

آزمون تستی اول شازرز، دی ۱۴۰۱



زمان آزمون ۱۲۰ دقیقه است.

آزمون شامل ۱۵ سوال ۵ گزینه ای است.

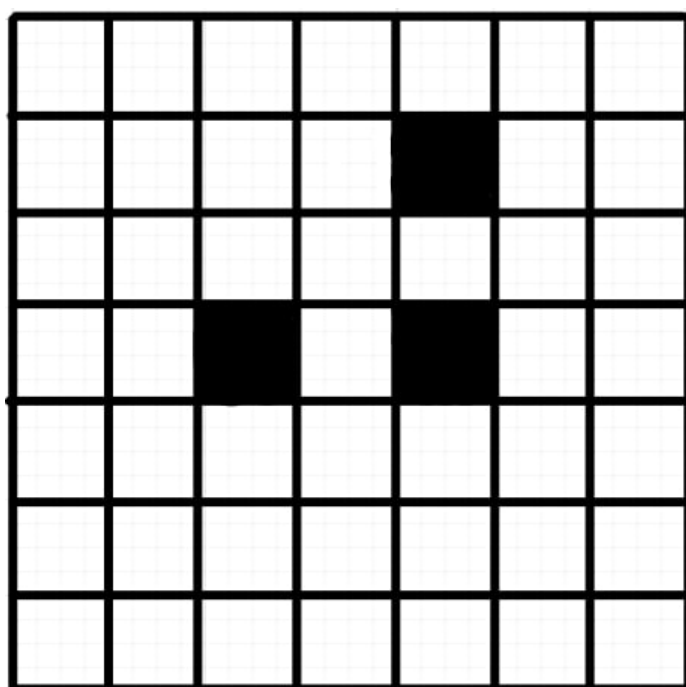
هر پاسخ درست ۴ نمره و هر پاسخ غلط ۱ نمره منفی دارد.

ترتیب سوالات به صورت تصادفی است، پیشنهاد میشود همه سوالات را بخوانید.

در قسمت پانویس تعریف xOR ، OR ، $[a]$ و امیدریاضی نوشته شده است.



۱ - تعداد مسیر هایی را بشمارید که از خانه بالا چپ شروع شوند هر مرحله به خانه پایین یا راست روند از هیچ خانه سیاهی نگذرند و در نهایت به خانه پایین راست ختم شوند.



۷۲۴ (۱) ۶۱۹ (۲) ۱۱۹ (۳) ۴۶۹ (۴) ۲۶۹ (۵)

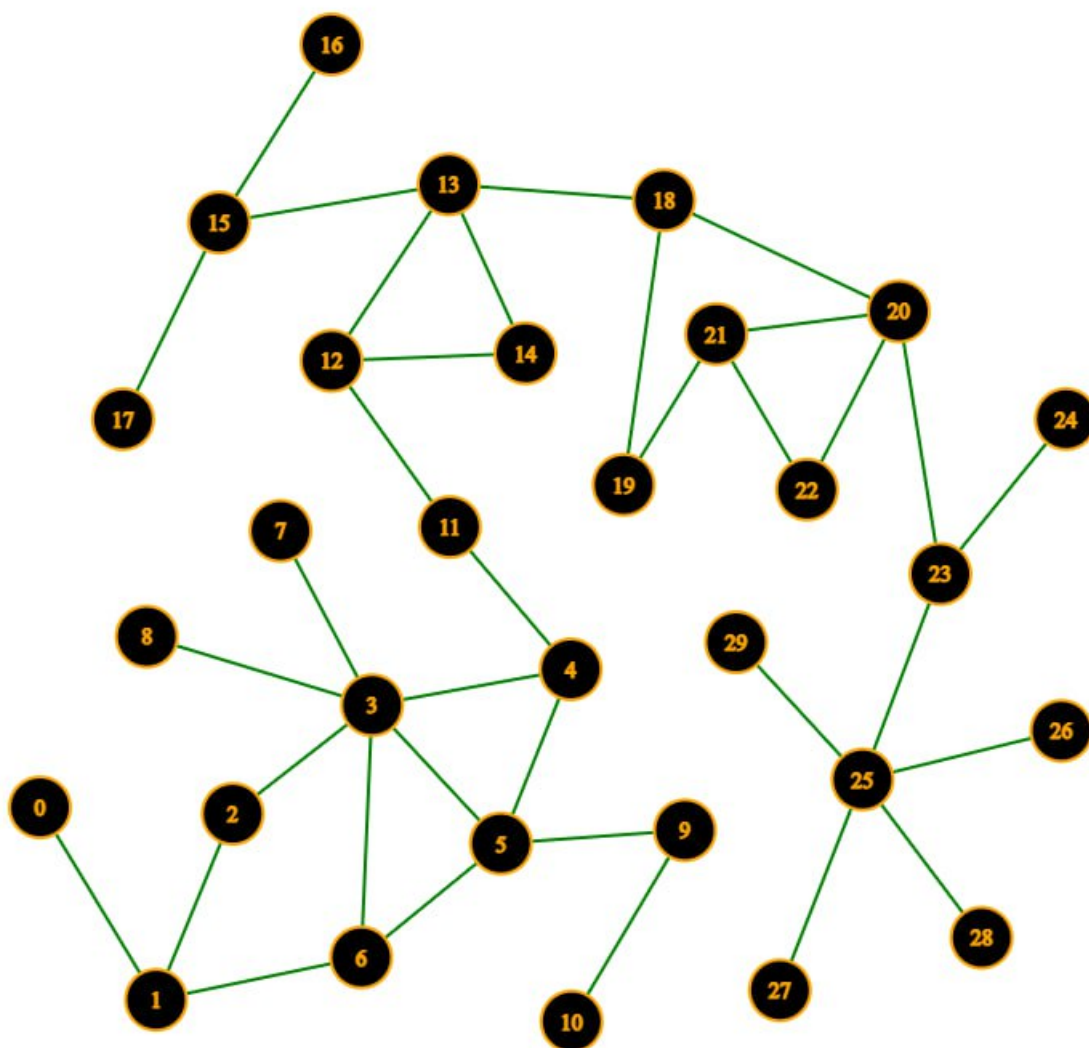
۲- ۱۴ مکعب به شما داده شده است، سوخیل می‌خواهد این مکعب‌ها را با ۳ رنگ بنفش فسفری، سبز زیتونی و آبی فیروزه‌ای رنگ کند. زیبایی این حالت از رنگ آمیزی را تعریف می‌کنیم تعداد حالات مختلفی که می‌توان مکعب‌ها را پشت سر هم در یک ردیف چید. دقت کنید مکعب‌های هم‌رنگ یکسان در نظر گرفته می‌شوند و دو حالت از چینش متفاوت هستند اگر و تنها اگر جایگاهی مانند x وجود داشته باشد که رنگ مکعب در جایگاه x در این دو حالت متفاوت باشد. بیشترین زیبایی یک رنگ آمیزی چقدر است؟

۵۰۴۵۰۴۰ (۱) ۳۴۳۲ (۲) ۱۲۶۱۲۶۰ (۳) ۴۷۸۲۹۶۹ (۴) ۲۵۲۲۵۲ (۵)

۳- سرزمین شازرزلند شامل ۳۰ شهر است. که توسط ۳۵ جاده به هم مانند شکل زیر متصل اند. طی جنگی با غارززلند تمام جاده های شازرزلند خراب شده اند. حال شهردار شازرزلند میخواهد با کمترین هزینه شازرزلند را آباد کند. در صورتی شازرزلند آباد میشود که بتوان از هر شهر شازرزلند توسط جاده های تعمیر شده به هر شهر دیگرش رسید. هزینه آباد کردن شازرزلند برابر تعداد جاده های تعمیر شده میباشد. حالا



که شهردار شازرز لند سرش شلوغ شده است، از شما می‌خواهد تعداد روش‌های انجام چنین کاری را بیابید!



۹۵۷ (۵)

۸۷۰ (۴)

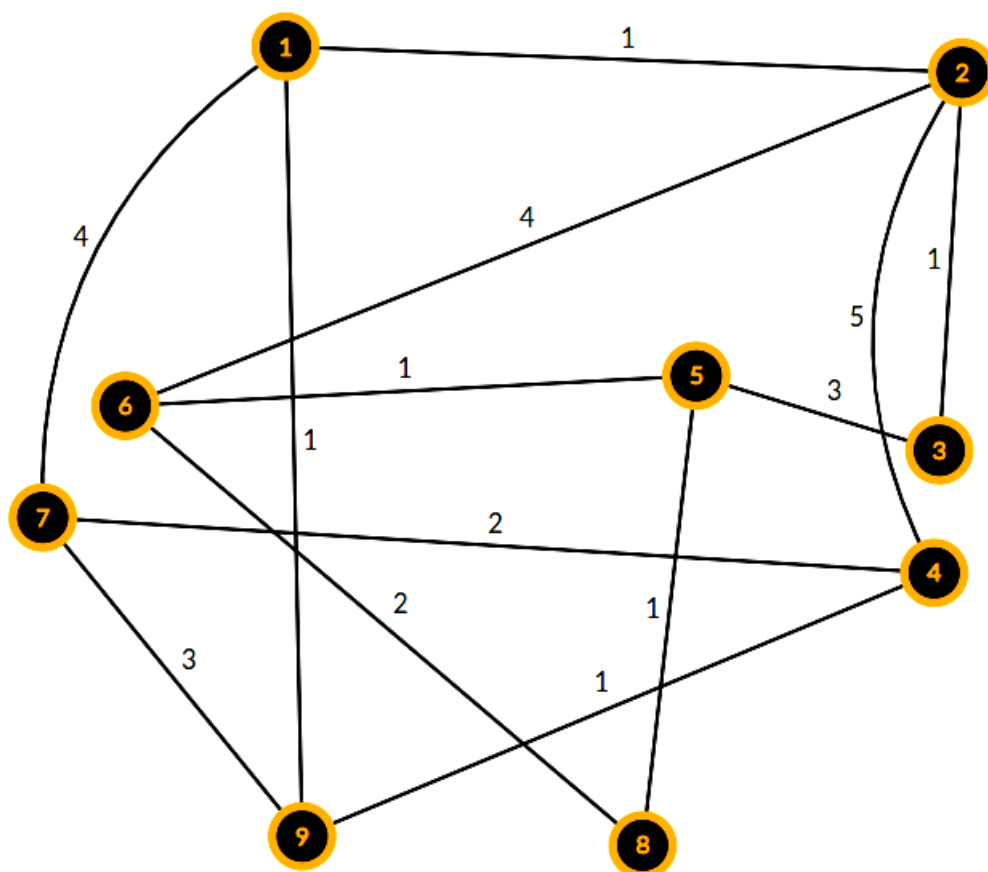
۹۹۰ (۳)

۱۱۵۵ (۲)

۱۰۴۴ (۱)

۴- از آنجایی که برنامه تفریحی‌های دوره طلا هیچ وقت کنسل نمی‌شدند، فاطمه تصمیم گرفت محض پرکردن اوقات فراغت یک گراف خیلی پیچیده را انتخاب کرده و فاصله‌ی بین دو راس از آن را بیابد. ولی متأسفانه گراف خیلی بزرگ بود و مجبور شد از شما کمک بگیرد:

طول یک مسیر از گراف را تعریف می‌کنیم مجموع وزن یال‌های مسیر. فاصله بین دو راس u و v را تعریف می‌کنیم طول کوتاه‌ترین مسیر از راس u به v . فاصله بین دو راس ۷ و ۵ را بیابید.



۱۱ (۵)

۸ (۴)

۱۰ (۳)

۷ (۲)

۹ (۱)

۵- رایان به مغازه ورزشی میرود و تعدادی وسیله میخرد. وسیله‌ها شامل ۵ توپ آبی، ۵ توپ قرمز و ۵ کیسه میشوند. (کیسه‌ها و توپ‌ها همگی متفاوت هستند). رایان به صورت تصادفی هر کدام از توپ‌ها را داخل یک کیسه می‌اندازد طوری که هر کیسه حاوی حداقل یک توپ باشد و احتمال رخ دادن هر حالتی (دنباله تعداد توپ‌های کیسه‌های یک تا پنج) برابر باشد. (در واقع احتمال وقوع هر حالتی می‌شود یک تقسیم بر کل حالات مطلوب) حال رایان دارای تعدادی کیسه می‌باشد که در هر کیسه تعدادی توپ قرمز و تعدادی توپ آبی قرار دارد. (هر کیسه حداقل یک توپ را شامل می‌شود ولی ممکن است تنها دارای توپ‌های با رنگ یکسانی باشد). رادین که برای مهمانی شام وارد خانه‌ی رایان شد ناگهان چشمش به کیسه‌ها خورد. پس از صرف شامی خوشمزه رادین دیگر طاقت نیاورد و پنهانی با کیسه‌های رایان به اتاق رفت. رادین یکی یکی کیسه‌ها را باز کرد و به ازای هر کیسه عدد زیر را محاسبه کرد و مقادیر کیسه‌ها را با هم جمع زد. (هنوز معلوم نیست هدفش از این کار چه بوده است!) ابتدا توپ‌های کیسه‌ی باز شده



را به صورت تصادفی روی تخت قرار می‌دهد (روی یک خط) و سپس تعداد جفت‌هایی از توپ‌های آبی و قرمز را محاسبه می‌کند که توپ آبی سمت چپ توپ قرمز باشد. رایان که فردای آن شب از ماجرا باخبر می‌شود به خانه‌ی آقای صفری می‌رود. آقای صفری که دیگر انرژی سابق را ندارد از شما می‌خواهد امیدریاضی جمع مقادیر کیسه‌ها را محاسبه کنید.

$$(۱) \frac{۱۲۵}{۵۴} \quad (۲) \frac{۹}{۴} \quad (۳) \frac{۲۵}{۹} \quad (۴) \frac{۱۰۵}{۲۶} \quad (۵) \frac{۵}{۲}$$

۶- ۱۴ تا توپ داریم که در یک خط چیده شده‌اند. به چند طریق می‌توانیم پریفیکسی از توپ‌ها را با رنگ‌های آبی و قرمز، و بقیه آنها را با رنگ‌های سبز و زرد و بنفش رنگ کنیم؟ منظور از یک پریفیکس، تعدادی از توپ‌های اول آرایه هست. به عبارت دیگر، پریفیکس به طول x ($۰ \leq x \leq ۱۴$)، x توپ اول آرایه است. (توپ‌ها با اندیس ۱ تا x)

$$(۱) ۴۷۶۶۵۸۵ \quad (۲) ۴۷۸۳۹۶۹ \quad (۳) ۱۴۳۴۸۹۰۶ \quad (۴) ۱۴۳۱۶۱۳۹ \quad (۵) ۴۷۸۳۹۶۸$$

۷- دستگاهی داریم که عددی در مبنای ۲ با ۱۵ رقم ورودی می‌گیرد. (عدد ورودی می‌تواند صفر پشت عدد داشته باشد). خروجی این دستگاه برابر ضرب تعداد بیت‌های ۰ و تعداد بیت‌های ۱ عدد ورودی است. تمام اعداد بین ۰ تا $۲^{۱۵} - ۱$ را به این دستگاه می‌دهیم و مقادیر تمام خروجی‌ها را جمع می‌کنیم. سپس این مقدار را تقسیم بر $۲^{۱۵}$ می‌کنیم. (به عبارتی دیگر میانگین تمام خروجی‌های ممکن این دستگاه را محاسبه می‌کنیم) این مقدار چند است؟

$$(۱) ۵۶ \quad (۲) ۶۰ \quad (۳) ۱۰۵ \quad (۴) ۵۲/۵ \quad (۵) ۲۶/۲۵$$

۸- یک توپ داریم در ابتدای کار در ارتفاع ۱۴۰۱ متری از سطح زمین است. این توپ هر بار زمین بخورد اگر از ارتفاع h شروع به پایین آمدن کرده باشد تا ارتفاع $\lfloor \frac{h}{۲} \rfloor$ بالا میرود و بعد شروع به پایین آمدن می‌کند. آقا مهدی گودرتمند که از قد بلندی هم برخوردار است میتواند حداکثر ۳ بار توپ را در نقطه اوجش گرفته و چنان به بالا بیندازد که ارتفاعش ۴ برابر شود. آقا مهدی حتی می‌تواند همان اول کار قبل از رها شدن توپ از ارتفاع ۱۴۰۱ متری هم، توپ را به بالا بیندازد. اگر نقطه اوج توپ به صفر برسد توپ دیگر حرکت نمی‌کند و دیگر حتی آقا مهدی هم قادر به پرتاب آن نیست. حداکثر تعداد دفعات برخورد توپ به زمین را بیابید.

$$(۱) ۱۷ \quad (۲) ۱۴ \quad (۳) ۱۸ \quad (۴) ۱۵ \quad (۵) ۱۶$$



۹- به ازای هر گراف G ساده n رأسی با رؤس \circ تا $n - 1$ مقدار $wef(G)$ رو تعریف می کنیم xor تمام u or v ها به ازای هر u و v مجاور. میانگین wef روی تمام گراف های ساده 1024 رأسی چقدر است (دو گراف را متمایز در نظر می گیریم اگر و فقط اگر دو رأس u و v وجود داشته باشند که در یکی بین u و v یال باشد و در دیگری نه)؟

۱۰۲۴ (۱) $\frac{1023}{2}$ (۲) ۳ (۳) ۱۰۲۳ (۴) ۵۱۲ (۵)

۱۰ - ۱۰ نفر دور یک میز نشسته اند. جلوی هر شخص یک بشقاب قرار دارد. بین هر دو بشقاب یک دستمال است. هر شخص می تواند یکی از دو دستمال سمت چپ یا راست خود را بردارد. عملیات برداشتن دستمال ها به این شکل انجام می شود: در هر مرحله یک نفر که هنوز دستمالی برنداشته است، یکی از دستمال های دو طرف خود را که هنوز برداشته نشده است، برمی دارد. (در صورت وجود هر دو، یکی را به دلخواه انتخاب می کند) این کار تکرار می شود تا وقتی که ادامه دادن آن ممکن نباشد. به دو حالت نهایی متمایز می گوئیم اگر و تنها اگر شخصی باشد که در یک حالت دستمال برداشته باشد و در حالت دیگر برنداشته باشد. به چند حالت نهایی ممکن می توان رسید؟

۴۶ (۱) ۵۵ (۲) ۴۵ (۳) ۱۲۲ (۴) ۱۲۳ (۵)

۱۱- رادال دورو پس از آن که در بازی مافیا پیروز شد، خوش حال و شادان الگوریتمی طراحی کرد که در آن عدد طبیعی T و عدد طبیعی N و آرایه A به طول N را میگیرد (مقدار عضو i ام آرایه برابر با A_i است) و روی متغیر های t ، d ، f عملیات انجام میدهد. الگوریتم به شرح زیر است:

۱. متغیر f را برابر با \circ قرار بده.

۲. متغیر t را برابر با T قرار بده.

۳. به ازای i از ۲ تا N مقدار A_i و A_1 را جابجا میکنیم.

۴. مقدار t را یکی کم کن.

۵. اگر مقدار $\circ = t$ بود به مرحله ۶ برو وگرنه به مرحله ۳ برو.

۶. متغیر d را برابر با باقیمانده A_N در تقسیم بر ۲ قرار بده.

۷. مقدار d را به مقدار f اضافه کن.



۸. عضو N ام آرایه را حذف کن و مقدار N را یکی کم کن.
۹. اگر $N = 0$ بود الگوریتم را خاتمه بده وگرنه به مرحله ۲ برو.
- مقدار متغیر f بعد از اجرای عملیات به ازای $T = 7$ ، $N = 10$ و
- $$A = [186, 206, 4761, 4756, 231, 0, 1, 55, 315, 129]$$

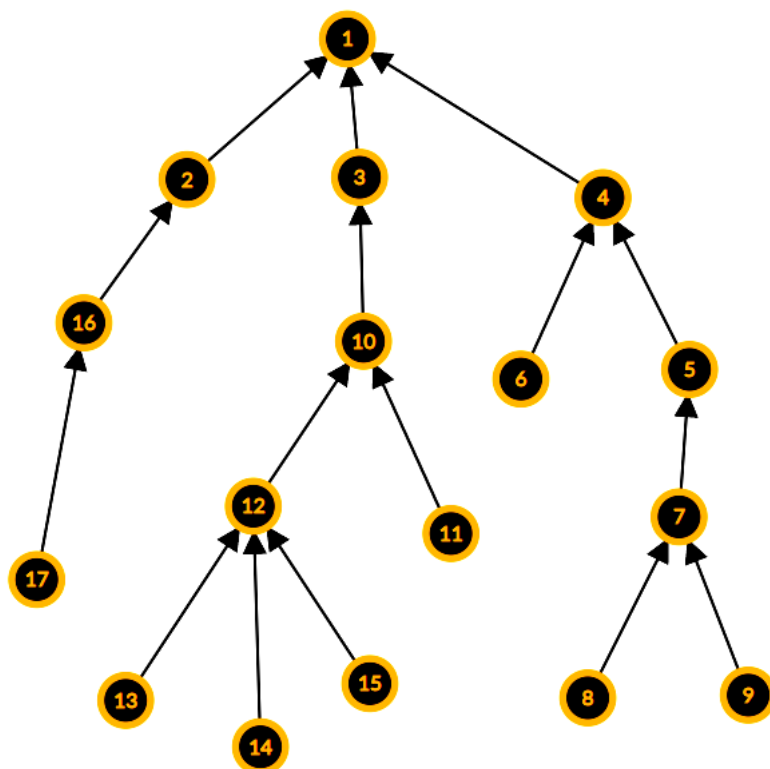
چند میباشد؟

- ۵ (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵)

بازی سیکرت هیتلر یک بازی چند نفره و خیلی شبیه به مافیاست. در این بازی هر نفر عضو دقیقا یکی از حزب‌های لیبرال و یا فاشیست هست. هر نفر یک کارت عضویت دارد که این کارت قرمز است اگر فرد عضو حزب فاشیست باشد و آبی است اگر عضو حزب لیبرال باشد. در طول بازی ممکن است یک نفر کارت فرد دیگری را ببیند و بعد باید اعلام کند کارت چه رنگی بوده است. (دقت کنید لزومی ندارد اگر فرد A کارت فرد B را ببیند، فرد B هم کارت A را ببیند) لیبرال‌ها همیشه راست میگویند ولی فاشیست‌ها ممکن است دروغ یا راست بگویند. همچنین در آن بازی هر نفر یک کد دارد. کد عددی بین ۱ تا n است و برای هر دو نفری متمایز است. (n تعداد بازیکن‌های یک دست است)

_____ با توجه به متن بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

۱۲- یک روز، بعد از کلاس‌های جان‌فرسای دوره، ملت دوره‌طلا به همراه ۶ نفر از معلم‌های عزیزشون تصمیم گرفتند سیکرت هیتلر بازی کنند. در طی این بازی ۱۷ نفره، ۱۶ نفر کارت دقیقا یک بازیکن دیگر را دیدند ولی مشتلی، که با دموکراسی کامل توانسته بود کد شماره ۱ را تصاحب کند، هیچ کارتی را ندید. از آنجایی که بازی واقعا حیاتی شده بود، محمد عقیل این دیدارها را به صورت یک گراف جهت دار نشان داد تا بتواند تحلیل‌های منطقی بیشتری روی آن انجام دهد. در این گراف یال از راس A به راس B نشان میدهد فرد با کد A کارت فرد با کد B را دیده است. همه اعلام کردند کارت آبی دیده‌اند به جز رایان که طبق معمول دنبال درست کردن دعوا بود و گفت کارت فاطمه قرمز بوده است. (کد رایان ۵ است و کد فاطمه ۴) همچنین میدانیم در این دست از بازی یک فاشیست اگر کارت قرمز ببیند حتما میگوید آبی دیده است. ولی اگر کارت آبی ببیند ممکن است هر چیزی بگوید. از آنجایی که باشگاه کم‌کم در حال بیرون کردن بچه‌ها است، آن‌ها از شما می‌خواهند هر چه سریع‌تر بگویید تعداد حالات برای لیبرال یا فاشیست بودن این ۱۷ نفر چند است؟ دو حالت متفاوتند اگر و تنها اگر وجود داشته باشد شخصی مثل A که در یکی از حالات فاشیست و در حالت دیگر لیبرال بوده است.



۵۶۵ (۵)

۱۶۰ (۴)

۶۵۶ (۳)

۴۲۰ (۲)

۴۰۵ (۱)

۱۳- آشمز و کشی به همراه ۶ نفر از دوستانشون مشغول بازی سیکرت هیتلر بودند. اما از آنجایی که فضای کافی برای دور هم نشستن نبود، افراد به ترتیب روی یک ردیف ۸ تایی از صندلی‌ها نشستند به‌طوری‌که کد افراد به ترتیب به حالت زیر بود:

 $۱, ۳, ۸, ۲, ۴, ۵, ۶, ۷$

هر نفر کارت تمام افراد سمت چپش که کد آن‌ها از کد خودش کمتر بود را نگاه کرد و در کمال تعجب همه به ازای هر کارتی که دیده بودند اعلام کردند آبی بوده است! آشمز که با چندصد دست تجربه، هیچ‌گاه چنین نتایجی ندیده بود، سخت در فکر فرو رفت. به او کمک کنید و تعداد حالات معتبر فاشیست یا لیبرال بودن این ۸ نفر را حساب کنید شاید که آشمز توانست به کمک آن بازی را ببرد. دو حالت متفاوتند اگر و تنها اگر وجود داشته باشد شخصی مثل A که در یکی از حالات فاشیست و در حالت دیگر لیبرال بوده است.

۱۵ (۵)

۱۷ (۴)

۱۴ (۳)

۱۶ (۲)

۱۸ (۱)



امیر پس از آنکه از بازی مافیا و سیکرت هیتلر خسته شد، تصمیم گرفت بازی جدیدی را ابداع کند و با فروش آن بازی به سرمایه‌ای هنگفت برسد. او دو روز در کلاس‌های دوره حاضر نشد و در این دو روز توانست بازی شطرنج ۲ را ابداع کند و به سال‌ها انتظار بشریت برای نسخه دوم این بازی پایان دهد. در این نسخه از بازی، مهره‌ای به نام خر به بازی اضافه شده است و صفحه شطرنج آن n سطر و m ستون دارد. سطرها به ترتیب از بالا به پایین از ۱ تا n و ستون‌ها از چپ به راست از ۱ تا m شماره گذاری شده است. خانه سطر x ام و ستون y ام را با (x, y) نشان می‌دهیم. مهره خر در یک حرکت می‌تواند از خانه (a, b) به خانه (c, d) برود اگر $|a - c| = 1$ و $|b - d| = 2$ باشد. مهره خر مهره دیگری را تهدید میکند اگر حرکتی باشد که با انجام دادن آن، مهره خر آن مهره را از بازی حذف کند (به عبارتی با حرکتی به خانه آن مهره برود). مهره خر مهره دیگری را تقریباً تهدید میکند اگر عدد صحیح نامنفی x وجود داشته باشد که پس از x حرکت توسط مهره خر، مهره خر بتواند مهره دیگر را تهدید کند.

با توجه به متن بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید.

۱۴ - صفحه شطرنجی با ۸ سطر و ۸ ستون داریم. به چند روش میتوانیم تعدادی مهره خر بگذاریم که هیچ مهره‌ای دیگر مهره‌ای را تقریباً تهدید نکند؟

- (۱) 3^{22} (۲) 65 (۳) 17^4 (۴) 3^{32} (۵) 16^4

۱۵ - صفحه شطرنجی با ۸ سطر و ۳ ستون داریم. به چند روش میتوانیم تعدادی مهره خر بگذاریم که هیچ مهره‌ای دیگر مهره‌ای را تهدید نکند؟

- (۱) 256×3025 (۲) 255×3025 (۳) 255×7921 (۴) 255×441 (۵) 256×441



پانویس

دستگاه xor

دستگاه «ایکس-ار» (xor) دو عدد می‌گیرد و یک عدد برمی‌گرداند. این دستگاه ابتدا دو عدد ورودی را به مبنای ۲ می‌برد و با افزودن تعداد مناسبی صفر به سمت چپ عدد کوتاه‌تر، تعداد رقم‌های آن دو عدد را برابر می‌کند. سپس عدد دوم را زیر عدد اول (در دو سطر شبیه وقتی که بخواهیم آن‌ها را جمع کنیم) می‌نویسد به صورتی که رقم i -ام عدد اول بالای رقم i -ام عدد دوم قرار بگیرد. حال هر دو رقم را که در یک ستون قرار دارند مقایسه می‌کند: اگر مساوی بودند زیر آن‌ها و در سطر سوم یک رقم 0 می‌نویسد، و در صورتی که یکسان نبودند زیر آن‌ها رقم 1 می‌گذارد. در انتها با تبدیل عدد دودویی نوشته شده در سطر سوم از مبنای ۲ به مبنای 10 و تحویل آن در خروجی، کار پایان می‌یابد. مثلاً اگر به دستگاه اعداد 5 و 12 را بدهیم، دستگاه با تبدیل آن‌ها به مبنای دو، عددهای $(1100)_2$ و $(0101)_2$ را تولید کرده در دو سطر می‌نویسد و با توجه به آن‌ها عدد $(1001)_2$ در سطر سوم درج خواهد شد و لذا دستگاه عدد 9 را به عنوان خروجی برمی‌گرداند. در نتیجه $12 \oplus 5 = 9$.

دستگاه or

دستگاه «ار» (or) دو عدد می‌گیرد و یک عدد برمی‌گرداند. این دستگاه بسیار شبیه دستگاه xor عمل می‌کند با این تفاوت که اگر هر دو بیت سطر اول و دوم برابر 0 باشند، بیت متناظر در سطر سوم را هم 0 و در غیر این صورت 1 می‌گذارد.

تابع کف

تابع کف ($\lfloor a \rfloor$) با گرفتن یک عدد حقیقی a ، بزرگترین عدد صحیح کوچک یا مساوی a را برمی‌گرداند. (در واقع اگر a را به صورت اعشاری بنویسیم، این تابع جزء اعشاری را حذف کرده و فقط جزء صحیح را می‌دهد)

امیدریاضی

فرض کنید k واقعه داریم که i امین آن‌ها به احتمال p_i رخ می‌دهد. و به آن عدد a_i را نسبت داده‌ایم. امید ریاضی مقادیر a برابر است با $\sum_{i=1}^k a_i \times p_i$