

Sistema Fuzzy Takagi-Sugeno de primeira ordem para aproximação de equação

Felipe Parreiras Dias
Engenharia de Computação.
CEFET-MG — Campus V
felipe.dias@aluno.cefetmg.br

José Marconi de Almeida Júnior
Engenharia de Computação.
CEFET-MG — Campus V
jose.18@aluno.cefetmg.br

Julia Rezende Gomes Rocha
Engenharia de Computação.
CEFET-MG — Campus V
juliarezende34@gmail.com

I. PROBLEMA ACORDADO

O modelo de inferência fuzzy Takagi-Sugeno ou Takagi-Sugeno-Kang (TSK) é muito parecido com o método de Mamdani no que diz respeito à fuzzificação de entradas, aplicação de operadores e base de regras. Porém, os consequentes das regras não são formados por operações fuzzy sobre conjuntos, mas sim por equações que geram as saídas em função das entradas do processo.

As regras do modelo de TSK obedecem ao seguinte molde: SE X é A_i e Y é B_i , então $z = f_i(x, y)$. Nota-se que A_i e B_i são conjuntos fuzzy no antecedente e o consequente $f_i(x, y)$ é uma função das variáveis de entrada. Um modelo Takagi-Sugeno é de ordem um se a função do consequente for um polinômio linear de ordem 1: $z = ax + by + c$. Se for de ordem zero, a função é composta por constantes: $z = c$, $a = b = 0$.

Para ter como saída um único valor crisp, o modelo de TSK segue a seguinte ordem de procedimentos:

- 1) Fuzzificação das entradas;
- 2) Calcular grau de ativação de cada regra. Normalmente se usa o mínimo entre os graus de ativação dos antecedentes;
- 3) Calcular o consequente, substituindo na função informada os valores de entrada;
- 4) Agregar as regras e obter a saída como um valor crisp.

Diferentemente do modelo de Mamdani, o método de Takagi-Sugeno não utiliza métodos de defuzzificação como Centroide e Média dos Máximos, por exemplo. Para este caso, basta realizar uma média ponderada das saídas das funções, considerando o grau de ativação da regra como peso.

Um sistema fuzzy de Takagi-Sugeno pode ser usado para representar equações não lineares de forma mais simples. Ele divide o problema em partes menores, onde cada parte é tratada como se fosse linear. Depois, combina os resultados de cada parte com base nas regras fuzzy, criando uma aproximação do comportamento não linear do sistema original. Essa abordagem facilita a análise e o controle de sistemas complexos.

Portanto, tem-se como objetivo para este relatório usar o modelo de Takagi-Sugeno de primeira ordem para aproximar a função não linear $f(x) = e^{-\frac{x}{5}} \cdot \sin(3x) + 0.5 \cdot \sin(x)$. Serão utilizadas as funções de pertinência Gaussiana, Gaussiana Dupla e Triangular, aliadas ao MSE (Mean Square Error)

e RMSE (Root Mean Square Error) para avaliar o erro de aproximação.

II. SOLUÇÃO PROPOSTA

A implementação do modelo de Takagi-Sugeno de ordem um, com o objetivo de aproximar a função $f(x) = e^{-\frac{x}{5}} \cdot \sin(3x) + 0.5 \cdot \sin(x)$ tem como primeiro passo a definição do universo do discurso, em que a variável de entrada $x \in [0, 10]$. Considera-se que x , dentro deste intervalo, pode assumir 1000 valores igualmente espaçados, visando tornar a aproximação mais precisa.

Para representar o sistema fuzzy, são definidas funções de pertinência Gaussianas, Gaussianas Duplas e Triangulares, associadas a 15 diferentes regras. Cada regra é centrada em um ponto do universo de discurso e seu grau de ativação é determinado pela função de pertinência usada em cada teste de aproximação.

A determinação dos parâmetros a_i e b_i , antecedentes de cada regra fuzzy, se dá por um processo de regressão linear local em torno de cada centro, também conhecido como método dos mínimos quadrados ponderados (Weighted Least Squares – WLS). Para isso, realiza-se o seguinte procedimento:

- Matriz de entrada X , que tem duas colunas: $x \in [0, 10]$ e o termo constante do modelo linear, ou seja, 1;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz de pesos W : matriz diagonal que contém os graus de ativação da função de pertinência;
- Vetor de saídas Y : contém os valores da função alvo $f(x)$, tal que $x \in [0, 10]$;
- Resolução da equação normal da regressão linear ponderada $\theta = (X^T W X)^{-1} X^T W Y$, que fornece a solução ótima para θ , que é um vetor com dois elementos:
$$\theta = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix}$$

Uma vez determinados todos os modelos locais, o sistema Takagi-Sugeno de primeira ordem é construído. Para cada entrada x , o sistema calcula o grau de ativação de cada regra usando sua função de pertinência Gaussiana, Gaussiana Dupla e Triangular. Em seguida, calcula-se a saída local de cada

regra com base na equação linear específica (construída pela regressão linear local), e a saída final do sistema é obtida como a média ponderada das saídas locais, utilizando os graus de ativação como pesos. Por fim, o sistema fuzzy é utilizado para gerar uma aproximação da função original ao longo de todo o domínio de entrada.

III. RESULTADOS

São apresentados abaixo os gráficos das curvas aproximadas da função $f(x) = e^{-\frac{x}{5}} \cdot \sin(3x) + 0.5 \cdot \sin(x)$, utilizando as funções de pertinência Gaussiana, Gaussiana Dupla e Triangular. Inicialmente, foram definidas 15 regras para cada função na aproximação.

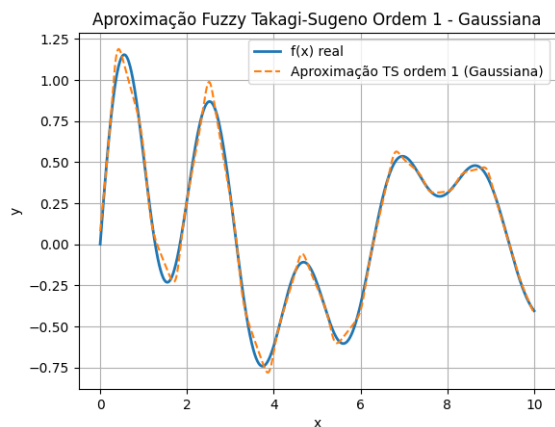


Fig. 1. Aproximação - Gaussiana

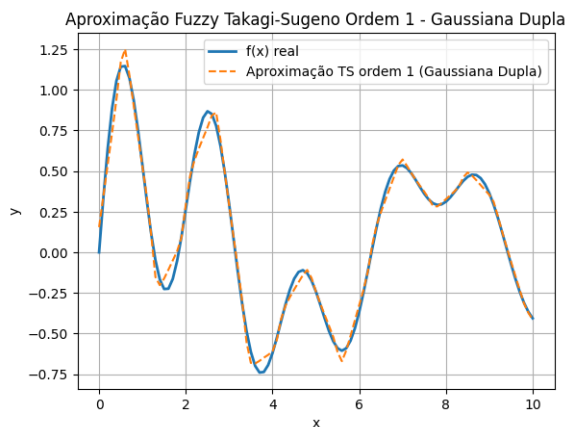


Fig. 2. Aproximação - Gaussiana Dupla

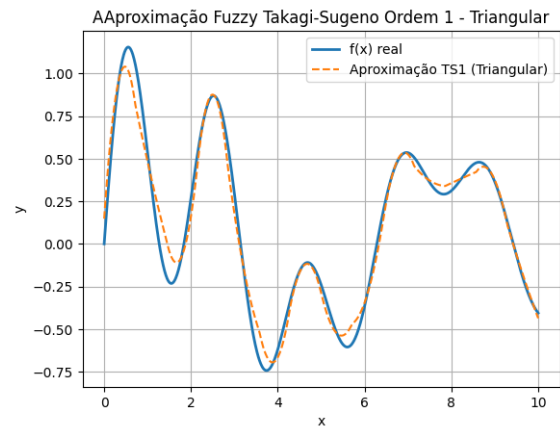


Fig. 3. Aproximação - Triangular

A avaliação do desempenho da aproximação se deu pelo cálculo do MSE (Mean Square Error) e RMSE (Root Mean Square Error). Obtiveram-se os seguintes resultados:

	MSE	RMSE
Gaussiana	0.001775	0.042125
Gaussiana Dupla	0.002471	0.049714
Triangular	0.006282	0.079262

Os erros absolutos de cada função de pertinência usada para a aproximação podem ser representados pelos gráficos abaixo:

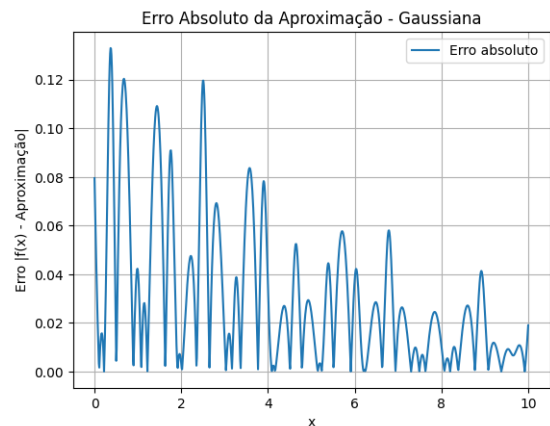


Fig. 4. Erro absoluto - Gaussiana

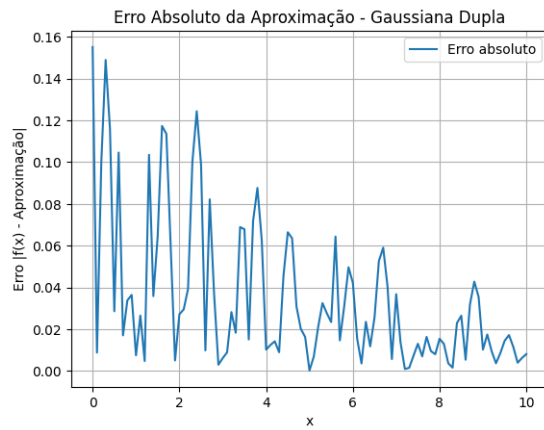


Fig. 5. Erro absoluto - Gaussiana Dupla

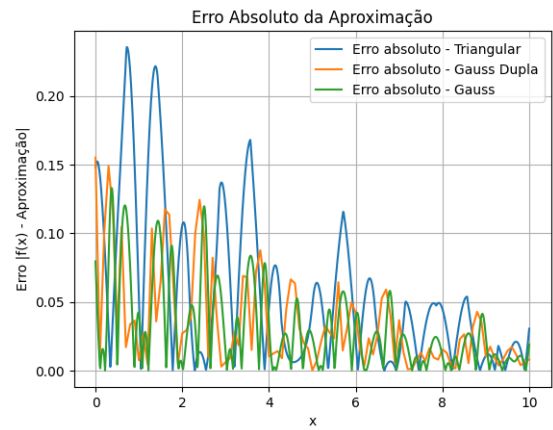


Fig. 8. Comparação dos erros absolutos

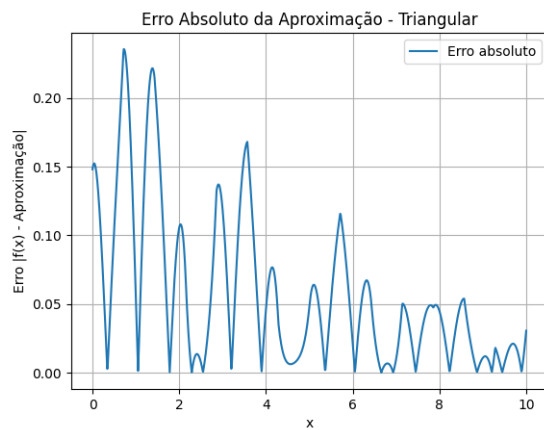


Fig. 6. Erro absoluto - Triangular

Por fim, para fins de comparação geral das aproximações e dos erros absolutos, criou-se os seguintes gráficos:

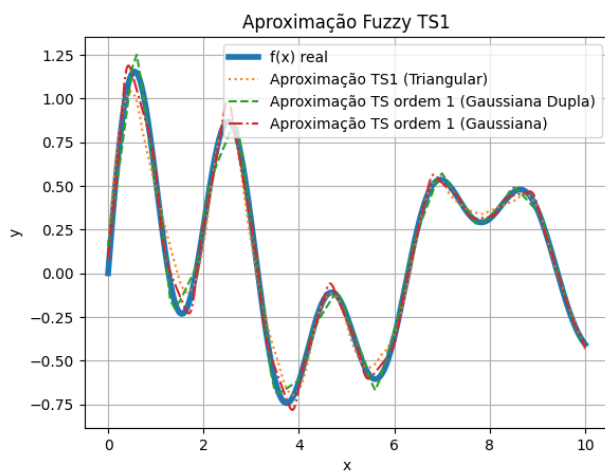


Fig. 7. Comparação das aproximações

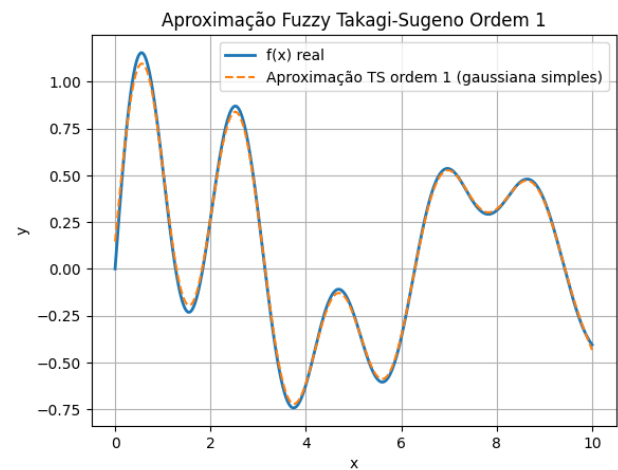


Fig. 9. Aproximação Gaussiana - 35 regras

Ao aumentar o número de regras fuzzy de 15 para 35, observou-se uma redução expressiva nos erros médios quadráticos (MSE) para todas as funções de pertinência analisadas. A função triangular apresentou a maior melhoria relativa, com uma redução de aproximadamente **82,1%** no MSE (de 0,06282 para 0,011236). A função gaussiana simples obteve uma redução de cerca de **87,6%**, enquanto a função gaussiana dupla apresentou uma diminuição de aproximadamente **88,3%**. Esses resultados demonstram que o aumento da granularidade da base de regras fuzzy contribui significativamente para a melhoria da precisão da modelagem, independentemente da forma da função de pertinência empregada.

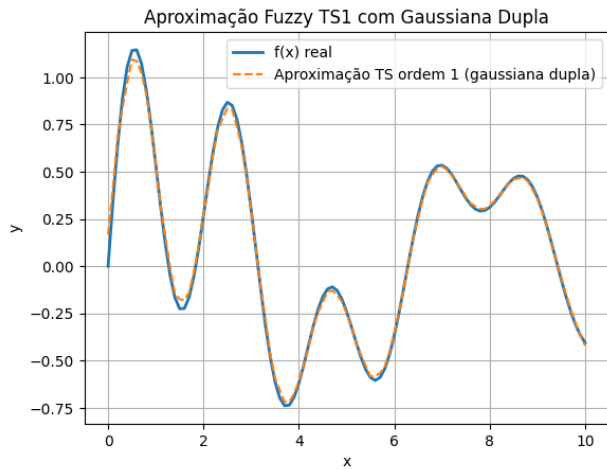


Fig. 10. Aproximação Gaussiana Dupla - 35 regras

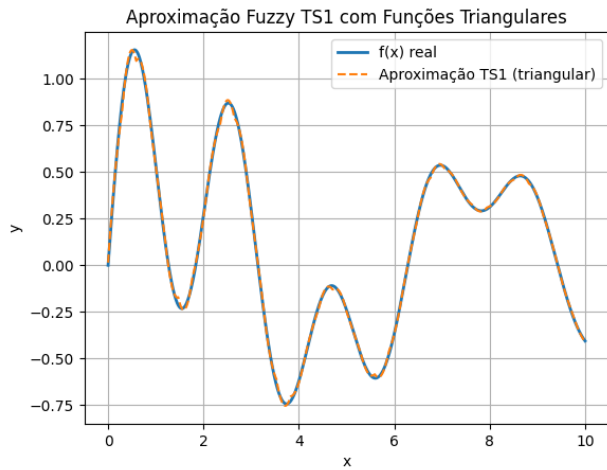


Fig. 11. Aproximação Triangular - 35 regras

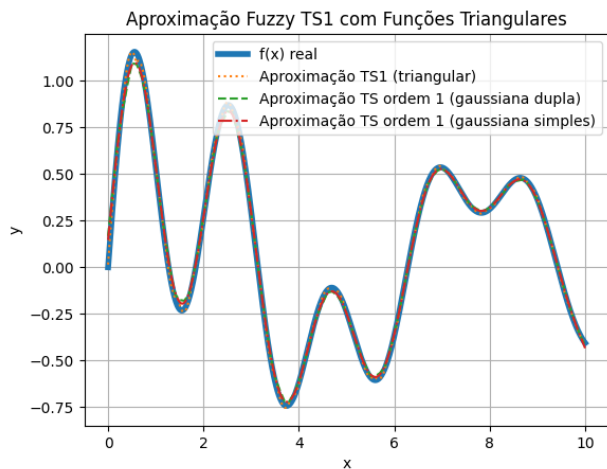


Fig. 12. Comparação das aproximações - 35 regras

A avaliação do desempenho da aproximação se deu pelo

cálculo do MSE (Mean Square Error) e RMSE (Root Mean Square Error). Obtiveram-se os seguintes resultados utilizando 35 regras em cada aproximação:

	MSE	RMSE
Gaussiana	0.000499	0.022349
Gaussiana Dupla	0.000834	0.028875
Triangular	0.000126	0.011236

Os erros absolutos de cada função de pertinência usada para a aproximação podem ser representados pelos gráficos abaixo:

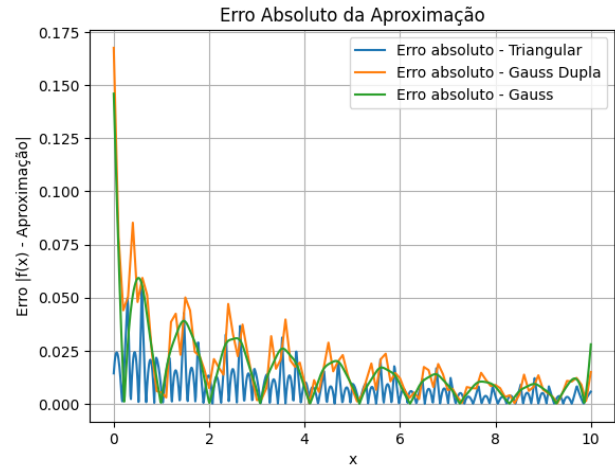


Fig. 13. Erros das aproximações - 35 regras

IV. CONSIDERAÇÕES E DISCUSSÕES

Os resultados quantitativos utilizando, inicialmente, 15 regras, demonstram que a configuração com funções Gaussianas simples apresentou o melhor desempenho geral, com o menor erro médio quadrático ($MSE = 0,001775$) e a menor raiz de erro quadrático médio ($RMSE = 0,042125$). Isso indica que a suavidade e a simetria das funções Gaussianas favoreceram uma aproximação mais eficaz entre os modelos definidos pelas regras fuzzy.

A função Triangular, por outro lado, apresentou o pior desempenho entre as três configurações testadas, com RMSE igual a 0,079262. Ao observar o gráfico de erro absoluto associado a essa configuração, é possível notar que os maiores desvios ocorreram nas regiões iniciais do intervalo $x \in [0, 2]$, bem onde a função original exibe maior variação e comportamento oscilatório intenso. A linearidade das funções Triangulares pode ter sido insuficiente para lidar com essas oscilações mais rápidas, comprometendo a qualidade da aproximação nessa faixa do domínio.

Já a configuração com funções Gaussianas Duplas apresentou um desempenho intermediário, com RMSE de 0,049714. Embora o erro seja maior do que na configuração com Gaussianas simples, o gráfico de erro absoluto revela uma maior uniformidade na distribuição dos erros ao longo do domínio, com uma leve vantagem em termos de suavidade nas transições entre regiões. Isso pode ser atribuído à maior

sobreposição entre as funções de pertinência, o que suaviza a aproximação, mas pode também gerar interferência entre regras em regiões de alta densidade de cruzamento.

A configuração com funções Gaussianas simples se destacou pela capacidade de equilibrar precisão, simplicidade e estabilidade. Apesar de ainda apresentar picos de erro nas regiões iniciais, onde a função alvo varia rapidamente, o erro absoluto foi significativamente menor que nas demais configurações.

Com o aumento do número de regras fuzzy de 15 para 35, foi possível observar uma melhora substancial na qualidade da aproximação para todas as funções de pertinência avaliadas.

A função Triangular apresentou uma redução de aproximadamente **82,1%** no MSE, evidenciando que o aumento da granularidade compensou a simplicidade da forma triangular. As funções Gaussianas simples e Gaussianas Duplas também mostraram reduções expressivas, com quedas de **87,6%** e **88,3%** no MSE, respectivamente. Esses resultados indicam que, independentemente da forma da função de pertinência, o maior detalhamento proporcionado por um número mais elevado de regras contribui significativamente para o aprimoramento do desempenho do sistema fuzzy, especialmente em regiões onde a função a ser modelada apresenta comportamentos mais complexos.

V. REFERÊNCIAS

- **MARQUES**, Alisson. *Inteligência Computacional - Sistemas Fuzzy - Inferência Fuzzy 2*. Divinópolis: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, 2025.
- **CANTY**, D. *Lectures 7 – Weighted Least Squares*. [S.l.]: McMaster University, [s.d.]. Disponível em: <https://ms.mcmaster.ca/canty/teaching/stat3a03/Lectures7.pdf>. Acesso em: 25 maio 2025.