2021 年全国硕士研究生招生考试

数　学（三）

（科目代码：303）

考试时间：180 分钟，试卷总分：150 分

考生注意事项

1．答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。

2．选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。

3．填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。

4．考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生编号															
考生姓名															

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1.当 $x\to 0$，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的

A. 低阶无穷小．　B. 等价无穷小．　C. 高阶无穷小．　D. 同阶但非等价无穷小．

【答案】C

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\left(e^{t^3}-1\right)dt}{x^7}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(e^{x^6}-1\right)}{7x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^6}{7x^5}=0$,故选 C.

2.函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

A.连续且取极大值.

B.连续且取得最小值.

C.可导且导数等于零.

D.可导且导数不为零.

【答案】D

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1=f(0)$，故连续；又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x}=\dfrac{e^x-1-x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，故可导，

所以选 D

3.设函数 $f(x)=ax-b\ln x(a>0)$ 有 2 个零点，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围

A. $(e,+\infty)$.　　B. $(0,e)$.　　C. $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$.　　D. $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

【答案】A

【解析】$f(x)=ax-b\ln x,$

若 $b<0$，不满足条件，舍去

若 $b>0$

令 $f'(x)=a-\dfrac{b}{x}=0$，得 $x=\dfrac{b}{a}$.

在 $\left(0,\dfrac{b}{a}\right),f'(x)<0,\left(\dfrac{b}{a},\ +\infty\right),f'(x)>0.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$,

令 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)=b-b\ln\dfrac{b}{a}=b\left(1-\ln\dfrac{b}{a}\right)<0$, 得 $\ln\dfrac{b}{a}>1$，即 $\dfrac{b}{a}>\mathrm{e}$.

故选 A.

4.设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f\left(x+1,\mathrm{e}^x\right)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x$, 则 $\mathrm{d}f(1,1)=$

A. $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.　B. $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.　C. $\mathrm{d}y$.　D. $-\mathrm{d}y$.

【答案】选 C

【解析】由于 $f(x+1,\mathrm{e}^x)=x(x+1)^2$

两边同时对 x 求导得 $f_1'(x+1,\mathrm{e}^x)+f_2'(x+1,\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x=(x+1)^2+2x(x+1)$

令 $x=0$ 得 $f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1+0$

$f_1'(x,x^2)+f_2'(x,x^2)2x=4x\ln x+2x^2\cdot\dfrac{1}{x}$

令 $x=1$ 得 $f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=0+2$

因此 $f_1'(1,1)=0$；　$f_2'(1,1)=1$.

所以 $\mathrm{d}f(1,1)=\mathrm{d}y$，答案选 C

5.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

A. 2,0　　B. 1,1　　C. 2,1　　D. 1,2

【答案】B

【解析】$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$

$=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_3^2+2x_1x_3-x_1^2$

$=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

二次型对应矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda+1)((\lambda-2)(\lambda-1)-2]$$
$$= \lambda(\lambda+1)(\lambda-3)$$

则 $p=1 \quad q=1$.

6.设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$ 的 4 阶正交矩阵，若矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$， k 表示任意常数，则线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=$

A. $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+k\boldsymbol{a}_1$.

B. $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+k\boldsymbol{a}_2$.

C. $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_4+k\boldsymbol{a}_3$.

D. $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+k\boldsymbol{a}_4$.

【答案】D

【解析】$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$， 不难验证 A,B,C 均不是方程组的解.

7.已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$，若下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}$ 为

对角矩阵，则 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 分别取（ ）.

$A.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　$B.\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$C.\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　$D.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

【答案】C

【解析】通过代入验证 $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}$.

选 C

8.设 A,B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$，下列为假命题的是

A.若 $P(A|B)=P(A)$，则 $P(A|\overline{B})=P(A)$

B.若 $P(A|B)>P(A)$，则 $P(\overline{A}|\overline{B})>P(A)$

C.若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$，则 $P(A|B)>P(A)$

D.若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)$

【答案】选 D

【解析】A.条件失效，独立，显然成立

B.

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)}>P(A)\quad\Rightarrow\quad P(AB)>P(A)P(B)$$

$$P(\overline{A}\mid\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)}$$
$$>\frac{1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)}{1-P(B)}$$
$$=\frac{1-P(B)+P(A)[P(B)-1]}{1-P(B)}$$
$$=1-P(A)=P\left(\overline{A}\right)$$

故 B 正确.

C. 显然 $P(AB)>P(A)P(B)$,

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}>P(A)$$

故 C 正确.

D. $P(\overline{A}\mid A\cup B)=\dfrac{P[\overline{A}(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$,

$P(A)>P(B)-P(AB)$，不能说明 $P(A)>P(B)$，错误.

故选 D.

9. 设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N\left(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho\right)$ 的简单随机样本，令

$\theta=\mu_1-\mu_2,\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i,\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$,则

A. $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta,D\left(\hat{\theta}\right)=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.

B. $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta,D\left(\hat{\theta}\right)=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

C. $E\left(\hat{\theta}\right)\neq\theta,D\left(\hat{\theta}\right)=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.

D. $E\left(\hat{\theta}\right)\neq\theta,D\left(\hat{\theta}\right)=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

【答案】B

【解析】$E\hat{\theta}=E(\overline{X}-\overline{Y})=E\overline{X}-E\overline{Y}=\mu_1-\mu_1$.

$$D\hat{\theta}=D(\overline{X}-\overline{Y})=D\overline{X}+D\overline{Y}-2\mathrm{Cov}(\overline{X},\overline{Y})$$
$$=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-\frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$$

10. 设总体 X 的概率分布 $P\{X=1\}=\frac{1-\theta}{2},P\{X=2\}=P\{X=3\}=\frac{1+\theta}{4}$, 利用来自总体 X 的样本值 $1,3,2,2,1,3,1,2$, 可得 θ 的最大似然估计值为

A. $\frac{1}{4}$.　　B. $\frac{3}{8}$.　　C. $\frac{1}{2}$.　　D. $\frac{5}{8}$.

【答案】A

【解析】$L(\theta)=\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1+\theta}{4}\right)^5$

$$\ln L(\theta)=3\ln\frac{1-\theta}{2}+5\ln\frac{1+\theta}{4}=3\ln(1-\theta)-3\ln 2+5\ln(1+\theta)-5\ln 4$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{-3}{1-\theta}+\frac{5}{1+\theta}=0$

得 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 若 $y=\cos \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$, 则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$______.

【答案】$\frac{\sin \mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{e}}$.

【解析】可得 $y'=\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\sin \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$， $y'|_{x=1}=\left.\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\sin \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1}=\frac{\sin \mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{e}}$.

12. $\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}\mathrm{d}x=$______.

【答案】6

【解析】

$$\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}\mathrm{d}x+\int_{3}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}\left(9-x^2\right)+\frac{1}{2}\int_{3}^{5}\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}\left(x^2-9\right)=6.$$

13.设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{x}\sin\pi x\ (0\le x\le 1)$ 与 x 轴围成，则 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积________.

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】利用旋转体体积计算公式得

$$V=\int_a^b \pi y^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \pi x\sin^2\pi x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

14. 差分方程 $\Delta y_t=t$ 的通解 $y_t=$__________.

【答案】$y_t=\frac{t}{2}(t-1)+C$.

【解析】

先解齐次差分方程 $y_{t+1}-y_t=0$，$y_t=C$

再设非齐次的解为 $y^*_t=t\left(A_0+A_1t\right)$，代入差分方程

$$(t+1)\left[A_0+A_1(t+1)\right]-t\left(A_0+A_1t\right)$$

整理得

$$A_0+2A_1t+A_1=t$$

对比系数后得

$$\begin{cases}A_0=-\frac{1}{2}\\ A_1=\frac{1}{2}\end{cases}$$

得通解

$$y_t=\frac{t}{2}(t-1)+C$$

15.多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中的 x^3 项的系数为______.

【答案】-5

【解析】x^3 项为 $(-1)^{1+2+2}4x^3+(-1)^1x^3=-5x^3$，因此 x^3 项系数为 -5

16.甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球，令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 X,Y 的相关系数为__________.

【答案】$\frac{1}{5}$

【解析】$EXY=\frac{3}{10}\quad EX=\frac{1}{2}\quad EY=\frac{1}{2}$

$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{4}$，$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{1}{4}$

$$\rho=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$$

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+\left(1+|x|\right)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 a 的值.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x}+\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right]=\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x}+\left(1-x\right)^{\frac{1}{x}}\right]=-\frac{\pi}{2}a+\frac{1}{\mathrm{e}}$，

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+\left(1+|x|\right)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，得 $\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}=-\frac{\pi}{2}a+\frac{1}{\mathrm{e}}$，得 $a=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}\right)$.

18.（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\frac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

【解析】 $f_x'(x,y)=\frac{2}{x}+\frac{2(x-1)\cdot 2x^2-4x\left[(x-1)^2+y^2\right]}{4x^4}=\frac{2}{x}+\frac{x-1}{x^2}-\frac{(x-1)^2+y^2}{x^3}=0$，

$f_y'(x,y)=\frac{2y}{2x^2}=\frac{y}{x^2}=0$，得 $y=0$，

代入

$$f_x'(x,y)=\frac{2}{x}+\frac{x-1}{x^2}-\frac{(x-1)^2}{x^3}=\frac{2x^2+x^2-x-x^2+2x-1}{x^3}=\frac{2x^2+x-1}{x^3}=\frac{(2x-1)(x+1)}{x^3}=0,$$

得 $x=\frac{1}{2},x=-1$.故得坐标 $\left(\frac{1}{2},0\right),(-1,0)$.

$$f_{xx}''(x,y)=-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{2(x-1)\cdot x^3-[(x-1)^2+y^2]\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{-2x^2-2x+3}{x^4}+\frac{3y^2}{x^4}$$

$f_{xy}''(x,y)=-\frac{2y}{x^3};f_{yy}''(x,y)=\frac{1}{x^2}$.

在点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 处，得 $A=24;B=0;C=4,AC-B^2=96>0.A>0$，取极小值

$f\left(\frac{1}{2},0\right)=-\ln 4+\frac{1}{2}$；

在点 $(-1,0)$ 处，得 $A=3;B=0;C=1,AC-B^2=3>0.A>0$，取极小值 $f(-1,0)=2$.

19.（本题满分 12 分）

设有界区域 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分，计算二重积分

$$\iint_D e^{(x+y)^2}\left(x^2-y^2\right)dxdy.$$

【解析】

$$\iint_D e^{(x+y)^2}\left(x^2-y^2\right)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 e^{r^2(\sin\theta+\cos\theta)^2}r^3\cos 2\theta dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 e^{r^2+r^2\sin 2\theta}r^3\cos 2\theta dr$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 rdr\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{r^2+r^2\sin 2\theta}d\left(r^2+r^2\sin 2\theta\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 r\,e^{r^2+r^2\sin 2\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}dr=\frac{1}{4}\int_0^1 e^{2r^2}-e^{r^2}dr^2=\frac{1}{8}e^{2r^2}\Big|_0^1-\frac{1}{4}e^{r^2}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{8}(e-1)^2.$$

20.（本题满分 12 分）

设 n 为正整数，$y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件 $y_n(1)=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的解.

(1) 求 $y_n(x)$.

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

【解析】(1) 由微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 得 $y_n(x)=C\cdot e^{\int\frac{n+1}{x}dx}=Cx^{n+1}$ 代入 $y_n(1)=\dfrac{1}{n(n+1)}$，得 $C=\dfrac{1}{n(n+1)}$，故 $y_n(x)=\dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$.

（2）$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，$R=\dfrac{1}{\rho}=1$，当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n(x)$ 收敛，故收敛域 $[-1,1]$.

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n(x)=\dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}, x\in[-1,1]$，则有 $S''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$，得

$S'(x)=\int_0^x S''(t)dt+S'(0)=\int_0^x \dfrac{1}{1-t}dt+0=-\ln(1-x)$，

$S(x)=\int_0^x S'(t)dt+S(0)=\int_0^x -\ln(1-t)dt+0=(1-x)\ln(1-x)+x$.

21.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{bmatrix}$ 仅有两不同的特征值，若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵，求 a,b 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

【解析】

$$|\lambda E-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\-1&-a&\lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-b)[(\lambda-2)^2-1]$$
$$=(\lambda-b)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)$$
$$=(\lambda-b)(\lambda-1)(\lambda-3)$$
$$=0.$$

当$b=1$时，$a=1$，$\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=1$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

当$b=3$时，$a=-1$，$\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=1$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

22.（本题满分 12 分）

在区间（0,2）上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为X，较长一段的长度记为Y，令$Z=\dfrac{Y}{X}$.

（1）求X的概率密度；

（2）求Z的概率密度；

（3）求$E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.

【解析】

（1）由题意得，$X\sim U(0,1)$, $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1,\\0 & 其他.\end{cases}$

（2）$Z=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{2-X}{X}=\dfrac{2}{X}-1$;

当$z<1$时，$F_z(z)=0$;

当$z\geq1$时，

$$F_z(z)=0=P\{Z\leq z\}=P(\frac{2}{X}-1\leqslant z)=P\left\{X\geq\frac{2}{z+1}\right\}=\int_{\frac{2}{z+1}}^{2}1\mathrm{d}x=2-\frac{2}{z+1}.$$

故$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+1)^2}, z>1,\\0, \quad 其他.\end{cases}$.

（3）

$$E\left(\frac{X}{Y}\right)=E\left(\frac{1}{Z}\right)=\int_1^{+\infty}\frac{2}{(z+1)^2z}\mathrm{d}z=2\int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z$$

$$=2\ln2-1.$$