정보통신 수학 및 실습 Homework

학번 : 2016110056

학과 : 불교학부

이름 : 박승원

날짜 : 2017년 3월 27일

Chapter 5 Homework

1. Find the derivatives of the following functions at x1.

a) $y = 3x^2 + 2x - 1, x1 = 2$

$y' = 6x + 2$
$y'(2) = 14$

b) $y = 3x + 7, x1 = -1$

3

2. Find the derivatives of the following functions and their integration parts of the fundamental theorem of calculus.

a) $\cos x \sin x$

$-\sin^2 x + \cos^2 x$

b) $\log(10x)$

$(1 + \log x)' = \frac{1}{x}$

c) e^{-3x}

$-3e^{-3x}$

3. Find the values of the following integrations.

a) $\int_{-1}^{1} x^2 + 3x + 2dx$

$\left[\frac{1}{3}x^3 + 6x + 2x\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

b) $\int_{-1}^{1} e^{2x} + e^x dx$

$\left[\frac{1}{2}e^{2x} + e^x\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2} + e + \frac{e^2}{2}$

c) $\int_{1}^{2} \frac{1}{2}dx$

$\left[\frac{1}{2}x\right]_{1}^{2} = \frac{1}{2}$

4. Compute the following indefinite integrations.

a) $\int xe^x dx$

$(xe^x)' = e^x + xe^x$에서 양변을 적분하면 $xe^x = e^x + \int xe^x dx$

$\therefore \int xe^x dx = xe^x - e^x$

b) $\int x \sin x dx$

$(x \cos x)' = \cos x - x \sin x$에서 양변을 적분하면 $x \cos x = \sin x - \int x \sin x dx$

$\therefore \int x \sin x dx = \sin x - x \cos x$

c) $\int \frac{\log x}{x} dx$

$(\log^2 x)' = \frac{2 \log x}{x}$

$\therefore \int \frac{\log x}{x} = \frac{1}{2} \log^2 x$

d) $\int e^{-x} \cos x dx$

$(e^{-x} \sin x)' = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$

$(e^{-x} \cos x)' = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$

위 식에서 아래 식을 빼면

$(e^{-x} \sin x)' - (e^{-x} \cos x)' = 2e^{-x} \cos x$

양변을 적분하면 $\therefore \int e^{-x} \cos x = \frac{1}{2}(e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x)$

5. Find the Taylor series of the following functions.

무한히 미분 가능한 임의의 함수를 무한한 차수의 다항식 $C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + C_{n-2} x^{n-2} + ... C_2 x^2 + C_1 x + C_0$으로 나타낼 수 있다.($n \to \infty$) 연립방정식을 생각해보면 두 개의 점이 있으면 그 것을 나타내는 일차식을 결정하는 계수를 구할 수 있다. 이 때에 차수는 일차식이면 된다. 점의 갯수가 많아질 수록 다항식을 차수를 늘리면 그에 상응하는 계수를 구할 수 있다. 이를 확장하면 무한의 차수의 방정식으로 유한한 갯수의 점을 가지는 함수를 구할 수 있다. 테일러 식은 근사식이므로 유한한 갯수의 점을 가지는 함수를 가정해도 된다. 그러므로 임의의 식을

$f(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + C_{n-2} x^{n-2} + \cdots + C_2 x^2 + C_1 x + C_0$로 나타낼 수 있다.

다음으로 계수 C_n를 함수 f를 n번 미분하여 0을 대입한 것으로 구할 수 있다. 자신보다 큰 항의 계수는 0의 대입으로 인해 사라지고, 자신보다 차수가 작은 항은 미분으로 사라진다.

$C_n = \frac{f^n(0)}{n!}$

그러므로, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k$

$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{6} x^3 \cdots$

이 때에 x의 크기가 1보다 작으면, 자승에 의해서 x^n이 작아지므로, 테일러 급수를 통해 어떠한 식의 근사치를 구해 갈 수 있다.

a) e^{2x}

$$1 + 2x + \cdots + \frac{2^n}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}x^k$$

b) $\sin 2x$

짝수번 미분하면 0을 대입시 0이 되므로 홀수번 미분시만 고려하면 된다.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

c) $\cos 2x$

홀수번 미분하면 0을 대입시 0이 되고, 짝수번 미분시 0을 대입하면 1이 되므로 짝수번 미분만 고려하면 된다.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}x^{2k}$$