one sample.

two sample — independent / paired.

Review of Hypothesis Testing for μ

I One sample case (Population이 하나, μ도 하나.)

ex1) $H_0 : p = 0.25, H_1 : p > 0.25$. Let X be number of success.

특수한 case. 보통 μ에 대해 쓰는데 이건 binomial에 대해 사용함.

Suppose Rejection region is {8,9,10,.....20}. = 조건 binomial

Find α and $\beta(0.3)$

↑ 이 값들 중 하나가 나오면 H_0를 reject.

X : # of success

Bin(20, P).

① α = H_0를 reject 할 확률 | H_0가 true일 때

$= P(X \geq 8 \mid P = 0.25) = 1 - F(7)$

↑ p=0.25일 때 bin 테이블 참고.

② β = H_0를 reject 못 할 확률 | H_0가 false일 때

$= P(X < 8 \mid P = 0.3)$

$= F(7)$

↑ p=0.3일 때 bin 테이블 참고.

ex2) $H_0 : \mu = 130, H_1 : \mu \neq 130$. $\sigma = 15, n = 9$ $\alpha = 0.01$

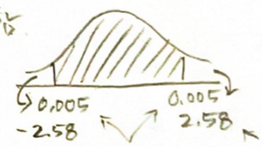
1) We reject if $\mu > 130$ or $\mu < 130$

↳ 이건 130과 너무 가까워서 CR로 쓸 수 없음.

↳ 방법 두 개 쓸 수 있음.

① $\bar{X} > C_1$ or $\bar{X} < C_2$ ← 이 경우 C_1과 C_2를 구해야 함.

② $z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$를 구함



$\alpha/2$ 한 값. table에서 찾는 값

∴ $z < -2.58$ 이나 $z > 2.58$ 이라고 써줄 수 있음.

참고로 CR은... $C_1 = 130 + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2) Let z=2.16. Find $\boxed{P\text{-value}}$ H_0를 기각할 수 있는 min 값

① $z < 2.58$ 이니까 H_0를 reject X ⇐

② P-value = $P(Z > 2.16) \times 2$.

= 0.316

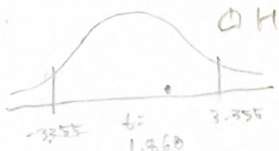
($Z > 2.16$ 또는 $Z < 2.16$) 이런 경우 안 곱해도 됨.

0.9846
0.0154
0.0308

ex3) Do same with ex2) but $s = 15$ instead of $\sigma = 15$

S로 주어지면 t분포, σ로 주어지면 Z.

$t = \dfrac{\bar{X} - 130}{\frac{15}{\sqrt{9}}}$ 자유도 : 8.



① H_0 reject X.

② $P = P(|T| > 1.865)$

ex4) $H_0 : \mu = 75,\ H_1 : \mu < 75$. $\sigma = 9$. Suppose $\alpha = 0.05$. Find a sample size if we want the power of the test is 0.9 if true mean is 70.

알려면 β를 알아야 함.

H_0를 reject 해야하는 상황에서 H_0를 기각하는 확률.

이건 1-β 값임. ∴β = 0.1.

$\frac{(1.29 + 1.645)^2 \cdot 81}{5}$

$\beta = 0.1 = P(\bar{X} > C \mid \mu = 70)$

↳ C값은 α로부터 구해야 함. (α가 주어지면 C를 구할 수 있고, C가 주어지면 α를 구할 수 있음.)

$\alpha = 0.05$,

$= P(\bar{X} < C \mid \mu = 75)$

$= P\left(Z < \dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$

$\alpha_{0.05}$인 table에서 찾아야 함. → ↳ -1.645.

$\therefore C = 75 - 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$0.1 = P(\bar{X} > C \mid \mu = 70)$

$= P\left(Z > \dfrac{C - 70}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$

∴ n = 1.2.

II Two sample case

ex1) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$, $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$ Two independent samples are taken from Normal distribution. Let $\sigma_1 = 14$ $\sigma_2 = 16$.

$n_1 = 125$, $n_2 = 90$. $\overline{X_1} = 48$, $\overline{X_2} = 43$.

$$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{14^2}{125} + \frac{16^2}{90}}} = z \qquad (\mu_1 - \mu_2 \to 0)$$

1) We reject if ______________________________

2) Suppose z=2.85. Find P-value.

H_1과 부등호 방향 같음.

P-value = $P(Z > 2.85) \times 2$.

ex2) with ex1) but $s_{1,} s_2$ instead of σ_1 , σ_2

sample size가 크니까 z값(2.85)를 쓰면 됨.

t써야 하지만,

ex3) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$, $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$ Two independent samples are taken from Normal distribution. Two distributions have same population variances.

sample size 작음   σ를 모름.   대신 $\sigma_1 = \sigma_2$라는 건 안다.

Now $\overline{X_1} = 48$, $\overline{X_2} = 43$ and $n_1 = 20$ $n_2 = 16$ and $s_1 = 12$, $s_2 = 9$.

1) We reject if ______ $Z > 1.64$ ______

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} - \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad (\sigma\text{를 아는 때})$$

2) Find S_p

σ를 모를 때 σ 대신 Sp를 쓴다.

$$S_p = \sqrt{\frac{19 \times 12^2 + 15 \times 9^2}{19 + 15^2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

자유도

ex4) Paired data.(X_1 and X_2 are not independent but have Normal distributions)

Let $D = X_1 - X_2$.

1) Find $E(D)$ and σ_D^2 ⇨

X_1 : 17, 19, 21, 15, 18

X_2 : 4, 6, 10, 2, 3

D : 13, 13, 11, 13, 15 ($D = X_1 - X_2$)

2) $\overline{D}$ 의 distribution?

① $E(D) = \mu_1 - \mu_2$

② D의 분산 = $Var(D) = \sigma_D^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\,COV$.

③ D의 평균의 기대값 = $E(\overline{D}) = \mu_D$

④ $\overline{D}$의 분산 = $Var(\overline{D}) = \frac{\sigma_D^2}{n}$

사슴벌레문제 참고. →

⑤ $z = \frac{\overline{D} - \mu_D}{\sigma_{\overline{D}}} = \frac{\overline{D} - 0}{S_D/\sqrt{n}} = t$. ($S_D$는 D의 표준편차)

데이터에서 계산해 얻음.