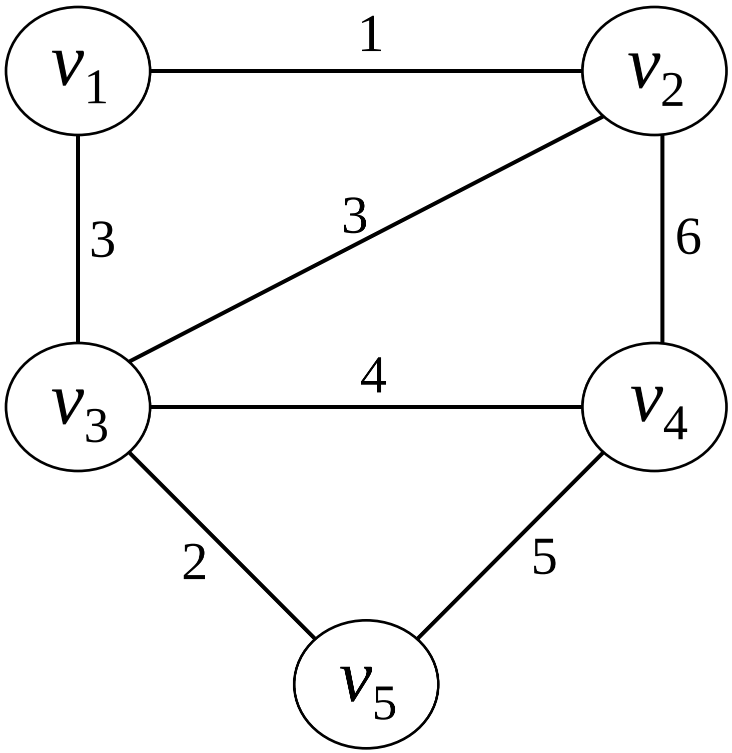
Graph algorithms II

1. Kruskal's Minimum Spanning Tree Algorithm
2. Floyd's All-Pairs Shortest Path Algorithm
3. Prim's Minimum Spanning Tree Algorithm
4. Dijkstra's Single Source Shortest Path Algorithm

연결된 가중치 비방향그래프

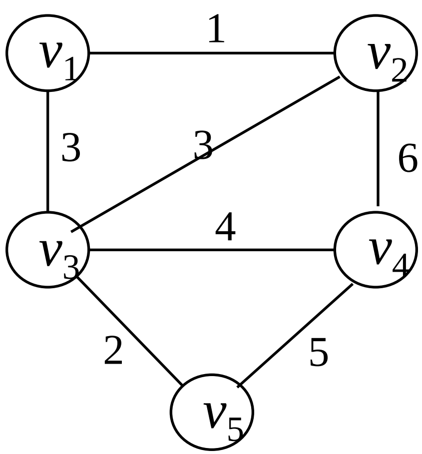


Minimum Spanning Tree

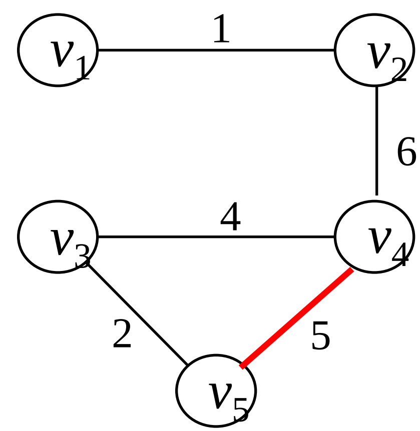
- Spanning Tree (신장트리)
  - A connected subgraph that contains all the vertices in G and is a tree
  - 연결된 비방향성 그래프 *G*에서 순환경로를 제거하면서 연결된 부분그래프가 되도록 이음선을 제거
- Minimum spanning tree (최소비용 신장트리)
  - A spanning tree with minimum weight in G
  - 최소 비용의 연결된 부분그래프는 반드시 트리가 되어야 한다. 왜냐하면, 만약 트리가 아니라면, 분명히 순환경로(cycle)가 있을 것이고, 그렇게 되면 순환경로 상의 한 이음선을 제거하면 더 작은 비용의 연결된 부분그래프를 얻을 수 있기 때문이다.
  - 관찰1: 모든 신장트리가 최소비용 신장트리는 아니다.
  - 관찰2: 최소비용 신장트리는 유일하지 않을 수도 있다.

Minimum Spanning Tree

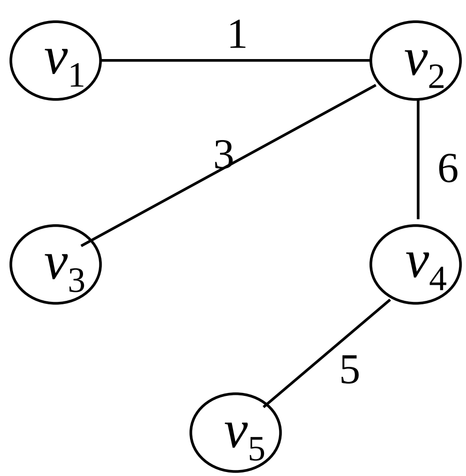
(a) A connected, weighted, undirected graph G



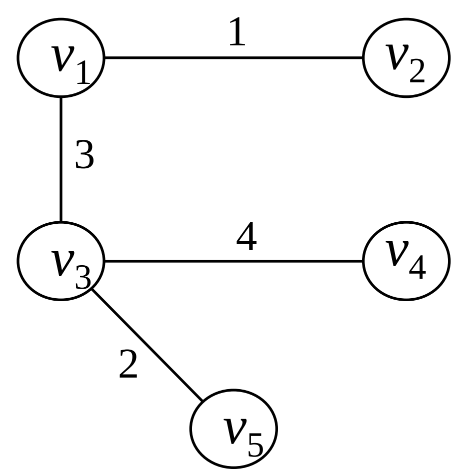
(b) If (v_4,v_5) were removed from this subgraph, the graph would remain connected.



(c) A spanning tree for G



(d) A minimum spanning tree for G



Minimum Spanning Tree

- 최소비용신장트리의 적용 예
  - 도로 건설 (road construction)
    - 도시들을 모두 연결하면서 도로의 길이가 최소가 되도록 하는 문제
  - 통신 (telecommunications)
    - 전화선의 길이가 최소가 되도록 전화 케이블 망을 구성하는 문제
  - 배관 (plumbing)
    - 파이프의 총 길이가 최소가 되도록 연결하는 문제

Minimum Spanning Tree

- Brute-force method
  - 알고리즘
    - 모든 신장트리를 다 고려해 보고,
      그 중에서 최소비용이 드는 것을 고른다.
  - 분석
    - 이는 최악의 경우, 지수보다도 나쁘다.
    - Complete graph의 신장트리는 $\Theta(n^{n-2})$ 개 존재함이 알려져 있다.

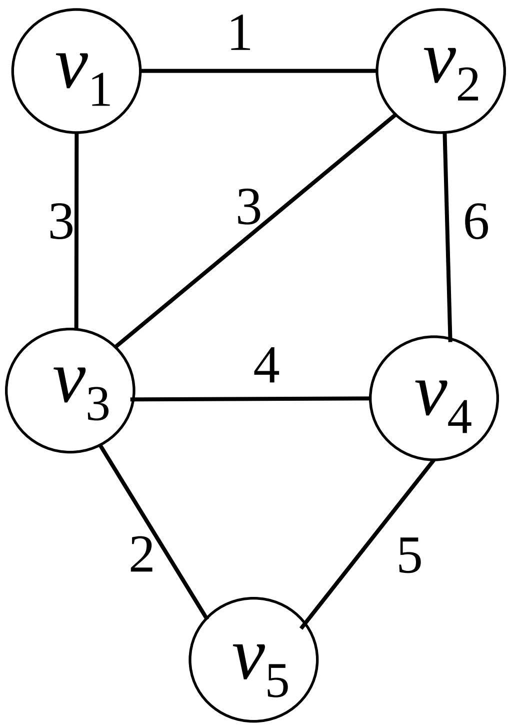
Kruskal's Algorithm

- High-level Algorithm

```
F := Φ;                                         // initialize set of edges to empty

create disjoint subsets of V, one for each
vertex and containing only that vertex;

sort the edges in E in nondecreasing order;

While (the instance is not solved) {
      select next edge;                         // selection procedure
      if (the edge connects 2 vertices
                  in disjoint subsets) {        // feasibility check
            merge the subsets;
            add the edge to F;
      }

      if (all the subsets are merged)           // solution check
            the instance is solved;
}
```

Kruskal's Algorithm

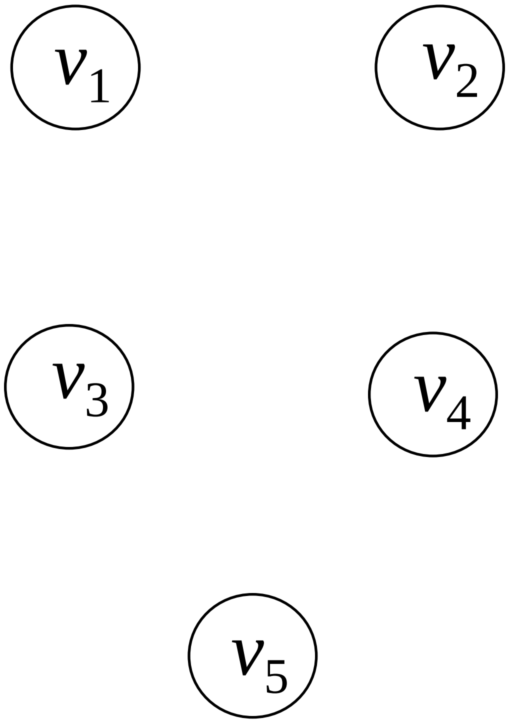
Determining a MST



1. Edges are sorted by weight

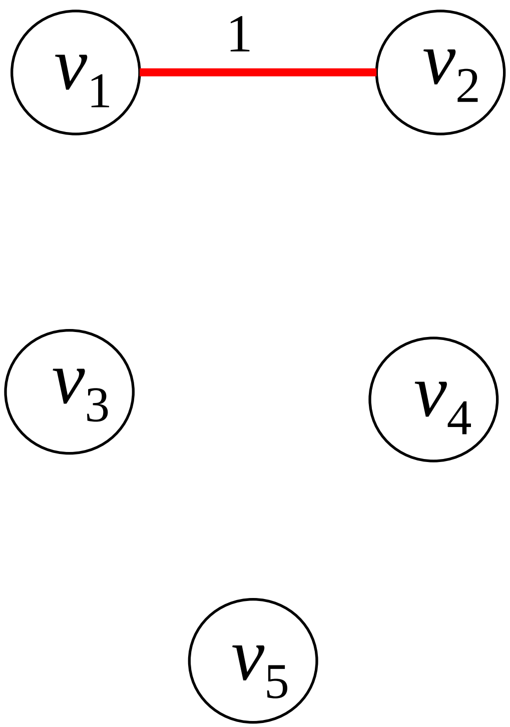
(v1, v2)	1
(v3, v5)	2
(v1, v3)	3
(v2, v3)	3
(v3, v4)	4
(v4, v5)	5
(v2, v4)	6

2. Disjoint sets are created

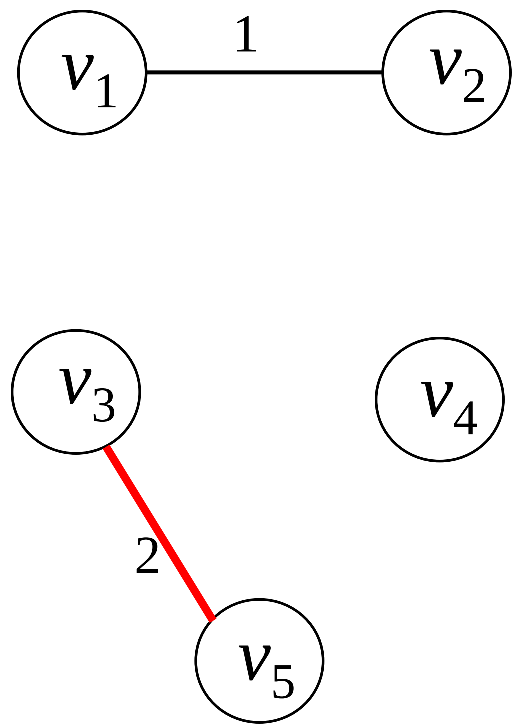


Kruskal's Algorithm

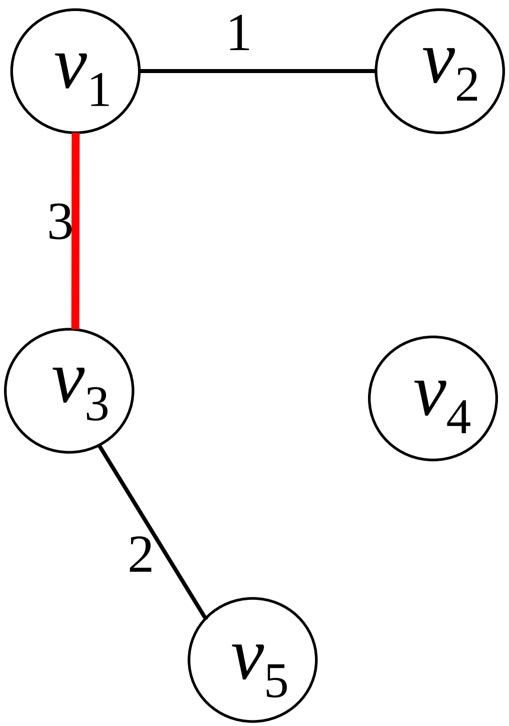
3. (v_1, v_2) is selected



4. (v_3, v_5) is selected

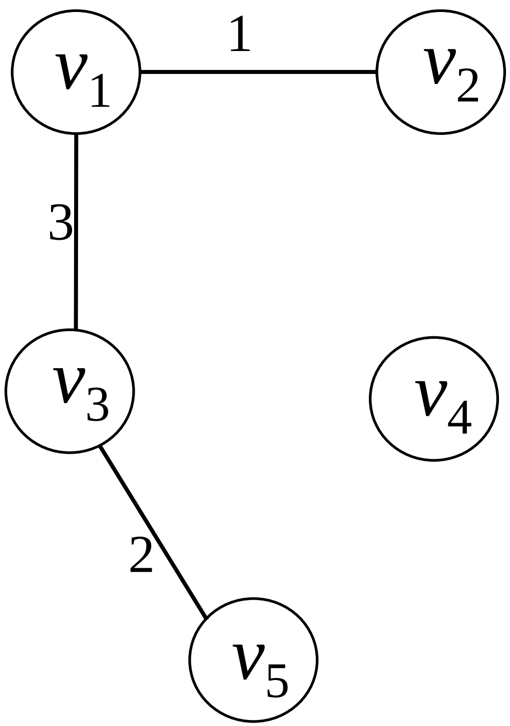


5. (v_1, v_3) is selected

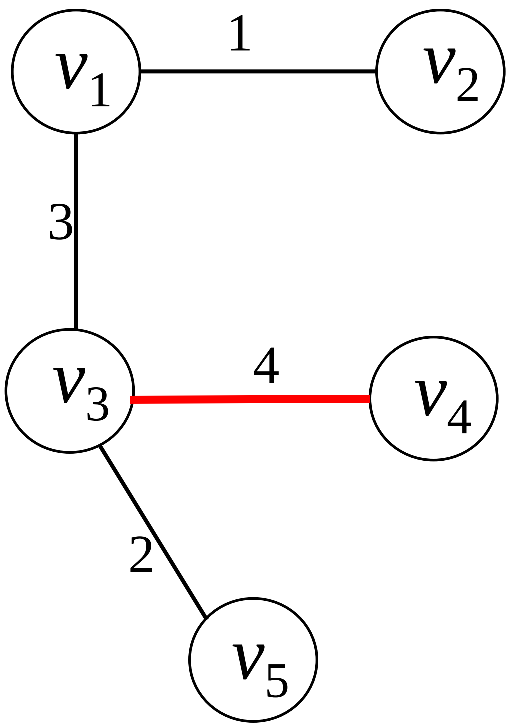


Kruskal's Algorithm

6. (v2, v3) is selected



7. (v3, v4) is selected



Kruskal's Algorithm

- <u>서로소 집합 추상 데이터 타입 (disjoint set abstract data type)</u>

index i;

set_pointer p, q;

- initial(n): n개의 서로소 부분집합을 초기화
  (하나의 부분집합에 1에서 n사이의 인덱스가 정확히 하나 포함됨)
- p = find(i): 인덱스 i가 포함된 집합의 포인터 p를 넘겨줌
- merge(p, q): 두 개의 집합을 가리키는 p와 q를 합병
- equal(p, q): p와 q가 같은 집합을 가리키면 true를 넘겨줌

Kruskal's Algorithm

```
void kruskal(int n, int m, set_of_edges E, set_of_edges& F) {
    index i, j;
    set_pointer p, q;
    edge e;

    Sort the m edges in E by weight in nondecreasing order;
    F = Φ;
    initial(n);

    while (number of edges in F is less than n-1) {
        e = edges with least weight not yet considered;
        i, j = indices of vertices connected by e;
        p = find(i);
        q = find(j);
        if (!equal(p,q)) {
                merge(p,q);
                add e to F;
        }
    }
}
```

Kruskal's Algorithm

- Worst-Case Time-Complexity Analysis
  - 단위연산: 비교문
  - 입력크기: 정점의 수 n과 이음선의 수 m
    1. 이음선 들을 정렬하는데 걸리는 시간: $\Theta(m \lg m)$
    2. 반복문 안에서 걸리는 시간: 루프를 m번 수행한다. 서로소인 집합 자료구조(disjoint set data structure)를 사용하여 구현하고, find, equal, merge 같은 동작을 호출하는 횟수가 상수이면, m개의 이음선 반복에 대한 시간복잡도는 $\Theta(m \lg n)$이다.
    3. n개의 서로소인 집합(disjoint set)을 초기화하는데 걸리는 시간: $\Theta(n)$
  - 그런데 여기서 $m \geq n - 1$이기 때문에, 위의 1과 2는 3을 지배하게 되므로, $W(m, n) = \Theta(m \lg m)$가 된다.
  - 그러나, 최악의 경우에는 모든 정점이 다른 모든 정점과 연결이 될 수 있기 때문에, $m = \frac{n(n-1)}{2} \in \Theta(n^2)$ 가 된다. 그러므로, 최악의 경우의 시간복잡도는

$$W(m,n) \in \Theta(n^2 \lg n^2) = \Theta(2n^2 \lg n) = \Theta(n^2 \lg n)$$

  - 최적여부의 검증(Optimality Proof)
    - Prim의 알고리즘의 경우와 비슷함. (교재 참조)

All-Pairs Shortest Path Problem

- 가중치가 있는 방향성 그래프에서 모든 정점에서 다른 모든 정점으로 가는 최단경로 구하는 문제

- 그래프에서 최단경로의 길이의 표현:

$D^{(k)}[i][j]$ = v_1에서 v_k까지의 정점들 만을 통해서 v_i에서 v_j로 가는 최단경로의 길이

- 그래프의 인접행렬(adjacent matrix) 표현: W

$$W[i][j] = \begin{cases} \text{이음선의 가중치} & v_i\text{에서 } v_j\text{로의 이음선이 있다면} \\ \infty & v_i\text{에서 } v_j\text{로의 이음선이 없다면} \\ 0 & i = j \text{ 이면} \end{cases}$$

동적계획식 설계전략 - 자료구조

- 보기:
  - W : 그래프의 인접행렬식 표현
  - D : 각 정점들 사이의 최단 거리

$W[i][j]$	1	2	3	4	5
1	0	1	∞	1	5
2	9	0	3	2	∞
3	∞	∞	0	4	∞
4	∞	∞	2	0	3
5	3	∞	∞	∞	0

$D[i][j]$	1	2	3	4	5
1	0	1	3	1	4
2	8	0	3	2	5
3	10	11	0	4	7
4	6	7	2	0	3
5	3	4	6	4	0

여기서, $0 \le k \le 5$ 일 때, $D^{(k)}[2][5]$를 구해보자.

- $D^{(0)} = W$이고, $D^{(n)} = D$임은 분명하다. 따라서 D를 구하기 위해서는 $D^{(0)}$를 가지고 $D^{(n)}$을 구할 수 있는 방법을 고안해 내어야 한다.

동적계획식 설계절차

1. Establish a recursive property

- $D^{(k\text{-}1)}$을 가지고 $D^{(k)}$를 계산할 수 있는 재귀 관계식을 정립

$$D^{(k)}[\mathrm{i}][\mathrm{j}] = minimum(\underbrace{D^{(k-1)}[i][j]}_{경우1}, \underbrace{D^{(k-1)}[i][k] + D^{(k-1)}[k][j]}_{경우2})$$

경우 1: $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$의 정점들 만을 통해서 v_i에서 v_j로 가는 최단경로가 $\underline{v_k}$를 거치지 않는 경우.
보기: $D^{(5)}[1][3] = D^{(4)}[1][3] = 3$

경우 2: $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$의 정점들 만을 통해서 v_i에서 v_j로 가는 최단경로가 $\underline{v_k}$를 거치는 경우.
보기: $D^{(2)}[5][3] = D^{(1)}[5][2] + D^{(1)}[2][3] = 4 + 3 = 7$
보기: $D^{(2)}[5][4]$

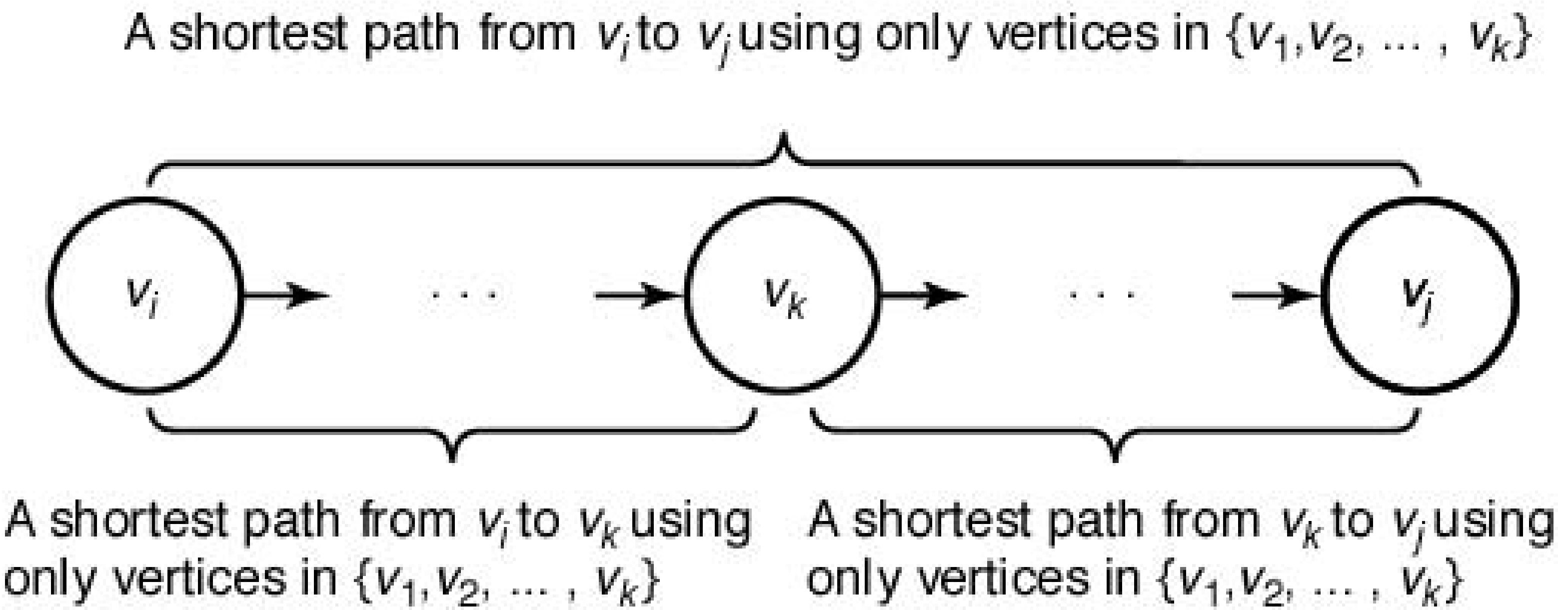
2. 상향식으로 $k = 1$부터 n까지 다음과 같이 이 과정을 반복하여 해를 구한다.

$$D^{(0)}, D^{(1)}, \ldots\ldots, D^{(n)}$$

동적계획식 설계절차

$$D^{(k)}[\mathrm{i}][\mathrm{j}] = minimum(D^{(k-1)}[i][j], D^{(k-1)}[i][k] + D^{(k-1)}[k][j])$$

경우1 경우2



Floyd's Algorithm

- 문제
  - 가중치 포함 그래프의 각 정점에서 다른 모든 정점까지의 최단거리를 계산하고, 각각의 최단경로를 구하라.
  - 입력
    - 가중치 포함 방향성 그래프 W와 그래프 정점의 수 n
  - 출력
    - 최단경로의 길이가 포함된 배열 D, 그리고 다음을 만족하는 배열 P

$$P[i][j] = \begin{cases} v_i\text{에서 } v_j \text{ 까지 가는 최단경로의 중간에 놓여 있는 정점이 최소한 하나는 있는 경우} \rightarrow \text{그 놓여 있는 정점 중에서 가장 큰 인덱스} \\ \text{최단경로의 중간에 놓여 있는 정점이 없는 경우} \rightarrow 0 \end{cases}$$

Floyd's Algorithm

- 알고리즘:

```
void floyd(int n, const number W[][], number D[][], index P[][]) {
      index i, j, k;
      for(i=1; i <= n; i++)
            for(j=1; j <= n; j++)
                  P[i][j] = 0;
      D = W;
      for(k=1; k<= n; k++)
            for(i=1; i <= n; i++)
                  for(j=1; j<=n; j++)
                        if (D[i][k] + D[k][j] < D[i][j]) {
                              P[i][j] = k;
                              D[i][j] = D[i][k] + D[k][j];
                        }
}
```

Floyd's Algorithm

- 앞의 예를 가지고 D와 P를 구해 보시오.

	1	2	3	4	5
1	0	0	4	0	4
2	5	0	0	0	4
3	5	5	0	0	4
4	5	5	0	0	0
5	0	1	4	1	0

최단경로의 출력

- 문제: 최단경로 상에 놓여 있는 정점을 출력하라.
- 알고리즘:

```
void path(index q,r) {
    if (P[q][r] != 0) {
        path(q,P[q][r]);
        cout << “ v” << P[q][r];
        path(P[q][r],r);
    }
}
```

- 위의 P를 가지고 path(5,3)을 구해 보시오.

```
path(5,3) = 4
    path(5,4) = 1
        path(5,1) = 0
        v1
        path(1,4) = 0
    v4
    path(4,3) = 0
```

결과: v1 v4.

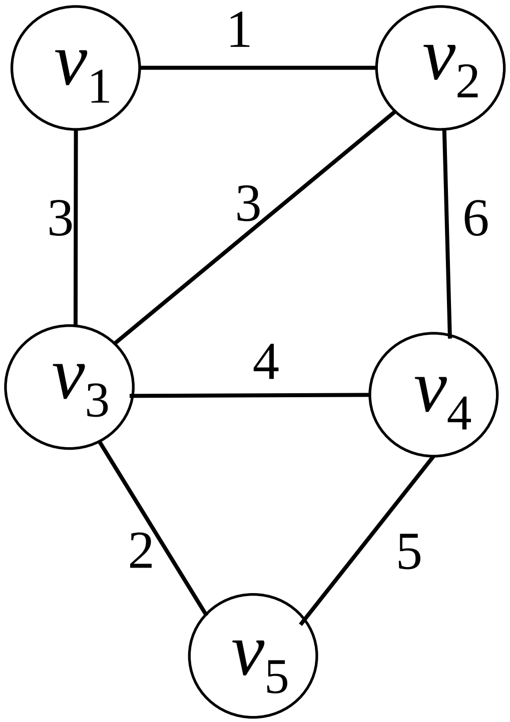
즉, v_5에서 v_3으로 가는 최단경로는 v_5, v_1, v_4, v_3,이다.

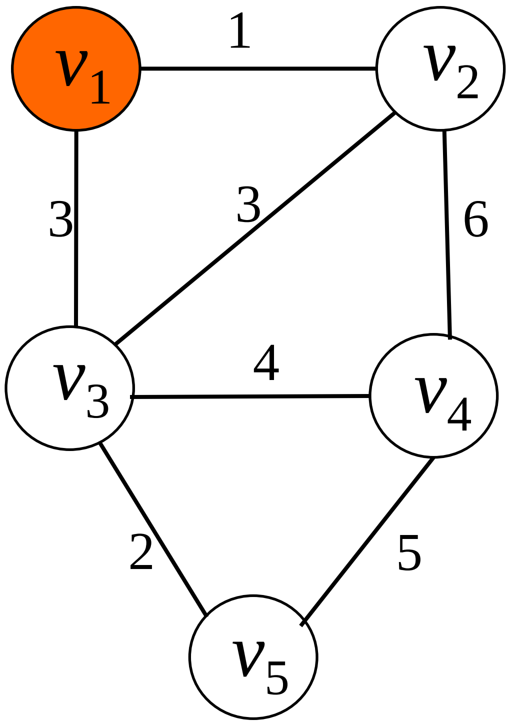
Prim's Algorithm

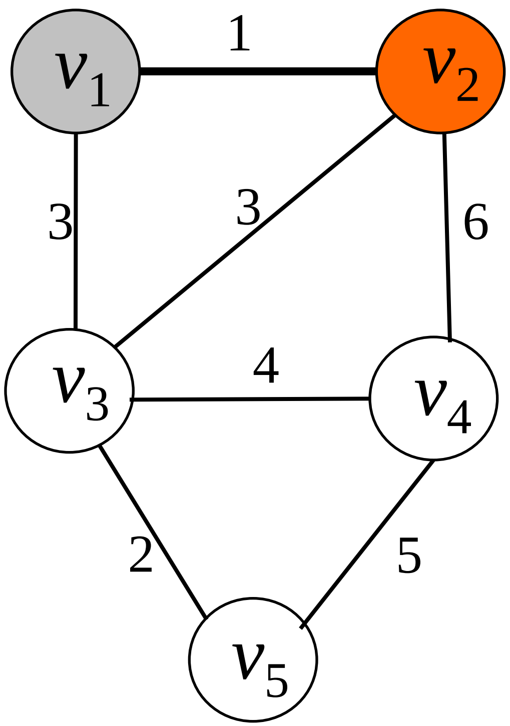
- High-level Algorithm

```
F := Φ;                                              // initialize set of edges to empty
Y := {v1};                                           // initialize set of vertices to
                                                     // contain only the first one
While (the instance is not solved) {
      select a vertex in V-Y that is nearest to Y;  // selection procedure and
                                                     // feasibility check
      add the vertex to Y;
      add the edge to F;

      if (Y == V)                                    // solution check
            the instance is solved;
}
```

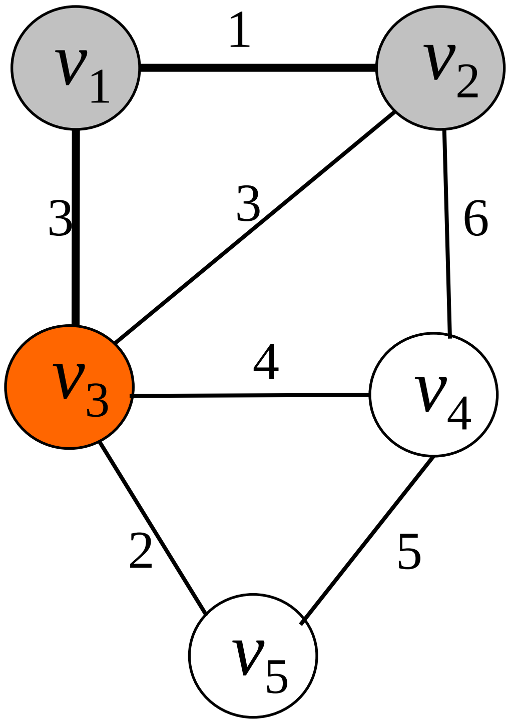
Prim's Algorithm

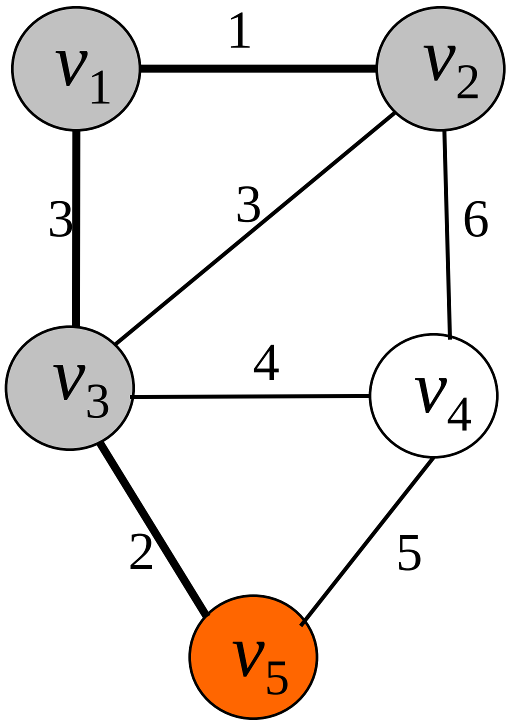


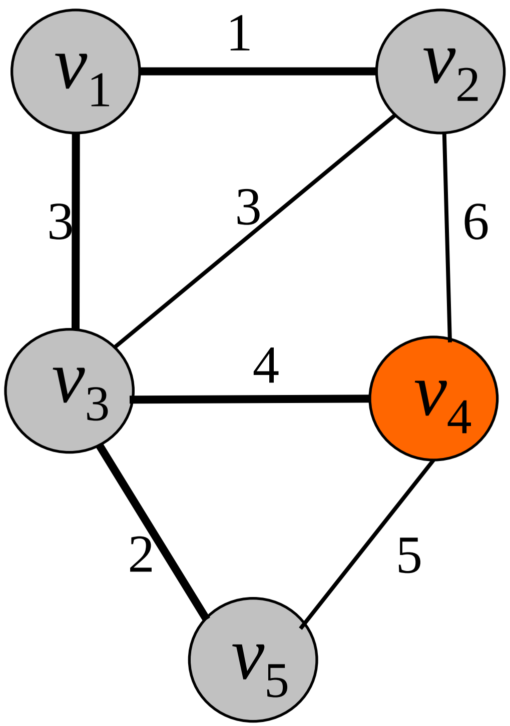




Prim's Algorithm







Prim's Algorithm

$$W[i][j] = \begin{cases} \text{이음선의 가중치} & v_i\text{에서 } v_j\text{로의 이음선이 있다면} \\ \infty & v_i\text{에서 } v_j\text{로의 이음선이 없다면} \\ 0 & i = j \text{ 이면} \end{cases}$$

- nearest[1..n]과 distance[1..n] 배열 유지

  nearest[i] = Y에 속한 정점 중에서 v_i에서 가장 가까운 정점의 인덱스

  distance[1..n] = v_i 와 nearest[i]를 잇는 이음선의 가중치

	1	2	3	4	5
1	0	1	3	∞	∞
2	1	0	3	6	∞
3	3	3	0	4	2
4	∞	6	4	0	5
5	∞	∞	2	5	0

Prim's Algorithm

```
void prim(int n, const number W[][], set_of_edges& F) {
    index i, vnear; number min; edge e;
    index nearest[2..n]; number distance[2..n];

    F = Φ;
    for(i=2; i <= n; i++) {                          // 초기화
        nearest[i] = 1;                              // vi에서 가장 가까운 정점을 v1으로 초기화
        distance[i] = W[1][i];                       // vi과 v1을 잇는 이음선의 가중치로 초기화
    }

    repeat(n-1 times) {                              // n-1개의 정점을 Y에 추가한다
        min = "infinite";
        for(i=2; i <= n; i++)                        // 각 정점에 대해서
            if (0 <= distance[i] <= min) {           // distance[i]를 검사하여
                min = distance[i];                   // 가장 가까이 있는 vnear을
                vnear = i;                           // 찾는다.
            }
        e = edge connecting vertices indexed by vnear and nearest[vnear];
        add e to F;
        distance[vnear] = -1;                        // 찾은 노드를 Y에 추가한다.
        for(i=2; i <= n; i++)
            if (W[i][vnear] < distance[i]) {         // Y에 없는 각 노드에 대해서
                distance[i] = W[i][vnear];           // distance[i]를 갱신한다.
                nearest[i] = vnear;
            }
    }
}
```

Prim's Algorithm

- Every-case Time Complexity Analysis
  - 단위연산: repeat-루프 안에 있는 두 개의 for-루프 내부에 있는 명령문
  - 입력크기: 마디의 개수, n
  - 분석: repeat-루프가 n-1번 반복되므로
    - $T(n) = 2(n-1)(n-1) \in \Theta(n^2)$

Prim's Algorithm

- 최적여부의 검증 (Optimality Proof)

  Prim의 알고리즘이 찾아낸 신장트리가 최소비용(minimal)인지를 검증해야한다.

- Definition 4.1

  그래프 $G = (V, E)$가 주어져 있다. 임의의 이음선의 집합 $F \subseteq E$ 에 대해서 F에 최소비용신장트리(MST)가 되도록 이음선을 추가할 수 있으면 F는 유망하다(promising)라고 한다.

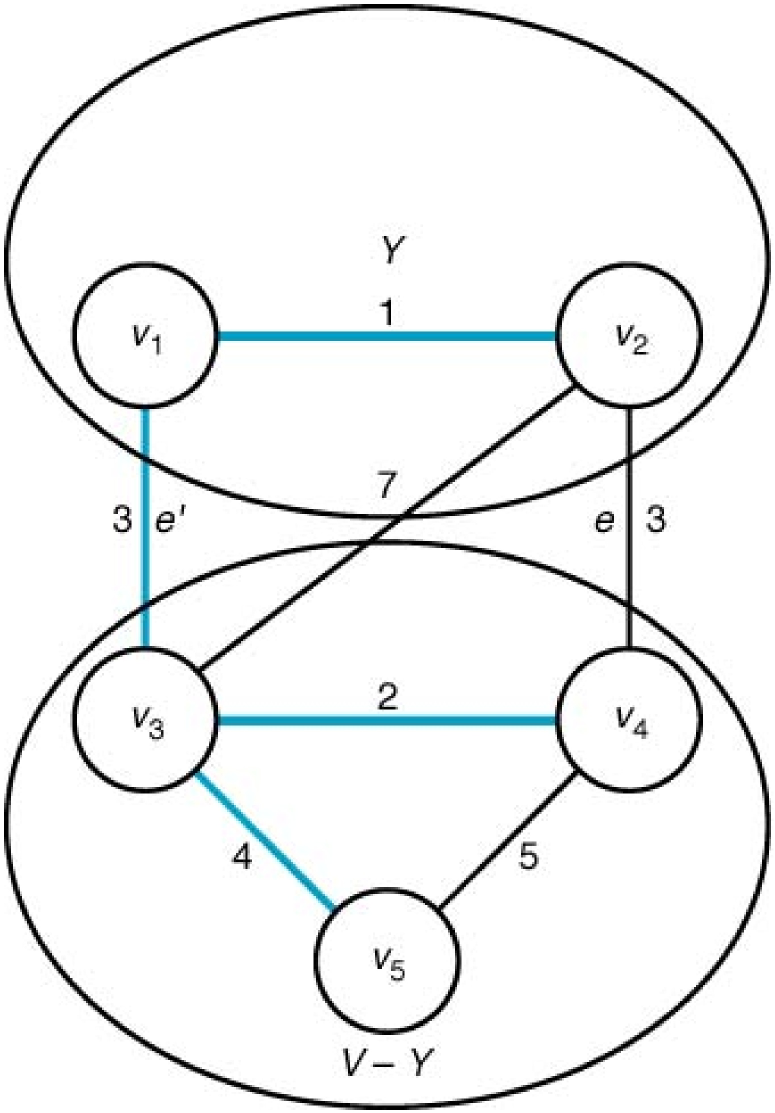
- Lemma 4.1

  그래프 $G = (V, E)$가 주어져 있다. 이음선의 집합 F가 유망하고,
  Y는 F안에 있는 이음선들에 의해 연결되어 있는 정점의 집합이라고 하자.
  이때, Y에 있는 정점과 $V - Y$에 있는 정점을 잇는 이음선 중에서
  가중치가 가장 작은 이음선을 e라고 하면, $F \cup \{e\}$는 유망하다.

Prim's Algorithm

- Lemma 4.1의 증명
  - F가 유망하기 때문에 $F \subseteq F'$이면서 (V, F')가 MST가 되는 이음선의 집합 F'가 반드시 존재한다.
  - 만일 $e \in F'$라면, $F \cup \{e\} \subseteq F'$가 되고, 따라서 $F \cup \{e\}$도 유망하다.
  - 이제 $e \notin F'$라고 가정하자. $e=uv$라 하고 $u \in Y,\ v \in V - Y$ 라 하자.
    - F'은 신장트리이기 때문에 u와 v간에 F'의 이음선만을 이용한 단일경로 γ 를 포함한다. 따라서 $F' \cup \{e\}$는 u와 v를 연결하는 두 가지 경로(e와 γ)를 갖게 된다.
    - 경로 γ는 Y에 있는 정점 u에서 V-Y에 있는 정점 v로 가는 경로이므로 V에서 V-Y로 건너는 이음선 $e' = u'v' \in F'$을 포함하고 있다.
    - 이제 $F'' = F' \cup \{e\} - \{e'\}$ (즉 $F' \cup \{e\}$에서 e'를 제거)를 생각해 보자. F"은 정점 u와 v를 연결하는 경로를 하나만 갖게 되고 신장트리가 된다. 그런데 e는 Y에 있는 정점과 $V - Y$에 있는 정점을 연결하는 이음선 중 가중치가 최소인 이음선이므로 e'의 가중치보다 작거나 같다. 만일 작다면 F'이 MST라는 가정에 모순이므로 같아야 한다. 즉 $F''=F' \cup \{e\} - \{e'\}$은 또다른 MST이다.
    - e'는 F안에 속할 수 없으므로(F는 Y의 정점만을 연결한 집합), $F \cup \{e\} \subset F' \cup \{e\} - \{e'\}$가 되고, 따라서 $F \cup \{e\}$는 유망하다.

Prim's Algorithm



Prim's Algorithm

- Theorem 4.1 (최적여부의 검증 (Optimality Proof))
  Prim의 알고리즘은 항상 최소비용신장트리를 만들어낸다.

증명: (수학적귀납법)

매번 반복이 수행된 후에 집합 F가 유망하다는 것을 보이면 된다.

- 출발점: 공집합은 당연히 유망하다.
- Prim의 알고리즘을 k번 수행하며 만든 이음선의 집합 F가 유망하다고 가정하자.
- k+1번째 선정된 이음선을 e라 할 때 집합 $F \cup \{e\}$가 유망하다는 것을 보이면 된다. 그런데 Lemma4.1에 의하여 $F \cup \{e\}$은 유망하다. 이음선 e는 Y에 있는 어떤 정점을 V - Y에 있는 어떤 정점으로 잇는 이음선 중에서 최소의 가중치를 가지고 있기 때문이다.

Minimum Spanning Tree

- 두 알고리즘 시간 복잡도 비교

연결된 그래프에서의 m은 $n-1 \le m \le \frac{n(n-1)}{2}$의 범위를 갖는다.

	$W(m,n)$	sparse graph m=$\Theta(n)$	dense graph m=$\Theta(n^2)$
Prim Kruskal	$\Theta(n^2)$ $\Theta(m \lg m)$	$\Theta(n^2)$ $\Theta(n \lg n)$	$\Theta(n^2)$ $\Theta(n^2 \lg n)$

- 알고리즘의 시간복잡도는 그 알고리즘을 구현하는데 사용하는 자료구조에 좌우되는 경우도 있다.

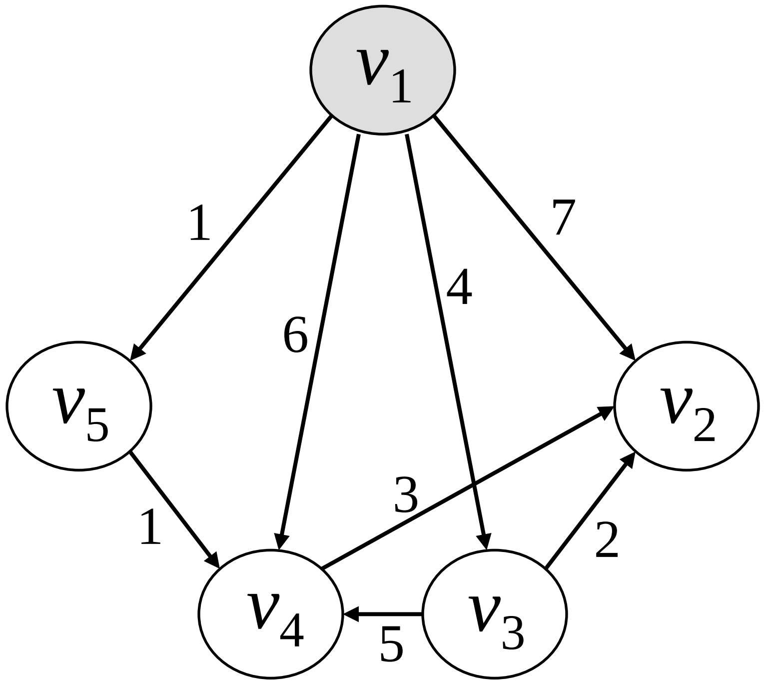
Prim 의 알고리즘	$W(m,n)$	sparse graph m=$\Theta(n)$	dense graph m=$\Theta(n^2)$
Heap Fibonacci heap	$\Theta(m \lg n)$ $\Theta(m + n \lg n)$	$\Theta(n \lg n)$ $\Theta(n \lg n)$	$\Theta(n^2 \lg n)$ $\Theta(n^2)$

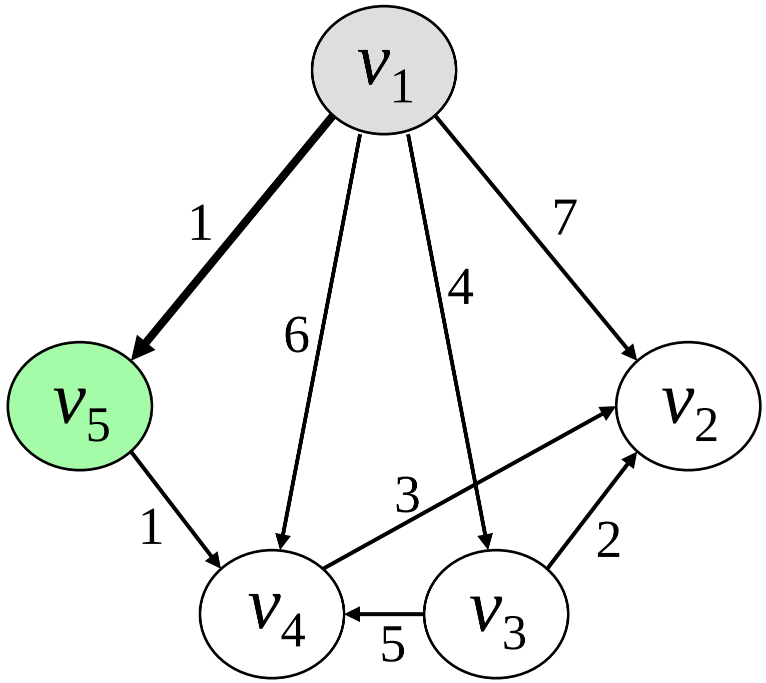
Dijkstra's Algorithm

- 가중치가 있는 방향성 그래프에서 한 특정 정점에서 다른 모든 정점으로 가는 최단경로 구하는 문제
- 시작점 v_1
- 알고리즘

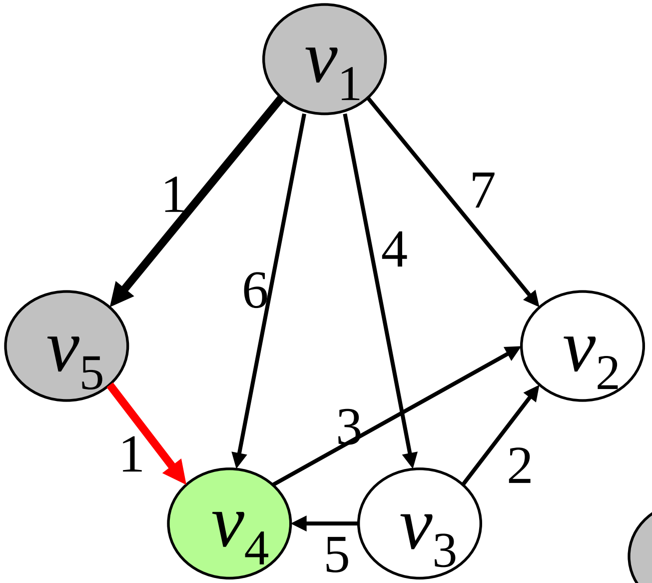
```
F := 0;
Y := {v1};
While (the instance is not solved)
      select a vertex v from V - Y, that has a shortest path // selection procedure
      from v1, using only vertices in Y as intermediate;      // and feasibility check

      add the new vertex v to Y;
      add the edge (on the shortest) that touches v to F;

      if (Y == V)                                              // solution check
            the instance is solved;
```

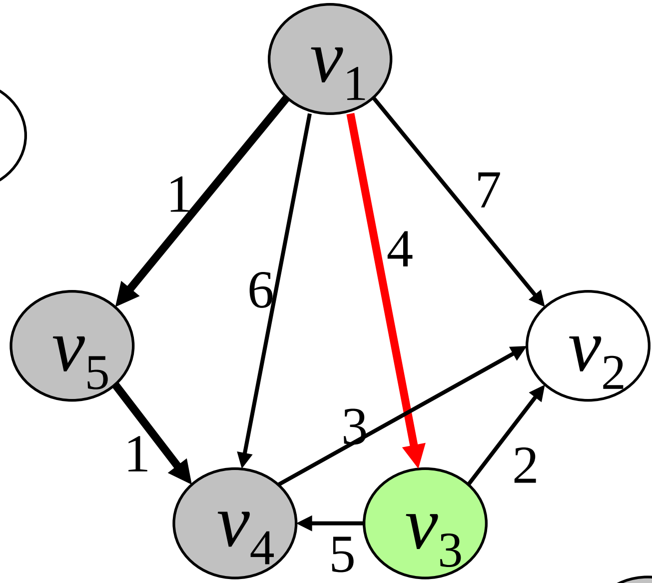
Dijkstra's Algorithm

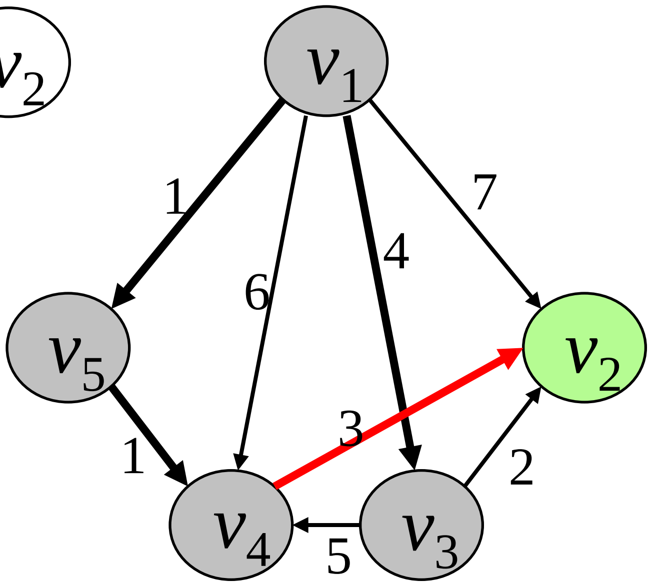




Dijkstra's Algorithm







Dijkstra's Algorithm

- Define nearest & length
  - nearest[i] = index of vertex v in Y such that the edge $<v, v_i>$ is the last edge on the current shortest path from v_1 to v_i using only vertices in Y as intermediates
  - length[i] = length of the current shortest path from v_1 to v_i using only vertices in Y as intermediates.
    (Prim 알고리즘에서 distance[i]와 같은 역할)

Dijkstra's Algorithm

```
void dijkstra (int n, const number W[][], set_of_edges& F) {
      index i, vnear; edge e;
      index nearest[2..n]; number length[2..n];
      F = Φ;
      for(i=2; i <= n; i++) {            // For all vertices, initialize v1 to be the last
          nearest[i] = 1;                // vertex on the current shortest path from v1,
          length[i] = W[1][i];           // and initialize length of that path to be the
      }                                  // weight on the edge from v1.
      repeat(n-1 times) {                        // Add all n-1 vertices to Y.
          min = "infinite";
          for(i=2; i <= n; i++)                  // Check each vertex for having shortest path.
               if (0 <= length[i] <= min) {
                   min = length[i];
                   vnear = i;
               }
          e = edge from vertex indexed by nearest[vnear]
               to vertex indexed by vnear;
          add e to F;
          for(i=2; i <= n; i++)
               if (length[vnear] + W[vnear][i] < length[i]) {
                    length[i] = length[vnear] + W[vnear][i];
                    nearest[i] = vnear;          // For each vertex not in Y, update its shortest
               }                                 // path.  Add vertex indexed by vnear to Y.
          length[vnear] = -1;
      }
}
```

Dijkstra's Algorithm

- 분석
  - $T(n) = 2\,(n-1)^2 \in \Theta(n^2)$.

- 최적여부의 검증(Optimality Proof)
  - Prim의 알고리즘의 경우와 비슷함.