2021 年全国硕士研究生招生考试

数 学（一）

（科目代码：301）

考试时间：180 分钟，试卷总分：150 分

考生注意事项

1．答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。

2．选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。

3．填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。

4．考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生编号															
考生姓名															

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1.函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

A.连续且取得极大值　　B.连续且取得极小值

C.可导且导数等于零　　D.可导且导数不为零

【答案】D

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1=f(0)$，故连续；又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x}=\dfrac{e^x-1-x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，故可导，故选 D.

2.设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x$, 则 $df(1,1)=$

A. $dx+dy$　　B. $dx-dy$　　C. dy　　D. $-dy$

【答案】C

【解析】由于 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，两边同时对 x 求导得

$$f_1'(x+1,e^x)+f_2'(x+1,e^x)e^x=(x+1)^2+2x(x+1).$$

令 $x=0$ 得 $f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1+0$, $f_1'(x,x^2)+f_2'(x,x^2)2x=4x\ln x+2x^2\cdot\dfrac{1}{x}$;

令 $x=1$ 得 $f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$.因此 $f_1'(1,1)=0$； $f_2'(1,1)=1$.

所以 $df(1,1)=dy$，故选 C.

3.设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则

A. $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$　　B. $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$

C. $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$　　D. $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$

【答案】A

【解析】由于 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}=(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3))(1-x^2+x^4+o(x^4))=x-\dfrac{7}{6}x^3+o(x^3)$，

故 $\boldsymbol{a}=1,\boldsymbol{b}=0,\boldsymbol{c}=-\dfrac{7}{6}$,答案选 A.

4.设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$

【答案】B

【解析】将 $[0,1]$ n 等分，每一份取区间中点的函数值 $f\left(\dfrac{k}{n}-\dfrac{1}{2n}\right)$，故选 B.

5.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

A. 2,0　　B. 1,1　　C. 2,1　　D. 1,2

【答案】B

【解析】

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2\\&=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_3^2+2x_1x_3-x_1^2\\&=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3.\end{aligned}$$

二次型对应矩阵为 $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-\lambda-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)((\lambda-2)(\lambda-1)-2] \\
&= \lambda(\lambda+1)(\lambda-3)
\end{aligned}
$$

则 $p=1$，$q=1$.故选 B.

6.已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$，记 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-k\beta_1$，$\beta_3=\alpha_3-l_1\beta_1-l_2\beta_2$，

若 β_1，β_2，β_3 两两正交，则 l_1，l_2 依次为

A. $\frac{5}{2},\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$　　C. $\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】由题可知, β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 做施密特正交变换得到,则

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta)_1}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1, k=\frac{2}{2}=1,\text{则 } \beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},$$

故

$$
\begin{aligned}
l_1&=\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1\cdot\beta_1)}=\frac{5}{2} \\
l_2&=\frac{(\alpha_3\cdot\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}=\frac{2\cdot 1}{4}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$
,故选 A.

7.设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实矩阵，下列不成立的是

A. $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$　　B. $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^T\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$

C. $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{BA}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AA}^T\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$　　D. $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A}^T\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$

【答案】C

【解析】由矩阵的秩的性质知，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^T)=r(\boldsymbol{AA}^T)=r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$，

故$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} \end{pmatrix} = 2r(\boldsymbol{A})$，A 正确；

而$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^T \end{pmatrix}$中，$r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{B})) = r(\boldsymbol{A})$,故$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^T \end{pmatrix} = 2r(\boldsymbol{A})$，B 正确；

D 选项，同理.

而 C 选项，$r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{BA})$不一定等于$r(\boldsymbol{A})$.

8.设A,B为随机事件，且$0<P(B)<1$，下列为假命题的是

A.若$P(A|B)=P(A)$，则$P(A|\overline{B})=P(A)$

B.若$P(A|B)>P(A)$，则$P(\overline{A}|\overline{B})>P(A)$

C.若$P(A|B)>P(A|\overline{B})$，则$P(A|B)>P(A)$

D.若$P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$，则$P(A)>P(B)$

【答案】D

【解析】A.条件失效，独立，显然成立

B.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}>P(A) \quad \Rightarrow \quad P(AB)>P(A)P(B)$$

$$\begin{aligned}
P(\overline{A}|\overline{B}) &= \frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)} \\
&> \frac{1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)}{1-P(B)} \\
&= \frac{1-P(B)+P(A)[P(B)-1]}{1-P(B)} \\
&= 1-P(A)=P(\overline{A})
\end{aligned}$$

故 B 正确.

C. 显然 $P(AB)>P(A)P(B)$,

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}>P(A)$$

故 C 正确.

D. $P(\overline{A}|\ A\cup B)=\dfrac{P[\overline{A}(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$,

$P(A)>P(B)-P(AB)$，不能说明 $P(A)>P(B)$，错误.

故选 D.

9. 设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N\left(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho\right)$ 的简单随机样本. 令 $\theta=\mu_1-\mu_2,\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$, 则

A. $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

B. $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

C. $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

D. $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

【答案】C

【解析】$E\hat{\theta}=E(\overline{X}-\overline{Y})=E\overline{X}-E\overline{Y}=\mu_1-\mu_1$ 是无偏估计.

$$\begin{aligned}D\hat{\theta}&=D(\overline{X}-\overline{Y})=D\overline{X}+D\overline{Y}-2\operatorname{Cov}(\overline{X},\overline{Y})\\&=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-\frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}.\end{aligned}$$

10. 设 $X_1,X_2,\cdots X_{16}$ 是来自总体 $N\left(\mu,4\right)$ 的简单随机样本，考虑假设检验问题：$H_0:\mu\le 10,H_1:\mu>10,\ \Phi\left(x\right)$ 表示标准正态分布函数，若该检验问题的拒绝域为 $W=\left\{\overline{X}\ge 11\right\}$, 其中 $\overline{X}=\dfrac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i$, 则 $\mu=11.5$ 时，该检验犯第二类错误的概率为

A. $1-\Phi\left(0.5\right)$　　B. $1-\Phi\left(1\right)$　　C. $1-\Phi\left(1.5\right)$　　D. $1-\Phi\left(2\right)$

【答案】B

【解析】检验犯第二类错误的概率为落在接受域的概率

$$P=\{\overline{X}<11\}=P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{11-11.5}{2/4}\right)=\Phi(-1)=1-\Phi(1).$$

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=$ ____.

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x=\arctan(x+1)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$

12.设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2\mathrm{e}^t+t+1,\\ y=4(t-1)\mathrm{e}^t+t^2\end{cases}$ 确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$ ________.

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{4\mathrm{e}^t+4(t-1)\mathrm{e}^t+2t}{2\mathrm{e}^t+1}=2t$，

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{\mathrm{d}(2t)}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=0}=2\left.\frac{1}{2\mathrm{e}^t+1}\right|_{t=0}=\frac{2}{3}.$$

13.欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 满足条件 $y(1)=1$，$y'(1)=2$ 的解为 $y=$ ______.

【答案】x^2

【解析】令 $x=\mathrm{e}^t$，由欧拉方程的换元公式得：$xy'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},x^2y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,所以原式可化简为 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-4y=0$，即 $y''(t)-4y(t)=0$. 特征方程为 $r^2-4=0$，所以 $r_1=2,r_2=-2$，所以 $y(t)=C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{-2t}$，即 $y(x)=C_1x^2+\frac{C_2}{x^2}$,代入条件 $y(1)=1$，

$y'(1)=2$ 得 $C_1=1,C_2=0$，所以 $y=x^2$.

14. 设 Σ 为空间区域 $\left\{(x,y,z)\middle| x^2+4y^2\le 4,0\le z\le 2\right\}$ 表面的外侧，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=$_____.

【答案】4π

【解析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{dydz}+y^2\mathrm{dzdx}+z\mathrm{dxdy}\\&=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+1)dv\\&=\iiint\limits_{\Omega}1dv=4\pi.\end{aligned}$$

15.设 $A=a_{(ij)}$ 为3阶矩阵，A_{ij} 为代数余子式，若 A 的每行元素之和均为2，且 $|A|=3,$ 则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$_______.

【答案】$\dfrac{3}{2}$

【解析】$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，可知2为 A 的特征值，而 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为对应的特征向量

$$A^*A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2A^*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$2(A_{11}+A_{21}+A_{31})=3\Rightarrow A_{11}+A_{21}+A_{31}=\dfrac{3}{2}.$

16. 甲、乙两个盒子中有2个红球和2个白球，选取甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒，再从乙盒中任取一球，令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球的个数，则 X 与 Y 的相关系数为________.

【答案】$\dfrac{1}{5}$

【解析】 $X=0,1,Y=0,1;$

$$EXY=\frac{3}{10},EX=\frac{1}{2},EY=\frac{1}{2};$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{4},DY=EY^2-(EY)^2=\frac{1}{4};$$

$$\rho=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}.$$

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x\int_0^x e^{t^2}dt-e^x+1}{\left(e^x-1\right)\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x\int_0^x e^{t^2}dt-e^x+1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x+1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)-1-x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}$$

$$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

18.（本题满分 12 分）

设 $u_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}+\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}(n=1,2,\cdots)$, 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

【解析】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-nx}+\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，则 $f''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$，而 $f(0)=f'(0)=0$，所以

$$f(x)=x+\ln(1-x)-x\ln(1-x).$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}$ 的收敛域为 $-1<\mathrm{e}^{-x}<1$ 即 $x>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的收敛域为 $-1\le x\le 1$，所以收敛域为 $(0,1]$.

19.（本题满分 12 分）

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6,\\4x+2y+z=30,\end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

【解析】设 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+2y^2-z-6)+\mu(4x+2y+z-30)$，令

$$\begin{cases}L'_x=2\lambda x+4\mu=0\\L'_y=4\lambda y+2\mu=0\\L'_z=2z-\lambda+\mu=0\\L'_\lambda=x^2+2y^2-z-6=0\\L'_\mu=4x+2y+z-30=0\end{cases}$$，解得 $\lambda=\mu=0$ 或者 $x=4y$.

当 $\lambda=\mu=0$ 时，$z=0$，舍去；

当 $x=4y$ 时，解得 $\begin{cases}x=4\\y=1\\z=12\end{cases}$，$\begin{cases}x=-8\\y=-2\\z=66\end{cases}$，故最大值为 66.

20.（本题满分 12 分）

设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 取得最大值的积分区域

记为 D_1.

（1）求 $I(D_1)$ 的值；

（2）计算

$$\int_{\partial D_1}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)\mathrm{d}x+(4ye^{x^2+4y^2}-x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2},$$

其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

【解析】

（1）显然被积函数在 $\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4\right\}$ 上是正的，在该区域之外是负的，所以 $I(D)$ 取得最大值时的积分区域 D_1 为 $\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4\right\}$.

$$I(D_1)=\iint_{D_1}(4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^2\left(4-r^2\right)r\mathrm{d}r=8\,\pi.$$

（2）

设 $P=\dfrac{xe^{x^2+4y^2}+y}{x^2+4y^2},Q=\dfrac{4ye^{x^2+4y^2}-x}{x^2+4y^2}$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{8xye^{x^2+4y^2}\left(x^2+4y^2-1\right)+x^2-4y^2}{\left(x^2+4y^2\right)^2}$，因此 $\int_{\partial D_1}=\int_{\partial D_1+L}-\int_L=\iint_{D_2}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial y}-\dfrac{\partial P}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{L^-}=\int_{L^-}$，其中 $L:x^2+4y^2=1$，顺时针方向；D_2 为 L 与 ∂D_1 围成的区域.所以原积分等于

$$\int_{L^-}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)\mathrm{d}x+(4ye^{x^2+4y^2}-x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\int_{L^-}\left(ex+y\right)\mathrm{d}x+\left(4ey-x\right)\mathrm{d}y=\iint_{D_3}\left(-2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\left(-2\right)\pi\frac{1}{2}=-\pi.$$

其中 D_3 为 L 围成的区域.

21.（本题满分 12 分）

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&1&-1\\1&a&-1\\-1&-1&a\end{bmatrix}$.

（1）求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵；

（2）求正定矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^2=(a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$.

【解析】

（1）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & 1\\ -1 & \lambda-a & 1\\ 1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}=[\lambda-(a-1)]^2[\lambda-(a+2)]=0;$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=a-1,\lambda_3=a+2.$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=a-1$，由 $[(a-1)E-A]x=0$，

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得特征向量

$$\alpha_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

对于 $\lambda_3=a+2$，由 $[(a+2)E-A]x=0$，

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $\alpha_3=(-1,-1,1)^T$.

$$\beta_1=(-1,1,0)^T,\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\cdot\beta_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$P^TAP=\begin{pmatrix} a-1 & & \\ & a-1 & \\ & & a+2 \end{pmatrix}.$$

（2）

$$P^{-1}[(a+3)E-A]P=\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{pmatrix};$$

$$(a+3)E-A=P\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^{-1}=\left[P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^{-1}\right]^2$$

$$C=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^T$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

22.（本题满分 12 分）

在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为 X，较长一段的长度记为 Y，令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

（1）求 X 的概率密度；

（2）求 Z 的概率密度；

（3）求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

【解析】

（1）由题意得，$X \sim U(0,1)$, $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

（2）$Z=\frac{Y}{X}=\frac{2-X}{X}=\frac{2}{X}-1$;

当 $z<1$ 时，$F_z(z)=0$;

当 $z\geq 1$ 时，

$$F_z(z)=0=P\{Z\leq z\}=P(\frac{2}{X}-1\leqslant z)=P\left\{X\geq \frac{2}{z+1}\right\}=\int_{\frac{2}{z+1}}^{2}1\mathrm{d}x=2-\frac{2}{z+1}.$$

故 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{2}{(z+1)^2}, z>1,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$.

（3）

$$E\left(\frac{X}{Y}\right)=E\left(\frac{1}{Z}\right)=\int_1^{+\infty}\frac{2}{(z+1)^2 z}\mathrm{d}z=2\int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z$$
$$=2\ln 2-1.$$