

پروژه اول درس یادگیری ماشین

پریا پاسه‌ورز

شماره دانشجویی: 810101393

سوال چهارم

در یک مسئله رگرسیون، می‌خواهیم رابطه بین مقدار ورودی و خروجی را به صورت زیر مدل کنیم:

$$y = e^{wX}$$

الف) تابع هزینه مجموع مجذور خطا را تشکیل دهید.

طبق صورت مسئله، به ازای هر ورودی x_i خواهیم داشت:

$$\hat{y}_i = e^{wx_i}$$

از طرف دیگر رابطه تابع mean squared error نیز به شرح زیر است:

$$MSE(w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

که با جایگذاری خواهیم داشت:

$$MSE(w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - e^{wx_i})^2$$

ب) رابطه بروزرسانی w را با استفاده از روش کاهش گرادیان محاسبه کنید.

مقدار w مطابق رابطه زیر آپدیت می‌شود:

$$w = w - \alpha \cdot \frac{\partial MSE}{\partial w}$$

$$\frac{\partial MSE}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - e^{wx_i})^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2(y_i - e^{wx_i}) \cdot (-x_i e^{wx_i})$$

$$= -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i (y_i - e^{wx_i}) e^{wx_i}$$

حال با جایگذاری خواهیم داشت:

$$w = w + \alpha \cdot \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i (y_i - e^{wx_i}) e^{wx_i}$$

ج) برای کمینه کردن مقدار تابع هزینه، w باید در چه رابطه‌ای صدق کند؟

به عبارت دیگر باید پیدا کنیم چه زمانی:

$$\frac{\partial \text{MSE}}{\partial w} = 0$$

$$-\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i (y_i - e^{wx_i}) e^{wx_i} = 0$$

پس برای صفر شدن این عبارت می‌بایستی:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i e^{wx_i} = \sum_{i=1}^n x_i e^{2wx_i}$$

یعنی گزینه ج صحیح است.