Subject Year　Month　Date

شروع ریاضی ۳

توابع برداری :

تعریف : هر رابطه‌ی به فرم $R: D \subseteq R \to \mathbb{R}^n$ که در آن

$$R(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$$

برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $f_i : D \to R$ یک تابع حقیقی است

به عنوان مثال همه‌ی توابع زیر نقش برداری دارند یعنی هر عددی بگیرند یک بردار می دهد: مثال ۱)

$$f(t) = (a\cos t, a\sin t)$$

مثال ۲)

$$g(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j + bt\, K$$

مثال ۳)

$$h(t) = \left(1 + \frac{1}{t} i\right) + \ln(t+1) j + \left(\frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t - 5}\right) k$$

تذکر ۱)

$$D_R = \bigcap_{i=0}^{n} D_{f_i}$$

مثلا در توابع بالا دامنه‌ها عبارتند از :

$D_f = R$, $D_g = R$, $h(t) \Rightarrow$:

$$\Rightarrow D_h = \quad t = 0 \,,\; t > -1 \,,\; (-\infty, -1) \cup (1, 5) \cup (5, \infty)$$

$$\Rightarrow \bigcap \Rightarrow D_h = (1, 5) \cup (5, \infty)$$

تذکر ۲: اگر f یک تابع برداری باشد:

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t), \lim_{t \to t_0} f_2(t), \dots, \lim_{t \to t_0} f_n(t)\right)$$

AVA

همچنین f در نقطه‌ی $t=t_0$ پیوسته است ؛ هرگاه :

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0) \Longleftrightarrow \forall i \quad \lim_{t\to t_0} f_i(t) = f_i(t_0)$$

و همچنین تابع برداری f در نقطه‌ی $t=t_0$ مشتق پذیر است هرگاه

به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$ ، f_i در آن مشتق پذیر باشد و

$$f'(t) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0), \dots, f_n'(t_0))$$

تذکر ۳) اگر تابع برداری f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ انتگرال پذیر

است هرگاه به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$ f_i ها در این بازه انتگرال پذیر

باشند و :

$$\int_a^b f(t)dt + \int_a^b f_1(t)\,dt, \dots, \int_a^b f_n(t)dt)$$

برای اینکه پیوسته ، مشتق پذیر و دارای حد ، انتگرال پذیر باشد باید

تک‌تک ضابطه‌ها باید دارای خصوصیت باشد

شکل $f(t)$ مرقبل $f(t) = (\overset{x}{a\cos t}, \overset{y}{a\sin t})$

شیارها رابطه‌ای باهم دارد ← دایره دایره ← $x^2+y^2=a^2 \Rightarrow$

شکل $g(t)$:

$$g(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j + bt\, k$$

AVA

شکل مثل فنر است و شیارها با هم ارتباط دارند (مارپیچ استوانه)
و شکل ضابطه‌ی h دقیقاً نمی‌توانیم شکل را تشخیص دهیم
با نقطه یابی حل می‌شود.

اعمال جبری روی توابع برداری:

قضیه. اگر $F, G: D \subseteq R \to R^n$ توابع برداری باشند آنگاه:

1) $(F \pm G)(t) = F(t) \pm G(t)$

2) $(F \times G)(t) = F(t) \times G(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}$

ضرب خارجی

ضرب داخلی

3) $(F \cdot G)(t) = F(t) \cdot G(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, g_i(t)$

4) اگر φ یک تابع حقیقی تعریف شده روی D باشد:

(φ داخل F است)

$* \; F \circ \varphi = F(\varphi(t)) = (f_1(\varphi(t)), f_2(\varphi(t)), \dots, f_n(\varphi(t)))$

$* \; \varphi \cdot F = \varphi(t) \cdot F(t)$

AVA

Subject Year Month Date

۵) $(F \pm G)' = F' \pm G'$

ضرب داخلی: ۶) $(F \cdot G)' = F' \cdot G + G' \cdot F$

ضرب خارجی: ۷) $(F \times G)' = F' \times G + F \times G'$

مثال: در کتاب مثال از خواص خوانده شود. که خاصیت جابه جایی ندارد.

- اگر F یک تابع برداری برحسب x ، $x = \varphi(t)$ باشد آنگاه

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

مثال) $R(t) = (\ln t)i + \sin t\, j + \sqrt{t}\, k$

$t = S^3 - S^2 \qquad \frac{dR}{dS} = ?$

حل: $R'(t) = \left(\frac{1}{t}, \cos t, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)(3S^2 - 2S) \Rightarrow$

$$\frac{dR}{dS} = \left[\left(\frac{3S^2 - 2S}{S^3 - S^2}\right), (3S^2 - 2S)\cos(S^3 - S^2), \frac{3S^2 - 2S}{2\sqrt{S^3 - S^2}}\right]$$

مثال) فرض کنید $F(t)$ تابعی مشتق پذیر باشد و $|F(t)| = C$ ، t

، آنگاه ثابت کنید که بردار مشتق بر این، بردار عمود است (یعنی

F' بر F عمود است ، یعنی ضرب داخلی F' و F صفر است)

$|a|^2 = a \cdot a$

AVA

Scanned with CamScanner

$$\left(c' = F(t)\cdot F(t)\right)' \Rightarrow 0 = 2F.F' \Rightarrow F'.F = 0 \Rightarrow F' \perp F$$

روابط در توابع برداری :

اگر $R(t)$ یک تابع برداری باشد که در بازه‌ی $[a,b]$ مشتق پذیر باشد در اینصورت ، مسیر عبارت است از :

$$S = \int_a^b \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,dt = \int_a^b |R'(t)|\,dt$$

مثال) الف) طول منحنی مارپیچ استوانه‌ای را بدست آورید . (در بازه $(0, \pi)$)

ب) طول مسیر دایره‌ای در بازه‌ی $(0, \pi)$ را بدست آورید ؟

الف) مارپیچ استوانه‌ای :

$$R(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j + bt k$$

$$R'(t) = -a\sin t\, i + a\cos t\, j + b k$$

$$|R'(t)| = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow S = \int_0^\pi \sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,\pi$$

ب)

$(a>0)$ $\quad G(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j$

$$\Rightarrow G'(t) = -a\sin t\, i + a\cos t\, j \Rightarrow |G'(t)| = \sqrt{a^2} =$$

$$= a \Rightarrow S = \int_0^\pi a\,dt = a\pi$$ معادله با الف فرق دارد.

AVA

تعریف . فرض کنید F یک تابع برداری روی بازه ی $[a,b]$ باشد

تابع طول مسیر که با نماد $S(t)$ نمایش می دهند (S) عبارت است :

$$S(t)=\int_a^t |F'(u)|\,du \qquad a\leqslant t\leqslant b$$

مثال) تابع طول مسیر زیر را بدست آورید؟

$$R(t)=e^t \cos t\, i + e^t \cos t\, j$$

حل: $R'(t)=e^t(\cos t - \sin t)i + e^t(\cos t - \sin t)j$

$$|R'(t)|=e^t\sqrt{(\cos t-\sin t)^2}=e^t\sqrt{1-2\sin t\cos t}$$

$$=e^t|\cos t-\sin t| \Rightarrow S(t)=\int_0^t e^u(\cos u-\sin u)\,du$$

$$=e^u\cos u\Big|_0^t = e^t\cos t - 1$$

$$\left.\begin{aligned} w&=e^u\cos u\\ dw&=e^u(\cos u-\sin u)\,du\end{aligned}\right\}\ \text{تغییر متغیر}$$

$R(t)=$

$T=\frac{R'(t)}{|R'(t)|}$ $N=\frac{T'}{|T'|}$ $B=T\times N$

Subject Year Month Date

تابع مسافت:

توجه داشته باشید که تابع مسافت، تابعی است صعودی اکید، لذا یک به یک و در نتیجه وارون پذیر می باشد، بنابراین هر تابع برداری را که برحسب زمان است می توان به یک تابع برداری برحسب مسافت (S) بیان نمود. برای این کار ابتدا تابع مسافت را بدست آورده و با توجه به تابع وارون t برحسب S محاسبه می باشد و مقدار بدست می آید.

مثال) با توجه به تابع برداری زیر آن را برحسب طول مسیر محاسبه کنید؟

$$F(t)=e^t\cos t\, i+e^t\sin t\, j \quad 0\leq t\leq 1$$

حل: $F'(t)=e^t(\cos t-\sin t)i+e^t(\sin t+\cos t)j$

$$|F'(t)|=\sqrt{e^{2t}((\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2)}$$

$$=\sqrt{e^{2t}(2)}=\sqrt{2}\,e^t$$

$$\Rightarrow S=\int_0^t\sqrt{2}\,e^u du=\sqrt{2}\,(e^t-1)\Rightarrow e^t=\left(\frac{S}{\sqrt{2}}+1\right)$$

$\longrightarrow \ln$ از طرفین $\Rightarrow$ $t=\ln\left(\frac{S}{\sqrt{2}}+1\right)$

AVA

Subject Year Month Date

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \rightarrow 1 \leqslant e^t \leqslant e \xrightarrow{-1} 0 \leqslant e^t - 1 \leqslant e-1$$

$$\xrightarrow{\times\sqrt{2}} 0 \leqslant \sqrt{2}(e^t-1) \leqslant \sqrt{2}(e-1) \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 \leqslant S \leqslant \sqrt{2}(e-1) \checkmark$$

$$F(S) = \left[\left(\frac{S}{\sqrt{2}}+1\right)\cos\left(Ln\left(\frac{S}{\sqrt{2}}+1\right)\right)\right]i + \left[\left(\frac{S}{\sqrt{2}}+1\right)\sin Ln\left(\frac{S}{\sqrt{2}}+1\right)\right]j$$

باتوجه به اینکه هرتابع برداری ای را می توان به عنوان یک تابع مکان درنظر گرفت لذا مشتق از تابع برداری، بردار سرعت را به وجود می آورد

همچنین : $a = R''(t) \quad , V = R'(t)$

از آنجائیکه هر بردار مکان را می توان برحسب طول مسیر بیان نمود

لذا : $\frac{dF}{dS} = \frac{dF}{dt} \times \frac{dt}{dS} = \frac{dF}{dt} \times \frac{1}{\frac{dS}{dt}} = \frac{dF}{dt} \times \frac{1}{|F'|} = \frac{F'}{|F'|}$

تعریف : به آهنگ تغییرات بردار مکان نسبت به طول مسیر، بردار یکه ی مماسی گویند که با نماد T نشان می دهند

$$T = \frac{dF}{dS} = \frac{V}{|V|}$$

AVA

خمیدگی منحنی: فرض کنید $K(t)$ بردار مکان ذره در t باشد و T بردار یکه‌ی مماس بر مسیر، در اینصورت اندازه‌ی تغییرات بردار یکه‌ی مماسی نسبت به طول قوس را خمیدگی گوییم.

$k=\left|\frac{dT}{ds}\right|$ کاپا

$$k=\left|\frac{dT}{ds}\right|=\frac{|V\times a|}{|V|^{3}}$$

بردار یکه‌ی قائم:

فرض کنید $R(T)$ یک بردار مکانی ذره و T بردار یکه‌ی مماس بر مسیر باشد و S پارامتر طول قوس باشد در اینصورت مقدار $\left|\frac{dT}{ds}\right|$، را خمیدگی منحنی نامند.

$$N=\frac{\frac{dT}{dS}}{\left|\frac{dT}{ds}\right|}=\frac{1}{k}\frac{dT}{dS}.$$

را بردار یکه‌ی قائم بر خم گویند.

توجه کنید که این بردار همیشه در راستای تقعر منحنی می باشد.

$$N=\frac{\frac{dT}{dS}}{\left|\frac{dT}{dS}\right|}=\frac{\frac{dT}{dt}\times\frac{dt}{dS}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|\left|\frac{dt}{dS}\right|}=\frac{\frac{dT}{dt}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|}=\frac{T'}{|T'|} \quad (1)$$

با توجه به اینکه می توان بردار یکه‌ی مماسی را برحسب T بدست آورد و بنا بر مشتق مرکب عبارت (1) را داریم.

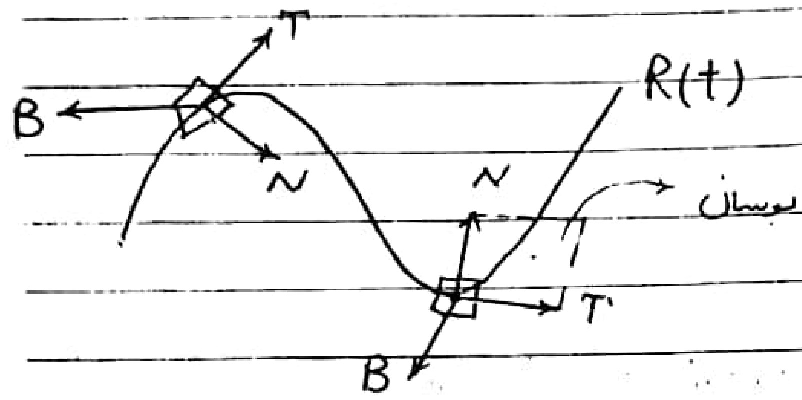
AVA

Subject Date

همچنین بردار قائم دوم که با نماد B نمایش می دهیم عبارت است از:

$B = T \times N$ که بدین ترتیب در هر نقطه از فضا توسط سه بردار

یکه T و N و B بوجود می آید دستگاه فرنه گویند.



به صفحه ای که شامل دو بردار N و T باشد صفحه بوسان یا

اصطلاحاً صفحه ای که بردار B بر آن عمود است.

و به صفحه ای که N بر آن عمود است صفحه راست گرد و به صفحه ای

که T بر آن عمود است صفحه قائم گویند.