گزارش پروژه آنالیز عددی

موضوع

مدل SIR برای شیوع بیماری

(حل معادلات با روش های اویلر و رانگ-کوتا)

استاد

دکتر محمدی

پژوهشگران

بهزاد اسمی خانلو

پرهام طالبیان

تاریخ

1402/2/21

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

مقدمه ای بر اصطلاحات و معادلات در کد

SIR فرض می‌کند که جمعیت به سه بخش تقسیم می‌شود: افراد مستعد (S)، افراد عفونی (I)، و افراد بهبودیافته (R). معادلات دیفرانسیل حاکم بر دینامیک این محفظه ها عبارتند از:

$$dS/dt = -\beta SI/N$$

$$dI/dt = \beta SI/N - \gamma I$$

$$dR/dt = \gamma I$$

جایی که:

S تعداد افراد مستعد است

I تعداد افراد عفونی است

R تعداد افراد بهبود یافته است

$N = S + I + R$ اندازه کل جمعیت است

β نرخ عفونت است، که نشان دهنده سرعتی است که افراد مستعد در تماس با افراد عفونی آلوده می شوند.

γ نرخ بهبودی است که نشان دهنده سرعت بهبودی افراد عفونی و مصونیت نسبت به بیماری است.

کد موجود در کلاس SIRModel ارائه شده، این مدل پایه SIR را گسترش می دهد تا شامل محفظه های اضافی برای افراد در معرض (E)، افراد بستری در بیمارستان (H) و افراد مرده (D) باشد. معادلات دیفرانسیل حاکم بر دینامیک این محفظه ها عبارتند از:

$$dS/dt = -\beta SI/N$$

$$dE/dt = \beta SI/N - \sigma E$$

$$dI/dt = \sigma E - (\gamma + \omega)I$$

$$dH/dt = \omega I - \varphi H$$

$$dR/dt = \gamma I + \varphi H$$

$$dD/dt = \sigma ED$$

جایی که:

E تعداد افراد در معرض تماس است که آلوده شده اند اما هنوز عفونی نشده اند

H تعداد افراد بستری شده در بیمارستان است

D تعداد افراد کشته شده است

σ نرخی است که در آن افراد در معرض عفونی شدن هستند

ω میزان بستری شدن افراد عفونی در بیمارستان است

ϕ نرخی است که در آن افراد بستری در بیمارستان بهبود می یابند یا می میرند

توجه داشته باشید که مقادیر خاص پارامترهای σ، ω و φ به طور دلخواه در کد انتخاب شده‌اند و می‌توانند در صورت نیاز برای یک برنامه خاص اصلاح شوند. همچنین توجه داشته باشید که پیاده سازی در کد از روش Runge-Kutta مرتبه چهارم برای حل عددی این معادلات دیفرانسیل استفاده می کند.

نحوه ورودی ، خروجی و چگونگی عملکرد کد

این کد یک رابط کاربری گرافیکی (GUI) را برای شبیه سازی مدل SIR یک بیماری همه گیر تعریف می کند. رابط کاربری گرافیکی دارای چندین فیلد ورودی برای کاربر برای تعیین پارامترهای مدل و یک دکمه "Run" برای شروع شبیه سازی است. خروجی شبیه‌سازی نموداری از تکامل زمانی جمعیت‌های حساس، در معرض، عفونی، بستری، بهبودیافته و مرده و همچنین پیامی است که نشان می‌دهد شبیه‌سازی کامل شده است.

کد با وارد کردن ماژول های لازم شروع می شود: NumPy برای محاسبات عددی، Plotly برای تولید نمودار، PyQt5 برای ایجاد رابط کاربری گرافیکی، و QDesktopServices و QUrl برای برچسب هایپرلینک.

در مرحله بعد کلاس SIRModel تعریف می شود که از کلاس QWidget به ارث می رسد. عناصر رابط کاربری گرافیکی در متد init کلاس ایجاد می شوند که شامل برچسب ها، فیلدهای ورودی، منوی کشویی و یک دکمه می شود. رابط کاربری گرافیکی با استفاده از یک شیوه نامه CSS استایل دهی شده است. روش sir_eq معادلات دیفرانسیل را برای مدل SIR تعریف می‌کند و روش‌های euler_step و rk4_step روش‌های Euler و Runge-Kutta را برای ادغام عددی معادلات دیفرانسیل پیاده‌سازی می‌کنند. روش اجرا زمانی فراخوانی می شود که دکمه "Run" کلیک می شود، و مقادیر ورودی را از عناصر GUI بازیابی می کند، شرایط اولیه را برای مدل SIR تنظیم می کند و معادلات دیفرانسیل را با استفاده از روش انتخاب شده یکپارچه می کند. در نهایت، روش اجرا نمودار مدل SIR را تولید می کند و برچسب خروجی را به روز می کند تا نشان دهد شبیه سازی کامل شده است.

بلوک 'if name == 'main نمونه ای از کلاس SIRModel ایجاد می کند و آن را با استفاده از روش های QApplication و show نمایش می دهد.

ورودی نمونه:

زمان اولیه (روز): 0

زمان پایانی (روز): 100

اندازه مرحله (< 0.1): 0.05

میزان عفونت (beta =< 1): 0.5

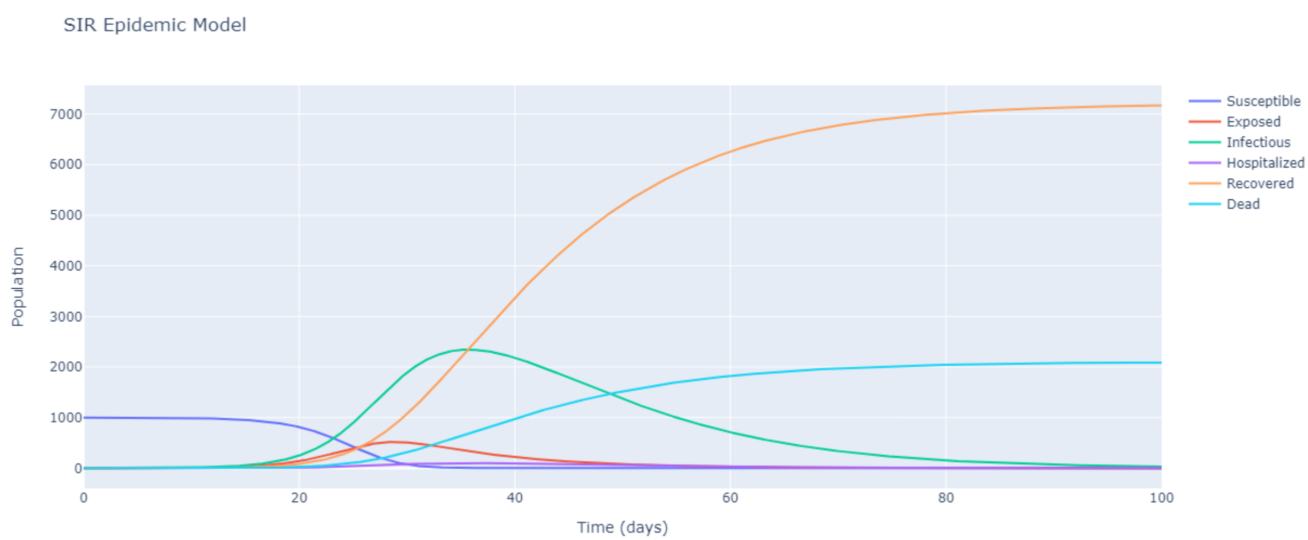
نرخ بازیابی (گاما < 0.1): 0.05

جمعیت مستعد اولیه: 999

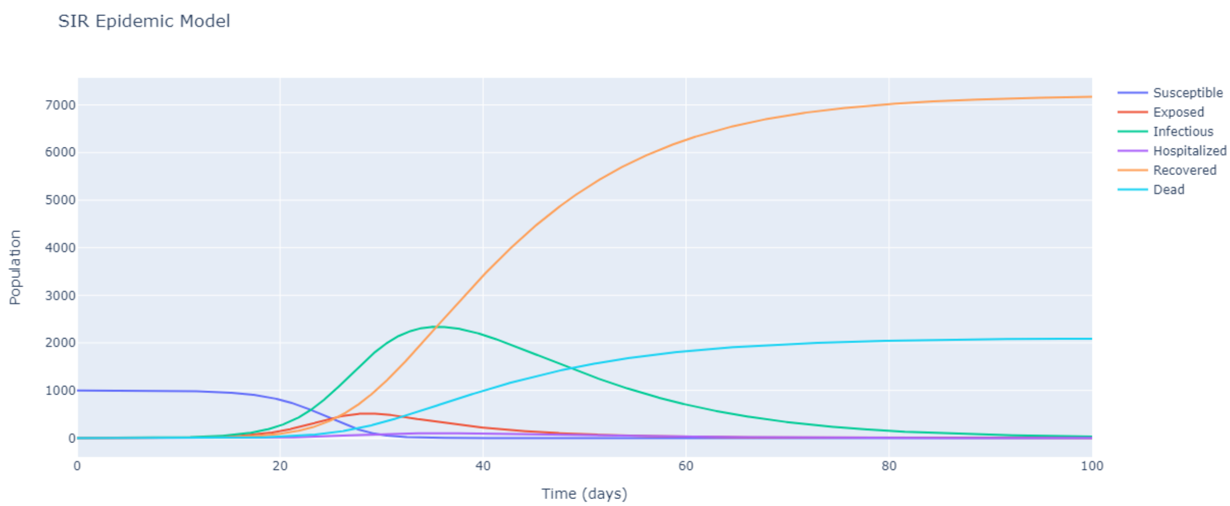
جمعیت عفونی اولیه: 1

خروجی نمونه:

روش ادغام: اویلر



روش ادغام: رانگ-کوتا



طرحی با عنوان "مدل اپیدمی SIR" با محور x با برچسب "زمان (روزها)" و محور y با برچسب "جمعیت". طرح تکامل زمانی جمعیت های حساس، در معرض، عفونی، بستری، بهبود یافته و مرده را نشان می دهد.

یک پیام "شبیه سازی کامل شد." در زیر طرح نمایش داده می شود.

مدل سازی SIR بر پایه سه معادله اصلی

به عنوان اولین گام در فرآیند مدل سازی، متغیرهای مستقل و وابسته را شناسایی می‌کنیم. متغیر مستقل زمان t است که بر حسب روز اندازه‌گیری می‌شود. ما دو مجموعه مرتبط از متغیرهای وابسته را در نظر می گیریم.

اولین مجموعه از متغیرهای وابسته افراد را در هر یک از گروه ها، هر کدام به عنوان تابعی از زمان، شمارش می کند:

S = S(t)	تعداد افراد مستعد است
I = I(t)	تعداد افراد آلوده است

R = R(t)	تعداد افراد بهبود یافته است.

مجموعه دوم متغیرهای وابسته نشان دهنده کسری از کل جمعیت در هر یک از سه دسته است. بنابراین، اگر N کل جمعیت باشد (در مثال ما 7،900،000)، داریم

s(t) = S(t)/N	بخش حساس جمعیت
i(t) = I(t)/N	بخش آلوده جمعیت
r(t) = R(t)/N	بخش بهبود یافته از جمعیت

ممکن است کار با تعداد جمعیت طبیعی تر به نظر برسد، اما اگر به جای آن از کسری ها استفاده کنیم، برخی از محاسبات ما ساده تر خواهد بود. دو مجموعه از متغیرهای وابسته متناسب با یکدیگر هستند، بنابراین هر یک از این مجموعه ها اطلاعات یکسانی را در مورد پیشرفت بیماری همه گیر به ما می دهد.

1. طبق فرضیاتی که ما ساخته ایم، به نظر شما s(t) چگونه باید با زمان تغییر کند؟ چگونه باید r(t) با زمان تغییر کند؟ چگونه باید i(t) با زمان تغییر کند؟
با توجه به فرضیاتی که ما انجام دادیم، s(t) باید با گذشت زمان کاهش یابد، زیرا افراد مستعد آلوده می شوند و به محفظه آلوده منتقل می شوند. r(t) باید با گذشت زمان افزایش یابد، زیرا افراد آلوده بهبود می یابند و به محفظه بهبودیافته می روند. i(t) ابتدا باید با گذشت زمان افزایش یابد، زیرا بیماری در میان جمعیت گسترش می یابد، و سپس با کاهش تعداد افراد مستعد و شروع به از بین رفتن بیماری، در نهایت کاهش می یابد.
2. نمودار هر یک از این توابع را روی یک تکه کاغذ ترسیم کنید.
3. توضیح دهید که چرا در هر زمان t، s(t) + i(t) + r(t) = 1
در هر زمان t، کل جمعیت ثابت و برابر N فرض می شود. بنابراین، مجموع کسری از افراد در هر بخش، s(t) + i(t) + r(t)، باید با کل برابر باشد. کسر جمعیت که 1 است. این بدان معناست که کل جمعیت

به سه بخش مستعد، آلوده و بهبودیافته تقسیم می شود و مجموع کسری از افراد در هر بخش باید همیشه برابر با کسر کل جمعیت باشد. این رابطه برای همه زمان‌های t صادق است و نتیجه مفروضات مدل SIR است.

در مرحله بعد، چند فرض در مورد نرخ تغییر متغیرهای وابسته خود داریم:

- هیچ کس به گروه مستعد اضافه نمی شود، زیرا ما تولد و مهاجرت را نادیده می گیریم. تنها راهی که فرد از گروه مستعد خارج می شود، آلوده شدن است. ما فرض می کنیم که نرخ زمانی تغییر S(t)، تعداد افراد مستعد، به تعداد افراد مستعد در حال حاضر، تعداد افرادی که قبلا آلوده شده اند، و میزان تماس بین افراد مستعد و مبتلا بستگی دارد. به طور خاص، فرض کنید که هر فرد آلوده تعداد b ثابتی از تماس‌ها در روز دارد که برای گسترش بیماری کافی است. همه این تماس ها با افراد مستعد نیست. اگر اختلاط همگن جمعیت را فرض کنیم، کسری از این تماس ها که با افراد حساس هستند s(t) است. بنابراین، به طور متوسط، هر فرد آلوده هر روز b s(t) افراد آلوده جدید تولید می کند. [با یک جمعیت مستعد زیاد و یک جمعیت نسبتاً کوچک آلوده، می‌توانیم موقعیت‌های شمارش دشواری را نادیده بگیریم، مانند برخورد یک فرد مستعد با بیش از یک بیمار در یک روز معین.]
- ما همچنین فرض می کنیم که کسر ثابت k از گروه آلوده در طول هر روز معین بهبود می یابد. به عنوان مثال، اگر میانگین طول مدت عفونت سه روز باشد، به طور متوسط، یک سوم از جمعیت فعلی آلوده هر روز بهبود می یابند. (به بیان دقیق، منظور ما از "عفونی" واقعا "عفونی" است، یعنی می تواند بیماری را به یک فرد مستعد سرایت کند. یک فرد "درمان یافته" همچنان می تواند احساس بدبختی کند، و حتی ممکن است بعداً بر اثر ذات الریه بمیرد.)

بیایید ببینیم این مفروضات در مورد مشتقات متغیرهای وابسته به ما چه می گویند.

4. معادله حساس نحوه هر یک از اجزای معادله دیفرانسیل را به دقت توضیح دهید

$$\frac{ds}{dt} = -b\, s(t)\, I(t)$$

که در آن s(t) کسری از جمعیتی است که در زمان t مستعد هستند، I(t) کسری از جمعیتی است که در زمان t آلوده شده اند و b نرخ تماس موثر است (میزان ورود افراد مستعد در تماس با افراد آلوده). از متن قبل از این مرحله به دست می آید. به خصوص،

- چرا عامل I(t) وجود دارد؟
- علامت منفی از کجا آمده است؟

علامت منفی در معادله نشان می دهد که نرخ تغییر محفظه حساس منفی است، به این معنی که تعداد افراد مستعد در طول زمان کاهش می یابد، زیرا آنها آلوده می شوند. فاکتور -b s(t) I(t) نشان دهنده میزانی است که افراد مستعد آلوده می شوند. محصول s(t) I(t) نشان‌دهنده کسری از افراد مستعد است که با افراد آلوده در تماس هستند و آلوده می‌شوند، در حالی که پارامتر b نشان‌دهنده سرعتی است که این اتفاق می‌افتد.

حال توضیح دهید که چگونه این معادله به معادله دیفرانسیل زیر برای s(t) منجر می شود.

$$\frac{ds}{dt} = -b\, s(t)\, i(t)$$

برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل برای s(t) بر حسب i(t)، به سادگی می توانیم I(t) را با i(t) جایگزین کنیم، زیرا ما فقط به کسری از جمعیت آلوده علاقه مند هستیم، نه کل. تعداد افراد مبتلا بنابراین، ما داریم:

$$\frac{ds}{dt} = -b\, s(t)\, i(t)$$

این معادله بر اساس مفروضات مدل SIR در رابطه با نرخ تماس موثر و کسری از افراد آلوده در جمعیت، چگونگی تغییر کسری از افراد مستعد در جمعیت را در طول زمان توصیف می‌کند. علامت منفی نشان می دهد که نرخ تغییر محفظه حساس منفی است، به این معنی که تعداد افراد مستعد در طول زمان کاهش می یابد، زیرا آنها آلوده می شوند. اصطلاح -b s(t) i(t) نشان دهنده میزانی است که افراد مستعد در اثر تماس با افراد آلوده آلوده می شوند. با حاصلضرب کسر افراد مستعد (s(t)) و کسری از افراد آلوده (i(t)) و با نرخ تماس موثر (b) متناسب است.

5. معادله بازیابی شده توضیح دهید که چگونه معادله دیفرانسیل مربوطه برای r(t)،

$$\frac{dr}{dt} = k\ \ i(t)$$

جایی که r(t) کسری از جمعیتی است که در زمان t بهبود می یابند، I(t) کسری از جمعیتی است که در زمان t آلوده شده اند، و γ نرخ بهبودی است (میزانی که افراد آلوده بهبود می یابند و به محفظه بازیابی شده).

برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل مربوطه برای r(t) بر حسب i(t)، می توانیم از رابطه بین I(t) و i(t) استفاده کنیم که عبارت است از:

I(t) = N - S(t) - R(t)

که در آن N اندازه کل جمعیت است.

با جایگزینی این معادله برای dr/dt، دریافت می کنیم:

dr/dt = k (N - S(t) - R(t))

با بازآرایی و جایگزینی S(t) = N - I(t) - R(t)، دریافت می کنیم:

dr/dt = k (N - (N - I(t) - R(t)) - R(t))

dr/dt = k I(t)

این معادله بر اساس مفروضات مدل SIR در مورد میزان بهبودی و کسری از افراد مبتلا در جمعیت، چگونگی تغییر کسری از افراد بهبودیافته در جمعیت را در طول زمان توصیف می‌کند. معادله نشان می‌دهد که نرخ تغییر محفظه بازیابی شده متناسب با کسر افراد آلوده ((i(t)) و با نرخ بهبودی (k) است. معادله دیفرانسیل برای محفظه بازیابی شده نشان می دهد که تعداد افرادی که از محفظه آلوده به محفظه بازیافت شده حرکت می کنند در طول زمان در حال افزایش است، زیرا افراد آلوده بیشتری بهبود می یابند و به محفظه بهبود یافته می روند.

از یکی از مفروضات قبل از مرحله 4 نتیجه می گیرد.

6. معادله آلوده توضیح دهد که چرا

$$\frac{ds}{dt} + \frac{di}{dt} + \frac{dr}{dt} = 0$$

مدل SIR برای بیماری‌های عفونی فرض می‌کند که اندازه کل جمعیت N ثابت است و افراد در جمعیت را می‌توان به یکی از سه بخش طبقه‌بندی کرد: حساس (S)، آلوده (I)، یا بهبودیافته/حذف شده (R). معادلات دیفرانسیل حاکم بر نرخ تغییر این محفظه ها عبارتند از:

$$ds/dt = -b\, s(t)\, i(t)$$
$$di/dt = b\, s(t)\, i(t) - k\, i(t)$$
$$dr/dt = k\, i(t)$$

که در آن b نرخ تماس موثر، k نرخ بهبودی است، و s(t)، i(t)، و r(t) به ترتیب کسری از جمعیت در بخش های حساس، آلوده و بهبود یافته در زمان t هستند. .

برای نشان دادن اینکه مجموع نرخ تغییر محفظه ها صفر است، می توانیم سه معادله دیفرانسیل را با هم جمع کنیم:

$$ds/dt + di/dt + dr/dt = -b\, s(t)\, i(t) + b\, s(t)\, i(t) – k\, i(t) + k\, i(t) = 0$$

توجه داشته باشید که دو ترم اول یکدیگر را خنثی می کنند و فقط دو ترم آخر باقی می مانند که همدیگر را خنثی می کنند. این بدان معنی است که مجموع نرخ تغییر محفظه ها همیشه صفر است، که معادل این است که بگوییم اندازه کل جمعیت N ثابت است.

به عبارت دیگر، مدل SIR فرض می‌کند که تعداد کل افراد در جمعیت ثابت است، و هر فردی که از یک بخش (به عنوان مثال، از مستعد به آلوده) نقل مکان می‌کند، باید به بخش دیگری (به عنوان مثال، از آلوده به بهبودیافته) حرکت کند.). بنابراین، سرعت حرکت افراد بین محفظه ها باید متعادل شود، به طوری که اندازه کل جمعیت در طول زمان ثابت بماند. به همین دلیل است که $ds/dt + di/dt + dr/dt = 0$ برای همه زمان‌های t.

این چه فرضی را در مورد مدل منعکس می کند؟ حال به دقت توضیح دهید که هر یک از اجزای معادله چگونه است

$$\frac{di}{dt} = \mathrm{b}\ s(t)\ i(t) - \mathrm{k}\ i(t)$$

معادله دیفرانسیل برای محفظه آلوده در مدل SIR به صورت زیر است:

di/dt = b s(t) i(t) - k i(t)

که در آن s(t) کسری از جمعیتی است که در زمان t مستعد هستند، i(t) کسری از جمعیتی است که در زمان t آلوده شده اند، b نرخ تماس موثر است (میزان ورود افراد مستعد به تماس با افراد آلوده)، و k نرخ بهبودی است (میزانی که افراد آلوده بهبود می یابند و به محفظه بهبود یافته می روند).

برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل برای i(t) به شکل کمی متفاوت، می توانیم عبارت i(t) را فاکتور کنیم:

di/dt = i(t) (b s(t) - k)

این معادله بر اساس مفروضات مدل SIR در رابطه با نرخ تماس موثر، نرخ بهبودی و کسری از افراد مستعد در جمعیت، چگونگی تغییر کسری از افراد آلوده در جمعیت را در طول زمان توصیف می‌کند. توجه داشته باشید که این معادله فرض می کند که اندازه کل جمعیت ثابت است.

اولین عبارت b s(t) i(t)، نشان دهنده میزانی است که افراد مستعد در اثر تماس با افراد آلوده آلوده می شوند. با حاصلضرب کسر افراد مستعد (s(t)) و کسر افراد آلوده (i(t)) و با نرخ تماس موثر (b) متناسب است.

عبارت دوم، k i(t)، نشان دهنده نرخی است که افراد آلوده بهبود می یابند و به محفظه بازیابی شده حرکت می کنند. با کسر افراد آلوده (i(t)) و با نرخ بهبودی (k) متناسب است.

بنابراین، عبارت اول تعداد افراد در حال حرکت از محفظه حساس به محفظه آلوده را نشان می دهد، در حالی که عبارت دوم نشان دهنده تعداد افرادی است که از محفظه آلوده به محفظه بهبودیافته حرکت می کنند.

معادله دیفرانسیل برای محفظه آلوده در مدل SIR این فرض را منعکس می کند که تعداد افراد آلوده در جمعیت در طول زمان به دلیل تأثیر متقابل بین نرخ تماس موثر و نرخ بهبودی تغییر می کند. این معادله توضیح می‌دهد که چگونه کسر افراد آلوده در جمعیت در طول زمان تغییر می‌کند، بر اساس کسری از افراد مستعد و نرخ‌هایی که افراد در آن بین بخش‌ها حرکت می‌کنند.

از آنچه تاکنون انجام داده اید نتیجه می گیرد. به خصوص،

- چرا دو اصطلاح وجود دارد؟
- چرا معقول است که نرخ جریان از جمعیت آلوده به جمعیت بهبودیافته فقط به $i(t)$ بستگی داشته باشد؟
- علامت منفی از کجا آمده است؟

معادله دیفرانسیل برای محفظه آلوده در مدل SIR دارای دو عبارت است زیرا دو فرآیند وجود دارد که بر تعداد افراد آلوده در جمعیت در طول زمان تأثیر می‌گذارد: عفونت‌های جدید و بهبودی. اولین عبارت $b\ s(t)\ i(t)$، نشان دهنده میزانی است که افراد مستعد در اثر تماس با افراد آلوده آلوده می شوند. عبارت دوم، $k\ i(t)$، نشان دهنده نرخی است که افراد آلوده بهبود می یابند و به محفظه بازیابی شده حرکت می کنند. عبارت اول مثبت است زیرا نشان دهنده افزایش تعداد افراد آلوده است، در حالی که عبارت دوم منفی است زیرا نشان دهنده کاهش تعداد افراد آلوده است.

منطقی است که سرعت جریان از جمعیت آلوده به جمعیت بهبودیافته فقط به $i(t)$ بستگی داشته باشد زیرا نرخ بازیابی (k) در طول زمان ثابت است و بنابراین به تعداد افراد مستعد یا بهبودیافته بستگی ندارد. افراد در جمعیت روند بهبودی فقط به تعداد افراد آلوده بستگی دارد، زیرا فقط افراد آلوده می توانند بهبود یابند و به محفظه بهبود یافته منتقل شوند. بنابراین، نرخ جریان از جمعیت آلوده به جمعیت بهبود یافته متناسب با تعداد افراد مبتلا $(i(t))$ است و به تعداد افراد مستعد یا بهبودیافته در جمعیت بستگی ندارد.

علامت منفی در ترم دوم معادله دیفرانسیل، $k\ i(t)$، نشان دهنده این واقعیت است که تعداد افراد آلوده در جمعیت در طول زمان به دلیل بهبودی در حال کاهش است. نرخ بازیابی (k) ثابت مثبت فرض می شود، اما تعداد افراد آلوده $(i(t))$ در طول زمان در حال کاهش است، که

باعث ایجاد علامت منفی در معادله می شود. علامت منفی نشان می دهد که میزان تغییر محفظه آلوده منفی است، به این معنی که تعداد افراد مبتلا به مرور زمان کاهش می یابد، زیرا آنها بهبود می یابند و به محفظه بهبود یافته می روند.

در نهایت، مدل خود را با دادن یک شرط اولیه به هر معادله دیفرانسیل کامل می کنیم. برای این ویروس خاص - آنفولانزای هنگ کنگ در شهر نیویورک در اواخر دهه 1960 - به ندرت کسی در آغاز اپیدمی مصون بود، بنابراین تقریباً همه مستعد ابتلا بودند. فرض می کنیم که سطح کمی از عفونت در جمعیت وجود دارد، مثلاً 10 نفر. 2 بنابراین، مقادیر اولیه ما برای متغیرهای جمعیت عبارتند از

S(0) = 7,900,000
I(0) = 10
R(0) = 0

از نظر متغیرهای مقیاس شده، این شرایط اولیه هستند

s(0) = 1
i(0) = 1.27 x 10^{-6}
r(0) = 0

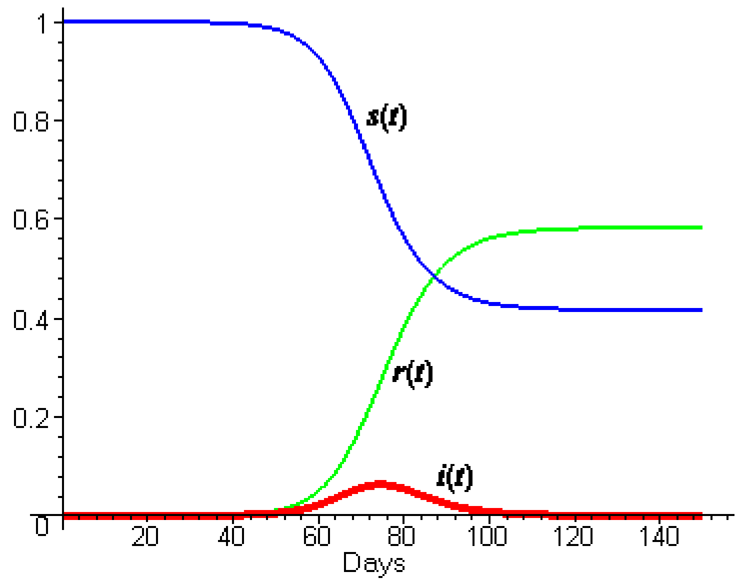
(توجه: مجموع جمعیت های اولیه ما دقیقاً N نیست، و مجموع کسرهای ما دقیقاً 1 نیست. سطح ردیابی عفونت آنقدر کم است که هیچ تفاوتی ایجاد نمی کند.) مدل کامل ما این است

$$\frac{ds}{dt} = -b\, s(t)\, i(t), \qquad s(0) = 1$$

$$\frac{di}{dt} = b\, s(t)\, i(t) - k\, i(t), \qquad i(0) = 1.27 \times 10^{-6}$$

$$\frac{dr}{dt} = k\ i(t), \qquad r(0) = 0$$

ما هنوز مقادیری را برای پارامترهای b و k نمی‌دانیم، اما می‌توانیم آنها را تخمین بزنیم و سپس در صورت لزوم آنها را برای تناسب با داده‌های مرگ اضافی تنظیم کنیم. ما قبلاً میانگین دوره عفونی را سه روز تخمین زده‌ایم، بنابراین $k = 1/3$ را نشان می‌دهد. اگر حدس بزنیم که هر فرد آلوده هر دو روز یک تماس احتمالاً عفونی برقرار می کند، آنگاه b 1/2 خواهد بود. تاکید می کنیم که این فقط یک حدس است. نمودار زیر منحنی های حل این گزینه های b و k را نشان می دهد.



7. در مراحل 1 و 2، ایده های خود را در مورد اینکه توابع راه حل باید چگونه باشند، ثبت کرده اید. چگونه این ایده ها با شکل بالا مقایسه می شوند؟ به خصوص،
   - نظر شما در مورد سطح نسبتا پایین عفونت در اوج همه گیری چیست؟
   - آیا می توانید ببینید که چگونه سطح پایین اوج عفونت می تواند منجر به بیمار شدن بیش از نیمی از جمعیت شود؟ توضیح.