



به نام خدا



دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی

پروژه ی اول

طراحان:	روزبه نهماوندی، علیرضا جاوید، شیوا شاکری
تاریخ آپلود پروژه	۲۰ فروردین ۱۴۰۱

فهرست مطالب

۲	۱	مسابقه تلویزیونی
۳	۲	مسئله نیوتن-پیپس
۴	۳	راه رفتن تصادفی
۴	۱.۳	بخش ۱
۴	۲.۳	بخش ۲
۵	۴	مسالهی روز تولد
۶	۵	بررسی توزیع نرمال
۷	۶	بررسی درستی قضیه حد مرکزی
۸	۷	توضیحات

شما در یک بازی شرکت کرده اید؛ در این بازی، سه عدد در، در مقابل شما وجود دارد. پشت یک در، جایزه است و پشت درهای دیگر خالی است. شما یک در را انتخاب می کنید. به طور مثال، در شماره ی ۱ و میزبان که می داند پشت درها چه چیزی وجود دارد، در دیگری را باز می کند مثلاً شماره ی ۳ که پشتش خالی است؛ سپس، وی به شما می گوید: آیا می خواهید در شماره ی دیگری را انتخاب کنید؟ توجه داشته باشید که میزبان همیشه دری را باز می کند که شما انتخاب نکرده اید و همیشه یک در که پشتش خالی است را نشان می دهد. با شبیه سازی به زبان پایتون به سوالات زیر پاسخ دهید:

۱. بهترین استراتژی برای برد در این بازی چگونه می باشد؟

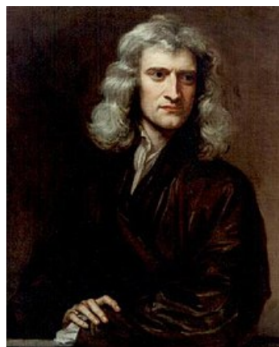
۲. با رسم نمودار مناسب ارتباط بین تعداد های برد و تعداد بازی را برای ۱۰۰۰ بازی نشان دهید.



شکل ۱: مسابقه تلویزیونی

ساموئل پیپس، وقایع نویس انگلیسی، در سال ۱۶۹۳ در طی نامه ای از آیزاک نیوتن درخواست کرد که به مساله ی احتمالاتی درباره ی یک شرط بندی را ارزیابی کند. پرسش ساموئل این بود که کدام یک از موارد زیر محتمل تر است:

- در پرتاب شش تاس، حداقل یکی از تاس ها ۶ باشد.
- حداقل دو تاس از ۱۲ تاس پرتاب شده ۶ باشد.
- حداقل سه تاس از ۱۸ تاس پرتاب شده ۶ باشد.



شکل ۲: نیوتن-پیپس

۱. با مراجعه به سایت [ویکی پدیا](#) پاسخ نیوتن را ارزیابی کنید. نیوتن یک تحلیل مفهومی برای نتیجه گیری خود ارائه کرده است که به نظر ناصحیح می رسد. تحلیل بهتری برای نتیجه مشاهده شده ارائه کنید.
۲. حال مساله نیوتن-پیپس را تعمیم می دهیم. فرض کنید P_n احتمال مشاهده n تا شش در پرتاب $6n$ تاس باشد. مشابه سوال قبل، نشان دهید که مقادیر P_n به مقدار ۰.۵ هم گرا می شوند.

در این مسئله، بازیکن از مکان صفر بازی را شروع کرده و در هر مرحله، با احتمال p یک قدم به جلو، و با احتمال $1-p$ یک قدم رو به عقب حرکت می کند. برای آشنایی بیشتر با این مسئله، به این لینک مراجعه کنید. در این مسئله می توان ثابت کرد که احتمال بودن در یک مکان مشخص x در لحظه t فقط و فقط به مکان در لحظه $t-1$ وابسته است. به زبان ساده، این مسئله یک حالت از زنجیر مارکوف است.



شکل ۳: راه رفتن تصادفی

۱.۳ بخش ۱

۱. قطعه کدی بنویسید که به ازای $n = 10000$ هر بار با احتمال $p = 0.5$ بازیکن رو به جلو یا رو به عقب حرکت کند، سپس مکان های او را در یک لیست ذخیره کنید و نمودار مکان های این بازیکن را رسم کنید.
۲. قسمت قبل را به ازای $n = 10000$ و $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.8, 0.9$ انجام داده و نمودار مکان بازیکن در هر حالت را به ازای p های مختلف در یک نمودار رسم و نمودار خود را بررسی کنید.

۲.۳ بخش ۲

۱. Chain Ruin Gambler's The از جهاتی بسیار شبیه به زنجیر مارکوف است. در این مسئله، همانند راه رفتن تصادفی، بازیکن در یک مکان مشخص، با احتمال p رو به جلو و با احتمال $1-p$ رو به عقب حرکت می کند اما وقتی بازیکن به مکان اولیه (First) یا مکان آخر (Last) می رسد، برای همیشه در آن مکان باقی می ماند. تابعی بنویسید که به عنوان ورودی مکان فعلی بازیکن، نقاط شروع و پایان، تعداد دفعات تکرار (n) و پارامتر احتمال p را بگیرد و سپس به عنوان خروجی، مکان بازیکن پس از n بار حرکت را برگرداند.
۲. حال فرض کنید مکان اولیه برابر 0 ، مکان آخر برابر 5 و پارامتر احتمال $p = 0.5$ باشد. ابتدا احتمال رسیدن از نقطه 3 به نقطه 5 پس از 2 بار حرکت و احتمال رسیدن از نقطه 3 به نقطه 1 را پس از 2 بار حرکت به صورت تئوری محاسبه کنید. سپس احتمال رسیدن از نقطه 3 به نقطه 3 پس از 2 بار حرکت را از روی 2 احتمال به دست آورده محاسبه کنید.
۳. با در نظر گرفتن $Start = 3, p = 0.5, n = 2, First = 0, Last = 5$ تابع قسمت ۱ را برای 10000 بار تکرار کنید و مکان پایانی را در یک لیست ذخیره کنید، سپس احتمال پیش آمدن هر یک از مکان های پایانی را در یک نمودار ستونی^۱ رسم کنید. و نتایج را با قسمت ۲ مقایسه کنید.

^۱ plot bar

شما با یک دوست به تماشای بازی فوتبال می روید. همانطور که می دانید بازی مجموعاً شامل ۲۲ بازیکن دو تیم و یک داور است. دوست شما ادعا می کند که در بین این ۲۳ نفر، حداقل دو نفر در یک روز به دنیا آمده اند. شما که در حال گذراندن درس آمار و احتمال مهندسی هستید، تلاش می کنید صحت ادعای او را بررسی کنید.

۱. تابعی بنویسید که احتمال یکسان بودن روز تولد ۲ نفر از k نفر در n روز را محاسبه کند و احتمال یکسان بودن روز تولد ۲ نفر از ۲۳ نفر را در ۳۶۵ روز محاسبه کنید.

۲. با استفاده از کتابخانه `matplotlib` به ازای n مساوی ۳۵۶ روز و تغییر k از ۱ تا ۸۰ نفر، نمودار احتمال یکسان بودن روز تولد ۲ نفر نسبت به k را رسم کنید.



شکل ۴: مسالهی روز تولد

یک بردار شامل ۲۰۰۰ عدد تصادفی که از توزیع نرمال با میانگین ۸ و واریانس ۲۵ هستند را تولید کنید و آن را X در نظر بگیرید.

۱. اگر از این ۲۰۰۰ نمونه، یک عدد را به صورت تصادفی انتخاب کنیم، احتمال اینکه این عدد بزرگتر از ۹ باشد را به دست آورید. همچنین به صورت تئوری، احتمال اینکه از یک توزیع نرمال با میانگین ۸ و واریانس ۲۵ خروجی ای بزرگتر از ۹ به دست آید را به دست آورید و نتیجه را با قسمت شبیه سازی مقایسه کنید.

۲. میانگین و واریانس این ۲۰۰۰ داده را بدون استفاده از کتابخانه آماده محاسبه کنید.

۳. یک بردار ۲۰۰۰ بعدی دیگر با میانگین ۱۵ و واریانس ۴ تولید کنید و آنرا Y در نظر بگیرید. بردار ۲۰۰۰ بعدی $Z = X + Y$ را سپس میانگین و واریانس بردار Z را هم به صورت تحلیلی و هم با استفاده از شبیه سازی محاسبه کنید.

در این مسئله می‌خواهیم درستی **قضیه حد مرکزی** را بررسی کرده و نتایج آن را مشاهده کنیم.

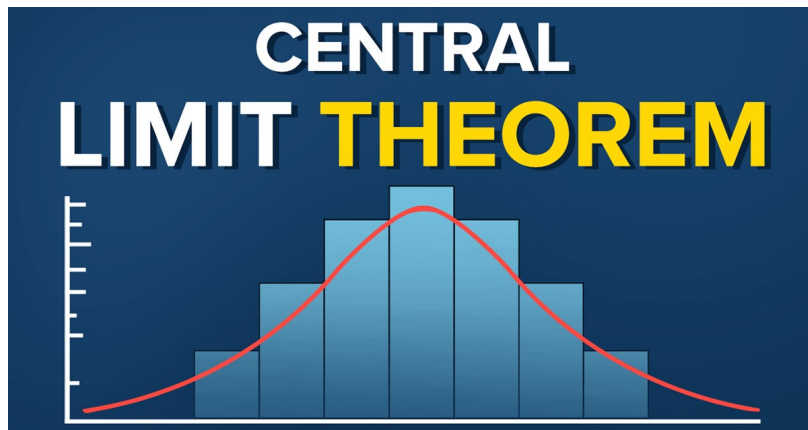
۱. ابتدا n متغیر تصادفی مستقل که بصورت یکنواخت در بازه $(-0.5, 0.5)$ توزیع شده باشند بسازید. در ادامه این متغیرها را در رابطه

$$Z_n = \frac{\sum_{i=0}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

قرار داده و نمودار هیستوگرام توزیع بدست آمده را رسم کنید. این کار را به ازای $N = 5, 10, 20$ انجام دهید. هیستوگرام‌های بدست آمده را با توزیع نرمال متناسب مقایسه کرده و نتیجه را گزارش دهید.

۲. در این بخش به جای توزیع یکنواخت از سبیل‌هایی با توزیع نمایی استفاده می‌کنیم. با استفاده از تابع random number generator دلخواه نمونه‌هایی با اندازه $N = 5, 10, 20, 35$ بسازید و هیستوگرام‌های بدست آمده از آنها را با توزیع نرمال متناسب مقایسه کرده و نتیجه را گزارش دهید.

۳. با مقایسه بخش ۱ و ۲ به نظر شما برای تولید متغیر تصادفی با توزیع گاوسی بهتر است از کدام یک از ۲ توزیع بخش‌های قبل استفاده کنیم؟ به نظر شما این تفاوت از چه چیزی ناشی می‌شود؟ ادعای خود را در گزارش بنویسید و آن را توجیح کنید.



شکل ۵: قضیه حد مرکزی

۱. زبان برنامه نویسی خواسته شده در سوالات پایتون است.
۲. شما می بایست علاوه بر کدهای پیاده سازی شده، گزارشی تحلیلی و ریاضی از نتایج خود ارائه دهید. توجه داشته باشید که مفهوم گزارش پروژه با مفهوم توضیح کد متفاوت است در نتیجه در فایل گزارش، از درج کد جدا پرهیزید.
۳. گزارش کار، اولین و مهم ترین آیتم نمره دهی می باشد در نتیجه با صرف زمان مناسب، گزارشی تهیه کنید که بازتاب گر زحماتی باشد که برای انجام پروژه کشیده اید. استفاده ی صحیح از نیم فاصله، علائم نگارشی، گویا بودن جملات و پاراگراف بندی مناسب از جمله مواردیست که در نگاه اول جلب توجه می کند و نکاتی نظیر استفاده از زیرنویس برای تصاویر و بالانویس برای جداول، ارجاع دادن به روابط و تصاویر با شماره ی مربوط به هر کدام و ... از جمله خصوصیت های یک نوشته ی آکادمیک است.
۴. در گزارش خود متون فارسی را با استفاده از فونت Nazanin B با سایز ۱۴ بنویسید.
۵. کدهای پایتون خود را حتما در قالب دفترچه ی ژوپیتر بارگذاری کنید و در نهایت یک فایل گزارش پی دی اف را در کنار دفترچه های ژوپیتر در قالب زیپ با نام "SID-FullName.zip" در صفحه ی درس بارگذاری کنید.
۶. ابهامات خود در مورد سوالات و یا قالب گزارش در گروه تلگرامی درس مطرح کنید. در انتهای هر پیام طراحان را منشن کنید. سوالات در گروه پرسیده شده و همان جا پاسخ داده خواهند شد تا در دسترس همه ی دانشجویها قرار بگیرند.

(ا) @roozbeh_n99

(ب) @alireza_javid01

(ج) @shiivashakerii

۷. دقت کنید تاریخ ددلاین پروژه ۲۵ اردیبهشت روز یکشنبه است.