Master's Theorem

$$T(n) = a\ T(\frac{n}{b}) + n^{c},\ \ a \geq 1,\ \ b > 1$$

$$1)\ c = log_b a\ :\ T(n) \in \Theta(n^{log_b a} \cdot log_b n)$$

$$2)\ c > log_b a : T(n) \in \Theta(n^c)$$

$$3)\ c < log_b a : T(n) \in \Theta(n^{log_b a})$$

- 위 정리를 간편히 암기하는 방법:
  - a T(n/b)은 결국 $n^{\log_b a}$ 가 된다. 따라서
  - 2)와 3)의 경우는 결국 $n^{\log_b a}$ 와 n^c 중에 큰 것이 지배한다.
  - 1)의 경우는 $n^{\log_b a}$ = n^c 이므로, 이들보다 $\log_b n$ 만큼 커진다.

Proof of the theorem ($n = b^k$ 일때)

$$
\begin{aligned}
T(n) &= a\,\mathrm{T}(\frac{n}{b}) + n^c \\
&= a\left(a\,\mathrm{T}(\frac{n}{b^2}) + (\frac{n}{b})^c\right) + n^c \\
&= a^2\,\mathrm{T}(\frac{n}{b^2}) + \frac{a}{b^c}n^c + n^c \\
&= a^2\left(a\,\mathrm{T}(\frac{n}{b^3}) + (\frac{n}{b^2})^c\right) + \frac{a}{b^c}n^c + n^c \\
&= a^3\,\mathrm{T}(\frac{n}{b^3}) + (\frac{a}{b^c})^2 n^c + \frac{a}{b^c}n^c + n^c \\
&= \;\ldots.. \\
&= a^k\,\mathrm{T}(\frac{n}{b^k}) + \left((\frac{a}{b^c})^{k-1} + .. + (\frac{a}{b^c})^2 + \frac{a}{b^c} + 1\right) n^c \quad \cdots\cdots \quad (*)
\end{aligned}
$$

Proof of the theorem ($n = b^k$ 일때)

- $c = \log_b a$ 인 경우:

i) $b^c = a$ 이므로, 괄호 안의 급수의 공비 $\frac{a}{b^c} = 1$ 이고,
급수값= k 가 된다.

ii) $n = b^k$ 임을 가정했으므로, $k = \log_b n$ 이다.

이들을 식 (*)에 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$T(n) = a^{\log_b n} \cdot T(1) + n^c \cdot \log_b n = n^{\log_b a} \cdot T(1) + n^c \cdot \log_b n$$

$$\in \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log_b n) \quad (n^c = n^{\log_b a} \text{ 이므로})$$

Proof of the theorem ($n = b^k$ 일때)

- $c > \log_b a$ 인 경우:

i) $b^c > a$ 이므로, 괄호 안의 급수의 공비 $\frac{a}{b^c} < 1$ 이고

급수값 $= \dfrac{1-(\frac{a}{b^c})^k}{1-\frac{a}{b^c}} \leq \dfrac{1}{1-\frac{a}{b^c}}$, 즉 상수 $\frac{1}{1-\frac{a}{b^c}}$ $(= d)$ 을 넘지 못한다.

ii) $n = b^k$ 임을 가정했으므로, $k = \log_b n$ 이다.

이들을 식 (*)에 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$T(n) = a^{\log_b n} \cdot T(1) + n^c \cdot d = n^{\log_b a} \cdot T(1) + n^c \cdot d$$
$$\in \Theta(n^c)$$

Proof of the theorem ($n = b^k$ 일때)

- $c < \log_b a$ 인 경우:

i) $b^c < a$ 이므로, 괄호 안의 급수의 공비 $\frac{a}{b^c} > 1$ 이고

$$급수값 = \frac{(\frac{a}{b^c})^k - 1}{\frac{a}{b^c} - 1} = \frac{1}{\frac{a}{b^c} - 1} \cdot \frac{a^k}{b^{ck}} = d \cdot \frac{a^k}{b^{ck}} \quad (\text{d: 상수})$$

ii) $n = b^k$ 임을 가정했으므로, $k = \log_b n$ 이다.

이들을 식 (*)에 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$T(n) = a^{\log_b n} \cdot T(1) + n^c \cdot d \cdot \frac{a^k}{b^{ck}} = n^{\log_b a} \cdot T(1) + n^c \cdot d \cdot \frac{a^{\log_b n}}{b^{c \log_b n}}$$

$$= n^{\log_b a} \cdot T(1) + n^c \cdot d \cdot \frac{n^{\log_b a}}{n^c} = n^{\log_b a} \cdot T(1) + d \cdot n^{\log_b a}$$

$$\in \Theta(n^{\log_b a})$$