# گزارش پروژه هفتم

کوثر شیری جعفرزاده-810101456

پریا پاسه ورز-810101393

## بخش اول

الف)

معادله اولیه داده شده به شکل زیر است:

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v_{in}(t)$$

حال از روابط داده شده استفاده می کنیم

$$v_R(t) = Ri(t), \quad v_L(t) = L\frac{d\,i(t)}{dt}, \quad v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

پس از جایگذاری این روابط معادله به شکل زیر می شود

$$Ri(t) + L\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = v_{in}(t)$$

حال از این عبارت مشتق می گیریم تا انتگرال از بین برود

$$R\frac{d\,i(t)}{dt} + L\frac{d^2\,i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

در این مرحله نیاز است تا ضریب بیشترین درجه مشتق را یک کنیم پس

$$\frac{d^2\,i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} * \frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{CL}i(t) = \frac{1}{L} * \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

معادله دیفرانسیلی است که مرتبه دومی که جریان را به ولتاژ منبع تغذیه ربط میدهد را نشان می دهد.

ب)

برای گرفتن تبدیل لاپلاس از خاصیت زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{d\,x(t)}{dt} \xrightarrow{L} sX(s), \quad i(t) \xrightarrow{L} I(s), \quad v_{in}(t) \xrightarrow{L} V_{in}(s)$$

به کمک این خاصیت تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیلی را به دست می آوریم:

$$\frac{d^2\,i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} * \frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{CL} i(t) = \frac{1}{L} * \frac{dv_{in}(t)}{dt} \xrightarrow{L}$$

$$s^2 I(s) + \frac{R}{L} * sI(s) + \frac{1}{LC} I(s) = \frac{s}{L} V_{in}(s)$$

حال نسبت خواسته شده در سوال را پیدا می کنیم:

$$\frac{I(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

ج)

ابتدا باید رابطه ای برای جریان براساس ولتاژ خازن را بیابیم:

$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C}\, i(t)$$

$$y(t) = V_C(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \xrightarrow{L} sY(s) = \frac{1}{C} I(s)$$

$$I(s) = sCY(s)$$

$$x(t) = v_{in}(t) \xrightarrow{L} X(s) = V_{in}(s)$$

$$s^2 I(s) + \frac{R}{L} * sI(s) + \frac{1}{LC} I(s) = \frac{s}{L} V_{in}(s)$$

حال معادله بالا بازنویسی می کنیم:

$$s^2(sCY(s)) + \frac{R}{L} * s(sCY(s)) + \frac{1}{LC}(sCV(s)) = \frac{s}{L} X(s)$$

$$s^2(CY(s)) + \frac{R}{L} * s(CY(s)) + \frac{1}{LC}(CV(s)) = \frac{1}{L} X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{L}}{s^2C + \frac{RC}{L}s + \frac{1}{L}} = \frac{1}{s^2LC + RCs + 1}$$

رابطه تبدیل لاپلاس خروجی و ورودی نوشته شده است.

د)

$$C = \frac{4}{3}, L = 0.25, R = 1$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{L}}{s^2C + \frac{RC}{L}s + \frac{1}{L}} = \frac{1}{s^2 * \frac{4}{3} * \frac{1}{4} + 1 * \frac{4}{3} * s + 1}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 * \frac{1}{3} + s * \frac{4}{3} + 1}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3}{s^2 + s * 4 + 3} \rightarrow (s^2 + 4s + 3)Y(s) = 3X(s)$$

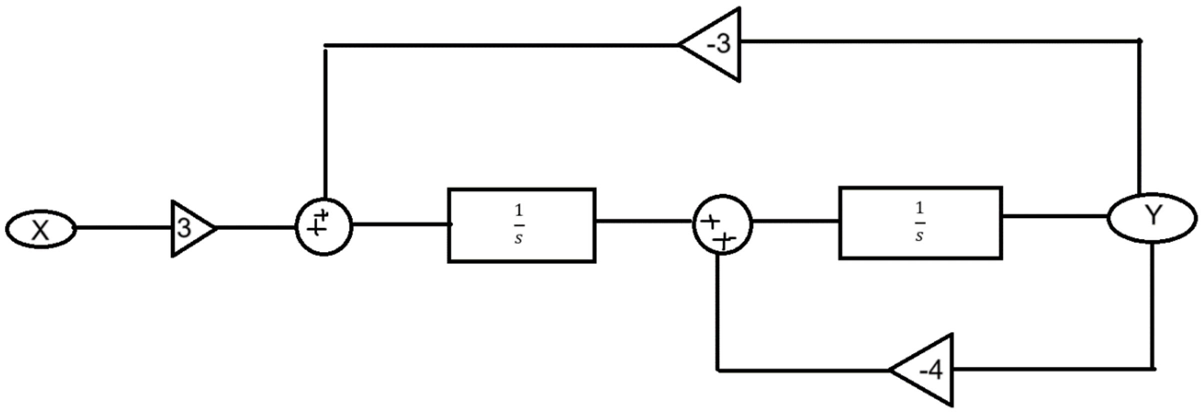
$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) = 3X(s)$$

$$s^2Y(s) = -4sY(s) - 3Y(s) + 3X(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}(-4sY(s) - 3Y(s) + 3X(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s}\big(-4Y(s)\big) + \frac{1}{s^2}\big(-3Y(s) + 3X(s)\big)$$

بلوک دیاگرام متناظر به صورت زیر است:




و)

حال در اینجا نیاز است تا پاسخ پله سیستم را به دست آوریم می دانیم که:

$$Y(s) = X(s).H(s)$$

$$x(t) = u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3}{s^2 + 4s + 3} = \frac{3}{(s+1)(s+3)} = \frac{1.5}{s+1} - \frac{1.5}{s+3}$$

$$Y(s) = X(s).\left(\frac{1.5}{s+1} - \frac{1.5}{s+3}\right)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s}.\left(\frac{1.5}{s+1} - \frac{1.5}{s+3}\right)$$

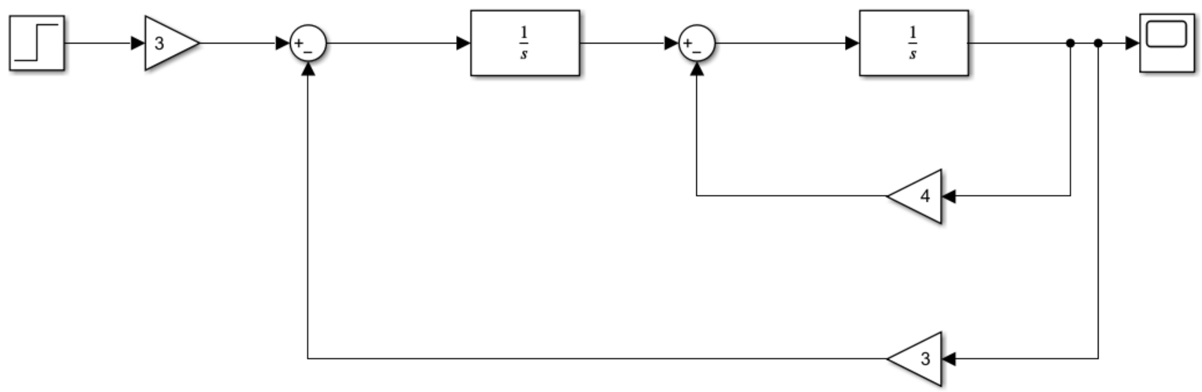
$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1.5}{s+1} + \frac{0.5}{s+3}$$

از عبارت به دست آمده تبدیل لاپلاس معکوس می گیریم:

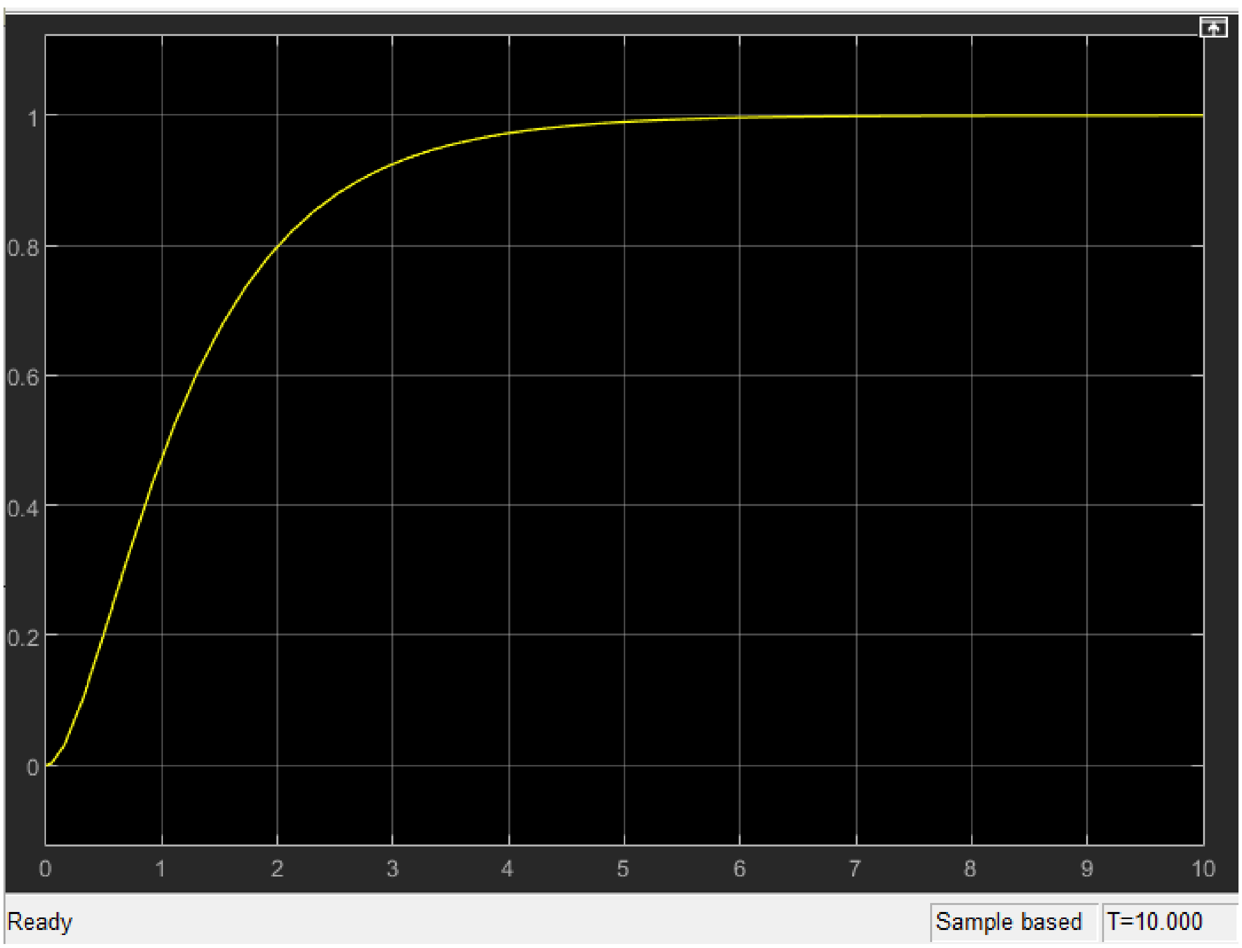
$$y(t) = u(t) - \frac{3}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

ه)

بلوک دیاگرام رسم شده در محیط Simulink در پاسخ به ورودی پله به صورت زیر می باشد:

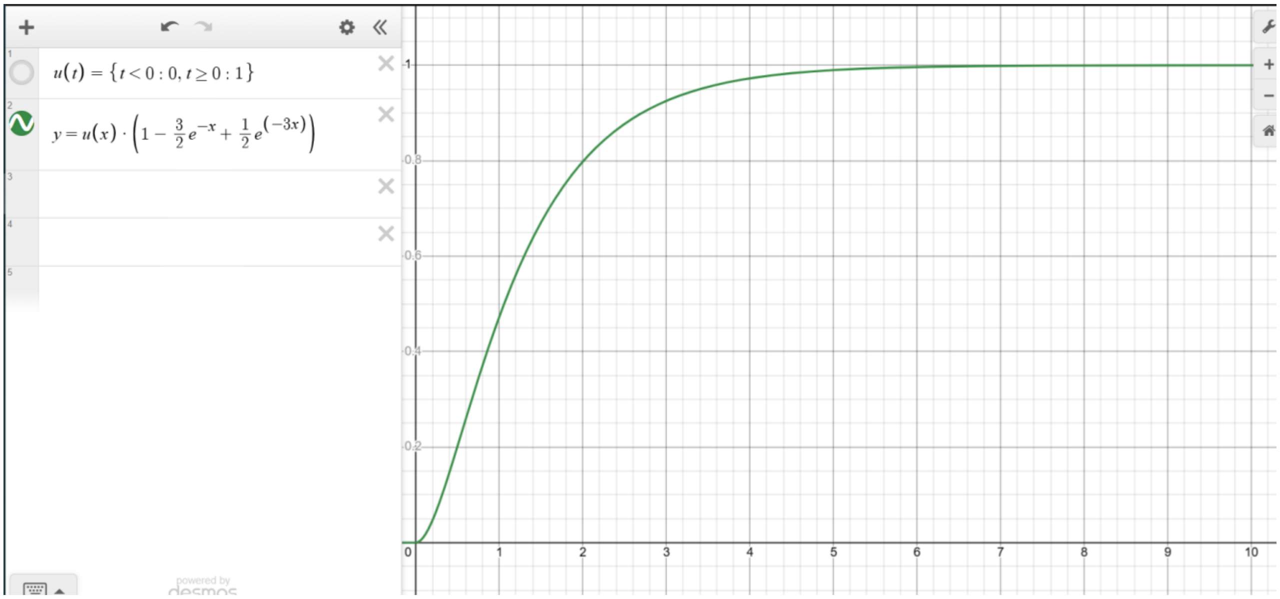



خروجی این بلوک به صورت زیر می باشد:



برای اینکه چک کنیم آیا پاسخ به دست آمده ما با پاسخ نمایش داده شده یکسان است یا نه عبارت زیر که پاسخ پله سیستم است را رسم می کنیم:

$$y(t) = u(t) - \frac{3}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$




همانطور که مشخص است هر دو پاسخ با یکدیگر برابر هستند پس بلوک دیاگرام رسم شده به درستی خروجی را محاسبه می کند.

## بخش دوم

الف)

رابطه ی نشان داده شده به صورت زیر است:

$$K\big(x(t)-y(t)\big)+B\left(\frac{d\,x(t)}{dt}-\frac{dy(t)}{dt}\right)=M\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

فرض خواسته شده را اعمال می کنیم:

$$M=K=1$$

$$\big(x(t)-y(t)\big)+B\left(\frac{d\,x(t)}{dt}-\frac{dy(t)}{dt}\right)=\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$x(t)+B\frac{dx(t)}{dt}=\frac{d^2y(t)}{dt^2}+B\frac{dy(t)}{dt}+y(t)$$

معادله دیفرانسیلی نهایی به صورت زیر می باشد:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+B\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=B\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

ب)

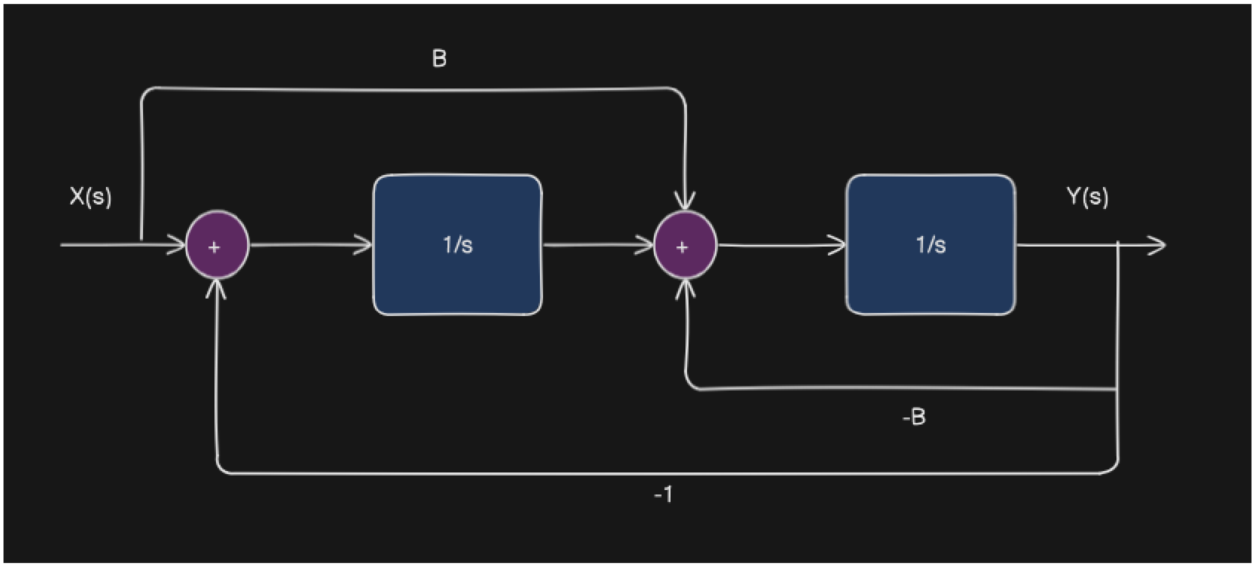
از معادله دیفرانسیلی تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$s^2Y(s)+BsY(s)+Y(s)=BsX(s)+X(s)$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2}\big(X(s)-Y(s)\big)+\frac{1}{s}\big(BX(s)-BY(s)\big)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{Bs+1}{s^2+Bs+1}$$

بلوک دیاگرام آن به شکل زیر است:




پیاده‌سازی کامل بخش Simulink در قسمت بعد انجام می‌شود (چون در این بخش نمی‌توانیم مقادیر مختلف از جمله Gain را متغییر قرار دهیم).

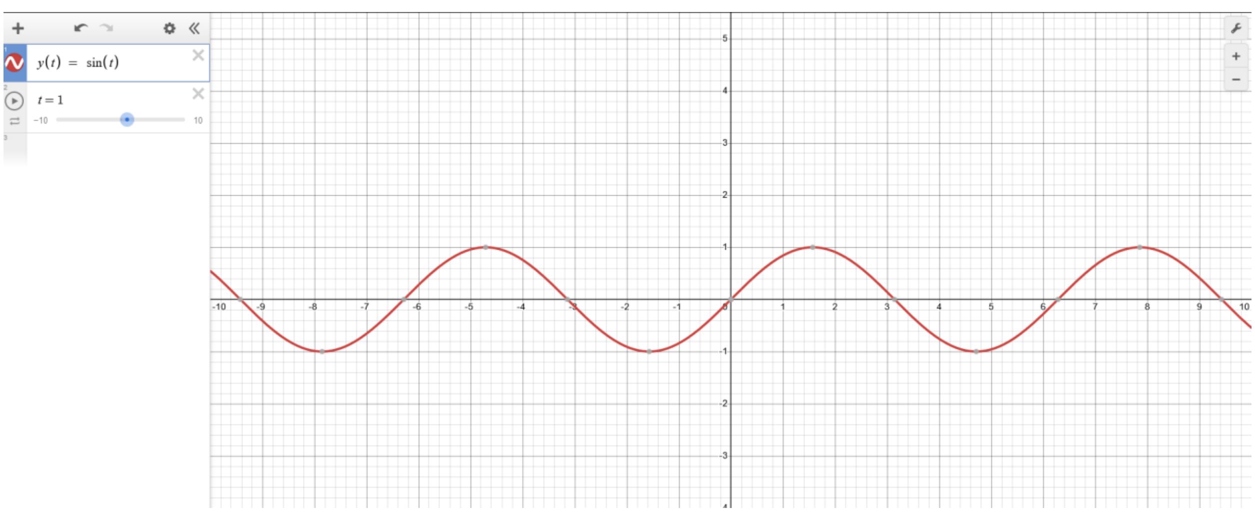
ج)

$$B = 0 \Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow y(t) = sin(t)$$

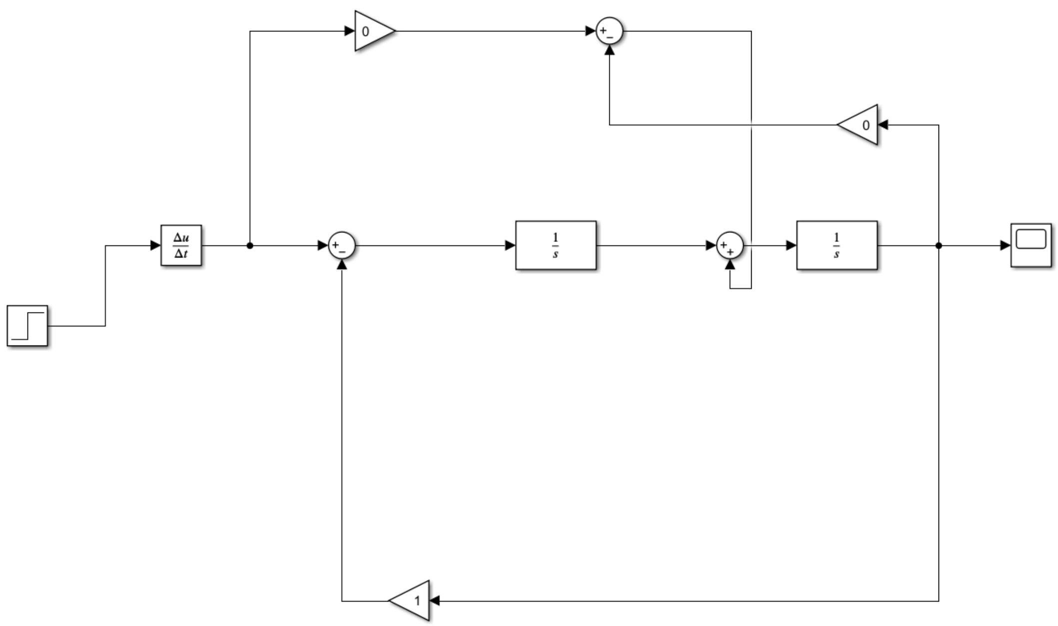
سپس پاسخ ضربه به دست آمده را رسم می‌کنیم:



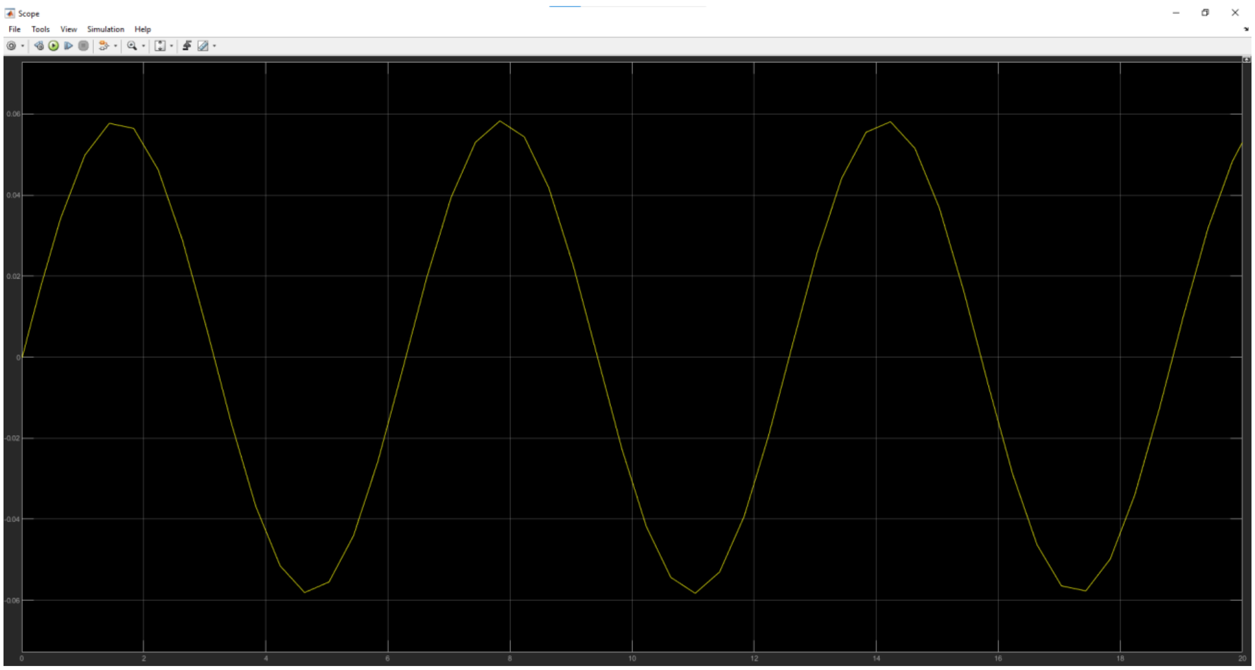
در صورتی که سیستم تعلیق خودرو از تعدیل کننده بی‌بهره باشد، پاسخ سیستم در مواجه با ضربه‌ها و تنش‌های وارد شده به آن به صورت نوسانات آزاد (oscillation) ادامه می‌یابد و این نوسانات به تدریج از بین نمی‌روند.

با توجه به این که پاسخ ضربه در این سیستم به صورت sin(t) مدل می‌شود، این نشان‌دهنده آن است که سیستم تحت تاثیر یک تحریک ضربه‌ای به صورت سینوسی واکنش نشان می‌دهد. بدون تعدیل‌کننده، این نوسانات به طور پیوسته ادامه پیدا می‌کنند زیرا انرژی ورودی به سیستم به صورت کامل از دست نمی‌رود و در نتیجه باعث می‌شود که خودرو همواره نوساناتی را تجربه کند.

حال آن را در Simulink شبیه‌سازی می‌کنیم:



خروجی:




همانطور که می‌بینیم نتیجه شبیه‌سازی با نتیجه محاسبات تئوری مطابقت دارد.

د)

داریم:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Bs+1}{s^2+Bs+1}$$

حال برای به دست آوردن قطب‌های تابع، باید ریشه‌های مخرج را حساب کنیم:

$$s^2 + Bs + 1 \; = \; 0$$

$$s = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4}}{2}$$

حال برای اینکه ریشه‌ها حقیق شوند:

$$B^2 \geq 4 \;\Rightarrow\; B \geq 2 \text{ or } B \leq -2$$

پس با توجه به شرط مسئله که B عددی مثبت است، کوچک‌ترین مقدار آن باید 2 باشد.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s+1}{s^2+2s+1}$$

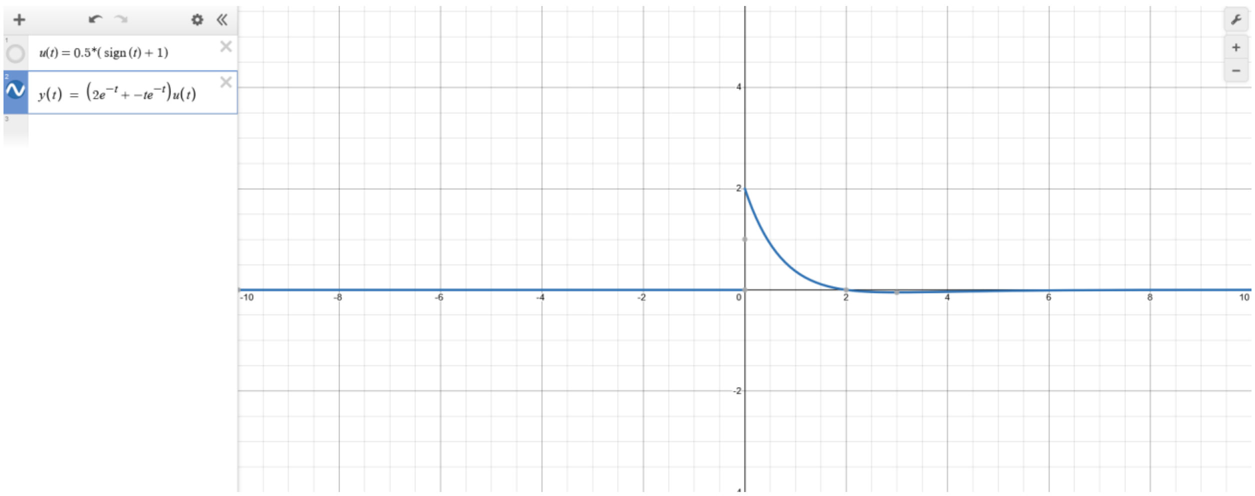
مجددا می‌خواهیم پاسخ ضربه سیستم را به دست آوریم، پس:

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+1} = \frac{2s}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

حال تبدیل لاپلاس معکوس می‌گیریم:

$$y(t) = (2e^{-t} - te^{-t})u(t)$$

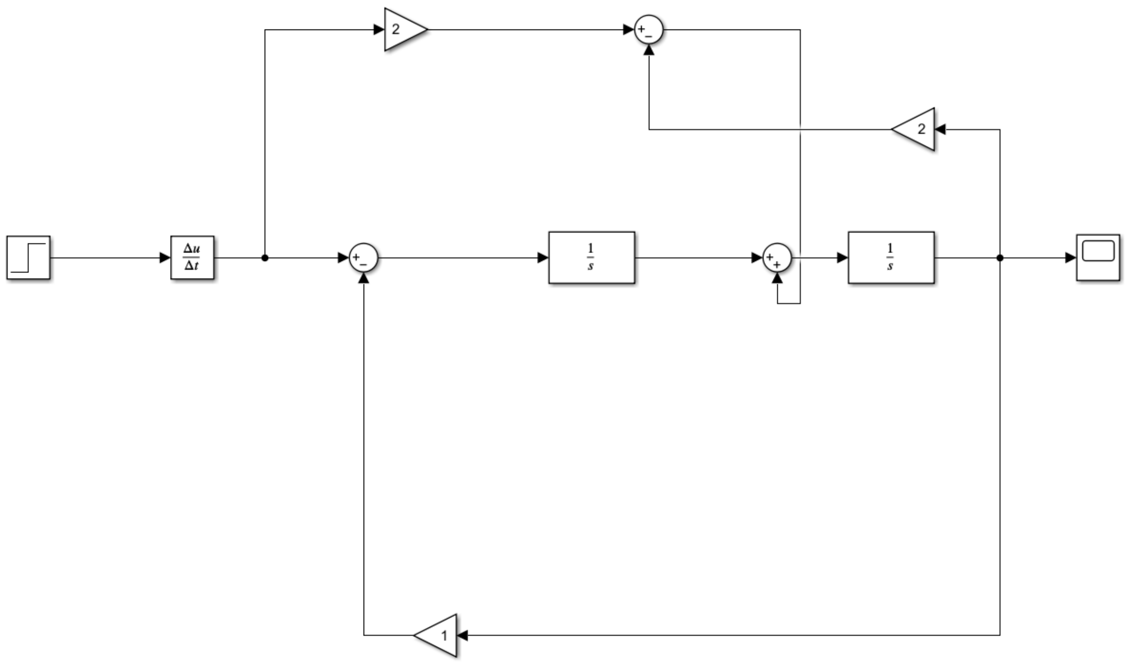
رسم پاسخ ضربه سیستم:



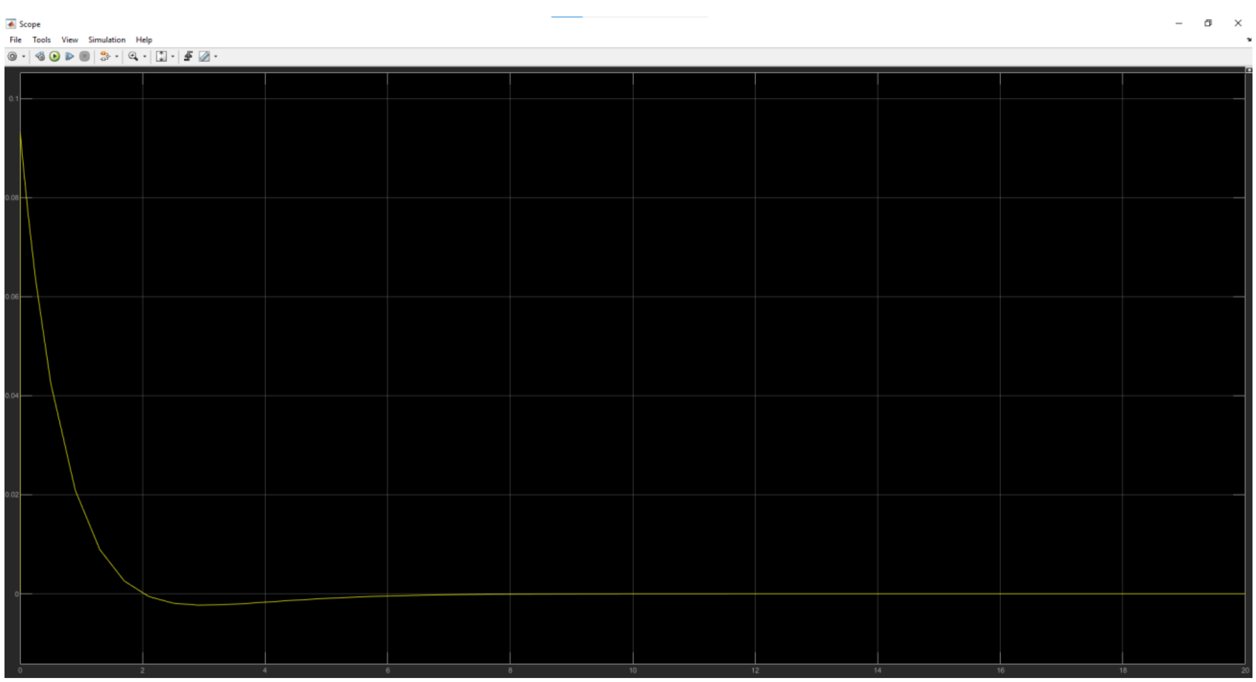

اگر از این پاسخ ضربه استفاده کنیم، سیستم نوساناتی در ابتدا دارد که تحت تاثیر اختلاف دو جز سازنده است. این نوسان در لحظه t=0 بیشترین مقدار خود را دارد. اما به دلیل وجود عبارت $e^{-t}$ این نوسانات به مرور زمان به سمت صفر کاهش می‌یابند.

رفتار پاسخ نشان‌دهنده سیستمی پایدار است که نوسانات آن به مرور زمان فروکش می‌کنند و به حالت تعادل می‌رسند.

حال آن را در Simulink شبیه‌سازی می‌کنیم:




خروجی:




همانطور که می‌بینیم نتیجه شبیه‌سازی با نتیجه محاسبات تئوری مطابقت دارد.

و)

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Bs+1}{s^2+Bs+1}$$

$$\mathrm{B} = 100 \Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{100s+1}{s^2+100s+1} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}+100} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{s}+0.01}$$

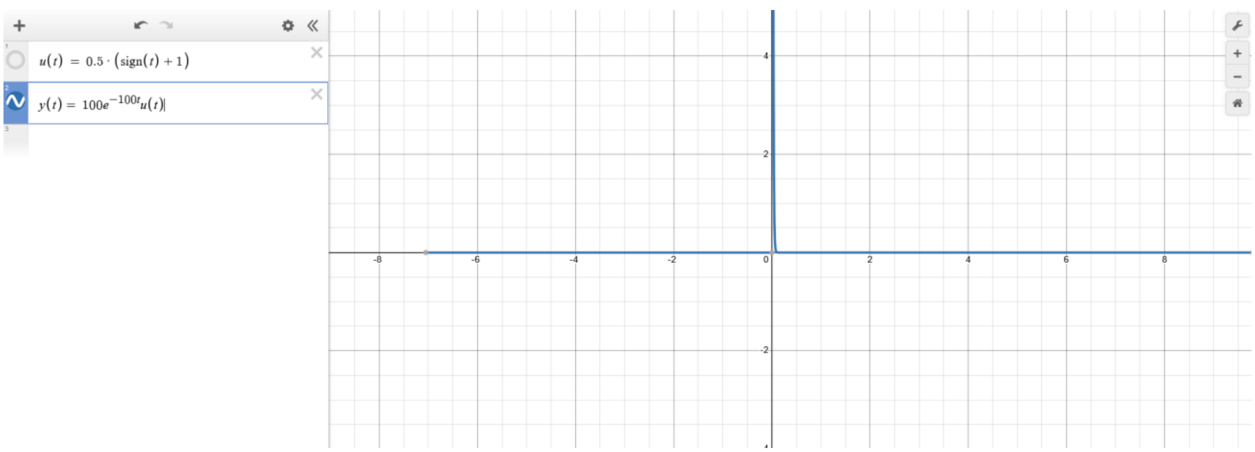
$$A = 100, \quad B = 0$$

از آنجایی که می‌خواهیم پاسخ ضربه سیستم را بررسی کنیم، پس:

$$Y(s) = \frac{100}{\mathrm{s}+100}$$

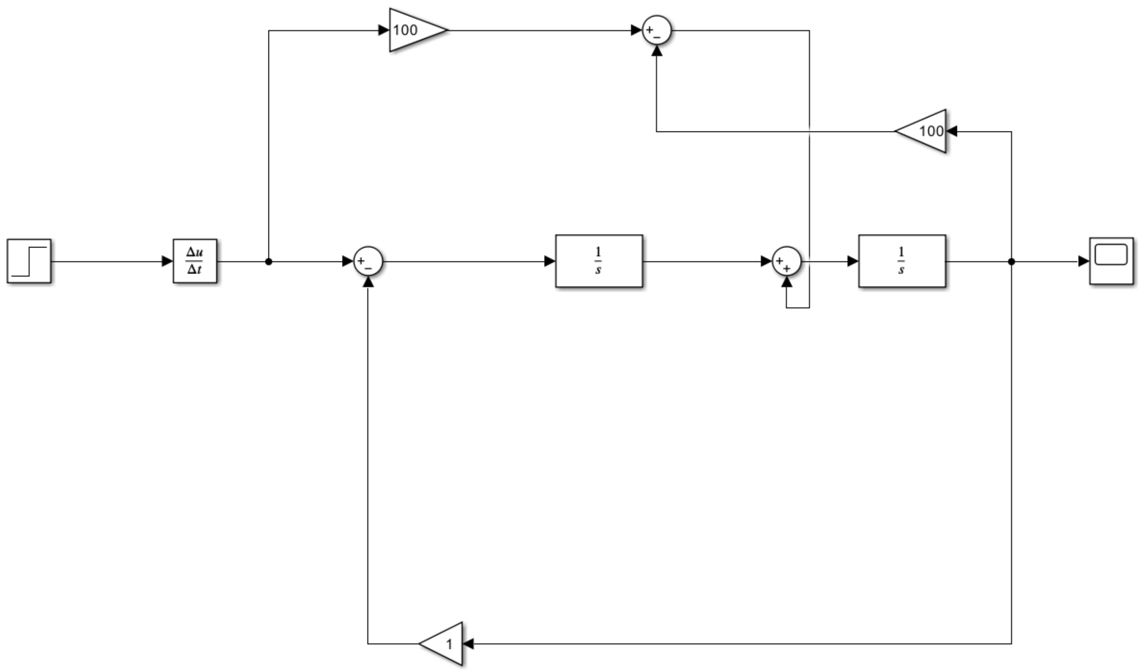
$$y(t) = 100\mathrm{e}^{-100\mathrm{t}}u(t)$$

حال پاسخ ضربه را رسم می‌کنیم:




در این حالت، سیستم تعلیق خودرو به دلیل دمپینگ بسیار قوی (بزرگ بودن ضریب میرایی 100) هیچ نوسانی ندارد و هرگونه لرزش یا ضربه به سرعت مستهلک می‌شود. این رفتار می‌تواند در برخی شرایط ایده‌آل باشد، اما ممکن است باعث کاهش بازده جذب انرژی در مسیرهای ناهموار شود.

حال آن را در Simulink شبیه‌سازی می‌کنیم:




خروجی:

همانطور که می‌بینیم نتیجه شبیه‌سازی با نتیجه محاسبات تئوری مطابقت دارد.

ه)

برای سیستم تعلیق خودرو، مقدار B=2 مناسب‌ترین گزینه است زیرا سیستم به حالت میرایی بحرانی می‌رسد و ضربات وارد شده به کابین را بدون نوسان و با سرعت مناسب کاهش می‌دهد. مقدار B=0 به دلیل نوسانات مداوم و نبود میرایی نامناسب است و مقدار B=100 به دلیل میرایی بیش‌ازحد باعث کاهش بسیار کند ارتعاشات و انتقال ضربات به کابین می‌شود. بنابراین، B=2 بهترین تعادل بین نرمی و پایداری را فراهم می‌کند.

# بخش سوم

الف)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

$$y(0^-)=1,\quad y'(0^-)=1$$

$$x(t)=5u(t)$$

از معادله دیفرانسیلی تبدیل لاپلاس یک طرفه می‌گیریم:

$$s^2y(s)-sy(0)-y'(0)+3sy(s)-3y(0)+2y(s)=\frac{5}{s}$$

$$y(s)=\frac{s^5+4s+5}{s(s^5+3s+2)}=\frac{5}{2}.\frac{1}{s}+\frac{1}{2}.\frac{1}{s+2}-\frac{2}{s+1}$$

حال تبدیل لاپلاس معکوس می‌گیریم:

$$y(t)=\frac{5}{2}u(t)+\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)-2e^{-t}u(t)$$

چون لاپلاس یکطرفه است، پس:

$$y(t)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}-2e^{-t}$$

ب)

با استفاده از syms، معادله دیفرانسیلی را حل می‌کنیم:

کد:

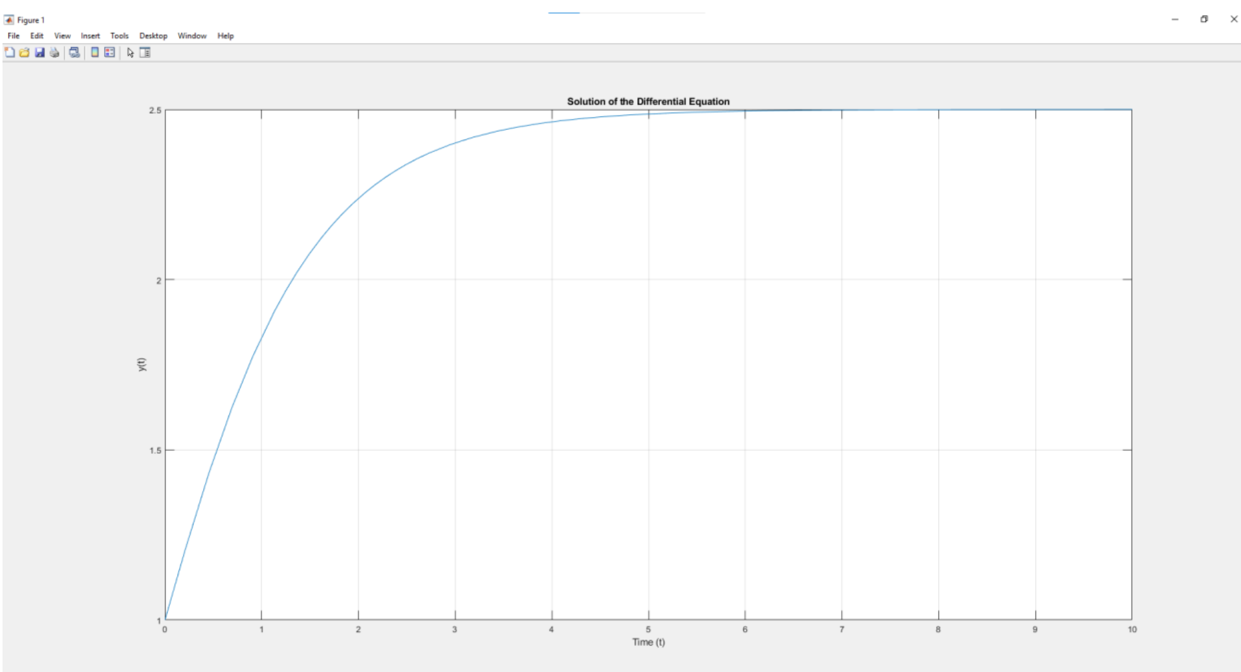
```
syms y(t)
eqn = diff(y,t,2) + 3*diff(y,t) + 2*y == 5; % Define the differential equation
cond1 = y(0) == 1; % Initial condition for y(0)
cond2 = Dy(0) == 1; % Initial condition for y'(0)

ySol(t) = dsolve(eqn, cond1, cond2); % Solve the differential equation

% Simplify the solution
ySol(t) = simplify(ySol(t))

% Plot the solution
fplot(ySol, [0, 10]) % Adjust the time interval as needed
grid on
xlabel('Time (t)')
ylabel('y(t)')
title('Solution of the Differential Equation')
```

خروجی:



```
>> Section3

ySol(t) =

exp(-2*t)/2 - 2*exp(-t) + 5/2
```

همانطور که می‌بینیم، خروجی به دست آمده با محاسبات مرحله قبل یکسان است.