1 $p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \to \neg q)$

$\neg(\neg p \vee \neg q)$) 드모르간

$p \wedge q$

p q	$\neg q$	$p \to \neg q$	$\neg(p \to \neg q)$	$p \wedge q$
T T	F	F	T	T
T F	T	T	F	F
F T	F	T	F	F
F F	T	T	F	F

$\equiv$

1-2. $(p \to r) \wedge (q \to r) \Leftrightarrow (p \vee q) \to r$

분배법칙 $(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ $\neg(p \vee q) \vee r$) 드모르간.

(역) $r \vee (\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow r \vee (\neg p \wedge \neg q)$

r p q	$p \to r$	$q \to r$	$p \vee q$	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	$(p \vee q) \to r$
T T T	T	T	T	T	T
T T F	T	T	T	T	T
T F T	T	T	T	T	T
T F F	T	T	F	T	T
F T T	F	F	T	F	F
F T F	F	T	T	F	F
F F T	T	F	T	F	F
F F F	T	T	F	T	T

$\equiv$

2. $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg p \leftrightarrow \neg q$.

$(p \to q) \wedge (q \to p) \Leftrightarrow (\neg p \to \neg q) \wedge (\neg q \to \neg p)$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \Leftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p)$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \Leftrightarrow (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

p q	$\neg p$	$\neg q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$
T T	F	F	T	T
T F	F	T	F	F
F T	T	F	F	F
F F	T	T	T	T

$\equiv$

3. $\forall x P(x) \Leftrightarrow \neg \exists x \neg P(x)$ 에서 $\forall x P(x)$는 정의역에속하는 모든 원소 x에 대해 $P(x)$가 참이라는 뜻이다.

$\exists x \neg P(x)$는 $\neg P(x)$가 참 ($P(x)$가 거짓)인 원소 x가 적어도 한개 이상 존재한다는 것이고. $\exists x \neg P(x)$가 거짓 ($\neg \exists x \neg P(x)$)이기 위한 필요충분 조건은 $\neg P(x)$가 참이되는 원소 x가 ($P(x)$가 거짓이 되는 원소 x) 정의역에 존재하지 않는것이고, 이는 모든 원소 x에 대해 $P(x)$가 참이라는것이다.

따라서 $\forall x P(x)$ 와 $\neg \exists x \neg P(x)$는 둘 다 정의역에 속하는 모든 원소 x에대해 참이므로 논리적 동치이다.

3-2. $\exists x P(x) \Leftrightarrow \neg \forall x \neg P(x)$ 에서 $\exists x P(x)$는 $P(x)$가 참이되는 원소 x가 적어도 한개 존재한다는 것이고, $\forall x \neg P(x)$는 정의역에 속하는 모든 원소 x에 대해 $\neg P(x)$가 항상 참 ($P(x)$가 항상 거짓) 이라는 것이다.

$\forall x \neg P(x)$가 거짓이되는 필요충분 조건은 $\neg P(x)$가 거짓이되는 ($P(x)$가 참이되는) 원소 x가 적어도 한개 존재하는 것이므로 $\neg \forall x \neg P(x)$와 $\exists x P(x)$는 논리적 동치이다.

4. $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$와 $(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$가 논리적 동치이려면 한 쪽이 참일때 다른한쪽이 참이어야 한다.

4. $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$가 참이려면, 정의역이 속하는 원소 a에 대해 $P(a) \wedge Q(a)$가 참이어야하고, $P(a)$와 $Q(a)$가 모두 참이어야한다. 모든 원소에대해 $P(a)$와 $Q(a)$가 참이면, $\forall x P(x)$와 $\forall x Q(x)$도 참이고, $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$도 참이므로, $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$가 참일때 $(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$가 참이다.

$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$가 참이려면, $\forall x P(x)$와 $\forall x Q(x)$가 모두 참이어야 하고, 정의역에 속하는 모든 원소 a에대해 $P(a)$와 $Q(a)$가 참이 되어야한다. 그러면 $P(a) \wedge Q(a)$도 항상 참이며, $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$가 참이므로 $(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$가 참일때 $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$도 참이다.

한쪽이 참일때 다른한쪽이 참이므로 $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$와 $(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$는 논리적 동치이다!

4-2 $\exists x(P(x) \lor Q(x))$ 와 $(\exists x P(x)) \lor (\exists x Q(x))$ 가 논리적 동치이려면
한 쪽이 참일때 다른 한쪽도 참이어야 한다.
$\exists x(P(x) \lor Q(x))$ 가 참이려면, $P(a) \lor Q(a)$ 가 참이되는 원소 a가 적어도 한 개 이상 존재해야 하고, $P(a)$ 와 $Q(a)$중 한개 이상이 참이되는 원소 a가 한개이상 존재 해야 한다.
그런 원소가 한개 이상 존재하면, $\exists x P(x)$ 와 $\exists x Q(x)$ 중 한개 이상을 참으로 만드는 원소가 존재하는 것이므로 $(\exists x P(x)) \lor (\exists x Q(x))$ 도 참이다.
$(\exists x P(x)) \lor (\exists x Q(x))$ 가 참이려면, $\exists x P(x)$와 $\exists x Q(x)$ 중 하나 이상이 참이어야 하고 $P(a)$ 와 $Q(a)$ 중 한 개 이상이 참이되는 원소 a 가 존재해야 한다.
이 원소가 존재하면 $P(a) \lor Q(a)$ 는 참이되므로 $\exists x(P(x) \lor Q(x))$ 도 참이다.
한쪽이 참이면, 다른 한쪽도 참이 되므로 둘은 논리적 동치이다.