量 子 场 论

第 4 章　量子旋量场

4.1 节至 4.3 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2022 年 10 月 20 日

第 4 章　量子旋量场

☯ 本章讨论旋量场 (spinor field) 的正则量子化，旋量场对应于旋量表示 (spinor representation)

🪨 旋量表示是固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 的一个投影表示，也是相应覆盖群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的一个线性表示

📚 **Paul Dirac** 在 1928 年首次将旋量表示引入到描述电子的理论中，建立了 **Dirac 方程**

🪵 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 和 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的 Lie 代数都是 **Lorentz 代数**，它们的表示可以通过构造满足 Lorentz 代数关系

Paul Dirac
(1902–1984)

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$$

的生成元矩阵来得到

🏗 下面就以这样的方式建立旋量表示

4.1 节 Lorentz 群的旋量表示

- 假设能够找到一组满足如下**反对易关系**的 $N \times N$ **矩阵** γ^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$：

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1} = 2g^{\mu\nu}$$

- 最后一步是一种简写，省略了 $N \times N$ **单位矩阵** $\mathbf{1}$
- 这样的 γ^μ 称为 **Dirac 矩阵**，也称为 γ **矩阵**
- 这个反对易关系意味着 $\gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu$

4.1 节 Lorentz 群的旋量表示

♈ 假设能够找到一组满足如下**反对易关系**的 $N \times N$ **矩阵** γ^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$：

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1} = 2g^{\mu\nu}$$

🛖 最后一步是一种简写，省略了 $N \times N$ **单位矩阵** $\mathbf{1}$

🏘️ 这样的 γ^μ 称为 **Dirac 矩阵**，也称为 γ **矩阵**

🏡 这个反对易关系意味着 $\gamma^\mu\gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu$

🏣 **当** $\mu \neq \nu$ **时**，$g^{\mu\nu} = 0$，而 γ^μ 与 γ^ν 是**反对易**的，即

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu, \quad \mu \neq \nu$$

🏢 **当** $\mu = \nu$ **时**，有

$$(\gamma^0)^2 = \frac{1}{2}\{\gamma^0, \gamma^0\} = g^{00} = \mathbf{1}, \quad (\gamma^i)^2 = \frac{1}{2}\{\gamma^i, \gamma^i\} = g^{ii} = -\mathbf{1}$$

Dirac 矩阵的性质

- $(\gamma^0)^2 = 1$ 表明 $(\gamma^0)^2$ 的本征值都是 1，$(\gamma^i)^2 = -1$ 表明 $(\gamma^i)^2$ 的本征值都是 -1
- 这意味着 γ^0 的本征值为实数 ± 1，γ^i 的本征值为虚数 $\pm \mathrm{i}$
- 将它们对角化，则对角元是这些本征值：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \pm \mathrm{i} & & & \\ & \pm \mathrm{i} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Dirac 矩阵的性质

- $(\gamma^0)^2 = 1$ 表明 $(\gamma^0)^2$ 的本征值都是 1，$(\gamma^i)^2 = -1$ 表明 $(\gamma^i)^2$ 的本征值都是 -1
- 这意味着 γ^0 的本征值为实数 ± 1，γ^i 的本征值为虚数 $\pm \mathrm{i}$
- 将它们对角化，则对角元是这些本征值：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \pm \mathrm{i} & & & \\ & \pm \mathrm{i} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

- 这些性质告诉我们，γ^0 是厄米矩阵，γ^i 是反厄米矩阵，即

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$$

- 于是 $(\gamma^0)^\dagger \gamma^0 = (\gamma^0)^2 = 1$，$(\gamma^i)^\dagger \gamma^i = -(\gamma^i)^2 = 1$
- 可见 γ^0 和 γ^i 都是幺正矩阵

矩阵 $S^{\mu\nu}$

♊ 以 Dirac 矩阵的对易子定义另一组 $N \times N$ 矩阵

$$S^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

🏭 显然，$S^{\mu\nu}$ 关于 μ 和 ν 反对称，$S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}$

🔩 因而 $\{S^{\mu\nu}\}$ 中一共有 6 个独立矩阵

🔧 利用对易子公式

$$[AB, C] = ABC + ACB - ACB - CAB = A\{B, C\} - \{A, C\}B$$

👨🏻‍🔧 以及反对易关系 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$，推出

$$[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu, \gamma^\rho] = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu\gamma^\nu - (2g^{\nu\mu} - \gamma^\mu\gamma^\nu), \gamma^\rho] = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\rho]$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2}(\gamma^\mu\{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} - \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\}\gamma^\nu) = \mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})$$

旋量表示的生成元矩阵

♋ 根据**对易子公式** $[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$ 和 $[S^{\mu\nu},\gamma^\rho]=\mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\rho}-\gamma^\nu g^{\mu\rho})$，

$$
\begin{aligned}
[S^{\mu\nu},S^{\rho\sigma}] &= \frac{\mathrm{i}}{4}[S^{\mu\nu},\gamma^\rho\gamma^\sigma-\gamma^\sigma\gamma^\rho]=\frac{\mathrm{i}}{4}([S^{\mu\nu},\gamma^\rho\gamma^\sigma]-[S^{\mu\nu},\gamma^\sigma\gamma^\rho]) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4}([S^{\mu\nu},\gamma^\rho]\gamma^\sigma+\gamma^\rho[S^{\mu\nu},\gamma^\sigma]-[S^{\mu\nu},\gamma^\sigma]\gamma^\rho-\gamma^\sigma[S^{\mu\nu},\gamma^\rho]) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4}[\mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\rho}-\gamma^\nu g^{\mu\rho})\gamma^\sigma+\mathrm{i}\gamma^\rho(\gamma^\mu g^{\nu\sigma}-\gamma^\nu g^{\mu\sigma}) \\
&\qquad -\mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\sigma}-\gamma^\nu g^{\mu\sigma})\gamma^\rho-\mathrm{i}\gamma^\sigma(\gamma^\mu g^{\nu\rho}-\gamma^\nu g^{\mu\rho})]
\end{aligned}
$$

旋量表示的生成元矩阵

根据**对易子公式** $[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$ 和 $[S^{\mu\nu},\gamma^\rho]=\mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\rho}-\gamma^\nu g^{\mu\rho})$，

$$
\begin{aligned}
[S^{\mu\nu},S^{\rho\sigma}] &= \frac{\mathrm{i}}{4}[S^{\mu\nu},\gamma^\rho\gamma^\sigma-\gamma^\sigma\gamma^\rho]=\frac{\mathrm{i}}{4}([S^{\mu\nu},\gamma^\rho\gamma^\sigma]-[S^{\mu\nu},\gamma^\sigma\gamma^\rho]) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4}([S^{\mu\nu},\gamma^\rho]\gamma^\sigma+\gamma^\rho[S^{\mu\nu},\gamma^\sigma]-[S^{\mu\nu},\gamma^\sigma]\gamma^\rho-\gamma^\sigma[S^{\mu\nu},\gamma^\rho]) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4}[\mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\rho}-\gamma^\nu g^{\mu\rho})\gamma^\sigma+\mathrm{i}\gamma^\rho(\gamma^\mu g^{\nu\sigma}-\gamma^\nu g^{\mu\sigma}) \\
&\qquad -\mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\sigma}-\gamma^\nu g^{\mu\sigma})\gamma^\rho-\mathrm{i}\gamma^\sigma(\gamma^\mu g^{\nu\rho}-\gamma^\nu g^{\mu\rho})] \\
&= \frac{\mathrm{i}^2}{4}[g^{\nu\rho}(\gamma^\mu\gamma^\sigma-\gamma^\sigma\gamma^\mu)-g^{\mu\rho}(\gamma^\nu\gamma^\sigma-\gamma^\sigma\gamma^\nu) \\
&\qquad -g^{\nu\sigma}(\gamma^\mu\gamma^\rho-\gamma^\rho\gamma^\mu)+g^{\mu\sigma}(\gamma^\nu\gamma^\rho-\gamma^\rho\gamma^\nu)] \\
&= \mathrm{i}(g^{\nu\rho}S^{\mu\sigma}-g^{\mu\rho}S^{\nu\sigma}-g^{\nu\sigma}S^{\mu\rho}+g^{\mu\sigma}S^{\nu\rho})
\end{aligned}
$$

$S^{\mu\nu}$ 满足 **Lorentz 代数关系** $[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]=\mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}-g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$

因而 $S^{\mu\nu}=\mathrm{i}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]/4$ 必定是 **Lorentz 群某个表示**的**生成元矩阵**

以 $S^{\mu\nu}$ 生成的表示就是**旋量表示**

旋量表示中的固有保时向 Lorentz 变换矩阵

♌ 根据 3.2 节的讨论，一组变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ 在 **Lorentz 群**的矢量表示中生成固有保时向的有限变换

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right) = \mathrm{e}^{X}, \quad X \equiv -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}$$

🏫 类似地，这组参数在旋量表示中生成固有保时向的有限变换

$$D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) = \mathrm{e}^{Y}, \quad Y \equiv -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$$

👩🏻‍🏫 这样定义的 $D(\Lambda)$ 是旋量表示中的 **Lorentz 变换矩阵**

👨🏻‍🎓 由于 $\mathrm{e}^{-Y}\mathrm{e}^{Y} = \mathrm{e}^{-Y+Y} = \mathrm{e}^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$，$D(\Lambda)$ 的逆矩阵为

$$D^{-1}(\Lambda) = \mathrm{e}^{-Y} = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)$$

多重对易子

- 对于算符或同阶方阵 B 与 A，以如下方式定义多重对易子 $[B, A^{(n)}]$：

$$[B, A^{(0)}] \equiv B, \quad [B, A^{(1)}] \equiv [[B, A^{(0)}], A] = [B, A]$$

$$[B, A^{(2)}] \equiv [[B, A^{(1)}], A] = [[B, A], A], \quad \cdots, \quad [B, A^{(n)}] \equiv [[B, A^{(n-1)}], A]$$

- 可以用数学归纳法证明 $BA^k = \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n}[B, A^{(n)}]$

- 由于负整数 m 的阶乘为 $m! \to \infty$，可将上式右边化为无穷级数，

$$BA^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n}[B, A^{(n)}]$$

多重对易子

对于算符或同阶方阵 B 与 A，以如下方式定义多重对易子 $[B, A^{(n)}]$：

$$[B, A^{(0)}] \equiv B, \quad [B, A^{(1)}] \equiv [[B, A^{(0)}], A] = [B, A]$$

$$[B, A^{(2)}] \equiv [[B, A^{(1)}], A] = [[B, A], A], \quad \cdots, \quad [B, A^{(n)}] \equiv [[B, A^{(n-1)}], A]$$

可以用数学归纳法证明 $BA^k = \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n}[B, A^{(n)}]$

由于负整数 m 的阶乘为 $m! \to \infty$，可将上式右边化为无穷级数，

$$BA^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n}[B, A^{(n)}]$$

推出

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-A} B \mathrm{e}^{A} &= \mathrm{e}^{-A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} BA^k = \mathrm{e}^{-A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n}[B, A^{(n)}] \\ &= \mathrm{e}^{-A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-n)!} A^{k-n}[B, A^{(n)}] \\ &= \mathrm{e}^{-A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{e}^{A}[B, A^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[B, A^{(n)}] \end{aligned}$$

Dirac 矩阵的 Lorentz 变换

♎ 由于
$$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = -[S^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = [S^{\sigma\rho}, \gamma^\mu] = \mathrm{i}(\gamma^\sigma g^{\rho\mu} - \gamma^\rho g^{\sigma\mu})$$
$$= \mathrm{i}(g^{\rho\mu}\delta^\sigma{}_\nu - g^{\sigma\mu}\delta^\rho{}_\nu)\gamma^\nu = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

🏭 有
$$[\gamma^\mu, Y^{(1)}] = [\gamma^\mu, Y] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\gamma^\nu = X^\mu{}_\nu\gamma^\nu,$$
$$[\gamma^\mu, Y^{(2)}] = [[\gamma^\mu, Y^{(1)}], Y] = X^\mu{}_\nu[\gamma^\nu, Y] = X^\mu{}_\nu X^\nu{}_\rho\gamma^\rho = (X^2)^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \quad \cdots,$$
$$[\gamma^\mu, Y^{(n)}] = (X^n)^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

Dirac 矩阵的 Lorentz 变换

♎ 由于
$$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = -[S^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = [S^{\sigma\rho}, \gamma^\mu] = \mathrm{i}(\gamma^\sigma g^{\rho\mu} - \gamma^\rho g^{\sigma\mu})$$
$$= \mathrm{i}(g^{\rho\mu}\delta^\sigma{}_\nu - g^{\sigma\mu}\delta^\rho{}_\nu)\gamma^\nu = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

🏭 有
$$[\gamma^\mu, Y^{(1)}] = [\gamma^\mu, Y] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\gamma^\nu = X^\mu{}_\nu\gamma^\nu,$$
$$[\gamma^\mu, Y^{(2)}] = [[\gamma^\mu, Y^{(1)}], Y] = X^\mu{}_\nu[\gamma^\nu, Y] = X^\mu{}_\nu X^\nu{}_\rho\gamma^\rho = (X^2)^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \quad \cdots,$$
$$[\gamma^\mu, Y^{(n)}] = (X^n)^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

🛒 利用 $\mathrm{e}^{-A}B\mathrm{e}^{A} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[B, A^{(n)}]$ 推出
$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) = \mathrm{e}^{-Y}\gamma^\mu\mathrm{e}^{Y} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\gamma^\mu, Y^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(X^n)^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$
$$= (\mathrm{e}^X)^\mu{}_\nu\gamma^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

🛍️ 类比**四维动量算符** P^μ 的 Lorentz 变换 $U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$，把上式看作**旋量表示**中 **Dirac 矩阵** γ^μ 的 **Lorentz 变换规则**，那么 γ^μ 是一个 **Lorentz 矢量**

单位矩阵和生成元矩阵的 Lorentz 变换

- 与 γ^μ 对应的**协变矢量**为 $\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu$，从而

$$\gamma_0 = \gamma^0, \quad \gamma_i = -\gamma^i, \quad i = 1, 2, 3$$

- $N \times N$ **单位矩阵 1** 满足

$$D^{-1}(\Lambda)\,\mathbf{1}\,D(\Lambda) = \mathbf{1}$$

- 因而 1 是一个 **Lorentz 标量**

- **生成元** $S^{\mu\nu}$ 的 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned} D^{-1}(\Lambda)S^{\mu\nu}D(\Lambda) &= \frac{\mathrm{i}}{4}[D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda), D^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu D(\Lambda)] \\ &= \frac{\mathrm{i}}{4}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma[\gamma^\rho, \gamma^\sigma] = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma S^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

- 可见，$S^{\mu\nu}$ 是一个 **2 阶反对称 Lorentz 张量**

γ^5 矩阵

- 引入一个新的 $N \times N$ **矩阵** $\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$
- 由于 $\mu \neq \nu$ 时 $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$，有

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \begin{cases} +\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的偶置换} \\ -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的奇置换} \end{cases}$$

γ^5 矩阵

引入一个新的 $N \times N$ **矩阵** $\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

由于 $\mu \neq \nu$ 时 $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$，有

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \begin{cases} +\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的偶置换} \\ -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的奇置换} \end{cases}$$

这种置换性质与**四维 Levi-Civita 符号类似**：

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的偶置换} \\ +1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的奇置换} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

因而**置换操作**带来的**正负号**在 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 与 $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$ 的缩并中**相互抵消**，如

$$\varepsilon_{1023}\gamma^1\gamma^0\gamma^2\gamma^3 = -\varepsilon_{0123}(-\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = \varepsilon_{0123}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

由此得到 $\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\mathrm{i}\varepsilon_{0123}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\dfrac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$

γ^5 的 Lorentz 变换

$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 是 $(0,4)$ 型 **Lorentz 张量**，**固有 Lorentz 变换**为

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\mu}(\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\nu}(\Lambda^{-1})^{\gamma}{}_{\rho}(\Lambda^{-1})^{\delta}{}_{\sigma}$$

从而，$\gamma^5 = -\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$ 的**固有保时向 Lorentz 变换**是

$$\begin{aligned}
& D^{-1}(\Lambda)\gamma^5 D(\Lambda) \\
= & -\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta \\
= & -\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\kappa\lambda\tau\varepsilon}(\Lambda^{-1})^{\kappa}{}_{\mu}(\Lambda^{-1})^{\lambda}{}_{\nu}(\Lambda^{-1})^{\tau}{}_{\rho}(\Lambda^{-1})^{\varepsilon}{}_{\sigma}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta \\
= & -\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\kappa\lambda\tau\varepsilon}\delta^{\kappa}{}_{\alpha}\delta^{\lambda}{}_{\beta}\delta^{\tau}{}_{\gamma}\delta^{\varepsilon}{}_{\delta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta = -\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta \\
= & \gamma^5
\end{aligned}$$

可见，γ^5 是一个 **Lorentz 标量**

γ^5 的性质

♒ γ^5 的平方为

$$(\gamma^5)^2 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = -(-\mathbf{1})^3 = \mathbf{1}$$

🏥 第二步利用偶置换将后面的 $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ 转化为 $\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0$

👨🏻‍⚕️ 根据 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和 $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$，$\gamma^5$ 是厄米矩阵，

$$(\gamma^5)^\dagger = -\mathrm{i}(\gamma^3)^\dagger(\gamma^2)^\dagger(\gamma^1)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = \mathrm{i}\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5$$

💊 此外，γ^5 与 γ^μ 反对易，

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = \mathrm{i}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = \mathrm{i}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu - \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu) = 0$$

🩹 即

$$\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu$$

$\gamma^\mu\gamma^5$ 和 $\sigma^{\mu\nu}$ 的 Lorentz 变换

♓ $\gamma^\mu\gamma^5$ 的 Lorentz 变换为

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^5 D(\Lambda) = D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) D^{-1}(\Lambda)\gamma^5 D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5$$

⛪ 因而它是一个 **Lorentz 矢量**

👨🏻 再引入

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2S^{\mu\nu}$$

👰🏻 它**正比于** $S^{\mu\nu}$，所以也是一个 **2 阶反对称 Lorentz 张量**，

$$D^{-1}(\Lambda)\sigma^{\mu\nu}D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\sigma^{\rho\sigma}$$

💍 当 $\mu \neq \nu$ 时，$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\gamma^\mu\gamma^\nu$，故 $\sigma^{\mu\nu}$ 的 **6 个独立分量**为

$$\sigma^{01} = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1, \quad \sigma^{02} = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^2, \quad \sigma^{03} = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^3$$
$$\sigma^{12} = \mathrm{i}\gamma^1\gamma^2, \quad \sigma^{13} = \mathrm{i}\gamma^1\gamma^3, \quad \sigma^{23} = \mathrm{i}\gamma^2\gamma^3$$

变换矩阵 $D(\mathcal{P})$

- 现在拥有**一组矩阵** $\{\mathbf{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$
- 它们各自的**独立分量个数之和**为 $1+1+4+4+6=16$
- 上面讨论了这些矩阵的**固有保时向 Lorentz 变换**，下面研究**宇称变换**

变换矩阵 $D(\mathcal{P})$

- 现在拥有一组矩阵 $\{\mathbf{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$
- 它们各自的独立分量个数之和为 $1+1+4+4+6=16$
- 上面讨论了这些矩阵的固有保时向 Lorentz 变换，下面研究宇称变换
- 用 γ^0 定义变换矩阵

$$D(\mathcal{P}) = \zeta\gamma^0$$

- 其中 ζ 是一个复的相位因子，满足 $|\zeta|^2 = 1$
- $D^\dagger(\mathcal{P})D(\mathcal{P}) = \zeta^*(\gamma^0)^\dagger\zeta\gamma^0 = |\zeta|^2(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}$ 表明，$D(\mathcal{P})$ 是幺正矩阵，故

$$D^{-1}(\mathcal{P}) = D^\dagger(\mathcal{P}) = \zeta^*\gamma^0$$

- 用 $D(\mathcal{P})$ 对 γ^0 和 γ^i 作相似变换，得

$$\begin{aligned} D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) &= |\zeta|^2\gamma^0\gamma^0\gamma^0 = +\gamma^0 \\ D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) &= |\zeta|^2\gamma^0\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^i\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^i \end{aligned}$$

γ^μ、1 和 γ^5 的宇称变换

- 利用宇称变换矩阵 $\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$
- 将 $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) = +\gamma^0$ 和 $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) = -\gamma^i$ 归纳为

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

- 可见，$D(\mathcal{P})$ 就是旋量表示中的宇称变换矩阵，它是非固有保时向的
- 上式是 γ^μ 的宇称变换形式，按照 1.4 节的定义，γ^μ 是极矢量

γ^μ、1 和 γ^5 的宇称变换

- 利用宇称变换矩阵 $\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$
- 将 $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) = +\gamma^0$ 和 $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) = -\gamma^i$ 归纳为

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

- 可见，$D(\mathcal{P})$ 就是旋量表示中的宇称变换矩阵，它是非固有保时向的
- 上式是 γ^μ 的宇称变换形式，按照 1.4 节的定义，γ^μ 是极矢量
- $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) = +\gamma^0$ 说明 γ^0 是宇称本征态，本征值为 $+$，即具有偶宇称
- $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) = -\gamma^i$ 说明 γ^i 是宇称本征态，本征值为 $-$，即具有奇宇称
- 虽然单位矩阵 1 与 γ^5 都是 Lorentz 标量，但它们的宇称变换性质不同，

$$D^{-1}(\mathcal{P})\mathbf{1}D(\mathcal{P}) = +\mathbf{1}, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^5 D(\mathcal{P}) = \gamma^0\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^5\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^5$$

- 1 是狭义的标量，具有偶宇称；γ^5 是赝标量，具有奇宇称

$\gamma^\mu\gamma^5$ 和 $\sigma^{\mu\nu}$ 的宇称变换

🔃 $\gamma^\mu\gamma^5$ 的**宇称变换**是

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu\gamma^5 D(\mathcal{P}) = D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P})D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5$$

🏯 即

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\gamma^0\gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i\gamma^5 D(\mathcal{P}) = +\gamma^i\gamma^5$$

🧥 根据 1.4 节的定义，$\gamma^\mu\gamma^5$ 是**轴矢量**，其分量的**宇称性质**与 γ^μ **相反**

$\gamma^\mu\gamma^5$ 和 $\sigma^{\mu\nu}$ 的宇称变换

🔃 $\gamma^\mu\gamma^5$ 的宇称变换是

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu\gamma^5 D(\mathcal{P}) = D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P})D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5$$

🏯 即

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\gamma^0\gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i\gamma^5 D(\mathcal{P}) = +\gamma^i\gamma^5$$

🦺 根据 1.4 节的定义，$\gamma^\mu\gamma^5$ 是轴矢量，其分量的宇称性质与 γ^μ 相反

🛕 $\sigma^{\mu\nu}$ 的宇称变换为

$$\begin{aligned} D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{\mu\nu}D(\mathcal{P}) &= \frac{\mathrm{i}}{2}[D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}), D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\nu D(\mathcal{P})] \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\mathcal{P}^\mu{}_\alpha\mathcal{P}^\nu{}_\beta[\gamma^\alpha,\gamma^\beta] = \mathcal{P}^\mu{}_\alpha\mathcal{P}^\nu{}_\beta\sigma^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

🎋 即

$$D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{0i}D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^0{}_\alpha\mathcal{P}^i{}_\beta\sigma^{\alpha\beta} = -\sigma^{0i}, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{ij}D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^i{}_\alpha\mathcal{P}^j{}_\beta\sigma^{\alpha\beta} = +\sigma^{ij}$$

旋量表示的维数

- 可见，集合 $\{\mathbf{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$ 是由**标量 1**、**赝标量 γ^5**、**极矢量 γ^μ**、**轴矢量 $\gamma^\mu\gamma^5$** 和 **2 阶反对称张量 $\sigma^{\mu\nu}$** 组成的
- 综合考虑**固有保时向 Lorentz 变换**和**宇称变换**，则这些矩阵的变换性质**各不相同**
- 因而彼此之间是**线性独立**的，总共有 **16 个**线性独立的矩阵
- 线性独立的 $N \times N$ 矩阵至多有 N^2 个，需要 $N \geq 4$ 才能得到 16 个这样的矩阵

旋量表示的维数

- 可见，集合 $\{\mathbf{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$ 是由**标量 1**、**赝标量 γ^5**、**极矢量 γ^μ**、**轴矢量 $\gamma^\mu\gamma^5$** 和 **2 阶反对称张量 $\sigma^{\mu\nu}$** 组成的
- 综合考虑**固有保时向 Lorentz 变换**和**宇称变换**，则这些矩阵的变换性质**各不相同**
- 因而彼此之间是**线性独立**的，总共有 **16 个**线性独立的矩阵
- 线性独立的 $N \times N$ 矩阵至多有 N^2 个，需要 $N \geq 4$ 才能得到 16 个这样的矩阵
- 取 $N = 4$，就可以用这 16 个矩阵展开一个**任意**的 4×4 矩阵（展开系数为**复数**）
- 也就是说，它们构成一组**完备**的基底
- 可以证明，满足**反对易关系** $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ 的 **Dirac 矩阵**至少是 4 阶方阵
- 因此，将 Dirac 矩阵 γ^μ 取为 4×4 **矩阵**
- 而**旋量表示**是 **Lorentz 群**的一个 **4 维表示**

4.2 节 Dirac 旋量场

- 在 **Lorentz 群旋量表示**中，被**变换矩阵** $D(\Lambda)$ 作用的态称为 **Dirac 旋量** (spinor)
- 由于 $D(\Lambda)$ 是 4×4 **矩阵**，**Dirac 旋量** ψ_a 应当具有 **4 个分量** $(a=1,2,3,4)$
- 相应的**固有保时向 Lorentz 变换**为

$$\psi'_a = D_{ab}(\Lambda)\psi_b$$

- 隐去旋量指标 a 和 b，上式化为 $\psi' = D(\Lambda)\psi$

4.2 节 Dirac 旋量场

- 在 **Lorentz 群旋量表示**中，被**变换矩阵** $D(\Lambda)$ 作用的态称为 **Dirac 旋量** (spinor)
- 由于 $D(\Lambda)$ 是 4×4 **矩阵**，**Dirac 旋量** ψ_a 应当具有 **4 个分量** $(a=1,2,3,4)$
- 相应的**固有保时向 Lorentz 变换**为

$$\psi'_a = D_{ab}(\Lambda)\psi_b$$

- 隐去旋量指标 a 和 b，上式化为 $\psi' = D(\Lambda)\psi$
- 将 ψ 和 ψ' 看作**列矢量**，而上式右边就是**线性代数**中**矩阵**与**列矢量**的**乘积**：

$$\begin{pmatrix}\psi'_1\\ \psi'_2\\ \psi'_3\\ \psi'_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11}(\Lambda) & D_{12}(\Lambda) & D_{13}(\Lambda) & D_{14}(\Lambda)\\ D_{21}(\Lambda) & D_{22}(\Lambda) & D_{23}(\Lambda) & D_{24}(\Lambda)\\ D_{31}(\Lambda) & D_{32}(\Lambda) & D_{33}(\Lambda) & D_{34}(\Lambda)\\ D_{41}(\Lambda) & D_{42}(\Lambda) & D_{43}(\Lambda) & D_{44}(\Lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$$

量子 Dirac 旋量场的 Lorentz 变换

- 如果 ψ_a 依赖于**时空坐标** x^μ，它就成为 **Dirac 旋量场** $\psi_a(x)$
- 类比**量子矢量场**的 Lorentz 变换 $A'^\mu(x') = U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x')U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$
- **量子 Dirac 旋量场**的 **Lorentz 变换**形式是

$$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$$

量子 Dirac 旋量场的 Lorentz 变换

- 如果 ψ_a 依赖于**时空坐标** x^μ，它就成为 **Dirac 旋量场** $\psi_a(x)$
- 类比**量子矢量场**的 Lorentz 变换 $A'^\mu(x') = U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x')U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$
- **量子 Dirac 旋量场**的 **Lorentz 变换**形式是

$$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$$

- 对于固有保时向 Lorentz 变换 Λ，$D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)$ 的**无穷小**形式为

$$D_{ab}(\Lambda) = \delta_{ab} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{ab}$$

- 于是，$\psi'_a(x')$ 的无穷小形式是 $\psi'_a(x') = \psi_a(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{ab}\psi_b(x)$
- 1.7.3 小节一般场的无穷小 Lorentz 变换为 $\Phi'_a(x') = \left[\delta_{ab} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{ab}\right]\Phi_b(x)$
- 比较可知，**生成元** $I^{\mu\nu}$ 在**旋量表示**中对应于 $S^{\mu\nu}$

无穷小展开

作变换 $x' \to x$、$x \to \Lambda^{-1}x$，$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$ 化为

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$$

对于**无穷小 Lorentz 变换**，$(\Lambda^{-1}x)^\mu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu$

在 x 处将 $\psi(\Lambda^{-1}x)$ **展开到 ω 的一阶项**，得

$$\begin{aligned}\psi(\Lambda^{-1}x) &= \psi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \psi(x) = \psi(x) - \omega_{\mu\nu} x^\nu \partial^\mu \psi(x) \\ &= \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\psi(x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\psi(x)\end{aligned}$$

无穷小展开

作变换 $x' \to x$、$x \to \Lambda^{-1}x$，$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$ 化为

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$$

对于**无穷小 Lorentz 变换**，$(\Lambda^{-1}x)^\mu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu$

在 x 处将 $\psi(\Lambda^{-1}x)$ **展开到 ω 的一阶项**，得

$$\begin{aligned}\psi(\Lambda^{-1}x) &= \psi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \psi(x) = \psi(x) - \omega_{\mu\nu} x^\nu \partial^\mu \psi(x) \\ &= \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\psi(x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\psi(x)\end{aligned}$$

从而，$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$ **右边**展开到 ω 一阶项的形式为

$$\begin{aligned}D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) &= \left(\mathbf{1} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\left[\psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\psi(x)\right] \\ &= \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})\psi(x)\end{aligned}$$

自旋角动量

- $U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})\psi(x)$ **最左边**展开为

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right)\psi(x)\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)$$

$$= \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\psi(x)J^{\mu\nu} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\psi(x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[\psi(x), J^{\mu\nu}]$$

- 两相比较，得到 $[\psi(x), J^{\mu\nu}] = (L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})\psi(x)$

自旋角动量

🟩 $U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})\psi(x)$ **最左边**展开为

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right)\psi(x)\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)$$

$$= \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\psi(x)J^{\mu\nu} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\psi(x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[\psi(x), J^{\mu\nu}]$$

🌿 两相比较，得到 $[\psi(x), J^{\mu\nu}] = (L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})\psi(x)$

🧃 $S^{\mu\nu}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为 $S^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}S^{jk}$, $\mathbf{S} = (S^{23}, S^{31}, S^{12})$

🧊 可以从 $S^{\mu\nu}$ 满足的 **Lorentz 代数关系**推出 **SU(2) 代数关系** $[S^i, S^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}S^k$

🧋 因而 S^i 是 **SU(2) 群**某个**线性表示**的**生成元**

自旋角动量

🟩 $U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})\psi(x)$ 最左边展开为

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right)\psi(x)\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)$$

$$= \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\psi(x)J^{\mu\nu} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\psi(x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[\psi(x), J^{\mu\nu}]$$

🌿 两相比较，得到 $[\psi(x), J^{\mu\nu}] = (L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})\psi(x)$

🧃 $S^{\mu\nu}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为 $S^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}S^{jk}$， $\mathbf{S} = (S^{23}, S^{31}, S^{12})$

🧊 可以从 $S^{\mu\nu}$ 满足的 **Lorentz 代数关系**推出 **SU(2) 代数关系** $[S^i, S^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}S^k$

🧋 因而 S^i 是 **SU(2) 群**某个**线性表示**的**生成元**

🫖 根据 $J^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}J^{jk}$ 和 $L^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}L^{jk}$，由 $[\psi(x), J^{\mu\nu}] = (L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})\psi(x)$ 得

$$[\psi(x), \mathbf{J}] = (\mathbf{L} + \mathbf{S})\psi(x)$$

🍵 上式表明，除了**轨道角动量 $\mathbf{L}$**，**总角动量算符 $\mathbf{J}$** 还生成了由 $\mathbf{S}$ 描述的**自旋角动量**

Weyl 表象

🟨 利用 **Pauli 矩阵** $\sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

🌾 以 $\mathbf{1}$ 表示 2×2 **单位矩阵**，将 **Dirac 矩阵**表示成 2×2 分块形式：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix}$$

🌽 容易验证，这样表示的 Dirac 矩阵既符合**反对易关系** $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$，也满足厄米性 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和反厄米性 $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$

Weyl 表象

🟨 利用 **Pauli 矩阵** $\sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

🌾 以 $\mathbf{1}$ 表示 2×2 **单位矩阵**，将 **Dirac 矩阵**表示成 2×2 分块形式：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix}$$

🌽 容易验证，这样表示的 Dirac 矩阵既符合**反对易关系** $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$，也满足厄米性 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和反厄米性 $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$

🏺 Dirac 矩阵有多种表示方式，以上表示方式称为 **Weyl 表象**，也称为**手征表象**

🔮 Dirac 矩阵的所有表示方式都是**等价**的，彼此通过**相似变换**联系起来

🍶 如果 γ^μ 满足**反对易关系** $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$，那么作**相似变换**后，$\gamma'^\mu \equiv U^{-1}\gamma^\mu U$ 也满足这个反对易关系：

$$\{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = U^{-1}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}U = 2g^{\mu\nu}U^{-1}U = 2g^{\mu\nu}$$

Weyl 表象中的 γ^5 和 $S^{\mu\nu}$

- 根据 **Pauli 矩阵**的乘积关系 $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k$
- **Weyl 表象**中 γ^5 的具体形式为

$$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & \end{pmatrix}\gamma^2\gamma^3 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} -\sigma^1 & \\ & \sigma^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix}\gamma^3$$

$$= \mathrm{i}\begin{pmatrix} & -\mathrm{i}\sigma^3 \\ -\mathrm{i}\sigma^3 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Weyl 表象中的 γ^5 和 $S^{\mu\nu}$

- 根据 **Pauli 矩阵**的乘积关系 $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k$
- **Weyl 表象**中 γ^5 的具体形式为

$$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & \end{pmatrix}\gamma^2\gamma^3 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} -\sigma^1 & \\ & \sigma^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix}\gamma^3$$

$$= \mathrm{i}\begin{pmatrix} & -\mathrm{i}\sigma^3 \\ -\mathrm{i}\sigma^3 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- 用 2×2 **单位矩阵** $\mathbf{1}$ 和 **Pauli 矩阵**定义 $\sigma^\mu \equiv (\mathbf{1}, \boldsymbol{\sigma})$ 和 $\bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbf{1}, -\boldsymbol{\sigma})$
- 将 **Dirac 矩阵** $\gamma^0 = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}$ 和 $\gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix}$ 简洁地归纳成 $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}$
- **生成元矩阵**表达为 $S^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu \end{pmatrix}$

Weyl 表象中的自旋角动量矩阵

- 利用 $[\sigma^i, \sigma^j] = \sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i = 2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k$ 将 $S^{\mu\nu}$ 的空间分量化为

$$
\begin{aligned}
S^{ij} &= \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i & \\ & -\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} -2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k & \\ & -2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & \\ & \sigma^k \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- 由 **Pauli 矩阵的厄米性**可知，S^{ij} 是**厄米矩阵**，$(S^{ij})^\dagger = S^{ij}$

Weyl 表象中的自旋角动量矩阵

利用 $[\sigma^i, \sigma^j] = \sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i = 2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k$ 将 $S^{\mu\nu}$ 的空间分量化为

$$
\begin{aligned}
S^{ij} &= \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i & \\ & -\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} -2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k & \\ & -2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & \\ & \sigma^k \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

由 **Pauli 矩阵的厄米性**可知，S^{ij} 是**厄米矩阵**，$(S^{ij})^\dagger = S^{ij}$

自旋角动量矩阵为

$$
S^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}S^{jk} = \frac{1}{4}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{jkl}\begin{pmatrix} \sigma^l & \\ & \sigma^l \end{pmatrix} = \frac{1}{4}2\delta^{il}\begin{pmatrix} \sigma^l & \\ & \sigma^l \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}
$$

即 S^i 是两个 **SU(2) 群基础表示生成元** $\tau^i = \dfrac{\sigma^i}{2}$ 的**直和**

因此 S^i 所属 **SU(2) 群线性表示**是两个 **SU(2) 基础表示**的**直和**

Dirac 旋量场自旋为 1/2

🟧 于是，**自旋角动量矩阵 S** 的**平方**为

$$\mathbf{S}^2 = S^i S^i = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sigma^i\sigma^i & \\ & \sigma^i\sigma^i \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = s(s+1)$$

🥘 上式最后两步省略了 4×4 **单位矩阵**

🥢 可见，**Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 的**自旋量子数**是 $s = \frac{1}{2}$

🍜 量子化之后，$\psi(x)$ 描述**自旋为** $\mathbf{\frac{1}{2}}$ 的粒子

4.3 节 Dirac 方程

- 为了写下 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 的 **Lorentz 不变拉氏量**，需要结合**两个旋量场**来得到 **Lorentz 标量**
- 在 **Weyl 表象**中，$S^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量为 $S^{0i} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^0\gamma^i = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$
- 其厄米共轭为 $(S^{0i})^\dagger = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -(\sigma^i)^\dagger & \\ & (\sigma^i)^\dagger \end{pmatrix} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix} = -S^{0i}$
- 可见，S^{0i} **不是厄米矩阵**，而是**反厄米矩阵**

4.3 节 Dirac 方程

🟢 为了写下 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 的 **Lorentz 不变拉氏量**，需要结合**两个旋量场**来得到 **Lorentz 标量**

🏜️ 在 **Weyl 表象**中，$S^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量为 $S^{0i} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^0\gamma^i = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$

🌵 其厄米共轭为 $(S^{0i})^\dagger = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -(\sigma^i)^\dagger & \\ & (\sigma^i)^\dagger \end{pmatrix} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix} = -S^{0i}$

🦂 可见，S^{0i} **不是厄米矩阵**，而是**反厄米矩阵**

🐫 当 $\omega_{0i} \neq 0$ 时，

$$D^\dagger(\Lambda) = \left[\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\right]^\dagger = \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger\right]$$

$$\neq \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) = D^{-1}(\Lambda)$$

🔥 即 $D(\Lambda)$ **不是幺正矩阵**，因此 $\psi^\dagger(x)\psi(x)$ **不是 Lorentz 标量**：

$$\psi'^\dagger(x')\psi'(x') = \psi^\dagger(x)D^\dagger(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) \neq \psi^\dagger(x)\psi(x)$$

$D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)$

- 根据 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和 $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$，有

$$(\gamma^0)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger\gamma^0 = -\gamma^i\gamma^0 = \gamma^0\gamma^i$$

- 将这两条式子合起来写成一条**常用**的公式

$$\boxed{(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu}$$

$D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)$

- 根据 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 和 $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$，有

$$(\gamma^0)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger\gamma^0 = -\gamma^i\gamma^0 = \gamma^0\gamma^i$$

- 将这两条式子合起来写成一条**常用**的公式

$$\boxed{(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu}$$

- 从而

$$\begin{aligned}(S^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 &= -\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]^\dagger\gamma^0 = -\frac{\mathrm{i}}{4}[(\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - (\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^\nu)^\dagger]\gamma^0 \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{4}\gamma^0(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu) = \gamma^0 S^{\mu\nu}\end{aligned}$$

- 故

$$\begin{aligned}D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 &= \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger\right]\gamma^0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger\right]^n\gamma^0 \\ &= \gamma^0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)^n = \gamma^0\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)\end{aligned}$$

Dirac 共轭和旋量双线性型

- 定义 $\psi(x)$ 的 **Dirac 共轭** $\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$
- 根据 $D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)$，$\bar{\psi}(x)$ 的 **Lorentz 变换**为

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^\dagger(x')\gamma^0 = \psi^\dagger(x)D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0 D^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)$$

- 这样一来，$\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 就是一个 **Lorentz 标量**：

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

Dirac 共轭和旋量双线性型

- 定义 $\psi(x)$ 的 **Dirac 共轭** $\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$
- 根据 $D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)$，$\bar{\psi}(x)$ 的 **Lorentz 变换**为

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^\dagger(x')\gamma^0 = \psi^\dagger(x)D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0 D^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)$$

- 这样一来，$\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 就是一个 **Lorentz 标量**：

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

- $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 这种形式的量称为**旋量双线性型** (spinor bilinear)
- 利用 $\bar{\psi}(x)$ 还能构造 **Lorentz 协变**的其它旋量双线性型
- $\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)$ 是一个 **Lorentz 标量**，

$$\bar{\psi}'(x')\mathrm{i}\gamma^5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\mathrm{i}\gamma^5 D(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)$$

更多旋量双线性型

- $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$ 都是 **Lorentz 矢量**，

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)\\ \bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\gamma^5\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^5 D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(x)\end{aligned}$$

- $\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$ 是一个 **2 阶反对称 Lorentz 张量**，

$$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\sigma^{\mu\nu}D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x)$$

更多旋量双线性型

- $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$ 都是 **Lorentz 矢量**，

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$$
$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\gamma^5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^5 D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(x)$$

- $\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$ 是一个 **2 阶反对称 Lorentz 张量**，

$$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\sigma^{\mu\nu}D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x)$$

- 如果将 $\psi(x)$ 看作**旋量空间**中的**列矢量**，则 $\psi^\dagger(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 都是**行矢量**
- 因而这些**旋量双线性型**都只是旋量空间中的 1×1 **矩阵**，也就是**数**，如

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \begin{pmatrix}\bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 & \bar{\psi}_3 & \bar{\psi}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma^\mu_{11} & \gamma^\mu_{12} & \gamma^\mu_{13} & \gamma^\mu_{14}\\ \gamma^\mu_{21} & \gamma^\mu_{22} & \gamma^\mu_{23} & \gamma^\mu_{24}\\ \gamma^\mu_{31} & \gamma^\mu_{32} & \gamma^\mu_{33} & \gamma^\mu_{34}\\ \gamma^\mu_{41} & \gamma^\mu_{42} & \gamma^\mu_{43} & \gamma^\mu_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$$

旋量双线性型的厄米性

- 由 γ^0 和 γ^5 的厄米性、$\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu$ 及 $(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$ 可知
- 这些旋量双线性型都是厄米的，也就是说，都是实数：

$$
\begin{aligned}
(\bar\psi\psi)^\dagger &= (\psi^\dagger\gamma^0\psi)^\dagger = \psi^\dagger\gamma^0\psi = \bar\psi\psi \\
(\bar\psi \mathrm{i}\gamma^5\psi)^\dagger &= -\mathrm{i}\psi^\dagger\gamma^5\gamma^0\psi = \mathrm{i}\psi^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi = \bar\psi\mathrm{i}\gamma^5\psi \\
(\bar\psi\gamma^\mu\psi)^\dagger &= \psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi = \bar\psi\gamma^\mu\psi \\
(\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi)^\dagger &= \psi^\dagger\gamma^5(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^5\gamma^0\gamma^\mu\psi = -\psi^\dagger\gamma^0\gamma^5\gamma^\mu\psi \\
&= \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi = \bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi \\
(\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi)^\dagger &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\psi^\dagger[(\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - (\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^\nu)^\dagger]\gamma^0\psi \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{2}\psi^\dagger\gamma^0(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu)\psi = \bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi
\end{aligned}
$$

- 量子化之后，这五个旋量双线性型成为厄米算符

自由 Dirac 旋量场的拉氏量

- 此外，包含**时空导数**的**旋量双线性型** $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$ 是 **Lorentz 标量**，

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x)$$
$$= \bar{\psi}(x)\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\delta^\nu{}_\rho\gamma^\rho\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$$

自由 Dirac 旋量场的拉氏量

🔴 此外，包含**时空导数**的**旋量双线性型** $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$ 是 **Lorentz 标量**，

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x)$$
$$= \bar{\psi}(x)\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\delta^\nu{}_\rho\gamma^\rho\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$$

⛰️ 利用 $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 和 $\bar{\psi}\psi$ 写下**自由 Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 的 **Lorentz 不变拉氏量**

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

💥 其中 $m > 0$ 是 Dirac 旋量场的**质量**，于是

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -m\bar{\psi}$$

🌋 **Euler-Lagrange 方程** $\partial_\mu\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} = 0$ 给出

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \mathrm{i}(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}$$

Dirac 方程

💜 对 $0 = \mathrm{i}(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}$ 取**厄米共轭**，得到

$$0 = -\mathrm{i}(\gamma^\mu)^\dagger \partial_\mu (\psi^\dagger \gamma^0)^\dagger + m(\psi^\dagger \gamma^0)^\dagger = -\mathrm{i}(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \partial_\mu \psi + m\gamma^0 \psi = -\gamma^0(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

🎆 故 $\psi(x)$ 的经典运动方程为

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

🥮 上式就是 **Dirac 方程**，标明**旋量指标**的形式为 $[\mathrm{i}(\gamma^\mu)_{ab}\partial_\mu - m\delta_{ab}]\psi_b(x) = 0$

Dirac 方程

💜 对 $0 = \mathrm{i}(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}$ 取**厄米共轭**，得到

$$0 = -\mathrm{i}(\gamma^\mu)^\dagger \partial_\mu (\psi^\dagger \gamma^0)^\dagger + m(\psi^\dagger \gamma^0)^\dagger = -\mathrm{i}(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \partial_\mu \psi + m\gamma^0 \psi = -\gamma^0(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

🎆 故 $\psi(x)$ 的经典运动方程为

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

🥮 上式就是 **Dirac 方程**，标明**旋量指标**的形式为 $[\mathrm{i}(\gamma^\mu)_{ab}\partial_\mu - m\delta_{ab}]\psi_b(x) = 0$

🍡 容易验证，Dirac 方程具有 **Lorentz 协变性**：

$$\begin{aligned}
(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') &= [\mathrm{i}\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]D(\Lambda)\psi(x) \\
&= D(\Lambda)[\mathrm{i}D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) \\
&= D(\Lambda)[\mathrm{i}\Lambda^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) \\
&= D(\Lambda)(\mathrm{i}\delta^\nu{}_\rho \gamma^\rho \partial_\nu - m)\psi(x) = D(\Lambda)(\mathrm{i}\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi(x) = 0
\end{aligned}$$

Klein-Gordon 方程

💙 对 **Dirac 方程** $(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$ 左边乘以 $(-\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)$

🌇 利用**反对易关系** $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$，得

$$
\begin{aligned}
0 &= (-\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)(\mathrm{i}\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi = (\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi \\
&= \left[\frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu(\partial_\mu\partial_\nu + \partial_\nu\partial_\mu) + m^2\right]\psi = \left[\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right]\psi \\
&= (g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = (\partial^2 + m^2)\psi
\end{aligned}
$$

🌃 也就是说，**自由**的 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 满足 **Klein-Gordon 方程**

$$(\partial^2 + m^2)\psi(x) = 0$$

Weyl 旋量

❤️ 在 **Weyl 表象**中，**旋量表示生成元矩阵** $S^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu \end{pmatrix}$

是**分块对角**的，因而可将旋量表示分解为**两个 2 维表示**的**直和**

🌊 把**四分量 Dirac 旋量场** ψ 分解为两个**二分量旋量场** η_{L} 和 η_{R}：$\psi = \begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{L}} \\ \eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$

🦞 这样的二分量旋量称为 **Weyl 旋量**

🐠 η_{L} 称为**左手** (left-handed) **Weyl 旋量**，η_{R} 称为**右手** (right-handed) **Weyl 旋量**

Weyl 旋量

❤️ 在 **Weyl 表象**中，**旋量表示生成元矩阵** $S^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu \end{pmatrix}$

是**分块对角**的，因而可将旋量表示分解为**两个 2 维表示**的**直和**

🌊 把**四分量 Dirac 旋量场** ψ 分解为两个**二分量旋量场** η_L 和 η_R：$\psi = \begin{pmatrix} \eta_\mathrm{L} \\ \eta_\mathrm{R} \end{pmatrix}$

🦞 这样的二分量旋量称为 **Weyl 旋量**

🐠 η_L 称为**左手** (left-handed) **Weyl 旋量**，η_R 称为**右手** (right-handed) **Weyl 旋量**

🐡 利用 $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}$ 将 **Dirac 方程**化为

$$0 = (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix} -m & \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu \\ \mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_\mathrm{L} \\ \eta_\mathrm{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu\eta_\mathrm{R} - m\eta_\mathrm{L} \\ \mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta_\mathrm{L} - m\eta_\mathrm{R} \end{pmatrix}$$

🦈 即得两个相互**耦合**的方程 $\begin{cases} \mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta_\mathrm{L} - m\eta_\mathrm{R} = 0 \\ \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu\eta_\mathrm{R} - m\eta_\mathrm{L} = 0 \end{cases}$

Weyl 方程

💛 如果 $m = 0$，两个方程就各自**独立**了：

$$\mathrm{i}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\eta_{\mathrm{L}} = 0, \quad \mathrm{i}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\eta_{\mathrm{R}} = 0$$

🏝️ 这两个独立方程称为 **Weyl 方程**

🌴 可见，**非零质量** m 的存在将**左手**和**右手 Weyl 旋量场**耦合起来

Hermann Weyl
(1885–1955)

Weyl 方程

💛 如果 $m = 0$，两个方程就各自**独立**了：

$$\mathrm{i}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\eta_{\mathrm{L}} = 0, \quad \mathrm{i}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\eta_{\mathrm{R}} = 0$$

🏝️ 这两个独立方程称为 **Weyl 方程**

🌴 可见，**非零质量** m 的存在将**左手**和**右手 Weyl 旋量场**耦合起来

🩴 **自旋角动量矩阵**的**直和分解** $S^i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$ 表明

⛱️ **左手**和**右手 Weyl 旋量**各对应于一个 **SU(2) 群基础表示**

🏖️ 当 $m = 0$ 时，量子化之后的 $\eta_{\mathrm{L}}(x)$ 和 $\eta_{\mathrm{R}}(x)$ 各自描述**自旋为** $\frac{1}{2}$ 的粒子

Hermann Weyl
(1885–1955)