GSHS Discrete Data Structures Assignment #1

Author : 14080 Sangheon Lee

Problem 1. *눈금이 없는 직각삼각자와 연필만 가지고 주어진 원의 중심을 찾을 수 있겠는가?*

매우 간단한 문제이다. 원 내의 지름을 빗변으로 가지는 삼각형은 직각삼각형임을 이용하면, 원주 위의 임의의 점 하나를 잡아, 직각삼각자의 직각 부분을 이용하여 선을 긋는다. 이 때 원주와 생기는 교점 2개를 이으면 지름이 생기며, 이를 다른 점에 대해 한 번 더 하면 지름들의 교점이 생기고, 이는 곧 원의 지름이다.

Problem 2. *어떤 빌딩의 1층에서 꼭대기 층까지 엘리베이터를 타고 제일 꼭대기 층까지 가기 위해 기다리고 있다. 그런데 이 엘리베이터는 운반할 수 있는 최대 중량은 300kg이고 엘리베이터를 작동하기 위해서는 세 명 중 한 명은 반드시 엘리베이터를 타고 있어야 한다. 이들 중 3명의 무게가 각각 130kg, 160kg, 210kg일 때, 그들이 꼭대기 층까지 엘리베이터를 타고 갈 수 있을까? 갈 수 있다면 방법을 말하라.*

가능하다. 다음 표를 보라.

Ground	Elevator	Top
130, 160, 210		
210	->130, 160 ->	
210		130, 160
210	<- 130 <-	160
130, 210		160
130	->210 ->	160
130		160, 210
130	<- 160 <-	210
130, 160		210
	->130, 160 ->	210
		130, 160, 210

표 1: 문제 2의 정답

Problem 3. *흔한 병에 적당한 양의 물이 들어가 있다. 물을 더하거나 붓지 않고 자(ruler)만으로 병의 부피를 측정하는 것이 가능한가? 가능하다면 방법을 설명하라.*

우선 물의 부피를 자를 이용해 잰 다음에, **병을 뒤집어서** 공기의 부피를 자를 이용해 잰 다음 더하면 된다. Wow!

Problem 4. *오른쪽 그림의 시계의 앞면을 두 직선으로 나눌 때, 각 영역의 있는 숫자들의 합이 같도록 나눌 수 있겠는가? 또, 각 영역이 두 수를 포함하고 이 두 수의 합이 같도록 6개의 영역으로 나눌 수 있겠는가?*

일단 첫번째 sub-task부터 생각해보자. 직선을 배치하는 경우는 다음 두 가지 중 하나이다.

1. 두 직선이 일치하지는 않으나 교점이 없어 구역이 3개로 나누어지는 경우
2. 두 직선이 교점이 있어 구역이 4개로 나누어지는 경우

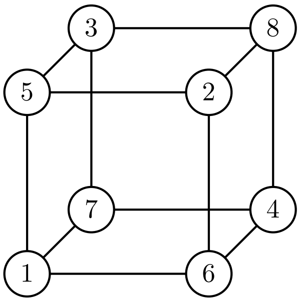
각각의 경우에 대해 생각해보면 다음과 같다.

1. 두 직선이 일치하지는 않으나 교점이 없어 구역이 3개로 나누어지는 경우
   이 때 각 구역의 합은 $78/3 = 26$이 되어야 한다. 일단 수가 분리되어 있지 않고 연속(12, 1도 포함)되어 있는 구역이 적어도 하나는 존재하므로 이를 구해보자.
   구역에 있는 수가 2개 이하면 최대값이 23이여서 답이 없고, 3개면 어떻게 해도 합이 3의 배수가 되어 답이 없다. 4개이면 12, 1을 포함하지 아닐 경우 4의 배수여서 아니고, 12, 1을 포함한 경우 $11+12+1+2 = 26$과 $5+6+7+8 = 26$인 때가 유이한 답이다.
   5개에 있는 경우는 12, 1을 포함하지 않을 경우 합이 5의 배수이니까 아니고, 포함하더라도 만족하는 경우는 없다. 마찬가지로 6개일 때도 없고, 7개 이상일 때는 최소값이 28이 되어 counting이 끝난 것을 알 수 있다. 즉 이 때 답은 $(11, 12, 1, 2), (3, 4, 9, 10), (5, 6, 7, 8)$이다.
2. 두 직선이 교점이 있어 구역이 4개로 나누어지는 경우
   78은 4의 배수가 아니다. 그러므로 이런 경우는 없다. 끝.

두 번째 sub-task는 더 간단하다. 합이 13인 여섯 개의 영역을 나누려면 우의 각 영역은 최소 2개의 숫자를 포함해야 한다. 그런데 2*6=12이므로 모든 영역은 수가 2개이다. 그러므로 $(1, 12), (2, 11), (3, 10), (4, 9), (5, 8), (6, 7)$의 형태로 분할할 수 있고 이가 유일하다.

Problem 5. *정육면체의 각 꼭짓점에 원이 그려져 있다. 원 안에 1부터 8까지의 수를 적되, 이 정육면체에 모서리에 의해 연결된 두 원 안에 있는 숫자들의 차가 항상 1보다 크게 적어넣는 경우가 가능하겠는가?*

가능하다. 다음 LaTeX발 그림이 한 예이다. 그냥 그림판으로 만들걸......



Problem 6. *흰 바둑돌 3개, 검은 바둑돌 3개가 그림과 같이 칸 안에 놓여 있다. 바둑 돌을 바로 옆에 있는 빈 칸이나 바로 옆에 있는 바둑돌을 뛰어 넘어 빈 칸으로 옮기는 시행을 여러 번 반복하여, 흰 바둑돌을 오른쪽으로, 검은 바둑돌을 왼쪽으로 모을 수 있겠는가?*

검은색 돌을 하나씩 맨 끝으로 보낸다고 생각하자. 검은 돌이 한 번 전진하고 하얀 돌이 이를 건너뛰는 것을 3번 반복하고, 검은 돌이 맨 끝으로 움직인 다음에, 가운데 있는 하얀 돌이 왼쪽으로 건너 뛴 다음에 맨 오른쪽에 있는 하얀 돌이 왼쪽으로 이동하면 배치가 '흑백백백ㅇ흑흑'이 된다. 자세히 보면 이후 과정도 똑같다. 맨 마지막에 하얀 돌이 전부 뒤로 한 칸 이동하는 그 배치를 제외하면 말이다. 그러므로 이동 가능하며, $9 + 9 + (9 - 2) = 25$번만에 이동 가능하다.

Problem 7. *병과 컵의 무게의 합이 주전자 무게와 같고, 컵과 접시의 무게의 합이 병의 무게와 같고, 두개의 주전자의 무게가 세 개의 접시의 무게와 같을 때, 병 한 개의 무게는 컵 몇 개의 무게와 같은가?*

병 = 컵 + 접시 = 컵 + 2/3 주전자 = 컵 + 2/3 (병 + 컵)이므로 정리하면 1/3 병 = 5/3 컵이 된다. 그러므로 병 한 개의 무게는 컵 5개의 무게와 같다.

Problem 8. *어린이 놀이 기구를 만드는 사람이 나무로 만든 정육면체 모양의 도형을 갖고 있었다. 그런데 그가 원하는 글자와 그림을 그려 넣기 위해 현재 갖고 있는 정육면체 표면적의 두 배가 되는 도형이 필요하게 되었다. 다른 정육면체를 붙이지 않고 그가 원하는 것을 얻을 수 있을까? 있다면 방법을 설명하라.*

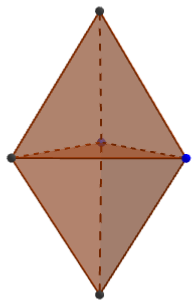
문제 설명이 조금 애매하다. 정육면체를 잘라서 여러 개의 입체도형으로 놓아도 된다는 것인지, 아니면 자르고 붙여서 하나의 입체도형으로 만들라는 것인지 모르겠다. 일단 양쪽의 경우에 대해 둘 다 풀어보겠다.

1. 여러 개의 입체도형이 허용될 때
   xy평면, yz평면, xz평면에 평행하게 각각 한 번씩 자르면 된다. 끝.

2. 한 개의 입체도형만이 허용될 때
   정육면체의 모서리 길이를 1이라 하자. 우선 정육면체를 동일한 정육면체 27개로 나눈다. 그 다음에 25개의 작은 정육면체와 나머지 2개의 정육면체를 각각 일렬로 붙인 다음에, 이 둘을 완벽히 맞닿게 긴 면끼리 붙이면 된다. 성립하는 이유를 간단히 설명하자면, 우선 27개의 작은 정육면체들의 총 표면적은 18이다. 그런데 한 면씩 연결하면서 총 표면적은 $\frac{2}{9}$씩 감소하게 된다. 뭐 당연한 소리이다. 한 면의 넓이가 $\frac{1}{9}$이고 이가 2개 붙는 것이니까. 때문에 이를 25개를 일렬로 붙이면 $24 \cdot \frac{2}{9}$만큼 총 표면적이 감소하고, 나머지 2개를 붙이는데 $\frac{2}{9}$만큼 감소한다. 그리고 이 둘을 긴 쪽끼리 서로 맞닿게 붙이면 최종적으로 $2 \cdot \frac{2}{9}$만큼 감소하게 된다. 그 결과 총 표면적은 $18 - (24 + 1 + 2) \cdot \frac{2}{9} = 12$가 되어 표면적은 2배이면서 부피는 그대로이고 연결된 입체도형을 만들 수 있다.

Problem 9. *길이가 같은 3개의 성냥개비로 하나의 정삼각형을 만들 수 있다. 9개의 성냥으로 이와 같은 정삼각형 7개를 만들 수 있겠는가?*

삼각쌍뿔 모양으로 성냥개비를 배치하면 된다.



Problem 10. *어떤 회의가 오후 6시에서 7시 사이에 시작해서 오후 9시에서 10시 사이에 끝났다. 회의 시작 시각의 시침과 분침의 위치가 바뀐 시각에 회의가 끝났다고 할 때, 시작 시각과 종료 시각을 각각 구하여라.*

회의 시작 시각의 시침의 위치를 x, 분침의 위치를 y, 이때의 분을 t_1, 회의 종료 시각의 분을 t_2라 하자(x, y의 단위는 rad이며, $0 \le t_1, t_2 \le 60$이다). 그러면 다음

식이 성립한다.

$$x = \pi + \frac{\pi}{360}t_1 = \frac{\pi}{30}t_2$$
$$y = \frac{\pi}{30}t_1 = \pi + \frac{\pi}{360}t_2$$

t_1과 t_2에 대한 방정식을 풀면 $t_1 = \frac{6840}{143} \approx 47.83$, $t_2 = \frac{4860}{143} \approx 33.99$가 나온다. 즉 회의는 6시 $\frac{6840}{143}$분에 시작하여 9시 $\frac{4860}{143}$분에 끝났다.

Problem 11. *한 원의 내부를 6개의 직선으로 분할할 수 있는 영역의 최대개수를 구하고, n개의 직선으로 한 원의 내부를 분할 할 수 있는 영역의 최대개수를 n에 관한 식으로 나타내어라.*

바로 점화식을 세우자. $F(n)$을 n개의 직선을 그을 때 내부를 분할할 수 있는 영역의 최대개수라고 정의하자. 이 때 $F(0) = 1$이다. 내부를 새로운 직선으로 분할할 때 추가적으로 생성되는 구역의 수는 *새로 그은 직선과 교차한 직선의 수(단, 이 때 3개 이상의 직선이 한 점에서 만나면 안 된다)+1*이다. 내부 안에 직선이 n개 있을 때 새로운 직선을 하나 그으면 최대 $n+1$개의 구역이 생성되므로 $F(n+1) = n+1+F(n)$이 성립한다. 그러므로 점화식을 풀면 $F(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1, n \geq 0$이 된다. 이 때 $F(6)$은 22가 된다.