

## آزمون تستی مرحله یک شازرز، بهمن ۱۴۰۲



زمان آزمون ۱۲۰ دقیقه است.

آزمون شامل ۱۵ سوال ۵ گزینه‌ای است.

هر پاسخ درست ۴ نمره مثبت و هر پاسخ غلط ۱ نمره منفی دارد.

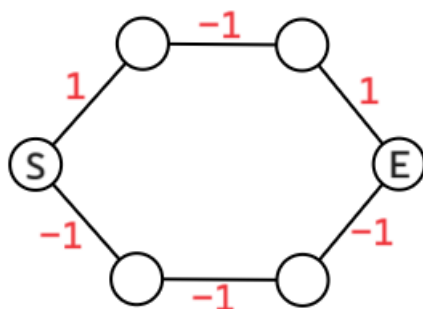
ترتیب سوالات به صورت تصادفی است، پیشنهاد می‌شود همه سوالات را بخوانید.

در قسمت ضمیمه تعریف  $xor$  و  $[a]$  نوشته شده است.





(۱) در شکل زیر به ازای تمامی حالاتی که می‌توان با طی ۵ یال از  $S$  به  $E$  رسید، مقادیر روی یال‌ها را جمع کرده‌ایم. مجموع چقدر است؟



- (۱) -۸      (۲) -۴      (۳) -۱۰      (۴) -۱۴      (۵) -۱۲

(۲) امیرحسین و موسی در حال بازی کردن هستند. در این بازی یک تاس سه وجهی استفاده می‌شود. در هر نوبت تاس ریخته می‌شود و در صورتی که ۱ بیاید، امیرحسین و در غیر این صورت موسی یک امتیاز می‌گیرد. اگر هر کدام از آن‌ها سه امتیاز بیشتر از حریفش داشته باشد، برنده می‌شود. به چند روش ممکن است بازی تا دور هشتم ادامه پیدا کند و در این دور امتیاز این دو نفر برابر باشد؟ (دو حالت متفاوتند اگر عدد روی تاس در یکی از مراحل در این دو حالت متفاوت باشد).

- (۱) ۸۰۰      (۲) ۸۶۴      (۳) ۹۷۶      (۴) ۹۶۰      (۵) ۸۳۲

(۳) امیرعلی تصمیم گرفته است تا پول‌های نداشته‌اش را در جوب بریزد، برای همین می‌خواهد به صورت تصادفی به یکی از ۷ نفر دیگر دوره طلا اکانت پریمیوم تلگرام هدیه دهد. ستایش با دیکتاتوری برنده را به این صورت مشخص می‌کند:

۱. به همه غیر از ستایش اعداد ۱ تا ۶ را نسبت می‌دهیم و تاس می‌اندازیم. فرض کنید عدد متناظر با شخص  $a$  بیاید.

۲. به همه غیر از شخص  $a$  اعداد ۱ تا ۶ را نسبت می‌دهیم و تاس می‌اندازیم. اگر تاس، عدد متناظر با ستایش را نشان دهد، برنده اوست. در غیر این صورت فرض کنید عدد متناظر با شخص  $b$  بیاید.



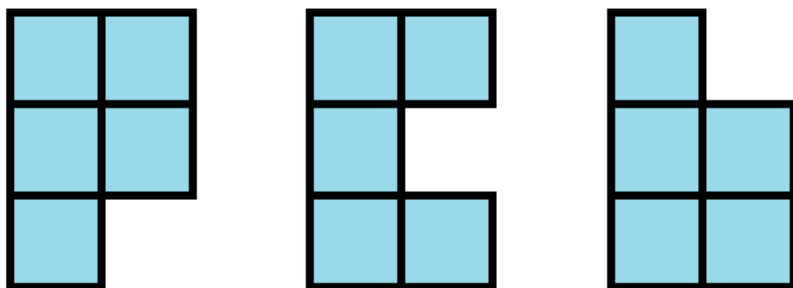
۳. به همه غیر از شخص  $b$  اعداد ۱ تا ۶ را نسبت می‌دهیم و تاس می‌اندازیم. اگر تاس، عدد متناظر با ستایش را نشان دهد، برنده اوست. در غیر این صورت فرض کنید عدد متناظر با شخص  $c$  بیاید.

۴. اکنون ۳ کاندید برای برنده نهایی داریم، شخص  $b$  و شخص  $c$  و ستایش. اعداد ۱ و ۲ را به شخص  $b$ ، اعداد ۳ و ۴ را به شخص  $c$  و اعداد ۵ و ۶ را به ستایش نسبت می‌دهیم. برای بار آخر تاس می‌اندازیم و عدد روی تاس برنده را مشخص می‌کند.

در این لحظه برای امیرعلی سوال می‌شود که به چه احتمالی شخصی با نام پارسا برنده خواهد شد؟ (پارسا نام دو نفر از افراد دوره طلا است.)

$$\frac{25}{54} \text{ (۵)} \quad \frac{25}{162} \text{ (۴)} \quad \frac{5}{12} \text{ (۳)} \quad \frac{5}{36} \text{ (۲)} \quad \frac{5}{6} \text{ (۱)}$$

۴) درست که پله‌های ترقی را با سرعت سرسام‌آوری طی می‌کند، معلم یک مهد کودک شده و می‌خواهد با بچه‌ها لگو بازی کند. این بازی در یک جدول ۶ در ۶ انجام می‌شود. لگوهای بچه‌ها به شکل مربع‌های ۱ در ۱ است و لگوهای درست به سه شکل زیر هستند: (لگوها را می‌توان دوران داد).



بچه‌ها می‌خواهند برای اذیت کردن درست، طوری در جدول لگوهای خود را قرار دهند که درست نتواند هیچ کدام از سه لگوی خود را در جدول بگذارد. حداقل تعداد لگویی که بچه‌ها باید قرار دهند تا به هدف خود برسند چند است؟ توجه داشته باشید که هر خانه از جدول توسط حداکثر یک لگو می‌تواند پوشانده شود.

$$16 \text{ (۵)} \quad 12 \text{ (۴)} \quad 11 \text{ (۳)} \quad 15 \text{ (۲)} \quad 10 \text{ (۱)}$$



۵) یکی از معادن طلای شازرز، به شکل یک جدول ۴ در ۴ است. ستایش و امیرعلی که دنبال کسب درآمد هستند، تصمیم گرفتند طلاهای معدن را استخراج کنند. رادین که از سال قبل با معدن آشنا بود، ۵ خانه را مشخص کرد و روی هر کدام یک عدد نوشت و گفت خانه‌هایی که عدد دارند، قطعا شامل طلا نیستند و عدد روی آن‌ها نشان می‌دهد که چند تا از خانه‌های مجاور راسی آن‌ها شامل طلا هستند. (دو خانه از جدول مجاور راسی هستند اگر و تنها اگر از یکی از آن دو بتوان با یک حرکت افقی، عمودی و یا اریب به دیگری رسید. واضح است که یک خانه حداکثر با ۸ خانه‌ی دیگر از جدول می‌تواند مجاور راسی باشد).

با توجه به حرف رادین، امیرعلی و ستایش می‌خواهند تمام حالات ممکن از خانه‌های شامل طلا را بررسی کنند. به آن‌ها کمک کنید و تعداد حالات را بگویید. (دو حالت متفاوتند اگر و تنها اگر خانه‌ای باشد که در یک حالت شامل طلا و در حالت دیگر بدون طلا باشد).

		3	1
3			
		4	
	1		

۱۲ (۵)

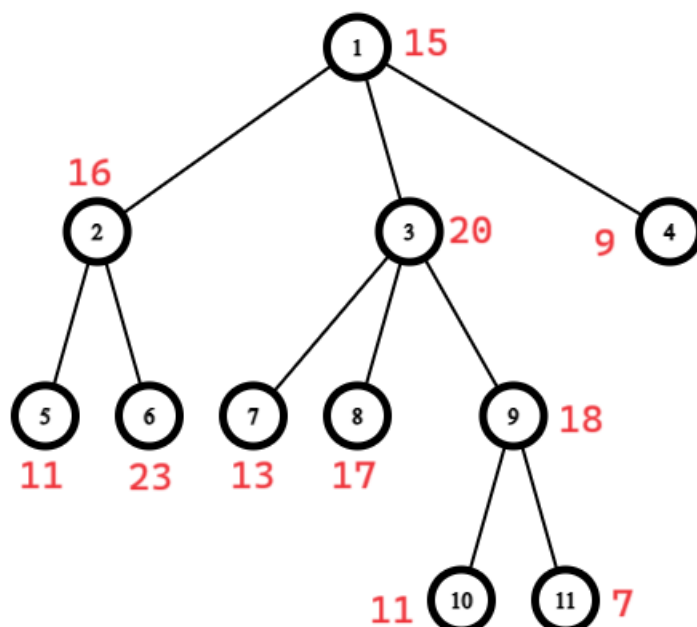
۸ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۱۴ (۱)

۶) پس از سال‌ها جنگ بین شازرز و غازرز، این دو سرزمین تصمیم گرفتند با هم صلح کنند و می‌خواهند شهرهای موجود را بین خودشان تقسیم کنند. هر شهر، مقداری ارزش دارد که بر اساس مقدار نفت موجود در آن تعیین می‌شود. شهرها و جاده‌های موجود را می‌توان به صورت گراف زیر نشان داد به طوری که عدد کنار هر راس، ارزش آن شهر را مشخص می‌کند:



شازرززند و غازرززند به صورت زیر شروع به تصاحب شهرها می‌کنند:

ابتدا یک شهر توسط شازرززند تصاحب می‌شود، سپس غازرززند شهری دیگر را اشغال می‌کند. پس از این مرحله، نیروهای هر کدام از آن‌ها در شهر انتخاب شده مستقر می‌شوند. اکنون هر بار ابتدا شازرززند و سپس غازرززند، در صورت امکان به یکی از شهرهای تصاحب نشده‌ی مجاور قلمروی خود حمله می‌کنند و آنجا را تصاحب می‌کنند و به قلمروی خود اضافه می‌کنند. (یک شهر با یک قلمرو مجاور است اگر و تنها اگر به یکی از شهرهای آن قلمرو یال داشته باشد)

بدیهی است که هر کدام از این دو می‌خواهند ارزش قلمروی خود را بیشینه کنند. ارزش یک قلمرو برابر با مجموع ارزش شهرهای آن تعریف می‌شود. اکنون اگر هر دوی آن‌ها بهینه عمل کنند، ارزش قلمرو شازرززند در انتها چقدر است؟

۵۱ (۱)      ۸۶ (۲)      ۱۱۰ (۳)      ۹۲ (۴)      ۷۴ (۵)

۷) دنباله‌ی  $\langle ۱, ۲, ۰, ۴, ۱ \rangle$  به شما داده شده است. در هر مرحله می‌توانید یک زیردنباله‌ی متوالی از آن و یک عدد صحیح  $x$  را انتخاب کنید و تمام اعضای آن زیردنباله را با  $x$  جمع کنید. کمینه تعداد مراحل برای صفر کردن تمام اعضای آرایه چقدر است؟

۳ (۱)      ۵ (۲)      ۶ (۳)      ۴ (۴)      ۲ (۵)

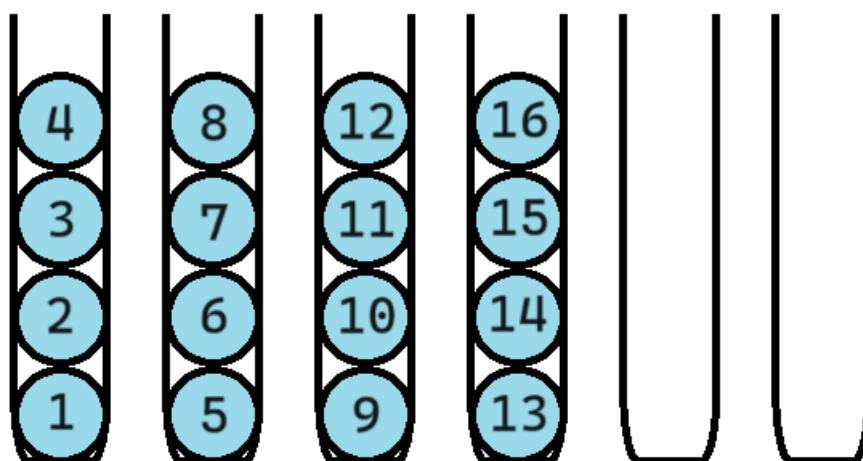


۸) الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱. عدد  $a$  را ورودی بگیر.
  ۲.  $b$  را مساوی ۰ قرار بده.
  ۳. اگر  $a$  صفر بود، به مرحله ۸ برو.
  ۴. مقدار  $c$  را برابر با باقی‌مانده‌ی تقسیم  $a$  بر ۳ قرار بده.
  ۵.  $b$  را با  $b + (-1)^c \times c$  جمع کن.
  ۶.  $a$  را برابر با  $\lfloor \frac{a}{3} \rfloor$  قرار بده.
  ۷. به مرحله ۳ برو.
  ۸. اگر  $b$  برابر با ۰ بود ۱ و در غیر این صورت ۰ را خروجی بده.
- عدد خروجی این الگوریتم با ورودی  $a$  را  $f(a)$  می‌نامیم. مقدار  $\sum_{i=0}^{728} f(i)$  چقدر است؟

۱) ۱۴۰      ۲) ۱۴۲      ۳) ۷۶      ۴) ۱۴۱      ۵) ۷۵

۹) پارسا ۱۶ توپ با شماره‌های ۱ تا ۱۶ و ۶ استوانه با ظرفیت ۴ توپ دارد. در آغاز توپ‌ها به شکل زیر قرار گرفته‌اند:



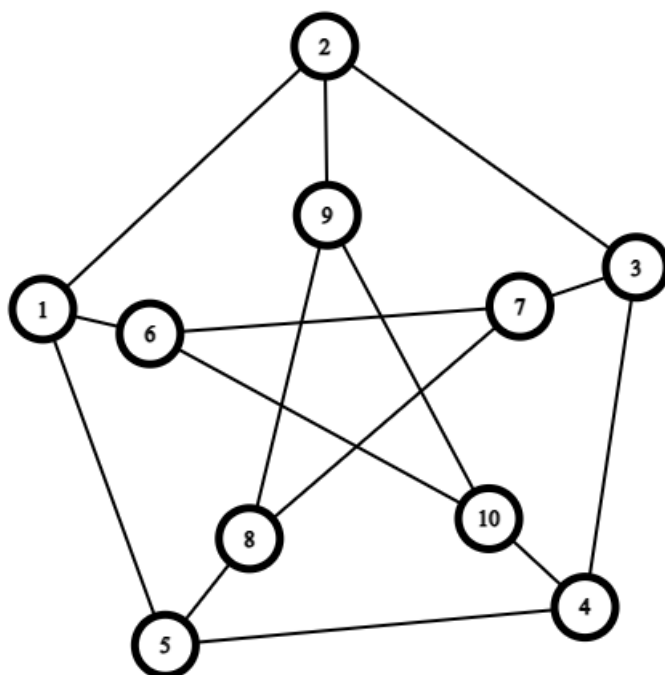


او ابتدا هر توپ را با یکی از دو رنگ سیاه یا سفید رنگ می‌کند. (به طور کلی  $2^{16}$  رنگ آمیزی وجود دارد). پارسا در هر عملیات می‌تواند توپ بالایی یک استوانه را بردارد و آن را به بالای یک استوانه‌ی دیگر (که حداکثر ۳ توپ دارد) انتقال دهد.

به ازای چند حالت از رنگ‌آمیزی اولیه توپ‌ها، پارسا با انجام تعدادی از این عملیات‌ها می‌تواند به حالتی برسد که دقیقاً دو استوانه خالی باشد و بقیه‌ی استوانه‌ها یا ۴ توپ سفید و یا ۴ توپ سیاه داشته باشند؟

(۱) ۲۵۷۴۰ (۲) ۱۴۶۹۲ (۳) ۱۶۵۱۰ (۴) ۱۴۹۵۲ (۵) ۱۶۵۱۲

۱۰) آشمز به گراف پترسن علاقه زیادی دارد. این گراف در زیر نمایش داده شده است:



اکنون آشمز می‌خواهد بداند به چند طریق می‌توانیم یال‌های گراف پترسن را جهت دهی کنیم به طوری که دقیقاً ۵ راس با درجه ورودی فرد داشته باشیم؟ به آشمز در حل این مسئله کمک کنید. البته از آنجایی که جواب ممکن است بزرگ باشد، کافی‌ست باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۵ را به آشمز بگویید.

(۱) ۳ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲ (۵) ۴



(۱۱) در دنیایی موازی هر فرد سفید پوست افراد سیاه پوست را دوست دارد و برعکس. حال ۷ نفر دور دایره داریم که ۳ نفر از آن ها سفید پوست و مابقی سیاه پوست هستند. این افراد به ترتیب  $\langle ۳, ۵, ۲, ۳, ۴, ۱, ۳ \rangle$  سکه دارند. (نفر دوم ۵ سکه دارد).

در هر مرحله دو فرد مجاور با رنگ پوست متفاوت می‌توانند مقداری سکه با هم تبادل کنند. (به وضوح در هیچ مرحله‌ای تعداد سکه‌های یک نفر منفی نمی‌شود). اکنون به ازای تمام حالات ممکن از رنگ پوست افراد حاضر، ماکسیمم تعداد سکه‌ای که نفر اول بعد از تعداد مرحله می‌تواند کسب کند را حساب کنید. مجموع این مقادیر چقدر می‌شود؟ دو حالت متفاوتند اگر فردی باشد که رنگ پوستش در این دو حالت فرق کند. (تعداد کل حالات برابر با  $\binom{۷}{۳}$  است).

۲۶۰ (۱)      ۲۰۲ (۲)      ۳۷۲ (۳)      ۲۹۲ (۴)      ۳۴۲ (۵)

(۱۲) امروز بالاخره پس از ماه‌ها حقوق تدریس امیرعلی واریز شده و علیرضا می‌خواهد از او شیرینی بگیرد. امیرعلی هم از آنجایی که عاشق پیچیده کردن کارهاست، گفت به روش زیر این کار را انجام می‌دهیم: اعداد ۰ تا ۲۵۵ را داریم. در ابتدا علیرضا باید این اعداد را به دو دسته‌ی ۱۲۸ عضوی افراز کند، سپس امیرعلی به ازای هر جفت عددی که داخل یک دسته هستند  $xor$  آن دو را حساب کرده و مجموع این مقادیر را یادداشت می‌کند. این عدد نشان دهنده مقدار شیرینی‌ای است که امیرعلی برای علیرضا خواهد خرید.

از آنجایی که علیرضا عاشق شیرینی است به او بگویید حداکثر چند شیرینی می‌تواند از امیرعلی بگیرد؟

۲۰۸۸۹۶۰ (۱)      ۴۱۷۷۹۲۰ (۲)      ۱۰۴۴۴۸۰ (۳)      ۲۰۸۰۷۶۸ (۴)      ۱۰۴۰۳۸۴ (۵)

(۱۳) یک گراف ۶ راسی با رئوس ۱ تا ۶ داریم. در این گراف راس  $i$  به راس  $j$  یالی جهت دار دارد اگر و تنها اگر  $j = i + ۱$  باشد. اکنون پارسا دو عدد  $i$  و  $j$  به طوری که  $j > i$  باشد انتخاب می‌کند و یالی جهت دار از  $i$  به  $j$  قرار می‌دهد. (بعد از این کار ممکن است بین  $i$  و  $j$  دو یال باشد).

از نظر او مقدار  $d(v)$  برابر با کمترین تعداد یالی است که با شروع از راس ۱ باید طی کرد تا بتوان به راس  $v$  رسید. همچنین پارسا ارزش یک گراف را مقدار  $\sum_{v=۱}^n d(v)$  تعریف می‌کند. اکنون به او کمک کنید و به ازای تمام حالات ممکن قرار دادن این یال، ارزش گراف را حساب کرده و





مجموع این مقادیر را بگویید. (کل حالات برای انتخاب  $i$  و  $j$  برابر با  $\binom{6}{2}$  است.)

- |         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| ۲۱۰ (۱) | ۱۹۰ (۲) | ۱۹۶ (۳) | ۱۵۵ (۴) | ۱۸۶ (۵) |
|---------|---------|---------|---------|---------|

ستایش گراف‌های کامل و اعداد فرد را علاوه بر گراف‌های جهت‌دار دوست دارد. او که بسیار بیکار است، تمام گراف‌های کامل جهت دار  $n$  راسی را می‌کشد، برای هر گراف تعداد رئوسی که فرد یال ورودی دارند را می‌شمارد و ماکسیمم این اعداد را  $f(n)$  می‌نامد. در ادامه آشمز که از ستایش نیز بیکارتر است،  $g(n)$  را برابر با تعداد حالاتی تعریف می‌کند که می‌توانیم یال‌های گراف کامل  $n$  راسی را جهت دار کنیم طوری که تمام رئوس فرد یال ورودی داشته باشند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید.

۱۴)  $\sum_{i=1}^{23} f(i)$  چند است؟

- |         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| ۲۵۳ (۱) | ۲۷۴ (۲) | ۲۷۶ (۳) | ۲۵۴ (۴) | ۲۶۴ (۵) |
|---------|---------|---------|---------|---------|

۱۵) باقی‌مانده‌ی تقسیم مقدار  $\sum_{i=1}^{23} g(i)$  بر ۵ چند است؟

- |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| ۴ (۱) | ۰ (۲) | ۲ (۳) | ۱ (۴) | ۳ (۵) |
|-------|-------|-------|-------|-------|



## ضمیمه

### دستگاه $xor$

دستگاه «ایکس-ار» ( $xor$ ) دو عدد می‌گیرد و یک عدد برمی‌گرداند. این دستگاه ابتدا دو عدد ورودی را به مبنای ۲ می‌برد و با افزودن تعداد مناسبی صفر به سمت چپ عدد کوتاه‌تر، تعداد رقم‌های آن دو عدد را برابر می‌کند. سپس عدد دوم را زیر عدد اول (در دو سطر شبیه وقتی که بخواهیم آن‌ها را جمع کنیم) می‌نویسد به صورتی که رقم  $i$ -ام عدد اول بالای رقم  $i$ -ام عدد دوم قرار بگیرد. حال هر دو رقم را که در یک ستون قرار دارند مقایسه می‌کند: اگر مساوی بودند زیر آن‌ها و در سطر سوم یک رقم  $0$  می‌نویسد، و در صورتی که یکسان نبودند زیر آن‌ها رقم  $1$  می‌گذارد. در انتها با تبدیل عدد دودویی نوشته شده در سطر سوم از مبنای ۲ به مبنای  $10$  و تحویل آن در خروجی، کار پایان می‌یابد. مثلاً اگر به دستگاه اعداد  $5$  و  $12$  را ورودی دهیم، دستگاه با تبدیل آن‌ها به مبنای دو، عددهای  $(101)_2$  و  $(1100)_2$  را تولید می‌کند و در دو سطر می‌نویسد. در ادامه با توجه به آن‌ها عدد  $(1001)_2$  در سطر سوم درج خواهد شد و لذا دستگاه عدد  $9$  را به عنوان خروجی برمی‌گرداند. در نتیجه  $12 \oplus 5 = 9$ .

### تابع کف

تابع کف ( $\lfloor a \rfloor$ ) با گرفتن یک عدد حقیقی  $a$ ، بزرگترین عدد صحیح کوچک یا مساوی  $a$  را برمی‌گرداند. (در واقع اگر  $a$  را به صورت اعشاری بنویسیم، این تابع جزء اعشاری را حذف کرده و فقط جزء صحیح را می‌دهد.)