2021年全国硕士研究生招生考试

数 学（二）

（科目代码：302）

考试时间：180 分钟，试卷总分：150 分

考生注意事项

1．答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。

2．选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。

3．填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。

4．考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生编号															
考生姓名															

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1.当 $x\to 0$，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的

A. 低阶无穷小．　B. 等价无穷小．　C. 高阶无穷小．　D. 同阶但非等价无穷小．

【答案】 C.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\left(e^{t^3}-1\right)dt}{x^7}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\left(e^{x^6}-1\right)}{7x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^6}{7x^5}=0$,故选 C.

2.函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

A.连续且取极大值　　B.连续且取极小值

C.可导且导数等于零　　D.可导且导数不为零

【答案】D

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1=f(0)$，故连续；又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\frac{e^x-1-x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$，故可导，所以选 D.

3 .有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为 $2cm/s$，$-3cm/s$，当底面半径为 10cm，高为 5cm 时，圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为

A.　$125\pi cm^3/s, 40\pi cm^2/s$

B.　$125\pi cm^3/s, -40\pi cm^2/s$

C.　$-100\pi cm^3/s, 40\pi cm^2/s$

D.　$-100\pi cm^3/s, -40\pi cm^2/s$

【答案】 C.

【解析】 $\frac{dr}{dt}=2$，$\frac{dh}{dt}=-3$；$V=\pi r^2 h$，$S=2\pi rh+2\pi r^2$.

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}t}=2\pi rh\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\pi r^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-100\pi.$$

$$\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}t}=2\pi h\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+2\pi r\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+4\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=40\pi.$$

4.设函数 $f(x)=ax-b\ln x(a>0)$ 有 2 个零点，则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围

A. $(\mathrm{e},+\infty)$　　B. $(0,\mathrm{e})$　　C. $(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$　　D. $(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$

【答案】A.

【解析】$f(x)=ax-b\ln x$, 若 $b<0$，不满足条件，舍去；若 $b>0$，令 $f'(x)=a-\frac{b}{x}=0$，得 $x=\frac{b}{a}$.在 $\left(0,\frac{b}{a}\right)$, $f'(x)<0$, $\left(\frac{b}{a},\ +\infty\right)$, $f'(x)>0$.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

令 $f\left(\frac{b}{a}\right)=b-b\ln\frac{b}{a}=b\left(1-\ln\frac{b}{a}\right)<0$, 得 $\ln\frac{b}{a}>1$，即 $\frac{b}{a}>\mathrm{e}$.故选 A.

5.设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$，则

A. $a=1,b=-\frac{1}{2}$　　B. $a=1,b=\frac{1}{2}$

C. $a=0,b=-\frac{1}{2}$　　D. $a=0,b=\frac{1}{2}$

【答案】 D.

【解析】 $f(x)=\sec x=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$.

所以可得 $a=0$，$b=\frac{1}{2}$.

6.设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,\mathrm{e}^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x$, 则 $\mathrm{d}f(1,1)=$

A. $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ B. $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$ C. $\mathrm{d}y$ D. $-\mathrm{d}y$

【答案】选 C

【解析】由于 $f(x+1,\mathrm{e}^x)=x(x+1)^2$，两边同时对 x 求导得

$$f_1'(x+1,\mathrm{e}^x)+f_2'(x+1,\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x=(x+1)^2+2x(x+1).$$

令 $x=0$ 得 $f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1+0$, $f_1'(x,x^2)+f_2'(x,x^2)2x=4x\ln x+2x^2\cdot\frac{1}{x}$;

令 $x=1$ 得 $f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$.因此 $f_1'(1,1)=0$； $f_2'(1,1)=1$.

所以 $\mathrm{d}f(1,1)=\mathrm{d}y$，故选 C.

7.设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{2n}$ B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$ D. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{2}{n}$

【答案】选 B

【解析】将 $[0,1]$ 的区间 n 等分，每一份取区间中点的函数值 $f\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2n}\right)$，故选 B.

8.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

A. 2,0 B. 1,1 C. 2,1 D. 1,2

【答案】选 B

【解析】

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2\\&=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_3^2+2x_1x_3-x_1^2\\&=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3.\end{aligned}$$

二次型对应矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)((\lambda-2)(\lambda-1)-2] \\ &= \lambda(\lambda+1)(\lambda-3) \end{aligned}$$

则 $p=1 \quad q=1$.

9.设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出，则（ ）

A. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解.

B. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

C. $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

D. $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

【答案】D

【解析】由题意，可知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$， $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，D 选项正确.

10 .已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, 若下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 分别取（ ）.

$A.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　$B.\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$C.\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　$D.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

【答案】C

【解析】通过代入验证 $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}$.

选 C

二、填空题（11-16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

11. $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}\mathrm{d}x=$________.

【答案】$\dfrac{1}{\ln 3}$

【解析】原式 $=2\int_0^{+\infty}x3^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}3^{-x^2}\mathrm{d}x^2=-\dfrac{1}{\ln 3}3^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{1}{\ln 3}$

12. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2\mathrm{e}^t+t+1,\\y=4(t-1)\mathrm{e}^t+t^2\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$ ________.

【答案】$\dfrac{2}{3}$.

【解析】

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{4\mathrm{e}^t+4(t-1)\mathrm{e}^t+2t}{2\mathrm{e}^t+1}=2t,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{\mathrm{d}(2t)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=2\left.\frac{1}{2\mathrm{e}^t+1}\right|_{t=0}=\frac{2}{3}$$

13 .设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=$________.

【答案】1

【解析】将 $x=0,y=2$ 代入得 $z=1$，

又对 $(x+1)z+y\ln z-\arctan\left(2xy\right)=1$ 两边同时求 x 的导数得

$$z+(x+1)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{2y}{1+(2xy)^2}=0$$

将 $x=0,y=2,z=1$ 代入上式得 $\frac{\partial z}{\partial x}=1$.

14. 已知函数 $f(t)=\int_1^{t^2}dx\int_{\sqrt{x}}^{t}\sin\frac{x}{y}dy$，则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ ________.

【答案】$\frac{\pi}{2}cos\frac{2}{\pi}$.

【解析】$f\left(t\right)=\int_1^{t^2}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{t}sin\frac{x}{y}\mathrm{d}y=\int_1^{t}\mathrm{d}y\int_1^{y^2}sin\frac{x}{y}\mathrm{d}x=\int_1^{t}\left(\int_1^{y^2}sin\frac{x}{y}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$, 则

$f'\left(t\right)=\int_1^{t^2}sin\frac{x}{t}\mathrm{d}x$，所以 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_1^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}sin\frac{x}{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}cos\frac{2x}{\pi}\Big|_1^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{\pi}{2}cos\frac{2}{\pi}$.

15. 微分方程 $y'''-y=0$ 的通解 $y=$ ________.

【答案】$C_1\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

【解析】设其特征方程为 $r^3-1=0$，则 $r_1=1;r_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;r_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 故其通解为

$C_1\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

16. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x & x & 1 & 2x\\ 1 & x & 2 & -1\\ 2 & 1 & x & 1\\ 2 & -1 & 1 & x\end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为 ________.

【答案】-5

【解析】 x^3 项为 $\left(-1\right)^{1+2+2}4x^3+\left(-1\right)^1x^3=-5x^3$，因此 x^3 项系数为 -5

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x})$．

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-\mathrm{e}^x+1}{\left(\mathrm{e}^x-1\right)\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-\mathrm{e}^x+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\mathrm{e}^x+1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)-1-x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

18．（本题满分 12 分）

已知 $f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$，求 $f(x)$ 的凹凸区间及渐近线.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2}{1+x}, & x\le 0, x\ne -1\\ \dfrac{x^2}{1+x}, & x>0\end{cases}$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{1+x}-0}{x}=0$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{1+x}-0}{x}=0$$

所以

$$f'(x)=\begin{cases}-1+\dfrac{1}{(1+x)^2}, & x<0,x\neq -1\\ 0, & x=0\\ 1-\dfrac{1}{(1+x)^2}, & x>0\end{cases}$$

$$f''_{+}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{(1+x)^2}-0}{x}=2$$

$$f''_{-}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{-1+\dfrac{1}{(1+x)^2}-0}{x}=-2$$

所以

$$f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{(1+x)^3} & x<0,x\neq -1\\ \dfrac{2}{(1+x)^3} & x>0\end{cases}$$

$x<-1$时，$f''>0$

$-1<x<0$时，$f''<0$

$x>0$时，$f''>0$

因此，凹区间$(-\infty,-1),(0,+\infty)$，凸区间$(-1,0)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2}{1+x}=+\infty$，因此没有水平渐近线；

$x=-1,x+1=0$，且 $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{-x^2}{1+x}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{-x^2}{1+x}=+\infty$，因此存在铅直渐近线$x=-1$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2}{1+x}}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x}-x=-1$，因此存在斜渐近线$y=x-1$；

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\dfrac{x^2}{1+x}}{x}=-1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{x^2}{1+x}+x=1$，因此存在斜渐近线 $y=-x+1$；

19．（本题满分 12 分）

$f(x)$ 满足 $\int\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\dfrac{1}{6}x^2-x+C$，$L$ 为曲线 $y=f(x)(4\le x\le 9)$，L 的弧长为 S，L 绕 x 轴旋转一周所形成的曲面面积为 A，求 S 和 A．

解：$\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{3}x-1$

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$

$$s=\int_4^9\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_4^9(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx$$

$$=\frac{22}{3}$$

$$A=2\pi\int_4^9\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{425}{9}\pi$$

20．（本题满分 12 分）

$y=y(x)$ 微分方程 $xy'-6y=-6$，满足 $y(\sqrt{3})=10$

（1）求 $y(x)$

（2）P 为曲线 $y=y(x)$ 上的一点，曲线 $y=y(x)$ 在点 P 的法线在 y 轴上截距为 I_p，为使 I_p 最小，求 P 的坐标。

解：（1）$y'-\dfrac{6}{x}y=-\dfrac{6}{x}$，

$y=e^{\int\frac{6}{x}dx}\left(\int-\frac{6}{x}\cdot e^{-\int\frac{6}{x}dx}+C\right)$

$=x^{6}\left(\int-\frac{6}{x}\cdot x^{-6}dx+C\right)$

$=1+Cx^{6}.$

根据由初始条件得 $C=\frac{1}{3}$.所以 $y=1+\frac{1}{3}x^{6}$.

（2）设在 $\left(x_0,1+\frac{1}{3}x_0^6\right)$ 的法线为 $y-\left(1+\frac{1}{3}x_0^6\right)=-\frac{1}{2x_0^5}\left(x-x_0\right)$，

在 y 轴上的截距为 $I_P=\frac{1}{2x_0^4}+\frac{1}{3}x_0^6+1=h\left(x_0\right)$，

$h'\left(x_0\right)=-2x_0^{-5}+2x_0^5=0$，得 $x_0=\pm1$，得 P 点坐标为 $\left(1,\frac{4}{3}\right)$，$\left(-1,\frac{4}{3}\right)$.

21.（本题满分 12 分）

曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2(x\ge0,y\ge0)$ 与 x 轴围成的区域 D，求 $\iint\limits_D xydxdy$.

【解析】 $r^4=r^2\cos2\theta$，$r^2=\cos2\theta$

$I=\iint\limits_D xydxdy=\int_0^1dx\int_0^{f(x)}xydy$

$=\int_0^1x\cdot\frac{1}{2}f^2(x)dx=\frac{1}{4}\int_0^1f^2(x)d(x^2)$

$x=r\cos\theta,\ x^2=r^2\cos^2\theta=\cos2\theta\cdot\cos^2\theta$

$y=r\sin\theta,\ y^2=r^2\sin^2\theta=\cos2\theta\cdot\sin^2\theta=f^2(x)$

$I=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos2\theta\cdot\sin^2\theta d(\cos2\theta\cdot\cos^2\theta)$

$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin4\theta\cdot\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta+2\cos^2 2\theta\cdot\sin^3\theta\cos\theta)\,d\theta$

$=\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin4\theta\cdot\sin^2 2\theta d\theta+\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2\theta\cdot\sin2\theta(1-\cos2\theta)\,d\theta$

$$=\frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 4\theta-\frac{1}{2}\sin 8\theta)d\theta-\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 2\theta-\cos^3 2\theta)d\cos 2\theta$$

$$=-\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{4}\cos 4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{8}\cos 8\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{16}\cdot(\frac{1}{3}\cos^3 2\theta-\frac{1}{4}\cos^4 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{24}$$

22.（本题满分 12 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{bmatrix}$ 仅有两不同的特征值，若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵，求 a,b 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

【解析】

$$|\lambda E-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\-1&-a&\lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-b)[(\lambda-2)^2-1]$$

$$=(\lambda-b)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)$$

$$=(\lambda-b)(\lambda-1)(\lambda-3)$$

$$=0.$$

当 $b=1$ 时，$a=1$，$\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=1$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

当 $b=3$ 时，$a=-1$，$\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=1$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.