

量子场论

第 8 章 分立对称性和 Majorana 旋量场

8.4 节至 8.7 节

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2022 年 10 月 26 日



8.4 节 CP 变换

 C 变换和 P 变换相继作用，就形成 CP 变换

 CP 变换既反转动量的方向，又将正反粒子互换，但保持角动量不变

在弱相互作用中，左手流算符 $\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L$ 和右手流算符 $\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$ 参与不同的规范相互作用，导致电荷共轭对称性和空间反射对称性都遭到极大的破坏

但弱相互作用的 CP 对称性却近似成立，只受到微小的破坏

另一方面，实验上还没有迹象表明电磁和强相互作用的 CP 对称性受到破坏

复标量场的 CP 变换

根据前面推出的 C 、 P 变换性质，复标量场 $\phi(x)$ 产生湮灭算符的 CP 变换是

$$(CP)^{-1}a_p^\dagger CP = \eta_C P^{-1}b_p^\dagger P = \eta_C \eta_P^* b_{-p}^\dagger, \quad (CP)^{-1}a_p CP = \eta_C^* P^{-1}b_p P = \eta_C^* \eta_P b_{-p}$$

$$(CP)^{-1}b_p^\dagger CP = \eta_C^* P^{-1} a_p^\dagger P = \eta_C^* \eta_P a_{-p}^\dagger, \quad (CP)^{-1}b_p CP = \eta_C P^{-1} a_p P = \eta_C \eta_P^* a_{-p}$$

 $\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1}\phi(x)CP = \eta_C^*\eta_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x), \quad (CP)^{-1}\phi^\dagger(x)CP = \eta_C\eta_P^*\phi(\mathcal{P}x)$$

算符 $\phi^\dagger \phi$ 和 $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$ 的 CP 变换是

$$(CP)^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)CP = +\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\phi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} i\phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi(x) CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu i\phi^\dagger(\mathcal{P}x) \overleftrightarrow{\partial}^\nu \phi(\mathcal{P}x)$$

可见, $\phi^\dagger \phi$ 的 ***CP*** 宇称为偶

Dirac 旋量场的 CP 变换

对于 Dirac 旋量场 $\psi(x)$, 各种旋量双线性型的 CP 变换是

$$(CP)^{-1} \bar{\psi}(x) \psi(x) CP = +\bar{\psi}(\mathcal{P}x) \psi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x)CP = -\bar{\psi}(\mathcal{P}x)i\gamma^5\psi(\mathcal{P}x),$$

$$(CP)^{-1} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x) CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \gamma^5 \psi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \bar{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x) CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \bar{\psi}(\mathcal{P}x) \sigma^{\rho\sigma} \psi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \bar{\psi}_R(x) \psi_L(x) CP = \bar{\psi}_L(\mathcal{P}x) \psi_R(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \bar{\psi}_L(x) \psi_R(x) CP = \bar{\psi}_R(\mathcal{P}x) \psi_L(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \psi_L(x) CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}_L(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi_L(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \psi_R(x) CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}_R(\mathcal{P}x) \gamma^\nu \psi_R(\mathcal{P}x)$$

$\bar{\psi}\psi$ 的 CP 宇称为偶, $\bar{\psi}i\gamma^5\psi$ 的 CP 宇称为奇

例 $\bar{\psi}_R \psi_L$ 与 $\bar{\psi}_L \psi_R$ 在 CP 变换下相互转化

 左手流算符 $\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L$ 和右手流算符 $\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$ 在 CP 变换后分别回到自身

有质量复矢量场的 CP 变换

 有质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 及其厄米共轭 $A^{\mu\dagger}(x)$ 的 CP 变换是

$$(CP)^{-1} A^\mu(x) CP = \xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), \quad (CP)^{-1} A^{\mu\dagger}(x) CP = \xi_C \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

口 $F^{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1} F^{\mu\nu}(x) CP = \xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x),$$

$$(CP)^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) CP = -\xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x)$$

有质量复矢量场的 CP 变换

 有质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 及其厄米共轭 $A^{\mu\dagger}(x)$ 的 CP 变换是

$$(CP)^{-1}A^\mu(x)CP = \xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), \quad (CP)^{-1}A^{\mu\dagger}(x)CP = \xi_C \xi_P^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

口 $F^{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1} F^{\mu\nu}(x) CP = \xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x),$$

$$(CP)^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) CP = -\xi_C^* \xi_P \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x)$$

另一方面，自共轭场的 CP 宇称是其 C 宇称与宇称之积

实标量场 $\phi(x)$ 的 CP 宇称是 η_{CP} ，取值为 ± 1

 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的 CP 宇称是 $\zeta_C \zeta_P$ ，取值为 $\pm i$

有质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 的 CP 宇称是 $\xi_C \xi_P$ ，取值为 ± 1

电磁场的 CP 变换

 电磁场 $A^\mu(x)$ 的 CP 宇称是 $\xi_C \xi_P = -1$ ， CP 变换为

$$(CP)^{-1} A^\mu(x) CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

场强张量 $F^{\mu\nu}$ 和对偶场强张量 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 CP 变换是

$$(CP)^{-1} F^{\mu\nu}(x) CP = -\mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) CP = \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x)$$

 算符 $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) CP = +F^{\mu\nu}(\mathcal{P}x) F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \tilde{F}^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) CP = -\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathcal{P}x) F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x)$$

 可见, $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 CP 宇称为偶, $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 CP 宇称为奇

8.5 节 C 、 P 、 T 对称性



前文讨论的所有自由量子场理论都同时具有 C 、 P 、 T 对称性

一个相互作用理论是否具有 C 、 P 、 T 对称性，则取决于拉氏量中的相互作用项是否在 C 、 P 、 T 变换下不变

由于 C 、 P 、 T 相位因子的任意性，我们可以对它们取合适的值，使理论具有尽可能多的分立对称性

8.5 节 C 、 P 、 T 对称性



前文讨论的所有自由量子场理论都同时具有 C 、 P 、 T 对称性



一个相互作用理论是否具有 C 、 P 、 T 对称性，则取决于拉氏量中的相互作用项是否在 C 、 P 、 T 变换下不变



由于 C 、 P 、 T 相位因子的任意性，我们可以对它们取合适的值，使理论具有尽可能多的分立对称性



💡 在一些由量子场构成的算符的分立变换中，相位因子被抵消掉了，使得这些算符具有明确的 C 、 P 、 T 变换性质，这些性质在分析分立对称性的过程中起着重要作用



便于应用，接下来用表格总结一些算符的 C 、 P 、 T 变换性质



 将要用到的 $[-]^\mu$ 符号定义为

$$[-]^\mu = \begin{cases} +1, & \mu = 0 \\ -1, & \mu = 1, 2, 3 \end{cases}$$

标量场和矢量场相关算符的 C 、 P 、 T 变换性质

由复标量场 $\phi(x)$ 和电磁场 $A^\mu(x)$ 构成的一些算符的 C 、 P 、 T 变换性质如下

算符	C	P	T	CP	CPT
i	+	+	-	+	-
∂^μ	+	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$[-]^\mu$	-
$(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$	+	+	+	+	+
$\phi^\dagger \phi$	+	+	+	+	+
$i \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$	-	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-
A^μ	-	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-
$F^{\mu\nu}$	-	$[-]^\mu [-]^\nu$	$-[-]^\mu [-]^\nu$	$-[-]^\mu [-]^\nu$	+
$\tilde{F}^{\mu\nu}$	-	$-[-]^\mu [-]^\nu$	$[-]^\mu [-]^\nu$	$[-]^\mu [-]^\nu$	+
$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$	+	+	+	+	+
$F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$	+	-	-	-	+

旋量场相关算符的 C 、 P 、 T 变换性质

由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 构成的一些算符的 C 、 P 、 T 变换性质如下

算符	C	P	T	CP	CPT
$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$	+	+	+	+	+
$\bar{\psi}\psi$	+	+	+	+	+
$\bar{\psi}i\gamma^5\psi$	+	-	-	-	+
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	-	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-
$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	+	$-[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	-	$[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	+
$\bar{\psi}_L\psi_R$	+	$\bar{\psi}_L\psi_R$	+	$\bar{\psi}_L\psi_R$	$\bar{\psi}_L\psi_R$
$\bar{\psi}_L\psi_R$	+	$\bar{\psi}_R\psi_L$	+	$\bar{\psi}_R\psi_L$	$\bar{\psi}_R\psi_L$
$\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L$	$-\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$	$[-]^\mu\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-
$\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$	$-\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L$	$[-]^\mu\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	-

Yukawa 理论的 C 、 P 、 T 对称性

 在相互作用项为 $\mathcal{L}_Y = -\kappa \phi \bar{\psi} \psi$ 的 Yukawa 理论中

 实标量场 $\phi(x)$ 与 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的相互作用算符是 $\phi\bar{\psi}\psi$

那么, C 、 P 、 T 对称性要求 $\phi(x)$ 的相位因子为 $\eta_C = \eta_P = \eta_T = +1$

则 $\phi(x)$ 是狭义的标量场, C 宇称和宇称均为偶

算符	C	P	T	CP	CPT
$\bar{\psi}\psi$	+	+	+	+	+
$\bar{\psi}i\gamma^5\psi$	+	-	-	-	+

Yukawa 理论的 C 、 P 、 T 对称性

在相互作用项为 $f_{\chi\psi} \equiv -\kappa \phi \bar{\psi}\psi$ 的 Yukawa 理论中

 实标量场 $\phi(x)$ 与 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的相互作用算符是 $\phi\bar{\psi}\psi$

那么, C 、 P 、 T 对称性要求 $\phi(x)$ 的相位因子为 $\eta_C = \eta_P = \eta_T = +1$

则 $\phi(x)$ 是狭义的标量场, C 宇称和宇称均为偶

算符	C	P	T	CP	CPT
$\bar{\psi}\psi$	+	+	+	+	+
$\bar{\psi}i\gamma^5\psi$	+	-	-	-	+

在相互作用项为 $\mathcal{L}_Y = -\kappa \phi \bar{\psi} i\gamma^5 \psi$ 的另一种 Yukawa 理论中

实标量场 $\phi(x)$ 与 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的相互作用算符是 $\phi\bar{\psi}i\gamma^5\psi$

那么, C 、 P 、 T 对称性要求 $\phi(x)$ 的相位因子为 $\eta_C = +1$ 和 $\eta_P = \eta_T = -1$

则 $\phi(x)$ 是赝标量场, C 宇称为偶, S 宇称为奇

CPT 变换



将 C 、 P 、 T 变换相继作用，就得到 **CPT 变换**，相应的变换算符记作

$$\Theta \equiv CPT$$



由 $\Theta^\dagger \Theta = T^\dagger P^\dagger C^\dagger CPT = 1$ 得

$$\Theta^{-1} = \Theta^\dagger = T^\dagger P^\dagger C^\dagger = T^{-1} P^{-1} C^{-1}$$



而且

$$\Theta^{-1} i \Theta = T^{-1} P^{-1} C^{-1} i CPT = T^{-1} i T = -i$$



可见， Θ 跟 T 一样是反线性反幺正算符

CPT 定理

从前面的表格可以看到，像 $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$ 、 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 、 $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ 、 A^μ 这样具有 1 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在 CPT 变换下得到一个负号，即 CPT 相位因子为奇

另一方面，像 $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$ 、 $i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$ 、 $\bar{\psi} \psi$ 、 $\bar{\psi} i \gamma^5 \psi$ 、 $\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$ 、 $F^{\mu\nu}$ 、 $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 这样具有 0 个或 2 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在 CPT 变换下得到一个正号，即 CPT 相位因子为偶。

CPT 定理

从前面的表格可以看到，像 $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$ 、 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 、 $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ 、 A^μ 这样具有 1 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在 CPT 变换下得到一个负号，即 CPT 相位因子为奇

另一方面，像 $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$ 、 $i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$ 、 $\bar{\psi} \psi$ 、 $\bar{\psi} i \gamma^5 \psi$ 、 $\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$ 、 $F^{\mu\nu}$ 、 $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 这样具有 0 个或 2 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在 CPT 变换下得到一个正号，即 CPT 相位因子为偶

这种情况下，可以对量子场选取适当的 C 、 P 、 T 相位因子，使得由各种量子场和时空导数构成的厄米算符在 CPT 变换下的奇偶性与算符中未缩并 Lorentz 指标个数的奇偶性相同。

即具有奇(偶)数个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符的 CPT 相位因子为奇(偶)

CPT 定理

从前面的表格可以看到，像 $i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$ 、 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 、 $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ 、 A^μ 这样具有 1 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在 CPT 变换下得到一个负号，即 CPT 相位因子为奇

另一方面，像 $(\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi$ 、 $\phi^\dagger \phi$ 、 $i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$ 、 $\bar{\psi} \psi$ 、 $\bar{\psi} i \gamma^5 \psi$ 、 $\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$ 、 $F^{\mu\nu}$ 、 $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 这样具有 0 个或 2 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在 CPT 变换下得到一个正号，即 CPT 相位因子为偶。

这种情况下，可以对量子场选取适当的 C 、 P 、 T 相位因子，使得由各种量子场和时空导数构成的厄米算符在 CPT 变换下的奇偶性与算符中末缩并 Lorentz 指标个数的奇偶性相同

即具有奇(偶)数个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符的 CPT 相位因子为奇(偶)

💡 在相对论性的局域量子场论里，拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 是一个厄米的 Lorentz 标量，必须由不携带末缩并 Lorentz 指标的厄米算符构成，因此 $\mathcal{L}(x)$ 的 CPT 相位因子为偶，即 $\mathcal{L}(x)$ 在 CPT 变换下不变，这就是 CPT 定理

CPT 定理的准确表述



CPT 定理的准确表述如下

CPT 定理



如果一个局域量子场论由一个在固有保时向 Lorentz 变换下不变的厄米拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 描述，而且场的量子化遵循自旋—统计定理，那么 $\mathcal{L}(x)$ 在 CPT 变换下不变，满足

$$\Theta^{-1} \mathcal{L}(x) \Theta = +\mathcal{L}(-x)$$



拉氏量的 CPT 不变性意味着作用量、场的运动方程和哈密顿量 H 都在 CPT 变换下不变，有

$$\Theta^{-1} H(t) \Theta = +H(-t)$$



因而理论具有 ***CPT*** 对称性

时间演化算符的 CPT 变换



在相互作用绘景中, CPT 对称性意味着相互作用哈密顿量 H_1 满足

$$\Theta^{-1} H_1(t) \Theta = +H_1(-t)$$



注意到 Θ 算符是反线性的，时间演化算符 $U(t, t_0)$ 的 CPT 变换为

$$\begin{aligned}\Theta^{-1} U(t, t_0) \Theta &= \Theta^{-1} \mathsf{T} \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt H_1(t) \right] \Theta = \mathsf{T} \exp \left[i \int_{t_0}^t dt \Theta^{-1} H_1(t) \Theta \right] \\ &= \mathsf{T} \exp \left[i \int_{t_0}^t dt H_1(-t) \right] = \mathsf{T} \exp \left[-i \int_{-t_0}^{-t} dt H_1(t) \right] = U(-t, -t_0)\end{aligned}$$



倒数第二步作了变量替换 $t \rightarrow -t$



从而 S 算符的 CPT 变换是

$$\Theta^{-1}S\Theta = \Theta^{-1}U(+\infty, -\infty)\Theta = U(-\infty, +\infty) = U^\dagger(+\infty, -\infty) = S^\dagger$$

CPT 对称性的推论

 **CPT** 定理的证明可追溯到 1954 年 Gerhart Lüders 和 Wolfgang Pauli 的工作

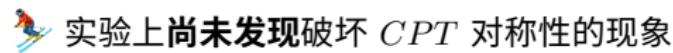


Gerhart Lüders
(1920–1995)

 由于 *CPT* 定理成立的条件在量子场论中普遍得到满足，因而 *CPT 对称性*被认为是一个广泛存在的对称性



Wolfgang Ernst Pauli (1900–1958)



 *CPT* 对称性保证正粒子和反粒子的质量和寿命完全相同，电荷等守恒荷的大小相等，符号相反

 这些结论在电荷共轭对称性遭到破坏时仍然成立，因而并不庸

CPT 对称性与粒子质量

 现在证明 CPT 对称性保证正反粒子的**质量相同**

 一个静止的 A 粒子对应的态矢是哈密顿量 H (可包含相互作用项)、自旋角动量平方 S^2 和自旋角动量第 3 分量 S^3 的共同本征态

相应本征值为 A 粒子质量 m_A 、 $s(s+1)$ 和 σ

由于 CPT 变换不改变自旋量子数 s ，下面的讨论与 s 无关

CPT 对称性与粒子质量

 现在证明 CPT 对称性保证正反粒子的 **质量相同**

 一个静止的 \mathcal{A} 粒子对应的态矢是哈密顿量 H (可包含相互作用项)、自旋角动量平方 S^2 和自旋角动量第 3 分量 S^3 的 **共同本征态**

 相应本征值为 \mathcal{A} 粒子质量 $m_{\mathcal{A}}$ 、 $s(s+1)$ 和 σ

 由于 CPT 变换不改变自旋量子数 s ，下面的讨论与 s 无关

 将这个态矢记作 $|\mathcal{A}, \sigma\rangle$ ，满足 $\langle \mathcal{A}, \sigma | \mathcal{A}, \sigma \rangle = 1$ 和

$$H |\mathcal{A}, \sigma\rangle = m_{\mathcal{A}} |\mathcal{A}, \sigma\rangle$$

 **CPT 对称性**意味着 $\Theta^{-1} H(t) \Theta = +H(-t)$ ，利用它将 \mathcal{A} 粒子质量表达为

$$m_{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}, \sigma | H | \mathcal{A}, \sigma \rangle = \langle \mathcal{A}, \sigma | \Theta^{-1} H \Theta | \mathcal{A}, \sigma \rangle$$

CPT 对称性推论：正反粒子质量相同

作为 C 、 P 和 T 的联合变换， CPT 变换将正反粒子互换，反转角动量的方向，同时保持动量不变

 **CPT 变换**将 S^3 本征值为 σ 的 \mathcal{A} 粒子转化为 S^3 本征值为 $-\sigma$ 的反粒子 $\bar{\mathcal{A}}$

相应的量子态是 $|\mathcal{A}, \sigma\rangle_\Theta \equiv \Theta |\mathcal{A}, \sigma\rangle = \chi_{\mathcal{A}} |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma\rangle$ ，其中 $\chi_{\mathcal{A}}$ 是相位因子

CPT 对称性推论：正反粒子质量相同

作为 C 、 P 和 T 的联合变换， CPT 变换将正反粒子互换，反转角动量的方向，同时保持动量不变

 **CPT 变换**将 S^3 本征值为 σ 的 A 粒子转化为 S^3 本征值为 $-\sigma$ 的反粒子 \bar{A}

相应的量子态是 $|\mathcal{A}, \sigma\rangle_{\Theta} \equiv \Theta |\mathcal{A}, \sigma\rangle = \chi_{\mathcal{A}} |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma\rangle$ ，其中 $\chi_{\mathcal{A}}$ 是相位因子

反么正的 Θ 算符满足 $\langle \Psi_1 | \Theta^\dagger \Psi_2 \rangle = \langle \Theta \Psi_1 | \Psi_2 \rangle^*$ ，因而

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} &= \langle \mathcal{A}, \sigma | \Theta^{-1} H \Theta | \mathcal{A}, \sigma \rangle = \langle \mathcal{A}, \sigma | \Theta^\dagger H | \mathcal{A}, \sigma \rangle_\Theta \\ &= {}_\Theta \langle \mathcal{A}, \sigma | H | \mathcal{A}, \sigma \rangle^*_\Theta = {}_\Theta \langle \mathcal{A}, \sigma | H | \mathcal{A}, \sigma \rangle_\Theta \end{aligned}$$

🚩 $|\bar{A}, -\sigma\rangle$ 是静止的 \bar{A} 粒子的哈密顿量本征态，本征值为 \bar{A} 粒子质量 $m_{\bar{A}}$ ，故

$$m_{\bar{\mathcal{A}}} = \langle \bar{\mathcal{A}}, -\sigma | H | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle = |\chi_{\mathcal{A}}|^2 {}_\Theta \langle \mathcal{A}, \sigma | H | \mathcal{A}, \sigma \rangle_\Theta = {}_\Theta \langle \mathcal{A}, \sigma | H | \mathcal{A}, \sigma \rangle_\Theta = m_{\mathcal{A}}$$

这样就证明了反粒子 \bar{A} 与正粒子 A 的质量相同

微扰论最低阶衰变宽度

接下来在 [微扰论最低阶](#) 证明 CPT 对称性保证正反粒子的寿命相同

■ 考慮哈密頓量的相互作用部分包含兩個成分

其中主要成分 H_s 描述较强的相互作用，如强相互作用

而微扰成分 H_w 描述引起衰变的较弱相互作用，如电磁或弱相互作用

⌚ **CPT 对称性**意味着 $\Theta^{-1}H_s(t)\Theta = H_s(-t)$ 和 $\Theta^{-1}H_w(t)\Theta = H_w(-t)$

微扰论最低阶衰变宽度

接下来在微扰论最低阶证明 CPT 对称性保证正反粒子的寿命相同

■ 考虑哈密顿量的相互作用部分包含两个成分

其中主要成分 H_s 描述较强的相互作用，如强相互作用

而微扰成分 H_w 描述引起衰变的较弱相互作用，如电磁或弱相互作用。

⌚ **CPT 对称性**意味着 $\Theta^{-1} H_s(t) \Theta = H_s(-t)$ 和 $\Theta^{-1} H_w(t) \Theta = H_w(-t)$

考慮在 $t = 0$ 時刻靜止的 A 粒子發生衰變過程 $A \rightarrow f$

靶 f 代表所有可能的衰变末态，描述 A 粒子的态矢 $|A, \sigma\rangle$ 是 H_s 的本征态

在 H_w 的最低阶, \mathcal{A} 粒子的衰变宽度表达为

$$\Gamma_{\mathcal{A}} = 2\pi \sum_f \delta(E_{\mathcal{A}} - E_f) |\langle f | U(+\infty, 0) H_w(0) | \mathcal{A}, \sigma \rangle|^2$$

其中 $E_A = m_A$, E_f 是末态 f 中所有粒子的能量之和

时间演化算符 $U(+\infty, 0)$ 只用 H_s 定义

反粒子衰变宽度

相应地，反粒子 \bar{A} 的衰变过程是 $\bar{A} \rightarrow \bar{f}$

末态 \bar{f} 中的粒子都是 f 中的反粒子，态矢 $|\bar{A}, \sigma\rangle$ 也是 H_s 的本征态

✓ $\bar{\Lambda}$ 粒子的衰变宽度为

$$\Gamma_{\bar{\mathcal{A}}} = 2\pi \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) |\langle \bar{f} | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, \sigma \rangle|^2$$

 注意 \mathcal{A} 和 $\bar{\mathcal{A}}$ 的衰变宽度都不依赖于 σ 的取值

反粒子衰变宽度

相应地，反粒子 \bar{A} 的衰变过程是 $\bar{A} \rightarrow \bar{f}$

 末态 \bar{f} 中的粒子都是 f 中的反粒子，态矢 $|\bar{A}, \sigma\rangle$ 也是 H_s 的本征态

✓ $\bar{\Lambda}$ 粒子的衰变宽度为

$$\Gamma_{\bar{\mathcal{A}}} = 2\pi \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) |\langle \bar{f} | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, \sigma \rangle|^2$$

 注意 A 和 \bar{A} 的衰变宽度都不依赖于 σ 的取值

对 $|f\rangle$ 作 **CPT 变换**, 得 $|f\rangle_{\Theta} \equiv \Theta |f\rangle = \chi_f |\bar{f}\rangle$, 其中 χ_f 是相位因子

 利用 CPT 对称性, 由 $\Theta^{-1}U(t, t_0)\Theta = U(-t, -t_0)$ 推出

$$\langle f | U(+\infty, 0) H_w(0) | \mathcal{A}, \sigma \rangle = \langle f | \Theta^{-1} U(-\infty, 0) \Theta \Theta^{-1} H_w(0) \Theta | \mathcal{A}, \sigma \rangle$$

$$= \Theta \langle f | U(-\infty, 0) H_w(0) | \mathcal{A}, \sigma \rangle_{\Theta}^*$$

$$\begin{aligned} |\langle f | U(+\infty, 0) H_w(0) | \mathcal{A}, \sigma \rangle|^2 &= |\Theta \langle f | U(-\infty, 0) H_w(0) | \mathcal{A}, \sigma \rangle_\Theta^*|^2 \\ &= |\langle \bar{f} | U(-\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle|^2 \end{aligned}$$

CPT 对称性与衰变宽度

🌰 再利用 $U(-\infty, 0) = \textcolor{blue}{U}(-\infty, +\infty)U(+\infty, 0) = \textcolor{blue}{S}^\dagger U(+\infty, 0)$, 有

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mathcal{A}} &= 2\pi \sum_f \delta(E_{\mathcal{A}} - E_f) |\langle f | U(+\infty, 0) H_w(0) |\mathcal{A}, \sigma \rangle|^2 \\
 &= 2\pi \sum_f \delta(E_{\mathcal{A}} - E_f) |\langle \bar{f} | U(-\infty, 0) H_w(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left| \langle \bar{f} | \textcolor{blue}{S}^\dagger U(+\infty, 0) H_w(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle \right|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{\bar{f}} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \left| \sum_{\bar{f}'} \langle \bar{f} | S^\dagger |\bar{f}'\rangle \langle \bar{f}' | U(+\infty, 0) H_w(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle \right|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{\bar{f}, \bar{f}', \bar{f}''} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \langle \bar{f} | S^\dagger |\bar{f}'\rangle \langle \bar{f}' | U(+\infty, 0) H_w(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle \\
 &\quad \times \langle \bar{f} | S^\dagger |\bar{f}''\rangle^* \langle \bar{f}'' | U(+\infty, 0) H_w(0) |\bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle^*
 \end{aligned}$$

nock 倒数第二步插入了一组完备集 $\sum_{\bar{f}'} |\bar{f}'\rangle \langle \bar{f}'| = 1$

CPT 对称性推论：正反粒子寿命相同

注意到 S 矩阵元只在初末态能量相等时非零，且 $SS^\dagger = 1$ ，对 \bar{f} 求和的部分化为

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{f}} \delta(E_A - E_{\bar{f}}) \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}' \rangle \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}'' \rangle^* &= \sum_{\bar{f}} \delta(E_A - E_{\bar{f}}) \left(\langle \bar{f}' | S | \bar{f} \rangle \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}'' \rangle \right)^* \\ &= \delta(E_A - E_{\bar{f}'}) \langle \bar{f}' | S S^\dagger | \bar{f}'' \rangle^* = \delta(E_A - E_{\bar{f}'}) \delta_{\bar{f}' \bar{f}''} \end{aligned}$$

从而推出

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathcal{A}} &= 2\pi \sum_{\bar{f}, \bar{f}', \bar{f}''} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}}) \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}' \rangle \langle \bar{f}' | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle \\
&\quad \times \langle \bar{f} | S^\dagger | \bar{f}'' \rangle^* \langle \bar{f}'' | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle^* \\
&= 2\pi \sum_{\bar{f}', \bar{f}''} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'}) \delta_{\bar{f}', \bar{f}''} \langle \bar{f}' | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle \\
&\quad \times \langle \bar{f}'' | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle^* \\
&= 2\pi \sum_{\bar{f}'} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_{\bar{f}'}) |\langle \bar{f}' | U(+\infty, 0) H_w(0) | \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \rangle|^2 = \Gamma_{\bar{\mathcal{A}}}
\end{aligned}$$

于是，正粒子 A 与反粒子 \bar{A} 的衰变宽度相等，因而寿命相同

8.6 节 Weyl、Dirac 和 Majorana 旋量

8.6.1 小节 左手和右手 Weyl 旋量

 Dirac 旋量场和 Majorana 旋量场都可以分解为左手和右手的 Weyl 旋量场

 为了更深刻地认识旋量场，本节进一步研究 Weyl 旋量

用 $\sigma^\mu = (1, \sigma)$ 和 $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma)$ 定义 2×2 矩阵 $s^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)$

由 $(\sigma^\mu)^\dagger = \sigma^\mu$ 和 $(\bar{\sigma}^\mu)^\dagger = \bar{\sigma}^\mu$ 推出

$$(s^{\mu\nu})^\dagger = -\frac{i}{4}[(\bar{\sigma}^\nu)^\dagger(\sigma^\mu)^\dagger - (\bar{\sigma}^\mu)^\dagger(\sigma^\nu)^\dagger] = -\frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu - \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu) = \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)$$

8.6 节 Weyl、Dirac 和 Majorana 旋量

8.6.1 小节 左手和右手 Weyl 旋量

 Dirac 旋量场和 Majorana 旋量场都可以分解为左手和右手的 Weyl 旋量场

为了更深刻地认识旋量场，本节进一步研究 Weyl 旋量

用 $\sigma^\mu = (1, \sigma)$ 和 $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma)$ 定义 2×2 矩阵 $s^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)$

由 $(\sigma^\mu)^\dagger = \sigma^\mu$ 和 $(\bar{\sigma}^\mu)^\dagger = \bar{\sigma}^\mu$ 推出

$$(s^{\mu\nu})^\dagger = -\frac{i}{4}[(\bar{\sigma}^\nu)^\dagger(\sigma^\mu)^\dagger - (\bar{\sigma}^\mu)^\dagger(\sigma^\nu)^\dagger] = -\frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu - \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu) = \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)$$

从而将 Weyl 表象中的旋量表示生成元化为

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^{\mu\nu} & \\ & (s^{\mu\nu})^\dagger \end{pmatrix}$$

 也就是说， 4×4 矩阵 $S^{\mu\nu}$ 是 2×2 矩阵 $s^{\mu\nu}$ 和 $(s^{\mu\nu})^\dagger$ 的直和

因而 $s^{\mu\nu}$ 和 $(s^{\mu\nu})^\dagger$ 是两个 Lorentz 群 2 维表示的生成元

左手和右手 Weyl 旋量所处 2 维表示

对于 Lorentz 变换 Λ 的一组变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ ，用 $s^{\mu\nu}$ 生成固有保时向有限变换

$$d(\Lambda) \equiv \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}\right)$$

它属于左手 Weyl 旋量所处的 2 维表示

 相应的逆变换矩阵为 $d^{-1}(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}\right)$, 取厄米共轭, 得

$$d^{-1\dagger}(\Lambda) = \exp\left[-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(s^{\mu\nu})^\dagger\right]$$

 这是用 $(s^{\mu\nu})^\dagger$ 生成的固有保时向有限变换，属于右手 Weyl 旋量所处的 2 维表示

左手和右手 Weyl 旋量所处 2 维表示

对于 Lorentz 变换 Λ 的一组变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ ，用 $s^{\mu\nu}$ 生成固有保时向有限变换

$$d(\Lambda) \equiv \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}\right)$$

它属于左手 Weyl 旋量所处的 2 维表示

相应的逆变换矩阵为 $d^{-1}(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}\right)$ ，取厄米共轭，得

$$d^{-1\dagger}(\Lambda) = \exp\left[-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(s^{\mu\nu})^\dagger\right]$$

 这是用 $(s^{\mu\nu})^\dagger$ 生成的固有保时向有限变换，属于右手 Weyl 旋量所处的 2 维表示

于是，旋量表示的 4×4 Lorentz 变换矩阵分解为

$$D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}/2} & \\ & e^{-i\omega_{\mu\nu}(s^{\mu\nu})^\dagger/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(\Lambda) & \\ & d^{-1\dagger}(\Lambda) \end{pmatrix}$$

因此，4 维旋量表示 $\{D(\Lambda)\}$ 是 2 维表示 $\{d(\Lambda)\}$ 和 $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$ 的直和

等价表示

利用 $\sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^T$ 和 $\sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 = (\sigma^\mu)^T$ 推出

$$\begin{aligned}\sigma^2 s^{\mu\nu} \sigma^2 &= \frac{i}{4} (\sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 \bar{\sigma}^\nu \sigma^2 - \sigma^2 \sigma^\nu \sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2) \\ &= \frac{i}{4} [(\bar{\sigma}^\mu)^T (\sigma^\nu)^T - (\bar{\sigma}^\nu)^T (\sigma^\mu)^T] = -(s^{\mu\nu})^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 d(\Lambda) \sigma^2 &= \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \sigma^2 s^{\mu\nu} \sigma^2\right) = \exp\left[\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (s^{\mu\nu})^T\right] \\ &= \left[\exp\left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} s^{\mu\nu}\right) \right]^T = d^{-1T}(\Lambda)\end{aligned}$$

等价表示

利用 $\sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^T$ 和 $\sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 = (\sigma^\mu)^T$ 推出

$$\begin{aligned}\sigma^2 s^{\mu\nu} \sigma^2 &= \frac{i}{4} (\sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 \bar{\sigma}^\nu \sigma^2 - \sigma^2 \sigma^\nu \sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2) \\ &= \frac{i}{4} [(\bar{\sigma}^\mu)^T (\sigma^\nu)^T - (\bar{\sigma}^\nu)^T (\sigma^\mu)^T] = -(s^{\mu\nu})^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 d(\Lambda) \sigma^2 &= \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \sigma^2 s^{\mu\nu} \sigma^2\right) = \exp\left[\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (s^{\mu\nu})^T\right] \\ &= \left[\exp\left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} s^{\mu\nu}\right) \right]^T = d^{-1T}(\Lambda)\end{aligned}$$

 将 Pauli 矩阵 σ^2 看作一个幺正变换矩阵，满足 $(\sigma^2)^{-1} = (\sigma^2)^\dagger = \sigma^2$

 则 $d(\Lambda)$ 与 $d^{-1T}(\Lambda)$ 由一个相似变换联系起来，相似变换矩阵为 σ^2

 根据 1.4 节定义，线性表示 $\{d(\Lambda)\}$ 和 $\{d^{-1T}(\Lambda)\}$ 是等价的

 由于 $(\sigma^2)^* = -\sigma^2$, $\sigma^2 d(\Lambda) \sigma^2 = d^{-1T}(\Lambda)$ 的复共轭为 $\sigma^2 d^*(\Lambda) \sigma^2 = d^{-1\dagger}(\Lambda)$

 $\{d^*(\Lambda)\}$ 是 $\{d(\Lambda)\}$ 的复共轭表示，而线性表示 $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$ 与 $\{d^*(\Lambda)\}$ 等价

左手 Weyl 旋量



于是，左手 Weyl 旋量

$$\eta_a = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\eta'_a = [d(\Lambda)]_a{}^b \eta_b, \quad a, b = 1, 2$$



η_a 是表示 $\{d(\Lambda)\}$ 中的态

左手 Weyl 旋量

 于是，左手 Weyl 旋量

$$\eta_a = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\eta'_a = [d(\Lambda)]_a^b \eta_b, \quad a, b = 1, 2$$

 η_a 是表示 $\{d(\Lambda)\}$ 中的态

 引入反对称的二维 Levi-Civita 符号 ε^{ab} ，定义为

$$\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1, \quad \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0$$

 它与 Pauli 矩阵 σ^2 的关系是

$$\varepsilon^{ab} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} = (i\sigma^2)^{ab}$$

等价的左手 Weyl 旋量

通过 ε^{ab} 定义

$$\eta^a \equiv \varepsilon^{ab} \eta_b = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix}$$

则

$$\eta^1 = \eta_2, \quad \eta^2 = -\eta_1$$

 $\sigma^2 d(\Lambda) \sigma^2 = d^{-1T}(\Lambda)$ 等价于 $\sigma^2 d(\Lambda) = d^{-1T}(\Lambda) \sigma^2$ ，故 η^a 的 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned}\eta'^a &= \varepsilon^{ab} \eta'_b = \varepsilon^{ab} [d(\Lambda)]_b^c \eta_c = i[\sigma^2 d(\Lambda)]^{ac} \eta_c \\ &= i[d^{-1T}(\Lambda) \sigma^2]^{ac} \eta_c = [d^{-1T}(\Lambda)]^a_b \varepsilon^{bc} \eta_c\end{aligned}$$

等价的左手 Weyl 旋量

通过 ε^{ab} 定义

$$\eta^a \equiv \varepsilon^{ab} \eta_b = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix}$$

则

$$\eta^1 = \eta_2, \quad \eta^2 = -\eta_1$$

$\sigma^2 d(\Lambda) \sigma^2 = d^{-1T}(\Lambda)$ 等价于 $\sigma^2 d(\Lambda) = d^{-1T}(\Lambda) \sigma^2$ ，故 η^a 的 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned}\eta'^a &= \varepsilon^{ab} \eta'_b = \varepsilon^{ab} [d(\Lambda)]_b{}^c \eta_c = i[\sigma^2 d(\Lambda)]^{ac} \eta_c \\ &= i[d^{-1T}(\Lambda) \sigma^2]^{ac} \eta_c = [d^{-1T}(\Lambda)]^a{}_b \varepsilon^{bc} \eta_c\end{aligned}$$

即

$$\eta'^a = [d^{-1T}(\Lambda)]^a{}_b \eta^b$$

可见 η^a 是表示 $\{d^{-1T}(\Lambda)\}$ 中的态

由于这个表示等价于 $\{d(\Lambda)\}$ ， η^a 也是左手 Weyl 旋量

ε^{ab} 和 ε_{ab}

 两种左手 Weyl 旋量 η_a 与 η^a 是等价的，它们之间的关系类似于 Lorentz 逆变矢量 A^μ 与协变矢量 $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ 之间的关系

ε^{ab} 的作用类似于度规 $g_{\mu\nu}$ ，相当于 2 维旋量空间的度规，用于提升旋量指标

ε^{ab} 和 ε_{ab}

 两种左手 Weyl 旋量 η_a 与 η^a 是等价的，它们之间的关系类似于 Lorentz 逆变矢量 A^μ 与协变矢量 $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ 之间的关系

ϵ^{ab} 的作用类似于度规 $g_{\mu\nu}$ ，相当于 2 维旋量空间的度规，用于提升旋量指标

用 $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = -1$ 和 $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$ 定义 ε_{ab} ，则

$$\varepsilon_{ab} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} = (-i\sigma^2)_{ab}$$

ε_{ab} 是 ε^{ab} 的逆矩阵，满足

$$\varepsilon_{ab}\varepsilon^{bc} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \delta_a^c$$

ε^{ab} 和 ε_{ab}

 两种左手 Weyl 旋量 η_a 与 η^a 是等价的，它们之间的关系类似于 Lorentz 逆变矢量 A^μ 与协变矢量 $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ 之间的关系

 ε^{ab} 的作用类似于度规 $g_{\mu\nu}$ ，相当于 2 维旋量空间的度规，用于提升旋量指标

 用 $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = -1$ 和 $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$ 定义 ε_{ab} ，则

$$\varepsilon_{ab} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} = (-i\sigma^2)_{ab}$$

 ε_{ab} 是 ε^{ab} 的逆矩阵，满足

$$\varepsilon_{ab}\varepsilon^{bc} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \delta_a{}^c$$

 于是， $\eta^1 = \eta_2$ 和 $\eta^2 = -\eta_1$ 表明

$$\eta_a = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta^2 \\ \eta^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ab}\eta^b$$

 也就是说， ε_{ab} 用于下降旋量指标

左手 Weyl 旋量的内积

任意两个左手 Weyl 旋量 η_a 和 ζ_a 的内积

$$\eta^a \zeta_a = \varepsilon^{ab} \eta_b \zeta_a = \varepsilon_{ab} \eta^a \zeta^b$$

在固有保时向 Lorentz 变换下不变，满足

$$\eta'^a \zeta'_a = [d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)]^a{}_b \eta^b [d(\Lambda)]_a{}^c \zeta_c = \eta^b [d^{-1}(\Lambda)]_b{}^a [d(\Lambda)]_a{}^c \zeta_c = \eta^b \delta_b{}^c \zeta_c = \eta^a \zeta_a$$

 第二步用了转置性质 $[d^{-1T}(\Lambda)]^a{}_b = [d^{-1}(\Lambda)]_b{}^a$, 可见 $\eta^a \zeta_a$ 是 Lorentz 标量

左手 Weyl 旋量的内积

任意两个左手 Weyl 旋量 η_a 和 ζ_a 的内积

$$\eta^a \zeta_a = \varepsilon^{ab} \eta_b \zeta_a = \varepsilon_{ab} \eta^a \zeta^b$$

在固有保时向 Lorentz 变换下不变，满足

$$\eta'^a \zeta'_a = [d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)]^a{}_b \eta^b [d(\Lambda)]_a{}^c \zeta_c = \eta^b [d^{-1}(\Lambda)]_b{}^a [d(\Lambda)]_a{}^c \zeta_c = \eta^b \delta_b{}^c \zeta_c = \eta^a \zeta_a$$

 第二步用了转置性质 $[d^{-1T}(\Lambda)]^a{}_b = [d^{-1}(\Lambda)]_b{}^a$, 可见 $\eta^a \zeta_a$ 是 Lorentz 标量

由 $\eta^1 = \eta_2$ 、 $\eta^2 = -\eta_1$ 、 $\zeta^1 = \zeta_2$ 和 $\zeta^2 = -\zeta_1$ 得

$$\eta^a \zeta_a = \eta^1 \zeta_1 + \eta^2 \zeta_2 = \eta_2 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_2 = -\eta_2 \zeta^2 - \eta_1 \zeta^1 = -\eta_a \zeta^a$$

即参与缩并的旋量指标一升一降会多出一个负号

这种性质与 Lorentz 矢量内积 $A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$ 截然不同

原因在于旋量空间度规 ε^{ab} 是反对称的

Grassmann 数

 $\eta^a \zeta_a = -\eta_a \zeta^a$ 表明 $\eta^a \eta_a = -\eta_a \eta^a$ ，如果 η_a 和 η^a 是通常的复数，则 $\eta^a \eta_a = 0$

为了使 $\eta^a \eta_a \neq 0$, 必须要求左手 Weyl 旋量 η^a 与 η_a 反对易

即它们是 Grassmann 数，任意两个 Grassmann 数都是反对易的

 若干个 Grassmann 数的线性组合也是 Grassmann 数

因此, η_a 是 Grassmann 数意味着 $\eta^a = \varepsilon^{ab} \eta_b$ 也是 Grassmann 数

Grassmann 数

 $\eta^a \zeta_a = -\eta_a \zeta^a$ 表明 $\eta^a \eta_a = -\eta_a \eta^a$ ，如果 η_a 和 η^a 是通常的复数，则 $\eta^a \eta_a = 0$

为了使 $\eta^a \eta_a \neq 0$ ，必须要求左手 Weyl 旋量 η^a 与 η_a 反对易

 即它们是 Grassmann 数，任意两个 Grassmann 数都是反对易的

 若干个 Grassmann 数的线性组合也是 Grassmann 数

因此, η_a 是 Grassmann 数意味着 $\eta^a = \varepsilon^{ab}\eta_b$ 也是 Grassmann 数

虽然如此，Grassmann 数是反对易的 c 数，不是算符

 对 Grassmann 数表达的旋量场进行量子化，才得到旋量场算符，而 Grassmann 数的反对易性质与旋量场算符的反对易关系相匹配

Grassmann 数

 $\eta^a \zeta_a = -\eta_a \zeta^a$ 表明 $\eta^a \eta_a = -\eta_a \eta^a$ ，如果 η_a 和 η^a 是通常的复数，则 $\eta^a \eta_a = 0$

为了使 $\eta^a \eta_a \neq 0$ ，必须要求左手 Weyl 旋量 η^a 与 η_a 反对易

 即它们是 Grassmann 数，任意两个 Grassmann 数都是反对易的

 若干个 Grassmann 数的线性组合也是 Grassmann 数

因此, η_a 是 Grassmann 数意味着 $\eta^a \equiv \varepsilon^{ab} \eta_b$ 也是 Grassmann 数

 虽然如此，Grassmann 数是反对易的 c 数，不是算符

对 Grassmann 数表达的旋量场进行量子化，才得到旋量场算符，而 Grassmann 数的反对易性质与旋量场算符的反对易关系相匹配

 假设 η_a 和 ζ^a 都是 Grassmann 数，则 $\eta_a \zeta^a = -\zeta^a \eta_a$ ，相应地，将省略旋量指标的内积写成 $\eta \zeta \equiv \eta^a \zeta_a = -\eta_a \zeta^a = \zeta^a \eta_a = \zeta \eta$ ，即内积 $\eta \zeta$ 和 $\zeta \eta$ 是相等的

内积 $\eta^a \eta_a$ 有等价表达式 $\eta\eta = \eta^a \eta_a = \varepsilon_{ab} \eta^a \eta^b = -\eta^1 \eta^2 + \eta^2 \eta^1 = -2\eta^1 \eta^2$

$$= 2\eta_2\eta_1 = \eta_2\eta_1 - \eta_1\eta_2 = -\varepsilon^{ab}\eta_a\eta_b = -\eta_a\eta^a$$

左手 Weyl 旋量的复共轭

将左手 Weyl 旋量 η_a 的复共轭记为 $\eta_{\dot{a}}^\dagger = \begin{pmatrix} \eta_1^\dagger \\ \eta_2^\dagger \end{pmatrix}$

量子化之后，算符 η_a 和 η_a^\dagger 互为厄米共轭

对 $\eta'_a = [d(\Lambda)]_a^b \eta_b$ 两边取复共轭，得到 η_a^\dagger 的 Lorentz 变换

$$\eta_{\dot{a}}'^{\dagger} = [d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \eta_{\dot{b}}^{\dagger}$$

左手 Weyl 旋量的复共轭

 将左手 Weyl 旋量 η_a 的复共轭记为 $\eta_{\dot{a}}^\dagger = \begin{pmatrix} \eta_1^\dagger \\ \eta_2^\dagger \end{pmatrix}$

量子化之后，算符 η_a 和 η_a^\dagger 互为厄米共轭

对 $\eta'_a = [d(\Lambda)]_a^b \eta_b$ 两边取复共轭，得到 η_a^\dagger 的 Lorentz 变换

$$\eta_{\dot{a}}^{\prime\dagger} = [d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \eta_{\dot{b}}^\dagger$$

引进指标上带着点号的二维 Levi-Civita 符号

$$\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = (\mathrm{i}\sigma^2)^{\dot{a}\dot{b}}, \quad \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} = (-\mathrm{i}\sigma^2)_{\dot{a}\dot{b}}$$

其分量数值与 ε^{ab} 和 ε_{ab} 分别相同

定义 $\eta^{\dagger a} \equiv \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \eta_{\dot{b}}^\dagger = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^\dagger \\ \eta_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1^\dagger \\ -\eta_1^\dagger \end{pmatrix}$, 则有 $\eta^{\dagger 1} = \eta_2^\dagger$ 和 $\eta^{\dagger 2} = -\eta_1^\dagger$

右手 Weyl 旋量

 $\sigma^2 d^*(\Lambda) \sigma^2 = d^{-1\dagger}(\Lambda)$ 等价于 $\sigma^2 d^*(\Lambda) = d^{-1\dagger}(\Lambda) \sigma^2$

 故 $\eta'^{\dot{a}}$ 的 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned}\eta'^{\dagger \dot{a}} &= \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \eta'^{\dagger}_{\dot{b}} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} [d^*(\Lambda)]_{\dot{b}}^{\dot{c}} \eta'^{\dagger}_{\dot{c}} = i[\sigma^2 d^*(\Lambda)]^{\dot{a}\dot{c}} \eta'^{\dagger}_{\dot{c}} \\ &= i[d^{-1\dagger}(\Lambda) \sigma^2]^{\dot{a}\dot{c}} \eta'^{\dagger}_{\dot{c}} = [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}_{\dot{b}} \varepsilon^{\dot{b}\dot{c}} \eta'^{\dagger}_{\dot{c}}\end{aligned}$$

 即

$$\eta'^{\dagger \dot{a}} = [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}_{\dot{b}} \eta'^{\dagger \dot{b}}$$

右手 Weyl 旋量

 $\sigma^2 d^*(\Lambda) \sigma^2 = d^{-1\dagger}(\Lambda)$ 等价于 $\sigma^2 d^*(\Lambda) = d^{-1\dagger}(\Lambda) \sigma^2$

故 $\eta^{\dagger a}$ 的 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned}\eta'^{\dagger\dot{a}} &= \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\eta_{\dot{b}}'^{\dagger} = \textcolor{blue}{\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}} [d^*(\Lambda)]_{\dot{b}}^{\dot{c}}\eta_{\dot{c}}'^{\dagger} = \text{i}[\sigma^2 d^*(\Lambda)]^{\dot{a}\dot{c}}\eta_{\dot{c}}'^{\dagger} \\ &= \text{i}[d^{-1\dagger}(\Lambda)\sigma^2]^{\dot{a}\dot{c}}\eta_{\dot{c}}'^{\dagger} = [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}_{\dot{b}}\textcolor{blue}{\varepsilon^{\dot{b}\dot{c}}}\eta_{\dot{c}}'^{\dagger}\end{aligned}$$

即

$$\eta'^{\dagger \dot{a}} = [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}_{\dot{b}} \eta^{\dagger \dot{b}}$$

可见, $\eta^{\dagger a}$ 是线性表示 $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$ 中的态, 因而是右手 Weyl 旋量

由于表示 $\{d^*(\Lambda)\}$ 等价于 $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$ ， η_a^\dagger 也是右手 Weyl 旋量

因此，在这套符号约定中，不带点的旋量指标对应于左手 Weyl 旋量及其表示

而带点的旋量指标对应于右手 Weyl 旋量及其表示

右手 Weyl 旋量的内积

任意两个右手 Weyl 旋量 $\eta^{\pm\alpha}$ 和 $\zeta^{\pm\alpha}$ 的内积

$$\eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dagger \dot{a}} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \eta^{\dagger \dot{b}} \zeta^{\dagger \dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta_{\dot{b}}^{\dagger}$$

在固有保时向 Lorentz 变换下不变，满足

$$\eta_a^{\dagger\dot{a}} \zeta'^{\dagger\dot{a}} = [d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \eta_{\dot{b}}^{\dagger} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \zeta'^{\dagger\dot{c}} = \eta_{\dot{b}}^{\dagger} [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{b}}{}_{\dot{a}} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \zeta'^{\dagger\dot{c}} = \eta_{\dot{b}}^{\dagger} \delta^{\dot{b}}{}_{\dot{c}} \zeta'^{\dagger\dot{c}} = \eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta'^{\dagger\dot{a}}$$

第二步用了转置性质 $[d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}^{\dot{b}} = [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{b}}_{\dot{a}}$ ，可见 $\eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dagger \dot{a}}$ 是 Lorentz 标量

右手 Weyl 旋量的内积

任意两个右手 Weyl 旋量 $\eta^{\pm\alpha}$ 和 $\zeta^{\pm\alpha}$ 的内积

$$\eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dagger \dot{a}} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \eta^{\dagger \dot{b}} \zeta^{\dagger \dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta_{\dot{b}}^{\dagger}$$

在固有保时向 Lorentz 变换下不变，满足

$$\eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dot{c}\dagger\dot{a}} = [d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \eta_{\dot{b}}^{\dagger} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}_{\dot{c}} \zeta^{\dagger\dot{c}} = \eta_{\dot{b}}^{\dagger} [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{b}}_{\dot{a}} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}_{\dot{c}} \zeta^{\dagger\dot{c}} = \eta_{\dot{b}}^{\dagger} \delta^{\dot{b}}_{\dot{c}} \zeta^{\dagger\dot{c}} = \eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dot{c}\dagger\dot{a}}$$

第二步用了转置性质 $[d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}^{\dot{b}} = [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{b}}_{\dot{a}}$ ，可见 $\eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dagger \dot{a}}$ 是 Lorentz 标量

由 $\eta^{\dagger i} = \eta_{\dot{j}}^\dagger$ 、 $\eta^{\dagger 2} = -\eta_j^\dagger$ 、 $\zeta^{\dagger i} = \zeta_{\dot{j}}^\dagger$ 和 $\zeta^{\dagger 2} = -\zeta_j^\dagger$ 得

$$\eta_{\dot{a}}^\dagger \zeta^{\dagger \dot{a}} = \eta_{\dot{i}}^\dagger \zeta^{\dagger i} + \eta_{\dot{j}}^\dagger \zeta^{\dagger \dot{j}} = -\eta^{\dagger \dot{2}} \zeta^{\dagger i} + \eta^{\dagger i} \zeta^{\dagger \dot{2}} = -\eta^{\dagger \dot{2}} \zeta_{\dot{2}}^\dagger - \eta^{\dagger i} \zeta_{\dot{i}}^\dagger = -\eta^{\dagger \dot{a}} \zeta_{\dot{a}}^\dagger$$

即参与缩并的带点旋量指标一升一降会多出一个负号

右手 Weyl 旋量的内积

任意两个右手 Weyl 旋量 $\eta^{\pm\alpha}$ 和 $\zeta^{\pm\alpha}$ 的内积

$$\eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dagger \dot{a}} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \eta^{\dagger \dot{b}} \zeta^{\dagger \dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta_{\dot{b}}^{\dagger}$$

在固有保时向 Lorentz 变换下不变，满足

$$\eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dot{c}\dagger \dot{a}} = [d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \eta_{\dot{b}}^{\dagger} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}_{\dot{c}} \zeta^{\dot{c}\dagger} = \eta_{\dot{b}}^{\dagger} [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{b}}_{\dot{a}} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}_{\dot{c}} \zeta^{\dot{c}\dagger} = \eta_{\dot{b}}^{\dagger} \delta^{\dot{b}}_{\dot{c}} \zeta^{\dot{c}\dagger} = \eta_{\dot{a}}^{\dagger} \zeta^{\dot{a}}$$

第二步用了转置性质 $[d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} = [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}$ ，可见 $\eta_{\dot{a}}^\dagger \zeta^{\dagger \dot{a}}$ 是 Lorentz 标量

由 $\eta^{\dagger i} = \eta_{\dot{2}}^\dagger$ 、 $\eta^{\dagger 2} = -\eta_{\dot{1}}^\dagger$ 、 $\zeta^{\dagger i} = \zeta_{\dot{2}}^\dagger$ 和 $\zeta^{\dagger 2} = -\zeta_{\dot{1}}^\dagger$ 得

$$\eta_j^\dagger \zeta^{\dagger a} = \eta_j^\dagger \zeta^{\dagger i} + \eta_j^\dagger \zeta^{\dagger 2} = -\eta^{\dagger 2} \zeta^{\dagger i} + \eta^{\dagger i} \zeta^{\dagger 2} = -\eta^{\dagger 2} \zeta_2^\dagger - \eta^{\dagger i} \zeta_i^\dagger = -\eta^{\dagger a} \zeta_a^\dagger$$

即参与缩并的带点旋量指标一升一降会多出一个负号

 假设右手 Weyl 旋量 $\eta^{\dagger\dot{a}}$ 和 $\zeta_{\dot{a}}^\dagger$ 都是 Grassmann 数，则 $\eta^{\dagger\dot{a}}\zeta_{\dot{a}}^\dagger = -\zeta_{\dot{a}}^\dagger\eta^{\dagger\dot{a}}$

将省略带点旋量指标的内积写成 $\eta^\dagger \zeta^\dagger \equiv \eta_{\dot{a}}^\dagger \zeta^{\dagger \dot{a}} = -\eta^{\dagger \dot{a}} \zeta_{\dot{a}}^\dagger = \zeta_{\dot{a}}^\dagger \eta^{\dagger \dot{a}} = \zeta^\dagger \eta^\dagger$

则内积 $\eta^\dagger \zeta^\dagger$ 和 $\zeta^\dagger \eta^\dagger$ 相等

Lorentz 不变量和 Weyl 旋量算符

可以看到，只要将不带点和带点的旋量指标分别缩并完全，就得到 Lorentz 标量

 另一方面，缩并一个不带点的指标和一个带点的指标并不能得到 Lorentz 不变量

比如, $\eta^a \zeta_{\dot{a}}^\dagger$ 和 $\eta^{\dot{a}} \zeta_a$ 都不是 Lorentz 标量

Lorentz 不变量和 Weyl 旋量算符

可以看到，只要将不带点和带点的旋量指标分别缩并完全，就得到 Lorentz 标量

另一方面，缩并一个不带点的指标和一个带点的指标并不能得到 Lorentz 不变量

比如, $\eta^a \zeta_{\dot{a}}$ 和 $\eta^{\dot{a}} \zeta_a$ 都不是 Lorentz 标量

对于 Weyl 旋量算符 η_a 和 ζ_a ，有

$$(\eta\zeta)^\dagger = (\eta^a \zeta_a)^\dagger = (\zeta_a)^\dagger (\eta^a)^\dagger = \zeta_{\dot{a}}^\dagger \eta^{\dot{a}} = \zeta^\dagger \eta^\dagger$$

即 $\zeta^\dagger \eta^\dagger$ 是 $\eta \zeta$ 的厄米共轭算符

厄米共轭操作将左手和右手 Weyl 旋量算符相互转换

8.6.2 小节 Dirac 和 Majorana 旋量场的分解

依照上一小节关于旋量指标的约定，将 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 分解成左手 Weyl 旋量场 $\eta_a(x)$ 和右手 Weyl 旋量场 $\zeta^{\dagger a}(x)$ ，形式为

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \eta_a(x) \\ \zeta^{\dagger a}(x) \end{pmatrix}$$

在量子化之前， $\eta_a(x)$ 和 $\zeta^{\dagger a}(x)$ 是 Grassmann 数，因而 $\psi(x)$ 也是 Grassmann 数

这是在 8.2.1 小节中转置两个旋量场必须添加一个额外负号的原因

8.6.2 小节 Dirac 和 Majorana 旋量场的分解

依照上一小节关于旋量指标的约定，将 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 分解成左手 Weyl 旋量场 $\eta_a(x)$ 和右手 Weyl 旋量场 $\zeta^{\dagger a}(x)$ ，形式为

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \eta_a(x) \\ \zeta^{\dagger a}(x) \end{pmatrix}$$

在量子化之前， $\eta_a(x)$ 和 $\zeta^{\dagger a}(x)$ 是 Grassmann 数，因而 $\psi(x)$ 也是 Grassmann 数

这是在 8.2.1 小节中转置两个旋量场必须添加一个额外负号的原因

根据 $D(\Lambda) = \begin{pmatrix} d(\Lambda) & \\ & d^{-1\dagger}(\Lambda) \end{pmatrix}$, $\psi(x)$ 的固有保时向 Lorentz 变换表达成

$$\begin{pmatrix} \eta'_a(x') \\ \zeta'^{\dagger\dot{a}}(x') \end{pmatrix} = \psi'(x') = D(\Lambda)\psi(x) = \begin{pmatrix} [d(\Lambda)]_a{}^b \eta_b(x) \\ [d^{-1\dagger}(\Lambda)]_{\dot{b}}{}^{\dot{a}} \zeta^{\dagger\dot{b}}(x) \end{pmatrix}$$

ψ(x) 的 Dirac 共轭是 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = \begin{pmatrix} \eta_{\dot{a}}^\dagger & \zeta^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \delta^{\dot{b}}_{\dot{a}} \\ \delta_b{}^a & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix}$

Dirac 矩阵的指标形式

保持旋量指标平衡，则 Dirac 方程 $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$ 化为

$$\begin{pmatrix} -m\delta_a{}^b & i(\sigma^\mu)_{ab}\partial_\mu \\ i(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}}\partial_\mu & -m\delta^{\dot{a}}_{\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b \\ \zeta^{\dagger\dot{b}} \end{pmatrix} = 0$$

因而 Dirac 矩阵的指标形式是

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} & \end{pmatrix}$$

 注意, γ^μ 中的 γ^0 与 Dirac 共轭 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = \begin{pmatrix} \eta_a^\dagger & \zeta^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \delta^b_{\dot{a}} \\ \delta_b{}^a & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_a^\dagger \end{pmatrix}$

中的 γ^0 具有不同的指标结构

两者本质不同，有些书将后者记为 β 以示区别

σ^μ 和 $\bar{\sigma}^\mu$ 的 Lorentz 变换规则



于是, γ^μ 的 Lorentz 变换规则 $D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ 左边变成

$$\begin{aligned} & D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) \\ &= \begin{pmatrix} [d^{-1}(\Lambda)]_a{}^c & \\ & [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sigma^\mu)_{cd} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{c}\dot{d}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [d(\Lambda)]_d{}^b & \\ & [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{d}}{}_{\dot{b}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & [d^{-1}(\Lambda)]_a{}^c (\sigma^\mu)_{cd} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{d}}{}_{\dot{b}} \\ [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{c}\dot{d}} [d(\Lambda)]_d{}^b & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

右边化为

$$\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu = \begin{pmatrix} & \Lambda^\mu{}_\nu (\sigma^\nu)_{ab} \\ \Lambda^\mu{}_\nu (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{a}\dot{b}} & \end{pmatrix}$$

两相比较, 推出

$$[d^{-1}(\Lambda)]_a{}^c (\sigma^\mu)_{cd} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{d}}{}_{\dot{b}} = \Lambda^\mu{}_\nu (\sigma^\nu)_{ab}, \quad [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{c}\dot{d}} [d(\Lambda)]_d{}^b = \Lambda^\mu{}_\nu (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{a}\dot{b}}$$

这分别是 σ^μ 和 $\bar{\sigma}^\mu$ 的 Lorentz 变换规则

Lorentz 矢量 $\eta\sigma^\mu\zeta^\dagger$ 和 $\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\zeta$

 对于任意 Weyl 旋量 η 和 ζ , 定义 $\eta\sigma^\mu\zeta^\dagger \equiv \eta^a(\sigma^\mu)_{ab}\zeta^{*\dagger b}$ 和 $\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\zeta \equiv \eta^\dagger_a(\bar{\sigma}^\mu)^{ab}\zeta_b$

它们都是 Lorentz 矢量，相应的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned} \eta' \sigma^\mu \zeta'^\dagger &= [d^{-1T}(\Lambda)]^a {}_c \eta^c (\sigma^\mu)_{ab} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^b {}_d \zeta'^\dagger {}^d = \eta^c [d^{-1}(\Lambda)]_c {}^a (\sigma^\mu)_{ab} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^b {}_d \zeta'^\dagger {}^d \\ &= \eta^c \Lambda^\mu {}_\nu (\sigma^\nu)_{cd} \zeta'^\dagger {}^d = \Lambda^\mu {}_\nu \eta \sigma^\nu \zeta'^\dagger \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta'^\dagger \bar{\sigma}^\mu \zeta' &= [d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{c}} \eta_{\dot{c}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} [d(\Lambda)]_b{}^d \zeta_d = \eta_{\dot{c}}^\dagger [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{c}}{}_{\dot{a}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} [d(\Lambda)]_b{}^d \zeta_d \\ &= \eta_{\dot{c}}^\dagger \boldsymbol{\Lambda}^\mu{}_\nu (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}d} \zeta_d = \Lambda^\mu{}_\nu \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \zeta \end{aligned}$$

Lorentz 矢量 $\eta\sigma^\mu\zeta^\dagger$ 和 $\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\zeta$

 对于任意 Weyl 旋量 η 和 ζ ，定义 $\eta \sigma^\mu \zeta^\dagger \equiv \eta^a (\sigma^\mu)_{ab} \zeta^{*\dagger b}$ 和 $\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \zeta \equiv \eta^\dagger_a (\bar{\sigma}^\mu)^{ab} \zeta_b$

它们都是 Lorentz 矢量，相应的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned} \eta' \sigma^\mu \zeta'^\dagger &= [d^{-1\top}(\Lambda)]^a {}_c \eta^c (\sigma^\mu)_{ab} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^b {}_d \zeta'^\dagger = \eta^c [d^{-1}(\Lambda)]_c {}^a (\sigma^\mu)_{ab} [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^b {}_d \zeta'^\dagger \\ &= \eta^c \Lambda^\mu {}_\nu (\sigma^\nu)_{cd} \zeta'^\dagger = \Lambda^\mu {}_\nu \eta \sigma^\nu \zeta'^\dagger \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta'^\dagger \bar{\sigma}^\mu \zeta' &= [d^*(\Lambda)]_{\dot{a}}{}^{\dot{c}} \eta_{\dot{c}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} [d(\Lambda)]_b{}^d \zeta_d = \eta_{\dot{c}}^\dagger [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot{c}}{}_{\dot{a}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} [d(\Lambda)]_b{}^d \zeta_d \\ &= \eta_{\dot{c}}^\dagger \boldsymbol{\Lambda}^\mu{}_\nu (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}\dot{d}} \zeta_d = \Lambda^\mu{}_\nu \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \zeta \end{aligned}$$

由 $\sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^T$ 得 $(i\sigma^2) \sigma^\mu (i\sigma^2) = -(\bar{\sigma}^\mu)^T$ ，相应的指标形式为

$$\varepsilon^{ac}(\sigma^\mu)_{c\dot{d}}\varepsilon^{\dot{d}\dot{b}} = -[(\bar{\sigma}^\mu)^T]^{a\dot{b}} = -(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{b}a}$$

对于 Weyl 旋量场 $\eta_a(x)$ 和 $\zeta^{\dagger a}(x)$ ，有

$$\begin{aligned} [\eta^a(\sigma^\mu)_{ab}\zeta^{\dagger b}]^\dagger &= \zeta^b(\sigma^\mu)_{ba}\eta^{\dagger a} = -\eta^{\dagger a}(\sigma^\mu)_{ba}\zeta^b = -\varepsilon^{\dot{a}\dot{c}}\eta_{\dot{c}}^\dagger(\sigma^\mu)_{ba}\varepsilon^{bd}\zeta_d \\ &= \eta_{\dot{c}}^\dagger\varepsilon^{db}(\sigma^\mu)_{ba}\varepsilon^{\dot{a}\dot{c}}\zeta_d = -\eta_{\dot{c}}^\dagger(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{c}d}\zeta_d = -[\zeta_{\dot{d}}^\dagger(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{d}c}\eta_c]^\dagger \end{aligned}$$

第二步用到 Grassmann 数性质, 于是 $(\eta\sigma^\mu\zeta^\dagger)^\dagger = \zeta\sigma^\mu\eta^\dagger = -\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\zeta = -(\zeta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\eta)^\dagger$

Lorentz 张量 $\eta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\zeta$ 和 $\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\zeta^\dagger$

类似地, $\eta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\zeta \equiv \eta^a(\sigma^\mu)_{ab}(\bar{\sigma}^\nu)^{bc}\zeta_c$ 和 $\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\zeta^\dagger \equiv \eta^\dagger_a(\bar{\sigma}^\mu)^{ab}(\sigma^\nu)_{bc}\zeta^{\dagger c}$ 都是二阶 Lorentz 张量

由 $\sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 = (\sigma^\mu)^T$ 得 $(-i\sigma^2) \bar{\sigma}^\mu (-i\sigma^2) = -(\sigma^\mu)^T$ ，相应的指标形式为

$$\varepsilon_{\dot{a}\dot{c}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{c}d}\varepsilon_{db}= -[(\sigma^\mu)^T]_{\dot{a}b}=-(\sigma^\mu)_{b\dot{a}}$$

再利用 $\varepsilon_{ab}\varepsilon^{bc} = \delta_a{}^c$ 和 $\varepsilon^{ac}(\sigma^\mu)_{cd}\varepsilon^{db} = -[(\bar{\sigma}^\mu)^T]^{ab} = -(\bar{\sigma}^\mu)^{ba}$ 推出

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\dot{a}\dot{c}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}d}(\sigma^\mu)_{d\dot{e}}\varepsilon^{\dot{e}\dot{b}} &= \varepsilon_{\dot{a}\dot{c}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}d}\delta_d{}^f(\sigma^\mu)_{f\dot{e}}\varepsilon^{\dot{e}\dot{b}} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{c}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}d}\varepsilon_{dg}\varepsilon^{gf}(\sigma^\mu)_{f\dot{e}}\varepsilon^{\dot{e}\dot{b}} \\ &= (-\sigma^\nu)_{g\dot{a}}(-\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{b}g} = (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{b}g}(\sigma^\nu)_{g\dot{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{故 } [\eta^a(\sigma^\mu)_{ab}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{b}c}\zeta_c]^\dagger &= \zeta_{\dot{c}}^\dagger(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}b}(\sigma^\mu)_{ba}\eta^{\dagger a} = -\eta^{\dagger a}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}b}(\sigma^\mu)_{ba}\zeta_{\dot{c}}^\dagger \\
&= -\varepsilon^{\dot{a}\dot{d}}\eta_{\dot{d}}^\dagger(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}b}(\sigma^\mu)_{ba}\varepsilon_{\dot{c}\dot{e}}\zeta^{\dagger \dot{e}} = \eta_{\dot{d}}^\dagger\varepsilon_{\dot{e}\dot{c}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{c}b}(\sigma^\mu)_{ba}\varepsilon^{\dot{a}\dot{d}}\zeta^{\dagger \dot{e}} \\
&= \eta_{\dot{d}}^\dagger(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{d}g}(\sigma^\nu)_{g\dot{e}}\zeta^{\dagger \dot{e}} = [\zeta^e(\sigma^\nu)_{eg}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{g}d}\eta_d]^\dagger
\end{aligned}$$

即

$$(\eta \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \zeta)^\dagger = \zeta^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \eta^\dagger = \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \zeta^\dagger = (\zeta \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \eta)^\dagger$$

旋量双线性型的分解

将 Dirac 旋量双线性型分解成由 Weyl 旋量表达的 Lorentz 张量，有

$$\bar{\psi}\psi = \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_a \\ \zeta^{\dagger\dot{a}} \end{pmatrix} = \zeta^a \eta_a + \eta_{\dot{a}}^\dagger \zeta^{\dagger\dot{a}} = \color{brown}{\zeta\eta} + \color{teal}{\eta^\dagger\zeta^\dagger}$$

$$\bar{\psi} \gamma^5 \psi = \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\delta_a{}^b & \\ & \delta^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b \\ \zeta^{\dagger b} \end{pmatrix} = -\zeta^a \eta_a + \eta_{\dot{a}}^\dagger \zeta^{\dagger \dot{a}} = -\zeta \eta + \eta^\dagger \zeta^\dagger$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi} \gamma^\mu \psi &= \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \\ (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{a}b} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \\ \zeta^{\dagger\dot{b}} \end{pmatrix} = \zeta^a (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \zeta^{\dagger\dot{b}} + \eta_{\dot{a}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} \eta_b \\ &= \zeta \sigma^\mu \zeta^\dagger + \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi &= \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sigma^\mu)_{ab} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\delta_b{}^c & \\ & \delta^{\dot{b}}_{\dot{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_c \\ \zeta^{\dagger c} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sigma^\mu)_{ab} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_b \\ \zeta^{\dagger b} \end{pmatrix} = \zeta^a (\sigma^\mu)_{ab} \zeta^{\dagger b} - \eta_{\dot{a}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} \eta_b \\ &= \zeta \sigma^\mu \zeta^\dagger - \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta\end{aligned}$$

旋量双线性型的分解



还有

$$\begin{aligned}\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_a{}^b & \\ & (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b \\ \zeta^{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{2} \zeta^a (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_a{}^b \eta_b + \frac{i}{2} \eta_{\dot{a}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \zeta^{\dot{b}} \\ &= \frac{i}{2} \zeta (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \eta + \frac{i}{2} \eta^\dagger (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) \zeta^\dagger\end{aligned}$$



进一步推出

$$\bar{\psi}_R \psi_L = \frac{1}{2} \bar{\psi}(1 - \gamma^5)\psi = \zeta \eta$$

$$\bar{\psi}_L \psi_R = \frac{1}{2} \bar{\psi} (1 + \gamma^5) \psi = \eta^\dagger \zeta^\dagger$$

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L = \frac{1}{2} \bar{\psi} (\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^5) \psi = \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta$$

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_R = \frac{1}{2} \bar{\psi} (\gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5) \psi = \zeta \sigma^\mu \zeta^\dagger$$

拉氏量的分解



另一方面，自由 Dirac 旋量场的拉氏量分解为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m\delta_a{}^b & \mathrm{i}(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}\partial_\mu \\ \mathrm{i}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}\partial_\mu & -m\delta^{\dot{a}}{}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b \\ \zeta^{\dagger\dot{b}} \end{pmatrix} \\ &= -m\zeta^a\eta_a + \mathrm{i}\zeta^a(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}\partial_\mu\zeta^{\dagger\dot{b}} + \mathrm{i}\eta_{\dot{a}}^\dagger(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}\partial_\mu\eta_b - m\eta_{\dot{a}}^\dagger\zeta^{\dagger\dot{a}} \\ &= \mathrm{i}\eta^{\dagger\dot{a}}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta + \mathrm{i}\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\zeta^\dagger - m(\zeta\eta + \eta^\dagger\zeta^\dagger)\end{aligned}$$



如果质量 $m = 0$ ，则

$$\mathcal{L}_L = i\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta \quad \text{和} \quad \mathcal{L}_R = i\zeta \sigma^\mu \partial_\mu \zeta^\dagger$$

分别描述自由的左手 Weyl 旋量场 $\eta_a(x)$ 和右手 Weyl 旋量场 $\zeta^{\dot{a}}(x)$



相应的运动方程是 Weyl 方程

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta = 0, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \zeta^\dagger = 0$$

Weyl 旋量场的 C 变换

下面讨论 Weyl 旋量场的分立变换

首先，电荷共轭矩阵的指标形式为 $C = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & \\ & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}$

 将 $\psi(x)$ 的电荷共轭场 $\psi^C(x)$ 分解成 Weyl 旋量场，得到

$$\psi^C(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x) = \mathcal{C} \begin{pmatrix} \zeta^b(x) & \eta_b^\dagger(x) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & \\ & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^b(x) \\ \eta_b^\dagger(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_a(x) \\ \eta^{\dagger\dot{a}}(x) \end{pmatrix}$$

从而, Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 C 变换化为

$$\begin{pmatrix} C^{-1} \eta_a(x) C \\ C^{-1} \zeta^{\dagger \dot{a}}(x) C \end{pmatrix} = C^{-1} \psi(x) C = \zeta_C^* \psi^C(x) = \begin{pmatrix} \zeta_C^* \zeta_a(x) \\ \zeta_C^* \eta^{\dagger \dot{a}}(x) \end{pmatrix}$$

Weyl 旋量场的 C 变换

 下面讨论 Weyl 旋量场的分立变换

首先，电荷共轭矩阵的指标形式为 $C = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & \\ & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}$

 将 $\psi(x)$ 的电荷共轭场 $\psi^C(x)$ 分解成 Weyl 旋量场，得到

$$\psi^C(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x) = \mathcal{C} \begin{pmatrix} \zeta^b(x) & \eta_{\dot{b}}^\dagger(x) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & \\ & \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^b(x) \\ \eta_{\dot{b}}^\dagger(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_a(x) \\ \eta_{\dot{b}}^\dagger(x) \end{pmatrix}$$

从而, Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 C 变换化为

$$\begin{pmatrix} C^{-1} \eta_a(x) C \\ C^{-1} \zeta^{\dagger a}(x) C \end{pmatrix} = C^{-1} \psi(x) C = \zeta_C^* \psi^C(x) = \begin{pmatrix} \zeta_C^* \zeta_a(x) \\ \zeta_C^* \eta^{\dagger a}(x) \end{pmatrix}$$

即左手 Weyl 旋量场的 C 变换是

$$C^{-1}\eta_a(x)C = \zeta_C^*\zeta_a(x), \quad C^{-1}\zeta^{\dagger a}(x)C = \zeta_C^*\eta^{\dagger a}(x)$$

可见，电荷共轭变换将 η 和 ζ 相互转换。取厄米共轭，得 $C^{-1}\eta_b^\dagger(x)C = \zeta_C\zeta_b^\dagger(x)$ 及 $C^{-1}\zeta^b(x)C = \zeta_C\eta^b(x)$ ，分别与 ε^{ab} 和 ε_{ab} 缩并，推出

$$C^{-1}\eta^{\dagger\dot{a}}(x)C = \zeta_C \zeta^{\dagger\dot{a}}(x), \quad C^{-1}\zeta_a(x)C = \zeta_C \eta_a(x)$$

Weyl 旋量场的 P 变换

其次，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 P 变换表达为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P^{-1}\eta_a(x)P \\ P^{-1}\zeta^{\dagger a}(x)P \end{pmatrix} &= P^{-1}\psi(x)P = \zeta_P^*\gamma^0\psi(\mathcal{P}x) \\ &= \zeta_P^* \begin{pmatrix} \delta^{\dot{a}}_{\dot{b}} \\ \delta_a{}^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b(\mathcal{P}x) \\ \zeta^{\dagger b}(\mathcal{P}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_P^*\zeta^{\dagger a}(\mathcal{P}x) \\ \zeta_P^*\eta_a(\mathcal{P}x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

注意此处 γ^0 的指标结构与 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ 中一样

Weyl 旋量场的 P 变换

骆驼 其次，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 P 变换表达为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P^{-1}\eta_a(x)P \\ P^{-1}\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)P \end{pmatrix} &= P^{-1}\psi(x)P = \zeta_P^*\gamma^0\psi(\mathcal{P}x) \\ &= \zeta_P^* \begin{pmatrix} \delta^{\dot{a}}_b \\ \delta_a^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b(\mathcal{P}x) \\ \zeta^{\dagger\dot{b}}(\mathcal{P}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_P^*\zeta^{\dagger\dot{a}}(\mathcal{P}x) \\ \zeta_P^*\eta_a(\mathcal{P}x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

注意此处 γ^0 的指标结构与 $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ 中一样

♠ 于是得到左手 Weyl 旋量场的 P 变换

$$P^{-1}\eta_a(x)P = \zeta_P^*\zeta^{\dagger\dot{a}}(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)P = \zeta_P^*\eta_a(\mathcal{P}x)$$

♥ 也就是说，宇称变换将左手和右手 Weyl 旋量场相互转换

♣ 取厄米共轭得 $P^{-1}\eta_b^\dagger(x)P = \zeta_P\zeta^b(\mathcal{P}x)$ 和 $P^{-1}\zeta^b(x)P = \zeta_P\eta_b^\dagger(\mathcal{P}x)$

♦ 两边与 $i\sigma^2 = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = -\epsilon_{ab}$ 缩并，推出

$$P^{-1}\eta^{\dagger\dot{a}}(x)P = -\zeta_P\zeta_a(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\zeta_a(x)P = -\zeta_P\eta^{\dagger\dot{a}}(\mathcal{P}x)$$

Weyl 旋量场的 T 变换

骆驼 最后, 矩阵 $\mathcal{C}\gamma^5$ 的指标形式是 $\textcolor{red}{\mathcal{C}\gamma^5} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{ab} & \\ & -\varepsilon_{ab} \end{pmatrix}$

Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 T 变换化为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T^{-1}\eta_a(x)T \\ T^{-1}\zeta^{\dagger a}(x)T \end{pmatrix} &= T^{-1}\psi(x)T = \zeta_T^* \mathcal{C}\gamma^5 \psi(\mathcal{T}x) \\ &= \zeta_T^* \begin{pmatrix} \varepsilon^{ab} \\ -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b(\mathcal{T}x) \\ \zeta^{\dagger b}(\mathcal{T}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_T^* \eta^a(\mathcal{T}x) \\ -\zeta_T^* \zeta^{\dagger a}(\mathcal{T}x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Weyl 旋量场的 T 变换

骆驼 最后, 矩阵 $\mathcal{C}\gamma^5$ 的指标形式是 $\textcolor{red}{\mathcal{C}\gamma^5} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{ab} & \\ & -\varepsilon_{ab} \end{pmatrix}$

Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 T 变换化为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T^{-1}\eta_a(x)T \\ T^{-1}\zeta^{\dagger a}(x)T \end{pmatrix} &= T^{-1}\psi(x)T = \zeta_T^* \mathcal{C}\gamma^5 \psi(\mathcal{T}x) \\ &= \zeta_T^* \begin{pmatrix} \varepsilon^{ab} \\ -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b(\mathcal{T}x) \\ \zeta^{\dagger b}(\mathcal{T}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_T^* \eta^a(\mathcal{T}x) \\ -\zeta_T^* \zeta^{\dagger a}(\mathcal{T}x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

则左手 Weyl 旋量场的 T 变换是

$$T^{-1} \eta_a(x) T = \zeta_T^* \eta^a(\mathcal{T}x), \quad T^{-1} \zeta^{\dagger a}(x) T = -\zeta_T^* \zeta_{\dot{a}}^\dagger(\mathcal{T}x)$$

取厄米共轭，有 $T^{-1}\eta_b^\dagger(x)T = \zeta_T\eta^{\dagger b}(\mathcal{T}x)$ 和 $T^{-1}\zeta^b(x)T = -\zeta_T\zeta_b(\mathcal{T}x)$

与 $i\sigma^2 = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} = -\varepsilon_{ab} = \varepsilon^{ab}$ 缩并, 得

$$T^{-1} \eta^{\dagger a}(x) T = -\zeta_T \eta_{\dot{a}}^\dagger(\mathcal{T}x), \quad T^{-1} \zeta_a(x) T = \zeta_T \zeta^a(\mathcal{T}x)$$

Majorana 旋量场的分解

下面讨论 Majorana 旋量场, Majorana 条件意味着 $\begin{pmatrix} \eta_a \\ \zeta^{\dagger a} \end{pmatrix} = \psi = \mathcal{C}\bar{\psi}^T = \begin{pmatrix} \zeta_a \\ \eta^{\dagger a} \end{pmatrix}$

即 $\eta = \zeta$ ，这表明 Majorana 旋量场中的左手和右手 Weyl 旋量场是相关的。

因此，可以将 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 分解成 $\psi(x) = \begin{pmatrix} \eta_a(x) \\ \eta^{\dagger a}(x) \end{pmatrix}$

Majorana 旋量场的分解

下面讨论 Majorana 旋量场, Majorana 条件意味着 $\begin{pmatrix} \eta_a \\ \zeta^{\dagger a} \end{pmatrix} = \psi = \mathcal{C}\bar{\psi}^T = \begin{pmatrix} \zeta_a \\ \eta^{\dagger a} \end{pmatrix}$

即 $\eta = \zeta$ ，这表明 Majorana 旋量场中的左手和右手 Weyl 旋量场是相关的。

因此，可以将 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 分解成 $\psi(x) = \begin{pmatrix} \eta_a(x) \\ \eta^{\dagger a}(x) \end{pmatrix}$

而自由 Majorana 旋量场的拉氏量分解为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \bar{\psi} (\mathrm{i} \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m \delta_a{}^b & \mathrm{i}(\sigma^\mu)_{\dot{a}\dot{b}} \partial_\mu \\ \mathrm{i}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} \partial_\mu & -m \delta^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b \\ \eta^{\dagger b} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [\mathrm{i} \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta + \mathrm{i} \eta \sigma^\mu \partial_\mu \eta^\dagger - m(\eta \eta + \eta^\dagger \eta^\dagger)]\end{aligned}$$

⑧ 利用 $\zeta\sigma^\mu\eta^\dagger = -\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\zeta$ 将方括号中第二项化为

$$i\eta\sigma^\mu\partial_\mu\eta^\dagger = i\partial_\mu(\eta\sigma^\mu\eta^\dagger) - i(\partial_\mu\eta)\sigma^\mu\eta^\dagger = i\partial_\mu(\eta\sigma^\mu\eta^\dagger) + i\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta$$

扔掉全散度项 $i\partial_\mu(\eta\sigma^\mu\eta^\dagger)$ ，拉氏量变成

$$\mathcal{L} = i\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta - \frac{1}{2} m(\eta\eta + \eta^\dagger\eta^\dagger)$$

Majorana 旋量场的 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 和 $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$

 $\zeta \sigma^\mu \eta^\dagger = -\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \zeta$ 、 $\eta \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \zeta = \zeta \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \eta$ 和 $\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \zeta^\dagger = \zeta^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \eta^\dagger$ 意味着

$$\eta \sigma^\mu \eta^\dagger = -\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta, \quad \eta \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \eta = \eta \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \eta, \quad \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \eta^\dagger = \eta^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \eta^\dagger$$

对于 Majorana 旋量场, $\eta = \zeta$, $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \zeta \sigma^\mu \zeta^\dagger + \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta$ 化为

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \eta \sigma^\mu \eta^\dagger + \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta = -\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta + \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta = 0$$

$$\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi = \frac{i}{2} \zeta (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \eta + \frac{i}{2} \eta^\dagger (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) \zeta^\dagger$$

化为

$$\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi = \frac{i}{2} (\eta \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \eta - \eta \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \eta) + \frac{i}{2} (\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \eta^\dagger - \eta^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \eta^\dagger) = 0$$

这样就验证了 8.2.2 小节的结论

8.7 节 Majorana 旋量场相关 Feynman 规则

6.1.1 小节提到，由于 Dirac 旋量场可以携带某种 $U(1)$ 荷，相应费米子线上的箭头代表 $U(1)$ 荷流动的方向，或者说费米子数流动的方向

另一方面，Majorana 旋量场不能携带任何 $U(1)$ 荷，不存在费米子数流动的方向，相应的费米子线则不应该具备箭头

如果相互作用过程涉及到 Majorana 旋量场与 Dirac 旋量场的耦合，带箭头与不带箭头的费米子线将在顶点处交汇，导致费米子数破坏 (fermion-number violation)

我们需要研究适用于这种情况的 Feynman 规则

本节讨论一个简单例子，更一般的情况可参考文献

- A. Denner, H. Eck, O. Hahn, and J. Kublbeck, “Feynman rules for fermion number violating interactions,” Nucl. Phys. B 387 (1992) 467–481

8.7.1 小节 拉氏量和 CP 对称性

 考虑复标量场 $\phi(x)$ 、Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 和 Majorana 旋量场 $\chi(x)$ 构成拉氏量

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_\psi) \psi + \frac{1}{2} \bar{\chi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_\chi) \chi + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

相互作用拉氏量为 $\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \kappa^* \phi \bar{\psi} P_L \chi$

 κ 是一个复耦合常数， \mathcal{L}_{int} 是厄米的，因为 \mathcal{L}_{int} 中两项互为厄米共轭，

$$(\kappa \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi)^\dagger = \kappa^* \psi^\dagger P_R \gamma^0 \chi = \kappa^* \psi^\dagger \gamma^0 P_L \chi = \kappa^* \phi \bar{\psi} P_L \chi$$

 这样的相互作用涉及一个标量场和两个旋量场，属于 Yukawa 相互作用

8.7.1 小节 拉氏量和 CP 对称性

 考虑复标量场 $\phi(x)$ 、Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 和 Majorana 旋量场 $\chi(x)$ 构成拉氏量

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi + \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m_\psi)\psi + \frac{1}{2} \bar{\chi}(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m_\chi)\chi + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

相互作用拉氏量为 $\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \kappa^* \phi \bar{\psi} P_L \chi$

 κ 是一个复耦合常数， \mathcal{L}_{int} 是厄米的，因为 \mathcal{L}_{int} 中两项互为厄米共轭，

$$(\kappa \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi)^\dagger = \kappa^* \psi^\dagger P_R \gamma^0 \chi = \kappa^* \psi^\dagger \gamma^0 P_L \chi = \kappa^* \phi \bar{\psi} P_L \chi$$

 这样的相互作用涉及一个标量场和两个旋量场，属于 Yukawa 相互作用

 作 $U(1)$ 整体变换 $\phi'(x) = e^{iq\theta}\phi(x)$ 和 $\psi'(x) = e^{iq\theta}\psi(x)$ ，则拉氏量 \mathcal{L} 不变

可见，这个理论具有一个 $U(1)$ 整体对称性，而复标量场 $\phi(x)$ 和 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 $U(1)$ 荷相同，均为 q

 将耦合常数分解为实部和虚部， $\kappa = \kappa_R + i\kappa_I$ ，则相互作用拉氏量化为

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa_{\text{R}} (\phi^\dagger \bar{\chi} P_{\text{R}} \psi + \phi \bar{\psi} P_{\text{L}} \chi) + \kappa_{\text{I}} (\text{i} \phi^\dagger \bar{\chi} P_{\text{R}} \psi - \text{i} \phi \bar{\psi} P_{\text{L}} \chi)$$

C 破坏和 P 破坏

犛 假设三个量子场的 C、P 变换为

$$C^{-1}\phi(x)C = \eta_C^*\phi^\dagger(x), \quad C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^*\mathcal{C}\bar{\psi}^T(x), \quad C^{-1}\chi(x)C = \tilde{\zeta}_C^*\chi(x)$$

$$P^{-1}\phi(x)P = \eta_P^*\phi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\psi(x)P = \zeta_P^*\gamma^0\psi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\chi(x)P = \tilde{\zeta}_P^*\gamma^0\chi(\mathcal{P}x)$$

🚧 推出算符 $\phi^\dagger\bar{\chi}P_R\psi$ 的 C、P 变换

$$C^{-1}\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_R\psi(x)C = \eta_C\zeta_C^*\tilde{\zeta}_C\phi(x)\bar{\psi}(x)P_R\chi(x)$$

$$P^{-1}\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_R\psi(x)P = \eta_P\zeta_P^*\tilde{\zeta}_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\bar{\chi}(\mathcal{P}x)P_L\psi(\mathcal{P}x)$$

แดง 而算符 $\phi\bar{\psi}P_L\chi$ 的 C、P 变换为

$$C^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_L\chi(x)C = \eta_C^*\zeta_C\tilde{\zeta}_C^*\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_L\psi(x)$$

$$P^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_L\chi(x)P = \eta_P^*\zeta_P\tilde{\zeta}_P^*\phi(\mathcal{P}x)\bar{\psi}(\mathcal{P}x)P_R\chi(\mathcal{P}x)$$

C 破坏和 P 破坏

⚡ 假设三个量子场的 C、P 变换为

$$C^{-1}\phi(x)C = \eta_C^*\phi^\dagger(x), \quad C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^*\mathcal{C}\bar{\psi}^T(x), \quad C^{-1}\chi(x)C = \tilde{\zeta}_C^*\chi(x)$$

$$P^{-1}\phi(x)P = \eta_P^*\phi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\psi(x)P = \zeta_P^*\gamma^0\psi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\chi(x)P = \tilde{\zeta}_P^*\gamma^0\chi(\mathcal{P}x)$$

🚧 推出算符 $\phi^\dagger\bar{\chi}P_R\psi$ 的 C、P 变换

$$C^{-1}\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_R\psi(x)C = \eta_C\zeta_C^*\tilde{\zeta}_C\phi(x)\bar{\psi}(x)P_R\chi(x)$$

$$P^{-1}\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_R\psi(x)P = \eta_P\zeta_P^*\tilde{\zeta}_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\bar{\chi}(\mathcal{P}x)P_L\psi(\mathcal{P}x)$$

💣 而算符 $\phi\bar{\psi}P_L\chi$ 的 C、P 变换为

$$C^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_L\chi(x)C = \eta_C^*\zeta_C\tilde{\zeta}_C^*\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_L\psi(x)$$

$$P^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_L\chi(x)P = \eta_P^*\zeta_P\tilde{\zeta}_P^*\phi(\mathcal{P}x)\bar{\psi}(\mathcal{P}x)P_R\chi(\mathcal{P}x)$$

💣 无论作 **C** 变换还是 **P** 变换，相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_{int} = \kappa\phi^\dagger\bar{\chi}P_R\psi + \kappa^*\phi\bar{\psi}P_L\chi$ 都不能保持不变，因此理论**不具有**电荷共轭对称性和空间反射对称性

💥 换言之，这个理论既**C 破坏** (C-violation) 的，又是 **P 破坏** (P-violation) 的

CP 破坏?

进一步，算符 $\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi$ 和 $\phi \bar{\psi} P_L \chi$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1} \phi^\dagger(x) \bar{\chi}(x) P_R \psi(x) CP = \eta_{CP} \phi(\mathcal{P}x) \bar{\psi}(\mathcal{P}x) P_L \chi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \phi(x) \bar{\psi}(x) P_L \chi(x) CP = \eta_{CP}^* \phi^\dagger(\mathcal{P}x) \bar{\chi}(\mathcal{P}x) P_R \psi(\mathcal{P}x)$$

如果适当选取相位因子的值，使得 $\eta_{CP} = \eta_{CP}^* = +1$

则算符 $\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \phi \bar{\psi} P_L \chi$ 在 CP 变换下不变

而相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_{int} = \kappa_R (\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \phi \bar{\psi} P_L \chi) + \kappa_I (i\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi - i\phi \bar{\psi} P_L \chi)$ 中 κ_R 对应的项具有 CP 对称性， κ_I 对应的项引起 CP 破坏 (CP-violation)

CP 破坏?

进一步，算符 $\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi$ 和 $\phi \bar{\psi} P_L \chi$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1} \phi^\dagger(x) \bar{\chi}(x) P_R \psi(x) CP = \eta_{CP} \phi(\mathcal{P}x) \bar{\psi}(\mathcal{P}x) P_L \chi(\mathcal{P}x)$$

$$(CP)^{-1} \phi(x) \bar{\psi}(x) P_L \chi(x) CP = \eta_{CP}^* \phi^\dagger(\mathcal{P}x) \bar{\chi}(\mathcal{P}x) P_R \psi(\mathcal{P}x)$$

如果适当选取相位因子的值，使得 $\eta_{CP} = \eta_{CP}^* = +1$

则算符 $\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \phi \bar{\psi} P_L \chi$ 在 CP 变换下不变

而相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_{int} = \kappa_R (\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \phi \bar{\psi} P_L \chi) + \kappa_I (i\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi - i\phi \bar{\psi} P_L \chi)$ 中 κ_R 对应的项具有 CP 对称性， κ_I 对应的项引起 CP 破坏 (CP-violation)

如果相位因子的取值使得 $\eta_{CP} = \eta_{CP}^* = -1$

则算符 $i\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi - i\phi \bar{\psi} P_L \chi$ 在 CP 变换下不变

而 κ_I 对应的项具有 CP 对称性， κ_R 对应的项引起 CP 破坏

因此，当 $\kappa_R \neq 0$ 且 $\kappa_I \neq 0$ 时，相互作用拉氏量 \mathcal{L}_{int} 看起来会破坏 CP 对称性

CP 对称性

 不过，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 是复的量子场，即 Hilbert 空间中的非自共轭算符，它的相位具有任意性，可用于吸收耦合常数 $\kappa \equiv |\kappa|e^{-i\varphi}$ 的相位 φ

 如果将 Dirac 旋量场重新定义为 $\psi'(x) = e^{-i\varphi}\psi(x)$ ，则 $\bar{\psi}'(x) = e^{i\varphi}\bar{\psi}(x)$ ，于是 $\mathcal{L}_{int} = |\kappa|e^{-i\varphi} \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + |\kappa|e^{i\varphi} \phi \bar{\psi} P_L \chi = |\kappa|(\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi' + \phi \bar{\psi}' P_L \chi)$ 描述同一个理论

 但此时耦合常数 $|\kappa|$ 是实数，不会引起 CP 破坏

！ 因此，这个理论实际上是具有 CP 对称性的

!! 当一个理论中所有复耦合常数的相位不能完全被复场吸收时，才会出现 CP 破坏

CP 对称性

🦒 不过，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 是复的量子场，即 Hilbert 空间中的非自共轭算符，它的相位具有任意性，可用于吸收耦合常数 $\kappa \equiv |\kappa|e^{-i\varphi}$ 的相位 φ

⚙️ 如果将 Dirac 旋量场重新定义为 $\psi'(x) = e^{-i\varphi}\psi(x)$ ，则 $\bar{\psi}'(x) = e^{i\varphi}\bar{\psi}(x)$ ，于是 $\mathcal{L}_{\text{int}} = |\kappa|e^{-i\varphi} \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + |\kappa|e^{i\varphi} \phi \bar{\psi} P_L \chi = |\kappa|(\phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi' + \phi \bar{\psi}' P_L \chi)$ 描述同一个理论

⚖️ 但此时耦合常数 $|\kappa|$ 是实数，不会引起 CP 破坏

❗ 因此，这个理论实际上是具有 CP 对称性的

❗❗ 当一个理论中所有复耦合常数的相位不能完全被复场吸收时，才会出现 CP 破坏

🔩 另一方面，像实标量场、实矢量场和 Majorana 旋量场这样的实场必须满足自共轭条件，这导致它不具有相位任意性

⌚ 在下面的讨论中，不失一般性，将耦合常数 κ 取为实数，相互作用拉氏量表达为

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa(\phi^\dagger \bar{\chi} \Gamma_1 \psi + \phi \bar{\psi} \Gamma_2 \chi)$$

⌚ 这里引入了 $\Gamma_1 = P_R$ 和 $\Gamma_2 = P_L$ ，下面许多结论与 Γ_1 和 Γ_2 的具体形式无关

8.7.2 小节 Feynman 规则



将 Dirac 旋量场、复标量场和 Majorana 旋量场的平面波展开式表达为

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [u(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}]$$

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (c_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + d_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x})$$

$$\chi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [u(\mathbf{p}, \lambda) f_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) f_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}]$$



相应地，引入以下单粒子态，

$$\text{Dirac 正费米子 } \psi \text{ 的单粒子态 } |\mathbf{p}^+, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle$$

$$\text{Dirac 反费米子 } \bar{\psi} \text{ 的单粒子态 } |\mathbf{p}^-, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle$$

$$\text{正标量玻色子 } \phi \text{ 的单粒子态 } |\mathbf{p}^+\rangle = \sqrt{2E_p} c_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$$

$$\text{反标量玻色子 } \bar{\phi} \text{ 的单粒子态 } |\mathbf{p}^-\rangle = \sqrt{2E_p} d_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$$

$$\text{Majorana 费米子 } \chi \text{ 的单粒子态 } |\mathbf{p}, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} f_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger |0\rangle$$



注意，Majorana 费米子 χ 是纯中性的，动量记号的右上角没有正负号

S 算符 $n = 1$ 阶

Dirac 旋量场和复标量场与初末态的缩并结果见第 6 章

Majorana 旋量场与初末态的缩并定义为

$$\langle 0 | \overline{\chi(x)} | \mathbf{p}, \lambda \rangle \equiv \langle 0 | \chi^{(+)}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i\mathbf{p} \cdot x}$$

$$\langle 0 | \overline{\bar{\chi}(x)} | \mathbf{p}, \lambda \rangle \equiv \langle 0 | \bar{\chi}^{(+)}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i\mathbf{p} \cdot x}$$

$$\langle \mathbf{p}, \lambda | \overline{\bar{\chi}}(x) | 0 \rangle \equiv \langle \mathbf{p}, \lambda | \bar{\chi}^{(-)}(x) | 0 \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) e^{i\mathbf{p} \cdot x}$$

$$\langle \mathbf{p}, \lambda | \overline{\chi}(x) | 0 \rangle \equiv \langle \mathbf{p}, \lambda | \chi^{(-)}(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{i\mathbf{p} \cdot x}$$

$\psi \rightarrow \chi\phi$ 衰变过程

老虎 考虑 $\psi \rightarrow \chi\phi$ 衰变, 初末态为 $|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle$ 和 $|\mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+\rangle$, $iT_1^{(1)}$ 贡献的散射矩阵元是

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | iT_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | N[\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_1\psi(x)] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\ &= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | N[\overline{\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_1\psi(x)}] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\ &= i\kappa \int d^4x \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\ &= i\kappa \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q - k)\end{aligned}$$

房子 这是计算散射矩阵元的第一种方法, 与 6.1 节介绍的方法一样

$\psi \rightarrow \chi\phi$ 衰变过程

考虑 $\psi \rightarrow \chi\phi$ 衰变，初末态为 $|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle$ 和 $|\mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+\rangle$ ， $iT_1^{(1)}$ 贡献的散射矩阵元是

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | iT_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | N[\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_1\psi(x)] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\ &= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | N[\overline{\phi^\dagger(x)}\overline{\bar{\chi}(x)}\Gamma_1\overline{\psi(x)}] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\ &= i\kappa \int d^4x \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda')\Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\ &= i\kappa \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda')\Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q - k)\end{aligned}$$

这是计算散射矩阵元的第一种方法，与 6.1 节介绍的方法一样

利用电荷共轭变换，可以引进第二种计算方法

将相互作用算符 $\bar{\chi}\Gamma_1\psi$ 化为

$$\begin{aligned}\bar{\chi}\Gamma_1\psi &= (\bar{\chi}\Gamma_1\psi)^T = -\psi^T\Gamma_1^T\bar{\chi}^T = -\psi^T\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\Gamma_1^T\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\bar{\chi}^T \\ &= \psi^T\mathcal{C}\mathcal{C}\Gamma_1^T\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\bar{\chi}^T = \bar{\psi}^C\Gamma_1^C\chi^C\end{aligned}$$

同理推出 $\bar{\psi}\Gamma_2\chi = \bar{\chi}^C\Gamma_2^C\psi^C$

第二种计算方法

通过 Majorana 条件 $\chi = \chi^C$ 将 $\bar{\chi}\Gamma_1\psi = \bar{\psi}^C\Gamma_1^C\chi^C$ 和 $\bar{\psi}\Gamma_2\chi = \bar{\chi}^C\Gamma_2^C\psi^C$ 化为

$$\bar{\chi}\Gamma_1\psi = \bar{\psi}^C\Gamma_1^C\chi, \quad \bar{\psi}\Gamma_2\chi = \bar{\chi}^C\Gamma_2^C\psi^C$$

从而将 $iT_1^{(1)}$ 和 $iT_2^{(1)}$ 改写为

$$iT_1^{(1)} = i\kappa \int d^4x N[\phi^\dagger(x) \bar{\chi}(x) \Gamma_1 \psi(x)] = i\kappa \int d^4x N[\phi^\dagger(x) \bar{\psi}^C(x) \Gamma_1^C \chi(x)]$$

$$iT_2^{(1)} = i\kappa \int d^4x N[\phi(x) \bar{\psi}(x) \Gamma_2 \chi(x)] = i\kappa \int d^4x N[\phi(x) \bar{\chi}(x) \Gamma_2^C \psi^C(x)]$$

注意，此时旋量场算符排列的次序与原来相反

现在， $iT_1^{(1)}$ 贡献的 $\psi \rightarrow \chi\phi$ 散射矩阵元也可以表达成

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | iT_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\ &= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | N[\phi^\dagger(x) \bar{\psi}_a^C(x) (\Gamma_1^C)_{ab} \chi_b(x)] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\ &= -i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | \phi^{\dagger(-)}(x) \chi_b^{(-)}(x) (\Gamma_1^C)_{ab} \bar{\psi}_a^{C(+)}(x) | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \end{aligned}$$

电荷共轭场 $\psi^C(x)$ 的平面波展开和初末态缩并

 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的电荷共轭场 $\psi^C(x)$ 的平面波展开式是

$$\begin{aligned}\psi^C(x) &= \mathcal{C}\bar{\psi}^T = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} \left[\mathcal{C}\bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \mathcal{C}\bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [\bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x}]\end{aligned}$$

 跟 $\psi(x)$ 展开式的差异只在于 a 与 b 互换，相应 Dirac 共轭的展开式为

$$\bar{\psi}^C(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda} [\bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x}]$$

 据此，将电荷共轭场 $\psi^C(x)$ 和 $\bar{\psi}^C(x)$ 与初末态的缩并定义成

$$\langle 0 | \overline{\psi^C(x)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \equiv \langle 0 | \psi^{C(+)}(x) | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x}$$

$$\langle 0 | \overline{\bar{\psi}^C(x)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \equiv \langle 0 | \bar{\psi}^{C(+)}(x) | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x}$$

$$\langle \mathbf{p}^-, \lambda | \bar{\psi}^C(x) | 0 \rangle \equiv \langle \mathbf{p}^-, \lambda | \bar{\psi}^{C(-)}(x) | 0 \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

$$\langle \mathbf{p}^+, \lambda | \psi^C(x) | 0 \rangle \equiv \langle \mathbf{p}^+, \lambda | \psi^{C(-)}(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

第二种方法的计算结果



$\psi \rightarrow \chi\phi$ 散射矩阵元变成

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | iT_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= -i\kappa \int d^4x \left\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ \right| \mathcal{N}[\phi^\dagger(x) \chi_b(x) (\Gamma_1^C)_{ab} \bar{\psi}_a^C(x)] \left| \mathbf{p}^+, \lambda \right\rangle \\
&= -i\kappa \int d^4x v_b(\mathbf{q}, \lambda') (\Gamma_1^C)_{ab} \bar{v}_a(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\
&= -i\kappa \int d^4x \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\
&= -i\kappa \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q-k) \\
&= i\kappa \int d^4x \left\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ \right| \mathcal{N}[\phi^\dagger(x) \bar{\psi}_a^C(x) \Gamma_1^C \chi_a(x)] \left| \mathbf{p}^+, \lambda \right\rangle
\end{aligned}$$

第二种方法的计算结果



$\psi \rightarrow \chi\phi$ 散射矩阵元变成

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | i T_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= -i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | N[\phi^\dagger(x) \chi_b(x) (\Gamma_1^C)_{ab} \bar{\psi}_a^C(x)] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle \\
 &= -i\kappa \int d^4x v_b(\mathbf{q}, \lambda') (\Gamma_1^C)_{ab} \bar{v}_a(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\
 &= -i\kappa \int d^4x \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\
 &= -i\kappa \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q - k) \\
 &= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | N[\phi^\dagger(x) \bar{\psi}_a^C(x) \Gamma_1^C \chi_a(x)] | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle
 \end{aligned}$$

倒数第二行是第二种方法的计算结果，有

$$\begin{aligned}
 -\bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') &= -u^T(\mathbf{p}, \lambda) \mathcal{C} \Gamma_1^C \mathcal{C} \bar{u}^T(\mathbf{q}, \lambda') = u^T(\mathbf{p}, \lambda) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_1^T \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \bar{u}^T(\mathbf{q}, \lambda') \\
 &= [u^T(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^T \bar{u}^T(\mathbf{q}, \lambda')]^T = \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda)
 \end{aligned}$$

第二种方法结果与第一种方法结果 $i\kappa \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q - k)$ 相等

$\bar{\psi} \rightarrow \chi \bar{\phi}$ 衰变过程：第一种方法

另一方面，考虑 $\bar{\psi} \rightarrow \chi \bar{\phi}$ 衰变过程，初态为 $|p^-, \lambda\rangle$ ，末态为 $|q, \lambda'; k^-\rangle$

根据 $iT_2^{(1)} = i\kappa \int d^4x N[\phi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)]$ 按第一种方法计算

贡献的散射矩阵元是

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | iT_2^{(1)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle &= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | \mathbf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)] | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \\
&= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | \overline{\mathbf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\chi_b(x)]} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \\
&= -i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | \overline{\mathbf{N}[\phi(x)\chi_b(x)(\Gamma_2)_{ab}\bar{\psi}_a(x)]} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \\
&= -i\kappa \int d^4x v_b(\mathbf{q}, \lambda') (\Gamma_2)_{ab} \bar{v}_a(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\
&= -i\kappa \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_2 v(\mathbf{q}, \lambda') (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q-k)
\end{aligned}$$

$\bar{\psi} \rightarrow \chi \bar{\phi}$ 衰变过程：第二种方法

根据 $iT_2^{(1)} = i\kappa \int d^4x N[\phi(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^C\psi^C(x)]$ 按**第二种方法**计算

 $iT_2^{(1)}$ 贡献的散射矩阵元为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | iT_2^{(1)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle &= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^C\psi^C(x)] | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \\ &= i\kappa \int d^4x \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | \overline{\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^C\psi^C(x)]} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle \\ &= i\kappa \int d^4x \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_2^C u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\ &= i\kappa \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_2^C u(\mathbf{p}, \lambda) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q-k) \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda')\Gamma_2^C u(\mathbf{p}, \lambda) &= v^T(\mathbf{q}, \lambda') \mathcal{C} \Gamma_2^C \mathcal{C} \bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) = -v^T(\mathbf{q}, \lambda') \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_2^T \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) \\ &= -[v^T(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_2^T \bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda)]^T = -\bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_2 v(\mathbf{q}, \lambda')\end{aligned}$$

 两种方法的计算结果相等

费米子流方向

以上计算表明，这两种方法都是有效的，在实际计算中可采用任意一种方法。

 现在需要归纳出一套与这两种方法同时相容的 **Feynman 规则**，这样的规则将特别适用于处理 **费米子数破坏** 过程

为此，在每条连续费米子线附近添加一条带箭头的点划线，表示费米子流(fermion flow)的方向

费米子流的两种方向分别对应于上述两种计算方法

费米子流方向

以上计算表明，这两种方法都是有效的，在实际计算中可采用任意一种方法。

 现在需要归纳出一套与这两种方法同时相容的 **Feynman 规则**，这样的规则将特别适用于处理**费米子数破坏**过程

 为此，在每条连续费米子线附近添加一条带箭头的点划线，表示费米子流 (fermion flow) 的方向

费米子流的两种方向分别对应于上述两种计算方法

当费米子流方向与 Dirac 费米子线上箭头方向相同时，采用第一种计算方法

 当费米子流方向与 Dirac 费米子线上箭头方向相反时，采用与电荷共轭场有关的第二种计算方法

这样一来，两种费米子流方向是等价的，对每条连续费米子线可采取任意一种方向进行计算

位置空间外线规则

于是，位置空间中费米子的外线规则如下：带箭头的点划线表示费米子流方向

1 Dirac 正费米子 ψ 入射光线:

$$\psi, \lambda \xrightarrow[p]{\quad} x = \langle 0 | \overline{\psi(x)} | \mathbf{p}^+ , \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

$$\psi, \lambda \xrightarrow[p]{\quad} x = \langle 0 | \overline{\psi^C(x)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i p \cdot x}$$

② Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 入射光线:

$$\bar{\psi}, \lambda \xrightarrow[p]{\quad} \bullet x = \langle 0 | \bar{\psi}(x) | \overline{\mathbf{p}^-}, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

$$\bar{\psi}, \lambda \xrightarrow[p]{\quad} x = \langle 0 | \overline{\psi^C(x)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

③ Dirac 正费米子 ψ 出射光线:

$$x \bullet \overset{p}{\longrightarrow} \psi, \lambda = \langle \overline{\mathbf{p}^+}, \lambda | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

$$x \bullet \overset{p}{\longrightarrow} \psi, \lambda = \langle \overline{\mathbf{p}^+, \lambda} | \psi^C(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

位置空间外线规则

④ Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 出射光线:

$$x \bullet \overset{p}{\overrightarrow{\text{---}}} \bar{\psi}, \lambda = \langle \overline{\mathbf{p}^-}, \lambda | \psi(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

$$x \bullet \overset{p}{\overrightarrow{\psi}}, \lambda = \langle \overleftarrow{\mathbf{p}}, \lambda | \bar{\psi}^C(x) | 0 \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

⑤ Majorana 费米子 χ 入射光线:

$$\chi, \lambda \xrightarrow{p} \bullet x = \langle 0 | \overline{\chi(x)} | \mathbf{p}, \lambda \rangle = u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x}$$

$$\chi, \lambda \xrightarrow[p]{\quad} \bullet x = \langle 0 | \bar{\chi}(x) | \mathbf{p}, \lambda \rangle = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i \mathbf{p} \cdot x}$$

6 Majorana 费米子 χ 出射光线:

$$x \xrightarrow[p]{} \chi, \lambda = \langle \bar{\chi}(x) | 0 \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}$$

$$x \bullet \xrightarrow{p} \chi, \lambda = \langle \overline{\mathbf{p}}, \lambda | \chi(x) | 0 \rangle = v(\mathbf{p}, \lambda) e^{i \mathbf{p} \cdot x}$$

 Majorana 费米子线
上没有箭头, Feynman 规则依赖于费米子流方向
与动量方向之间的异同

从每条连续费米子线写出散射振幅时，总是逆着费米子流方向逐项写下费米子的贡献

第一种方法 Feynman 图

对于上述 $\psi \rightarrow \chi\phi$ 和 $\bar{\psi} \rightarrow \chi\bar{\phi}$ 过程，第一种计算方法对应于

$$\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | i T_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle = \psi, \lambda \begin{array}{c} p \\ \nearrow x \\ \searrow q \\ k \end{array} \phi$$

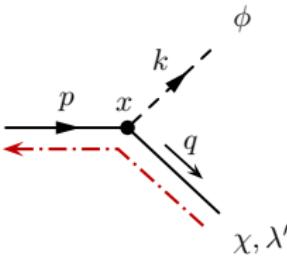
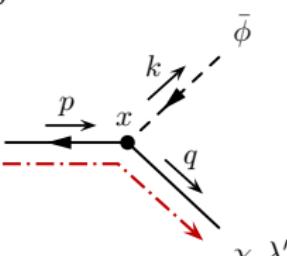
χ, λ'

$$= i\kappa \int d^4x \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k)\cdot x}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | i T_2^{(1)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle &= \bar{\psi}, \lambda \begin{array}{c} p \\ \xrightarrow{x} \\ q \end{array} \chi, \lambda' \\ &= -i\kappa \int d^4x \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_2 v(\mathbf{q}, \lambda') e^{-i(p-q-k)\cdot x} \end{aligned}$$

第二种方法 Feynman 图

第二种计算方法对应于

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ | i T_1^{(1)} | \mathbf{p}^+, \lambda \rangle &= \psi, \lambda \quad \text{---} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \phi \\ &= -i\kappa \int d^4x \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^C v(\mathbf{q}, \lambda') e^{-i(p-q-k)\cdot x} \\ \langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- | i T_2^{(1)} | \mathbf{p}^-, \lambda \rangle &= \bar{\psi}, \lambda \quad \text{---} \xleftarrow{\hspace{1cm}} \bar{\phi} \\ &= i\kappa \int d^4x \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_2^C u(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-q-k)\cdot x} \end{aligned}$$



两种方法在 Feynman 图上的差异只是费米子流方向不同，即点划线箭头方向不同

额外的负号来自两个费米子场算符的交换

位置空间顶点规则

观察各个 Feynman 图元素与振幅表达式的关系，归纳出位置空间中的顶点规则

$$= i\kappa \int d^4x \Gamma_1,$$

$$= i\kappa \int d^4x \Gamma_2$$

$$= i\kappa \int d^4x \Gamma_1^C,$$

$$= i\kappa \int d^4x \Gamma_2^C$$

Dirac 旋量场的 Feynman 传播子

研究 $i\Gamma^{(2)}$ 的散射矩阵元时可能遇到像 $N[\bar{\chi}(y)\Gamma_1 \overline{\psi(y)}\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)]$ 这样的表达式

如果采用第一种方法进行计算，则 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子在位置空间中的 Feynman 规则与 6.1.1 小节规则类似，表达为

$$x \bullet \overset{p}{\longrightarrow} \bullet y = \overline{\psi(y)}\bar{\psi}(x) = S_F(y - x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(p + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

Dirac 旋量场的 Feynman 传播子

研究 $iT^{(2)}$ 的散射矩阵元时可能遇到像 $N[\bar{\chi}(y)\Gamma_1 \overline{\psi(y)}\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)]$ 这样的表达式

如果采用第一种方法进行计算，则 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子在位置空间中的 Feynman 规则与 6.1.1 小节规则类似，表达为

$$x \xrightarrow[p]{\quad} y = \overline{\psi(y)}\bar{\psi}(x) = S_F(y-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(p+m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

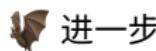
由 $\bar{\chi}\Gamma_1\psi = \bar{\psi}^C\Gamma_1^C\chi$ 和 $\bar{\psi}\Gamma_2\chi = \bar{\chi}\Gamma_2^C\psi^C$ 推出

$$\begin{aligned} N[\bar{\chi}(y)\Gamma_1 \overline{\psi(y)}\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)] &= N[\overline{\psi^C(y)}\Gamma_1^C\chi(y)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^C\psi^C(x)] \\ &= N[\bar{\chi}(x)\Gamma_2^C \overline{\psi^C(x)}\bar{\psi}^C(y)\Gamma_1^C\chi(y)] \end{aligned}$$

如果采用第二种方法进行计算，则相应的 Feynman 传播子是

$$x \xrightarrow[p]{\quad} y = \overline{\psi^C(x)}\bar{\psi}^C(y) = \langle 0 | T[\psi^C(x)\bar{\psi}^C(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | T[\mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)\psi^T(y)\mathcal{C}] | 0 \rangle$$

Majorana 旋量场的 Feynman 传播子



进一步计算得到

$$\begin{aligned}
 x \bullet \xrightarrow[p]{\quad} \bullet y &= \overline{\psi^C(x)\bar{\psi}^C(y)} = \langle 0 | T[\mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)\psi^T(y)\mathcal{C}] | 0 \rangle \\
 &= -\mathcal{C}\{\langle 0 | T[\psi(y)\bar{\psi}(x)] | 0 \rangle\}^T \mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1}[\overline{\psi(y)\bar{\psi}(x)}]^T \mathcal{C} \\
 &= \mathcal{C}^{-1}S_F^T(y-x)\mathcal{C} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{C}^{-1}i(\not{p} + m_\psi)^T \mathcal{C}}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)} \\
 &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(-\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}
 \end{aligned}$$



最后一步用到 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$

Majorana 旋量场的 Feynman 传播子

进一步计算得到

$$\begin{aligned}
 x \xrightarrow[p]{\quad} y &= \overline{\psi^C(x)\bar{\psi}^C(y)} = \langle 0 | \mathbf{T}[\mathcal{C}\bar{\psi}^T(x)\psi^T(y)\mathcal{C}] | 0 \rangle \\
 &= -\mathcal{C}\{\langle 0 | \mathbf{T}[\psi(y)\bar{\psi}(x)] | 0 \rangle\}^T \mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1}[\overline{\psi(y)\bar{\psi}(x)}]^T \mathcal{C} \\
 &= \mathcal{C}^{-1}S_F^T(y-x)\mathcal{C} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{C}^{-1}i(\not{p} + m_\psi)^T \mathcal{C}}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)} \\
 &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(-\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}
 \end{aligned}$$

最后一步用到 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C} = -\gamma^\mu$

另一方面，Majorana 旋量场的 Feynman 传播子为

$$x \xrightarrow[p]{\quad} y = \overline{\chi(y)\bar{\chi}(x)} = S_F(y-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m_\chi)}{p^2 - m_\chi^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}$$

动量空间 Feynman 规则

转换到动量空间，推出以下 Feynman 规则

① Dirac 正费米子 ψ 入射外线: $\psi, \lambda \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = u(\mathbf{p}, \lambda)$, $\psi, \lambda \xleftarrow[p]{\text{---}} \bullet = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$

② Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 入射外线: $\bar{\psi}, \lambda \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$, $\bar{\psi}, \lambda \xleftarrow[p]{\text{---}} \bullet = u(\mathbf{p}, \lambda)$

③ Dirac 正费米子 ψ 出射外线: $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \psi, \lambda = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)$, $\bullet \xleftarrow[p]{\text{---}} \psi, \lambda = v(\mathbf{p}, \lambda)$

④ Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 出射外线: $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \bar{\psi}, \lambda = v(\mathbf{p}, \lambda)$, $\bullet \xleftarrow[p]{\text{---}} \bar{\psi}, \lambda = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)$

⑤ Majorana 费米子 χ 入射外线: $\chi, \lambda \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = u(\mathbf{p}, \lambda)$, $\chi, \lambda \xleftarrow[p]{\text{---}} \bullet = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$

⑥ Majorana 费米子 χ 出射外线: $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \chi, \lambda = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)$, $\bullet \xleftarrow[p]{\text{---}} \chi, \lambda = v(\mathbf{p}, \lambda)$

Majorana 旋量场与对称性因子



注意, Majorana 费米子是纯中性粒子

🚗 如果末态包含超过 1 个全同的 Majorana 费米子

🚗 计算散射截面或衰变宽度时需要考虑末态对称性因子 S

🚗 假如拉氏量的某个相互作用项包含 2 个或以上全同的 Majorana 旋量场

🚚 类似于 6.3 节的讨论, 在导出顶点 Feynman 规则时需要考虑组合因子

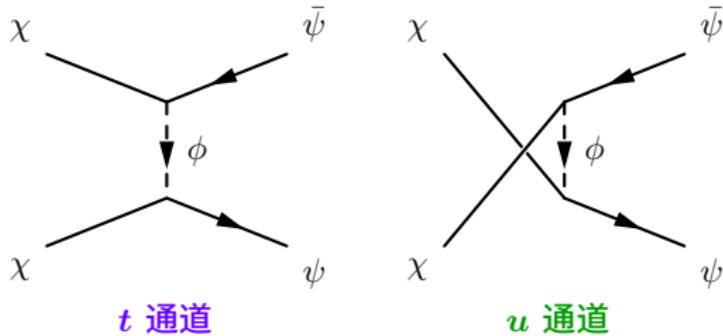
🚚 计算时还需要留意 Feynman 图的对称性因子

8.7.3 小节 应用

🦆 下面应用上一小节推导出来的 **Feynman 规则**进行计算

🛣 考虑 $\chi\chi \rightarrow \psi\bar{\psi}$ 湮灭过程

🏎 领头阶 Feynman 图如下图所示，包含一个 **t 通道** 和一个 **u 通道** 的 Feynman 图



⚠️ 现在，**费米子流方向**有多种取法，但各种取法的计算结果应该是**等价的**

费米子流方向第一种取法

天鹅 设初态两个 Majorana 费米子 χ 的四维动量为 k_1^μ 和 k_2^μ ，末态 Dirac 费米子 ψ 和 $\bar{\psi}$ 的四维动量为 p_1^μ 和 p_2^μ ，令 $t = (k_1 - p_1)^2$ ， $u = (k_1 - p_2)^2$

火车 添
加带箭头的点划线表示费米子流方向

火车 应用动量空间 Feynman 规则， t 通道和 u 通道 Feynman 图贡献的不变振幅是

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_t &= \begin{array}{c} \text{Feynman Diagram: Two Majorana fermions } \chi \text{ with momenta } k_1 \text{ and } k_2 \text{ interact via a } \phi \text{ exchange to produce a Dirac fermion } \psi \text{ with momentum } p_2 \text{ and an antifermion } \bar{\psi} \text{ with momentum } p_1. \end{array} \\ &= \bar{u}(p_1)(i\kappa\Gamma_2)u(k_1) \frac{i}{(p_1 - k_1)^2 - m_\phi^2} \bar{v}(k_2)(i\kappa\Gamma_1)v(p_2) \\ &= -\frac{i\kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_1) \bar{v}(k_2)\Gamma_1 v(p_2) \\ i\mathcal{M}_u &= \begin{array}{c} \text{Feynman Diagram: Two Majorana fermions } \chi \text{ with momenta } k_1 \text{ and } k_2 \text{ interact via a } \phi \text{ exchange to produce a Dirac fermion } \psi \text{ with momentum } p_1 \text{ and an antifermion } \bar{\psi} \text{ with momentum } p_2. \end{array} \\ &= \bar{v}(k_1)(i\kappa\Gamma_1)v(p_2) \frac{i}{(k_1 - p_2)^2 - m_\phi^2} \bar{u}(p_1)(i\kappa\Gamma_2)u(k_2) \\ &= -\frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2) \bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_2) \end{aligned}$$

第一种取法的相对符号



根据

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\chi_b(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}\psi_d(y)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
& + \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\chi_b(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}\psi_d(y)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
= & \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathsf{N}[\psi_d(y)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)(\Gamma_1)_{cd}\bar{\chi}_c(y)\chi_b(x)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
& - \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | \mathsf{N}[\psi_d(y)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)(\Gamma_1)_{cd}\chi_b(x)\bar{\chi}_c(y)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle
\end{aligned}$$



这两个 Feynman 图的相对符号为负



因而总振幅是 $i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_t - i\mathcal{M}_u$

费米子流方向第二种取法

 当然，也可以选择**其它费米子流方向**进行计算

 比如，同时**反转**上述 t 通道 Feynman 图中**两条点划线的方向**，则 **t 通道**振幅变成

$$\begin{aligned} i\tilde{\mathcal{M}}_t &= \begin{array}{c} \text{Diagram with two dashed lines reversed: } \\ \text{Top vertex: } \chi \rightarrow k_2, \bar{\psi} \rightarrow p_2 \\ \text{Bottom vertex: } \chi \rightarrow k_1, \psi \rightarrow p_1 \\ \text{Internal lines: } k_2 \rightarrow p_1 - k_1 \end{array} = \bar{v}(k_1)(i\kappa\Gamma_2^C)v(p_1) \frac{i}{(p_1 - k_1)^2 - m_\phi^2} \bar{u}(p_2)(i\kappa\Gamma_1^C)u(k_2) \\ &\quad = -\frac{i\kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{v}(k_1)\Gamma_2^C v(p_1) \bar{u}(p_2)\Gamma_1^C u(k_2) \end{aligned}$$

 **反转**上述 u 通道 Feynman 图中**一条点划线的方向**，**u 通道**振幅化为

$$\begin{aligned} i\tilde{\mathcal{M}}_u &= \begin{array}{c} \text{Diagram with one dashed line reversed: } \\ \text{Top vertex: } \chi \rightarrow k_2, \bar{\psi} \rightarrow p_2 \\ \text{Bottom vertex: } \chi \rightarrow k_1, \psi \rightarrow p_1 \\ \text{Internal lines: } k_2 \rightarrow k_1 - p_2 \end{array} = \bar{v}(k_1)(i\kappa\Gamma_1)v(p_2) \frac{i}{(k_1 - p_2)^2 - m_\phi^2} \bar{v}(k_2)(i\kappa\Gamma_2^C)v(p_1) \\ &\quad = -\frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2) \bar{v}(k_2)\Gamma_2^C v(p_1) \end{aligned}$$

第二种取法的相对符号

👉 根据

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | N[\phi(x)\bar{\chi}_a(x)(\Gamma_2^C)_{ab}\psi_b^C(x)\phi^\dagger(y)\bar{\psi}_c^C(y)(\Gamma_1^C)_{cd}\chi_d(y)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
 & + \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | N[\phi(x)\bar{\chi}_a(x)(\Gamma_2^C)_{ab}\psi_b^C(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}\psi_d(y)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
 = & \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | N[\bar{\psi}_c^C(y)\psi_b^C(x)(\Gamma_2^C)_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)(\Gamma_1^C)_{cd}\chi_d(y)\bar{\chi}_a(x)] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle \\
 & + \langle \mathbf{p}_1^+; \mathbf{p}_2^- | N[\psi_d(y)\psi_b^C(x)(\Gamma_2^C)_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_a(x)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}] | \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \rangle
 \end{aligned}$$

🚢 这两个 Feynman 图的相对符号为正

🚢 因而总振幅是 $i\tilde{\mathcal{M}} = i\tilde{\mathcal{M}}_t + i\tilde{\mathcal{M}}_u$

两种取法的等价性

$$\bar{v}(k_1)\Gamma_2^C v(p_1)\bar{u}(p_2)\Gamma_1^C u(k_2) = u^T(k_1) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_2^T \mathcal{C} \mathcal{C} \bar{u}^T(p_1) v^T(p_2) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_1^T \mathcal{C} \mathcal{C} \bar{v}^T(k_2)$$

$$= [u^T(k_1)\Gamma_2^T \bar{u}^T(p_1)v^T(p_2)\Gamma_1^T \bar{v}^T(k_2)]^T$$

$$= \bar{v}(k_2)\Gamma_1 v(p_2)\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_1)$$

$$\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{v}(k_2)\Gamma_2^C v(p_1) = \bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)u^T(k_2) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_2^T \mathcal{C} \mathcal{C} \bar{u}^T(p_1)$$

$$= -\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)[u^T(k_2)\Gamma_2^T \bar{u}^T(p_1)]^T$$

$$= -\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_2)$$



$$i\tilde{\mathcal{M}}_t = -\frac{i\kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{v}(k_1)\Gamma_2^C v(p_1)\bar{u}(p_2)\Gamma_1^C u(k_2)$$

$$= -\frac{i\kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_1)\bar{v}(k_2)\Gamma_1 v(p_2) = i\mathcal{M}_t$$

$$i\tilde{\mathcal{M}}_u = -\frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{v}(k_2)\Gamma_2^C v(p_1)$$

$$= +\frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_2) = -i\mathcal{M}_u$$

两种取法的等价性

$$\begin{aligned}\bar{v}(k_1)\Gamma_2^C v(p_1)\bar{u}(p_2)\Gamma_1^C u(k_2) &= u^T(k_1) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_2^T \mathcal{C} \mathcal{C} \bar{u}^T(p_1) v^T(p_2) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_1^T \mathcal{C} \mathcal{C} \bar{v}^T(k_2) \\ &= [u^T(k_1) \Gamma_2^T \bar{u}^T(p_1) v^T(p_2) \Gamma_1^T \bar{v}^T(k_2)]^T \\ &= \bar{v}(k_2) \Gamma_1 v(p_2) \bar{u}(p_1) \Gamma_2 u(k_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) \bar{v}(k_2) \Gamma_2^C v(p_1) &= \bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) u^T(k_2) \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_2^T \mathcal{C} \mathcal{C} \bar{u}^T(p_1) \\ &= -\bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) [u^T(k_2) \Gamma_2^T \bar{u}^T(p_1)]^T \\ &= -\bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) \bar{u}(p_1) \Gamma_2 u(k_2)\end{aligned}$$

→ $\begin{aligned}i\tilde{\mathcal{M}}_t &= -\frac{i\kappa^2}{t-m_\phi^2} \bar{v}(k_1) \Gamma_2^C v(p_1) \bar{u}(p_2) \Gamma_1^C u(k_2) \\ &= -\frac{i\kappa^2}{t-m_\phi^2} \bar{u}(p_1) \Gamma_2 u(k_1) \bar{v}(k_2) \Gamma_1 v(p_2) = i\mathcal{M}_t \\ i\tilde{\mathcal{M}}_u &= -\frac{i\kappa^2}{u-m_\phi^2} \bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) \bar{v}(k_2) \Gamma_2^C v(p_1) \\ &= +\frac{i\kappa^2}{u-m_\phi^2} \bar{v}(k_1) \Gamma_1 v(p_2) \bar{u}(p_1) \Gamma_2 u(k_2) = -i\mathcal{M}_u\end{aligned}$

 可见，根据费米子流方向的不同取法计算出来的结果确实是等价的

因此 $i\tilde{\mathcal{M}} = i\tilde{\mathcal{M}}_t + i\tilde{\mathcal{M}}_u = i\mathcal{M}_t - i\mathcal{M}_u = i\mathcal{M}$

非极化振幅模方

 接下来计算 $\chi\bar{\chi} \rightarrow \psi\bar{\psi}$ 的非极化振幅模方

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \overline{|\mathcal{M}_t - \mathcal{M}_u|^2} = \overline{|\mathcal{M}_t|^2} + \overline{|\mathcal{M}_u|^2} - (\overline{\mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u} + \text{H.c.})$$

 使用具体形式 $\Gamma_1 = P_R$ 和 $\Gamma_2 = P_L$ ，由第一种取法的振幅计算结果得到

$$i\mathcal{M}_t = -\frac{i\kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{u}(p_1) P_L u(k_1) \bar{v}(k_2) P_R v(p_2)$$

$$(i\mathcal{M}_t)^* = \frac{i\kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{u}(k_1) P_R u(p_1) \bar{v}(p_2) P_L v(k_2)$$

$$i\mathcal{M}_u = -\frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1) P_R v(p_2) \bar{u}(p_1) P_L u(k_2)$$

$$(i\mathcal{M}_u)^* = \frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(p_2) P_L v(k_1) \bar{u}(k_2) P_R u(p_1)$$

单纯 t 通道贡献

由 $P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$ 、 $P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$ 、 $P_L^2 = P_L$ 、 $P_R^2 = P_R$ 和 $P_L P_R = P_R P_L = \mathbf{0}$ 得

$$\begin{aligned}
 & \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi) P_L (\not{k}_1 + m_\chi) P_R] = \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi)(\not{k}_1 P_R + m_\chi P_L) P_R] \\
 & = \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi) \not{k}_1 P_R] = \frac{1}{2} \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi) \not{k}_1 (1 + \gamma^5)] = \frac{1}{2} \text{tr}(\not{p}_1 \not{k}_1) = 2 \not{k}_1 \cdot \not{p}_1 \\
 & \text{tr}[(\not{k}_2 - m_\chi) P_R (\not{p}_2 - m_\psi) P_L] = \frac{1}{2} \text{tr}[(\not{k}_2 - m_\chi) \not{p}_2 (1 - \gamma^5)] = 2 \not{k}_2 \cdot \not{p}_2
 \end{aligned}$$

从而，**单纯 t 通道**对非极化振幅模方的贡献是

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}_t}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_t|^2 \\
 &= \frac{\kappa^4}{4(t - m_\phi^2)^2} \sum_{\text{spins}} \bar{u}(p_1) P_L u(k_1) \bar{u}(k_1) P_R u(p_1) \bar{v}(k_2) P_R v(p_2) \bar{v}(p_2) P_L v(k_2) \\
 &= \frac{\kappa^4}{2 \cdot 2(t - m_\phi^2)^2} \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi) P_L (\not{k}_1 + m_\chi) P_R] \text{tr}[(\not{k}_2 - m_\chi) P_R (\not{p}_2 - m_\psi) P_L] \\
 &= \frac{\kappa^4 (\not{k}_1 \cdot \not{p}_1) (\not{k}_2 \cdot \not{p}_2)}{(t - m_\phi^2)^2}
 \end{aligned}$$

单纯 u 通道贡献和交叉贡献

 另一方面，**单纯 u 通道**的贡献为

$$\begin{aligned}
 \overline{|\mathcal{M}_u|^2} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_u|^2 \\
 &= \frac{\kappa^4}{4(u - m_\phi^2)^2} \sum_{\text{spins}} \bar{v}(k_1) P_R v(p_2) \bar{v}(p_2) P_L v(k_1) \bar{u}(p_1) P_L u(k_2) \bar{u}(k_2) P_R u(p_1) \\
 &= \frac{\kappa^4}{2 \cdot 2 (u - m_\phi^2)^2} \text{tr}[(\not{k}_1 - m_\chi) P_R (\not{p}_2 - m_\psi) P_L] \text{tr}[(\not{p}_1 + m_\psi) P_L (\not{k}_2 + m_\chi) P_R] \\
 &= \frac{\kappa^4 (\not{k}_1 \cdot \not{p}_2) (\not{k}_2 \cdot \not{p}_1)}{(u - m_\phi^2)^2}
 \end{aligned}$$

 而 t 和 u 通道的**交叉贡献**是

$$\begin{aligned}
 \overline{\mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u \\
 &= \frac{\kappa^4}{4(t - m_\phi^2)(u - m_\phi^2)} \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k_1) P_R u(p_1) \bar{u}(p_1) P_L u(k_2) \bar{v}(p_2) P_L v(k_2) \bar{v}(k_1) P_R v(p_2)
 \end{aligned}$$

$\chi\chi \rightarrow \psi\bar{\psi}$ 非极化振幅模方

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k_1) P_R u(p_1) \bar{u}(p_1) P_L u(k_2) \bar{v}(p_2) P_L v(k_2) \bar{v}(k_1) P_R v(p_2) \\
 &= \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k_1) P_R u(p_1) \bar{u}(p_1) P_L u(k_2) [u^T(p_2) \mathcal{C} P_L \mathcal{C} \bar{u}^T(k_2)]^T [u^T(k_1) \mathcal{C} P_R \mathcal{C} \bar{u}^T(p_2)]^T \\
 &= \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k_1) P_R u(p_1) \bar{u}(p_1) P_L u(k_2) \bar{u}(k_2) \mathcal{C}^T P_L^T \mathcal{C}^T u(p_2) \bar{u}(p_2) \mathcal{C}^T P_R^T \mathcal{C}^T u(k_1) \\
 &= \text{tr}[(\not{k}_1 + m_\chi) P_R (\not{p}_1 + m_\psi) P_L (\not{k}_2 + m_\chi) \mathcal{C}^{-1} P_L^T \mathcal{C} (\not{p}_2 + m_\psi) \mathcal{C}^{-1} P_R^T \mathcal{C}] \\
 &= \text{tr}[(\not{k}_1 + m_\chi) \not{p}_1 P_L (\not{k}_2 + m_\chi) P_L (\not{p}_2 + m_\psi) P_R] = m_\chi \text{tr}[(\not{k}_1 + m_\chi) \not{p}_1 P_L (\not{p}_2 + m_\psi) P_R] \\
 &= [(\not{k}_1 + m_\chi) \not{p}_1 \not{p}_2 (1 + \gamma^5)] = \frac{m_\chi^2}{2} \text{tr}(\not{p}_1 \not{p}_2) = 2m_\chi^2 (p_1 \cdot p_2)
 \end{aligned}$$

➡ $\overline{\mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u} + \text{H.c.} = \frac{\kappa^4 m_\chi^2 (p_1 \cdot p_2)}{2(t - m_\phi^2)(u - m_\phi^2)} + \text{H.c.} = \frac{\kappa^4 m_\chi^2 (p_1 \cdot p_2)}{(t - m_\phi^2)(u - m_\phi^2)}$

于是, $\chi\chi \rightarrow \psi\bar{\psi}$ 的非极化振幅模方为

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}|^2 &= |\overline{\mathcal{M}_t}|^2 + |\overline{\mathcal{M}_u}|^2 - (\overline{\mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u} + \text{H.c.}) \\
 &= \kappa^4 \left[\frac{(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2)}{(t - m_\phi^2)^2} + \frac{(k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1)}{(u - m_\phi^2)^2} - \frac{m_\chi^2 (p_1 \cdot p_2)}{(t - m_\phi^2)(u - m_\phi^2)} \right]
 \end{aligned}$$