

به نام خدا

درس سیستم‌های کنترل خطی

## ارتباط بین حوزه زمان و فرکانس

پریا ساعی

مهر ۱۴۰۳

## مقدمه

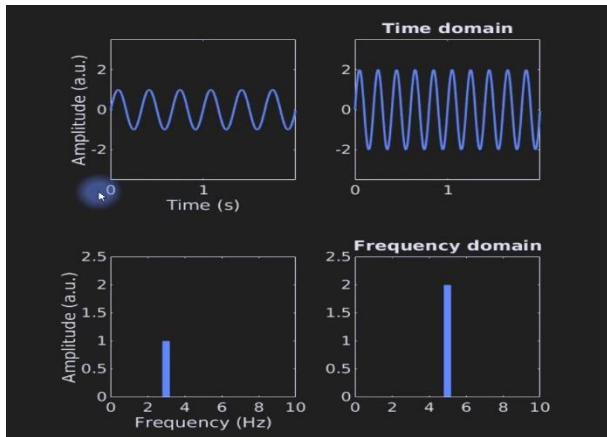
تحلیل در حوزه زمان به معنی بررسی سیگنال های فیزیکی، توابع ریاضی و یا سری های زمانی از داده هایی مانند داده های اقتصادی و یا محیطی با در نظر گرفتن پارامتر زمان است.

در حوزه زمان مقدار تابع یا سیگنال، در حالت های پیوسته-زمان یا گسسته-زمان، به صورت عددهایی حقیقی در لحظات مختلف زمان در نظر گرفته می شود. برای مشاهده شکل موج سیگنال ها در حوزه زمان از دستگاهی به نام اسیلوسکوپ استفاده می شود.

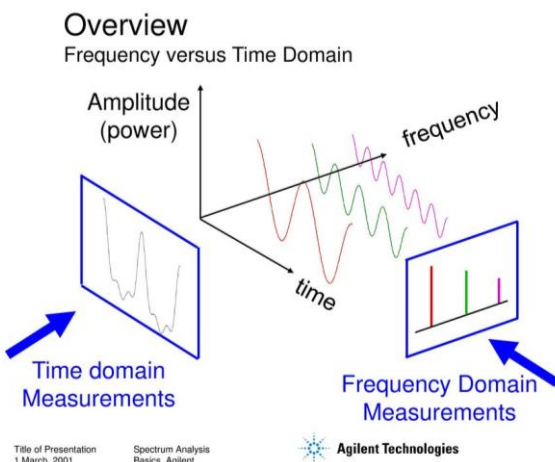
نمودار حوزه زمان نشان می دهد که چگونه یک سیگنال با زمان تغییر می کند. در حالی که نمودار حوزه فرکانس نشان دهنده آن است که چه مقدار از سیگنال در یک باند فرکانسی یا یک رنج خاصی از فرکانس قرار گرفته است. همچنین نمایش حوزه فرکانس شامل اطلاعاتی در مورد میزان شیفیت فاز سیگنال است. سیگنال در حوزه فرکانس با استفاده از اسپکتروم آنالایزر نمایش داده می شود.

واحدهایی همچون ثانیه، دقیقه و ساعت واحدهای اندازه گیری حوزه زمان و هرتز واحد اندازه گیری حوزه فرکانس است.

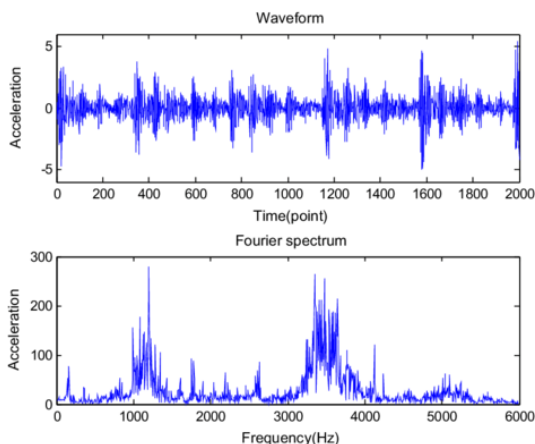
## نمایش سیگنال‌ها در حوزه زمان و فرکانس



نمایش یک سیگنال سینوسی در حوزه زمان با دوره تناوب  $T$  و دامنه  $A$ ، در حوزه فرکانس معادل یک میله در فرکانسی برابر  $\frac{1}{T}$  و با طول  $A$  است.



همانطور که در شکل مشاهده می‌شود، مجموع سیگنال‌های سینوسی در حوزه زمان با میله‌هایی در حوزه فرکانس نمایش داده می‌شود که هر کدام طولی معادل دامنه سیگنال سینوسی متناظر خود داشته و در فرکانسی برابر عکس دوره تناوب همان سیگنال قرار گرفته است.



یکی از آشناترین مثال‌های محتوای فرکانسی در سیگنال‌ها، سیگنال‌های صوتی مانند موسیقی است. در این مورد، تحلیل حوزه فرکانس درک بهتری نسبت به تحلیل حوزه زمان ارائه می‌دهد. زیرا موسیقی بر اساس تجزیه صداها پیچیده به فرکانس‌های جداگانه آن‌ها استوار است.

## تحلیل سیگنال در حوزه زمان و فرکانس

برای درک بهتر ارتباط میان این دو حوزه، به توضیح این مسئله در قالب مثالی می‌پردازیم.

حرکت فردی به سمت مقصد را در نظر بگیرید. اگر فرض کنیم شخص با سرعت ثابت  $v$  در حرکت است، می‌توان فاصله او از مقصد را تابعی خطی از زمان در نظر گرفت:

$$x(t) = v \cdot t$$

حال به مسئله فشردن و رها کردن فنر می‌پردازیم که در آن تغییرات مکان تابعی خطی از زمان نیست. با بررسی این مسئله، به معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

با حل معادله به دست آمده می‌توان یافت که رابطه مکان فنر با زمان، رابطه ای سینوسی است:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

می‌توان تابع بالا را در حوزه فرکانس به صورت میله‌ای با طول  $A$  در فرکانس  $f = \omega/2\pi$  نمایش داد.

با توجه به آنچه از تبدیل فوریه می‌دانیم، هر سیگنال متناوب در حوزه زمان را می‌توان به صورت مجموعی از سیگنال‌های سینوسی در نظر گرفت که فرکانس آنها ضربی از کوچک‌ترین فرکانس در بین سینوسی‌های تشکیل دهنده آن سیگنال است.

برای سیگنال‌های نامتناوب می‌توان فرض کرد که دوره تناوبی با طول بینهایت دارند در این صورت، کمترین فرکانس آنها به سمت صفر میل می‌کند. برای محاسبه مجموع در چنین سیگنال‌هایی از انتگرال استفاده می‌کنیم.

با توجه به مطالبی که پیش از این گفته شد همه سیگنال‌ها پس از نوشته شدن به صورت مجموع یک سری عبارات سینوسی، در حوزه فرکانس به صورت المان‌هایی در فرکانس‌های متفاوت و با طول‌های متناظر با دامنه سینوسی‌ها قابل بیان هستند.

یکی دیگر از روابط میان حوزه زمان و فرکانس این است که اگر سیگنال را در حوزه زمان فشرده کنیم در حوزه فرکانس گسترده می‌شود و بالعکس.

## تحلیل سیستم در حوزه زمان و فرکانس

تحلیل در هر دو حوزه زمان و فرکانس برای دستیابی به فهم جامعی از رفتار سیستم های کنترلی ضروری است. بررسی سیستم ها در حوزه زمان اطلاعاتی درباره رفتار حالت گذرای آن ها همانند مدت زمان رسیدن پاسخ سیستم به درصد مشخصی از مقدار نهایی آن (Rise Time and Fall Time)، حالت پایدار و محاسبه overshoot به ما می دهد. همچنین این تحلیل برای بررسی نحوه واکنش سیستم به ورودی های خاصی مانند سیگنال های پله یا ضربه مفید است. در حوزه زمان می توان رفتار سیستم ها را با معادلات دیفرانسیل بیان نمود. این معادلات در حوزه فرکانس به صورت معادلات جبری قابل بیان هستند که ویژگی های شناخته شده تری برای ما دارند.

تحلیل سیستم ها در حوزه فرکانس بر مبنای محتوای فرکانسی آن ها انجام می شود. به بیان دیگر، برای بررسی پاسخ یک سیستم به سیگنال مورد نظر در واقع باید پاسخ آن را به مجموعه ای از سینوس ها با فرکانس های مختلف بررسی کنیم. پس با داشتن پاسخ سیستم به یک ورودی سینوسی می توان پاسخ آن سیستم را به هر سیگنالی محاسبه نمود.

برای انتقال سیگنال ها از حوزه زمان به فرکانس، از تبدیل فوریه و لاپلاس استفاده می کنیم. همانطور که پیش از این گفته شد تبدیل فوریه بیان سیگنال بر اساس تک فرکانس های سینوسی است. از طرفی تبدیل لاپلاس به ما کمک می کند که سیگنال هایی با رفتار نمایی را نیز بتوانیم در حوزه فرکانس بیان کنیم.

## مقایسه تبدیل فوریه و لاپلاس

گرچه تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس هر دو تبدیل های انتگرالی هستند اما تفاوت هایی در مفاهیم و کاربردهای این دو تبدیل وجود دارد.

- **تعریف:** تبدیل لاپلاس سیگنال را از حوزه زمان به حوزه فرکانس مختلط منتقل می کند در حالی که تبدیل فوریه المان های حقیقی فرکانس را استخراج می کند.
- **ناحیه قابل تعریف:** تبدیل لاپلاس در مقایسه با تبدیل فوریه، برای رنج وسیع تری از توابع شامل توابع نمایی قابل تعریف است.
- **کاربرد:** تبدیل لاپلاس اساسا برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم های خطی و نامتغیر با زمان و با در نظر گرفتن شرایط اولیه استفاده می شود. در حالی که تبدیل فوریه برای تحلیل محتوای فرکانسی سیگنال ها در حوزه هایی مانند پردازش سیگنال و مخابرات استفاده می شود.

## جمع‌بندی

برای هر سیگنال و یا سیستم در حوزه زمان، بیان متناظری در حوزه فرکانس وجود دارد که به درک بهتر و راحت‌تر برخی خصوصیات و کارکردهای آن کمک می‌کند. انتقال سیگنال‌ها و سیستم‌ها از حوزه زمان به حوزه فرکانس از طریق تبدیل فوریه و لاپلاس امکان‌پذیر است که بر مبنای بیان سیگنال بر اساس مجموعه‌ای از تک فرکانس‌های سینوسی استوار است.