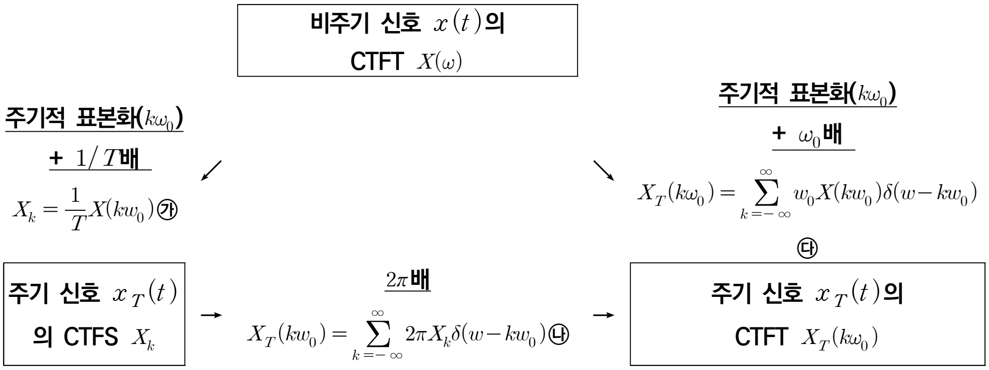
12주차 주기 신호의 CTFT 및 주파수 응답

12.1 주기 신호의 CTFT

- **시간 영역 비주기 신호를 주기 T로 무한히 반복한다는 것은 주파수 영역에서 연속 스펙트럼(비주기 신호의 CTFT)을 주기 $\omega_0 = 2\pi/T$로 표본화하여 ω_0배 한다는 것(주기 신호의 CTFT)을 의미한다.**

CTFT의 디리클레 조건은 한 주기 내에서의 수렴성만을 요구하는 CTFS의 디리클레 조건을 전 시간 영역으로 확대한 것이다. 즉 주기 신호는 전력 신호이므로 전 주기에 대한 수렴성을 요구하는 CTFT의 디리클레 조건을 만족하지 못한다. 따라서 주기 신호의 CTFT는 존재하지 않는다. 그러나 주기 신호는 CTFT 정의식이 아닌 다른 방법을 이용하여 간접적으로 CTFT가 가능하다. 앞서 쌍대성에 의해 직류 함수의 CTFT가 단위 임펄스일 것을 예상해 역 CTFT식으로 변환을 수행한 것도 하나의 예이다. 중요한 것은 주기 신호의 CTFT식에는 항상 단위 임펄스가 포함된다는 것이다. 반대로 CTFT식에 단위 임펄스가 있으면 시간 함수가 주기 신호임을 의미한다.



[그림 12.1] 주기 신호의 CTFT

본 절에서는 주기 신호의 CTFT를 얻는 일반적인 방법을 **[그림 12.1]**과 함께 학습한다. 앞서 언급하였고 글 상자에서 증명하기도 하였지만, 비주기 신호의 CTFT식과 주기 신호의 CTFS 계수와는 다음과 같은 관계가 있다(㉮).

$$X_k = \frac{X(k\omega_0)}{T}$$

위 식은 비주기 신호의 연속 스펙트럼 $X(\omega)$을 주기 ω_0로 표본화하고 주기 T로 나누면 주기 신호의 이산 스펙트럼 X_k를 얻을 수 있다는 것을 의미한다.

㉰식의 증명

비주기 신호 $x_T(t)$대신 주기 신호 $x(t)$를 대입한 CTFS 계산식과 CTFT 계산식을 아래와 같이 비교하면 $X_k = \frac{1}{T}X(kw_0)$이 성립한다.

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jkw_0 t}dt \quad \Leftrightarrow \quad X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt$$

한편, 주기 신호의 CTFS 계수로부터 주기 신호의 CTFT를 얻기 위해서는 글 상자에 증명된 바와 같이 계수 2π만을 곱해주면 된다(㉯).

$$X_T(kw_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi X_k \delta(w - kw_0)$$

위 식에서 임펄스 신호는 기본 주파수의 정수 배수에 해당하는 주파수의 위치를 규정하는 지시자임을 유의하자. 위 식은 CTFS의 계수에 2π를 곱하고 기본 주파수 ω_0의 정수배에 해당하는 주파수마다 계수를 늘어놓으면 주기 신호의 CTFT가 얻어진다는 것을 알려준다.

㉯식의 증명

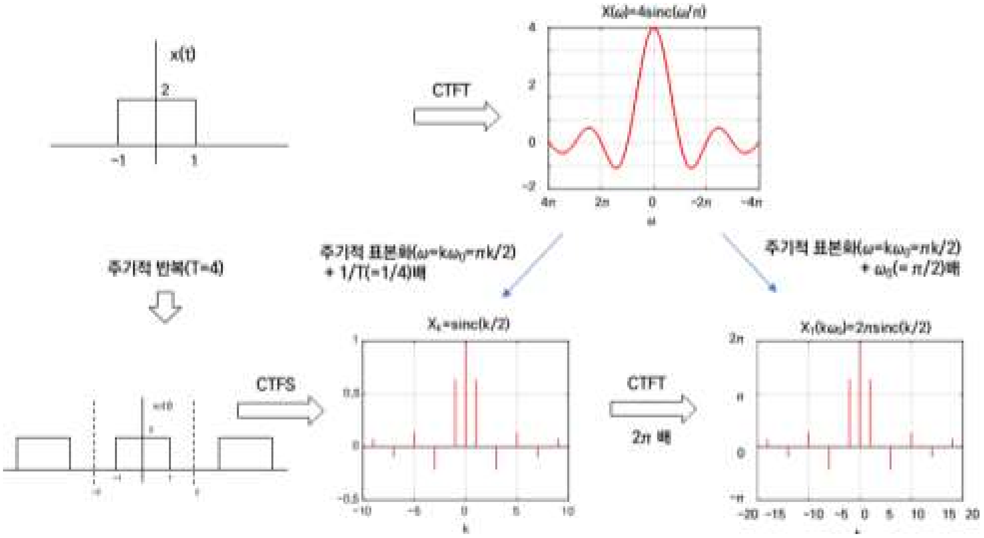
주기 신호 $x_T(t)$의 CTFT식에 CTFS 계산식을 대입하면 증명된다.

$$\begin{aligned} X_T(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-jwt}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jkw_0 t}\right)e^{-jwt}dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-\infty}^{\infty}(e^{jkw_0 t})e^{-jwt}dt = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(w - kw_0) \end{aligned}$$

앞서 증명하였던 ㉮식을 ㉯식에 대입하면 다음과 같이 비주기 신호의 CTFT로부터 주기 신호의 CTFT을 얻어내는 ㉰식을 얻을 수 있다.

$$X_T(kw_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_0 X(kw_0)\delta(w - kw_0)$$

위 식은 스펙트럼이 $X(\omega)$인 비주기 신호 $x(t)$를 주기 T로 반복하여 주기 신호 $x_T(t)$로 변화시킨다는 것은 다음과 같이 주파수 영역에서 연속 스펙트럼 $X(\omega)$를 주기 $\omega_0 = 2\pi/T_0$로 표본화하고 표본화한 값에 ω_0를 곱해 크기를 정규화하여 $X_T(k\omega_0)$를 얻어내는 것과 같다는 것을 표현한다.



[그림 12.2] 주기 신호의 CTFT

[그림 12.2]의 사각형 펄스를 이용하여 주기 신호의 CTFT를 이해하자. 비주기 사각형 펄스와 싱크 스펙트럼은 다음과 같은 CTFT 쌍의 관계가 있다.

$$x(t) = 2rect\left(\frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow X(\omega) = 4\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

시간 영역에서 비주기 신호를 주기 $T(=4)$로 반복하여 주기 신호로 만들어 낸다는 것은 앞서 공부한 것처럼 주파수 영역에서 연속 스펙트럼을 주기 $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/2$로 표본화하고 표본화한 값에 ω_0를 곱해 크기를 정규화하는 것과 등가이다. 따라서 주기적인 사각형 신호의 CTFT 쌍은 다음과 같이 구해진다.

$$x_T(t) \Leftrightarrow$$
$$X_T(k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4\omega_0 \mathrm{sinc}\left(\frac{k\omega_0}{\pi}\right)\delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\delta\left(\omega - k\frac{\pi}{2}\right)$$

비주기 사각형 펄스의 CTFT 결과를 주기 $\omega_0 = \pi/2$로 표본화하고 주기 $1/T = 1/4$로 나누면 다음과 같이 주기 신호의 CTFS 계수를 구할 수 있다.

$$X_k = \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\frac{\pi}{2}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) e^{jk\frac{\pi}{2}t}$$

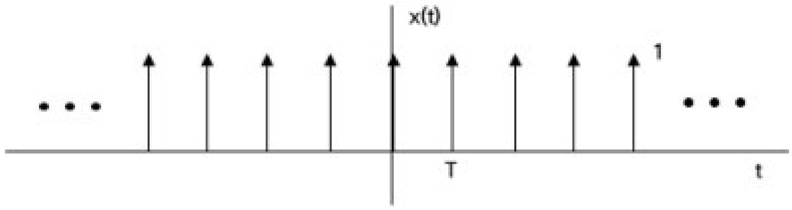
위 식에서 복소 정현파는 기본 주파수의 배수에 해당하는 주파수의 위치를 규정하는 지시자이면서 스펙트럼에서 단위 임펄스에 대응된다는 사실을 알아두자. 따라서 주기 신호의 CTFT는 주기 신호의 CTFS의 계수에 2π를 곱하여 다음과 같이 얻을 수도 있다.

$$X_T(kw_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi X_k \delta(w - kw_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi sinc\left(\frac{k}{2}\right)\delta\left(w - k\frac{\pi}{2}\right)$$

본 절의 논의에 따라 CTFS는 CTFT의 특별한 경우임을 이해해야 한다.

[예제 12.1] 임펄스 신호 열의 CTFT

주기가 T인 단위 임펄스 신호 열 $x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT)$이 있다.



① 한 주기를 추출한 비주기 신호의 CTFT $X(\omega)$을 구하여라.

② ①의 결과로부터 주기 신호의 CTFS의 계수 X_k를 구하여라.

③ ①과 ②의 결과로부터 주기 신호의 CTFT $X_T(\omega)$을 구하여라.

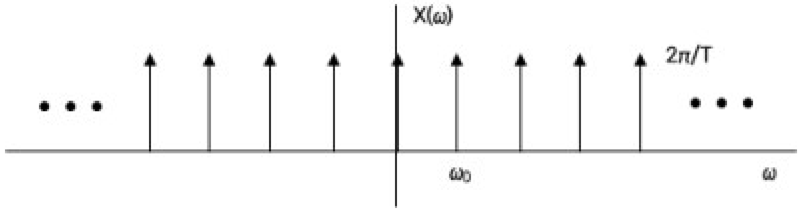
[해답]

① 한 주기만을 추출한 비주기 신호인 $\delta(t)$의 CTFT는 $X(\omega) = 1$이다.

② 기본 주파수는 $\omega_0 = 2\pi/T$이므로 $X(\omega) = 1$을 ω_0로 표본화하고 $1/T$를 곱하면 $X_k = X(k\omega_0)/T = 1/T$이다. 이는 모든 k에 대해 $X_k = 1/T$이므로 ω_0마다 크기 $1/T$인 임펄스가 주기적으로 반복됨을 의미한다.

③ ①로부터 $X(\omega) = 1$을 ω_0로 표본화하고 ω_0를 곱하되, 주파수의 위치 지시자인 임펄스를 포함하면 $X_T(kw_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_0 X(kw_0)\delta(w - kw_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T}\delta\left(w - k\frac{2\pi}{T}\right)$이다.

②로부터 2π를 곱하되, 주파수의 위치 지시자인 임펄스를 포함하면 $X_T(kw_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi X_k \delta(w - kw_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T}\delta\left(w - k\frac{2\pi}{T}\right)$이다.



시간 영역에서 임펄스 신호 열의 CTFT는 주기의 역수가 스케일링 되고 샘플링된 같은 형태의 임펄스 스펙트럼 열이라는 사실을 유의하자.

12.2 CTFT 성질의 정리

- **CTFT의 성질을 [표 12.1]에 정리하여 나타내었다.**

성질	
켤레 대칭	$\lvert X(-\omega)\rvert = \lvert X(\omega)\rvert, \ \angle X(-\omega) = -\angle X(\omega)$
	$X(-\omega) = \lvert X(-\omega)\rvert e^{j\angle X(-\omega)} = \lvert X(\omega)\rvert e^{-j\angle X(\omega)} = X^{*}(\omega)$
	$Re[X(-\omega)] = Re[X(\omega)], \ Im[X(-\omega)] = -Im[X(\omega)]$
대칭성	• 짝수 대칭이면 짝수 대칭 실수 스펙트럼, 위상 스펙트럼은 0, $\pm\pi$ • 홀수 대칭이면 홀수 대칭 허수 스펙트럼, 위상 스펙트럼은 $\pm\pi/2$
표본화	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$
복제	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)dt = x(t)\otimes\delta(t) = x(t)$
쌍대성	$X(t) \Leftrightarrow x(-\omega)$
성형성	$F[c_1x_1(t)+c_2x_2(t)] = c_1X_1(\omega)+c_2X_2(\omega)$

시간 확장	$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right),\ x(-t) \Leftrightarrow X(-\omega)$
복소 켤레	$x^{*}(t) \Leftrightarrow X^{*}(-\omega),\ x^{*}(-t) \Leftrightarrow X^{*}(\omega)$
시간 지연	$x(t-t_0) \Leftrightarrow \exp(-j\omega t_0)X(\omega)$
주파수 지연	$e^{j\omega t_0}x(t) \Leftrightarrow X(\omega-\omega_0)$
컨벌루션	$x_1(t)\otimes x_2(t) \Leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega)$
곱셈 정리	$x_1(t)x_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega)\otimes X_2(\omega)$
시간 면적	$X(0)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt$
주파수 면적	$x(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)d\omega$
시간 미분	$\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow j\omega X(\omega)$
시간 적분	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi\delta(\omega)X(0)$
주기 산호	$X_T(kw_0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}w_0X(kw_0)\delta(w-kw_0)$
파스발 정리	$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert x(t)\rvert^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert X(\omega)\rvert^2d\omega$

[표 12.1] CTFT의 성질

12.3 주파수 응답의 정의

● **(정의 1) 임펄스 응답 $h(t)$의 CTFT $H(\omega)$를 LTI 시스템의 주파수 응답이라고 한다.**

시스템의 임펄스 응답 $h(t)$의 CTFT $H(\omega)$를 LTI 시스템의 주파수 응답이라고 한다.

$$H(\omega) = F[h(t)]$$

주파수 응답의 정의와 '시간 영역에서 컨벌루션은 주파수 영역에서 곱으로 나타난다는 CTFT의 성질'에 의해 시간 영역에서의 컨벌루션에 의한 출력은 다음과 같은 주파수 영역에서의 곱에 의한 출력으로 나타날 것이다.

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) \iff Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

위의 간단한 결과가 시간 영역에서 신호 처리의 의미와 주파수 영역에서 신호 처리의 의미를 매우 다르게 변화시켜준다. 앞서 시스템은 임펄스 응답이라는 함수 형태의 표현과 미분방정식이라는 방정식 형태의 표현으로 표현될 수 있다고 하였다. 두 가지 경우에서 신호 처리의 의미가 **[표 12.2]**에 나타나 있다. 임펄스 응답 표현에서 출력을 구하려면 입력과 시스템을 컨벌루션해야 한다. 컨벌루션은 복잡한 신호 형태에 대해서는 만만한 계산이 아니다. 하지만 주파수 영역에서는 컨벌루션이 곱셈으로 변화하여 간단히 출력을 얻을 수 있게 된다. 미분방정식 표현에서는 출력을 구하려면 미분방정식을 풀어야 한다. 미분방정식은 그리 간단한 작업이 아니다. 하지만 주파수 영역에서는 CTFT의 미분 성질에 의해 미분방정식이 간단한 선형 방정식으로 변환되어 이항과 곱셈, 나눗셈으로 출력을 얻어낼 수 있게 된다.

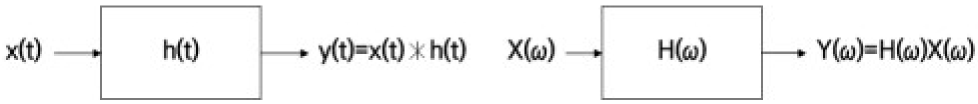
시간 영역				주파수 영역			
시스템		신호 처리		시스템		신호 처리	
함수	임펄스 응답 $h(t)$	컨벌루션	$y(t)=h(t)*x(t)$	함수	주파수 응답 $H(\omega)$	곱	$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$
방정식	미분방정식 $\frac{dy(t)}{dt}+\cdots = \frac{dx(t)}{dt}+\cdots$	방정식 풀이	입력 $x(t)$에 대해 미방의 해(출력) $y(t)$구하기	방정식	선형 방정식 $j\omega Y(\omega)+\cdots = j\omega X(\omega)+\cdots$	방정식 풀이	선형 방정식 풀이

[표 12.2] 시간 영역과 주파수 영역에서 신호 처리의 의미

- **(정의 2) 주파수 응답 $H(\omega)$는 입력과 출력의 CTFT의 비로 구할 수 있다.**

앞서 출력은 다음과 같은 연산으로 얻어질 수 있었다. (**[그림 12.3]**)

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$$



[그림 12.3] LTI 시스템에서 출력의 산출

위 식의 $X(\omega)$를 이항하면 시스템의 주파수 응답은 다음과 같이 입력과 출력의 비로 표현할 수 있다.

$$H(\omega)= Y(\omega)/X(\omega)$$

- **(정의 3) 복소 정현파 $e^{j\omega t}$를 LTI 시스템에 입력시켜 출력된 복소 정현파의 크기와 위상을 주파수에 대한 연속 함수로 표현한 $H(\omega)$를 주파수 응답이라고 한다.**

앞서 선형 시스템에서 주파수는 보존됨을 알았다. 즉 복소 정형파 $e^{j\omega t}$를 LTI 시스템 $H(\omega)$에 입력시키면 $ce^{j\omega t}$의 형태로 출력된다는 의미이다. 만일 $\omega=0[rad/\sec]$부터 $\omega=\infty[rad/\sec]$까지 시스템에 입력하여 출력을 얻어낸 후 중첩의 원리를 적용해 출력의 크기를 연속적인 함수로 표현하면 $H(\omega)$가 얻어질 것이다. 이를 다음과 같이 수식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} y(t)=h(t)\otimes x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{jw(t-\tau)}d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-jw\tau}d\tau\right]e^{jwt} = H(\omega)e^{jwt} \end{aligned}$$

위 식은 입력 정현파 $x(t)$에 $H(\omega)$(=$|H(\omega)|e^{j\angle H(\omega)}$)배가 된 정현파가 출력된다는 것을 나타낸다. 이때 주파수 별 응답의 분포인 $H(\omega)$를 주파수 응답이라고 한다. 여기서 $|H(\omega)|$는 크기 응답이고, $\angle H(\omega)$는 위상 응답이다. 임의의 시스템의 주파수 응답을 측정하는 장비가 필요하다면 이 방식을 이용하여 구현해야 할 것이다.

● **(정의 4) 미분방정식에서 입출력의 비로 주파수 응답을 구할 수도 있다.**

다음과 같은 미분방정식이 주어졌다고 생각해보자.

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m\frac{d^m x(t)}{dt^m} + \cdots + b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

양변에 CTFT를 수행하면 다음과 같은 선형 방정식으로 변환된다. 변환을 수행하면서 CTFT의 미분 성질을 이용하였음을 주의하자.

$$(jw)^n Y(w) + a_{n-1}(jw)^{n-1} Y(w) + \cdots a_1 (jw) Y(w) + a_0 Y(w)$$

$$= b_m (jw)^m X(w) + \cdots b_1 (jw) X(w) + b_0 X(w)$$

위 식에서 좌변에서는 출력의 CTFT $Y(\omega)$을 공통인수로 하고, 우변에서는 입력의 CTFT $X(\omega)$을 공통인수로 하여 인수분해하고 이항하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = \frac{b_m (jw)^m + b_{m-1}(jw)^{m-1} + \cdots + b_0}{(jw)^n + a_{n-1}(jw)^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i (jw)^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i (jw)^i}$$

따라서 미분방정식에서 입출력의 비로 주파수 응답을 구할 수도 있다.

[예제 12.2] 시스템의 출력 구하기

① **임펄스 응답 $h(t) = e^{-t}u(t)$인 시스템에 계단 신호 $x(t) = u(t)$를 입력하였을 때 시스템의 출력 $y(t)$를 구하라.**

[해답]

① $H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$이고 $X(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$이므로 $Y(\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)} + \pi\delta(\omega)$이다.

부분분수로 전개하면 $Y(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) - \frac{1}{1+j\omega}$

위 식을 역변환하면 $y(t) = (1-e^{-t})u(t)$

[예제 12.3] 시스템의 출력 구하기

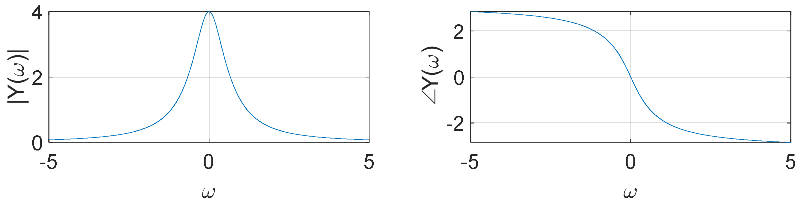
① 임펄스 응답 $h(t)=2e^{-2t}u(t)$인 LTI 시스템에 $x(t)=2e^{-t}u(t)$가 입력되었을 때 출력의 크기 및 위상 스펙트럼을 구하여라.

② 출력 신호를 구하라.

[해답]

① $H(\omega)=\dfrac{2}{2+j\omega}$, $X(\omega)=\dfrac{2}{1+j\omega}$, $Y(w)=\dfrac{4}{(2+j\omega)(1+j\omega)}$

$|y(\omega)|=2/\sqrt{4+\omega^2}\cdot 2/\sqrt{1+\omega^2}$, $\angle y(\omega)=-\tan^{-1}(\omega/2)-\tan^{-1}(\omega)$



② $Y(w)=\dfrac{4}{(2+j\omega)(1+j\omega)}=\dfrac{4}{1+j\omega}-\dfrac{4}{2+j\omega}$, $y(t)=(4e^{-t}-4e^{-2t})u(t)$

[예제 12.4] 입력과 출력이 주어질 때 시스템의 미분방정식 구하기

LTI 시스템에 $x(t)=e^{-t}u(t)$이 입력될 때 출력이 $y(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$이다.

① 이 시스템의 주파수 응답을 구하라.

② 이 시스템의 임펄스 응답을 구하라.

③ 이 시스템의 미분방정식을 구하라.

[해답]

① $x(t)=e^{-t}u(t) \Leftrightarrow X(\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega}$

② $y(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t) \Leftrightarrow X(\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega}-\dfrac{1}{2+j\omega}=\dfrac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$

따라서 $H(\omega)=\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\dfrac{1}{2+j\omega}$이고 $h(t)=e^{-2t}u(t)$

③ $H(\omega)=\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\dfrac{1}{2+j\omega}$에서

$2Y(\omega)+j\omega Y(\omega)=X(\omega) \Leftrightarrow dy(t)/dt+2y(t)=x(t)$

[예제 12.5] 세 가지 방법으로 주파수 응답 구하기

① 어떤 시스템에 단위 임펄스 함수를 입력하였더니 $y(t)=A\,\mathrm{sinc}(2Wt)$인 출력이 산출되었다. 이 시스템의 주파수 응답을 임펄스 응답의 푸리에 변환으로 구하라.

② 이 시스템의 주파수 응답을 입력 스펙트럼과 출력 스펙트럼의 비로 구하여라

③ 어떤 시스템에 $x(t)=\exp(j2\pi ft)$를 입력하였더니 $-W\le f\le W$일 때는 $y(t)=\dfrac{A}{2W}\exp(j2\pi ft)$가 출력되고 그 외 주파수에 대해서는 출력이 산출되지 않았다. 시스템의 주파수 응답을 복소 지수 입력에 대한 출력의 비로 구하여라.

[해답]

① 임펄스 응답이 $h(t)=A\,\mathrm{sinc}(2Wt)$이므로 주파수 응답은 푸리에 변환인 $H(\omega)=\dfrac{A}{2W}rect\left(\dfrac{\omega}{4\pi W}\right)$이다.

② 입력의 푸리에 변환은 $X(\omega)=1$이고 출력의 푸리에 변환은 $Y(\omega)=\dfrac{A}{2W}rect\left(\dfrac{\omega}{4\pi W}\right)$이므로 두 변환의 비는 $H(\omega)=\dfrac{A}{2W}rect\left(\dfrac{\omega}{4\pi W}\right)$이다.

③ 이 시스템의 이득은 $-W\le f\le W$일 때 $A/2W$이고 나머지 부분에 대해서는 0이다. 따라서 주파수 응답은 $H(\omega)=\dfrac{A}{2W}rect\left(\dfrac{\omega}{4\pi W}\right)$이다.

[예제 12.6] 미분방정식에서 주파수 응답 및 출력 구하기

인과적 LTI 시스템에 대한 미분방정식이 다음과 같이 주어져 있다.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+7\frac{dy(t)}{dt}+12y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

① 이 시스템의 주파수 응답을 구하라.

② 이 시스템의 임펄스 응답을 구하라.

③ 입력 $x(t)=e^{-t}u(t)$에 대한 출력 $y(t)$를 구하라.

[해답]

① 미분방정식의 CTFT는 $j^2\omega^2Y(\omega)+7j\omega Y(\omega)+12Y(\omega)=j\omega X(\omega)+2X(\omega)$

정리하면 $H(\omega)=\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\dfrac{j\omega+2}{j^2\omega^2+7j\omega+12}=\dfrac{j\omega+2}{(j\omega+4)(j\omega+3)}$

② $H(\omega)=\dfrac{2}{j\omega+4}-\dfrac{1}{j\omega+3}$이므로 $h(t)=(2e^{-4t}-e^{-3t})u(t)$

③ $Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)=\dfrac{j\omega+2}{(j\omega+4)(j\omega+3)(j\omega+1)}=-\dfrac{2/3}{j\omega+4}+\dfrac{1/2}{j\omega+3}+\dfrac{1/6}{j\omega+1}$

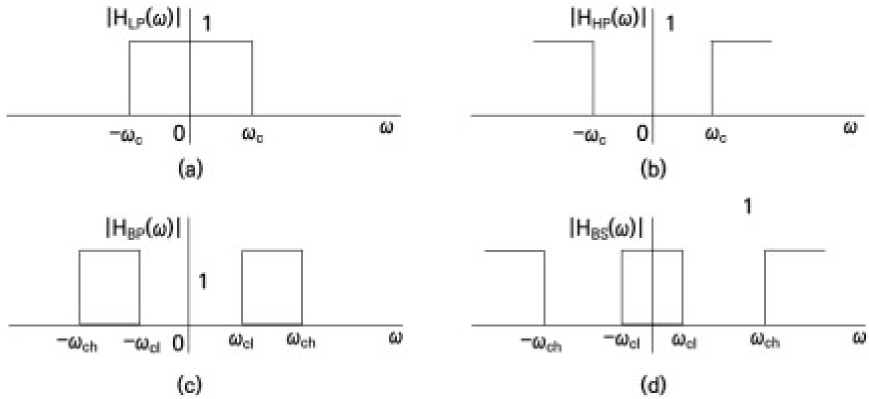
이므로 $y(t)=\left(-\dfrac{2}{3}e^{-4t}+\dfrac{1}{2}e^{-3t}+\dfrac{1}{6}e^{-t}\right)u(t)$

12.4 전형적인 필터의 주파수 응답

- **필터에서 최대 이득에 대해 전력이 반(-3[dB])인, 즉 이득이 $1/\sqrt{2}$인 주파수를 차단 주파수(cut-off frequency)라고 한다.**

필터는 특정 주파수 성분을 걸러내거나, 통과시키거나, 증폭시키는 선형 시스템이다. 필터는 차단하고 통과시키는 형태에 따라 네 종류로 구분된다.

- 저역 통과(Low Pass Filter: LPF) 필터: 통과 대역이 $|w| < w_c$이고 그 외는 저지 대역인 필터 (**[그림 12.4] (a)**)
- 고역 통과(High Pass Filter: HPF) 필터: 통과 대역이 $|w| > w_c$이고 그 외는 저지 대역인 필터 (**[그림 12.4] (b)**)
- 대역 통과(Band Pass Filter: BPF) 필터: 통과 대역이 $w_{cl} < |w| < w_{ch}$이고, 그 외는 저지 대역인 필터 (**[그림 12.4] (b)**)
- 대역 저지(Band Stop Filter: BSF) 필터: 통과 대역이 $w_{cl} < |w| < w_{ch}$이고, 그 외는 저지 대역인 필터 (**[그림 12.4] (d)**)



[그림 12.4] 필터의 종류

[그림 12.4]의 모든 필터는 이득이 1에서 0으로 불연속적으로 변화한다. 이런 필터를 이상적인 필터 또는 이상적인 벽돌담(brick-wall) 필터라고 한다. 앞서 공부한 깁스 현상 때문에 이상적인 필터는 물리적으로는 구현할 수 없다.

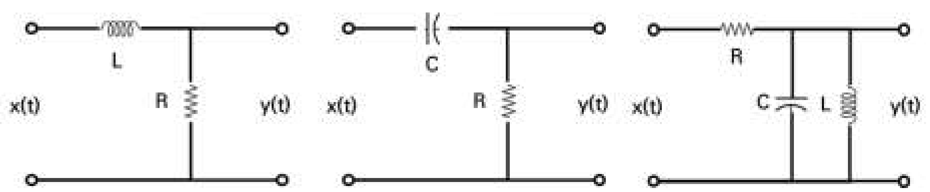
필터에서 최대 이득에 대해 전력이 반(-3[dB])인, 즉 이득이 $1/\sqrt{2}$인 주파수를 차단 주파수(cut-off frequency) ω_c라고 하며 수식으로는 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{|H(w_c)|^2}{|H(w)|^2_{\max}} = \frac{1}{2} \quad 또는 \quad \frac{|H(w_c)|}{|H(w)|_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

[그림 12.4]와 같은 이상적인 필터는 차단 주파수가 ω_c이다.

전기회로를 이용하면 물리적인 아날로그 필터를 손쉽게 구성할 수 있다.

- RL 저역 통과 필터(**[그림 12.5] (a)**): 회로에서 입력은 전원의 전압이고 출력은 저항에 걸리는 전압이다. 임피던스 분석 방법을 이용하면 $y(t) = \frac{R}{j\omega L + R} \cdot x(t)$이다. 식에서 $\omega = 0$이면 $y(t) = x(t)$이고 $\omega = \infty$이면 $y(t) = 0$이므로 LPF의 성질을 가진다.
- RC 고역 통과 필터(**[그림 12.5] (b)**): 회로에서 입력은 전원의 전압이고 출력은 저항에 걸리는 전압이다. 임피던스 분석 방법을 이용하면 $y(t) = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R} \cdot x(t) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \cdot x(t)$이다. 식에서 $\omega = 0$이면 $y(t) = 0$이고 $\omega = \infty$이면 $y(t) = 1$이므로 LPF의 성질을 가진다.
- RLC 대역 통과 필터(**[그림 12.5] (c)**): 회로에서 입력은 전원의 전압이고 출력은 인덕터나 커패시터에 걸리는 전압이다. 임피던스 분석 방법을 이용하면 $y(t) = \frac{j\omega L//(j\omega C)^{-1}}{R + j\omega L//(j\omega C)^{-1}} \cdot x(t) = \frac{j\omega L}{R - \omega^2 RLC + j\omega L} \cdot x(t)$이다. 식에서 $\omega = 0$이면 $y(t) = 0$이고 $\omega = \infty$이면 $y(t) = 0$이다. 그리고 $\omega = 1/\sqrt{(LC)}$이면 $y(t) = 1$이다. 따라서 공진 주파수가 $\omega = 1/\sqrt{(LC)}$인 BPF의 성질을 가진다.



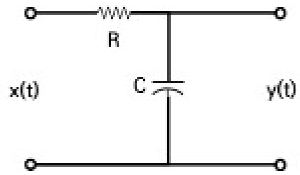
[그림 12.5] 전기회로를 이용한 아날로그 필터

[예제 12.7] 주파수 영역에서 시스템의 출력 구하기

① 아래 RC 회로의 크기 응답을 구하여 어떤 성질의 필터인지 판별하라.

② R=0.5[Ω], C=0.1[F]일 때, 다음의 입력에 대한 출력의 진폭을 구하라.

(a) ω_0=1[rad/sec]인 정현파, (b) ω_0=15인 정현파, (c) ω_0=98인 정현파



[해답]

① $y(t)=\dfrac{1}{1+j\omega RC}=\dfrac{1}{1+j0.05\omega}=\dfrac{20}{20+j\omega}$이므로 $|y(t)|=\dfrac{20}{\sqrt{\omega^2+20^2}}$이고 LPF

② $|y(t)|=\dfrac{20}{\sqrt{1^2+20^2}}=0.999$, $|y(t)|=\dfrac{20}{\sqrt{15^2+20^2}}=0.8$, $|y(t)|=\dfrac{20}{\sqrt{98^2+20^2}}=0.1999$

[예제 12.8] 등화기

송신 신호 $g(t)=2W\mathrm{sinc}(2Wt)$를 임펄스 응답이 $h(t)=W\mathrm{sinc}^2(Wt)$인 채널을 통해 전송된다고 가정하자.

① 수신 신호의 스펙트럼 $R(f)$를 구하여라

② 등화기의 주파수 응답 $\hat{H}(f)$를 구하라.

③ 등화를 수행하여라.

[해답]

① 송신 스펙트럼은 $G(f)=rect(f/(2W))$이고 채널 주파수 응답은 $H(f)=tri(f/W)$이다. 따라서 수신 신호의 스펙트럼은 $R(f)=tri(f/W)$가 된다.

② 따라서 등화기의 주파수 응답은 $\hat{H}(f)=1/tri(f/W)$가 된다.

③ 등화를 수행하면 $G(f)=R(f)/\hat{H}(f)=rect(f/(2W))$가 된다. 따라서 원신호가 완벽히 복구된다.

[예제 12.9] 선형 위상 필터의 주파수 응답

① 필터의 길이 N이 홀수이고 필터 계수가 우대칭인 탭 지연선 필터의 주파수 응답을 구하고 선형 응답 필터임을 증명하라.

[해답]

① 필터의 임펄스 응답의 중심을 원점에 위치시키고 DFT를 취하면 필터의 주파수 응답은 다음과 같이 구해진다.

$$H_k=\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} h_n \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

$$= h_0 + 2 \sum_{n=1}^{(N-2)/2} h_n \left[\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right) + \exp\left(j\frac{2\pi}{N}kn\right) \right]$$

$$= h_0 + 2 \sum_{n=1}^{(N-2)/2} h_n \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

필터의 임펄스 응답을 원래대로 $(N-1)/2$만큼 지연시키면

$$H_{k,\nabla} = 2\exp\left(-j\pi\frac{k}{N}(N-1)\right) \sum_{n=0}^{(N-2)/2} h_n \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right),\ k = 0, 1, \cdots, N-1$$

필터의 위상 응답은 $\theta_{k,\nabla} = \exp\left(-j\pi\frac{k}{N}(N-1)\right),\ k = 0, 1, \cdots, N-1$이므로 선형위상 성질을 갖는다.

12.5 Matlab 실습

[실습 12.1] 스펙트럼 분석기의 기본 블록 만들기

- 앞서 논의한 바와 같이 선형 시스템에서 주파수는 보존되므로 복소 정현파 $e^{j\omega t}$를 LTI 시스템에 입력하여 출력된 복소 정현파의 크기와 위상을 주파수에 대한 연속 함수로 표현하면 주파수 응답을 얻을 수 있다.

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) = h(t) \otimes e^{jwt} = H(\omega)e^{jwt}$$

- $y(t) = H(\omega)e^{jwt}$로부터 $H(\omega)$를 얻어내려면 입력인 복소 정현파의 복소 켤레 신호 $x^*(t) = e^{-j\omega t}$를 곱하고 신호의 존재 구간 T에 대해 적분하여(=상관하여) 다음과 같이 복소 정현파의 영향을 제거하면 된다. 적분은 잡음의 영향을 제거하는 효과를 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{T}\int y(t)x^*(t)dt = \frac{1}{T}\int H(\omega)e^{jwt}e^{-jwt}dt = H(\omega)$$

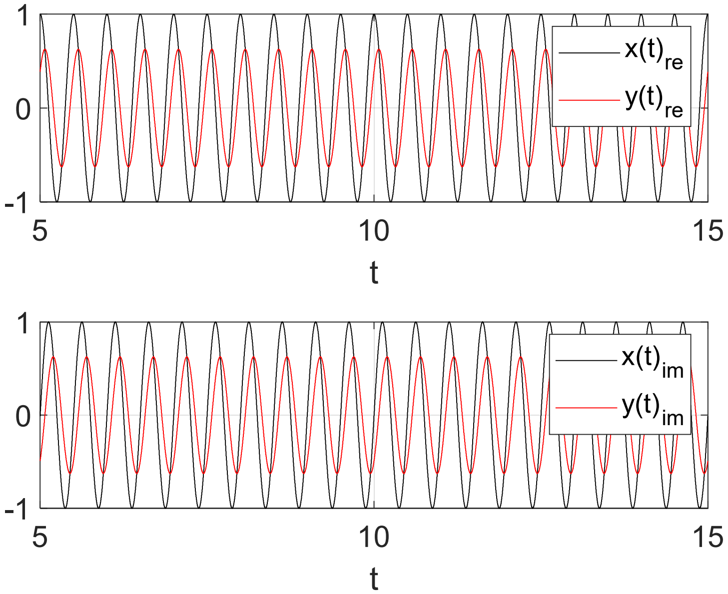
① Matlab을 이용하여 임펄스 응답이 $h(t) = 10e^{-10t}$인 시스템에 2[Hz]의 복소 정현파를 입력할 때 출력을 구하라. fourier 함수를 이용하지 말고 conv 함수를 사용하라. 다음의 코드를 참고하라.

```
Ts=0.001;    % sampling periode
InFre=2;     % frequency of input complex exponential
xtmax=20;    % length of input signal
htmax=5;     % length of impulse response

xt=[ 0:Ts:xtmax] ;
ht=[ 0:Ts:htmax] ;
yt=[ 0:Ts:xtmax+htmax] ;
```

② 입력 $x(t)$와 출력 $y(t)$의 상관 연산을 수행하라. 이 상관 결과가 바로 $H(4\pi)$이다. 상관을 구할 때 컨벌루션 결과인 $y(t)$의 양 끝단이 불완전하므로, 결과의 정확도를 높이기 위해 상관 구간을 전체 시간 구간보다 좁혀라. 다음의 코드를 참고하라.

```
short_t=[ htmax:Ts:(xtmax-htmax)] ;
short_n=[ htmax/Ts:1:(xtmax-htmax)/Ts] ;
```



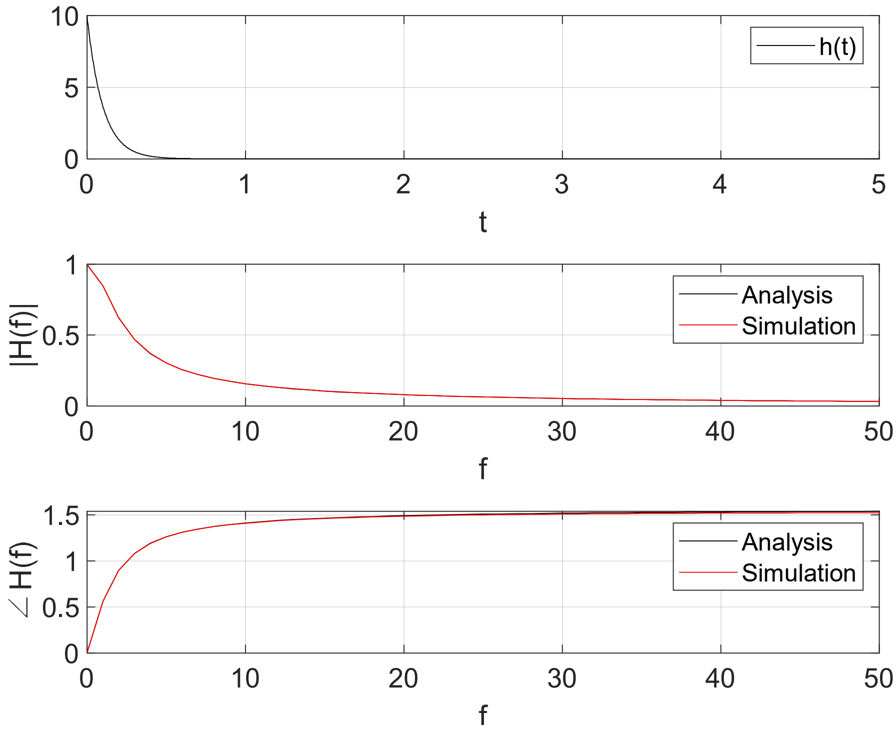
상관 값은 0.0.6258

[해답]

[실습 12.2] 스펙트럼 분석기 만들기

- 앞서 설계한 블록에 기초하여 $\omega = 0\,[rad/\sec]$부터 $\omega = \infty\,[rad/\sec]$까지 시스템에 입력하여 출력을 얻어낸 후 출력의 크기와 위상을 연속적인 함수로 표현하면 $H(\omega)$가 얻어진다.

① 앞선 문제를 참고하여 0[Hz] ~ 50[Hz]까지의 입력에 대해 상관 값을 구하여 크기와 위상을 연속적인 함수로 그려라. 이 결과가 주파수 응답이다. 그리고 이론적인 주파수 응답($H(\omega) = \dfrac{10}{10 + j\omega}$)과 비교하여 일치하는지 확인하라.



[해답]