数 学 物 理 方 法

第七章　分离变量法

第 4 节和第 5 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2022 年 11 月 10 日

§4 矩形区域上的稳定场方程

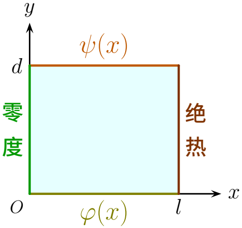
- 前面几节研究了一维波动或热传导方程定解问题的求解，它们都涉及两个自变量
- 平面上的稳定场方程定解问题也涉及两个自变量，因此与上述问题相似
- 但稳定场方程的定解问题只有边界条件，没有初始条件，其解法有一些不同之处
- 本节求解矩形区域上的两个稳定场问题，以加深对分离变量法的了解
- 矩形区域是平面上最简单的区域
- 下面先讨论矩形区域上的 Laplace 方程定解问题

Pierre-Simon Laplace
(1749–1827)

矩形区域上 Laplace 方程的定解问题

考虑以下矩形区域上的 Laplace 方程定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 & (0 \le y \le d) \\ u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=d} = \psi(x) & (0 \le x \le l) \end{cases}$$



物理上，这可以看作一块矩形薄板的稳定温度分布 $u(x, y)$ 的问题

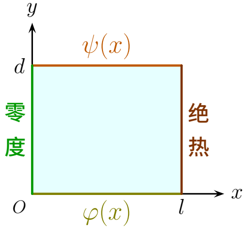
矩形薄板一边保持零度，一边绝热，另外两边的温度分布已知

那么，整块薄板上的温度分布是确定的，可以通过求解上述定解问题得到

矩形区域上 Laplace 方程的定解问题

考虑以下**矩形区域**上的 **Laplace 方程**定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & (0<x<l,\quad 0<y<d) \\ u|_{x=0}=0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0 & (0\le y\le d) \\ u|_{y=0}=\varphi(x), \quad u|_{y=d}=\psi(x) & (0\le x\le l) \end{cases}$$



物理上，这可以看作一块**矩形薄板**的**稳定温度分布** $u(x,y)$ 的问题

矩形薄板一边保持**零度**，一边**绝热**，另外两边的**温度分布已知**

那么，整块薄板上的**温度分布**是**确定**的，可以通过求解上述定解问题得到

现在尝试寻找 $u(x,y)=X(x)Y(y)$ 形式的**特解**，将它代入 **Laplace 方程**，得

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)$$

故 $\dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\dfrac{Y''(y)}{Y(y)}$，**左边与 y 无关**，**右边与 x 无关**，必为**常数**，记作 $-\lambda$

本征值问题

- 由此得到两个方程 $X''(y)+\lambda X(y)=0$ 和 $Y''(y)-\lambda Y(y)=0$
- $x=0$ 和 $x=l$ 处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0}=X(0)Y(y)=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=X'(l)Y(y)=0$$

- 从而得到**本征值问题** $\begin{cases} X''(y)+\lambda X(y)=0 \\ X(0)=0, \quad X'(l)=0 \end{cases}$

本征值问题

- 由此得到两个方程 $X''(y)+\lambda X(y)=0$ 和 $Y''(y)-\lambda Y(y)=0$
- $x=0$ 和 $x=l$ 处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0}=X(0)Y(y)=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=X'(l)Y(y)=0$$

- 从而得到**本征值问题** $\begin{cases} X''(y)+\lambda X(y)=0 \\ X(0)=0, \quad X'(l)=0 \end{cases}$

1. 如果 $\lambda<0$，令 $\lambda=-\mu^2$ $(\mu>0)$，则解为 $X(x)=C\cosh\mu x+D\sinh\mu x$

- 其中 C、D 是**任意常数**，有 $C=X(0)=0$
- 从而 $X'(l)=\mu D\cosh\mu l=0$，但 $\cosh\mu l\geq 1$ 且 $\mu>0$，故 $D=0$
- 于是得到**平庸解** $X(x)\equiv 0$，因而 $\lambda<0$ **不是**本征值

本征值问题

- 由此得到两个方程 $X''(y) + \lambda X(y) = 0$ 和 $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$
- $x = 0$ 和 $x = l$ 处的**边界条件**给出

$$u|_{x=0} = X(0)Y(y) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = X'(l)Y(y) = 0$$

- 从而得到**本征值问题** $\begin{cases} X''(y) + \lambda X(y) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$

1. 如果 $\lambda < 0$，令 $\lambda = -\mu^2$ $(\mu > 0)$，则解为 $X(x) = C\cosh\mu x + D\sinh\mu x$
- 其中 C、D 是**任意常数**，有 $C = X(0) = 0$
- 从而 $X'(l) = \mu D\cosh\mu l = 0$，但 $\cosh\mu l \geq 1$ 且 $\mu > 0$，故 $D = 0$
- 于是得到**平庸解** $X(x) \equiv 0$，因而 $\lambda < 0$ **不是**本征值

2. 如果 $\lambda = 0$，则解为 $X(x) = Cx + D$，其中 C、D 是**任意常数**
- 有 $D = X(0) = 0$，$C = X'(0) = 0$，得到**平庸解** $X(x) \equiv 0$，$\lambda = 0$ **不是**本征值

本征值和本征函数

3️⃣ 如果 $\lambda > 0$，令 $\lambda = \mu^2$ $(\mu > 0)$，则解为 $X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x$

🧁 其中 C、D 是**任意常数**，有 $C = X(0) = 0$，从而 $X'(l) = \mu D\cos\mu l = 0$

🍦 为了得到**非平庸解**，必须使 $\cos\mu l = 0$，如此则 D 可**任意**

本征值和本征函数

3 如果 $\lambda > 0$，令 $\lambda = \mu^2\ (\mu > 0)$，则解为 $X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x$

- 其中 C、D 是**任意常数**，有 $C = X(0) = 0$，从而 $X'(l) = \mu D\cos\mu l = 0$
- 为了得到**非平庸解**，必须使 $\cos\mu l = 0$，如此则 D 可**任意**
- 因此 $\cos\mu l = 0$ 是决定**本征值**的方程，它的解为 $\mu_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2l}\ (n\in\mathbb{N}^+)$
- 从而 $\mu_n l = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \cdots$ 是**余弦函数**的**零点**，于是得到**本征值**和**本征函数**

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2, \quad X_n(x) = \sin\mu_n x = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n\in\mathbb{N}^+$$

- 其中已取 $D = 1$

本征值和本征函数

3 如果 $\lambda > 0$，令 $\lambda = \mu^2$ $(\mu > 0)$，则解为 $X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x$

其中 C、D 是**任意常数**，有 $C = X(0) = 0$，从而 $X'(l) = \mu D\cos\mu l = 0$

为了得到**非平庸解**，必须使 $\cos\mu l = 0$，如此则 D 可**任意**

因此 $\cos\mu l = 0$ 是决定**本征值**的方程，它的解为 $\mu_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2l}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$

从而 $\mu_n l = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \cdots$ 是**余弦函数**的**零点**，于是得到**本征值**和**本征函数**

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2, \quad X_n(x) = \sin\mu_n x = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

其中已取 $D = 1$

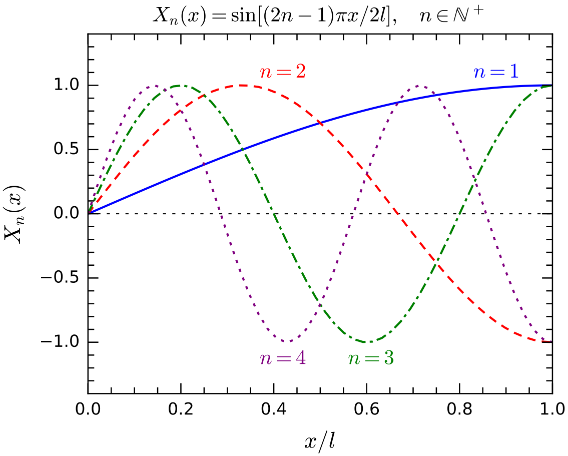
注　如果将上面的 μ_n 写成 $\mu_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2l}$，则应该取 $n \in \mathbb{N}$

求出本征函数后，最好**验证**它是否确实满足**边界条件**，避免计算错误或抄写错误

比如，这里如果将本征函数**误写**成 $\cos\mu_n x$，则通过**上述验证**可以**立即发现错误**

本征函数图像

$$\lambda_n = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$



求解 $Y(y)$

这里**本征函数族** $\{\sin\mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 在**区间** $[0,l]$ 上的**正交完备性**由 **Strum-Liouville 本征值问题**的**一般结论**（第十章 §5）得到保证

正交性也可以直接验证，利用**积化和差公式**容易证明

$$\int_0^l \sin\mu_m x \sin\mu_n x \,\mathrm{d}x = \int_0^l \sin\frac{(2m-1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,\mathrm{d}x = \frac{l}{2}\,\delta_{mn},\quad m,n\in\mathbb{N}^+$$

求解 $Y(y)$

- 这里**本征函数族** $\{\sin\mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 在**区间** $[0,l]$ 上的**正交完备性**由 **Strum-Liouville 本征值问题**的**一般结论**（第十章 §5）得到保证
- **正交性**也可以直接验证，利用**积化和差公式**容易证明

$$\int_0^l \sin\mu_m x \sin\mu_n x\,\mathrm{d}x = \int_0^l \sin\frac{(2m-1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,\mathrm{d}x = \frac{l}{2}\,\delta_{mn},\quad m,n\in\mathbb{N}^+$$

- 将**本征值** $\lambda_n=\mu_n^2$ 代入 $Y(y)$ 满足的方程，得 $Y_n''(y)-\mu_n^2 Y_n(y)=0$
- 它的两个线性独立解可以取为 $\{\exp(\mu_n y),\exp(-\mu_n y)\}$
- 因 $\cosh z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z})$，$\sinh z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z})$，也可取为 $\{\cosh\mu_n y,\sinh\mu_n y\}$

求解 $Y(y)$

- 这里**本征函数族** $\{\sin\mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 在**区间** $[0,l]$ 上的**正交完备性**由 **Strum-Liouville 本征值问题**的**一般结论**（第十章 §5）得到保证
- **正交性**也可以直接验证，利用**积化和差公式**容易证明

$$\int_0^l \sin\mu_m x \sin\mu_n x\,\mathrm{d}x = \int_0^l \sin\frac{(2m-1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,\mathrm{d}x = \frac{l}{2}\,\delta_{mn},\quad m,n\in\mathbb{N}^+$$

- 将**本征值** $\lambda_n=\mu_n^2$ 代入 $Y(y)$ 满足的方程，得 $Y_n''(y)-\mu_n^2Y_n(y)=0$
- 它的两个线性独立解可以取为 $\{\exp(\mu_n y),\exp(-\mu_n y)\}$
- 因 $\cosh z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z})$，$\sinh z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z})$，也可取为 $\{\cosh\mu_n y,\sinh\mu_n y\}$
- 由**双曲函数减法公式**得 $\sinh[\mu_n(d-y)]=\sinh\mu_n d\cosh\mu_n y-\cosh\mu_n d\sinh\mu_n y$
- 为了下面计算方便，将**两个线性独立解**等价地取为 $\{\sinh[\mu_n(d-y)],\sinh\mu_n y\}$
- 从而将方程 $Y_n''(y)-\mu_n^2Y_n(y)=0$ 的**通解**写作

$$Y_n(y)=A_n\sinh[\mu_n(d-y)]+B_n\sinh\mu_n y,\quad n\in\mathbb{N}^+,\quad A_n \text{ 和 } B_n \text{ 是任意常数}$$

定解问题的解

🍔 于是，满足 **Laplace 方程**和**边界条件**的**一般解**为

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(y)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\{A_n\sinh[\mu_n(d-y)]+B_n\sinh\mu_n y\}\sin\mu_n x$$

🍟 将上式代入 y **方向**的**两个边界条件**，得

$$u|_{y=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\mu_n d\sin\mu_n x=\varphi(x),\quad u|_{y=d}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\mu_n d\sin\mu_n x=\psi(x)$$

定解问题的解

- 于是，满足 Laplace 方程和边界条件的一般解为

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(y)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\{A_n\sinh[\mu_n(d-y)]+B_n\sinh\mu_n y\}\sin\mu_n x$$

- 将上式代入 y 方向的两个边界条件，得

$$u|_{y=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\mu_n d\sin\mu_n x=\varphi(x),\quad u|_{y=d}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\mu_n d\sin\mu_n x=\psi(x)$$

- 由于本征函数族的正交完备性，适当的系数 A_n 和 B_n 可使以上两式成立
- 利用 $\int_0^l\sin\mu_m x\,\sin\mu_n x\,\mathrm{d}x=\frac{l}{2}\,\delta_{mn}$，推出

$$A_n=\frac{2}{l\sinh\mu_n d}\int_0^l\varphi(x)\sin\mu_n x\,\mathrm{d}x,\quad B_n=\frac{2}{l\sinh\mu_n d}\int_0^l\psi(x)\sin\mu_n x\,\mathrm{d}x$$

- 给定 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的形式，可以求得系数 A_n 和 B_n
- 将它们代回一般解，就得到定解问题的解

讨论

- 在上述稳定场方程定解问题中，一部分边界条件（齐次）用于构成本征值问题
- 另一部分边界条件（齐次或非齐次）用于确定一般解中的系数
- 这是与波动或热传导问题的不同之处，后两者用初始条件确定系数
- 所以，就 Laplace 方程而言，**不必**要求**所有**的边界条件都是齐次的
- 否则就只有平庸解了

矩形区域上 Poisson 方程的定解问题

下面再考虑全部边界条件都非齐次的 Poisson 方程定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) & (0 < x < l, \quad 0 < y < d) \\ u\big|_{x=0} = \mu(y), \quad u\big|_{x=l} = \nu(y) & (0 \le y \le d) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=d} = \psi(x) & (0 \le x \le l) \end{cases}$$

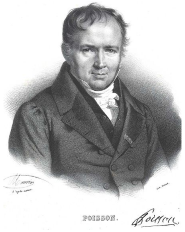
方法一 对于这一定解问题，可令

$$u(x, y) = v(x, y) + u_0(x, y)$$

并取 $u_0(x, y) = \mu(y) + \dfrac{x}{l}[\nu(y) - \mu(y)]$

从而 $v(x, y)$ 在 $x = 0$ 和 $x = l$ 处满足齐次的边界条件

虽然方程仍是非齐次的，但可以用本征函数展开法求解



Siméon Denis Poisson
(1781–1840)

分为两个定解问题

方法二 由于稳定场方程的所有定解条件都是边界条件，更简单的方法是令 $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$，将上述定解问题化为两个问题来求解

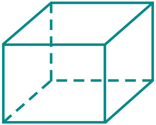
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=f(x,y) & (0<x<l,\quad 0<y<d) \\ u_1\big|_{x=0}=0,\quad u_1\big|_{x=l}=0 & (0\le y\le d) \\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0}=\varphi(x),\quad \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=d}=\psi(x) & (0\le x\le l) \end{cases}$$

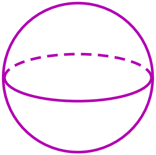
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0 & (0<x<l,\quad 0<y<d) \\ u_2\big|_{x=0}=\mu(y),\quad u_2\big|_{x=l}=\nu(y) & (0\le y\le d) \\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=d}=0 & (0\le x\le l) \end{cases}$$

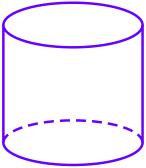
- $u_1(x,y)$ 的定解问题可以用本征函数展开法求解
- $u_2(x,y)$ 的定解问题可以直接用分离变量法求出一般解，再用边界条件确定系数

§5 平面极坐标系中的稳定场方程

- 分离变量法是一种比较具有普遍性的方法，可用于求解多个自变量的偏微分方程定解问题，如二维、三维空间中各类方程的定解问题
- 分离变量法能否成功，主要取决于边界的形状
- 在三维空间，比较容易处理的是长方体、球形和圆柱区域
- 它们的边界分别是直角坐标系、球坐标系、柱坐标系的坐标面

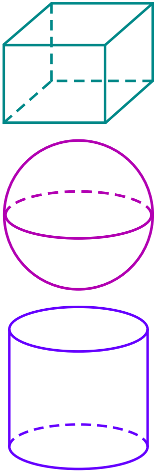






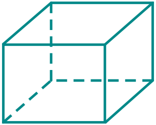
§5 平面极坐标系中的稳定场方程

- 分离变量法是一种比较具有普遍性的方法，可用于求解多个自变量的偏微分方程定解问题，如二维、三维空间中各类方程的定解问题
- 分离变量法能否成功，主要取决于边界的形状
- 在三维空间，比较容易处理的是长方体、球形和圆柱区域
- 它们的边界分别是直角坐标系、球坐标系、柱坐标系的坐标面
- 根据边界的形状，在求解时应该采用相应的曲线坐标系
- 比如，对球形区域上的定解问题，就应用采用球坐标系
- 如果采用直角坐标系，则**无法**对边界条件分离变量

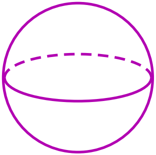


§5 平面极坐标系中的稳定场方程

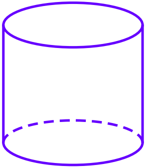
- 分离变量法是一种比较具有普遍性的方法，可用于求解多个自变量的偏微分方程定解问题，如二维、三维空间中各类方程的定解问题



- 分离变量法能否成功，主要取决于边界的形状
- 在三维空间，比较容易处理的是长方体、球形和圆柱区域
- 它们的边界分别是直角坐标系、球坐标系、柱坐标系的坐标面



- 根据边界的形状，在求解时应该采用相应的曲线坐标系
- 比如，对球形区域上的定解问题，就应用采用球坐标系
- 如果采用直角坐标系，则**无法**对边界条件分离变量



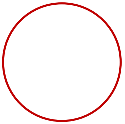
- 分离变量成功之后，需要求解常微分方程及其本征值问题
- 前面几节遇到的常微分方程的解都是初等函数，较容易处理
- 然而，在更多问题中，出现的微分方程不是我们所熟悉的，其解并**不是**初等函数
- 即使是弦振动问题，如果弦的线密度不是常数，那么本征值问题就**困难**得多

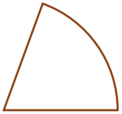
平面极坐标系

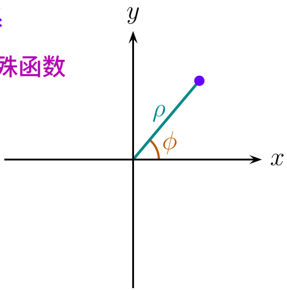
- 对于**曲线坐标系**中的定解问题，情况往往就更复杂
- 如果一个微分方程在许多问题中出现，而且可以**解析求解**（比如用**级数解法**求解），人们就会对它的解进行深入的研究
- 所谓**特殊函数**，常常就是这样一些微分方程的解
- 后面将对一些特殊函数作系统的介绍

平面极坐标系

- 对于曲线坐标系中的定解问题，情况往往就更复杂
- 如果一个微分方程在许多问题中出现，而且可以解析求解（比如用级数解法求解），人们就会对它的解进行深入的研究
- 所谓特殊函数，常常就是这样一些微分方程的解
- 后面将对一些特殊函数作系统的介绍
- 对于平面区域上的问题，如果边界涉及圆弧，比如圆内、圆外或扇形区域上的定解问题，那么显然应该采用平面极坐标系
- 在平面极坐标系中求解波动或热传导方程，也会涉及特殊函数
- 但稳定场方程的求解则只需用到初等函数
- 这可能是曲线坐标系中最简单的问题了
- 这一问题涉及两个自变量 ρ 和 ϕ，与前面几节类似
- 但边界条件完全不同，方程的形式也有新的特点







§5.1 一般解

在平面极坐标系中，**Laplace 方程**的形式为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

其中 **Laplace 算符**的形式可以由**直角坐标系**中的形式 $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 通过**坐标变换** $x = \rho\cos\phi$ 和 $y = \rho\sin\phi$ 得到

这种方法思路简单，但计算较为**繁琐**，在**第九章**中将会介绍**其它方法**

§5.1 一般解

在平面极坐标系中，Laplace 方程的形式为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

其中 Laplace 算符的形式可以由直角坐标系中的形式 $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 通过坐标变换 $x = \rho\cos\phi$ 和 $y = \rho\sin\phi$ 得到

这种方法思路简单，但计算较为**繁琐**，在第九章中将会介绍其它方法

这里暂时不给定定解条件，先求 Laplace 方程的一般解

接下来的求解假定 ϕ 的取值不受限制，因此下面得到的一般解不适用于扇形区域

现在尝试寻找形式为 $u(\rho,\phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$ 的特解，将它代入 Laplace 方程，有

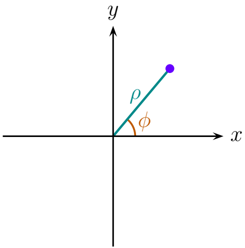
$$0 = \nabla^2 u = R''(\rho)\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Phi''(\phi)$$

整理得 $\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} \equiv \lambda$，其中 λ 是常数

自然的周期性边界条件

- 从而得到两个方程 $\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0$ 和 $\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0$
- 在**直角坐标系**中，**坐标**与**几何点**是**一一对应**的，但**曲线坐标系**却往往**不是**这样
- 在**平面极坐标系**中，**坐标** (ρ, ϕ) 与 $(\rho, \phi + 2\pi)$ 代表**同一个几何点**
- 一个**物理量**在一个**确定的几何点**应该具有**确定的取值**
- 这不应该以该点数学描述方式的不同为转移，所以，对上述问题必须要求

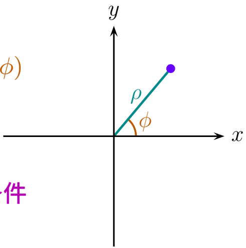
$$u(\rho, \phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$$



自然的周期性边界条件

- 从而得到两个方程 $\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0$ 和 $\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0$
- 在**直角坐标系**中，**坐标**与**几何点**是**一一对应**的，但**曲线坐标系**却往往**不是**这样
- 在**平面极坐标系**中，**坐标** (ρ, ϕ) 与 $(\rho, \phi + 2\pi)$ 代表**同一个几何点**
- 一个**物理量**在一个**确定的几何点**应该具有**确定的取值**
- 这不应该以该点数学描述方式的不同为转移，所以，对上述问题必须要求

$$u(\rho, \phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$$



- 将 $u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$ 代入，得 $R(\rho)\Phi(\phi + 2\pi) = R(\rho)\Phi(\phi)$
- 但 $R(\rho)$ **不恒为零**，故

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$$

- 这是由**物理量**的**单值性**和**曲线坐标**的**特性**导出的一个**边界条件**
- 它是一种**自然边界条件**，自然边界条件还有**其它形式**
- 同时，它也是一种**周期性边界条件**

求解本征值问题

- 现在求解 $\Phi(\phi)$ 满足的**本征值问题** $\begin{cases} \Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0 \\ \Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi) \end{cases}$
- 1 如果 $\lambda<0$，令 $\lambda=-\mu^2$ $(\mu>0)$，则解为 $\Phi(\phi)=Ce^{\mu\phi}+De^{-\mu\phi}$
- 其中 C、D 是**任意常数**，代入**周期性边界条件**，得

$$Ce^{2\pi\mu}e^{\mu\phi}+De^{-2\pi\mu}e^{-\mu\phi}=Ce^{\mu\phi}+De^{-\mu\phi}$$

$$C(e^{2\pi\mu}-1)\,e^{\mu\phi}+D(e^{-2\pi\mu}-1)\,e^{-\mu\phi}=0$$

$$\begin{aligned} \Phi''(\phi) &= \mu^2\Phi(\phi) \\ (e^{\pm\mu\phi})'' &= \mu^2 e^{\pm\mu\phi} \end{aligned}$$

- 上式必须对**所有 ϕ 值**成立，故 $C(e^{2\pi\mu}-1)=0$，且 $D(e^{-2\pi\mu}-1)=0$
- 但 $\mu>0$，有 $e^{\pm 2\pi\mu}-1\neq 0$，从而 $C=D=0$
- 于是得到**平庸解** $\Phi(\phi)\equiv 0$，因而 $\lambda<0$ **不是**本征值

求解本征值问题

- 现在求解 $\Phi(\phi)$ 满足的**本征值问题** $\begin{cases}\Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0\\ \Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi)\end{cases}$
- 1 如果 $\lambda<0$，令 $\lambda=-\mu^2\ (\mu>0)$，则解为 $\Phi(\phi)=C\mathrm{e}^{\mu\phi}+D\mathrm{e}^{-\mu\phi}$
- 其中 C、D 是**任意常数**，代入**周期性边界条件**，得

$$C\mathrm{e}^{2\pi\mu}\mathrm{e}^{\mu\phi}+D\mathrm{e}^{-2\pi\mu}\mathrm{e}^{-\mu\phi}=C\mathrm{e}^{\mu\phi}+D\mathrm{e}^{-\mu\phi}$$

$$C(\mathrm{e}^{2\pi\mu}-1)\,\mathrm{e}^{\mu\phi}+D(\mathrm{e}^{-2\pi\mu}-1)\,\mathrm{e}^{-\mu\phi}=0$$

$$\Phi''(\phi)=\mu^2\Phi(\phi)$$
$$(\mathrm{e}^{\pm\mu\phi})''=\mu^2\mathrm{e}^{\pm\mu\phi}$$

- 上式必须对**所有 ϕ 值**成立，故 $C(\mathrm{e}^{2\pi\mu}-1)=0$，且 $D(\mathrm{e}^{-2\pi\mu}-1)=0$
- 但 $\mu>0$，有 $\mathrm{e}^{\pm2\pi\mu}-1\neq0$，从而 $C=D=0$
- 于是得到**平庸解** $\Phi(\phi)\equiv0$，因而 $\lambda<0$ **不是**本征值
- 2 如果 $\lambda=0$，则解为 $\Phi(x)=C+D\phi$，其中 C、D 是**任意常数**
- 代入**周期性边界条件**，得 $C+D(\phi+2\pi)=C+D\phi$，即 $2\pi D=0$
- 故 $D=0$，而 C 可**任意**，求得**本征值** $\lambda_0=0$，**本征函数** $\Phi_0(\phi)=1$
- 注意这个解**不能遗漏**，否则**本征函数族**将是**不完备**的

继续求解本征值问题

- 继续求解 $\Phi(\phi)$ 满足的**本征值问题** $\begin{cases} \Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0 \\ \Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi) \end{cases}$

3 如果 $\lambda>0$，令 $\lambda=\mu^2$ $(\mu>0)$，则解为 $\Phi(\phi)=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\phi}+D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\phi}$

- 其中 C、D 是**任意常数**，代入**周期性边界条件**，得

$$C\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\phi}+D\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\phi}=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\phi}+D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\phi}$$

$$C(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\phi}+D(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\mu}-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\phi}=0$$

$$\begin{aligned} \Phi''(\phi) &= -\mu^2\Phi(\phi) \\ (\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu\phi})'' &= -\mu^2\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu\phi} \end{aligned}$$

- 上式必须对**所有 ϕ 值**成立，故 $C(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}-1)=0$，且 $D(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\mu}-1)=0$
- 后面一式两边乘以 $-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}$，得 $D(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}-1)=0$

继续求解本征值问题

- 继续求解 $\Phi(\phi)$ 满足的**本征值问题** $\begin{cases}\Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0\\ \Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi)\end{cases}$

3 如果 $\lambda>0$，令 $\lambda=\mu^2$ $(\mu>0)$，则解为 $\Phi(\phi)=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\phi}+D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\phi}$

- 其中 C、D 是**任意常数**，代入**周期性边界条件**，得

$$C\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\phi}+D\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\phi}=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\phi}+D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\phi}$$

$$C(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\phi}+D(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\mu}-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\phi}=0$$

$$\begin{aligned}\Phi''(\phi)&=-\mu^2\Phi(\phi)\\(\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu\phi})''&=-\mu^2\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu\phi}\end{aligned}$$

- 上式必须对**所有 ϕ 值**成立，故 $C(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}-1)=0$，且 $D(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\mu}-1)=0$
- 后面一式两边乘以 $-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}$，得 $D(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}-1)=0$
- 如果 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}-1\neq0$，则 $C=D=0$，只得到**平庸解**
- 为得到**非平庸解**，须要求 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}=1$，而 C、D 均可**任意**

$$\begin{aligned}\cos m\phi&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}}{2}\\ \sin m\phi&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}}{2\mathrm{i}}\end{aligned}$$

- 因此 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\mu}=1$ 是决定**本征值**的方程，它的解为 $\mu=m$ $(m\in\mathbb{N}^+)$
- 得到**本征值** $\lambda_m=m^2$ 和**本征函数** $\Phi_m(\phi)=\{\cos m\phi,\sin m\phi\}$，其中 $m\in\mathbb{N}^+$

简并

- 现在，**本征值** $\lambda_m = m^2$ $(m \in \mathbb{N}^+)$ 对应于**两个独立**的**本征函数** $\cos m\phi$ 和 $\sin m\phi$
- 这种一个本征值对应于**多个**独立本征函数的现象称为**简并**
- 独立本征函数的个数称为**简并度**，这里简并度为 2

简并

🌲 现在，**本征值** $\lambda_m = m^2$ $(m \in \mathbb{N}^+)$ 对应于**两个独立**的**本征函数** $\cos m\phi$ 和 $\sin m\phi$

🫐 这种一个本征值对应于**多个**独立本征函数的现象称为**简并**

🍒 独立本征函数的个数称为**简并度**，这里简并度为 2

↩️ **注** 在讨论上面 1️⃣ 和 3️⃣ 两种情况时，也可以将解的形式分别取为**双曲函数**和**三角函数**，结果是一样的

➡️ 但容易发现，在目前的**周期性边界条件**下，用**指数形式**更加方便

简并

- 现在，本征值 $\lambda_m = m^2$ $(m \in \mathbb{N}^+)$ 对应于两个独立的本征函数 $\cos m\phi$ 和 $\sin m\phi$
- 这种一个本征值对应于多个独立本征函数的现象称为简并
- 独立本征函数的个数称为简并度，这里简并度为 2
- 注　在讨论上面 1 和 3 两种情况时，也可以将解的形式分别取为双曲函数和三角函数，结果是一样的
- 但容易发现，在目前的周期性边界条件下，用指数形式更加方便
- 如果对 $\lambda_m = m^2$ 和 $\Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}$ 取 $m = 0$，会得到 $\lambda_0 = 0$ 和 $\Phi_0(\phi) = \{1, 0\}$，忽略平庸解 $\Phi(\phi) \equiv 0$，则与第 2 种情况结果相同
- 因此，可以把所有的本征值和本征函数统一写成

$$\lambda_m = m^2, \quad \Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

- 但是应该注意，在上面的求解中，$m = 0$ 和 $m \neq 0$ 两种情况需要分开讨论
- 而且 $m = 0$ 时简并度为 1，$m \neq 0$ 时简并度为 2
- 这组本征函数族正是标准 Fourier 展开的基，在区间 $[0, 2\pi]$ 上是正交完备的

求解 $R(\rho)$

将**本征值** $\lambda_m = m^2$ $(m \in \mathbb{N})$ 代入 $R(\rho)$ 的常微分方程，得

$$\rho^2 R_m''(\rho) + \rho R_m'(\rho) - m^2 R_m(\rho) = 0$$

这是**高等数学**课中学过的 **Euler 方程**，特点是每一项中**自变量**的**幂次**与**未知函数导数**的**阶相同**

Leonhard Euler
(1707–1783)

它虽然不是常系数的微分方程，但很容易求解

令 $\rho = \mathrm{e}^t$，则 $t = \ln\rho$，$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\rho} = \dfrac{1}{\rho}$，有 $\rho\dfrac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}\rho} = \rho\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\rho}\dfrac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}t}$，故

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2R_m}{\mathrm{d}^2\rho} + \rho\frac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}\rho} = \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}\rho}\right) = \rho\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2R_m}{\mathrm{d}t^2}$$

从而将 R_m 的方程化为常系数微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2R_m}{\mathrm{d}t^2} - m^2R_m = 0$，它的解是

$$R_m = \{\mathrm{e}^{mt}, \mathrm{e}^{-mt}\} \quad (m \in \mathbb{N}^+) \quad 和 \quad R_0 = \{1, t\} \quad (m = 0)$$

一般解

根据 $\rho = \mathrm{e}^t$ 将解中的**自变量**变换回 ρ，得

$$R_m(\rho) = \{\rho^m, \rho^{-m}\} \quad (m \in \mathbb{N}^+) \quad \text{和} \quad R_0(\rho) = \{1, \ln\rho\} \quad (m = 0)$$

再结合

$$\lambda_m = m^2, \quad \Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

推出 **Laplace 方程** $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0$ 的**一般解**为

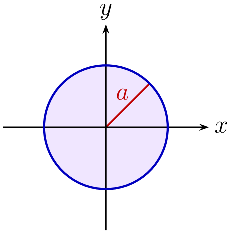
$$\begin{aligned} u(\rho,\phi) &= A_0 + B_0\ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty}\rho^m(A_m\cos m\phi + B_m\sin m\phi) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty}\rho^{-m}(C_m\cos m\phi + D_m\sin m\phi) \end{aligned}$$

其中**系数** A_m 和 B_m $(m \in \mathbb{N})$ 是**常数**，可以通过**边界条件**确定

§5.2 用边界条件确定系数

考虑圆内的 Laplace 方程定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 \qquad (\rho < a) \\ u|_{\rho=a} = F(\phi) \end{cases}$$



其中 a 是圆的半径

物理量应该取有限值，而一般解中的 $\ln\rho$ 和 ρ^{-m} 在 $\rho = 0$ 处有奇性，应该舍弃

故 $B_0 = 0$, $C_m = D_m = 0 \quad (m \in \mathbb{N}^+)$

从而一般解简化为

$$u(\rho, \phi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^m (A_m\cos m\phi + B_m\sin m\phi)$$

这里为了下面计算方便，用 $\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^m$ 代替原来的 ρ^m

圆内问题的解

将解式代入边界条件 $u|_{\rho=a} = F(\phi)$，得

$$u|_{\rho=a} = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) = F(\phi)$$

由于本征函数族的完备性，只要适当选取系数，上式总可以得到满足

本征函数族具有正交性，体现为

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi \, \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \sin m\phi \, \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \sin m\phi \cos n\phi \, \mathrm{d}\phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi \cos n\phi \, \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \sin m\phi \sin n\phi \, \mathrm{d}\phi = \pi\, \delta_{mn}, \quad \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 2\pi$$

由此得到

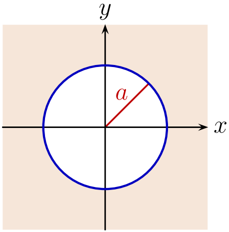
$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\phi)\, \mathrm{d}\phi, \quad A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\phi) \cos m\phi \, \mathrm{d}\phi, \quad B_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\phi) \sin m\phi \, \mathrm{d}\phi$$

给定 $F(\phi)$ 的具体形式，计算上述积分，再将系数代回去，就得到圆内问题的解

圆外问题

类似地，考虑圆外的 Laplace 方程定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 \qquad (\rho > a) \\ u|_{\rho=a} = G(\phi) \end{cases}$$



由于一般解中的 $\ln\rho$ 和 ρ^m 在 $\rho\to\infty$ 处有奇性

应该舍弃相应的项，故 $B_0 = 0, \quad A_m = B_m = 0 \quad (m \in \mathbb{N}^+)$

从而一般解简化为 $u(\rho,\phi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^{-m}(C_m\cos m\phi + D_m\sin m\phi)$

由边界条件得 $u|_{\rho=a} = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(C_m\cos m\phi + D_m\sin m\phi) = G(\phi)$，定出系数为

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(\phi)\,\mathrm{d}\phi, \quad C_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(\phi)\cos m\phi\,\mathrm{d}\phi, \quad D_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(\phi)\sin m\phi\,\mathrm{d}\phi$$

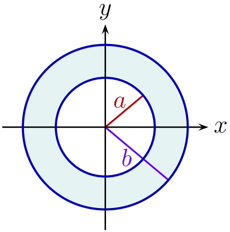
其它情况

如果所考虑的问题是**有界**的，且**不包含原点**

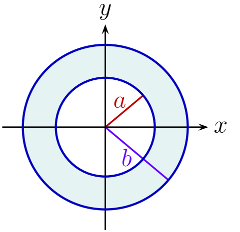
比如**环域** $a < \rho < b$ 上的定解问题，则**一般解**

$$u(\rho,\phi) = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi)$$

中的**各项均必须保留**



其它情况

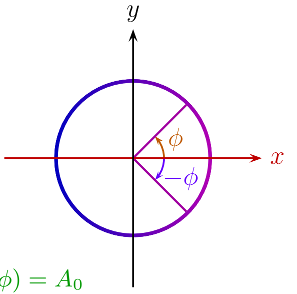


如果所考虑的问题是**有界**的，且**不包含原点**

比如**环域** $a < \rho < b$ 上的定解问题，则**一般解**

$$u(\rho,\phi) = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi)$$

中的**各项均必须保留**



不过，如果问题的**边界条件对 x 轴**具有**反射对称性**

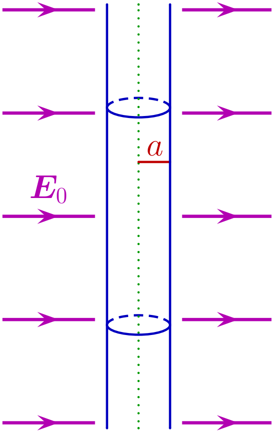
则可以推知 $u(\rho,-\phi) = u(\rho,\phi)$，一般解**简化**为

$$u(\rho,\phi) = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + C_m \rho^{-m}) \cos m\phi$$

在**全平面**上满足 **Laplace 方程**的解则只能是**常数**，$u(\rho,\phi) = A_0$

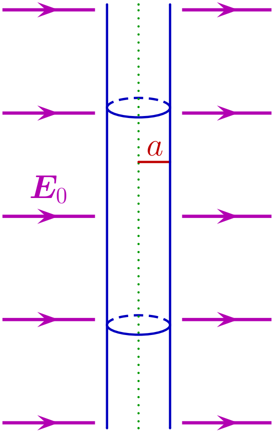
§5.3 均匀电场中的导体圆柱

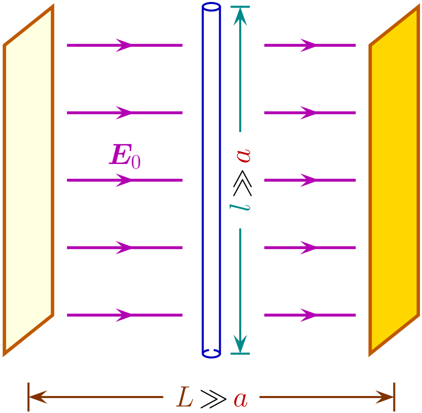
考虑一个无限长圆柱导体，半径为 a，不带电，置于均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，$\boldsymbol{E}_0$ 的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布 u



§5.3 均匀电场中的导体圆柱

考虑一个无限长圆柱导体，半径为 a，不带电，置于均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，$\boldsymbol{E}_0$ 的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布 u

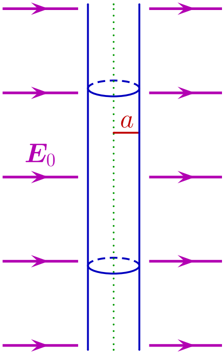




分析

考虑一个无限长圆柱导体，半径为 a，不带电，置于均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，$\boldsymbol{E}_0$ 的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布 u

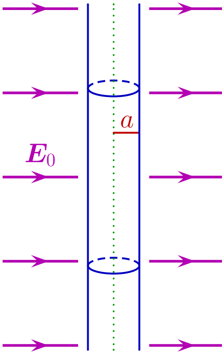
这是一道综合应用题，通过求解，同学们可以逐步培养从物理到数学、再由数学到物理的分析解决问题的能力



分析

考虑一个无限长圆柱导体，半径为 a，不带电，置于均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，$\boldsymbol{E}_0$ 的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布 u

这是一道综合应用题，通过求解，同学们可以逐步培养从物理到数学、再由数学到物理的分析解决问题的能力



1 第一步　物理分析

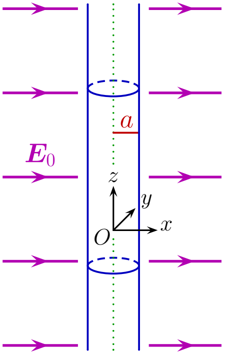
当静电场中的导体达到静电平衡时，导体变成等势体

故柱内和柱面电势为常数，可取为零，即 $u = 0\ (\rho \le a)$

注　由于存在无限长圆柱，选无穷远为电势零点一般是**不合适**的，其实本题中不同方向的无穷远点具有不同的电势

分析

考虑一个无限长圆柱导体，半径为 a，不带电，置于均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，$\boldsymbol{E}_0$ 的方向垂直于柱轴，求空间各处的电势分布 u



这是一道综合应用题，通过求解，同学们可以逐步培养从物理到数学、再由数学到物理的分析解决问题的能力

1 第一步　物理分析

当静电场中的导体达到静电平衡时，导体变成等势体

故柱内和柱面电势为常数，可取为零，即 $u = 0\ (\rho \leq a)$

注　由于存在无限长圆柱，选无穷远为电势零点一般是**不合适**的，其实本题中不同方向的无穷远点具有不同的电势

2 第二步　建立坐标系

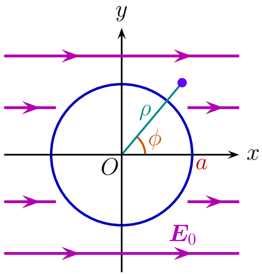
取柱轴为 z 轴，任取柱轴上一点为原点 O，又取电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向为 x 轴方向

由于所有条件不随 z 变化，任何垂直于 z 轴的平面上的电势分布都是相同的

不妨选 Oxy 平面为代表来研究，故本题是二维稳定场问题

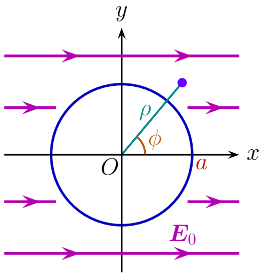
定解问题

鉴于**边界**的**形状**，只能采用**极坐标系** (ρ, ϕ)

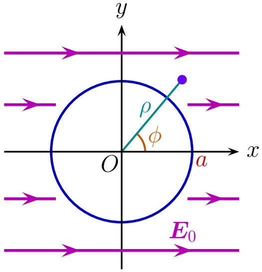


定解问题

- 鉴于边界的形状，只能采用极坐标系 (ρ, ϕ)
- 3 第三步　建立定解问题
- 柱外没有电荷，电势 $u(\rho, \phi)$ 满足 Laplace 方程
- 本题有两个边界，即柱面（圆周）和无穷远处
- 柱面的电势已取为零



定解问题



- 鉴于边界的形状，只能采用极坐标系 (ρ, ϕ)
- 3 第三步　建立定解问题
- 柱外没有电荷，电势 $u(\rho, \phi)$ 满足 Laplace 方程
- 本题有两个边界，即柱面（圆周）和无穷远处
- 柱面的电势已取为零
- 至于无穷远处，$\rho \gg a$，$a \to 0$，而原均匀电场应

基本不受影响，有 $E_0\,\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{E}_0 = -\nabla u = -\dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x$，故电势为

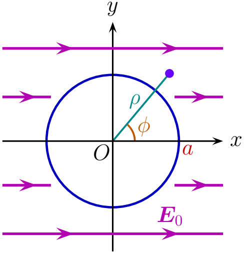
$$u = -\int E_0\,\mathrm{d}x = u_0 - E_0 x = u_0 - E_0\rho\cos\phi$$

- 因为电势零点已经取在柱面上，所以常数 u_0 不能任取，需要通过求解来确定
- 于是列出定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \qquad (a < \rho < \infty) \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad u|_{\rho\to\infty} = u_0 - E_0\rho\cos\phi \end{cases}$$

求解定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad (a < \rho < \infty) \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad u|_{\rho\to\infty} = u_0 - E_0 \rho \cos\phi \end{cases}$$



4 第四步　求解定解问题

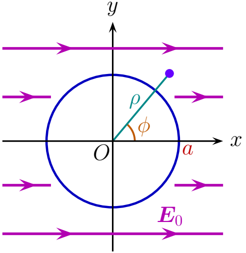
Laplace 方程和边界条件都在 $\phi \to -\phi$ 变换下不变

因此本题具有对 x 轴的反射对称性，如前所述，一般解表达为

$$u(\rho,\phi) = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + C_m \rho^{-m}) \cos m\phi$$

求解定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad (a < \rho < \infty) \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad u|_{\rho\to\infty} = u_0 - E_0 \rho \cos\phi \end{cases}$$



4 第四步　求解定解问题

Laplace 方程和边界条件都在 $\phi \to -\phi$ 变换下不变

因此本题具有对 x 轴的反射对称性，如前所述，一般解表达为

$$u(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + C_m \rho^{-m}) \cos m\phi$$

代入无穷远处的边界条件，得

$$u|_{\rho\to\infty} = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{A_m \rho^m \cos m\phi}_{\supset A_1 \rho \cos\phi} = u_0 - E_0 \rho \cos\phi$$

比较两边，推出 $A_0 = u_0$， $B_0 = 0$， $A_1 = -E_0$， $A_m = 0 \ (m > 1)$

定解问题的解

从而得到 $u(\rho,\phi) = u_0 - E_0\rho\cos\phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m\rho^{-m}\cos m\phi$

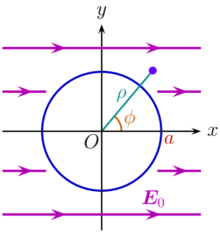
再代入**柱面**的**边界条件**，有

$$\supset \frac{C_1}{a}\cos\phi$$

$$u|_{\rho=a} = u_0 - E_0 a\cos\phi + \sum_{m=1}^{\infty} C_m a^{-m}\cos m\phi = 0$$

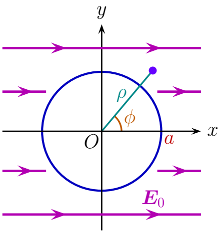
比较两边，推出 $u_0 = 0$， $C_1 = E_0 a^2$， $C_m = 0\ (m > 1)$

最终得到**定解问题**的**解**为 $u(\rho,\phi) = -E_0\rho\cos\phi + \dfrac{E_0 a^2}{\rho}\cos\phi$



定解问题的解

🚎 从而得到 $u(\rho,\phi)=u_0-E_0\rho\cos\phi+\sum_{m=1}^{\infty}C_m\rho^{-m}\cos m\phi$



🛻 再代入**柱面**的**边界条件**，有

$$u|_{\rho=a}=u_0-E_0a\cos\phi+\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}C_ma^{-m}\cos m\phi}_{\supset \frac{C_1}{a}\cos\phi}=0$$

🚒 比较两边，推出 $u_0=0,\quad C_1=E_0a^2,\quad C_m=0\ (m>1)$

🚛 最终得到**定解问题**的**解**为 $u(\rho,\phi)=-E_0\rho\cos\phi+\dfrac{E_0a^2}{\rho}\cos\phi$

5 第五步 结果分析

🚗 **解式**中**第一项**是**原均匀电场**的**电势**，**第二项**是由**柱面**上的**感应面电荷**产生的

🚙 本题的求解区域是**圆外** $\rho>a$，即**无穷远点**的**邻域**，但**电势**的**求解结果**中**第一项**在 $\rho\to\infty$ 处有**奇性**，因为**均匀电场**是由**无穷远处**的**源**产生的

🚕 求解区域存在**电荷**，因而前面得出的**圆外的解不包含** ρ^m **和** $\ln\rho$ **项**的结论**不成立**

🚜 不过，**无穷远处**的**源**只通过**边界条件**影响结果，**不作为非齐次项**出现在**方程**中

感应面电荷

- 根据解式 $u(\rho,\phi) = -E_0\rho\cos\phi + \dfrac{E_0 a^2}{\rho}\cos\phi$，$\rho$ 方向上的电场分量是

$$E_\rho = -\frac{\partial u}{\partial \rho} = E_0\cos\phi + \frac{E_0 a^2}{\rho^2}\cos\phi$$

- 它在柱面附近的值为 $E_\rho\Big|_{\rho=a} = 2E_0\cos\phi$
- 可见，在 $\phi = 0, \pi$ 两处，电场大小是原均匀电场的两倍，所以这两处容易被击穿

感应面电荷

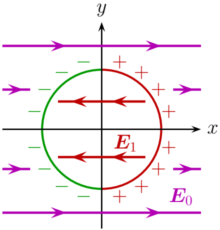
- 根据解式 $u(\rho,\phi) = -E_0\rho\cos\phi + \dfrac{E_0 a^2}{\rho}\cos\phi$，$\rho$ 方向上的电场分量是

$$E_\rho = -\frac{\partial u}{\partial \rho} = E_0\cos\phi + \frac{E_0 a^2}{\rho^2}\cos\phi$$

- 它在柱面附近的值为 $E_\rho\big|_{\rho=a} = 2E_0\cos\phi$
- 可见，在 $\phi = 0, \pi$ 两处，电场大小是原均匀电场的两倍，所以这两处容易被击穿
- 根据电磁学，记 ϵ_0 为真空介电常数，柱面上感应电荷的面密度为

$$\sigma(\phi) = -\epsilon_0\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\rho=a} = -\epsilon_0\frac{\partial u}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=a} = \epsilon_0 E_\rho\big|_{\rho=a} = 2\epsilon_0 E_0\cos\phi$$

- 显然，柱面上 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 部分带正电，$\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 部分带负电



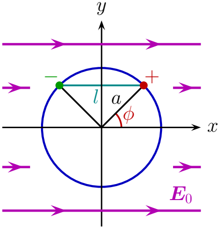
- 感应电荷引起的电场 E_1 在柱内抵消外电场 E_0，从而达到静电平衡

电偶极矩

正如所期望的，柱面上**每单位长度**的**总带电量**为**零**：

$$Q=\int_0^{2\pi}\sigma(\phi)\,a\,\mathrm{d}\phi=2a\epsilon_0E_0\int_0^{2\pi}\cos\phi\,\mathrm{d}\phi=0$$

方位角 $\phi\in(-\pi/2,\pi/2)$ 处 $\mathrm{d}\phi$ **角度**内的**元电荷** $\mathrm{d}q=\sigma(\phi)\,a\,\mathrm{d}\phi$ 与**方位角** $\pi-\phi$ 处的相应**元电荷**形成**元电偶极子**



两个元电荷的**距离**为 $l=2a\cos\phi$，元电偶极子的**偶极矩**为

$$\mathrm{d}p=l\,\mathrm{d}q=2a\cos\phi\cdot2\epsilon_0E_0\cos\phi\,a\,\mathrm{d}\phi=4a^2\epsilon_0E_0\cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi$$

从而，**感应面电荷**引起的**沿 x 轴正向**的**总电偶极矩**为

$$p=\int\mathrm{d}p=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}4a^2\epsilon_0E_0\cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi=2a^2\epsilon_0E_0\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos2\phi+1)\,\mathrm{d}\phi$$

$$=2a^2\epsilon_0E_0\left(\frac{1}{2}\sin2\phi\bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\phi\big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right)=2\pi a^2\epsilon_0E_0$$

理想电偶极子

⚓ 若 $l \to 0$、$q \to \infty$ 时 ql 保持固定，则称电偶极子 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$ 是理想电偶极子

🛥 根据电磁学，一个二维理想电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 产生的电势为 $u_{\text{dipole}} = \dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\rho}}{2\pi\epsilon_0\rho^2}$

🛳 将以上沿 x 轴正向的总电偶极矩代入，得

$$
\begin{aligned}
u_{\text{dipole}} &= \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\rho}}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p\rho\cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p\cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho} \\
&= \frac{2\pi a^2\epsilon_0 E_0\cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho} = \frac{E_0 a^2}{\rho}\cos\phi
\end{aligned}
$$

🚢 这与解式 $u(\rho,\phi) = -E_0\rho\cos\phi + \dfrac{E_0 a^2}{\rho}\cos\phi$ 中的第二项相同

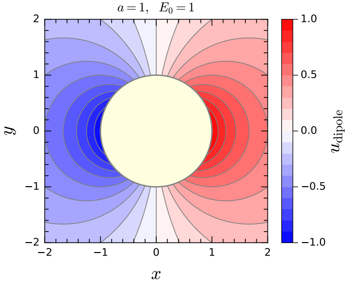
🛳 因此，感应电荷的分布对于柱外区域而言等价于一个理想电偶极子

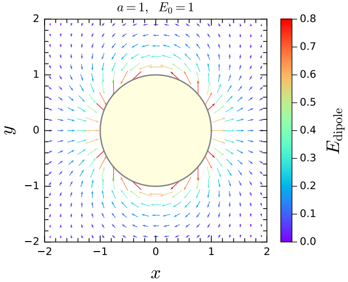
理想电偶极子

- 若 $l \to 0$、$q \to \infty$ 时 ql 保持固定，则称电偶极子 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$ 是理想电偶极子
- 根据电磁学，一个二维理想电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 产生的电势为 $u_{\text{dipole}} = \dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\rho}}{2\pi\epsilon_0\rho^2}$
- 将以上沿 x 轴正向的总电偶极矩代入，得

$$\begin{aligned} u_{\text{dipole}} &= \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\rho}}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p\rho\cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{p\cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho} \\ &= \frac{2\pi a^2\epsilon_0 E_0\cos\phi}{2\pi\epsilon_0\rho} = \frac{E_0 a^2}{\rho}\cos\phi \end{aligned}$$

- 这与解式 $u(\rho,\phi) = -E_0\rho\cos\phi + \dfrac{E_0 a^2}{\rho}\cos\phi$ 中的第二项相同
- 因此，感应电荷的分布对于柱外区域而言等价于一个理想电偶极子

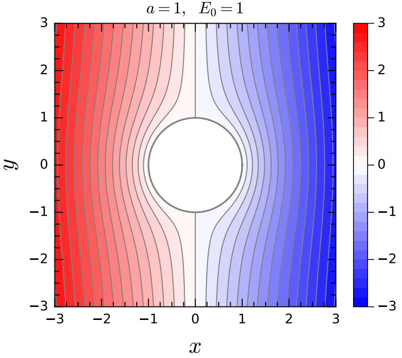


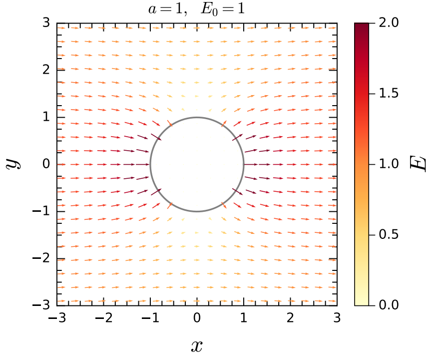


电势分布和电场分布的图像

$$u = -E_0 \rho \cos\phi + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos\phi = -E_0 x + \frac{E_0 a^2 x}{x^2 + y^2}$$

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x} = E_0 - \frac{E_0 a^2}{x^2 + y^2} + \frac{2E_0 a^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2E_0 a^2 xy}{(x^2 + y^2)^2}$$



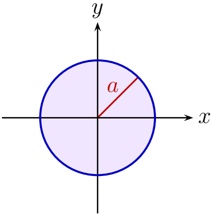


§5.4 Poisson 方程的处理

本小节介绍 Poisson 方程（非齐次稳定场方程）的处理方法

考虑圆内的 Poisson 方程定解问题

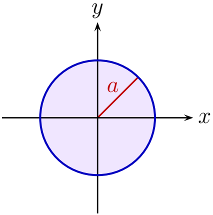
$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = f(\rho,\phi) \qquad (\rho < a) \\ u|_{\rho=a} = F(\phi) \end{cases}$$



§5.4 Poisson 方程的处理

本小节介绍 **Poisson 方程**（**非齐次稳定场方程**）的处理方法

考虑**圆内**的 **Poisson 方程**定解问题



$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = f(\rho,\phi) \qquad (\rho < a) \\ u|_{\rho=a} = F(\phi) \end{cases}$$

方法一　如果 $f(\rho,\phi)$ 的形式比较**简单**，则可以通过观察和试探寻找一个**简单函数** $u_0(\rho,\phi)$，使得 $\nabla^2 u_0 = f(\rho,\phi)$，然后令 $u(\rho,\phi) = v(\rho,\phi) + u_0(\rho,\phi)$

从而 $v(\rho,\phi)$ 满足定解问题 $$\begin{cases} \nabla^2 v = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\phi^2} = 0 \qquad (\rho < a) \\ v|_{\rho=a} = G(\phi) \end{cases}$$

其中 $G(\phi) = u|_{\rho=a} - u_0|_{\rho=a} = F(\phi) - u_0(a,\phi)$

$u_0(\rho,\phi)$ **不是**唯一的，因为 $u_0(\rho,\phi)$ 加上任一**调和函数**（即 **Laplace 方程**的**解**，如 $\rho^m\cos m\phi$ 或 $\rho^m\sin m\phi$）之后**仍然满足要求**，应该通过选择**使** $G(\phi)$ **尽可能简单**

方法二

🧡 方法二　如果 $f(\rho,\phi)$ 的形式比较复杂，则难以找到 $u_0(\rho,\phi)$

🏭 这时应该使用本征函数展开法，将未知函数 $u(\rho,\phi)$ 展开为

$$u(\rho,\phi)=A_0(\rho)+\sum_{m=1}^{\infty}[A_m(\rho)\cos m\phi+B_m(\rho)\sin m\phi]$$

🏢 其中 $A_0(\rho)$、$A_m(\rho)$、$B_m(\rho)$ 是未知函数

🏫 这个展开式满足周期性边界条件 $u(\rho,\phi+2\pi)=u(\rho,\phi)$

方法二

🧡 方法二　如果 $f(\rho,\phi)$ 的形式比较复杂，则难以找到 $u_0(\rho,\phi)$

🏭 这时应该使用本征函数展开法，将未知函数 $u(\rho,\phi)$ 展开为

$$u(\rho,\phi)=A_0(\rho)+\sum_{m=1}^{\infty}[A_m(\rho)\cos m\phi+B_m(\rho)\sin m\phi]$$

🏢 其中 $A_0(\rho)$、$A_m(\rho)$、$B_m(\rho)$ 是未知函数

🏫 这个展开式满足周期性边界条件 $u(\rho,\phi+2\pi)=u(\rho,\phi)$

🏥 将非齐次项和边界条件也作类似展开：

$$f(\rho,\phi)\ =\ a_0(\rho)+\sum_{m=1}^{\infty}[a_m(\rho)\cos m\phi+b_m(\rho)\sin m\phi]$$

$$F(\phi)\ =\ \alpha_0+\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_m\cos m\phi+\beta_m\sin m\phi)$$

已知函数：

$$a_0(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\phi)\,\mathrm{d}\phi,\quad a_m(\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\phi)\cos m\phi\,\mathrm{d}\phi,\quad b_m(\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\phi)\sin m\phi\,\mathrm{d}\phi$$

已知常数：$\alpha_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}F(\phi)\,\mathrm{d}\phi,\quad \alpha_m=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}F(\phi)\cos m\phi\,\mathrm{d}\phi,\quad \beta_m=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}F(\phi)\sin m\phi\,\mathrm{d}\phi$

常微分方程

将这些展开式代入定解问题，用撇号代表对 ρ 求导，利用

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$$

$$= \frac{1}{\rho}(\rho A_0')' + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(A_m'' + \frac{1}{\rho}A_m' - \frac{m^2}{\rho^2}A_m\right)\cos m\phi + \left(B_m'' + \frac{1}{\rho}B_m' - \frac{m^2}{\rho^2}B_m\right)\sin m\phi\right]$$

推出未知函数 $A_0(\rho)$、$A_m(\rho)$ 和 $B_m(\rho)$ 满足的常微分方程和边界条件：

$$(\rho A_0')' = \rho\, a_0, \quad \rho^2 A_m'' + \rho A_m' - m^2 A_m = \rho^2 a_m, \quad \rho^2 B_m'' + \rho B_m' - m^2 B_m = \rho^2 b_m$$

$$A_0(a) = \alpha_0, \qquad A_m(a) = \alpha_m, \qquad B_m(a) = \beta_m$$

这些常微分方程不难求解，$A_0(\rho)$ 的方程可以直接积分

$A_m(\rho)$ 和 $B_m(\rho)$ 的方程相应的齐次方程为 Euler 方程，容易求出通解，对应于非齐次项的特解可以用常数变易法求出

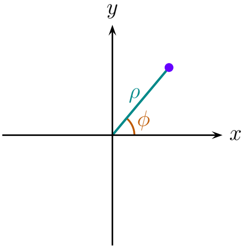
但是，对于每个未知函数，边界条件只有一个，**不足以**确定通解中的两个任意常数

自然边界条件

- 实际上，还存在另一组边界条件
- 在平面极坐标系中，$\rho=0$ 处 ϕ 没有定义，故 $\rho=0$ 是坐标系的奇点
- 展开式 $u(\rho,\phi)=A_0(\rho)+\sum_{m=1}^{\infty}[A_m(\rho)\cos m\phi+B_m(\rho)\sin m\phi]$ 本身就要求

$$A_m(0)=0,\quad B_m(0)=0,\quad m\in\mathbb{N}^+$$

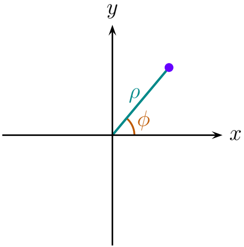
- 否则 $u(\rho,\phi)$ 在 $\rho=0$ 处没有定义，这是一组自然边界条件



自然边界条件

- 实际上，还存在另一组边界条件
- 在平面极坐标系中，$\rho = 0$ 处 ϕ 没有定义，故 $\rho = 0$ 是坐标系的奇点
- 展开式 $u(\rho, \phi) = A_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\rho) \cos m\phi + B_m(\rho) \sin m\phi]$ 本身就要求

$$A_m(0) = 0, \quad B_m(0) = 0, \quad m \in \mathbb{N}^+$$



- 否则 $u(\rho, \phi)$ 在 $\rho = 0$ 处没有定义，这是一组自然边界条件
- 对展开式第一项 $A_0(\rho)$ 没有类似要求，但它必须有限
- 即满足自然边界条件

$$|A_0(0)| < \infty$$

- 注意，上式并不意味着 $A_0(\rho)$ 在 $\rho \neq 0$ 处可以不必有限
- 只不过偏微分方程的解在坐标系奇点 $\rho = 0$ 处很容易出现奇性，需要对其有限性特别加以强调

求解 $A_0(\rho)$

- 下面求解 $A_0(\rho)$ 的常微分方程边值问题 $\begin{cases} (\rho A_0')' = \rho\, a_0(\rho) \\ A_0(a) = \alpha_0, \quad |A_0(0)| < \infty \end{cases}$
- 方程 $(\rho A_0')' = \rho\, a_0(\rho)$ 对 ρ 积分，得 $\rho A_0' = \displaystyle\int_0^{\rho} \rho_1 a_0(\rho_1)\, \mathrm{d}\rho_1 + C$
- 其中 C 为常数，从而 $A_0' = \dfrac{1}{\rho}\displaystyle\int_0^{\rho} \rho_1 a_0(\rho_1)\, \mathrm{d}\rho_1 + \dfrac{C}{\rho}$，再次对 ρ 积分，得

$$A_0(\rho) = \int_0^{\rho} \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1)\, \mathrm{d}\rho_1\, \mathrm{d}\rho_2 + C \ln\rho + D, \quad \text{其中 } D \text{ 为常数}$$

求解 $A_0(\rho)$

下面求解 $A_0(\rho)$ 的**常微分方程边值问题** $\begin{cases} (\rho A_0')' = \rho\, a_0(\rho) \\ A_0(a) = \alpha_0, \quad |A_0(0)| < \infty \end{cases}$

方程 $(\rho A_0')' = \rho\, a_0(\rho)$ 对 ρ 积分，得 $\rho A_0' = \int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1)\,\mathrm{d}\rho_1 + C$

其中 C 为**常数**，从而 $A_0' = \dfrac{1}{\rho}\displaystyle\int_0^\rho \rho_1 a_0(\rho_1)\,\mathrm{d}\rho_1 + \dfrac{C}{\rho}$，再次对 ρ 积分，得

$$A_0(\rho) = \int_0^\rho \frac{1}{\rho_2}\int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1)\,\mathrm{d}\rho_1\,\mathrm{d}\rho_2 + C\ln\rho + D, \quad \text{其中 } D \text{ 为常数}$$

由于 $\ln\rho$ 在 $\rho = 0$ 处**发散**，**自然边界条件** $|A_0(0)| < \infty$ 意味着 $C = 0$

代入 $\rho = a$ 处的**边界条件**，得 $\alpha_0 = A_0(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{\rho_2}\int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1)\,\mathrm{d}\rho_1\,\mathrm{d}\rho_2 + D$

故 $D = \alpha_0 - \displaystyle\int_0^a \frac{1}{\rho_2}\int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1)\,\mathrm{d}\rho_1\,\mathrm{d}\rho_2$，代回去，得到**问题**的**解**为

$$A_0(\rho) = \alpha_0 - \int_\rho^a \frac{1}{\rho_2}\int_0^{\rho_2} \rho_1 a_0(\rho_1)\,\mathrm{d}\rho_1\,\mathrm{d}\rho_2$$