

量子场论

标准模型简介

余钊煥

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



更新日期：2022 年 9 月 8 日



粒子物理标准模型



粒子物理标准模型是一个 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范场论



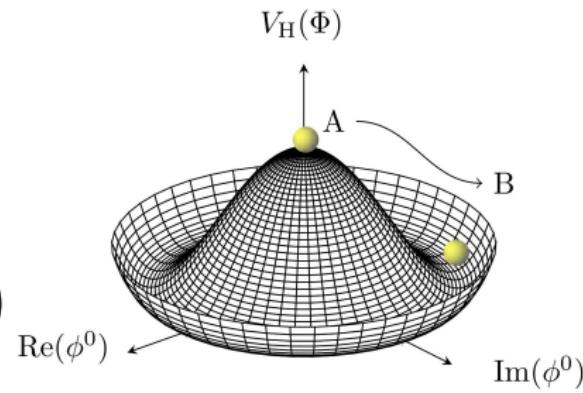
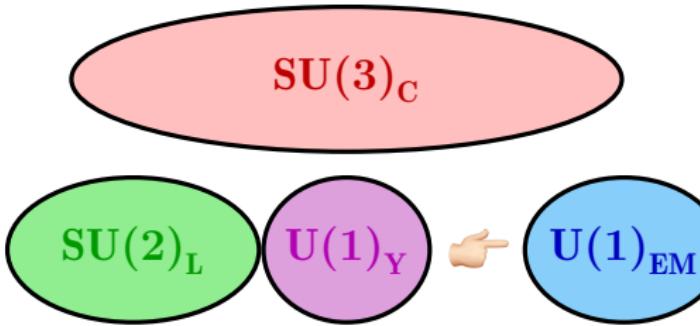
 模型中有三代费米子，每一代包含一种上型夸克、一种下型夸克、一种带电轻子和一种中微子，规范玻色子传递费米子间相互作用



$SU(3)_C$ 部分描述强相互作用，称为量子色动力学，规范玻色子是胶子



● $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 部分描述夸克和轻子的电磁和弱相互作用，称为**电弱规范理论**，在这个理论中引入一个**Higgs** 标量二重态，从而引起规范群的**对称性自发破缺**，使得 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群破缺为 **$U(1)_{EM}$** 群 $V_{\text{eff}}(\Phi)$

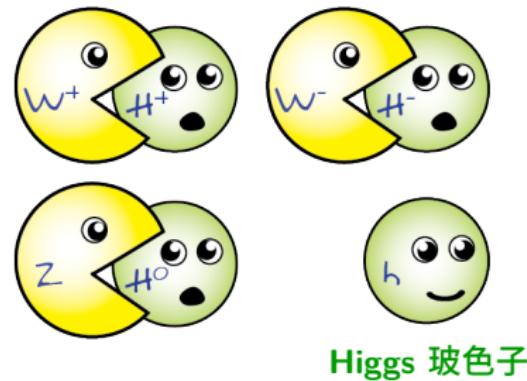


基本粒子质量起源

 电弱对称性破缺前，电弱理论中存在 4 个无质量的规范玻色子和 4 个 Higgs 自由度；左手费米子和右手费米子都没有质量，具有不同量子数

 破缺后，3个规范玻色子与3个Higgs自由度结合，从而获得质量，成为 W^\pm 玻色子和 Z^0 玻色子，传递弱相互作用

剩下的 1 个无质量规范玻色子是光子，传递电磁相互作用



基本粒子质量起源

 电弱对称性破缺前，电弱理论中存在 4 个无质量的规范玻色子和 4 个 Higgs 自由度；左手费米子和右手费米子都**没有质量**，具有不同量子数

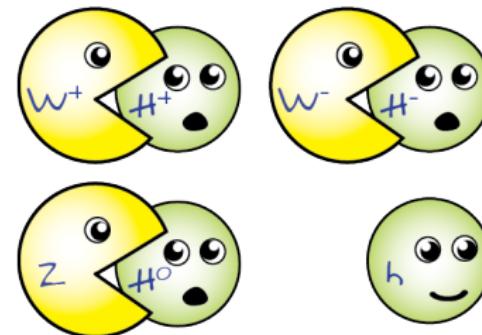
 破缺后，3个规范玻色子与3个Higgs自由度结合，从而获得质量，成为 W^\pm 玻色子和 Z^0 玻色子，传递弱相互作用

 剩下的 1 个无质量规范玻色子是光子，传递电磁相互作用

与 Higgs 场的 Yukawa 耦合导致左手和右手费米子组合成 Dirac 费米子，并获得质量

 在标准模型中，中微子没有右手分量，因而没有获得质量

1998 年实验发现中微子振荡，证明中微子具有质量，因此需要扩充标准模型才能正确描述中微子物理



Higgs 玻色子

非 Abel 规范理论

♪♪ 非 Abel 群的生成元彼此不对易，因而规范变换形式与 U(1) 群 (Abel 群) 不同

 1954 年，杨振宁和 Robert Mills 提出非 Abel 规范理论，也称为 Yang-Mills 理论，其规范场称为 Yang-Mills 场

对于非 Abel 的 Lie 群, 生成元 t^a 满足 $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$, 依赖时空坐标的群么正变换为 $U(x) = \exp[i\theta^a(x)t^a]$, 旋量场多重态 $\psi(x)$ 和规范场 $A_\mu^a(x)$ 的**规范变换**是

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x), \quad A_\mu^a(x)t^a \rightarrow U(x)A_\mu^a(x)t^aU^\dagger(x) - \frac{i}{q}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x)$$

定义协变导数 $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a t^a$, 就可以利用 $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$ 推出

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) &\rightarrow \left[\partial_\mu + ig \left(U A_\mu^a t^a U^\dagger - \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger \right) \right] U \psi \\ &= \cancel{U} \cancel{U^\dagger} (\partial_\mu U) \psi + U \partial_\mu \psi + ig U A_\mu^a t^a \psi + U (\partial_\mu U^\dagger) U \psi \\ &= U (\partial_\mu + ig A_\mu^a t^a) \psi + U \partial_\mu (\cancel{U^\dagger} \cancel{U}) \psi = U(x) \cancel{D}_\mu \psi(x) \end{aligned}$$

 具有**非 Abel 规范对称性**的拉氏量是 $\mathcal{L}_{\text{YM}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu}$ ，其中规范场的**场强张量** $F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$

量子色动力学

 **量子色动力学** (Quantum Chromodynamics) 简称 **QCD**，是 $SU(3)_C$ 非 Abel 规范理论，规范场 $G_\mu^a(x)$ 对应于 8 种胶子，夸克旋量场 $q(x)$ 是 $SU(3)_C$ 三重态，拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_a \bar{q}(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m_q)q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}, \quad q = d, u, s, c, b, t, \quad a = 1, \dots, 8$$

协变导数 $D_\mu = \partial_\mu + i g_s G_\mu^a T^a$, 场强张量 $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$

 g_s 称为强耦合常数，结构常数 f^{abc} 对 3 个指标全反对称，独立分量为

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2, \quad f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$$

 $t^a = \lambda^a/2$ 是 $SU(3)_C$ 基础表示的生成元，其中 λ^a 是 8 个 Gell-Mann 矩阵

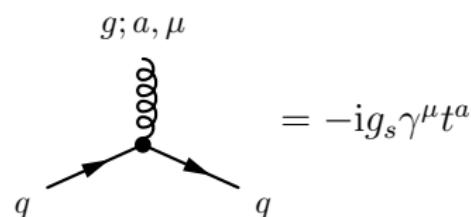
$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

QCD 相互作用顶点

 \mathcal{L}_{QCD} 中 $-g_s G_\mu^a \bar{q} \gamma^\mu t^a q$ 项的相互作用顶点如右图

 $-G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}/4$ 项带来非 Abel 规范理论特有的以下规范玻色子自相互作用顶点——胶子 g 的三线性和四线性自相互作用顶点



$$g; a, \mu$$

$$= -g_s f^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$$

$$g; a, \mu \quad g; b, \nu = -ig_s^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]$$

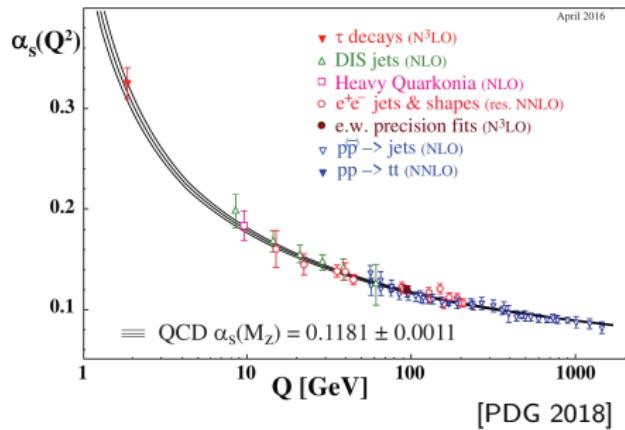
渐近自由和夸克禁闭

 受高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会“跑动”的，即数值依赖于能标 Q

在 QED 中，电磁耦合常数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ 随能标升高而增大

然而，QCD 的情况相反，强耦合常数 $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ 随能标升高而减小

由于高能标意味着短距离，这个特性称为 QCD 的渐近自由



渐近自由和夸克禁闭

受高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会**“跑动”**的，即数值依赖于能标 Q

在 QED 中，电磁耦合常数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ 随能标升高而增大

然而，QCD 的情况相反，强耦合常数 $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ 随能标升高而减小

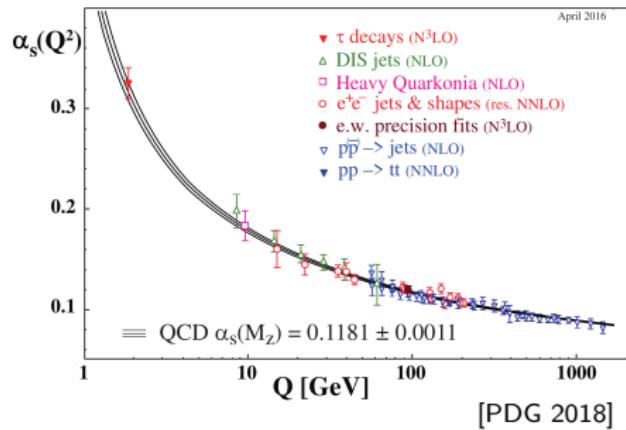
由于高能标意味着短距离，这个特性称为 QCD 的渐近自由

随着能标下降， α_s 越来越大，夸克间相互作用变得越来越强

👉 夸克在低能区被强相互作用紧紧束缚在强子中，这个现象称为**夸克禁闭**

实验上从来没有发现自由夸克和自由胶子的存在，也没有发现色多重态

由于质量太大，[顶夸克](#)会在禁闭之前先衰变，因而不会被束缚在强子中。



旋量场手征性与宇称不守恒

 利用左手投影算符 $P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$ 和右手投影算符 $P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$

 将旋量场 $\psi(x)$ 分解为左手旋量场 $\psi_L \equiv P_L \psi$ 和右手旋量场 $\psi_R \equiv P_R \psi$

对于无质量旋量场，或在可忽略质量的高能极限下，手征性等价于螺旋度

👉 左手场 $\psi_L(x)$ { 左旋正费米子
右旋反费米子 右手场 $\psi_R(x)$ { 右旋正费米子
左旋反费米子

 **质量项** $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$ 相当于左右手旋量场的耦合项

 在空间反射变换下，动量方向反转，自旋方向不变，因而螺旋度符号翻转

旋量场手征性与宇称不守恒

 利用左手投影算符 $P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$ 和右手投影算符 $P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$

 将旋量场 $\psi(x)$ 分解为左手旋量场 $\psi_L \equiv P_L \psi$ 和右手旋量场 $\psi_R \equiv P_R \psi$

对于无质量旋量场，或在可忽略质量的高能极限下，手征性等价于螺旋度

👉 左手场 $\psi_L(x)$  左旋正费米子
右旋反费米子 右手场 $\psi_R(x)$  右旋正费米子
左旋反费米子

 **质量项** $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$ 相当于左右手旋量场的耦合项

 在空间反射变换下，动量方向反转，自旋方向不变，因而螺旋度符号翻转

对于宇称守恒的理论，如量子电动力学和量子色动力学，存在空间反射对称性，左右手旋量场具有相同的相互作用

在弱相互作用中，宇称不守恒，不存在空间反射对称性，其根源在于左右手旋量场参与不同的规范相互作用

电弱规范理论



电弱规范理论的规范群是 $SU(2)_L \times U(1)_Y$



每一代左手旋量场构成 2 个 $SU(2)_L$ 二重态

$$L_{i\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} P_{\mathbf{L}}\nu_i \\ P_{\mathbf{L}}\ell_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{i\mathbf{L}} \\ \ell_{i\mathbf{L}} \end{pmatrix}, \quad Q_{i\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} P_{\mathbf{L}}u'_i \\ P_{\mathbf{L}}d'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{i\mathbf{L}} \\ d'_{i\mathbf{L}} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$



它们的协变导数是 $D_\mu = \partial_\mu + i g W_\mu^a \tau^a + i g' B_\mu Y$

电弱规范理论

电弱规范理论的规范群是 $SU(2)_L \times U(1)_Y$

每一代左手旋量场构成 2 个 $SU(2)_L$ 二重态

$$L_{i\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} P_{\mathbf{L}}\nu_i \\ P_{\mathbf{L}}\ell_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{i\mathbf{L}} \\ \ell_{i\mathbf{L}} \end{pmatrix}, \quad Q_{i\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} P_{\mathbf{L}}u'_i \\ P_{\mathbf{L}}d'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{i\mathbf{L}} \\ d'_{i\mathbf{L}} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

它们的协变导数是 $D_\mu = \partial_\mu + igW_\mu^a \tau^a + ig' B_\mu Y$

 $W_\mu^a(x)$ ($a = 1, 2, 3$) 是 $SU(2)_L$ 规范场, $B_\mu(x)$ 是 $U(1)_Y$ 规范场

章 g 和 g' 分别是 $SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 的规范耦合常数

 $\tau^a = \sigma^a/2$ 是 $SU(2)_L$ 群基础表示的生成元，对应于弱同位旋

 生成元 τ^3 的本征值是弱同位旋第 3 分量，记为 T^3 ； Y 是弱超荷



电弱规范理论

电弱规范理论的规范群是 $SU(2)_L \times U(1)_Y$

每一代左手旋量场构成 2 个 $SU(2)_L$ 二重态

$$L_{iL} = \begin{pmatrix} P_L \nu_i \\ P_L \ell_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ \ell_{iL} \end{pmatrix}, \quad Q_{iL} = \begin{pmatrix} P_L u'_i \\ P_L d'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{iL} \\ d'_{iL} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

它们的协变导数是 $D_\mu = \partial_\mu + igW_\mu^a \tau^a + ig' B_\mu Y$

$W_\mu^a(x)$ ($a = 1, 2, 3$) 是 $SU(2)_L$ 规范场, $B_\mu(x)$ 是 $U(1)_Y$ 规范场

g 和 g' 分别是 $SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 的规范耦合常数

$\tau^a = \sigma^a/2$ 是 $SU(2)_L$ 群基础表示的生成元, 对应于弱同位旋

生成元 τ^3 的本征值是弱同位旋第 3 分量, 记为 T^3 ; Y 是弱超荷

各代右手旋量场 $\ell_{iR} = P_R \ell_i$ 、 $u'_{iR} = P_R u'_i$ 和 $d'_{iR} = P_R d'_i$ 是 $SU(2)_L$ 单态

它们的协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu + ig' B_\mu Y$

这里 u'_i 和 d'_i 是夸克场的规范本征态

旋量场的电弱量子数



电荷 $Q \equiv T^3 + Y$ 由弱同位旋第 3 分量和弱超荷定义



下表列出三代旋量场的弱同位旋第3分量 T^3 、弱超荷 Y 和电荷 Q

统一记号	第1代	第2代	第3代	T^3	Y	Q
$L_{iL} = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ \ell_{iL} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	1/2	-1/2	0
$Q_{iL} = \begin{pmatrix} u'_{iL} \\ d'_{iL} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c'_L \\ s'_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t'_L \\ b'_L \end{pmatrix}$	1/2	1/6	2/3
ℓ_{iR}	e_R	μ_R	τ_R	0	-1	-1
u'_{iR}	u'_R	c'_R	t'_R	0	2/3	2/3
d'_{iR}	d'_R	s'_R	b'_R	0	-1/3	-1/3

Brout–Englert–Higgs 机制

！夸克、带电轻子、 Z^0 和 W^\pm 都具有质量，但现在 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范不变的拉氏量不能具有任何质量项

😊 规范对称性使规范理论具有非常良好的性质，特别是可重整性

 在规范理论中直接放入规范场的质量项，会破坏规范对称性

 左右手旋量场参与不同的规范相互作用，直接引入质量项也会破坏规范对称性

Brout–Englert–Higgs 机制

！夸克、带电轻子、 Z^0 和 W^\pm 都具有质量，但现在 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范不变的拉氏量不能具有任何质量项

😊 规范对称性使规范理论具有非常良好的性质，特别是可重整性

 在规范理论中直接放入规范场的质量项，会破坏规范对称性

 左右手旋量场参与不同的规范相互作用，直接引入质量项也会破坏规范对称性

为了在保证可重整性的同时提供规范玻色子和费米子的**质量**，需要引入 **Brout-Englert-Higgs (BEH) 机制**，使 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 对称性自发破缺

引进 **Higgs** 标量场 $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}$, ϕ^+ 和 ϕ^0 都是复标量场

■ Φ 是 $SU(2)_L$ 二重态，具有弱超荷 $Y = 1/2$ ，电弱规范不变的拉氏量为

$$\mathcal{L}_H = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V_H(\Phi), \quad V_H(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

✓ 协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu + igW_\mu^a \tau^a + ig'Y B_\mu$

 $V_H(\Phi)$ 是 Higgs 标量场的势能项，依赖于 $\Phi^\dagger \Phi = |\phi^+|^2 + |\phi^0|^2$

自发对称性破缺

Higgs 场势能的行为由二次项系数 μ^2 和四次项系数 λ 决定；假设 $\lambda > 0$

~~如果~~ $\mu^2 < 0$, 势能项 $V_H(\Phi)$ 的最小值对应于 $\Phi^\dagger \Phi = 0$; Higgs 场的真空期待值为 $\langle \Phi \rangle \equiv \langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 它在电弱规范变换下不变, 故规范对称性未受到破坏

自发对称性破缺

Higgs 场势能的行为由二次项系数 μ^2 和四次项系数 λ 决定；假设 $\lambda > 0$

 如果 $\mu^2 < 0$ ，势能项 $V_H(\Phi)$ 的最小值对应于 $\Phi^\dagger \Phi = 0$ ；Higgs 场的真空期待值为 $\langle \Phi \rangle \equiv \langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，它在电弱规范变换下不变，故规范对称性未受到破坏

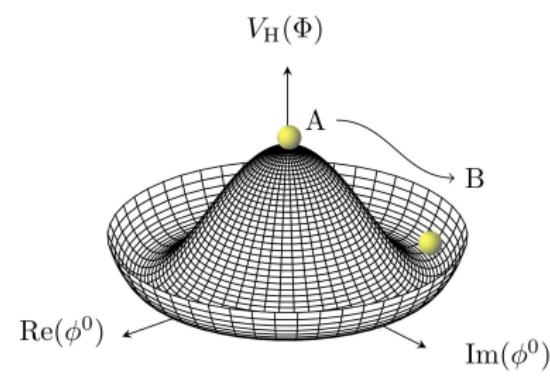
如果 $\mu^2 > 0$, $\Phi^\dagger \Phi = 0$ 处变成 $V_H(\Phi)$ 的极大值, 而最小值位于 $\Phi^\dagger \Phi = v^2/2$ 对应的 3 维球面上, 其中 $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$

若压缩掉 ϕ^+ 的实部和虚部两个维度，则 $V_H(\Phi)$ 在 ϕ^0 的实部和虚部坐标上呈现右图所示墨西哥草帽状的形式

 Higgs 场的真空期待值位于上述 3 维球面上的某一点，可取为 $\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$

电弱规范变换会改变这个期待值，故真空态不满足电弱规范对称性

 这种拉氏量满足对称性、真空态却不能满足的现象称为对称性自发破缺



乡正规范

 不失一般性地将 Higgs 场真空中期待值取为 $\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ 之后，其它真空中期待

值可以通过 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 整体变换 $\langle\Phi\rangle \rightarrow \exp(i\alpha^a \tau^a) \exp(i\alpha^Y Y_H) \langle\Phi\rangle$ 得到



这是因为 $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$ 在这样的变换下保持不变

乡正规范

 不失一般性地将 Higgs 场真空间期待值取为 $\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ 之后，其它真空间期待

值可以通过 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 整体变换 $\langle\Phi\rangle \rightarrow \exp(i\alpha^a \tau^a) \exp(i\alpha^Y Y_H) \langle\Phi\rangle$ 得到



这是因为 $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$ 在这样的变换下保持不变



 若 $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$ 且 $\alpha^3 = \alpha^Y$, 则 $\alpha^3\tau^3 + \alpha^Y Y_H = \alpha^3(\sigma^3 + 1)/2 = \text{diag}(\alpha^3, 0)$, $\exp(i\alpha^a\tau^a)\exp(i\alpha^Y Y_H) = \text{diag}(e^{i\alpha^3}, 1)$, 而 $\langle \Phi \rangle$ 在此变换下不变



因此，有 1 个方向的对称性没有受到破坏，只有 3 个方向的对称性发生自发破缺



根据 Goldstone 定理，破缺后存在 3 个无质量的 Nambu-Goldstone 玻色子



有 3 个规范玻色子结合 3 个 Nambu-Goldstone 玻色子，通过 BEH 机制获得质量

乡正规范

 不失一般性地将 Higgs 场真空中期待值取为 $\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ 之后，其它真空中期待

值可以通过 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 整体变换 $\langle\Phi\rangle \rightarrow \exp(i\alpha^a \tau^a) \exp(i\alpha^Y Y_H) \langle\Phi\rangle$ 得到



这是因为 $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$ 在这样的变换下保持不变



 若 $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$ 且 $\alpha^3 = \alpha^Y$, 则 $\alpha^3\tau^3 + \alpha^Y Y_H = \alpha^3(\sigma^3 + 1)/2 = \text{diag}(\alpha^3, 0)$, $\exp(i\alpha^a\tau^a)\exp(i\alpha^Y Y_H) = \text{diag}(e^{i\alpha^3}, 1)$, 而 $\langle \Phi \rangle$ 在此变换下**不变**



因此，有 1 个方向的对称性没有受到破坏，只有 3 个方向的对称性发生自发破缺



根据 Goldstone 定理，破缺后存在 3 个无质量的 Nambu-Goldstone 玻色子



有 3 个规范玻色子结合 3 个 Nambu-Goldstone 玻色子，通过 BEH 机制获得质量



以 $\langle \Phi \rangle$ 为基础，将 Higgs 场参数化为 $\Phi(x) = \exp \left[-i \frac{\chi^a(x)}{v} \tau^a \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$



χ^a 和 H 都是实标量场，而 $\exp(-i\chi^a \tau^a/v)$ 因子能够通过 $SU(2)_L$ 规范变换消去



因而可以直接取 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$ ，这种取法称为么正规范

Higgs 玻色子

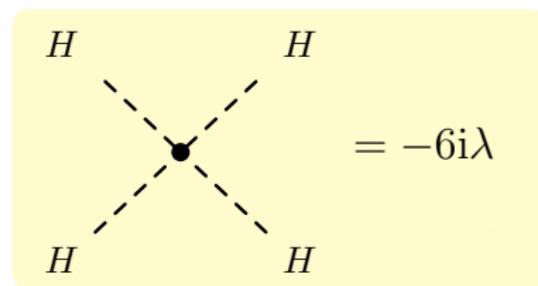
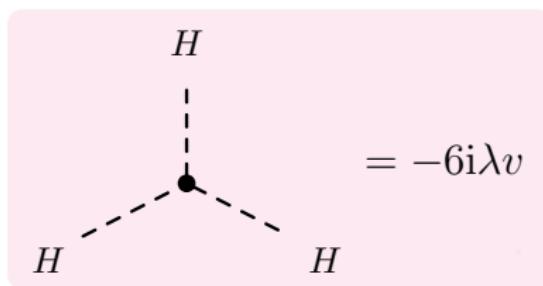
 在么正规范下， $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$ ， $\Phi^\dagger \Phi = \frac{1}{2}(v + H)^2$

此时 Higgs 场只剩下一个物理自由度 $H(x)$ ，势能项化为

$$-V_H(\Phi) = \frac{\mu^2}{2}(v+H)^2 - \frac{\lambda}{4}(v+H)^4 = \frac{1}{4}\mu^2 v^2 - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4}H^4$$

实标量场 $H(x)$ 对应于一个电中性标量玻色子 H ，称为 **Higgs 玻色子**

 Higgs 玻色子的质量为 $m_H \equiv \sqrt{2}\mu = \sqrt{2\lambda}v$ ，具有三线性和四线性自相互作用



电弱规范玻色子的质量项

 由于 $\tau^a = \frac{\sigma^a}{2}$, $\sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

有 $g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g' B_\mu + g W_\mu^3 & g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & g' B_\mu - g W_\mu^3 \end{pmatrix}$

🥩 真空期待值 v 对协变导数 $D_\mu \Phi = [\partial_\mu + i(g'B_\mu Y_H + gW_\mu^a \tau^a)]\Phi$ 的贡献为

$$D_\mu \Phi \supset i(g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \supset \frac{i v}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g' B_\mu - g W_\mu^3 \end{pmatrix}$$

协变动能项 $(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)$ 中正比于 v^2 的项是

$$\begin{aligned} (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) &\supset \frac{v^2}{8} [g^2 |W_\mu^1 - iW_\mu^2|^2 + (g' B_\mu - g W_\mu^3)^2] \\ &= \frac{v^2}{8} [g^2 (W^{1\mu} W_\mu^1 + W^{2\mu} W_\mu^2 + W^{3\mu} W_\mu^3) + g'^2 B^\mu B_\mu - 2gg' B^\mu W_\mu^3] \end{aligned}$$

这些项是规范玻色子的质量项



将上面这些**质量项**重新表达为

$$\mathcal{L}_{\text{GBM}} = \frac{1}{2} \cancel{\textcolor{red}{m_W^2}} (W^{1\mu} W_\mu^1 + W^{2\mu} W_\mu^2) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W^{3\mu} & B^\mu \end{pmatrix} \cancel{\textcolor{red}{M_{W^3 B}^2}} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$



W_μ^1 和 W_μ^2 获得的**质量** $m_W \equiv \frac{1}{2} gv$



$W^{3\mu}$ 和 B^μ 的质量平方矩阵为 $M_{W^3 B}^2 \equiv \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}$

Weinberg 转动



将上面这些**质量项**重新表达为

$$\mathcal{L}_{\text{GBM}} = \frac{1}{2} \textcolor{red}{m}_W^2 (W^{1\mu} W_\mu^1 + W^{2\mu} W_\mu^2) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W^{3\mu} & B^\mu \end{pmatrix} \textcolor{red}{M}_{W^3 B}^2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$



W_μ^1 和 W_μ^2 获得的**质量** $m_W \equiv \frac{1}{2} gv$



$W^{3\mu}$ 和 B^μ 的质量平方矩阵为 $M_{W^3 B}^2 \equiv \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}$



为了使 $M_{W^3 B}^2$ 矩阵对角化, 定义 $\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_W & -s_W \\ s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$



其中 $s_w \equiv \sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$, $c_w \equiv \cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$



θ_W 称为 Weinberg 角，也称为弱混合角



从后面的讨论可以看出 A_μ 就是电磁场，对应于光子； Z_μ 对应于矢量玻色子 Z

Z玻色子的质量

 反过来，有 $\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}$

利用 $M_{W^3B}^2 = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} = \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{4} \begin{pmatrix} c_W^2 & -s_Wc_W \\ -s_Wc_W & s_W^2 \end{pmatrix}$, 推出

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(W^{3\mu} \ B^\mu \right) M_{W^3 B}^2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \\
&= \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{8} \begin{pmatrix} Z^\mu & A^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_W & -s_W \\ s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_W^2 & -s_W c_W \\ -s_W c_W & s_W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \\
&= \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{8} \begin{pmatrix} Z^\mu & A^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \textcolor{violet}{m_Z^2} Z^\mu Z_\mu
\end{aligned}$$

 可见, Z 玻色子的质量是 $m_Z \equiv \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v = \frac{gv}{2c_W} = \frac{m_W}{c_W}$, 而光子没有质量

实验测得 $m_Z = 91.2 \text{ GeV}$ 和 $m_W = 80.4 \text{ GeV}$ ，故 $\theta_W = \cos^{-1} \frac{m_W}{m_Z} = 28.2^\circ$

W^\pm 玻色子的质量

另一方面，用质量相同的实矢量场 W_μ^1 和 W_μ^2 线性组合出复矢量场

$$W_\mu^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2)$$

它的厄米共轭为 $W_{\mu}^{-} \equiv (W_{\mu}^{+})^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{\mu}^1 + iW_{\mu}^2)$

则 $W_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ + W_\mu^-)$, $W_\mu^2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ - W_\mu^-)$

从而 $\frac{1}{2}(W^{1\mu}W_\mu^1 + W^{2\mu}W_\mu^2) = W^{+\mu}W_\mu^-$ ，于是

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{GBM}} &= \frac{1}{2} m_W^2 (W^{1\mu} W_\mu^1 + W^{2\mu} W_\mu^2) + \frac{1}{2} \left(W^{3\mu} \ B^\mu \right) M_{W^3 B}^2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \\ &= m_W^2 W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu\end{aligned}$$

复矢量场 W_μ^\pm 描述一对正反矢量玻色子 W^\pm ，质量为 m_W

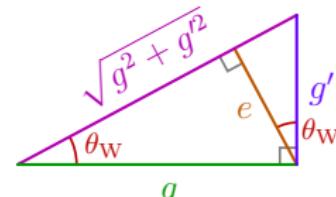
可见，**BEH 机制**使传递弱相互作用的规范玻色子 W^\pm 和 Z 获得了质量，有 3 个 Higgs 场自由度变成它们的纵向极化分量

用规范场质量本征态表达

接下来用质量本征态 W_μ^\pm 、 A^μ 和 Z_μ 表达 $(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)$

由 $B_\mu = c_w A_\mu - s_w Z_\mu$ 和 $W_\mu^3 = s_w A_\mu + c_w Z_\mu$ 得

$$\begin{aligned} g'B_\mu + gW_\mu^3 &= g'(c_W A_\mu - s_W Z_\mu) + g(s_W A_\mu + c_W Z_\mu) \\ &= \frac{2gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\mu + \frac{g^2 - g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu = 2eA_\mu + \frac{g}{c_W}(c_W^2 - s_W^2)Z_\mu \end{aligned}$$



其中 $e \equiv \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = gs_W = g' c_W$ ，后面讨论将表明 e 就是单位电荷量

协变导数 $D_\mu \Phi = [\partial_\mu + i(g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a)]\Phi$ 中的**相关因子**化为

$$\begin{aligned} g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g' B_\mu + g W_\mu^3 & g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & g' B_\mu - g W_\mu^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e A_\mu + \frac{g}{2c_W} (c_W^2 - s_W^2) Z_\mu & \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \\ \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- & -\frac{g}{2c_W} Z_\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Higgs 场协变动能项

于是，么正规范下的 Higgs 场协变动能项化为

$$\begin{aligned}
& (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) \\
&= |[\partial_\mu + i(g' B_\mu Y_H + g W_\mu^a \tau^a)] \Phi|^2 \\
&= \left| \begin{pmatrix} \partial_\mu + ieA_\mu + \frac{ig}{2c_W}(c_W^2 - s_W^2)Z_\mu & \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^- & \partial_\mu - \frac{ig}{2c_W}Z_\mu \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^-(v + H) & \partial_\mu H + \frac{ig}{2c_W}Z_\mu(v + H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^+(v + H) \\ \partial_\mu H - \frac{ig}{2c_W}Z_\mu(v + H) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} (\partial^\mu H)(\partial_\mu H) + (v + H)^2 \left(\frac{g^2}{4} W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{g^2}{8c_W^2} Z_\mu Z^\mu \right)
\end{aligned}$$

Higgs 玻色子与 W^\pm 、 Z 玻色子的耦合



将上述 Higgs 场协变动能项表达为

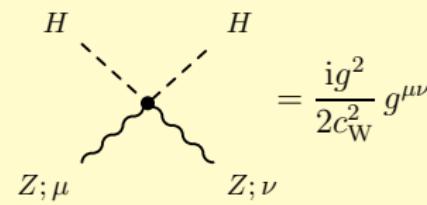
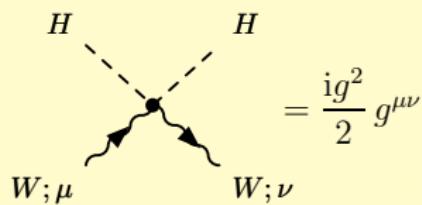
$$\begin{aligned}
(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) &= \frac{1}{2} (\partial^\mu H)(\partial_\mu H) \\
&+ m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \\
&+ g m_W H W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{g m_Z}{2 c_W} H Z_\mu Z^\mu \\
&+ \frac{g^2}{4} H^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{g^2}{8 c_W^2} H^2 Z_\mu Z^\mu
\end{aligned}$$



除了 W^\pm 和 Z 玻色子的**质量项**之外



还出现了 Higgs 玻色子 H 与 W^\pm 、 Z 玻色子的三线性和四线性耦合项。



Yukawa 相互作用

 Higgs 场 $\Phi(x)$ 的弱超荷为 $+1/2$ ，记 $\phi^- \equiv (\phi^+)^*$ ，引入 $\Phi(x)$ 的共轭态

$$\tilde{\Phi}(x) = i\sigma^2 \Phi^*(x) = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^-(x) \\ \phi^{0*}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*}(x) \\ -\phi^-(x) \end{pmatrix}$$

则 $\tilde{\Phi}(x)$ 是弱超荷为 $-1/2$ 的 $SU(2)_L$ 二重态

在幺正规范下， $\tilde{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix}$

Yukawa 相互作用

 Higgs 场 $\Phi(x)$ 的弱超荷为 $+1/2$ ，记 $\phi^- \equiv (\phi^+)^*$ ，引入 $\Phi(x)$ 的共轭态

$$\tilde{\Phi}(x) = i\sigma^2 \Phi^*(x) = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^-(x) \\ \phi^{0*}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*}(x) \\ -\phi^-(x) \end{pmatrix}$$

则 $\tilde{\Phi}(x)$ 是弱超荷为 $-1/2$ 的 $SU(2)_L$ 二重态

在幺正规范下, $\tilde{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix}$

与费米子场组成满足 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范对称性的 Yukawa 相互作用拉氏量

$$\mathcal{L}_Y = -\tilde{y}_{d,ij}\bar{Q}_{iL}d'_{jR}\Phi - \tilde{y}_{u,ij}\bar{Q}_{iL}u'_{jR}\tilde{\Phi} - \textcolor{red}{y_{\ell_i}}\bar{L}_{iL}\ell_{iR}\Phi + \text{H.c.}$$

$$Y : -\frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \quad +\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}$$

其中 H.c. 表示厄米共轭

 Yukawa 耦合常数 $\tilde{y}_{d,ij}$ 和 $\tilde{y}_{u,ij}$ 联系着不同代的夸克场

 Yukawa 耦合常数 y_{ei} 只联系同一代的轻子场

么正规范下的 Yukawa 相互作用



在么正规范下，利用

$$\bar{Q}_{iL}\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{u}'_{iL} & \bar{d}'_{iL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)\bar{d}'_{iL}$$

$$\bar{Q}_{iL} \tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{u}'_{iL} & \bar{d}'_{iL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v + H \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + H) \bar{u}'_{iL}$$

$$\bar{L}_{i\text{L}}\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{i\text{L}} & \bar{\ell}_{i\text{L}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)\bar{\ell}_{i\text{L}}$$



$$\text{推出 } \mathcal{L}_Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)(\tilde{y}_{d,ij}\bar{d}'_{iL}d'_{jR} + \tilde{y}_{u,ij}\bar{u}'_{iL}u'_{jR} + y_{\ell i}\bar{\ell}_{iL}\ell_{iR} + \text{H.c.})$$



$\tilde{y}_{d,ij}$ 和 $\tilde{y}_{u,ij}$ 可看作 3×3 矩阵 \tilde{y}_d 和 \tilde{y}_u 的元素



由 $\tilde{y}_d \tilde{y}_d^\dagger$ 和 $\tilde{y}_u \tilde{y}_u^\dagger$ 是厄米矩阵，必定可以分别通过幺正矩阵 U_d 和 U_u 对角化成 y_D^2 和 y_U^2 两个对角元为实数的对角矩阵，满足 $U_d^\dagger \tilde{y}_d \tilde{y}_d^\dagger U_d = y_D^2$ 和 $U_u^\dagger \tilde{y}_u \tilde{y}_u^\dagger U_u = y_U^2$ ，即

$$\tilde{y}_d \tilde{y}_d^\dagger = U_d y_{\text{D}}^2 U_d^\dagger, \quad \tilde{y}_u \tilde{y}_u^\dagger = U_u y_{\text{U}}^2 U_u^\dagger$$

Yukawa 耦合矩阵的对角化

 符合 $\tilde{y}_d \tilde{y}_d^\dagger = U_d y_D^2 U_d^\dagger$ 和 $\tilde{y}_u \tilde{y}_u^\dagger = U_u y_U^2 U_u^\dagger$ 的 \tilde{y}_d 和 \tilde{y}_u 可以表达为

$$\tilde{y}_d = U_d y_{\text{D}} K_d^\dagger, \quad \tilde{y}_u = U_u y_{\text{U}} K_u^\dagger$$

对角矩阵 y_D 和 y_U 满足 $y_D y_D = y_D^2$ 和 $y_U y_U = y_U^2$, K_d^\dagger 和 K_u^\dagger 是两个幺正矩阵

 将 y_D 和 y_U 表示成

$$y_D = \begin{pmatrix} y_{d_1} & & \\ & y_{d_2} & \\ & & y_{d_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_d & & \\ & y_s & \\ & & y_b \end{pmatrix}, \quad y_U = \begin{pmatrix} y_{u_1} & & \\ & y_{u_2} & \\ & & y_{u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_u & & \\ & y_c & \\ & & y_t \end{pmatrix}$$

Yukawa 耦合矩阵的对角化

 符合 $\tilde{y}_d \tilde{y}_d^\dagger = U_d y_D^2 U_d^\dagger$ 和 $\tilde{y}_u \tilde{y}_u^\dagger = U_u y_U^2 U_u^\dagger$ 的 \tilde{y}_d 和 \tilde{y}_u 可以表达为

$$\tilde{y}_d = U_d y_{\mathbf{D}} K_d^\dagger, \quad \tilde{y}_u = U_u y_{\mathbf{U}} K_u^\dagger$$

 对角矩阵 y_D 和 y_U 满足 $y_D y_D = y_D^2$ 和 $y_U y_U = y_U^2$ ， K_d^\dagger 和 K_u^\dagger 是两个幺正矩阵

 将 y_D 和 y_U 表示成

$$y_D = \begin{pmatrix} y_{d_1} & & \\ & y_{d_2} & \\ & & y_{d_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_d & & \\ & y_s & \\ & & y_b \end{pmatrix}, \quad y_U = \begin{pmatrix} y_{u_1} & & \\ & y_{u_2} & \\ & & y_{u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_u & & \\ & y_c & \\ & & y_t \end{pmatrix}$$

定义 $d_{iL} \equiv (U_d^\dagger)_{ij} d'_{jL}$, $d_{iR} \equiv (K_d^\dagger)_{ij} d'_{jR}$, $u_{iL} \equiv (U_u^\dagger)_{ij} u'_{jL}$ 和 $u_{iR} \equiv (K_u^\dagger)_{ij} u'_{jR}$

从而, $\bar{d}_{iL} = \bar{d}'_{jL} U_{d,ji}$, $\bar{u}_{iL} = \bar{u}'_{jL} U_{u,ji}$, 则

$$\tilde{y}_{d,ij}\bar{d}'_{i\text{L}}d'_{j\text{R}} = \bar{d}'_{i\text{L}}(U_d y_d K_d^\dagger)_{ij} d'_{j\text{R}} = \bar{d}'_{i\text{L}} U_{d,ik} y_{d,k} (K_d^\dagger)_{kj} d'_{j\text{R}} = y_{d,k} \bar{d}_k L d_{k\text{R}} = y_{d,i} \bar{d}_{i\text{L}} d_{i\text{R}}$$

$$\tilde{y}_{u,ij} \bar{u}'_{i\text{L}} u'_{j\text{R}} = \bar{u}'_{i\text{L}} (U_u y_u K_u^\dagger)_{ij} u'_{j\text{R}} = y_{u,i} \bar{u}_{i\text{L}} u_{i\text{R}}$$

费米子质量和 Yukawa 耦合



于是得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)(y_{d_i} \bar{d}_{iL} d_{iR} + y_{u_i} \bar{u}_{iL} u_{iR} + y_{\ell_i} \bar{\ell}_{iL} \ell_{iR} + \text{H.c.}) \\ &= -m_{d_i} \bar{d}_i d_i - m_{u_i} \bar{u}_i u_i - m_{\ell_i} \bar{\ell}_i \ell_i - \frac{m_{d_i}}{v} H \bar{d}_i d_i - \frac{m_{u_i}}{v} H \bar{u}_i u_i - \frac{m_{\ell_i}}{v} H \bar{\ell}_i \ell_i\end{aligned}$$

其中前三项是费米子质量项，后三项是 Higgs 玻色子与费米子的 Yukawa 耦合项

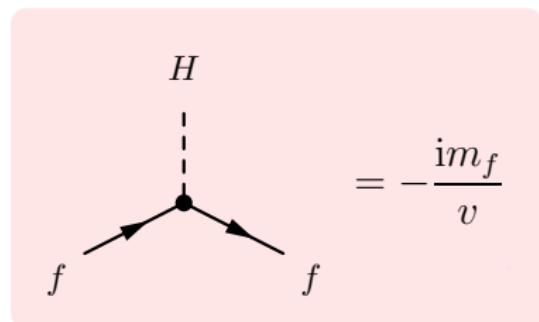
于是，三代夸克和带电轻子获得了质量

$$m_{d_i} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} y_{d_i} v, \quad m_{u_i} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} y_{u_i} v$$

$$m_{\ell_i} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} y_{\ell_i} v$$

d'_{iL} 、 d'_{iR} 、 u'_{iL} 和 u'_{iR} 是夸克规范本征态

d_{iL} 、 d_{iR} 、 u_{iL} 和 u_{iR} 是夸克质量本征态



Cabibbo-Kobayashi-Maskawa 矩阵



$d_{iL} \equiv (U_d^\dagger)_{ij} d'_{jL}$, $d_{iR} \equiv (K_d^\dagger)_{ij} d'_{jR}$, $u_{iL} \equiv (U_u^\dagger)_{ij} u'_{jL}$ 和 $u_{iR} \equiv (K_u^\dagger)_{ij} u'_{jR}$ 表明

$$d'_{iL} = U_{d,ij} d_{jL}, \quad d'_{iR} = K_{d,ij} d_{jR}, \quad u'_{iL} = U_{u,ij} u_{jL}, \quad u'_{iR} = K_{u,ij} u_{jR}$$

从而

$$\bar{d}'_{iL} \gamma^\mu d'_{iL} = \bar{d}_{jL} (U_d^\dagger)_{ji} \gamma^\mu U_{d,ik} d_{kL} = \bar{d}_{jL} \delta_{jk} \gamma^\mu d_{kL} = \bar{d}_{iL} \gamma^\mu d_{iL}$$

同理有

$$\bar{u}'_{iL} \gamma^\mu u'_{iL} = \bar{u}_{iL} \gamma^\mu u_{iL}, \quad \bar{d}'_{iR} \gamma^\mu d'_{iR} = \bar{d}_{iR} \gamma^\mu d_{iR}, \quad \bar{u}'_{iR} \gamma^\mu u'_{iR} = \bar{u}_{iR} \gamma^\mu u_{iR}$$

Cabibbo-Kobayashi-Maskawa 矩阵



$d_{iL} \equiv (U_d^\dagger)_{ij} d'_{jL}$, $d_{iR} \equiv (K_d^\dagger)_{ij} d'_{jR}$, $u_{iL} \equiv (U_u^\dagger)_{ij} u'_{jL}$ 和 $u_{iR} \equiv (K_u^\dagger)_{ij} u'_{jR}$ 表明

$$d'_{iL} = U_{d,ij} d_{jL}, \quad d'_{iR} = K_{d,ij} d_{jR}, \quad u'_{iL} = U_{u,ij} u_{jL}, \quad u'_{iR} = K_{u,ij} u_{jR}$$



从而

$$\bar{d}'_{iL} \gamma^\mu d'_{iL} = \bar{d}_{jL} (U_d^\dagger)_{ji} \gamma^\mu U_{d,ik} d_{kL} = \bar{d}_{jL} \delta_{jk} \gamma^\mu d_{kL} = \bar{d}_{iL} \gamma^\mu d_{iL}$$



同理有

$$\bar{u}'_{iL} \gamma^\mu u'_{iL} = \bar{u}_{iL} \gamma^\mu u_{iL}, \quad \bar{d}'_{iR} \gamma^\mu d'_{iR} = \bar{d}_{iR} \gamma^\mu d_{iR}, \quad \bar{u}'_{iR} \gamma^\mu u'_{iR} = \bar{u}_{iR} \gamma^\mu u_{iR}$$



另一方面,

$$\bar{u}'_{iL} \gamma^\mu d'_{iL} = \bar{u}_{jL} (U_u^\dagger)_{ji} \gamma^\mu U_{u,ik} d_{kL} = \bar{u}_{iL} \gamma^\mu V_{ij} d_{jL}$$

$$\bar{d}'_{iL} \gamma^\mu u'_{iL} = \bar{d}_{jL} (U_d^\dagger)_{ji} \gamma^\mu U_{d,ik} u_{kL} = \bar{d}_{jL} V_{ji}^\dagger \gamma^\mu u_{iL}$$

其中 $V \equiv U_u^\dagger U_d$ 称为 **Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 矩阵**



其厄米共轭矩阵为 $V^\dagger = U_d^\dagger U_u$

费米子协变动能项



SU(2)_L × U(1)_Y 规范不变的费米子协变动能项为

$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} = \bar{Q}_{iL} i\not{\partial} Q_{iL} + \bar{u}'_{iR} i\not{\partial} u'_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\not{\partial} d'_{iR} + \bar{L}_{iL} i\not{\partial} L_{iL} + \bar{\ell}_{iR} i\not{\partial} \ell_{iR}$$

根据 $Q = T^3 + Y$ 和 $e = g s_W = g' c_W$, 有

$$\begin{aligned} g' Y B_\mu + g T^3 W_\mu^3 &= g' Y (c_W A_\mu - s_W Z_\mu) + g T^3 (s_W A_\mu + c_W Z_\mu) \\ &= e(Y + T^3) A_\mu + \left(g c_W T^3 - \frac{g s_W}{c_W} s_W Y \right) Z_\mu = Q e A_\mu + \frac{g}{c_W} (T^3 c_W^2 - Y s_W^2) Z_\mu \\ &= Q e A_\mu + \frac{g}{c_W} (T^3 - Q s_W^2) Z_\mu \end{aligned}$$

故 $D_\mu Q_{iL} = (\partial_\mu + i g' B_\mu Y + i g W_\mu^a \tau^a) Q_{iL}$

$$\begin{aligned} &= \partial_\mu Q_{iL} + i \begin{pmatrix} g' Y B_\mu + g T^3 W_\mu^3 & \frac{g}{2} (W_\mu^1 - i W_\mu^2) \\ \frac{g}{2} (W_\mu^1 + i W_\mu^2) & g' Y B_\mu + g T^3 W_\mu^3 \end{pmatrix} Q_{iL} \\ &= \partial_\mu Q_{iL} + i \begin{pmatrix} \left[Q e A_\mu + \frac{g}{c_W} (T^3 - Q s_W^2) Z_\mu \right] u'_{iL} + \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ d'_{iL} \\ \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- u'_{iL} + \left[Q e A_\mu + \frac{g}{c_W} (T^3 - Q s_W^2) \right] d'_{iL} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\bar{Q}_{iL} i\not{D} Q_{iL}$ 中的电弱规范相互作用项

 于是, $\bar{Q}_{iL} i\not{D} Q_{iL}$ 包含的电弱规范相互作用项为

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{iL} i\not{D} Q_{iL} &\supset - \left[QeA_\mu + \frac{g}{c_W}(T^3 - Qs_W^2)Z_\mu \right] \bar{u}'_{iL} \gamma^\mu u'_{iL} \\
 &\quad - \left[QeA_\mu + \frac{g}{c_W}(T^3 - Qs_W^2)Z_\mu \right] \bar{d}'_{iL} \gamma^\mu d'_{iL} \\
 &\quad - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}'_{iL} \gamma^\mu d'_{iL} - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}'_{iL} \gamma^\mu u'_{iL} \\
 &= - \left(QeA_\mu + \frac{g}{c_W} g_L Z_\mu \right) \bar{u}_i \gamma^\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} u_i \\
 &\quad - \left(QeA_\mu + \frac{g}{c_W} g_L Z_\mu \right) \bar{d}_i \gamma^\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} d_i \\
 &\quad - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_i \gamma^\mu P_L V_{ij} d_j - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_j V_{ji}^\dagger \gamma^\mu P_L u_i
 \end{aligned}$$

 其中左手耦合系数为

$$g_L \equiv T^3 - Qs_W^2$$

$\bar{u}'_{iR} i\not{D} u'_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\not{D} d'_{iR}$ 中的电弱规范相互作用项

另一方面，

$$\begin{aligned} D_\mu d'_{iR} &= (\partial_\mu + ig' B_\mu Y) d'_{iR} = \partial_\mu d'_{iR} + ig' Q (c_W A_\mu - s_W Z_\mu) d'_{iR} \\ &= \partial_\mu d'_{iR} + iQe A_\mu d'_{iR} - \frac{ig}{c_W} Q s_W^2 Z_\mu d'_{iR} \end{aligned}$$

则 $\bar{u}'_{iR} i\not{D} u'_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\not{D} d'_{iR}$ 包含的电弱规范相互作用项为

$$\begin{aligned} &\bar{u}'_{iR} i\not{D} u'_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\not{D} d'_{iR} \\ &\supset - \left(Qe A_\mu - \frac{g}{c_W} Q s_W^2 Z_\mu \right) \bar{u}'_{iR} \gamma^\mu u'_{iR} - \left(Qe A_\mu - \frac{g}{c_W} Q s_W^2 Z_\mu \right) \bar{d}'_{iR} \gamma^\mu d'_{iR} \\ &= - \left(Qe A_\mu + \frac{g}{c_W} g_R Z_\mu \right) \bar{u}_i \gamma^\mu \frac{1 + \gamma^5}{2} u_i - \left(Qe A_\mu + \frac{g}{c_W} g_R Z_\mu \right) \bar{d}_i \gamma^\mu \frac{1 + \gamma^5}{2} d_i \end{aligned}$$

其中右手耦合系数为

$$g_R \equiv -Q s_W^2$$

费米子的电弱规范相互作用



引入矢量流和轴矢量流耦合系数

$$g_V \equiv g_L + g_R = T^3 - 2Q s_W^2, \quad g_A \equiv g_L - g_R = T^3$$

将以上夸克电弱规范相互作用项改写为

$$\begin{aligned} & \bar{Q}_{iL} i\not{D} Q_{iL} + \bar{u}'_{iR} i\not{D} u'_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\not{D} d'_{iR} \\ \supset & -Qe\bar{u}_i \gamma^\mu u_i A_\mu - Qe\bar{d}_i \gamma^\mu d_i A_\mu - \frac{g}{2c_W} \bar{u}_i \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) u_i Z_\mu \\ & - \frac{g}{2c_W} \bar{d}_i \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) d_i Z_\mu - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_i \gamma^\mu P_L \textcolor{red}{V}_{ij} d_j - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_j \textcolor{red}{V}_{ji}^\dagger \gamma^\mu P_L u_i \end{aligned}$$

同理， $\bar{L}_{iL} i\not{D} L_{iL} + \bar{\ell}_{iR} i\not{D} \ell_{iR}$ 包含的轻子电弱规范相互作用项为

$$\begin{aligned} & \bar{L}_{iL} i\not{D} L_{iL} + \bar{\ell}_{iR} i\not{D} \ell_{iR} \\ \supset & -Qe\bar{\ell}_i \gamma^\mu \ell_i A_\mu - \frac{g}{2c_W} \bar{\ell}_i \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \ell_i Z_\mu - \frac{g}{2c_W} \bar{\nu}_i \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \nu_i Z_\mu \\ & - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{\nu}_i \gamma^\mu P_L \ell_i - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{\ell}_i \gamma^\mu P_L \nu_i \end{aligned}$$

费米子的电弱流耦合

 将这些电弱规范相互作用项写成流耦合的形式，得

$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} \supset -A_\mu J_{\text{EM}}^\mu - Z_\mu J_Z^\mu - W_\mu^+ J_W^{+, \mu} - W_\mu^- J_W^{-, \mu}$$

 **电磁流** $J_{\text{EM}}^\mu \equiv \sum_f Q_f e \bar{f} \gamma^\mu f$ ，其中 f 代表任意费米子场

 弱中性流 $J_Z^\mu \equiv \frac{g}{2c_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) f$, $g_V^f = T_f^3 - 2Q_f s_W^2$, $g_A^f = T_f^3$

 弱带电流 $J_W^{+, \mu} \equiv \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{iL} \gamma^\mu V_{ij} d_{jL} + \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu \ell_{iL})$

 弱带电流 $J_W^{-,\mu} \equiv (J_W^{+,\mu})^\dagger = \frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{d}_{jL}V_{ji}^\dagger\gamma^\mu u_{iL} + \bar{\ell}_{iL}\gamma^\mu \nu_{iL})$

可以看到，电磁流耦合与 QED 耦合完全相同

由此辨认出 A_μ 是电磁场, e 是单位电荷量, $Q \equiv T^3 + Y$ 确实是电荷

为了保持电荷守恒, 指定复矢量场 $W_\mu^+(x)$ 携带 $Q = +1$ 的电荷

不同代夸克间相互作用只发生在弱带电流耦合中，源自 CKM 矩阵 V 的非对角元

费米子电弱规范相互作用的顶点规则

$\gamma; \mu$

$$= -iQ_f e \gamma^\mu$$

$Z; \mu$

$$= -\frac{ig}{2c_W} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5)$$

$W; \mu$

$$= -\frac{ig}{\sqrt{2}} V_{ij} \gamma^\mu P_L$$

$W; \mu$

$$= -\frac{ig}{\sqrt{2}} V_{ji}^\dagger \gamma^\mu P_L$$

$W; \mu$

$$= -\frac{ig}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L$$

$W; \mu$

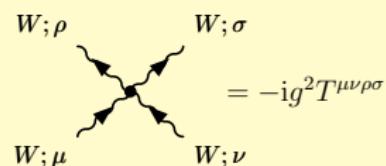
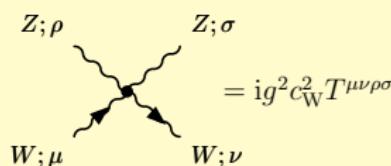
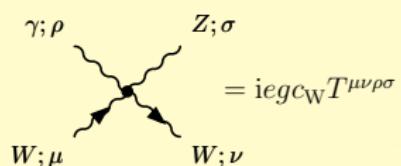
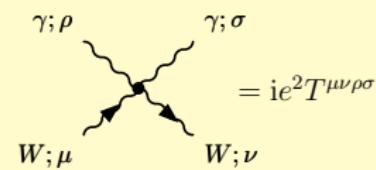
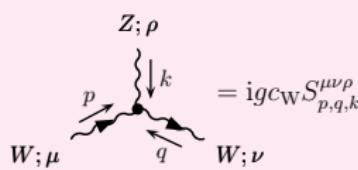
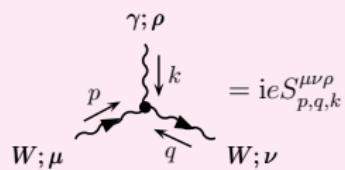
$$= -\frac{ig}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L$$

电弱规范玻色子的自相互作用

电弱规范场自身的 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{EWG}} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

$$\text{场强张量 } W_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + q\varepsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c, \quad B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$



图中 $S_{p,q,k}^{\mu\nu\rho} \equiv g^{\mu\nu}(p-q)^\rho + g^{\nu\rho}(q-k)^\mu + g^{\rho\mu}(k-p)^\nu$

$$T^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - 2g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}$$

CKM 矩阵

 概率守恒要求 CKM 矩阵 V 是幺正矩阵，标准参数化形式为

$$V = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c_{23} & s_{23} \\ & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & & s_{13}e^{-i\delta} \\ & 1 & \\ -s_{13}e^{i\delta} & & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} \\ -s_{12} & c_{12} \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

其中 $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$, 拟合实验数据得到

$$s_{12} = 0.22500 \pm 0.00067, \quad s_{23} = 0.04182^{+0.00085}_{-0.00074}$$

$$s_{13} = 0.00369 \pm 0.00011, \quad \delta = 1.144 \pm 0.027$$

 V 包含 3 个转动角 $\theta_{12} \simeq 13^\circ$, $\theta_{23} \simeq 2.4^\circ$, $\theta_{13} \simeq 0.21^\circ$,

1 个引起 CP 破坏的相角 $\delta \simeq 66^\circ$

夸克味混合

 如果只讨论第一、二代夸克的混合，CKM 矩阵可近似为

$$V_{ij} \simeq \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \\ 1 \end{pmatrix}$$

θ_C 称为 Cabibbo 角，满足 $\sin \theta_C = s_{12} = 0.225$

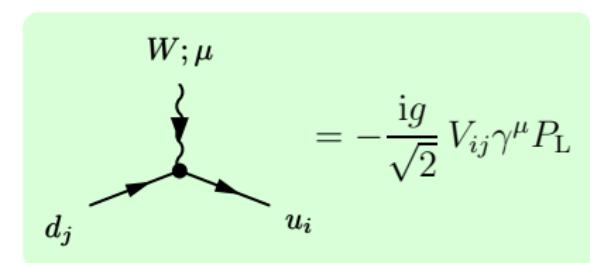
CKM 矩阵的非对角元非零意味着弱带电流可以耦合不同代的夸克

 $W^+ \rightarrow u'd'$ 过程在质量态上表现为

$$W^+ \rightarrow u\bar{d} \text{ (} V_{11} \text{ 引起)}$$

$$W^+ \rightarrow u\bar{s} \text{ (} V_{12} \text{ 引起)}$$

$$W^+ \rightarrow u\bar{b} \text{ (} V_{13} \text{ 引起)}$$



超出标准模型：中微子味混合



中微子振荡实验表明，中微子具有微小质量，而且存在味混合。



Dirac 中微子的味道本征态 (即规范本征态) 与质量本征态通过 Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata (PMNS) 矩阵 U 联系:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \textcolor{violet}{U} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \bar{c}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{13}e^{-i\bar{\delta}} \\ -\bar{s}_{12}\bar{c}_{23} - \bar{c}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{c}_{12}\bar{c}_{23} - \bar{s}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{s}_{23}\bar{c}_{13} \\ \bar{s}_{12}\bar{s}_{23} - \bar{c}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & -\bar{c}_{12}\bar{s}_{23} - \bar{s}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{c}_{23}\bar{c}_{13} \end{pmatrix}$$



$\bar{\theta}_{12} \sim 33^\circ$, $\bar{\theta}_{23} \sim 41^\circ$ (质量正序) 或 $\bar{\theta}_{23} \sim 50^\circ$ (质量逆序), $\bar{\theta}_{13} \sim 8.4^\circ$



 如果中微子是 Majorana 费米子，则额外存在 2 个 CP 破坏相角 ρ 和 σ ，PMNS 矩阵应该再右乘 $\text{diag}(1, e^{i\rho}, e^{i\sigma})$



太阳中微子振荡



$$\bar{\theta}_{12}$$



大气中微子振荡



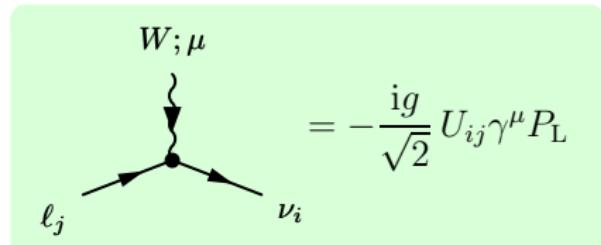
$$\bar{\theta}_{23}$$



反应堆中微子振荡



$$\bar{\theta}_{13}$$

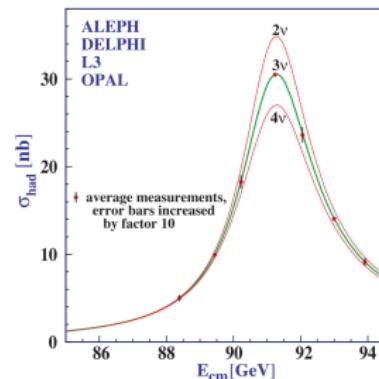
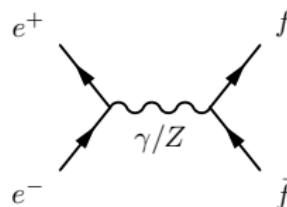


e^+e^- 湮灭

通过**电磁流**和**弱中性流**相互作用，

e^+e^- 可湮灭成一对正反费米子 $ff\bar{f}$

 $\sqrt{s} \sim m_Z$ 处出现 Z 的共振峰



e^+e^- 湫灭

通过**电磁流**和**弱中性流**相互作用，

e^+e^- 可湮灭成一对正反费米子 $f\bar{f}$

 $\sqrt{s} \sim m_Z$ 处出现 Z 的共振峰

受共振态和弱中性流影响较小时，

截面比 $R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$ 体现

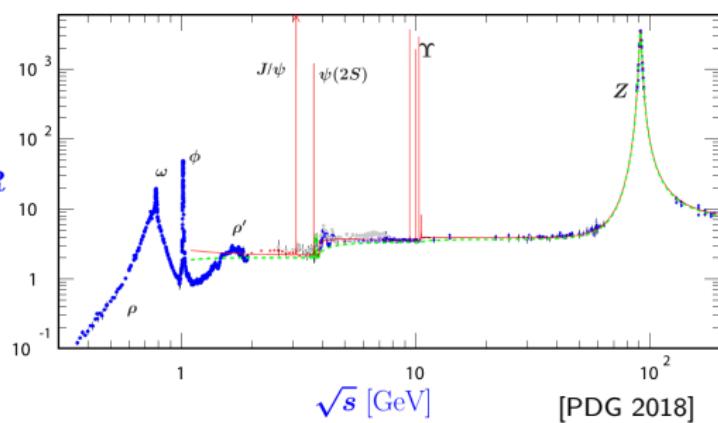
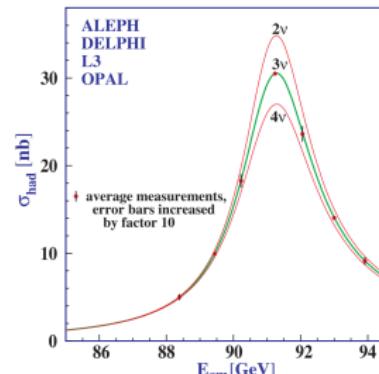
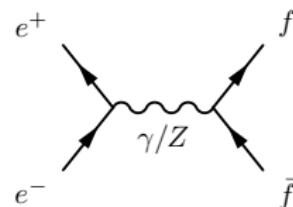
夸克味数、电荷跟 μ 子的相对差异

 $1 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 3.6 \text{ GeV}$ 处,

$$R \simeq 3 \left[2 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = 2 \quad \textcolor{blue}{R}$$

 $3.7 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 10 \text{ GeV}$ 处,

$$R \simeq 3 \left[2 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + 2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = \frac{10}{3}$$



β 衰变



弱相互作用引起原子核 β 衰变

质量数为 $A = Z + N$ 的原子核具有 Z 个质子和 N 个中子，通过 β 衰变会变成具有 $Z + 1$ 个质子和 $N - 1$ 个中子的原子核 A' ，即

$$A(Z, N) \rightarrow A'(Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}_e$$

在核子层次，以上过程体现为中子 β 衰变，

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

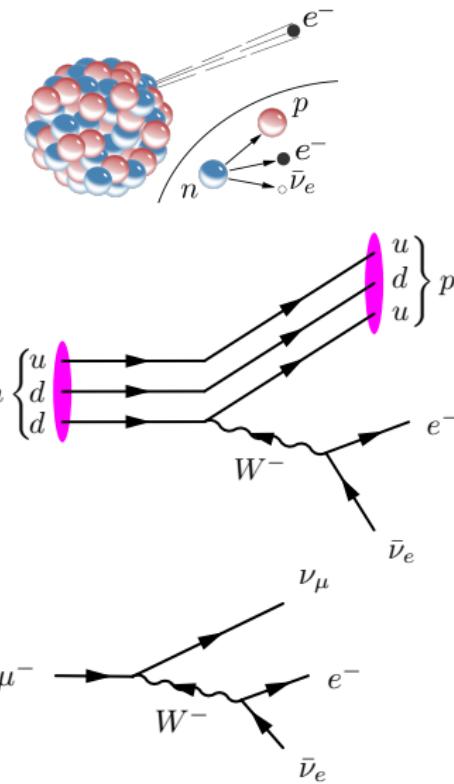
在夸克层次，以上过程体现为 d 夸克 β 衰变

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

此过程来自 W^- 玻色子传递的弱带电流相互作用

在轻子方面，类似的过程有 μ 子衰变

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$



介子弱衰变



弱带电流相互作用也会引起介子衰变

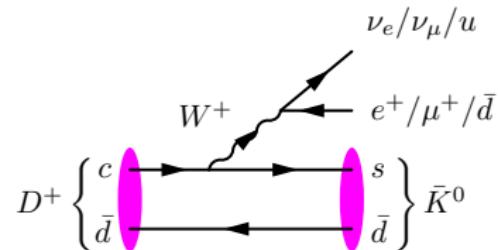


$D^+(c\bar{d})$ 衰变到 \bar{K}^0 和轻子或夸克 (介子)

$$D^+ \rightarrow \bar{K}^0 + \nu_e/\nu_\mu/u + e^+/\mu^+/\bar{d}$$



D^+ 中 \bar{d} 夸克实际没参与衰变，称为旁观者



介子弱衰变



弱带电流相互作用也会引起介子衰变



$D^+(cd)$ 衰变到 \bar{K}^0 和轻子或夸克 (👉 介子)

$$D^+ \rightarrow \bar{K}^0 + \nu_e/\nu_\mu/u + e^+/\mu^+/\bar{d}$$



D^+ 中 \bar{d} 夸克实际没参与衰变，称为旁观者



$\pi^- (\bar{u}d)$ 衰变到带电轻子和反中微子

$$\pi^- \rightarrow e^-/\mu^- + \bar{\nu}_e/\bar{\nu}_\mu$$



π^- 静止系中，角动量守恒要求末态轻子和
轻子的螺旋度相同，但弱带电流只耦合左旋费
米子和右旋反费米子，需要由质量翻转螺旋度

$$\text{Cloudy} \quad \frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^-\bar{\nu}_\mu)} \sim \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \simeq 2 \times 10^{-5}$$



$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ 分支比为 99.9877%， $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$ 分支比为 0.0123%

