

به نام خدا

سیگنال ها و سیستم ها

تمرین کامپیوتری ششم

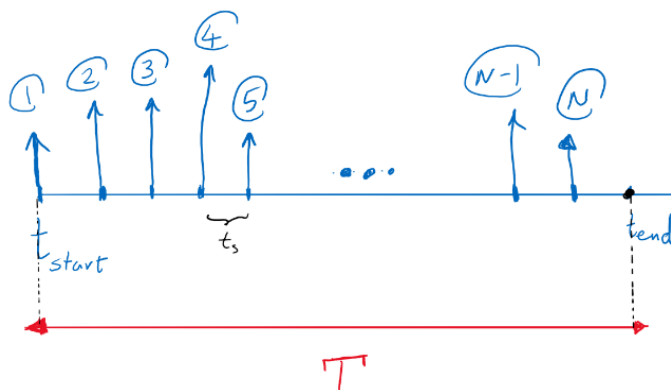
مهلت تحویل: یکشنبه ۹ دی ساعت ۱۷:۰۰

مقدمه:

جهت تاکید، مقدمه‌ای که در تمرین کامپیوتری قبل بیان شد را مجدد تکرار می‌کنیم. در این تمرین کامپیوتری از مفاهیم این مقدمه برای پیاده‌سازی‌ها استفاده می‌کنیم.

از آنجایی که شبیه‌سازی‌ها در محیط متلب و با کامپیوتر انجام می‌شود، همه سیگنال‌هایی که در شبیه‌سازی‌ها با آن‌ها سر و کار داریم سیگنال‌های گسسته است. لذا تمامی نتایج باید با عناوین مطرح‌شده در کلاس در حوزه گسسته تطابق داشته باشد. اما همان‌گونه که چندین بار سر کلاس مطرح شد و در ادامه درس نیز خواهیم دید، دو حوزه گسسته و پیوسته، روابط بسیار نزدیکی دارند و مفاهیم آن‌ها با یکدیگر در تطابق است.

فرض کنید در MATLAB، در حوزه زمان، یک سیگنال (بردار) x به طول N سمپل و معادل T ثانیه داریم ($t_s = \frac{1}{f_s} = \frac{T}{N}$) و می‌خواهیم آن را به حوزه فوریه ببریم (به شکل زیر نگاه کنید). در واقع f_s فرکانس نمونه برداری و t_s فاصله زمانی بین دو سمپل را نشان می‌دهد. این دو پارامتر به ما می‌گویند که از سیگنال پیوسته اصلی به چه صورت نمونه برداری شده است و سیگنال گسسته فعلی تولید شده است. برای رسم دقیق سیگنال در حوزه زمان اگر بازه زمانی مربوط به سیگنال معلوم باشد $t = t_{start}:t_s:t_{end} - t_s$ به طوری که $t_{start} - t_{end} = T$ می‌توان به راحتی آن را با دستور $plot(t, x)$ یا $stem(t, x)$ رسم کرد.



برای بردن سیگنال به حوزه فوریه از دستور $y = fftshift(fft(x))$ استفاده می‌کنیم. دستور اصلی است و $fftshift$ فقط بازه متقارن حول فرکانس صفر را ایجاد می‌کند (مشابه آنچه که در درس در بخش سری فوریه گسسته مطرح شد). خروجی این دستور یعنی y یک بردار با N سمپل است که هر درایه آن یک عدد مختلط

است لذا هر درایه یک اندازه و یک فاز دارد. نکته مهم در این جا این است که هر یک از این N عدد به دست آمده متعلق به چه فرکانسی می باشد؟

فرکانس ها به صورت $f = \frac{-f_s}{2} : \frac{f_s}{N} : \frac{f_s}{2} - \frac{f_s}{N}$ خواهند بود. بنابراین برای رسم اندازه می توان از دستور $plot(f, angle(y))$ استفاده کرد.

راجع به بازه فرکانس های در نظر گرفته شده (هایلایت سبز)، سه نکته زیر حائز اهمیت هستند:

نکته اول:

در کلاس برای تطابق با کتاب اپنهایم، کلمه ی فرکانس به ω اطلاق شد ولی در این تمرین کامپیوتری به $f = \frac{\omega}{2\pi}$ عنوان فرکانس می دهیم. دلیل این امر این است که از دست عدد π راحت شویم.

نکته دوم:

اگر خاطرتان باشد در کلاس گفتیم بیشترین فرکانس (از منظر تغییرات سریع زمانی) در حوزه گسسته فرکانس $\frac{1}{2}$ است که در این جا می بینید جای آن عدد $\frac{f_s}{2}$ نشسته است. در واقع در سرتاسر درس سیگنال، نرخ نمونه برداری برابر $f_s = 1 \text{ Hz}$ در نظر گرفته می شود (یک سمپل در هر ثانیه). از این نکته می توان نتیجه گرفت هر چه از سیگنال پیوسته در حوزه زمان با نرخ بالاتری نمونه برداری کنیم ($f_s \uparrow$)، در سیگنال گسسته به دست آمده، می توان فرکانس های بالاتر را نیز (در صورت وجود) مشاهده کرد چون بازه فرکانسی قابل مشاهده افزایش پیدا می کند. در حالت حدی، اگر نرخ نمونه برداری به سمت بی نهایت برود یا به عبارت دیگر ($t_s \rightarrow 0$) برود، عملاً سیگنال گسسته به دست آمده با سیگنال پیوسته اصلی یکی خواهد بود و هر مولفه فرکانسی که در سیگنال اصلی بوده است، در سیگنال گسسته نیز مشاهده می شود. در این قسمت کاملاً باید درک کرده باشید که در Sampling (نمونه برداری) که یک سیگنال پیوسته را به یک سیگنال گسسته تبدیل می کند چه چیزی از بین می رود.

نکته سوم:

نکته آخر راجع به رزولوشن فرکانسی است که ایجاد شده است یعنی $\delta_f = \frac{f_s}{N}$ (هایلات سبز را نگاه کنید). اگر از رابطه ای که با هایلایت زرد رنگ مشخص شده است استفاده کنید می توان دید که رزولوشن فرکانسی برابر است با $\delta_f = \frac{1}{T}$ ، یعنی رزولوشن فرکانسی برابر با عکس طول زمانی سیگنال است و هیچ ربطی هم به نرخ نمونه برداری f_s ندارد. هر چه می خواهید نرخ نمونه برداری را افزایش دهید اما رزولوشن فرکانسی مادامی که طول زمانی سیگنال (T ثانیه) تغییری نکند هیچ تغییری نمی کند. حال بینیم مفهوم رزولوشن چیست؟ رزولوشن فرکانسی گام های فرکانسی است که می توان در نظر گرفت تا سیگنال گسسته را در فضای فوریه توصیف کرد. این مفهوم را با یک

مثال توضیح می دهیم. فرض کنید طول زمانی یک سیگنال $T = 1 \text{ sec}$ است و نرخ نمونه برداری $f_s = 20 \text{ Hz}$ است. بنابراین رزولوشن فرکانسی برابر $\delta_f = 1 \text{ Hz}$ می شود و بازه فرکانسی که در حوزه فوریه سیگنال نمونه برداری شده می توان مشاهده کرد به صورت $f = -10 : 1 : 9 \text{ Hz}$ خواهد بود (هایلات سبز). اگر سیگنال اصلی حاوی دو سیگنال تک تُن (تک فرکانس) به صورت

$$x_1(t) = \exp(1j * 2\pi * 5 * t) + \exp(1j * 2\pi * 8 * t)$$

باشد، طبیعتاً قله هایی در اندازه سیگنال در حوزه فوریه، در فرکانس های 5 Hz و 8 Hz مشاهده خواهید کرد.

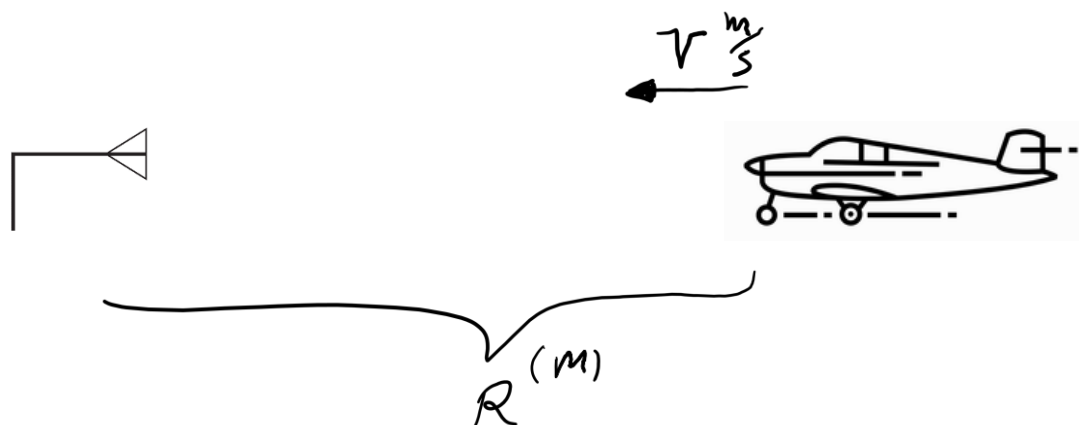
حال فرض کنید سیگنال اصلی حاوی دو سیگنال تک تُن به صورت

$$x_2(t) = \exp(1j * 2\pi * 5 * t) + \exp(1j * 2\pi * 5.1 * t)$$

باشد. در این حالت فقط یک قله در اندازه سیگنال در حوزه فوریه، در فرکانس 5 Hz مشاهده خواهید کرد و دیگر توانایی تفکیک این دو سیگنال را در حوزه فوریه نخواهید داشت زیرا اختلاف فرکانس دو سیگنال تک تُن کم تر از $\delta_f = 1 \text{ Hz}$ می باشد. بنابراین رزولوشن فرکانسی قدرت تفکیک پذیری فرکانسی را در حوزه فوریه نشان می دهد. حال به سراغ تمارین می رویم.

بخش اول:

می‌خواهیم توسط یک رادار، فاصله و سرعت یک جسم را بیابیم.



سیگنال ارسالی رادار به صورت $x(t) = \cos(2\pi f_c t)$ است.

این سیگنال به سمت جسم ساطع می‌شود و به آن برخورد می‌کند. به علت متحرک بودن جسم و پدیده داپلر، فرکانس آن عوض شده و سپس با یک تاخیری در گیرنده دریافت می‌شود. به عبارت دیگر سیگنال دریافتی به صورت زیر خواهد بود (مقدار $\alpha < 1$ اهمیتی ندارد):

$$y(t) = \alpha \cos((2\pi(f_c + f_d)(t - t_d))$$

در رابطه ی بالا f_d همان فرکانس داپلر است که تغییر فرکانس را به وجود آورده است. فرض کنید رابطه فرکانس داپلر با سرعت جسم به صورت $f_d = \beta V$ می‌باشد که β عددی معلوم است.

همچنین در رابطه بالا t_d همان تاخیر است که طبق آنچه در تمرین کامپیوتری قبل بیان شد، رابطه آن با فاصله رادار از جسم به صورت $t_d = \rho R$ می‌باشد که ρ عددی معلوم است ($\rho = \frac{2}{c}$ و c سرعت نور است).

تمرین ۱-۱ سیگنال ارسالی رادار را با در نظر گرفتن $f_c = 5 \text{ Hz}$ ، بازه زمانی $t_{start} = 0$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 100 \text{ Hz}$ رسم کنید.

تمرین ۲-۱ سیگنال دریافتی را با در نظر گرفتن فرضیات قسمت قبل ($f_s = 100 \text{ Hz}$ ، $t_{end} = 1$ ، $t_{start} = 0$) و همچنین با فرض $f_c = 5 \text{ Hz}$ و همچنین با فرض $V = 180 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$ ، $R = 250 \text{ Km}$ ، $\beta = 0.3$ و $\alpha = 0.5$ رسم کنید. مقدار β را تا انتهای بخش اول ثابت و معلوم فرض کنید.

تمرین ۳-۱) حال به صورت برعکس به مساله نگاه کنید. یعنی فرض کنید سیگنال دریافتی را داریم و می‌خواهیم از روی آن سرعت و فاصله را محاسبه کنیم. به عبارت دیگر می‌بایست f_d و t_d را تخمین زده و سپس از روی آن‌ها سرعت و فاصله را بیابیم. روشی پیشنهاد دهید که این کار را برای ما به صورت اتوماتیک انجام دهد. روش‌تان را توضیح داده و پیاده‌سازی کرده و نتایج آن را گزارش کنید.

راهنمایی: به سیگنال دریافتی دقت کنید. سیگنال دریافتی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$y(t) = \alpha \cos((2\pi(f_c + f_d)(t - t_d))$$

$$y(t) = \alpha \cos((2\pi(f_c + f_d)t - (2\pi(f_c + f_d)t_d))$$

$$y(t) = \alpha \cos(2\pi f_{new} + \varphi_{new})$$

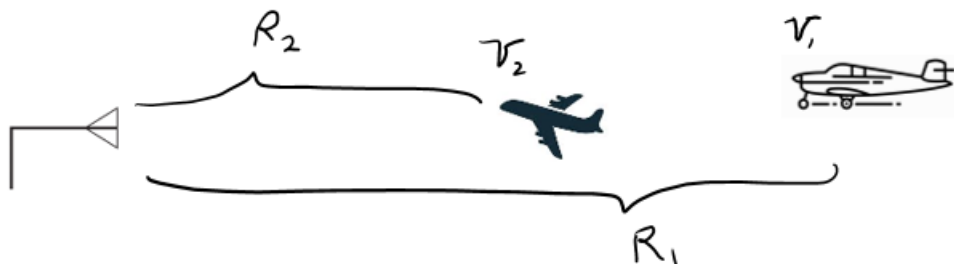
سیگنال دریافتی یک سیگنال با فرکانس f_{new} و فاز φ_{new} است. پس با بردن سیگنال به حوزه فوریه و استخراج فرکانس غالب و فاز متناظر با آن، پارامترهای مساله استخراج می‌شوند.

تمرین ۴-۱) حال به سیگنال دریافتی کمی نویز اضافه کنید و تمرین ۳-۱ را تکرار کنید. قدرت نویز را کم و کم و طی چندین مرحله افزایش دهید و ببینید تا کجا همچنان می‌توانید سرعت و فاصله را به درستی تشخیص دهید. کدام پارامتر حساسیت بیشتری به حضور نویز دارد؟

تمرین ۵-۱) حالت ایده‌آل بدون نویز را در نظر بگیرید. فرض کنید به جای یک جسم، دو جسم مختلف با پارامترهای زیر داریم:

$$R_1 = 250 \text{ Km}, \quad V_1 = 180 \frac{\text{Km}}{\text{h}}, \quad \alpha_1 = 0.5$$

$$R_2 = 200 \text{ Km}, \quad V_2 = 216 \frac{\text{Km}}{\text{h}}, \quad \alpha_2 = 0.6$$



سیگنال دریافتی در رادار حاصل جمع اکوهای برگشتی از این دو جسم است. رابطه سیگنال دریافتی را نوشته و با همان فرضیات قسمت‌های قبل آن را رسم کنید.

تمرین ۱-۶ حال به صورت برعکس به مساله نگاه کنید. یعنی فرض کنید سیگنال دریافتی را داریم و می خواهیم از روی آن سرعت و فاصله ی دو جسم را محاسبه کنیم. روش تان را شرح داده و پیاده سازی کنید.

تمرین ۱-۷ اگر سرعت دو جسم داده شده برابر باشد ولی فاصله ها متفاوت باشد، با ذکر دلیل بیان کنید آیا باز هم قادر خواهید بود سرعت و فواصل آن ها را استخراج کنید؟ حداقل اختلاف سرعت دو جسم چه قدر باید باشد تا بتوانید پارامترهای دو جسم را درست تخمین بزنید؟

تمرین ۱-۸ اگر فاصله دو جسم داده شده برابر باشد ولی سرعت ها متفاوت باشد، آیا قادر خواهید بود سرعت ها و فاصله آن ها را استخراج کنید؟

تمرین ۱-۹ اگر تعداد اجسام را ندانیم، راهی پیشنهاد دهید که بتوان هم تعداد آن ها را فهمید و هم پارامترهای آن ها را استخراج کرد.

بخش دوم:

مطابق شکل زیر ۱۲ کلید متناظر با ۱۲ نُت مختلف از یک ابزار موسیقی (مثل پیانو و ...) را در نظر می‌گیریم.

C C# D D# E F F# G G# A A# B

C	523.25 Hz	C#	554.37 Hz	D	587.33 Hz	D#	622.25 Hz	E	659.25 Hz	F	698.46 Hz	F#	739.99 Hz	G	783.99 Hz	G#	830.61 Hz	A	880 Hz	A#	932.33 Hz	B	987.77 Hz
---	-----------	----	-----------	---	-----------	----	-----------	---	-----------	---	-----------	----	-----------	---	-----------	----	-----------	---	--------	----	-----------	---	-----------

فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم:

- ✓ با فشردن هر یک از کلیدها، یک سیگنال تک‌تُن به صورت $\sin(2\pi f_c t)$ با فرکانسی که در شکل مشخص شده است تولید می‌شود.
- ✓ مدت زمان استاندارد نگه داشتن هر کلید یعنی پارامتر T و پارامترهای زمانی به صورت زیر می‌باشند.

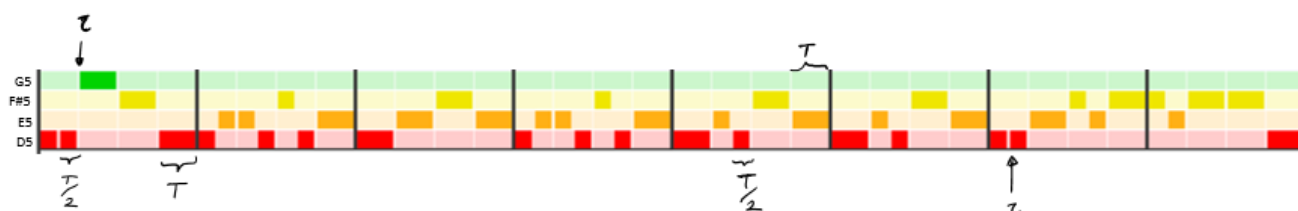
$$t = t_{start} : t_s : t_{end} - t_s$$

$$t_{start} = 0, \quad f_s = 8 \text{ kHz}, \quad t_{end} = T = 0.5 \text{ sec}$$

- ✓ گاهی اوقات، هر کلید نیمی از زمان استاندارد، یعنی $\frac{T}{2} = 0.25 \text{ sec}$ نگه داشته می‌شود.

- ✓ فاصله بین زدن دو کلید متوالی $\tau = 25 \text{ msec}$ است (استراحت بین دو کلید).

تمرین ۱-۲ موسیقی زیر را تولید کرده و با دستور Sound گوش کنید.



تمرین ۲-۲) بخش کوتاهی از نُت یک موسیقی ساده را در اینترنت پیدا کرده و مشابه تمرین ۱-۲ آن را تولید کنید. با دستور *audiowrite* موسیقی‌ای که ساخته‌اید را با اسم *mysong.wav* ذخیره کنید و فایل آن را به همراه گزارش‌تان آپلود کنید. هر سمپل از داده‌ای که ساختید با چند بیت ذخیره شده است؟

تمرین ۲-۳) اگر یک فایل موسیقی در اختیار شما قرار بگیرد که آن فایل طبق فرضیاتی که در ابتدای بخش دوم مطرح شد تولید شده باشد، روشی پیشنهاد دهید که نُت‌های آن و زمان نگه داشتن هر کلید را استخراج کند. روش پیشنهادی خود را روی موسیقی تمرین ۱-۲ پیاده کرده تا از صحت آن اطمینان یابید.

نکات کلی:

- در صورت وجود هرگونه پرسش و ابهام به آقای عرفان افشاری و استاد ایمیل بنید.
- فایل نهایی شما باید به صورت یک فایل زیپ شامل گزارش کار به فرمت PDF و کدهای متلب و سایر فایل‌های خواسته شده باشد.