquad \arg(z_1 - z_2) = \arg(w_1 - w_2)$$

۳. اگر $a \neq 0$ و $b = 0$ آنگاه

(آ) اگر a حقیقی باشد آنگاه

$$|w| = |a||z| \quad , \quad \arg w = \arg z$$

اگر $a > 1$ یک انبساز داریم
اگر $a < 1$ یک انقباض داریم.

(ب) اگر a مختلط باشد یعنی

$$a = |a|e^{i\alpha}$$

آنگاه نگاشت شامل یک دوران به اندازه α حول مبدا یک اقباض یا انبساط است.
نگاشت

$w = \frac{1}{z}$ این نگاشت تناظری یک به یک بین نقاط غیر صفر صفحه z و نقاط صفحه w برقرار می‌کند با فرض $z = re^{i\theta}$

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

مثال: نگاشت $\frac{1}{z}$ هر دایره با خط راست را به یک دایره با خط راست تضویر می‌کند.

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \tag{۱.۲}$$

$$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

با توجه به نگاشت $w = \frac{1}{z}$ داریم:

$$z = \frac{1}{w} = \frac{1}{u + iv} = \frac{1 \times (u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = x + iy$$

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}\,,\ y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

در این صورت ب جایگذاری تساوی های فوق در ۱.۲ خواهیم داشت.

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cu + A = 0$$

که معادله کلی خط یا دایره در صفحه w است.

فصل ۳

انتگرال

۱.۳ خم پیوسته یا کمان

شکل پارامتری یک خم پیوسته یا کمان به صورت

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad a \leq t \leq b$$

می‌باشد که φ, ψ در فاصله $[a, b]$ پیوسته هستند و با فرض پیوستگی φ و ψ کمان

$$z(t) = \varphi(t) + i\psi(t); \quad a \leq t \leq b$$

منحنی پیوسته ای را تعریف می‌کند که در صفحه z نقطه $A = z(a)$ را به نقطه $B = z(b)$ وصل می‌کند. **مثال:** خط شکسته

$$z(t) = \begin{cases} t + it & 0 \leq t \leq 1 \\ t + i & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

متشکل از پاره خطی که از 0 تا $1 + i$ و به دنبال آن پاره‌خطی از $1 + i$ تا $2 + i$ یک خم پیوسته یا کمان است.

۲.۳ منحنی ساده

اگر منحنی پیوسته یا کمان

$$z(t) = \varphi(t) + i\psi(t); \quad a \leq t \leq b$$

خودش را قطع نکند و یا خودش مماس نباشد.

اگر $t_1 \neq t_2$ داشته باشیم

$$z(t_1) \neq z(t_2)$$

آن را منحنی ساده یا کمان جردن می‌نامیم.

مثال: $0 \leq t \leq 1 \qquad z(t) = t + i\ln(1+t)$ یک منحنی ساده یا کمان جردن است که $A = z(0) = 1$ را به نقطه $B = z(1) + 1 + i\ln 2$ وصل می‌کند.

۳.۳ کمان ساده هموار

خم پیوسته یا کمان $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t); \quad a \leq t \leq b$ را کمان ساده هموار گوییم، هرگاه توابع φ, ψ دارای مشتقات پیوسته در $a \leq t \leq b$ باشند.

مثال: منحنی $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \quad z(t) = |t| + i\ln(1+t)$ کمان ساده هموار است.

مثال: $0 \leq t \leq 2\pi \quad z(t) = (t - \sin t) + i(1 - \cos t)$ مکان ساده هموار است.

۴.۳ انتگرال خط

فرض کنید C یک منحنی ساده‌ـ هموار باشد که به صورت

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad a \leq t \leq b$$

نمایش داده شده باشد انتگرال $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ روی C را با -

$$\int_C f(z)dz \quad or \quad \oint_C f(z)dz$$

نمایش داد و آن را انتگرال خطی می‌نامیم و به صورت

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int (v\,dx + u\,dy)$$

یا

$$\int_C f(z)dz = \int_C f(z(t))z'(t)\,dt = \int_a^b f(x(t)+iy(t))(x'(t)iy'(t))dt$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x = \mp\sqrt{1-y^2}$$

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{cases} y = y \\ x = \mp\sqrt{1-y^2} \qquad -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

نکته: اگر $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ دو نوع نمایش پارامتری متفاوت برای فهم C باشند آنگاه

$$\int_C f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt = \int_C f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt$$

یعنی مقدار انتگرال به نحوه پارامتری کردن خم C بستگی ندارد.

مثال:

$$\int_C f(z)dz \qquad f(z)_{=}x^2 + iy^3 \qquad (0,0) \to (1,1), \quad C : y - x^2$$

$$\int_C f(z)dz = \int_0 1 f(z(t))z'(t)dt = \int_0^1 = (t^2+it^6)(1+2ti)dt = \int_0^1 (t^2-2t^7+i(2t^3+t^6))dt$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{9}{14}i$$