量 子 场 论

第 5 章　量子场的相互作用

5.5 节　散射截面和衰变宽度

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2022 年 11 月 14 日

5.5 节 散射截面和衰变宽度

🚪 **没有相互作用**时，S **算符**就是恒等算符 1，S 矩阵元为 $S_{fi} = \langle f|\, S\, |i\rangle = \langle f|i\rangle$

🪟 **存在相互作用**时，$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_n\, \mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)]$

🪑 这个级数的 $n = 0$ 项也是恒等算符，因此可以将 S 算符分解为 $S = 1 + \mathrm{i}T$，其中 $\mathrm{i}T$ 包含**所有 $n \geq 1$ 的项** 👉 S 矩阵元分解为 $S_{fi} = \langle f|i\rangle + \langle f|\, \mathrm{i}T\, |i\rangle$

🛏️ 右边**第一项**意味着，即使理论中存在相互作用，初态也有一定概率**自由**地演化，也就是说，初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用

🛋️ 由此可见，S 矩阵中**真正描述相互作用**的项是 $\langle f|\, \mathrm{i}T\, |i\rangle$

5.5 节 散射截面和衰变宽度

- **没有相互作用**时，S **算符**就是恒等算符 1，S 矩阵元为 $S_{fi} = \langle f|\, S\, |i\rangle = \langle f|i\rangle$

- **存在相互作用**时，$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_n\, \mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1)\cdots\mathcal{H}_1(x_n)]$

- 这个级数的 $n=0$ 项也是恒等算符，因此可以将 S 算符分解为 $S = 1 + \mathrm{i}T$，其中 $\mathrm{i}T$ 包含**所有 $n \geq 1$ 的项** S 矩阵元分解为 $S_{fi} = \langle f|i\rangle + \langle f|\, \mathrm{i}T\, |i\rangle$

- 右边**第一项**意味着，即使理论中存在相互作用，初态也有一定概率**自由**地演化，也就是说，初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用

- 由此可见，S 矩阵中**真正描述相互作用**的项是 $\langle f|\, \mathrm{i}T\, |i\rangle$

- 由于**能动量守恒定律**，**初态** $|i\rangle$ 中所有粒子的**四维动量之和** p_i^μ 必定等于**末态** $|f\rangle$ 中所有粒子的**四维动量之和** p_f^μ，这意味着**散射矩阵元**的形式为

$$\langle f|\, \mathrm{i}T\, |i\rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f)\, \mathrm{i}\mathcal{M}$$

- **四维 δ 函数**体现了能动量守恒定律；$\mathcal{M}$ 是 Lorentz 不变的，称为**不变矩阵元**，或**不变散射振幅** (invariant scattering amplitude)，它是初末态四维动量的函数

5.5.1 小节 跃迁概率

- 发生相互作用时，$i \to f$ 的跃迁概率可以表示成 $P_{fi} = \dfrac{|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle}$

- 根据 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y)$，分子为

$$|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2 = [(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)]^2|\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4\delta^{(4)}(0)\cdot(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2$$

- 由于 $\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p\cdot x} = \int \mathrm{d}x^0\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p^0x^0}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = 2\pi\,\delta(p^0)\cdot(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$

- 四维 δ 函数满足 Fourier 变换公式 $\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p\cdot x} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p)$

5.5.1 小节　跃迁概率

- 发生相互作用时，$i \to f$ 的跃迁概率可以表示成 $P_{fi} = \dfrac{|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle}$
- 根据 δ 函数的性质 $f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y)$，分子为

$$|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2 = [(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)]^2|\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4\delta^{(4)}(0)\cdot(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)|\mathcal{M}|^2$$

- 由于 $\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p\cdot x} = \int \mathrm{d}x^0\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p^0x^0}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = 2\pi\,\delta(p^0)\cdot(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$
- 四维 δ 函数满足 Fourier 变换公式 $\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p\cdot x} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p)$
- 故 $\displaystyle(2\pi)^4\delta^{(4)}(0) = \int \mathrm{d}^4x = \tilde{V}\tilde{T}$，$\tilde{V}$ 是空间区域的体积，$\tilde{T}$ 是时间范围的长度
- 对于全空间全时间积分，$\tilde{V}$ 和 $\tilde{T}$ 趋于无穷大
- 于是推出 $|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2 = \tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)|\mathcal{M}|^2$
- 对于时空坐标的函数 $f(x)$，将 Fourier 变换约定为 $\displaystyle\tilde{f}(p) = \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}f(x)$
- Fourier 逆变换为 $\displaystyle f(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\tilde{f}(p)$

初态和末态

现在讨论 2 体初态到 n 体末态的跃迁过程，即初态 $|i\rangle$ 包含 2 个粒子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 n 个粒子的末态 $|f\rangle$

设初态中两个粒子的动量分别为 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathbf{p}_{\mathcal{B}}$，则 $|i\rangle$ 可以用相应的产生算符表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}} a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}} |0\rangle, \quad E_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = p^0_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|^2 + m^2_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}$$

此处**省略**了产生算符的螺旋度指标（或者说，自旋指标）

$|0\rangle$ 是真空态，理论中任意湮灭算符作用到它身上都将得到零

初态和末态

- 现在讨论 **2 体初态**到 $\boldsymbol{n}$ **体末态**的跃迁过程，即初态 $|i\rangle$ 包含 **2 个粒子** $\mathcal{A}$ **和** $\mathcal{B}$，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 $\boldsymbol{n}$ **个粒子**的末态 $|f\rangle$
- 设**初态**中两个粒子的动量分别为 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathbf{p}_{\mathcal{B}}$，则 $|i\rangle$ 可以用相应的**产生算符**表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}} a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}} |0\rangle, \quad E_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = p^0_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|^2 + m^2_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}$$

- 此处**省略**了产生算符的**螺旋度指标**（或者说，**自旋指标**）
- $|0\rangle$ 是**真空态**，理论中任意**湮灭算符**作用到它身上都将得到**零**
- 类似地，**末态**可以写成

$$|f\rangle = \left(\prod_{j=1}^{n} \sqrt{2E_j}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_j}\right) |0\rangle, \quad E_j = p^0_j = \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m^2_j}$$

- 其中 $\mathbf{p}_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ 是 n 个末态粒子的动量
- 此时，初态和末态的**四维总动量**分别是 $p^\mu_i = p^\mu_{\mathcal{A}} + p^\mu_{\mathcal{B}}$ 和 $p^\mu_f = \sum_{j=1}^{n} p^\mu_j$

初末态内积

当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 粒子由两个不同的量子场描述时，可把初态 $|i\rangle$ 改写为单粒子态的直积，

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{\mathcal{A}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}} |0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes \sqrt{2E_{\mathcal{B}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}} |0\rangle_{\mathcal{B}} = |\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$$

这里 $|0\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|0\rangle_{\mathcal{B}}$ 分别是描述 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的两个量子场所对应的**真空态**

参考：实标量场单粒子态内积 $\langle \mathbf{q}|\mathbf{p}\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$

利用 $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int d^3x = \tilde{V}$，单粒子态 $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}}$ 和 $|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}}$ 的自我内积分别是

$$\langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}}|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} = 2E_{\mathcal{A}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}, \quad \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}}|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 2E_{\mathcal{B}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_{\mathcal{B}}\tilde{V}$$

于是得到 $\langle i|i\rangle = \langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}}|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}}\langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}}|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2$

初末态内积

当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 粒子由两个不同的量子场描述时，可把初态 $|i\rangle$ 改写为单粒子态的直积，

$$|i\rangle = \sqrt{2E_\mathcal{A}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_\mathcal{A}} |0\rangle_\mathcal{A} \otimes \sqrt{2E_\mathcal{B}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_\mathcal{B}} |0\rangle_\mathcal{B} = |\mathbf{p}_\mathcal{A}\rangle_\mathcal{A} \otimes |\mathbf{p}_\mathcal{B}\rangle_\mathcal{B}$$

这里 $|0\rangle_\mathcal{A}$ 和 $|0\rangle_\mathcal{B}$ 分别是描述 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的两个量子场所对应的**真空态**

参考：实标量场单粒子态内积 $\langle\mathbf{q}|\mathbf{p}\rangle = 2E_\mathbf{p}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$

利用 $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \int \mathrm{d}^3x = \tilde{V}$，单粒子态 $|\mathbf{p}_\mathcal{A}\rangle_\mathcal{A}$ 和 $|\mathbf{p}_\mathcal{B}\rangle_\mathcal{B}$ 的自我内积分别是

$$\langle\mathbf{p}_\mathcal{A}|\mathbf{p}_\mathcal{A}\rangle_\mathcal{A} = 2E_\mathcal{A}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_\mathcal{A}\tilde{V}, \quad \langle\mathbf{p}_\mathcal{B}|\mathbf{p}_\mathcal{B}\rangle_\mathcal{B} = 2E_\mathcal{B}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_\mathcal{B}\tilde{V}$$

于是得到 $\langle i|i\rangle = \langle\mathbf{p}_\mathcal{A}|\mathbf{p}_\mathcal{A}\rangle_\mathcal{A}\langle\mathbf{p}_\mathcal{B}|\mathbf{p}_\mathcal{B}\rangle_\mathcal{B} = 4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}\tilde{V}^2$

当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是由同一量子场描述的全同粒子时，若 $\mathbf{p}_\mathcal{A} \neq \mathbf{p}_\mathcal{B}$，也能推出这个结果

如果末态不包含全同粒子，同理可得 $\langle f|f\rangle = \prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})$

单位时间内特定动量跃迁概率

从而，跃迁概率化为

$$P_{fi} = \frac{|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2}{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}\tilde{V}^2\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)\,|\mathcal{M}|^2}{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}\tilde{V}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})}$$

系统从遥远过去的初态 $|i\rangle$ 演化到遥远未来的末态 $|f\rangle$ 所经历的时间为 $\tilde{T}$，对于一组特定的末态动量 $\{p_j\}$，单位时间内的跃迁概率为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}\tilde{V}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})\right]^{-1}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - \sum_{j=1}^{n}p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

单位时间内特定动量跃迁概率

从而，跃迁概率化为

$$P_{fi}=\frac{|\langle f|\,iT\,|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle}=\frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)|\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})}=\frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)\,|\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})}$$

系统从遥远过去的初态 $|i\rangle$ 演化到遥远未来的末态 $|f\rangle$ 所经历的时间为 $\tilde{T}$，对于一组特定的末态动量 $\{p_j\}$，单位时间内的跃迁概率为

$$R_{\{p_j\}}=\frac{P_{fi}}{\tilde{T}}=\left[4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})\right]^{-1}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

此处四维 δ 函数可以分解为

$$\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\right)=\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}_{\mathcal{A}}+\mathbf{p}_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}\mathbf{p}_j\right)\delta\left(E_{\mathcal{A}}+E_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}E_j\right)$$

在散射过程中，末态中 n 个粒子的动量可以取任意满足运动学要求的值，而能动量守恒定律对应的运动学条件 $p^\mu_{\mathcal{A}}+p^\mu_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p^\mu_j=0$ 已经体现在四维 δ 函数中

一维动量相空间

📙 为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的**所有可能取值**包含起来，也就是说，需要对**末态**的**动量相空间**积分

🌱 考察**一维**动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \to \infty$

☘ 为了确保**动量微分算符** $\hat{p}_x = -\mathrm{i}\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是**厄米算符**，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足**周期性边界条件** $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I（第四版）§4.4.3]

一维动量相空间

为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的**所有可能取值**包含起来，也就是说，需要对**末态**的**动量相空间**积分

考察**一维**动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \to \infty$

为了确保**动量微分算符** $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是**厄米算符**，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足**周期性边界条件** $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I（第四版）§4.4.3]

作为**动量本征态**的波函数是**平面波解** $\varphi_p(x) \propto \exp(ipx)$

结合周期性边界条件，有 $\exp(-ipL/2) = \exp(ipL/2)$，故 $\exp(ipL) = 1$

这意味着 $pL = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$，因此**动量本征值**是 $p_k = 2k\pi/L, \quad k \in \mathbb{Z}$

一维动量相空间

- 为了计算总的跃迁率，需要将 $\{p_j\}$ 的**所有可能取值**包含起来，也就是说，需要对**末态**的**动量相空间**积分
- 考察**一维**动量相空间，先假定粒子在 $x \in [-L/2, L/2]$ 范围内运动，再让 $L \to \infty$
- 为了确保**动量微分算符** $\hat{p}_x = -\mathrm{i}\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2, L/2]$ 上是**厄米算符**，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足**周期性边界条件** $\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$

[曾谨言《量子力学》卷 I（第四版）§4.4.3]

- 作为**动量本征态**的波函数是**平面波解** $\varphi_p(x) \propto \exp(\mathrm{i}px)$
- 结合周期性边界条件，有 $\exp(-\mathrm{i}pL/2) = \exp(\mathrm{i}pL/2)$，故 $\exp(\mathrm{i}pL) = 1$
- 这意味着 $pL = 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$，因此**动量本征值**是 $p_k = 2k\pi/L,\quad k \in \mathbb{Z}$
- **当 $L \to \infty$ 时**，相邻动量本征值之差变成动量的微分，

$$\Delta p_k = p_{k+1} - p_k = \frac{2\pi}{L} \to \mathrm{d}p, \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta p_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{L} \to \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p$$

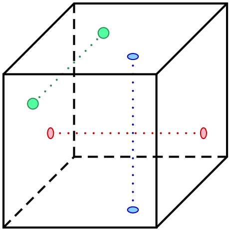
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \to \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p$$

单位时间内跃迁概率

推广到**三维**情况，先假定粒子局限在体积为 $\tilde{V}=L^3$ 的立方体中运动，**周期性边界条件**相当于将**立方体表面上任意一点**视作与位于相对的面上的**对应点等同**

满足此条件的**动量本征值**为 $\mathbf{p}=\dfrac{2\pi}{L}(k_1,k_2,k_3),\quad k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}$

当 $L\to\infty$ 时，有 $\displaystyle\sum_{k_1k_2k_3}\to\frac{L^3}{(2\pi)^3}\int d^3p=\frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3}\int d^3p$

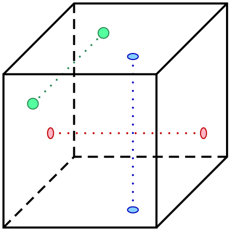


单位时间内跃迁概率

推广到**三维**情况，先假定粒子局限在体积为 $\tilde{V} = L^3$ 的立方体中运动，**周期性边界条件**相当于将**立方体表面上任意一点**视作与位于相对的面上的**对应点等同**

满足此条件的**动量本征值**为 $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(k_1, k_2, k_3),\quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

当 $L \to \infty$ 时，有 $\sum_{k_1 k_2 k_3} \to \frac{L^3}{(2\pi)^3}\int d^3p = \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3}\int d^3p$



考虑 n 个末态粒子**所有动量取值**，对 $R_{\{p_j\}}$ 作**末态相空间积分**，得到**单位时间**内 $2 \to n$ 散射过程的**跃迁概率**

$$R = \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3}\int d^3p_j\right) R_{\{p_j\}}$$

$$= \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}}\left(\prod_{j=1}^{n}\int \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

上式中**相空间体积元** $\frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}$ 是 **Lorentz 不变**的

末态对称性因子

- 以上讨论只对末态**不包含全同粒子**的情况成立
- 假如末态**包含全同粒子**，在做完上述末态相空间积分之后，还要**除以**相应的**末态对称性因子** $\mathcal{S}$，从而**避免**量子态的**重复计算**
- 如果末态中第 k 种粒子包含 n_k 个**全同粒子**，则**末态对称性因子**为

$$\mathcal{S}=\prod_k n_k!$$

- **单位时间跃迁概率**变成

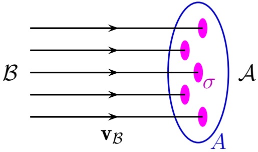
$$R=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}}\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

5.5.2 小节 散射截面

🚲 现在讨论**束流打靶**实验

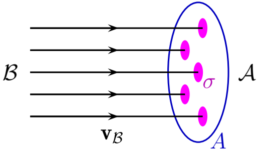
🍏 如右图所示，**固定靶** (fixed target) 由静止的 $\mathcal{A}$ **粒子**组成，**束流** (beam) 由 $\mathcal{B}$ **粒子**组成

🍊 设束流中每个 $\mathcal{B}$ 粒子的**运动速度**相同，记为 $\mathbf{v}_\mathcal{B}$，按照**狭义相对论**，$\mathbf{v}_\mathcal{B} \equiv \mathbf{p}_\mathcal{B}/E_\mathcal{B}$



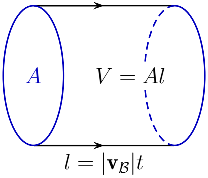
5.5.2 小节 散射截面

- 现在讨论**束流打靶**实验



- 如**右图**所示，**固定靶** (fixed target) 由静止的 $\mathcal{A}$ **粒子**组成，**束流** (beam) 由 $\mathcal{B}$ **粒子**组成

- 设束流中每个 $\mathcal{B}$ 粒子的**运动速度**相同，记为 $\mathbf{v}_\mathcal{B}$，按照**狭义相对论**，$\mathbf{v}_\mathcal{B} \equiv \mathbf{p}_\mathcal{B}/E_\mathcal{B}$



- 记束流的**横截面积**为 A，则 t **时间内**束流的一个横截面经过的**体积**为 $V = A|\mathbf{v}_\mathcal{B}|t$

- 再设束流中 $\mathcal{B}$ 粒子的**数密度**为 $n_\mathcal{B}$，从而，体积 V 中的粒子数为 $N_\mathcal{B} = n_\mathcal{B}V = n_\mathcal{B}A|\mathbf{v}_\mathcal{B}|t$

- 在**单位时间**内穿过**单位面积**的 $\mathcal{B}$ 粒子数称为**流密度**，记作 $j_\mathcal{B}$，通过下式计算，

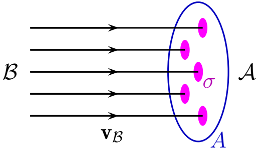
$$j_\mathcal{B} = \frac{N_\mathcal{B}}{At} = \frac{n_\mathcal{B}A|\mathbf{v}_\mathcal{B}|t}{At} = n_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{B}|$$

散射截面

考虑**流密度**为 $j_{\mathcal{B}} = n_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 的束流打到由 $N_{\mathcal{A}}$ 个 $\mathcal{A}$ **粒子**组成的靶上，则 t 时间内**散射发生的次数**可以表示为 $N = N_{\mathcal{A}}\, j_{\mathcal{B}}\, \sigma\, t$

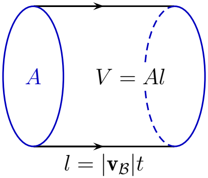
这里引入物理量 σ，由量纲分析知道它具有**面积量纲**，称为**散射截面** (scattering cross section)，简称为**截面** (cross section)

散射截面相当于发生散射的**有效面积**，表征散射过程的**强度**，由 $\mathcal{A}$ 粒子与 $\mathcal{B}$ 粒子的**相互作用性质**决定



截面的常用单位是**靶** (barn)，记作 b，

$$1\ \mathrm{b} = 10^{-28}\ \mathrm{m}^2 = 2.568 \times 10^3\ \mathrm{GeV}^{-2}$$



散射截面

考虑**流密度**为 $j_{\mathcal{B}} = n_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 的束流打到由 $N_{\mathcal{A}}$ 个 $\mathcal{A}$ **粒子**组成的靶上，则 t 时间内**散射发生的次数**可以表示为 $N = N_{\mathcal{A}}\, j_{\mathcal{B}}\, \sigma\, t$

这里引入物理量 σ，由量纲分析知道它具有**面积量纲**，称为**散射截面** (scattering cross section)，简称为**截面** (cross section)

散射截面相当于发生散射的**有效面积**，表征散射过程的**强度**，由 $\mathcal{A}$ 粒子与 $\mathcal{B}$ 粒子的**相互作用性质**决定

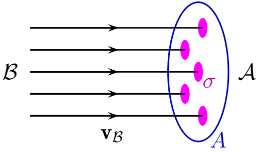
截面的常用单位是**靶** (barn)，记作 b，

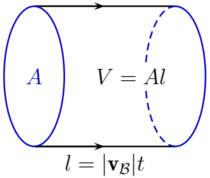
$$1\ \text{b} = 10^{-28}\ \text{m}^2 = 2.568 \times 10^3\ \text{GeV}^{-2}$$

单位时间单位体积内散射发生的**次数**为

$$\mathcal{R} = \frac{N}{Vt} = \frac{N_{\mathcal{A}} j_{\mathcal{B}} \sigma}{V} = \frac{N_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| \sigma}{V} = n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} \sigma |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$$

$n_{\mathcal{A}} = N_{\mathcal{A}}/V$ 相当于 $\mathcal{A}$ **粒子**在体积 V 中的**数密度**





$\mathcal{A}$ 粒子静止系中的散射截面

🏍 如果只考虑一个 $\mathcal{B}$ 粒子打到一个 $\mathcal{A}$ 粒子上，那么，可以看作在体积 $\tilde{V}$ 中仅有这两个粒子，因而 $n_\mathcal{A} = n_\mathcal{B} = 1/\tilde{V}$

🍌 单位时间单位体积内散射次数 $\mathcal{R}$ 与单位时间内跃迁概率 R 的关系为 $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$

🍑 代入 $R = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \dfrac{1}{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}\tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \dfrac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$

🍎 得到散射截面的表达式

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_\mathcal{A} n_\mathcal{B} |\mathbf{v}_\mathcal{B}|} = \frac{R}{\tilde{V}} \frac{\tilde{V}^2}{|\mathbf{v}_\mathcal{B}|} = \frac{R\tilde{V}}{|\mathbf{v}_\mathcal{B}|} \\
&= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{B}|} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2
\end{aligned}$$

$\mathcal{A}$ 粒子静止系中的散射截面

- 如果只考虑一个 $\mathcal{B}$ 粒子打到一个 $\mathcal{A}$ 粒子上，那么，可以看作在体积 $\tilde{V}$ 中仅有这两个粒子，因而 $n_{\mathcal{A}} = n_{\mathcal{B}} = 1/\tilde{V}$
- 单位时间单位体积内散射次数 $\mathcal{R}$ 与单位时间内跃迁概率 R 的关系为 $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$
- 代入 $R = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \dfrac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \dfrac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j\Big) |\mathcal{M}|^2$
- 得到散射截面的表达式

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R}{\tilde{V}} \frac{\tilde{V}^2}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} = \frac{R\tilde{V}}{|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \\
&= \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j\Big) |\mathcal{M}|^2
\end{aligned}
$$

- 上式对 $\mathcal{A}$ 粒子静止的参考系成立
- 需要将上式推广到任意惯性系，以适用于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 处在任意运动状态的情况
- 为此应将散射截面 σ 定义为 Lorentz 不变量
- 上式最后一行中除第二个因子 $(4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|)^{-1}$ 之外，其余部分是 Lorentz 不变的

Lorentz 不变的散射截面

- 在 $\mathcal{A}$ **粒子静止**的参考系中，$|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 就是 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{A}$ 的**相对速度**
- 记 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \equiv \dfrac{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}}{E_{\mathcal{A}}}$ 为 $\mathcal{A}$ 的运动速度，则**相对速度** $v_{\mathrm{rel}} \equiv |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$
- 然而，$E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\, v_{\mathrm{rel}}$ **并不是 Lorentz 不变量**

Lorentz 不变的散射截面

- 在 $\mathcal{A}$ 粒子静止的参考系中，$|\mathbf{v}_\mathcal{B}|$ 就是 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{A}$ 的相对速度
- 记 $\mathbf{v}_\mathcal{A} \equiv \dfrac{\mathbf{p}_\mathcal{A}}{E_\mathcal{A}}$ 为 $\mathcal{A}$ 的运动速度，则相对速度 $v_{\mathrm{rel}} \equiv |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|$
- 然而，$E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, v_{\mathrm{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量
- 引入 Møller 速度 $v_{\mathrm{Møl}} \equiv \dfrac{1}{E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}} \sqrt{(p_\mathcal{A} \cdot p_\mathcal{B})^2 - m_\mathcal{A}^2 m_\mathcal{B}^2}$，则

入射流因子 $E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, v_{\mathrm{Møl}}$ 是 Lorentz 不变量

- 将 Lorentz 不变的散射截面定义为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4 E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, v_{\mathrm{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

Christian Møller
(1904–1980)

Lorentz 不变的散射截面

- 在 $\mathcal{A}$ 粒子静止的参考系中，$|\mathbf{v}_\mathcal{B}|$ 就是 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{A}$ 的相对速度
- 记 $\mathbf{v}_\mathcal{A} \equiv \dfrac{\mathbf{p}_\mathcal{A}}{E_\mathcal{A}}$ 为 $\mathcal{A}$ 的运动速度，则相对速度 $v_{\mathrm{rel}} \equiv |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|$
- 然而，$E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, v_{\mathrm{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量
- 引入 Møller 速度 $v_{\mathrm{Møl}} \equiv \dfrac{1}{E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}} \sqrt{(p_\mathcal{A} \cdot p_\mathcal{B})^2 - m_\mathcal{A}^2 m_\mathcal{B}^2}$，则

入射流因子 $E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, v_{\mathrm{Møl}}$ 是 Lorentz 不变量

Christian Møller
(1904–1980)

- 将 Lorentz 不变的散射截面定义为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4 E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, v_{\mathrm{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) |\mathcal{M}|^2$$

- 相应的单位时间单位体积内散射次数 $\mathcal{R} = n_\mathcal{A} n_\mathcal{B} \sigma v_{\mathrm{Møl}}$ 也是 Lorentz 不变的
- 当 $\mathcal{A}$ 粒子静止时，$E_\mathcal{A} = m_\mathcal{A}$，$\mathbf{p}_\mathcal{A} = \mathbf{0}$，故 $v_{\mathrm{Møl}} = \dfrac{1}{m_\mathcal{A} E_\mathcal{B}} \sqrt{m_\mathcal{A}^2 E_\mathcal{B}^2 - m_\mathcal{A}^2 m_\mathcal{B}^2}$

$= \dfrac{\sqrt{E_\mathcal{B}^2 - m_\mathcal{B}^2}}{E_\mathcal{B}} = \dfrac{|\mathbf{p}_\mathcal{B}|}{E_\mathcal{B}} = |\mathbf{v}_\mathcal{B}|$，此时散射截面恢复到上一页表达式

n 体不变相空间和微分散射截面

在 $\sigma = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \dfrac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\, v_{\text{Møl}}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int \dfrac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j\right) |\mathcal{M}|^2$ 中，**不变振幅模方** $|\mathcal{M}|^2$ 是**动力学**因素，而其它部分都属于**运动学**因素

在**运动学**因素中，对末态动量的积分具有如下形式，

$$\int \mathrm{d}\Pi_n = \left(\prod_{j=1}^{n} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j\right)$$

这个积分称为 **n 体不变相空间**，用这个记号把**散射截面表达式**写得简洁一些，

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\, v_{\text{Møl}}} \int \mathrm{d}\Pi_n\, |\mathcal{M}|^2$$

n 体不变相空间和微分散射截面

🚗 在 $\sigma=\dfrac{1}{\mathcal{S}}\dfrac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,v_{\text{Møl}}}\left(\prod_{j=1}^{n}\int\dfrac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\right)|\mathcal{M}|^2$ 中，不变振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 是动力学因素，而其它部分都属于运动学因素

🦭 在运动学因素中，对末态动量的积分具有如下形式，

$$\int d\Pi_n=\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\right)$$

🐬 这个积分称为 n 体不变相空间，用这个记号把散射截面表达式写得简洁一些，

$$\sigma=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,v_{\text{Møl}}}\int d\Pi_n\,|\mathcal{M}|^2$$

🐋 如果在散射截面表达式中不作积分，则对应于微分散射截面

$$d\sigma=\frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,v_{\text{Møl}}}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

🐳 注意，计算微分截面时**不需要**考虑末态对称性因子 $\mathcal{S}$，因而 $\sigma=\dfrac{1}{\mathcal{S}}\displaystyle\int d\sigma$

🦈 如果末态不包含全同粒子，则 $\mathcal{S}=1$

Møller 速度与相对速度

🚙 讲义中推出了 Møller 速度与 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 粒子运动速度的关系式

$$v_{\text{Møl}} = \sqrt{|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2}$$

🐠 如果 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$，则 $v_{\text{Møl}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = v_{\text{rel}}$，即 Møller 速度与相对速度相同

👉 入射流因子化为 $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\, v_{\text{rel}}$

🐟 满足这个条件的一种情况是 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$ 或 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$ 为零，即 $\mathcal{A}$ 粒子或 $\mathcal{B}$ 粒子静止

🐡 另一种情况是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 运动方向相同或相反，后者在对撞机 (collider) 上经常遇到

🐙 在束流迎头对撞时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向

Møller 速度与相对速度

- 讲义中推出了 **Møller 速度**与 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 粒子运动速度的关系式

$$v_{\text{Møl}} = \sqrt{|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|^2 - |\mathbf{v}_\mathcal{A} \times \mathbf{v}_\mathcal{B}|^2}$$

- 如果 $\mathbf{v}_\mathcal{A} \times \mathbf{v}_\mathcal{B} = \mathbf{0}$，则 $v_{\text{Møl}} = |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}| = v_{\text{rel}}$，即 Møller 速度与**相对速度**相同
- **入射流因子**化为 $E_\mathcal{A} E_\mathcal{B}\, v_{\text{rel}}$
- 满足**这个条件**的一种情况是 $\mathbf{v}_\mathcal{A}$ 或 $\mathbf{v}_\mathcal{B}$ 为零，即 $\mathcal{A}$ 粒子或 $\mathcal{B}$ 粒子**静止**
- 另一种情况是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 运动方向**相同**或**相反**，后者在**对撞机** (collider) 上经常遇到
- 在束流**迎头对撞**时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向
- 当 $v_{\text{Møl}} = v_{\text{rel}}$ 时，散射截面化为 $\sigma = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \dfrac{1}{4E_\mathcal{A} E_\mathcal{B} |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|} \displaystyle\int d\Pi_n\, |\mathcal{M}|^2$
- 在**非相对论极限**下，$v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|$ 确实是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的相对速度
- 但是，对于**极端相对论极限**下的束流对撞，$|\mathbf{v}_\mathcal{A}| = |\mathbf{v}_\mathcal{B}| = 1$ 且 $\mathbf{v}_\mathcal{B} = -\mathbf{v}_\mathcal{A}$
- 故 $v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}| = 2$，它是真空光速的 2 倍，显然**不是**真正意义的相对速度

质心系

- 对粒子能动量的实验测量是在**实验室参考系**中进行的
- 不过，对于多个粒子组成的系统，在**质量中心参考系**（简称**质心系**，center-of-mass system）中描述粒子运动状态通常要比实验室系**容易**得多
- 质心系定义为使系统**总动量为零**的参考系，满足

$$\mathbf{p}_\mathcal{A} + \mathbf{p}_\mathcal{B} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j = \mathbf{0}$$

- 质心系中系统的总能量称为**质心能** (center-of-mass energy) E_CM，满足

$$E_\mathrm{CM} = E_\mathcal{A} + E_\mathcal{B} = \sum_{j=1}^{n} E_j$$

- 它是 **Lorentz 不变量**，因为

$$(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B})^2 = (E_\mathcal{A} + E_\mathcal{B})^2 - (\mathbf{p}_\mathcal{A} + \mathbf{p}_\mathcal{B})^2 = (E_\mathcal{A} + E_\mathcal{B})^2 = E_\mathrm{CM}^2$$

$2 \to n$ 散射运动学条件

- 根据狭义相对性原理，物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式
- 如果某个过程能够在质心系中发生，则在其它惯性系中也能发生
- 因此，利用质心系可以简便地分析发生某个过程需要满足的运动学条件
- 在质心系中，当末态粒子动量 $\mathbf{p}_j$ 都为零时，质心能最低，为 $\sum_j m_j$

$2 \to n$ 散射运动学条件

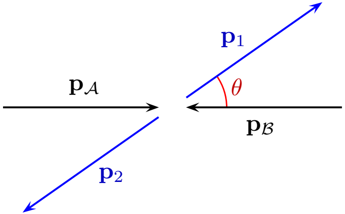
- 根据狭义相对性原理，物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式
- 如果某个过程能够在质心系中发生，则在其它惯性系中也能发生
- 因此，利用质心系可以简便地分析发生某个过程需要满足的运动学条件
- 在质心系中，当末态粒子动量 $\mathbf{p}_j$ 都为零时，质心能最低，为 $\sum_j m_j$
- 所以，发生 $2 \to n$ 散射过程的运动学条件是

$$E_{\mathrm{CM}} > \sum_{j=1}^{n} m_j$$

- 即质心能应当大于末态粒子质量之和
- 若 $E_{\mathrm{CM}} = \sum_j m_j$，则末态相空间体积为零，散射过程不能发生
- 可以认为，质心能 E_{CM} 是激发粒子系统内部相互作用的有效能量

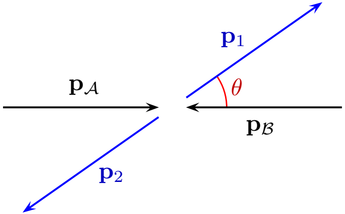
5.5.3 小节　两体散射运动学

- 接下来讨论 **2 → 2 散射**，即 $n = 2$ 的情况，此时末态包含 2 个粒子
- 在质心系中，有 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$，因而 $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|$，$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$
- 可见，初态中 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 与 $\mathbf{p}_{\mathcal{B}}$ 大小相等，方向相反，故 $v_{\text{Møl}} = v_{\text{rel}}$
- 末态中 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_2$ 也是大小相等，方向相反
- 这些动量在质心系中的关系右图所示



5.5.3 小节　两体散射运动学

- 接下来讨论 **2 → 2 散射**，即 $n = 2$ 的情况，此时末态包含 2 个粒子
- 在质心系中，有 $\mathbf{p}_\mathcal{A} + \mathbf{p}_\mathcal{B} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$，因而 $|\mathbf{p}_\mathcal{A}| = |\mathbf{p}_\mathcal{B}|$，$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$
- 可见，初态中 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 与 $\mathbf{p}_\mathcal{B}$ **大小相等**，**方向相反**，故 $v_{\text{Møl}} = v_{\text{rel}}$
- 末态中 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_2$ 也是**大小相等**，**方向相反**
- 这些动量在质心系中的关系右图所示
- θ 是 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 之间的夹角，称为**散射角** (scattering angle)



- 质心能满足 $E_{\text{CM}} = E_\mathcal{A} + E_\mathcal{B} = E_1 + E_2$
- 发生这个过程的**运动学条件**是 $E_{\text{CM}} > m_1 + m_2$
- **2 → 2 散射截面**写成 $\sigma = \dfrac{1}{\mathcal{S}} \dfrac{1}{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}\,|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|} \displaystyle\int d\Pi_2\, |\mathcal{M}|^2$

2 体不变相空间

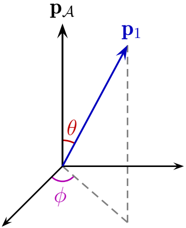
- 计算 **2 体不变相空间**中的积分，得到

$$\int d\Pi_2 = \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - p_1 - p_2)$$

$$= \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E_{\mathrm{CM}} - E_1 - E_2)$$

- 第二步结合三维 δ 函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ 作出 $\mathbf{p}_2$ **的积分**
- 此积分看起来没有效果，但实际上**要求 $\mathbf{p}_2$ 满足动量守恒条件** $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$
- 这个条件在**质心系**中体现为 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$，故 $E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}$

2 体不变相空间



- 计算 **2 体不变相空间**中的积分，得到

$$\int \mathrm{d}\Pi_2 = \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - p_1 - p_2)$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E_\mathrm{CM} - E_1 - E_2)$$

$$= \int \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta\left(E_\mathrm{CM} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right)$$

- 第二步结合三维 δ 函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_\mathcal{A} + \mathbf{p}_\mathcal{B} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ 作出 $\mathbf{p}_2$ **的积分**
- 此积分看起来没有效果，但实际上**要求 $\mathbf{p}_2$ 满足动量守恒条件** $\mathbf{p}_\mathcal{A} + \mathbf{p}_\mathcal{B} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$
- 这个条件在**质心系**中体现为 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$，故 $E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}$
- 第三步建立**球坐标系**，以 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 方向为极轴方向，以散射角 θ 为**极角** (polar angle)
- 将 $\mathbf{p}_1$ 投影在垂直于 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 的平面上以定义**方位角** (azimuthal angle) ϕ
- 将 $\mathbf{p}_1$ 动量体积元分解为 $\mathrm{d}^3 p_1 = |\mathbf{p}_1|^2\, \mathrm{d}|\mathbf{p}_1|\, \mathrm{d}\Omega$，**立体角微分** $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$
- **极角** θ 的取值范围为 $[0, \pi]$，**方位角** ϕ 的取值范围为 $[0, 2\pi]$

$2 \to 2$ 散射截面

现在 δ 函数的宗量是关于 $|\mathbf{p}_1|$ 的函数，利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$，得到

$$
\begin{aligned}
\int d\Pi_2 &= \int d\Omega\, d|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta\left(E_{\mathrm{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right) \\
&= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left| \frac{d}{d|\mathbf{p}_1|} \left(E_{\mathrm{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right) \right|^{-1} \\
&= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}} + \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}} \right)^{-1} \\
&= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left[|\mathbf{p}_1| \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right]^{-1} = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\mathrm{CM}}}
\end{aligned}
$$

$2 \to 2$ 散射截面

现在 δ 函数的宗量是关于 $|\mathbf{p}_1|$ 的函数，利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$，得到

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Pi_2 &= \int \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}|\mathbf{p}_1| \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta\left(E_{\mathrm{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right) \\ &= \int \mathrm{d}\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}|\mathbf{p}_1|}\left(E_{\mathrm{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\right)\right|^{-1} \\ &= \int \mathrm{d}\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}} + \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}}\right)^{-1} \\ &= \int \mathrm{d}\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left[|\mathbf{p}_1|\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)\right]^{-1} = \int \mathrm{d}\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\mathrm{CM}}}\end{aligned}$$

$2 \to 2$ 散射截面化为 $\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_\mathcal{A} E_\mathcal{B} |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|} \int \mathrm{d}\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\mathrm{CM}}} |\mathcal{M}|^2$

质心系中的微分散射截面是 $\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_\mathcal{A} E_\mathcal{B} |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\mathrm{CM}}} |\mathcal{M}|^2$

质心系能动量

利用末态粒子在质心系中的动量关系 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$，得

$$E_{\mathrm{CM}} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2 + m_2^2}$$

故 $E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{\mathrm{CM}} - E_1)^2 = E_{\mathrm{CM}}^2 - 2E_{\mathrm{CM}}E_1 + E_1^2$

即 $2E_{\mathrm{CM}}E_1 = E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2$，从而

$$E_1 = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

可见，**质量较大**的末态粒子在质心系中分得的**能量较多**

质心系能动量

🚑 利用末态粒子在质心系中的动量关系 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$，得

$$E_{\mathrm{CM}} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2 + m_2^2}$$

🧮 故 $E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{\mathrm{CM}} - E_1)^2 = E_{\mathrm{CM}}^2 - 2E_{\mathrm{CM}}E_1 + E_1^2$

🖥 即 $2E_{\mathrm{CM}}E_1 = E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2$，从而

$$E_1 = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2 = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

💻 可见，**质量较大**的末态粒子在质心系中分得的**能量较多**；根据**质壳条件**，有

$$\begin{aligned}
|\mathbf{p}_1|^2 &= E_1^2 - m_1^2 = \frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}^2}(E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 \\
&= \frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}^2}[E_{\mathrm{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 + 2E_{\mathrm{CM}}^2 m_1^2 - 2E_{\mathrm{CM}}^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2 - 4E_{\mathrm{CM}}^2 m_1^2] \\
&= \frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}^2}(E_{\mathrm{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2E_{\mathrm{CM}}^2 m_1^2 - 2E_{\mathrm{CM}}^2 m_2^2 - 4m_1^2 m_2^2) \\
&= \frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}^2}\lambda(E_{\mathrm{CM}}^2, m_1^2, m_2^2)
\end{aligned}$$

质心系微分散射截面

- $\boldsymbol{\lambda}$ 函数定义为 $\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$，关于 x, y, z 对称
- 末态粒子的动量满足

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}\sqrt{\lambda(E_{\mathrm{CM}}^2, m_1^2, m_2^2)} = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\,\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)$$

- 质心系中的微分散射截面化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{128\pi^2 E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\,|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\,\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)|\mathcal{M}|^2$$

质心系微分散射截面

- λ 函数定义为 $\lambda(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$，关于 x, y, z 对称
- 末态粒子的动量满足

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}\sqrt{\lambda(E_{\mathrm{CM}}^2, m_1^2, m_2^2)} = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\,\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)$$

- 质心系中的微分散射截面化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{128\pi^2 E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}\,|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\,\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)|\mathcal{M}|^2$$

- 将类似分析应用到初态上，同理得到质心系中初态粒子能量是

$$E_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2 + m_{\mathcal{A}}^2 - m_{\mathcal{B}}^2), \quad E_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2 + m_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{A}}^2)$$

- 动量大小是

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\,\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_{\mathcal{A}}^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_{\mathcal{B}}^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)$$

特殊情况

下面讨论一些**特殊情况**

(1) 如果散射过程**关于对撞轴**（$\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 对应的直线）**对称**，则不变振幅 $\mathcal{M}$ **与 ϕ 无关**，有

$$\int d\Omega\, |\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, |\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

散射截面为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{64\pi E_\mathcal{A} E_\mathcal{B} \,|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right) \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

特殊情况

下面讨论一些**特殊情况**

(1) 如果散射过程**关于对撞轴**（$\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 对应的直线）**对称**，则不变振幅 $\mathcal{M}$ **与 ϕ 无关**，有

$$\int d\Omega\, |\mathcal{M}(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, |\mathcal{M}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

散射截面为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{64\pi E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right) \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, |\mathcal{M}(\theta)|^2$$

(2) 如果初态粒子质量相同，$m_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{B}} = m_i$，末态粒子质量相同，$m_1 = m_2 = m_f$，则 $E_1 = (E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2)/(2E_{\mathrm{CM}})$ 和 $E_2 = (E_{\mathrm{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2)/(2E_{\mathrm{CM}})$ 意味着

$$E_{\mathcal{A}} = E_{\mathcal{B}} = E_1 = E_2 = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}$$

即初末态粒子分别**平分质心能**

此时，如果末态 2 个粒子是**全同**的，那么末态对称性因子 $\mathcal{S} = 2$，否则 $\mathcal{S} = 1$

特殊情况

另一方面，由 $\lambda(x,y,y) = x^2 + 2y^2 - 4xy - 2y^2 = x(x-4y)$ 得

$$\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}}$$

故初末态动量大小为

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\,\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_i^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_i^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right) = \frac{E_{\mathrm{CM}}\beta_i}{2}$$

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\,\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_f^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_f^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right) = \frac{E_{\mathrm{CM}}\beta_f}{2}$$

其中

$$\beta_i \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_i^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|}{E_{\mathcal{A}}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|}{E_{\mathcal{B}}}, \quad \beta_f \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} = \frac{|\mathbf{p}_2|}{E_2}$$

根据狭义相对论中运动速度的定义，β_i 是任一初态粒子在质心系中的运动速率，而 β_f 是任一末态粒子的运动速率

特殊情况

从而，由 $\mathbf{p}_\mathcal{B} = -\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 和 $E_\mathcal{B} = E_\mathcal{A} = E_\mathrm{CM}/2$ 得

$$|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}| = \left|\frac{\mathbf{p}_\mathcal{A}}{E_\mathcal{A}} - \frac{\mathbf{p}_\mathcal{B}}{E_\mathcal{B}}\right| = \frac{2|\mathbf{p}_\mathcal{A}|}{E_\mathcal{A}} = 2\beta_i$$

入射流因子变成

$$E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}| = \frac{E_\mathrm{CM}^2\beta_i}{2}$$

于是，微分散射截面化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_\mathrm{CM} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}\,|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|}\frac{|\mathbf{p}_1|}{E_\mathrm{CM}}\,|\mathcal{M}|^2 = \frac{\beta_f\,|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2\,E_\mathrm{CM}^2\beta_i}$$

特殊情况

从而，由 $\mathbf{p}_\mathcal{B} = -\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 和 $E_\mathcal{B} = E_\mathcal{A} = E_{\text{CM}}/2$ 得

$$|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}| = \left|\frac{\mathbf{p}_\mathcal{A}}{E_\mathcal{A}} - \frac{\mathbf{p}_\mathcal{B}}{E_\mathcal{B}}\right| = \frac{2|\mathbf{p}_\mathcal{A}|}{E_\mathcal{A}} = 2\beta_i$$

入射流因子变成

$$E_\mathcal{A} E_\mathcal{B} |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}| = \frac{E_{\text{CM}}^2 \beta_i}{2}$$

于是，微分散射截面化为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_\mathcal{A} E_\mathcal{B} |\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\beta_f |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2 \beta_i}$$

(3) 如果初末态 4 个粒子的质量相同，$m_\mathcal{A} = m_\mathcal{B} = m_1 = m_2$，则 $\beta_i = \beta_f$，有

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2}$$

5.5.4 小节　衰变宽度

- 即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是**稳定**的
- **不稳定粒子** $\mathcal{A}$ 自身可以通过**相互作用衰变** (decay) 成其它粒子
- 假设 t 时刻有 $N(t)$ 个**静止**的 $\mathcal{A}$ 粒子，每个 $\mathcal{A}$ 粒子在**单位时间**内发生衰变的**概率**是常数 Γ，那么 $t+\mathrm{d}t$ 时刻衰变引起的 $\mathcal{A}$ 粒子数量变化为 $\mathrm{d}N = -\Gamma N \mathrm{d}t$
- 以此求得 $N(t) = N(0)\exp(-\Gamma t)$，即 $\mathcal{A}$ 粒子数量随时间按**指数规律**下降

5.5.4 小节　衰变宽度

- 即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是**稳定**的
- **不稳定粒子** $\mathcal{A}$ 自身可以通过**相互作用衰变** (decay) 成其它粒子
- 假设 t 时刻有 $N(t)$ 个**静止**的 $\mathcal{A}$ 粒子，每个 $\mathcal{A}$ 粒子在**单位时间**内发生衰变的**概率**是常数 Γ，那么 $t+\mathrm{d}t$ 时刻衰变引起的 $\mathcal{A}$ 粒子数量变化为 $\mathrm{d}N=-\Gamma N\mathrm{d}t$
- 以此求得 $N(t)=N(0)\exp(-\Gamma t)$，即 $\mathcal{A}$ 粒子数量随时间按**指数规律**下降
- 于是一个**静止** $\mathcal{A}$ 粒子在**衰变前存活的时间** t 服从**指数分布**，归一化概率密度为

$$P(t)=\Gamma\exp(-\Gamma t)=\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

- 其中 $\tau\equiv\dfrac{1}{\Gamma}$ 称为粒子的**寿命** (lifetime)
- t 的期待值为 $\langle t\rangle=\dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{d}t=\tau$，可见寿命是粒子存活的**平均时间**
- 在自然单位制中，Γ 具有质量的量纲，称为**衰变宽度** (decay width)，简称**宽度**

分支比和分宽度

🚃 $\mathcal{A}$ 粒子可能有**多种**衰变过程

🪆 在一次衰变中，某个衰变过程 $i \to f$ **发生的概率**称为此过程的**分支比** (branching ratio)，记作 B_f

🪅 衰变过程 $i \to f$ 的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\Gamma_f = \Gamma B_f$$

🪄 Γ_f 是 $\mathcal{A}$ 粒子静止系中**衰变过程 $i \to f$ 在单位时间内发生的概率**

分支比和分宽度

- $\mathcal{A}$ 粒子可能有**多种**衰变过程
- 在一次衰变中，某个衰变过程 $i \to f$ **发生的概率**称为此过程的**分支比** (branching ratio)，记作 B_f
- 衰变过程 $i \to f$ 的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\Gamma_f = \Gamma B_f$$

- Γ_f 是 $\mathcal{A}$ 粒子静止系中**衰变过程 $i \to f$ 在单位时间内发生的概率**
- 所有衰变过程的**分支比之和**应该是**归一**的，故

$$\sum_f B_f = \frac{1}{\Gamma} \sum_f \Gamma_f = 1$$

$$\Gamma = \sum_f \Gamma_f$$

- **总宽度** Γ 是所有分宽度之和

衰变过程的跃迁概率

- 接下来通过**跃迁概率**计算衰变过程 $i \to f$ 的**分宽度**
- 现在，**初态** $|i\rangle$ 只包含 1 个**粒子** $\mathcal{A}$，末态 $|f\rangle$ 则包含 $n \geq 2$ 个粒子
- 因此，$|i\rangle$ 的自我内积为 $\langle i|i\rangle = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}$
- 类似于散射的情况，**衰变过程 $i \to f$ 的跃迁概率**是

$$P_{fi} = \frac{|\langle f|\, \mathrm{i}T\, |i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle\, \langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}\, \prod_{j=1}^{n}(2E_j V)} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}}\, \prod_{j=1}^{n}(2E_j \tilde{V})}$$

- 对于一组**特定的末态动量** $\{p_j\}$，**单位时间**内的**跃迁概率**为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[2E_{\mathcal{A}}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})\right]^{-1}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^{n} p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

分宽度表达式

将末态动量的**所有取值**考虑进来，可得**单位时间**内衰变过程 $i \to f$ 的**发生概率**为

$$R_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3 p_j\right) R_{\{p_j\}}$$

$$= \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{2E_{\mathcal{A}}}\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

其中 $\mathcal{S}$ 是末态对称性因子

在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中，$E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$，而 R_f 的值就是**分宽度** Γ_f，故

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_{\mathcal{A}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\right)|\mathcal{M}|^2$$

衰变末态分布和运动学条件

- 若 $\mathcal{A}$ 粒子是**标量玻色子**，**自旋为 0**，则 $\mathcal{A}$ 粒子静止系没有特殊的方向
- 任何一个末态粒子在动量方向上呈**球对称**分布
- 若 $\mathcal{A}$ 粒子具有**非零自旋**，则自旋方向是 $\mathcal{A}$ 粒子静止系的特殊方向
- 末态粒子在动量方向上呈**轴对称**分布，以 $\mathcal{A}$ 粒子自旋方向为轴
- 在实际情况中，$\mathcal{A}$ 粒子**自旋取向**往往是**不确定**的，但它**取不同方向的概率相同**
- 那么，可对 $\mathcal{A}$ 粒子自旋方向**取平均**，从而末态粒子在动量方向上也呈**球对称**分布

衰变末态分布和运动学条件

- 若 $\mathcal{A}$ 粒子是标量玻色子，自旋为 0，则 $\mathcal{A}$ 粒子静止系没有特殊的方向
- 任何一个末态粒子在动量方向上呈球对称分布
- 若 $\mathcal{A}$ 粒子具有非零自旋，则自旋方向是 $\mathcal{A}$ 粒子静止系的特殊方向
- 末态粒子在动量方向上呈轴对称分布，以 $\mathcal{A}$ 粒子自旋方向为轴
- 在实际情况中，$\mathcal{A}$ 粒子自旋取向往往是不确定的，但它取不同方向的概率相同
- 那么，可对 $\mathcal{A}$ 粒子自旋方向取平均，从而末态粒子在动量方向上也呈球对称分布
- 由于 $\mathcal{A}$ 粒子静止系就是末态粒子的质心系，有 $E_{\mathrm{CM}} = m_{\mathcal{A}}$
- 因此，发生衰变的运动学条件是

$$m_{\mathcal{A}} > \sum_{j=1}^{n} m_j$$

- 即 $\mathcal{A}$ 粒子只能向质量之和小于 $m_{\mathcal{A}}$ 的其它粒子衰变

5.5.5 小节 衰变运动学

下面分别讨论**两体**和**三体**衰变的运动学

(1) 对于**两体衰变**，$n=2$，在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中，由于 $E_{\mathrm{CM}}=m_{\mathcal{A}}$，末态能量为

$$E_1=\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}(m_{\mathcal{A}}^2+m_1^2-m_2^2),\quad E_2=\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}(m_{\mathcal{A}}^2+m_2^2-m_1^2)$$

末态动量为 $|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|=\frac{m_{\mathcal{A}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2},\frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)$

2 体不变相空间变成 $\int d\Pi_2=\int d\Omega\,\frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 m_{\mathcal{A}}}$

$d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\phi$，其中 θ 和 ϕ 分别是 $\mathbf{p}_1$ 在球坐标系中的极角和方位角

5.5.5 小节 衰变运动学

下面分别讨论**两体**和**三体**衰变的运动学

(1) 对于**两体衰变**，$n=2$，在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中，由于 $E_{\mathrm{CM}}=m_{\mathcal{A}}$，末态能量为

$$E_1=\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}(m_{\mathcal{A}}^2+m_1^2-m_2^2),\quad E_2=\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}(m_{\mathcal{A}}^2+m_2^2-m_1^2)$$

末态动量为 $|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|=\dfrac{m_{\mathcal{A}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1,\dfrac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2},\dfrac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)$

2 体不变相空间变成 $\displaystyle\int d\Pi_2=\int d\Omega\,\frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 m_{\mathcal{A}}}$

$d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\phi$，其中 θ 和 ϕ 分别是 $\mathbf{p}_1$ 在球坐标系中的极角和方位角

两体衰变分宽度表达为

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\int d\Pi_2\,|\mathcal{M}|^2=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{|\mathbf{p}_1|}{32\pi^2 m_{\mathcal{A}}^2}\int d\Omega\,|\mathcal{M}|^2\\ &=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{64\pi^2 m_{\mathcal{A}}}\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2},\frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)\int d\Omega\,|\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

如果 $m_1\neq m_2$，则两个末态粒子**必定不是全同粒子**，而 $\mathcal{S}=1$

两体衰变运动学

如果 $\mathcal{A}$ 粒子的自旋为 0，或者对它的自旋方向取平均，按照前述讨论，末态粒子在动量方向上呈**球对称分布**

此时，$|\mathcal{M}|^2$ **与** θ**、**ϕ **无关**，对**立体角积分**只给出一个 4π **因子**，**分宽度**变成

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathbf{p}_1|}{8\pi m_{\mathcal{A}}^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)$$

两体衰变运动学

如果 $\mathcal{A}$ 粒子的自旋为 0，或者对它的自旋方向取平均，按照前述讨论，末态粒子在动量方向上呈**球对称分布**

此时，$|\mathcal{M}|^2$ **与** θ**、**ϕ **无关**，对**立体角积分**只给出一个 4π **因子**，**分宽度**变成

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathbf{p}_1|}{8\pi m_{\mathcal{A}}^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)$$

进一步，如果**末态** 2 个粒子**质量相同**，$m_1 = m_2 = m$，则

$$\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right) = \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}, \frac{m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}$$

分宽度化为

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}$$

如果两个末态粒子是**全同粒子**，则 $\mathcal{S} = 2$

三体衰变运动学

(2) 对于**三体衰变**，$n = 3$，衰变过程 $i \to f$ 的**分宽度**表示成

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \int \mathrm{d}\Pi_3 \, |\mathcal{M}|^2$$

🎉 **3 体不变相空间**为

$$\int \mathrm{d}\Pi_3 = \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{\mathrm{d}^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_1 - p_2 - p_3)$$

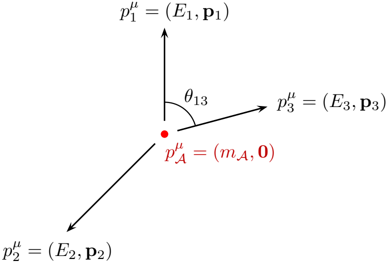
🎊 这里只在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中讨论它**没有自旋**或者对它的**自旋方向取平均**的情况

👉 此时末态粒子在动量方向上呈**球对称分布**，$|\mathcal{M}|^2$ 与末态粒子的运动方向**无关**

三体衰变运动学

(2) 对于**三体衰变**，$n=3$，衰变过程 $i \to f$ 的**分宽度**表示成

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \int d\Pi_3 \, |\mathcal{M}|^2$$



3 体不变相空间为

$$\int d\Pi_3 = \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_1 - p_2 - p_3)$$

这里只在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中讨论它**没有自旋**或者对它的**自旋方向取平均**的情况

此时末态粒子在动量方向上呈**球对称分布**，$|\mathcal{M}|^2$ 与末态粒子的运动方向**无关**

动量守恒定律给出 $\mathbf{0} = \mathbf{p}_{\mathcal{A}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$，即末态 3 个粒子的三维动量之和为零

因而这 3 个三维动量矢量处在**同一个平面**内，如**右上图**所示

对于**确定**的 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_3$，第 2 个粒子的动量 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$ 由动量守恒定律决定

三体相空间

对 $\mathbf{p}_2$ 积分，消去代表动量守恒定律的 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_\mathcal{A}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)$，得到

$$\begin{aligned}\int d\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int \frac{d^3p_1\, d^3p_3}{E_1E_2E_3}\,\delta(m_\mathcal{A}-E_1-E_2-E_3)\\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int d\Omega_1\, d|\mathbf{p}_1|\, d\Omega_3\, d|\mathbf{p}_3|\,\frac{|\mathbf{p}_1|^2|\mathbf{p}_3|^2}{E_1E_2E_3}\,\delta(m_\mathcal{A}-E_1-E_2-E_3)\end{aligned}$$

Ω_1 和 Ω_3 分别是 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_3$ 对应的**立体角**

三体相空间

对 $\mathbf{p}_2$ 积分，消去代表动量守恒定律的 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_\mathcal{A}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)$，得到

$$\begin{aligned}\int d\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int \frac{d^3p_1\,d^3p_3}{E_1E_2E_3}\,\delta(m_\mathcal{A}-E_1-E_2-E_3)\\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int d\Omega_1\,d|\mathbf{p}_1|\,d\Omega_3\,d|\mathbf{p}_3|\,\frac{|\mathbf{p}_1|^2|\mathbf{p}_3|^2}{E_1E_2E_3}\,\delta(m_\mathcal{A}-E_1-E_2-E_3)\end{aligned}$$

Ω_1 和 Ω_3 分别是 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_3$ 对应的**立体角**

对粒子 1 的**质壳条件** $|\mathbf{p}_1|^2+m_1^2=E_1^2$ 两边求微分，得 $2|\mathbf{p}_1|d|\mathbf{p}_1|=2E_1dE_1$，对粒子 3 也可以得到类似的式子，故 $|\mathbf{p}_1|d|\mathbf{p}_1|=E_1dE_1$，$|\mathbf{p}_3|d|\mathbf{p}_3|=E_3dE_3$

从而

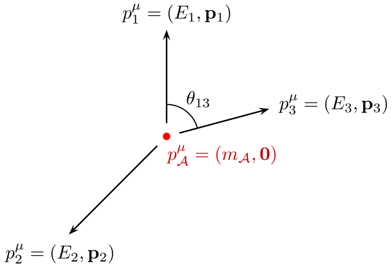
$$\begin{aligned}\int d\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5}\int d\Omega_1\,d\Omega_3\,dE_1\,dE_3\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\,\delta(m_\mathcal{A}-E_1-E_2-E_3)\\ &= \frac{1}{4(2\pi)^4}\int d\Omega_3\,dE_1\,dE_3\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\,\delta(m_\mathcal{A}-E_1-E_2-E_3)\end{aligned}$$

第二步作 Ω_1 **积分**，由于粒子 1 动量呈球对称分布，此积分只给出一个 4π **因子**

关于 $\cos\theta_{13}$ 的导数

- 将 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_3$ 方向之间的**夹角**记为 θ_{13}，则粒子 3 的立体角微分表示为

$$d\Omega_3 = \sin\theta_{13}\, d\theta_{13}\, d\phi_3 = d\cos\theta_{13}\, d\phi_3$$



- ϕ_3 是粒子 3 的方位角
- 这样的话，对 Ω_3 积分不是平庸的，因为 E_2 **依赖于** $\cos\theta_{13}$，

$$E_2 = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_2|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos\theta_{13}}$$

- 因此 $\delta(m_\mathcal{A} - E_1 - E_2 - E_3)$ 的宗量也依赖于 $\cos\theta_{13}$，有

$$\frac{\partial E_2}{\partial\cos\theta_{13}} = \frac{2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{2\sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos\theta_{13}}} = \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}$$

$$\left|\frac{\partial(m_\mathcal{A} - E_1 - E_2 - E_3)}{\partial\cos\theta_{13}}\right| = \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}$$

相空间积分

再利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$，作出关于 Ω_3 的积分，得

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Pi_3 &= \frac{1}{4(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_3\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta_{13}\int \mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}E_3\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\,\delta(m_{\mathcal{A}}-E_1-E_2-E_3)\\ &= \frac{1}{4(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_3\int \mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}E_3\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\left|\frac{\partial(m_{\mathcal{A}}-E_1-E_2-E_3)}{\partial\cos\theta_{13}}\right|^{-1}\\ &= \frac{1}{4(2\pi)^3}\int \mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}E_3\end{aligned}$$

相空间积分

再利用 $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$，作出关于 Ω_3 的积分，得

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Pi_3 &= \frac{1}{4(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_3\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta_{13}\int \mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}E_3\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\,\delta(m_{\mathcal{A}}-E_1-E_2-E_3)\\ &= \frac{1}{4(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_3\int \mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}E_3\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\left|\frac{\partial(m_{\mathcal{A}}-E_1-E_2-E_3)}{\partial\cos\theta_{13}}\right|^{-1}\\ &= \frac{1}{4(2\pi)^3}\int \mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}E_3\end{aligned}$$

分宽度化为

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{8m_{\mathcal{A}}}\int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}}\mathrm{d}E_1\int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}}\mathrm{d}E_3\,|\mathcal{M}(E_1,E_3)|^2$$

注意，使用上式计算时需要把不变振幅 $\mathcal{M}$ 表达为 **E_1 和 E_3 的函数**，而且要仔细考虑 E_1 和 E_3 的**积分上下限**

变量替换

在实践中把 E_1 和 E_3 当作积分变量并不方便，可以将它们替换成更加便利的变量

引入两个 **Lorentz 不变量**

$$s_{12} \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_\mathcal{A} - p_3)^2 = m_\mathcal{A}^2 + m_3^2 - 2m_\mathcal{A}E_3$$
$$s_{23} \equiv (p_2 + p_3)^2 = (p_\mathcal{A} - p_1)^2 = m_\mathcal{A}^2 + m_1^2 - 2m_\mathcal{A}E_1$$

可以把**粒子 1 和 2** 组成的系统看成一个**等效粒子**，四维动量为 $p_{12}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

由于 $p_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = s_{12}$，$\sqrt{s_{12}}$ 相当于这个等效粒子的质量，称为粒子 1 和 2 的**不变质量** (invariant mass)，它也是粒子 1 和 2 的**质心能**

变量替换

在实践中把 E_1 和 E_3 当作积分变量并不方便，可以将它们替换成更加便利的变量

引入两个 **Lorentz 不变量**

$$s_{12} \equiv (p_1+p_2)^2 = (p_\mathcal{A}-p_3)^2 = m_\mathcal{A}^2 + m_3^2 - 2m_\mathcal{A}E_3$$
$$s_{23} \equiv (p_2+p_3)^2 = (p_\mathcal{A}-p_1)^2 = m_\mathcal{A}^2 + m_1^2 - 2m_\mathcal{A}E_1$$

可以把**粒子 1 和 2** 组成的系统看成一个**等效粒子**，四维动量为 $p_{12}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$

由于 $p_{12}^2 = (p_1+p_2)^2 = s_{12}$，$\sqrt{s_{12}}$ 相当于这个等效粒子的质量，称为粒子 1 和 2 的**不变质量** (invariant mass)，它也是粒子 1 和 2 的**质心能**

类似地，$\sqrt{s_{23}}$ 是粒子 2 和 3 的**不变质量**

s_{12} 和 s_{23} 的微分分别正比于 **E_3 和 E_1 的微分**，

$$\mathrm{d}s_{12} = -2m_\mathcal{A}\mathrm{d}E_3, \quad \mathrm{d}s_{23} = -2m_\mathcal{A}\mathrm{d}E_1$$

关于 $\cos\theta_{13}$ 的导数

- 利用 $\mathrm{d}s_{12} = -2m_{\mathcal{A}}\mathrm{d}E_3$ 和 $\mathrm{d}s_{23} = -2m_{\mathcal{A}}\mathrm{d}E_1$ 将**分宽度**积分式改写为

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{8m_{\mathcal{A}}}\int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}} \mathrm{d}E_1 \int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}} \mathrm{d}E_3\,|\mathcal{M}(E_1,E_3)|^2$$

$$= \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{256\pi^3 m_{\mathcal{A}}^3}\int_{s_{12}^{\min}}^{s_{12}^{\max}} \mathrm{d}s_{12} \int_{s_{23}^{\min}}^{s_{23}^{\max}} \mathrm{d}s_{23}\,|\mathcal{M}(s_{12},s_{23})|^2$$

- 使用上式计算时，需要把不变振幅 $\mathcal{M}$ 表达为 s_{12} **和** s_{23} **的函数**
- 把**对** s_{23} **的积分**放在**内层**，**积分上下限依赖于** s_{12}

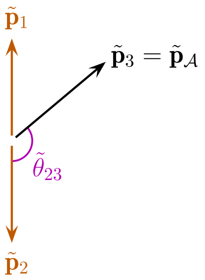
关于 $\cos\theta_{13}$ 的导数

- 利用 $ds_{12} = -2m_{\mathcal{A}}dE_3$ 和 $ds_{23} = -2m_{\mathcal{A}}dE_1$ 将**分宽度**积分式改写为

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{8m_{\mathcal{A}}}\int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}} dE_1 \int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}} dE_3\, |\mathcal{M}(E_1,E_3)|^2$$

$$= \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{256\pi^3 m_{\mathcal{A}}^3}\int_{s_{12}^{\min}}^{s_{12}^{\max}} ds_{12} \int_{s_{23}^{\min}}^{s_{23}^{\max}} ds_{23}\, |\mathcal{M}(s_{12},s_{23})|^2$$

- 使用上式计算时，需要把不变振幅 $\mathcal{M}$ 表达为 s_{12} **和 s_{23} 的函数**
- 把**对 s_{23} 的积分**放在**内层**，**积分上下限依赖于 s_{12}**
- 接下来讨论 s_{12} 和 s_{23} 的积分上下限
- 考虑**粒子 1 和 2 的质心系**，有 $\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0}$
- 这里用**波浪线**标记此参考系中的物理量
- 在这个参考系中，**质心能** $\tilde{E}_{\text{CM}} = \sqrt{s_{12}}$
- **粒子 2 的能量为** $\tilde{E}_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{s_{12}}}(s_{12} - m_1^2 + m_2^2)$



$\tilde{E}_3$ 与 s_{12} 的关系

🚔 动量守恒定律给出 $\tilde{\mathbf{p}}_3 = \tilde{\mathbf{p}}_\mathcal{A} - \tilde{\mathbf{p}}_1 - \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_\mathcal{A}$，由 s_{12} 的 **Lorentz 不变性**有

$$
\begin{aligned}
s_{12} &= (p_1 + p_2)^2 = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{p}_\mathcal{A} - \tilde{p}_3)^2 = \tilde{p}_\mathcal{A}^2 + \tilde{p}_3^2 - 2\,\tilde{p}_\mathcal{A} \cdot \tilde{p}_3 \\
&= m_\mathcal{A}^2 + m_3^2 - 2\tilde{E}_\mathcal{A}\tilde{E}_3 + 2\,\tilde{\mathbf{p}}_\mathcal{A} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_3 = m_\mathcal{A}^2 + m_3^2 - 2\sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + m_\mathcal{A}^2}\,\tilde{E}_3 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 \\
&= m_\mathcal{A}^2 + m_3^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_\mathcal{A}^2}\,\tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - 2m_3^2 \\
&= m_\mathcal{A}^2 - 2\sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2 + m_\mathcal{A}^2}\,\tilde{E}_3 + 2\tilde{E}_3^2 - m_3^2
\end{aligned}
$$

$\tilde{E}_3$ 与 s_{12} 的关系

动量守恒定律给出 $\tilde{\mathbf{p}}_3=\tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}}-\tilde{\mathbf{p}}_1-\tilde{\mathbf{p}}_2=\tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}}$，由 s_{12} 的 Lorentz 不变性有

$$\begin{aligned}
s_{12} &= (p_1+p_2)^2=(\tilde{p}_1+\tilde{p}_2)^2=(\tilde{p}_{\mathcal{A}}-\tilde{p}_3)^2=\tilde{p}_{\mathcal{A}}^2+\tilde{p}_3^2-2\,\tilde{p}_{\mathcal{A}}\cdot\tilde{p}_3\\
&= m_{\mathcal{A}}^2+m_3^2-2\tilde{E}_{\mathcal{A}}\tilde{E}_3+2\,\tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}}\cdot\tilde{\mathbf{p}}_3=m_{\mathcal{A}}^2+m_3^2-2\sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2+m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3+2|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2\\
&= m_{\mathcal{A}}^2+m_3^2-2\sqrt{\tilde{E}_3^2-m_3^2+m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3+2\tilde{E}_3^2-2m_3^2\\
&= m_{\mathcal{A}}^2-2\sqrt{\tilde{E}_3^2-m_3^2+m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3+2\tilde{E}_3^2-m_3^2
\end{aligned}$$

整理得 $2\sqrt{\tilde{E}_3^2-m_3^2+m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3=m_{\mathcal{A}}^2-s_{12}+2\tilde{E}_3^2-m_3^2$，两边平方，推出

$$\begin{aligned}
4(\tilde{E}_3^2-m_3^2+m_{\mathcal{A}}^2)\tilde{E}_3^2 &= (m_{\mathcal{A}}^2-s_{12}+2\tilde{E}_3^2-m_3^2)^2\\
&= (m_{\mathcal{A}}^2-s_{12}-m_3^2)^2+4\tilde{E}_3^4+4(m_{\mathcal{A}}^2-s_{12}-m_3^2)\tilde{E}_3^2
\end{aligned}$$

再整理，得 $4s_{12}\tilde{E}_3^2=(m_{\mathcal{A}}^2-s_{12}-m_3^2)^2$，故粒子 3 的能量为

$$\tilde{E}_3=\frac{1}{2\sqrt{s_{12}}}(m_{\mathcal{A}}^2-s_{12}-m_3^2)$$

对于确定的 s_{12}，$\tilde{E}_2$ 和 $\tilde{E}_3$ 是确定的，而且是 Lorentz 不变的

s_{23} 的积分上下限

🚖 另一方面，由 s_{23} 的 **Lorentz 不变性**有

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2$$

⛓ 这里 $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = |\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3| \cos\tilde{\theta}_{23}$，$\tilde{\theta}_{23}$ 是 $\tilde{\mathbf{p}}_2$ 与 $\tilde{\mathbf{p}}_3$ 之间的夹角

🧹 当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = 1$ 时，$|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$，而 s_{23} 取得**最小值**

$$s_{23}^{\min} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} + \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2}\right)^2$$

s_{23} 的积分上下限

另一方面，由 s_{23} 的 **Lorentz 不变性**有

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2$$

这里 $|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = |\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|^2 + 2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3|\cos\tilde{\theta}_{23}$，$\tilde{\theta}_{23}$ 是 $\tilde{\mathbf{p}}_2$ 与 $\tilde{\mathbf{p}}_3$ 之间的夹角

当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = 1$ 时，$|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$，而 s_{23} 取得**最小值**

$$s_{23}^{\min} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} + \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2}\right)^2$$

当 $\cos\tilde{\theta}_{23} = -1$ 时，$|\tilde{\mathbf{p}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_3|^2 = (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$，而 s_{23} 取得**最大值**

$$s_{23}^{\max} = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - (|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2 = (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} - \sqrt{\tilde{E}_3^2 - m_3^2}\right)^2$$

对于**确定的 s_{12}**，以上两式分别给出 s_{23} 的积分**下限**和**上限**

注意，$s_{23}^{\min}$ 和 $s_{23}^{\max}$ 是 **Lorentz 不变**的

s_{12} 的积分上下限

在**粒子 1 和 2 的质心系**中，$\tilde{\mathbf{p}}_1+\tilde{\mathbf{p}}_2=\mathbf{0}$，有

$$s_{12}=(\tilde{p}_1+\tilde{p}_2)^2=(\tilde{E}_1+\tilde{E}_2)^2-|\tilde{\mathbf{p}}_1+\tilde{\mathbf{p}}_2|^2=(\tilde{E}_1+\tilde{E}_2)^2$$

当 $\tilde{E}_1=m_1$ 且 $\tilde{E}_2=m_2$ 时，s_{12} 取得**最小值** $s_{12}^{\min}=(m_1+m_2)^2$

在 $\mathcal{A}$ **粒子静止系**中，前面已得到

$$s_{12}=(p_{\mathcal{A}}-p_3)^2=m_{\mathcal{A}}^2+m_3^2-2m_{\mathcal{A}}E_3$$

当 $E_3=m_3$ 时，s_{12} 取得**最大值**

$$s_{12}^{\max}=m_{\mathcal{A}}^2+m_3^2-2m_{\mathcal{A}}m_3=(m_{\mathcal{A}}-m_3)^2$$

注意，$s_{12}^{\min}$ 和 $s_{12}^{\max}$ 也是 **Lorentz 不变**的

s_{12} 的积分上下限

🚘 在粒子 1 和 2 的质心系中，$\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0}$，有

$$s_{12} = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2 - |\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2|^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2$$

🧷 当 $\tilde{E}_1 = m_1$ 且 $\tilde{E}_2 = m_2$ 时，s_{12} 取得**最小值** $s_{12}^{\min} = (m_1 + m_2)^2$

📌 在 $\mathcal{A}$ 粒子静止系中，前面已得到

$$s_{12} = (p_\mathcal{A} - p_3)^2 = m_\mathcal{A}^2 + m_3^2 - 2m_\mathcal{A}E_3$$

📎 当 $E_3 = m_3$ 时，s_{12} 取得**最大值**

$$s_{12}^{\max} = m_\mathcal{A}^2 + m_3^2 - 2m_\mathcal{A}m_3 = (m_\mathcal{A} - m_3)^2$$

🪛 注意，$s_{12}^{\min}$ 和 $s_{12}^{\max}$ 也是 Lorentz 不变的