

拓扑物态中的轴子电动力学

莫梁虹*

中山大学 物理学院, 广州 510275

摘要: 拓扑物态一直以来都是量子多体物理领域的热点问题。其对电磁场的响应无法用经典的麦克斯韦理论来描述, 而需要使用轴子电动力学进行刻画。本文通过研究含有 θ 项的电磁场理论, 得到了轴子电动力学的运动方程, 并探讨了 θ 项在拓扑绝缘体和外尔半金属中的电磁场效应。

关键词: θ 项, Maxwell 方程, 轴子, 拓扑绝缘体, 外尔半金属

1 前言

相的分类与一直是量子多体物理的核心问题。20 世纪 30 年代, 朗道提出了对称性破缺理论, 该理论成功解释了铁磁相变、超流等物理现象。但是自 20 世纪 80 年代以来, 实验上出现了很多无法使用朗道对称性破缺理论来解释的拓扑物态。以拓扑绝缘体为例, 不同于传统的普通绝缘体, 该物态具有有能隙的体态和无能隙的边界态。其中值得注意的两点是, 两种绝缘体相不能通过绝热变化相互连接, 拓扑非平凡相和平凡相之间需要经历体能带闭合才能完成相变; 而且从朗道对称性范式来看, 时间反演不变的拓扑绝缘体和普通绝缘体是无法区分的。目前区分的方法有两种, 一种方法是引入“拓扑不变量”, 如 Z_2 不变量, 可以从系统的布洛赫态波函数计算得出。另一种方法基于拓扑场论描述拓扑相对外部场的非平凡响应。

在拓扑场论中, 拓扑相应对外部场的响

应是通过一个拓扑项来描述的。在二维空间中, 时间反演对称性破缺相的量子霍尔效应可以用 Chern-Simons 作用量来描述, 其量子化系数由第一陈数给出。而在三维空间中, 拓扑绝缘体对外电磁场的响应被称为拓扑磁电效应, 由 θ 项来描述。

θ 项与描述假想基本粒子轴子与光子耦合的作用量具有完全相同的形式, 因此人们将 θ 项所刻画的电磁规律称为轴子电动力学。

本文首先从含 θ 项的电磁拉格朗日量推导出轴子电动力学的基本方程, 并进一步分析拓扑物态中的轴子动力学。

2 轴子电动力学的基本方程

麦克斯韦电磁理论真空中的基本运动方程为

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot E = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (4)$$

*E-mail: molh3@mail2.sysu.edu.cn

利用电磁张量 $F^{\mu\nu}$ ，上述方程可以简写为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (5)$$

该方程可以从如下作用量基于最小作用量原理得到

$$S_0 = -\frac{1}{4\mu_0} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \int d^4x \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) \quad (6)$$

基于该电磁作用量，我们引入保持洛伦兹协变性的 θ 项，

$$S_\theta = \int d^4x \frac{\theta e^2}{4\pi^2 \hbar} \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{\theta e^2}{4\pi^2 \hbar c} \int d^4x E \cdot B \quad (7)$$

其中对偶张量 $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ 。值得注意的是，从线性代数的角度来分析拉格朗日量， θ 项对应的是电磁场的交叉项，通过合同变换可以转换成标准型，物理上似乎并不会与原始的电磁拉格朗日量有本质上的区别。但是事实上， θ 项的存在确实会对物理系统产生重要的影响。在量子色动力学 (QCD) 中， θ 项会导致强子的电偶极矩，这是实验观测到的事实。另外，在高能物理中， θ 项会对强子衰变和早期宇宙演化等问题产生重要的影响。因此，尽管通过合同变换可以将 θ 项变换成标准型，但其物理上的影响仍然是非常实际和重要的。

特别的，如果 θ 是一个与时空无关的常数，则 θ 项可以写成全微分，其结果只与边界条件有关，这反映了其能刻画系统的全局拓扑信息。

接下来，我们可以进一步考虑如下作用量

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{e^2}{16\pi^2 \hbar} \theta(x, t) F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \quad (8)$$

对应的运动方程：

$$\nabla \cdot E = -\frac{\alpha c}{\pi} \nabla \theta \cdot B \quad (9)$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \times B = \frac{\alpha}{\pi c} (\dot{\theta} + \nabla \theta \times E) \quad (10)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0 \quad (12)$$

其中精细常数 $\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}$ 。

对比轴子电动力学运动方程和麦克斯韦运动方程，我们可以发现，真空中出现了 θ 项诱导出来的电荷和电流^[1]

$$\rho = -\frac{\alpha c}{\pi} \nabla \theta \cdot B \quad (13)$$

$$j = \frac{\alpha}{\pi c \mu_0} (\dot{\theta} + \nabla \theta \times E) \quad (14)$$

下面我们对该现象进一步分析。

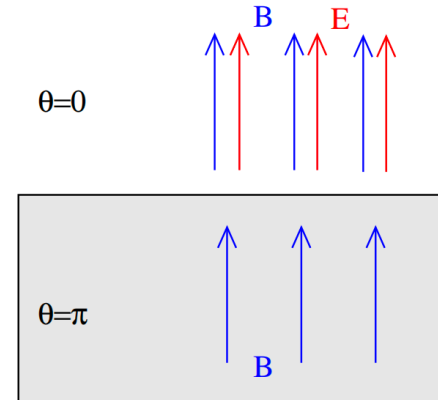


图 1 加入磁场

根据式子13可见，当 θ 的梯度与磁场的方向并非完全垂直时，该处会出现由 θ 项诱导出来的虚电荷。如图1所示， $z < -\epsilon$ 的区域 $\theta = \pi$ ， $z > \epsilon$ 的区域 $\theta = 0$ ，在 $z \in (-\epsilon, \epsilon)$ 区间 $\nabla \theta \neq 0$ 。

假设我们加入沿着 z 方向的磁场，根据13可知， $z \in (-\epsilon, \epsilon)$ 区域会积累诱导虚电荷，进而在整个空间中产生电场。对于 $\theta = 0$ 的区域来说， θ 项的边界条件可以利用磁场产生电场。

与之类似的，在空间中加入平行于界面的电场，边界处会诱导出电流切向

$$K_x = \alpha \varepsilon_0 c E_y \quad (15)$$

进而在空间中产生磁场。值得注意的是，电

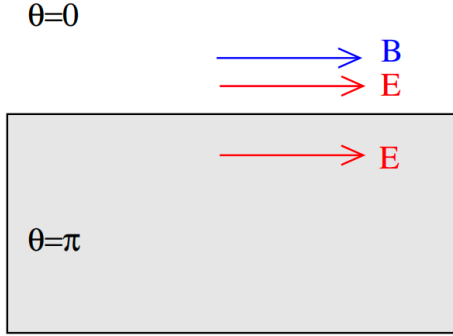


图2 加入电场

场方向与诱导出来的霍尔电流方向垂直，相应的霍尔电导 $1/2$ 量子化，

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{2\pi\hbar} \quad (16)$$

3 轴子电动力学与拓扑物态

上一节我们已经对 θ 项进行了详细分析，接下来我们分析拓扑绝缘体与 θ 项的关系，并进一步分析拓扑物态对外电磁场的响应。我们主要考虑拓扑绝缘体和外尔半金属这两种典型的拓扑物态。

3.1 拓扑绝缘体

在高对称点出拓扑绝缘体一般可以用狄拉克哈密顿量近似刻画

$$\mathcal{H}_{TI}(k) = \hbar v_F k \cdot \alpha + m_0 \alpha_4 \quad (17)$$

将该拓扑绝缘体放在外场 $A_\mu = (A_0, A)$

中，其作用量可以写为^[2]

$$S_{TI} = \int d^4x \psi^\dagger \{i(\partial_t - ieA_0) - [\mathcal{H}_{TI}(k + eA)]\} \psi \quad (18)$$

$$= \int d^4x \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m_0] \psi \quad (19)$$

$$\equiv iS_{TI}^E = \int d\tau d^3r \bar{\psi} [\gamma_\mu (\partial_\mu - ieA_\mu - m_0 e^{i\pi\gamma_5})] \psi \quad (20)$$

其中，我们考虑了最小耦合 $k \rightarrow k + eA$ 和标量势 $\psi^\dagger \mathcal{H}_0 \psi \rightarrow \psi^\dagger (\mathcal{H}_0 - eA_0) \psi$ 。最后一行，通过 wick 转动定义出欧式空间的作用量 S_{TI}^E 。

接下来我们利用 Fujikawa 方法对上述作用量进行分析，可以发现作用量中涌现出来的 θ 项。Fujikawa 方法方法主要分为两步，

1. 对场进行无穷小的手征变换，相应地系统的配分函数相应变换。

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\pi d\phi \gamma_5/2} \psi \quad (21)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i\pi d\phi \gamma_5/2} \quad (22)$$

$$(23)$$

$$Z \rightarrow Z' = \int \mathcal{D}[\psi' \bar{\psi}'] e^{-S_{TI}'[\psi', \bar{\psi}']} \quad (24)$$

2. 要求手征变换前后的配分函数保持不变， $Z = Z'$ 。

由此可以得到，

$$S_{TI}^E = \int d^4x \bar{\psi} [\gamma_\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m_0] \psi \quad (25)$$

$$+ i \int d^4x \frac{\pi e^2}{32\pi^2 \hbar c} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} \quad (26)$$

其中第一项是拓扑平庸绝缘体，第二项 θ 项来自于测度变换的雅可比系数，其中的 $\theta = \pi$ 是一个常数。

3.2 外尔半金属

当我们考虑狄拉克哈密顿量的质量为零，可以得到两个手性相反的外尔费米子，对于外尔半金属的哈密顿量我们也可以进行类似的分析，下面考虑破缺时间反演对称性的外尔半金属

$$\mathcal{H}_0(k) = \hbar v_F (\tau_z k \cdot \sigma + b \cdot \sigma) \quad (27)$$

其中 τ_i 和 σ_i 分别是代表外尔点和自旋自由度泡利矩阵， $b \cdot \sigma$ 为塞曼项。利用 Fujikawa 方法后可以得到该系统的作用量为

$$S = \int d^4x \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu)] \psi \quad (28)$$

$$+ \frac{e^2}{2\pi^2 \hbar} \int d^4x b \cdot r E \cdot B \quad (29)$$

其中的 $\theta(r, t) = 2b \cdot r$ 。

可以注意到，外尔半金属中的 θ 项对应于哈密顿量中破缺时间反演对称性的塞曼项。若外场 $b = 0$ ，则该系统中的 θ 为零。更一般地可以证明，外尔半金属中非零或者非量子化的 θ 项来自于时间或者空间反演对称性破缺。

根据运动方程，可以得到诱导电流为

$$j(r, t) = \frac{e^2}{4\pi^2 \hbar} [\dot{\theta}(r, t) B + \nabla \theta(r, t) \times E] = \frac{e^2}{2\pi^2 \hbar} b \times E \quad (30)$$

进一步可以得到霍尔电导为

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{4\pi \hbar} \int dk_x dk_y R \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial k_x} \times \frac{\partial R}{\partial k_y} \right) = \frac{e^2}{2\pi^2 \hbar} b \quad (31)$$

此处 (反常量子霍尔效应) 的分数化的霍尔电导与分数量子霍尔效应 Moore-Read 态的 $1/2$ 分数相同，但是具体机制不一样。简单来说，前者是短程纠缠态，而后者是含有长程纠缠的拓扑序态。

4 结论和展望

本文从含 θ 项的电磁场理论得到了轴子电动力学的运动方程，并讨论了拓扑绝缘体和外尔半金属中的 θ 项电磁场效应。值得注意的是，在上述模型中， θ 项引起的轴子弦还会导致外尔半金属中出现电荷密度波等现象^[3]，这方面的理论还需要进一步研究。

参考文献

- [1] TONG D. Gauge theory[J]. Lecture notes, DAMTP Cambridge, 2018, 10.
- [2] SEKINE A, NOMURA K. Axion electrodynamics in topological materials[J]. Journal of Applied Physics, 2021, 129(14): 141101.
- [3] SEHAYEK D, THAKURATHI M, BURKOV A. Charge density waves in weyl semimetals[J]. Physical Review B, 2020, 102(11): 115159.

Axion electrodynamics in topological states of matter

Lianghong Mo

School of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

Abstract: Topological states of matter have always been a hot issue in the field of quantum many-body physics. Its response to electromagnetic fields cannot be described by classical Maxwell's theory, but needs to be characterized using axion electrodynamics. In this paper, the equation of motion of axion electrodynamics is obtained by studying the electromagnetic field theory containing the θ term, and the electromagnetic field effect of the θ term in topological insulators and Weyl semimetals is discussed.

Key words: θ term, Maxwell equation, axion, topological insulator, Weyl semimetal