

بسم الله الرحمن الرحيم

## تحقیق درس سیستم‌های کنترل خطی

پریا ساعی

شماره دانشجویی: ۴۰۱۱۹۱۶۳

p.saei@email.kntu.ac.ir

استاد: دکتر تقی‌راد

زمستان ۱۴۰۳

## چرا هنگام مواجهه با یک سطر کامل از صفرها در یک سیستم کنترلی، مشتق سطر قبلی را می‌گیریم

۱. دلیل شهودی: حفظ اطلاعات کلیدی درباره پایداری

- وجود یک سطر از صفرها معمولاً نشان می‌دهد که سیستم دارای ریشه‌های کاملاً موهومی یا متقارن است.
- مشتق چندجمله‌ای تشکیل شده از ضرایب سطر قبل (چند جمله‌ای کمکی) نشان می‌دهد که این ریشه‌ها چگونه نسبت به تغییرات کوچک رفتار می‌کنند و آیا سیستم در مرز پایداری باقی می‌ماند یا ناپایدار می‌شود.
- مشتق‌گیری روند جابه‌جایی ریشه‌ها را مشخص می‌کند. اگر در سیستم یک اغتشاش کوچک رخ دهد، مشتق مرتبه اول نشان می‌دهد که ریشه‌ها چگونه جابه‌جا خواهند شد. به همین دلیل، مشتق‌گیری یک سطر معنادار برای آرایه راث تولید می‌کند.

۲. تفسیر فیزیکی: نقش مشتق در پاسخ سیستم

- در دینامیک سیستم‌های کنترلی، حضور ریشه‌های موهومی معمولاً نشان‌دهنده نوسانات بدون میرایی است. این نوسانات به تغییرات کوچک سیستم حساس هستند.
- گرفتن مشتق چندجمله‌ای کمکی معادل است با تحلیل نرخ تغییر انرژی سیستم، که کمک می‌کند تعیین کنیم که اغتشاش‌ها چگونه بر پایداری تأثیر می‌گذارند. اگر به جای مشتق‌گیری، مقادیر دلخواهی قرار دهیم، اطلاعات حیاتی مربوط به پایداری سیستم را از دست خواهیم داد. از طرفی، مشتق‌گیری به‌درستی روند پاسخ سیستم را حفظ می‌کند.

۳. چرا به جای مشتق‌گیری از روش دیگری مانند جایگذاری مقادیر دلخواه یا استفاده از سطر قبلی استفاده نمی‌کنیم؟

- جایگذاری مقادیر تصادفی باعث از بین رفتن اطلاعات سیستم می‌شود. تحلیل پایداری نیازمند محاسبات ساختاریافته است. اگر مقادیر تصادفی جایگذاری کنیم، تحلیل پایداری دچار خطا می‌شود.
- استفاده از سطر قبلی باعث کاهش مرتبه معادله نمی‌شود. آرایه راث یک فرآیند بازگشتی است که در آن هر مرحله به کاهش پیچیدگی چندجمله‌ای بستگی دارد.
- مشتق‌گیری به‌صورت سیستماتیک مرتبه معادله را کاهش می‌دهد و اطلاعات کلیدی را حفظ می‌کند.
- روش مشتق‌گیری از نظر ریاضی دقیق است. این روش مستقیماً از دترمینان‌های هرویتز استخراج شده و تضمین می‌کند که اشتباهات عددی ایجاد نشود.
- مشتق‌گیری، ساختار ریشه‌ها را حفظ می‌کند. از آنجا که سطر قبلی (چندجمله‌ای کمکی) شامل ساختار کلیدی ریشه‌ها (معمولاً ریشه‌های موهومی) است، مشتق آن درجه چندجمله‌ای را کاهش می‌دهد و درعین حال اطلاعات مربوط به ریشه‌ها را حفظ می‌کند. همچنین، نحوه حرکت ریشه‌ها را آشکار می‌کند و به ما امکان می‌دهد تعیین کنیم که آیا اغتشاش‌های کوچک می‌توانند سیستم را ناپایدار کنند.

۴. چرا به جای یک سطر دیگر، مشتق سطر قبلی را می‌گیریم؟ پاسخ این پرسش در ساختار معادله مشخصه، ماهیت بازگشتی آرایه راث، و نیاز به حفظ اطلاعات پایداری نهفته است.

- سطرهای قبل از سطر قبلی مربوط به چندجمله‌ای‌های با درجه بالاتر هستند و مستقیماً به مجموعه‌ای از ریشه‌های موهومی که باعث ایجاد سطر صفر شده‌اند، ارتباط ندارند. استفاده از سطرهای قبل تر اطلاعات مهم مربوط به تقارن ریشه‌ها را نادیده می‌گیرد.
- سطر قبلی آخرین سطر معتبر محاسبه شده قبل از سطر صفر است و مرتبط‌ترین گزینه برای مشتق‌گیری محسوب می‌شود.
- استفاده از هر سطر به جز سطر قبلی منجر به ایجاد تقریب‌های نادرست در ریشه‌ها شده و روند تحلیل پایداری را مختل می‌کند.
- سطر بلافاصله قبل از سطر صفر، مربوط به یک چندجمله‌ای با درجه کمتر است که از معادله مشخصه استخراج شده است. این چندجمله‌ای از اهمیت بالایی برخوردار است. زیرا، بخشی از معادله مشخصه را نشان می‌دهد که شامل ریشه‌های موهومی یا تکراری است و آخرین سطر است که قبل از ظاهر شدن سطر صفر، به درستی محاسبه شده است. همچنین، این سطر زیرمجموعه‌ای از ساختار ریشه‌های سیستم را نشان داده و مهم‌ترین اطلاعات مربوط به پایداری را در آن مرحله در بر دارد.

۵. آرایه راث یک فرآیند بازگشتی است

- آرایه راث به صورت بازگشتی و با استفاده از دترمینان‌ها ساخته می‌شود، به طوری که هر سطر به دو سطر بالایی خود وابسته است.
- هنگامی که یک سطر صفر ظاهر می‌شود، محاسبات معمول دترمینانی متوقف می‌شود. اما سطر قبلی همچنان پیرو فرآیند بازگشتی است و پیوستگی در کاهش مرتبه معادله مشخصه را حفظ می‌کند و روابط صحیح بین ضرایب سیستم را تضمین می‌کند.
- از آنجایی که سطر قبلی با استفاده از روش صحیح راث به دست آمده، بهترین چندجمله‌ای برای مشتق‌گیری و تولید یک سطر معتبر جدید است.

## جمع‌بندی

هنگام مواجهه با سطر صفر در آرایه راث، از مشتق‌گیری استفاده می‌کنیم، زیرا،

- ساختار ریشه‌ها را حفظ می‌کند، به‌ویژه برای ریشه‌های متقارن روی محور موهومی.
- به ادامه محاسبات آرایه راث کمک می‌کند و یک سطر معتبر فراهم می‌کند.
- اطلاعات کلیدی مربوط به پایداری را حفظ می‌کند و مانع از دادن اطلاعات حیاتی سیستم می‌شود.
- از نظر ریاضی دقیق است و روند کاهش مرتبه چندجمله‌ای را به درستی دنبال می‌کند.
- سطر قبلی شامل چندجمله‌ای کمکی است که اطلاعات حیاتی در مورد پایداری را در خود دارد.
- آرایه راث یک فرآیند بازگشتی است و سطر قبلی آخرین مرحله صحیح محاسبه شده است.
- استفاده از سطرهای دیگر اطلاعات مهم را از بین می‌برد و روند تحلیل پایداری را مختل می‌کند.