量 子 场 论

第 6 章 Feynman 图

6.3 节和 6.4 节

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2022 年 9 月 1 日

6.3 节 ϕ^4 理论与对称性因子

- 如果拉氏量的相互作用项中含有多个全同的量子场，那么，在应用 Wick 定理时需要考虑一些**等价**的缩并方式，涉及到一些组合因子和对称性因子
- 本节以实标量场 $\phi(x)$ 的 ϕ^4 理论为例讨论这种情况
- ϕ^4 理论的拉氏量是 $\mathcal{L}_{\phi^4} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$，$m$ 是 ϕ 玻色子质量
- 相互作用拉氏量为 $\mathcal{L}_1 = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$，$\lambda$ 是一个实耦合常数
- 相互作用哈密顿量密度为 $\mathcal{H}_1 = -\mathcal{L}_1 = \frac{\lambda}{4!}\phi^4$
- $\mathrm{i}T$ 展开式的第 n 阶通项是

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T^{(n)} &= \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1)\cdots\mathcal{H}_1(x_n)] \\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\right)^n\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\mathsf{T}[\phi^4(x_1)\cdots\phi^4(x_n)]
\end{aligned}
$$

λ^1 阶

在 $\mathrm{i}T$ 展开式的第 1 阶，即 λ^1 阶，$\mathrm{i}T^{(1)}$ 涉及 4 个实标量场算符的时序乘积

$$\mathrm{i}T^{(1)} = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x\, \mathsf{T}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] = \sum_{j=1}^{3}\mathrm{i}T_j^{(1)}$$

这里 4 个实标量场算符是全同的，具有交换对称性

根据 Wick 定理，第一项不包含缩并，

$$\mathrm{i}T_1^{(1)} = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]$$

$C_4^2 = 6$ 种包含 1 次缩并的项彼此相等，贡献到第二项

$$\mathrm{i}T_2^{(1)} = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\,6\int \mathrm{d}^4x\, \mathsf{N}[\overbracket{\phi(x)\phi}(x)\phi(x)\phi(x)]$$

$C_3^1 = 3$ 种包含 2 次缩并的项彼此相等，贡献到第三项

$$\mathrm{i}T_3^{(1)} = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\,3\int \mathrm{d}^4x\, \mathsf{N}[\overbracket{\phi(x)\phi}(x)\overbracket{\phi(x)\phi}(x)]$$

$\phi\phi \to \phi\phi$ 散射过程

🚗 现在考虑 $\phi\phi \to \phi\phi$ **散射过程**，设初态为 $|i\rangle = |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle$，末态为 $\langle f| = \langle \mathbf{p}_1;\, \mathbf{p}_2|$，则 $\mathrm{i}T_1^{(1)}$ 对散射矩阵元的贡献是

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}_1;\, \mathbf{p}_2|\, \mathrm{i}T_1^{(1)}\, |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle &= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{p}_1;\, \mathbf{p}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]\, |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle \\
&= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\, 4! \int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{p}_1;\, \mathbf{p}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]\, |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle \\
&= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1+p_2)\cdot x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1+k_2)\cdot x} \\
&= -\mathrm{i}\lambda\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)
\end{aligned}
$$

🚙 第二步让 🍎 **2 个场算符与全同玻色子初态缩并**

🍊 **另外 2 个场算符与全同玻色子末态缩并**

🚕 一共有 $A_4^4 = 4!$ 种缩并方式，因而出现一个**组合因子 $4!$**

🚑 这个组合因子恰好与来自相互作用拉氏量的 **$1/4!$ 因子抵消**

$\phi\phi \to \phi\phi$ 散射的 Feynman 图

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{p}_1;\, \mathbf{p}_2 |\, \mathrm{i}T_1^{(1)}\, | \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2 \rangle \\
&= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{p}_1;\, \mathbf{p}_2 |\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]\, | \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2 \rangle \\
&= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1\cdot x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2\cdot x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1\cdot x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2\cdot x} \\
&= -\mathrm{i}\lambda\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)
\end{aligned}
$$

🚚 实标量玻色子内外线的**位置空间 Feynman 规则**与 6.1 节的 Yukawa 理论相同

$$\phi \overset{p}{\dashrightarrow} x \;=\; \langle 0|\, \phi(x)\, |\mathbf{p}\rangle = \langle 0|\, \phi^{(+)}(x)\, |\mathbf{p}\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$$

$$x \overset{p}{\dashrightarrow} \phi \;=\; \langle \mathbf{p}|\, \phi(x)\, |0\rangle = \langle \mathbf{p}|\, \phi^{(-)}(x)\, |0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$$

$$x \overset{p}{\dashrightarrow} y \;=\; \phi(y)\phi(x) = D_{\mathrm{F}}(y-x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}$$

🚌 实际上，**内外线 Feynman 规则**是由拉氏量中的**自由部分**决定的，因而**不依赖于相互作用理论**，具有**一般性**

顶点 Feynman 规则

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{p}_1;\, \mathbf{p}_2 |\, \mathrm{i}T_1^{(1)}\, | \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2 \rangle \\
&= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4 x\, \langle \mathbf{p}_1;\, \mathbf{p}_2 |\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]\, | \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2 \rangle \\
&= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1\cdot x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2\cdot x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1\cdot x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2\cdot x} \\
&= -\mathrm{i}\lambda\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)
\end{aligned}
$$

🚜 归纳出 ϕ^4 理论的**顶点 Feynman 规则**：

$$= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4 x$$

顶点 Feynman 规则

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{p}_1;\, \mathbf{p}_2 |\, \mathrm{i}T_1^{(1)}\, | \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2 \rangle \\
&= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{p}_1;\, \mathbf{p}_2 |\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]\, | \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2 \rangle \\
&= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1\cdot x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2\cdot x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1\cdot x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2\cdot x} \\
&= -\mathrm{i}\lambda\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)
\end{aligned}
$$

🚜 归纳出 ϕ^4 理论的**顶点 Feynman 规则**：

$$= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4x$$

🚚 应用这些 Feynman 规则，可以根据 Feynman 图直接写出第二步结果

🚌 相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_1 = -\dfrac{\lambda}{4!}\phi^4$ 包含 4 个全同 $\phi(x)$ 之积，当它们与初末态缩并时，会出现 $4!$ 种等价的缩并方式，产生**组合因子 $4!$**，它恰好与 $\mathcal{L}_1$ 中的 **$1/4!$ 因子**抵消

🛣️ 也就是说，我们在 $\mathcal{L}_1$ 中引入一个 **$1/4!$ 因子**是为了使**顶点规则**中**不会出现额外的组合因子**，方便 Feynman 图的计算

组合因子

- 从 Feynman 图的角度可以清楚地看出**组合因子 4!** 的来源
- 由于实标量玻色子是**纯中性粒子**，它的粒子线上**没有箭头**（注意，并非指表示动量方向的箭头），四条粒子线**对顶点而言是不可区分**的

组合因子

- 从 Feynman 图的角度可以清楚地看出组合因子 $4!$ 的来源
- 由于实标量玻色子是纯中性粒子，它的粒子线上没有箭头（注意，并非指表示动量方向的箭头），四条粒子线对顶点而言是不可区分的

- 第一条外线有 4 种连接顶点的选择
- 第二条外线有 3 种连接顶点的选择
- 第三条外线只剩 2 种连接顶点的选择
- 第四条外线只有 1 种连接顶点的选择
- 一共有 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ 种连接方式，得到组合因子 $4!$

$\phi\phi \to \phi\phi$ 散射截面

- $\phi\phi \to \phi\phi$ 散射矩阵元 $\langle \mathbf{p}_1;\, \mathbf{p}_2 |\, \mathrm{i}T_1^{(1)}\, | \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2 \rangle = -\mathrm{i}\lambda\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$
- $\phi\phi \to \phi\phi$ 领头阶不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M} = -\mathrm{i}\lambda$
- 由于初末态四个粒子质量相同，根据 5.5.3 小节知识，质心系中关于 $\mathbf{p}_1$ 的立体角 Ω 的微分散射截面是

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2}$$

- 它不依赖于 $\mathbf{p}_1$ 的极角 θ 和方位角 ϕ，只依赖于质心能 E_{CM}
- 由于末态两个 ϕ 粒子是**全同**的，末态对称性因子 $\mathcal{S} = 2$
- 对立体角 Ω 积分，得到 $\phi\phi \to \phi\phi$ 散射截面

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \int \mathrm{d}\Omega \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}\, 4\pi\, \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2} = \frac{\lambda^2}{32\pi E_{\mathrm{CM}}^2}$$

末态对称性因子

- 由于 $\phi\phi \to \phi\phi$ 末态中两个 ϕ 粒子是全同的，**末态对称性因子 $\mathcal{S} = 2$**
- 计算**散射截面**时需要除以 $\mathcal{S}$ 来**避免量子态的重复计算**
- 具体来说，在**质心系**中，末态中两个 ϕ 粒子的动量大小相等，方向相反

- 当 $\mathbf{p}_1$ **的方向**是 (θ, ϕ) 时，$\mathbf{p}_2$ **的方向**是 $(\pi - \theta, \phi + \pi)$
- 当 $\mathbf{p}_1$ **的方向**是 $(\pi - \theta, \phi + \pi)$ 时，$\mathbf{p}_2$ **的方向**则是 (θ, ϕ)
- 由于末态两个 ϕ 粒子是**全同**的，这两个情况实际上对应于**同一个量子态**
- 如果我们对 Ω 作 4π 立体角的积分，就会**双重计算**每个量子态
- 这就是**需要除以 $\mathcal{S} = 2$** 的原因

$\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 贡献的散射矩阵元

- 接下来讨论 $\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 贡献的 **ϕ 粒子自能图**
- 记初态为 $|i\rangle = |\mathbf{k}\rangle$，末态为 $\langle f| = \langle \mathbf{k}|$，则 $\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{k}|\, \mathrm{i}T_2^{(1)}\, |\mathbf{k}\rangle &= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\, 6 \int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{k}|\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]\, |\mathbf{k}\rangle \\
&= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\, 6 \cdot 2 \int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{k}|\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]\, |\mathbf{k}\rangle \\
&= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{2} \int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{k}|\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]\, |\mathbf{k}\rangle
\end{aligned}
$$

- 第一步中**组合因子 $C_4^2 = 6$** 计算在 $\phi^4(x)$ 中取 2 个场算符相互缩并的组合数
- 第二步中的**组合因子 $C_2^1 = 2$** 计算了对余下 2 个场算符与初末态缩并的组合数
- 这两个组合因子将**分母 $4! = 24$** 约化为 **2**，得到第三步的结果
- 这样剩下的 2 称为 **Feynman 图的对称性因子** (symmetry factor)

$\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

$$\langle \mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_2^{(1)}\,|\mathbf{k}\rangle = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{2}\int \mathrm{d}^4x\ \langle \mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]\,|\mathbf{k}\rangle$$

🛺 右图为相应的 ϕ 粒子自能图

🛹 它具有一条开始并结束于同一个顶点的内线，由于实标量玻色子的内线上没有箭头，这条内线的两端对于这个顶点而言是不可分辨的，即是全同的

👉 因而用内线的两端连接顶点时的 2 种连接方式实际上是同一种

🚲 在计算时需要除以 2，否则就会**双重计算**

🛴 这就是因子 2 称为 **Feynman 图的对称性因子**的原因，它体现了 Feynman 图关于全同粒子线的对称性

$\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

$$\langle \mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_2^{(1)}\,|\mathbf{k}\rangle = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{2}\int \mathrm{d}^4x\ \langle \mathbf{k}|\,\mathrm{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]\,|\mathbf{k}\rangle$$

🛺 右图为相应的 ϕ 粒子自能图

🛹 它具有一条开始并结束于同一个顶点的内线，由于实标量玻色子的内线上没有箭头，这条内线的两端对于这个顶点而言是不可分辨的，即是全同的

👉 因而用内线的两端连接顶点时的 2 种连接方式实际上是同一种

🚲 在计算时需要除以 2，否则就会**双重计算**

🛴 这就是因子 2 称为 **Feynman 图的对称性因子**的原因，它体现了 Feynman 图关于全同粒子线的对称性

🛵 实际上，**分析 Feynman 图对称性得到的因子总是与散射矩阵元计算中剩下的因子相同**，下面将继续验证这个规律

🏍️ 如果先画出 Feynman 图，再利用位置空间的 Feynamn 规则写出散射矩阵元，则最后必须**除以 Feynman 图的对称性因子**才能得出正确的结果

$\mathrm{i}T_3^{(1)}$ 贡献的气泡图

在 $\mathrm{i}T_3^{(1)}$ 的表达式中，正规乘积里面所有场算符都已经参与缩并了

因此相应的 Feynman 图是**气泡图**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_3^{(1)} &= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\,3\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] \\
&= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{8}\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]
\end{aligned}
$$

第一步中的**组合因子 $C_3^1 = 3$** 计算在**后 3 个场算符中取 1 个**与第 1 个场算符缩并的组合数

它将**分母 $4! = 24$** 约化为**对称性因子 8**

$\mathrm{i}T_3^{(1)}$ 贡献的气泡图

在 $\mathrm{i}T_3^{(1)}$ 的表达式中，正规乘积里面所有场算符都已经参与缩并了

因此相应的 Feynman 图是**气泡图**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_3^{(1)} &= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\,3\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] \\
&= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{8}\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]
\end{aligned}
$$

第一步中的**组合因子 $C_3^1 = 3$** 计算在**后 3 个场算符中取 1 个**与第 1 个场算符缩并的组合数

它将**分母 $4! = 24$** 约化为**对称性因子 8**

从 Feynman 图角度看，图中 **2 个**始末端连接同一顶点的**圈**各自贡献一个**因子 2**，而这 2 个圈彼此也是**全同**的，再贡献一个**因子 2**，因此 **Feynman 图的对称性因子**为 $2\cdot 2\cdot 2 = 8$，验证了上述规律

λ^2 阶

在 $\mathrm{i}T$ 展开式的第 2 阶，即 λ^2 阶，有

$$\mathrm{i}T^{(2)} = \frac{1}{2!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\right)^2 \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]$$

通过 Wick 定理可以将上式化为许多个包含正规乘积的项，这里只讨论对 ϕ 粒子自能图有贡献的项，有 3 种情况

第 1 种情况具有如下缩并结构，

$$\begin{aligned}\mathrm{i}T_1^{(2)} &= \frac{1}{2!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\right)^2 4\cdot 4\cdot 3\cdot 3 \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] \\ &= \frac{1}{2!}\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{4} \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\end{aligned}$$

从 $\phi^4(x)$ 和 $\phi^4(y)$ 里面分别取 1 个 $\phi(x)$ 和 1 个 $\phi(y)$ 缩并的方法有 $4\cdot 4$ 种

从余下 3 个 $\phi(x)$ [或 $\phi(y)$] 中取 2 个 $\phi(x)$ [或 $\phi(y)$] 缩并的方法有 $C_3^2 = 3$ 种

因此组合因子为 $4\cdot 4\cdot 3\cdot 3$

$\mathrm{i}T_1^{(2)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

- $\mathrm{i}T_1^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\langle\mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_1^{(2)}\,|\mathbf{k}\rangle = \frac{1}{2!}\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\{\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle$$

$$+\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\,\}$$

$$=\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle$$

- 第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，这 2 种方式具有**交换时空坐标 x 和 y 的对称性**，因而可以合成一项，贡献一个 **2! 因子**，恰好与最前面的 **1/2! 因子**抵消
- 从而得到第二步的结果，它表明这个过程的**对称性因子为 4**

$\mathrm{i}T_1^{(2)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

🚤 $\mathrm{i}T_1^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\langle\mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_1^{(2)}\,|\mathbf{k}\rangle = \frac{1}{2!}\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\{\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle$$

$$+\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\,\}$$

$$=\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle$$

🦆 第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，这 2 种方式具有**交换时空坐标 x 和 y 的对称性**，因而可以合成一项，贡献一个 **2! 因子**，恰好与最前面的 **1/2! 因子**抵消

🦢 从而得到第二步的结果，它表明这个过程的**对称性因子为 4**

🦩 相应的 Feynman 图具有 **2 个**始末端连接同一个顶点的**圈**，各自贡献一个**因子 2**，故 **Feynman 图的对称性因子**为 $2\cdot 2=4$

$\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 缩并结构

第 2 种情况具有如下缩并结构，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_2^{(2)} &= \frac{1}{2!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\right)^2 4\cdot 4\cdot 6 \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] \\
&= \frac{1}{2!}\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{6}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]
\end{aligned}
$$

从 $\phi^4(x)$ 和 $\phi^4(y)$ 里面取 **3 个 $\phi(x)$** 和 **3 个 $\phi(y)$** 出来的方法有 $C_4^3C_4^3 = 4\cdot 4$ 种

将这 3 个 $\phi(x)$ 和 3 个 $\phi(y)$ 彼此缩并的**排列方法有 $3! = 6$ 种**

因而**组合因子是 $4\cdot 4\cdot 6$**

$\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

🚢 $\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\langle \mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_2^{(2)}\,|\mathbf{k}\rangle = \frac{1}{2!}\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{6}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\{\langle \mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle$$

$$+\langle \mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\,\}$$

$$= \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{6}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle \mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle$$

🦎 第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，它们具有**交换时空坐标 x 和 y 的对称性**，合为一项之后，抵消掉最前面的 **$1/2!$ 因子**

🦖 结果表明这个过程的**对称性因子为 6**

$\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

🚢 $\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\langle \mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_2^{(2)}\,|\mathbf{k}\rangle = \frac{1}{2!}\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{6}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\{\langle \mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle$$

$$+\langle \mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\,\}$$

$$=\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{6}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle \mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle$$

🦎 第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，它们具有**交换时空坐标 x 和 y 的对称性**，合为一项之后，抵消掉最前面的 **$1/2!$ 因子**

🦖 结果表明这个过程的**对称性因子为 6**

🦕 相应的 Feynman 图具有 **3 条全同内线**连接两个不同的顶点，这 3 条内线有 **3! 种排列方法**，故 **Feynman 图的对称性因子**为 $3! = 6$

$\mathrm{i}T_3^{(2)}$ 缩并结构

第 3 种情况包含具有如下缩并结构的两项，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_3^{(2)} &= \frac{1}{2!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\right)^2 6\cdot 6\cdot 2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\{\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] \\
&\qquad\qquad + \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\} \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{8}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]
\end{aligned}
$$

在第一步中，花括号内的两项具有**交换时空坐标 x 和 y 的对称性**，合为一项则抵消掉最前面的 **$1/2!$ 因子**

花括号内的两项具有**相同**的组合因子

在每一项中，从 $\phi^4(x)$ 和 $\phi^4(y)$ 里面分别取 **2 个 $\phi(x)$** 和 **2 个 $\phi(y)$** 出来的方法有 $C_4^2C_4^2 = 6\cdot 6$ 种，将这 2 个 $\phi(x)$ 和 2 个 $\phi(y)$ 彼此缩并的**排列方法有 2 种**

因而共同的**组合因子为 $6\cdot 6\cdot 2$**

$\mathrm{i}T_3^{(2)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

🚢 $\mathrm{i}T_3^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\langle\mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_3^{(2)}\,|\mathbf{k}\rangle = \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{8}\,2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\;\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle$$

$$= \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\;\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle$$

🐘 在第一步中，**与初末态缩并**的方式有 2 种，因而**组合因子为 2**，结果表明**对称性因子为 4**

$\mathrm{i}T_3^{(2)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图

🚢 $\mathrm{i}T_3^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\langle\mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_3^{(2)}\,|\mathbf{k}\rangle = \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{8}\,2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\;\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle$$

$$= \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\;\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle$$

🦏 在第一步中，**与初末态缩并**的方式有 2 种，因而**组合因子为 2**，结果表明**对称性因子为 4**

🦌 在相应的 Feynman 图里面，始末端连接同一顶点的 **1 个圈**贡献一个**因子 2**

🐆 连接两个不同顶点的 **2 条全同内线**有 **2 种排列方法**

🐅 故 **Feynman 图的对称性因子**为 $2\cdot 2 = 4$

动量空间 Feynman 规则

转到**动量空间**，**ϕ^4 理论**的 **Feynman 规则**如下

1. 实标量玻色子入射外线： $= 1$
2. 实标量玻色子出射外线： $= 1$
3. 实标量玻色子传播子： $= \dfrac{\mathrm{i}}{p^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon}$
4. **ϕ^4 相互作用顶点**： $= -\mathrm{i}\lambda$
5. 出入每个顶点的内外线四维动量满足能动量守恒关系
6. 每个未定的圈动量 p^μ 贡献一个积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}$
7. 每个 Feynman 图的表达式要**除以**它的**对称性因子**

动量空间 Feynman 规则

转到**动量空间**，**ϕ^4 理论**的 **Feynman 规则**如下

1. 实标量玻色子入射外线： $= 1$
2. 实标量玻色子出射外线： $= 1$
3. 实标量玻色子传播子： $= \dfrac{\mathrm{i}}{p^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon}$
4. **ϕ^4 相互作用顶点**： $= -\mathrm{i}\lambda$
5. 出入每个顶点的内外线四维动量满足能动量守恒关系
6. 每个未定的圈动量 p^μ 贡献一个积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}$
7. 每个 Feynman 图的表达式要**除以**它的**对称性因子**

将 ϕ^4 相互作用项 $\mathcal{L}_1 = -\dfrac{\lambda}{4!}\phi^4$ 中的 4 个场算符 ϕ 剥离，乘以 i，还要再乘上 4 个 ϕ 的**排列数 $4!$**，才得到**顶点规则的表达式 $-\mathrm{i}\lambda$**

6.4 节　一般内外线 Feynman 规则

上述讨论表明，**外线和内线的 Feynman 规则**不依赖于相互作用理论，是由拉氏量中的自由部分决定的，**具有一般性**

本节讨论**复标量场**、**有质量实矢量场**和**无质量实矢量场**的**一般内外线规则**，这些规则适用于各种相关的相互作用理论

6.4 节　一般内外线 Feynman 规则

上述讨论表明，外线和内线的 Feynman 规则**不依赖**于相互作用理论，是由拉氏量中的自由部分决定的，具有一般性

本节讨论复标量场、有质量实矢量场和无质量实矢量场的一般内外线规则，这些规则适用于各种相关的相互作用理论

(1) 复标量场 $\phi(x)$ 描述的玻色子有正反之分，引入两种动量为 $\mathbf{p}$ 的单粒子态，

正标量玻色子 ϕ 的单粒子态 $\left|\mathbf{p}^{+}\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\left|0\right\rangle$

反标量玻色子 $\bar{\phi}$ 的单粒子态 $\left|\mathbf{p}^{-}\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b_{\mathbf{p}}^{\dagger}\left|0\right\rangle$

$\phi(x)$ 与正标量玻色子初态的缩并为

$$\overbracket{\phi(x)\left|\mathbf{p}^{+}\right\rangle} \equiv \phi^{(+)}(x)\left|\mathbf{p}^{+}\right\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\, a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\left|0\right\rangle$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}[a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}]\left|0\right\rangle = \int \mathrm{d}^3 q\,\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\left|0\right\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left|0\right\rangle$$

第四步用到产生湮灭算符的对易关系

复标量场与初末态的缩并

- $\phi^\dagger(x)$ 与反标量玻色子初态的缩并为

$$\overbracket{\phi^\dagger(x)\left|\mathbf{p}^-\right\rangle} \equiv \phi^{\dagger(+)}(x)\left|\mathbf{p}^-\right\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\, b_\mathbf{q}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\sqrt{2E_\mathbf{p}}\, b_\mathbf{p}^\dagger\left|0\right\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left|0\right\rangle$$

- $\phi^\dagger(x)$ 与正标量玻色子末态的缩并为

$$\overbracket{\left\langle\mathbf{p}^+\right|\phi^\dagger}(x) \equiv \left\langle\mathbf{p}^+\right|\phi^{\dagger(-)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\left\langle 0\right|\sqrt{2E_\mathbf{p}}\, a_\mathbf{p}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\, a_\mathbf{q}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle 0\right|\left[a_\mathbf{p}, a_\mathbf{q}^\dagger\right] = \int \mathrm{d}^3 q\,\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle 0\right|\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \left\langle 0\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$$

- $\phi(x)$ 与反标量玻色子末态的缩并为

$$\overbracket{\left\langle\mathbf{p}^-\right|\phi}(x) \equiv \left\langle\mathbf{p}^-\right|\phi^{(-)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\left\langle 0\right|\sqrt{2E_\mathbf{p}}\, b_\mathbf{p}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\, b_\mathbf{q}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} = \left\langle 0\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$$

复标量场一般内外线规则

- 用带箭头的虚线表示复标量玻色子的运动，线上的箭头可认为是某种 U(1) 荷流动的方向，或者说是玻色子数流动的方向
- 由上述结果及 Feynman 传播子表达式，复标量场的位置空间内外线规则如下

$$= \langle 0|\, \overbrace{\phi(x)\,|\mathbf{p}^+}\rangle = \langle 0|\, \phi^{(+)}(x)\,|\mathbf{p}^+\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$$

$$= \langle 0|\, \overbrace{\phi^\dagger(x)\,|\mathbf{p}^-}\rangle = \langle 0|\, \phi^{\dagger(+)}(x)\,|\mathbf{p}^-\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$$

$$= \langle \overbrace{\mathbf{p}^+|\, \phi^\dagger}(x)\,|0\rangle = \langle \mathbf{p}^+|\, \phi^{\dagger(-)}(x)\,|0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$$

$$= \langle \overbrace{\mathbf{p}^-|\, \phi}(x)\,|0\rangle = \langle \mathbf{p}^-|\, \phi^{(-)}(x)\,|0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$$

$$= \overbrace{\phi(y)\phi^\dagger}(x) = D_{\mathrm{F}}(y-x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}$$

- 其中 m_ϕ 是标量玻色子 ϕ 的质量

有质量实矢量场

(2) 有质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 描述纯中性矢量玻色子 A，具有 3 种螺旋度 $\lambda = \pm, 0$

记动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的 A 粒子态为 $|\mathbf{p}, \lambda\rangle = \sqrt{2E_\mathbf{p}}\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} |0\rangle$

$A^\mu(x)$ 与实矢量玻色子初态的缩并为

$$
\begin{aligned}
\overbrace{A^\mu(x)\,|\mathbf{p}}, \lambda\rangle &\equiv A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p}, \lambda\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^\mu(\mathbf{q}, \lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \sqrt{2E_\mathbf{p}}\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} |0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^\mu(\mathbf{q}, \lambda') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} [a_{\mathbf{q},\lambda'}, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}] |0\rangle \\
&= \int \mathrm{d}^3 q \frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^\mu(\mathbf{q}, \lambda') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \delta_{\lambda'\lambda} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) |0\rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} |0\rangle
\end{aligned}
$$

第四步用到产生湮灭算符的对易关系

有质量实矢量场一般外线规则

- $A^\mu(x)$ 与实矢量玻色子末态的缩并为

$$\langle \mathbf{p},\lambda|\, A^\mu(x) \equiv \langle \mathbf{p},\lambda|\, A^{\mu(-)}(x)$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \langle 0|\, \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p},\lambda} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{q},\lambda') a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{q},\lambda') \langle 0|\, [a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}]\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}$$

$$= \int \mathrm{d}^3 q \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm,0} \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{q},\lambda') \langle 0|\, \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} = \langle 0|\, \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p},\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$$

- 用波浪线表示有质量实矢量玻色子的运动，相应的位置空间外线规则为

$$= \langle 0|\, A^\mu(x)\, |\mathbf{p},\lambda\rangle = \langle 0|\, A^{\mu(+)}(x)\, |\mathbf{p},\lambda\rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$$

$$= \langle \mathbf{p},\lambda|\, A^\mu(x)\, |0\rangle = \langle \mathbf{p},\lambda|\, A^{\mu(-)}(x)\, |0\rangle = \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p},\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$$

非协变项

- 现在讨论有质量实矢量场的内线规则
- 前面的计算表明，有质量矢量场的 **Feynman 传播子**表达式包含一个**非协变项**
- 接下来的讨论将说明这个非协变项在微扰论中的贡献恰好被**相互作用哈密顿量密度**中**非协变项**的贡献抵消，因而理论仍然具有 **Lorentz 协变性**

非协变项

- 现在讨论有质量实矢量场的内线规则
- 前面的计算表明，有质量矢量场的 **Feynman 传播子**表达式包含一个**非协变项**
- 接下来的讨论将说明这个非协变项在微扰论中的贡献恰好被**相互作用哈密顿量密度**中**非协变项**的贡献抵消，因而理论仍然具有 **Lorentz 协变性**
- 假设相互作用拉氏量具有 $\mathcal{L}_1 = gJ_\mu A^\mu$ 的形式，则 5.1.2 小节讨论表明**相互作用绘景**中的相互作用哈密顿量密度为 $\mathcal{H}_1(x) = gJ_\mu(x)A^\mu(x) + \dfrac{g^2}{2m_A^2}[J^0(x)]^2$
- g 是**耦合常数**，m_A 是**实矢量玻色子的质量**，右边第二项就是**非协变项**
- $\mathrm{i}T$ 展开式的第 1 阶为 $\mathrm{i}T^{(1)} = -\mathrm{i}\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\, \mathsf{T}\Big[gJ_\mu(x)A^\mu(x) + \frac{g^2}{2m_A^2}\, J^0(x)J^0(x)\Big]$
- 第 2 阶为 $\mathrm{i}T^{(2)} = \dfrac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\, \mathsf{T}\Big\{\Big(gJ_\mu(x)A^\mu(x) + \frac{g^2}{2m_A^2}[J^0(x)]^2\Big)$

$$\times\Big(gJ_\nu(y)A^\nu(y) + \frac{g^2}{2m_A^2}[J^0(y)]^2\Big)\Big\}$$

g^2 阶

- Feynman 传播子 $\overbrace{A^\mu(x)A^\nu}(y) = \Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)$ 出现在 $n \geq 2$ 的 $\mathrm{i}T^{(n)}$ 中
- 比如，$\mathrm{i}T^{(2)}$ 包含一个出现 Feynman 传播子的 g^2 阶的项，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_1^{(2)} &= \frac{(\mathrm{i}g)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[J_\mu(x)\overbrace{A^\mu(x)J_\nu(y)A^\nu}(y)] \\
&= \frac{(\mathrm{i}g)^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}\left[J_\mu(x)J_\nu(y)\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)\right] \\
&= \frac{(\mathrm{i}g)^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}\Bigg\{J_\mu(x)J_\nu(y) \\
&\qquad \times\left[\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2-m_A^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \frac{\mathrm{i}}{m_A^2}\,g^{\mu0}g^{\nu0}\delta^{(4)}(x-y)\right]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

Feynman 传播子中的非协变项

- 另一方面，$\mathrm{i}T^{(1)}$ 也包含一个 g^2 阶的项，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_1^{(1)} &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}\left[\frac{g^2}{2m_A^2}\,J^0(x)J^0(x)\right] = \frac{(\mathrm{i}g)^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}\left[\frac{\mathrm{i}}{m_A^2}\,J^0(x)J^0(y)\delta^{(4)}(x-y)\right] \\
&= \frac{(\mathrm{i}g)^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}\left[\frac{\mathrm{i}}{m_A^2}\,J_\mu(x)J_\nu(y)g^{\mu0}g^{\nu0}\delta^{(4)}(x-y)\right]
\end{aligned}
$$

源自 $\mathcal{H}_1(x)$ 的非协变项

有质量实矢量场一般内线规则

在微扰论的 g^2 阶计算中，必须同时考虑 $\mathrm{i}T_1^{(2)}$ 和 $\mathrm{i}T_1^{(1)}$ 的贡献

两者相加，则非协变项恰好相消，得到一个 Lorentz 协变的表达式

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}T_1^{(2)} + \mathrm{i}T_1^{(1)} \\
&= \frac{(\mathrm{i}g)^2}{2} \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathsf{N} \left\{ J_\mu(x) J_\nu(y) \left[\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} \right] \right\}
\end{aligned}
$$

上式方括号里面的部分是 Feynman 传播子表达式中的 **Lorentz 协变项**，在实际计算中，只有这一项有贡献

因此可以将有质量实矢量场的位置空间内线规则设置为

$= \overbracket{A^\mu(y) A^\nu(x)}$ 的 Lorentz 协变项

$$
= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}
$$

无质量实矢量场

(3) 无质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 描述纯中性无质量矢量玻色子 A，有 2 种螺旋度 $\lambda = \pm$

♟ 记动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的相应 A 粒子态为 $|\mathbf{p},\lambda\rangle = \sqrt{2E_\mathbf{p}}\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle$

🎲 $A^\mu(x)$ 正能解部分和负能解部分可以表达成

$$A^{\mu(+)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left[\sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)b_{\mathbf{p},\sigma} + \sum_{\lambda=\pm}\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\right]$$

$$A^{\mu(-)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\left[\sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} + \sum_{\lambda=\pm}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\right]$$

🀄 $A^\mu(x)$ 与**实矢量玻色子初态**的缩并为

$$\begin{aligned}
&\overbracket{A^\mu(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle} \equiv A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\left[\sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{q},\sigma)b_{\mathbf{q},\sigma} + \sum_{\lambda'=\pm}\varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}\right]\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\left\{\sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{q},\sigma)[b_{\mathbf{q},\sigma}, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}] + \sum_{\lambda'=\pm}\varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda')[a_{\mathbf{q},\lambda'}, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}]\right\}|0\rangle \\
&= \int \mathrm{d}^3q\,\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\sum_{\lambda'=\pm}\varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\delta_{\lambda'\lambda}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|0\rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,|0\rangle
\end{aligned}$$

无质量实矢量场一般内外线规则

$A^\mu(x)$ 与实矢量玻色子末态的缩并为

$$\langle \mathbf{p},\lambda|\, A^\mu(x) \equiv \langle \mathbf{p},\lambda|\, A^{\mu(-)}(x)$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\, \langle 0|\, \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p},\lambda}\, \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \left[\sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{q},\sigma) b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma} + \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{q},\lambda') a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \right]$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\, \langle 0| \left\{ \sum_{\sigma=0,3} e^\mu(\mathbf{q},\sigma) [a_{\mathbf{p},\lambda}, b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma}] + \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{q},\lambda') [a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] \right\}$$

$$= \int \mathrm{d}^3 q\, \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{q},\lambda')\, \langle 0|\, \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} = \langle 0|\, \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p},\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$$

用波浪线表示无质量实矢量玻色子的运动，在 **Feynman 规范**下，无质量实矢量场的位置空间内外线规则为

$A,\lambda;\mu$ x $= \langle 0|\, A^\mu(x)\, |\mathbf{p},\lambda\rangle = \langle 0|\, A^{\mu(+)}(x)\, |\mathbf{p},\lambda\rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$

x $A,\lambda;\mu$ $= \langle \mathbf{p},\lambda|\, A^\mu(x)\, |0\rangle = \langle \mathbf{p},\lambda|\, A^{\mu(-)}(x)\, |0\rangle = \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p},\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$

$x;\nu$ $y;\mu$ $= A^\mu(y) A^\nu(x) = \Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(y-x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}$

动量空间一般内外线 Feynman 规则

转到**动量空间**中，有以下**一般内外线 Feynman 规则**

1. 正标量玻色子入射外线： $= 1$
2. 反标量玻色子入射外线： $= 1$
3. 正标量玻色子出射外线： $= 1$
4. 反标量玻色子出射外线： $= 1$
5. 复标量玻色子传播子： $= \dfrac{\mathrm{i}}{p^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon}$

动量空间一般内外线 Feynman 规则

7. 有质量实矢量玻色子入射外线：$A, \lambda; \mu$ $= \varepsilon^{\mu}(\mathbf{p}, \lambda)$

8. 有质量实矢量玻色子出射外线： $A, \lambda; \mu = \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p}, \lambda)$

9. 有质量实矢量玻色子传播子：ν $\mu = \dfrac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu} - p^{\mu}p^{\nu}/m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + \mathrm{i}\epsilon}$

10. 无质量实矢量玻色子入射外线：$A, \lambda; \mu$ $= \varepsilon^{\mu}(\mathbf{p}, \lambda)$

11. 无质量实矢量玻色子出射外线： $A, \lambda; \mu = \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p}, \lambda)$

12. 无质量实矢量玻色子传播子：ν $\mu = \dfrac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{p^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ （Feynman 规范）