پاسخنامه‌ی آزمون اول تستی شازززز، دی ۱۴۰۱

۱ - گزینه‌ی ۵

خانه سیاه بالا راستی را A پایین چپی را B و دیگری را C می نامیم. همچنین میدانیم تعداد مسیر هایی که فقط چپ و پایین روند و از خانه بالا راست یک مستطیل $n \times m$ به خانه پایین چپش بروند برابر $\binom{n+m-۲}{n-۱}$ است.

حال با استفاده از اصل شمول و عدم شمول سوال را حل میکنیم. کل مسیر ها : $\binom{۱۲}{۶}$

مسیر های گذرنده از A : $\binom{۷}{۵} \times \binom{۵}{۱}$

مسیر های گذرنده از B : $\binom{۷}{۳} \times \binom{۵}{۳}$

مسیر های گذرنده از C : $\binom{۵}{۳} \times \binom{۷}{۳}$

مسیر های گذرنده از هر دوی A و C : $\binom{۵}{۳} \times \binom{۲}{۲} \times \binom{۵}{۱}$

مسیر های گذرنده از هر دوی B و C : $\binom{۵}{۳} \times \binom{۲}{۰} \times \binom{۵}{۳}$

پس جواب برابر :

$$\binom{۱۲}{۶} - \binom{۵}{۱} \times \binom{۷}{۵} - \binom{۵}{۳} \times \binom{۷}{۳} - \binom{۷}{۳} \times \binom{۵}{۳} + \binom{۵}{۱} \times \binom{۲}{۲} \times \binom{۵}{۳} + \binom{۵}{۳} \times \binom{۲}{۰} \times \binom{۵}{۳}$$

است.

۲- گزینه‌ی ۵

تعداد هر رنگ را به ترتیب x_1, x_2, x_3 بگیرید، میدانیم جمع این سه مقدار برابر ۱۴ است.

تعداد حالات رنگامیزی برابر با $\frac{14!}{x_1! \times x_2! \times x_3!}$ است. پس کافیست حاصل $x_1! \times x_2! \times x_3!$ کمینه شود

بدون کم شدن از کلیت فرض کنید $x_1 < x_2 < x_3$

ادعا: اگر $x_3 > x_1 + 1$ میتوان جواب بهتری ارائه داد:

اثبات: اگر یک واحد از x_3 کم کرده و یک واحد به x_1 اضافه کنیم، مقدار مخرج که قصد کمینه کردن آن را داشتیم بر x_3 تقسیم شده و در $x_1 + 1$ ضرب میشود، پس بنا بر فرض ادعا مقدار مخرج کمتر شده.

حال به راحتی میتوان دید تنها حالتی که در آن x_3 از x_1 حداکثر ۱ واحد بیشتر است مقدار دهی زیر است.

$$x_1 = 4,\ x_2 = 5,\ x_3 = 5$$

۳- گزینه‌ی ۵

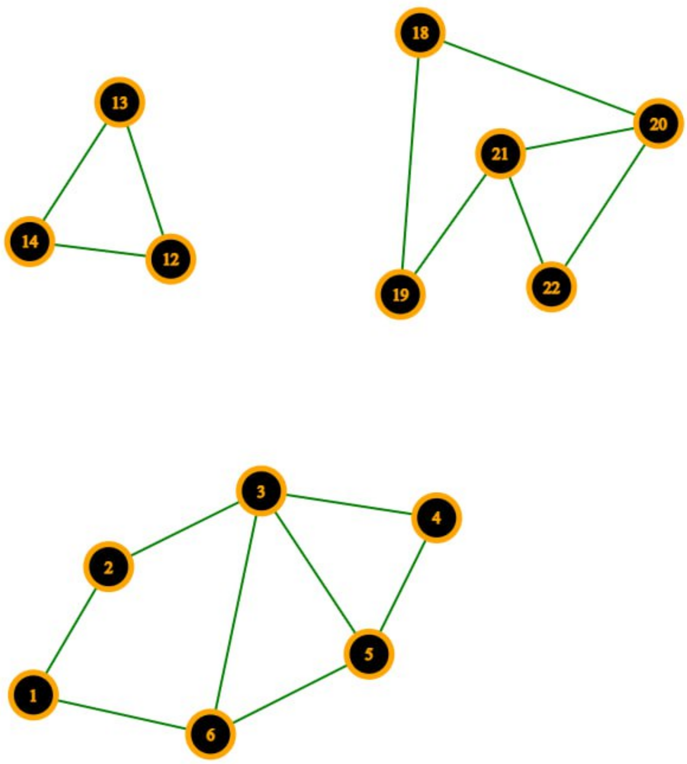
در گراف داده شده دو نوع یال داریم:

۱. یال هایی که در دوری نیامده اند

۲. یال هایی که در حداقل یک دور آمده اند

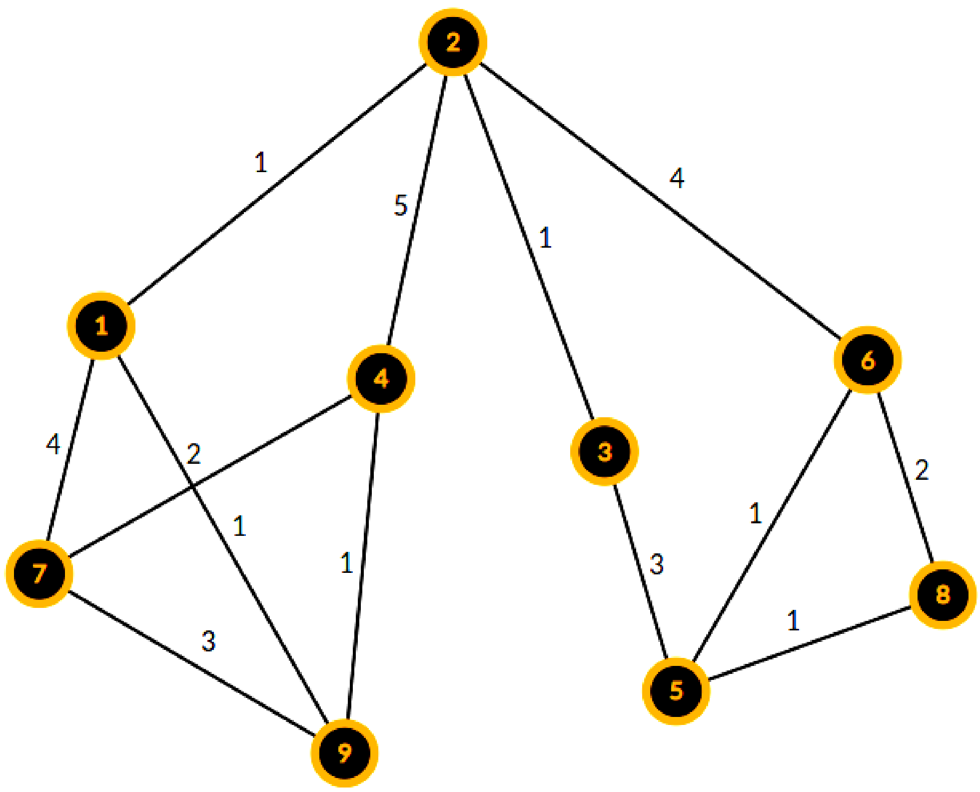
یال هایی که در دوری نیامده حتمن میبایست تعمیر شوند چرا که در غیر این صورت گراف ناهمبند میشود(چراکه اگر تعمیر نشود و گراف همبند شود میتوان دوری پیدا کرد که شامل این یال شود که تناقض است). پس بدون لطمه به کلیت همه یال هایی که در دوری نیامده اند را حذف میکنیم. حال میبایست یال های باقی مانده را طوری تعمیر کنیم که هر مولفه گراف زیر همبند بماند.

مولفه شامل راس ۱۲ چون میبایست دقیقن ۲ یالش را تعمیر کنیم ۳ حالت دارد. مولفه شامل راس ۱۸ کلن ۱۱ حالت دارد که با حالت بندی رو تعمیر شدن یا نشدن یال ۲۱ به ۲۰ به دست میاید. مولفه شامل راس ۱ هم ۲۹ حالت دارد که با حالت بندی روی تعمیر شدن یا نشدن یال های ۳ به ۵ و ۳ به ۶ به دست میاید. پس با توجه به این که تعمیر یال ها در هر مولفه مستقل از مولفه های دیگر است تعداد روش های تعمیر کردن یال ها برابر $۳ \times ۱۱ \times ۲۹$ میشود.



۴- گزینه‌ی ۱

اگر گراف را مرتب تر نگاه کنیم، میبینیم که راس ۲ برشی است و باید حتما در مسیر ۵ به ۷ از آن عبور کنیم. با حالت بندی ساده متوجه خواهیم شد ، کوتاه ترین مسیر از راس ۵ به راس ۲، طول ۴ دارد. و کوتاه ترین مسیر از راس ۲ به راس ۷ طول ۵ دارد.



۵- گزینه‌ی ۱

با توجه به فرض سوال که احتمال وقوع هر حالتی میشود یک تقسیم بر کل حالات میتوان به ازای هر حالت از قرار گیری توپ ها درون کیسه ها عدد مورد نظر را حساب کرد و جمع تمام حالات را تقسیم بر تعداد کل حالات مطلوب کرد و جواب مساله را بدست اورد. حالا برای پیدا کردن جمع عدد مورد نظر برای هر حالت زاویه دیدمان را کمی تغییر میدهیم و به ازای هر توپ قرمز و آبی حساب میکنیم در چند حالت این جفت را به جواب نهایی اضافه خواهیم کرد. (دو گونه شماری میزنیم.) پس به ازای هر جفت توپ قرمز و آبی در اول فیکس میکنیم در کدام یک از کیسه ها میایند (توپ آبی باید سمت چپ توپ قرمز باشد) و باید بقیه توپ ها را طوری بچینیم که در هر کدام از چهار کیسه دیگر حداقل یک توپ قرار بگیرد. حال بدون از دست دادن کلیت فرض کنید جفت توپ مورد نظر را در کیسه ۱ قرار میدهیم، در این صورت میتوان یک معادله ای نوشت که مفهومات زیر را بیان میکند: تعداد توپ های در کیسه‌های دو تا پنج، تعداد توپ های سمت چپ توپ آبی کیسه اول، تعداد توپ های بین توپ آبی و قرمز کیسه اول و تعداد توپ های سمت راست توپ قرمز کیسه اول.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = 8$$

۳ تا از a_i ها بزرگتر مساوی صفر هستن و بقیه بزرگتر مساوی یک. جواب این معادله برابر است با جواب معادله‌ای با ۷ متغییر و مجموع ۴. جواب های این معادله را می‌توان متناظر کرد با آرایه‌های به طول ۱۰ از ۰ و ۱ که ۶ تا ۱ و ۴ تا صفر داشته باشند. پس جواب $\binom{10}{6}$ است. (تناظر به این شکل است که هرکدام از این آرایه ها توسط یک ها به ۷ قسمت تقسیم می‌شوند که مجموع طول قسمت ها ۴ است و قسمت iام نشان دهنده‌ی مقدار a_i است) پس جمع عدد مورد نظر برای تمام حالات میشود: $5 \times 25 \times 8! \times \binom{10}{6}$

تعداد کل حالات هم میشود: $10! \times \binom{9}{4}$

که با تقسیم این دو عبارت میتوانید به عدد $\frac{125}{54}$ برسید.

۶- گزینه‌ی ۴

راه ۱: راه‌های رنگ آمیزی توپ‌ها را تناظر می‌دهیم به دنباله‌های به طول $n+1$ از اعداد ۱،۲ و ۳ که عدد ۳ حداقل یکبار در دنباله ظاهر شده است. اگر تعداد توپ‌های آبی و قرمز x باشد، آنگاه $x+1$امین عدد دنباله را برابر ۳ قرار می‌دهیم، x عدد قبل دنباله را با اعداد یک و دو متناظر با آبی و قرمز بودن توپ‌ها پر می‌کنیم و $n-x$ عدد بعد اولین ۳ را متناظر با سبز و زرد و بنفش بودن توپ‌ها با اعداد یک و دو و سه پر می‌کنیم. تعداد این دنباله‌ها برابر $3^{n+1}-2^{n+1}$ است.

راه ۲: اگر روی طول پریفیکس حالت بندی کنیم، آنگاه جواب برابر است با $\sum_{i=0}^{n} 2^i \times 3^{n-i}$ که یک دنباله هندسی است با قدر نسبت $\frac{2}{3}$ و حاصل جمع اعضای آن برابر $3^{n+1}-2^{n+1}$ است.

۷- گزینه‌ی ۴

برای محاسبه میانگین ابتدا جمع همه حالات را حساب می‌کنیم و سپس بر تعداد کل حالات تقسیم می کنیم. دستگاه ما به ازای هر ورودی ضرب تعداد بیت های ۰ در تعداد بیت های ۱ را محاسبه می‌کند، به بیان دیگر تعداد جفت جایگاه هایی را می‌شمارد که مقدار نابرابر دارند.

پس می توان به ازای هر جفت از بیت ها محاسبه کرد که در کل چند بار شمرده می‌شوند و سپس تمامی این عددها را باهم جمع زد. بر حسب تقارن می توان مشاهده کرد که جفت های مختلف متناظر هستند پس کافی است صرفا به ازای یک جفت بیت محاسبه کنیم.

به ازای یک جفت از بیت ها مثل i و j $۲^{۱۴}$ حالت داریم؛ چراکه خود i و j به دو حالت می‌توانند متفاوت باشند و ۱۳ بیت دیگر $۲^{۱۳}$ حالت دارند.

پس مجموع کل برابر خواهد بود با $۲^{۱۴} \times \binom{۱۵}{۲}$ و چون کل حالات $۲^{۱۵}$ است جواب نهایی برابر می‌شود با:

$$\frac{\binom{۱۵}{۲} \times ۲^{۱۴}}{۲^{۱۵}} = ۵۲/۵$$

۸- گزینه‌ی ۱

فرض کنید آقا مهدی نمیتوانست در سوال کاری کند! در این صورت هر بار که توپ با زمین برخورد میکرد ارتفاعش نصف میشد، پس جواب سوال تغییر یافته برابر $\lfloor lg(۱۴۰۱) \rfloor + ۱$ که $lg(n)$ برابر لگاریتم n در مبنای ۲ است.

حال میخواهیم ثابت کنیم آقا مهدی در هر مرحله ای عملیات ذکر شده را انجام دهد(۴ برابر کردن ارتفاع توپ)، حاصل جواب به علاوه ۲ میشود.

میدانیِم اگر آقا مهدی هر بار عملیات ذکر شده را در ابتدا انجام دهد، حاصل جواب به علاوه دو میشود(چرا که $lg(۴ \times n) = lg(n) + lg(۴) = lg(n) + ۲$)، حال اگر آقا مهدی در مرحله iام ارتفاع توپ را ۴ برابر کند و $i > ۱$، آقا مهدی میتواند عملیات خود را در مرحله $i - ۱$ انجام دهد و در این صورت، ارتفاع توپ در مرحله iام همچنان ۴ برابر میماند، پس میتوان بدون کم شدن از کلیت همه عملیات ها را در ابتدا انجام داد و بنا بر لمی که قبلا ثابت شد، اکنون میتوان گفت هر بار انجام عملیات جواب را ۲ تا زیاد میکند.

پس جواب نهایی برابر $\lfloor lg(۱۴۰۱) \rfloor + ۱ + ۲ \times ۳ = ۱۷$ است!

۹- گزینه‌ی ۲

به ازای هر بیت حساب می کنیم در چند مقدار $wef(G)$ حضور دارد. فرض کنید می خواهیم مقدار مذکور را برای بیت i ($0 \leq i \leq 9$) با ارزش 2^i حساب کنیم. این حرف به این معناست که باید بین فرد جفت از رؤس u و v که بیت iم در آنها حضور دارد یال داشته باشیم و شرطی روی بقیه یالها وجود ندارد. دقت کنید چون ۱۰۲۴ رأس با شماره های ۰ تا ۱۰۲۳ داریم دقیقاً نصف این رؤس شامل بیت i هستند و یعنی بین این $\binom{\frac{1024}{2}}{2} = \binom{512}{2}$ یال باید دقیقاً نصف آنها حضور داشته باشند و روی بقیه یال ها شرطی وجود ندارد. دقت کنید به ازای هر مجموعه ناتهی، دقیقاً نصف آنها فرد عضوی هستند، لذا چون مجموعه یال هایی که دو انتهایشان دارای بیت i باشند ناتهی هست دقیقاً نصف گراف ها فرد یال از یال‌های مذکور دارند بنابراین نصف گراف‌های ساده ۱۰۲۴ رأسی wefی دارند که شامل بیت i است، بنابراین، میانگین wef برابر است با $\sum_{i=0}^{9} \frac{1}{2} \times 2^i = \frac{1023}{2}$ لذا گزینه درست، گزینه دو است.

۱۰- گزینه‌ی ۱

شرط لازم و کافی این است که هر دو نفر که دستمال ندارند، فاصله‌شان حداقل ۳ باشد. (چرا؟) حال روی این که چند نفر دستمال ندارند حالت‌بندی می‌کنیم:

۰: ۱

۱: ۱۰

۲: ۲۵

۳: ۱۰

پس جواب ۴۶ است.

۱۱- گزینه‌ی ۳

میتوان دید الگوریتم ذکر شده در مرحله ۳، آرایه را یک واحد به سمت راست شیفت دوری میدهد، پس در مرحله ۲ تا ۵، آرایه T بار به سمت راست شیفت دوری خواهد خورد.

اما حتی بدون توجه کردن به این تیکه از الگوریتم، میتوان دید در هر مرحله مقادیر اعضای آرایه تغییری نمیکند، پس جواب برابر تعداد اعداد فرد درون آرایه میباشد.

۱۲- گزینه‌ی ۵

میتوان گراف را به صورت یک درخت ریشه دار از راس راس ۱ دید که هر نفر کارت پدرش را دیده باشد. در آن صورت اگر راسی بخواهد فاشیست باشد، تمام رئوس زیر درخت آن هم فاشیست هستند. (به شرط آن‌که تمام یال‌های آن زیر درخت لیبرال اعلام شده باشند)

مقدار $f(x)$ را تعریف می‌کنیم جواب به ازای زیر درخت راس x اگر تمام یال‌های در آن زیر درخت لیبرال اعلام شده باشند. برای محاسبه‌ی مقدار $f(v)$ می‌توان روی فاشیست یا لیبرال بودن v حالت بندی کرد و اگر فاشیست باشد فقط یک حالت داریم، در غیر این صورت هر حالتی از زیر درخت بچه هایش معتبر خواهد بود:

$$f(v) = ۱ + \sum_{u \in Chil_v} f(u)$$

که $Chil_v$ مجموعه‌ی تمام بچه‌های راس v است.

$$f(۷) = ۵$$
$$f(۲) = ۴$$
$$f(۱۲) = ۹$$
$$f(۱۰) = ۱۹$$
$$f(۳) = ۲۰$$

از بین ۴ و ۵ دقیقا یک نفر فاشیست است.

۱ اگر ۴ لیبرال باشد: ۵ فاشیست است. در نتیجه ۷ و ۸ و ۹ هم باید فاشیست باشند. ۶ می‌تواند فاشیست یا لیبرال باشد مستقل از حالت بقیه. ۱ قطعا لیبرال هست. پس تعداد حالات می‌شوند:

$$۲ \times f(۳) \times f(۲) = ۱۶۰$$

۲ اگر ۴ فاشیست باشد: ۵ لیبرال هست و ۶ فاشیست.

۱.۲ اگر ۱ لیبرال باشد:

$$f(۳) \times f(۲) \times f(۷) = ۴۰۰$$

۲.۲ اگر ۱ فاشیست باشد:

$$f(۷) = ۵$$

پس جواب می‌شود $۱۶۰ + ۵۰۰ + ۵ = ۵۶۵$.

۱۳- گزینه‌ی ۵

۶ فرد در جایگاه ۱، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ را نگاه کنید! میدانیم دقیقا یک پریفیکس از آنها لیبرال و باقی آنها فاشیست هستند. (این پریفیکس و سافیکس میتواند تهی باشد!)

حال اگر فرد در جایگاه ۳(۸) لیبرال باشد، فرد در جایگاه ۲ و ۱ نیز لیبرال هستند و برای باقی افراد ۶ حالت وجود دارد(هیچ دیتایی فکت اول پاسخنامه نمیتواند کمک کننده باشد)

اگر فرد در جایگاه ۳ فاشیست باشد اما فرد در جایگاه ۲ لیبرال باشد نیز مانند حالت بالا ۶ حالت مختلف وجود دارد.

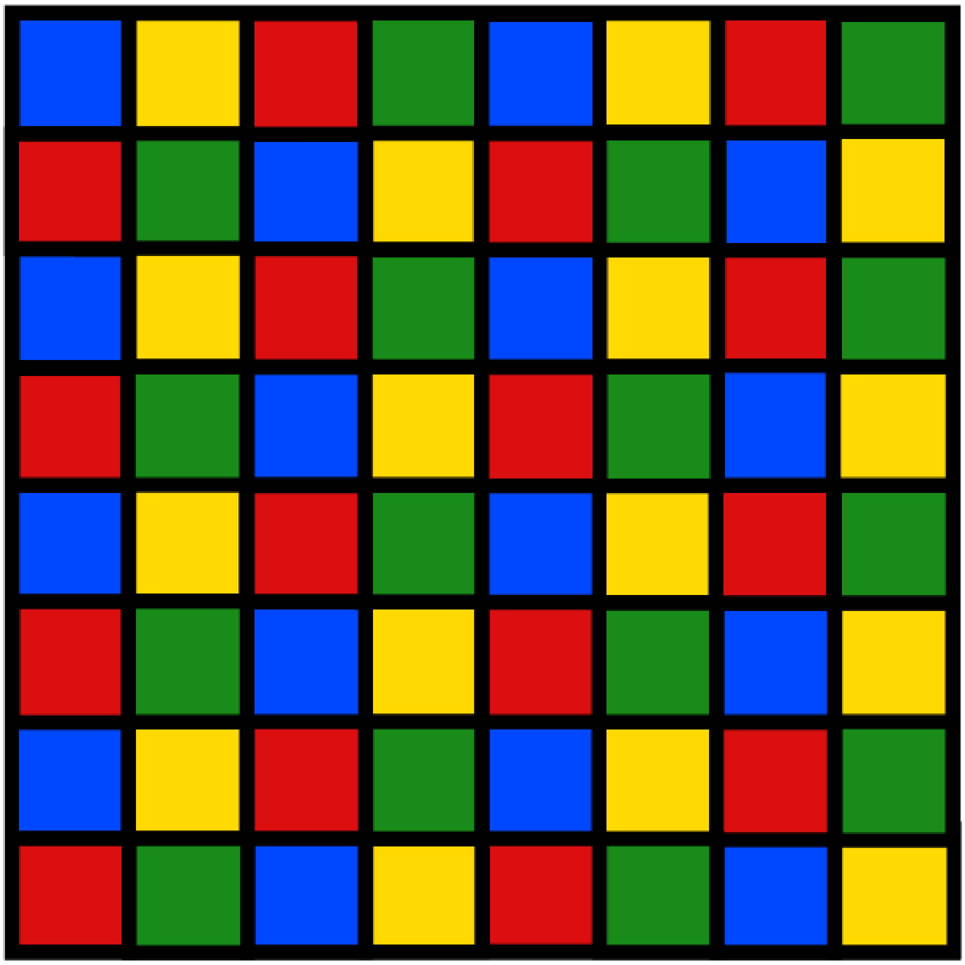
اما اگر هر دو فرد در جایگاه ۲ و ۳ فاشیست باشند(حالتی که فرد حاضر در جایگاه ۲ فاشیست باشد اما نفر سوم لیبرال ممکن نیست) یا هر دو نفر در جایگاه های ۱ و ۴ لیبرالند، یا فقط فرد در جایگاه ۱ لیبرال است و یا هر دو فاشیستند، همچنین فارغ از حالت این ۲ نفر، باقی افراد قطعا فاشیست هستند. (۳ حالت)

پس در کل ۱۵ حالت ممکن وجود دارد.(همچنین میتوان به روش های دیگر حالت بندی کرد و به جواب مشابه رسید)

باتشکر از جناب آقای شاهرضایی بابت طرح این سوال زیبا :)

۱۴- گزینه‌ی ۳

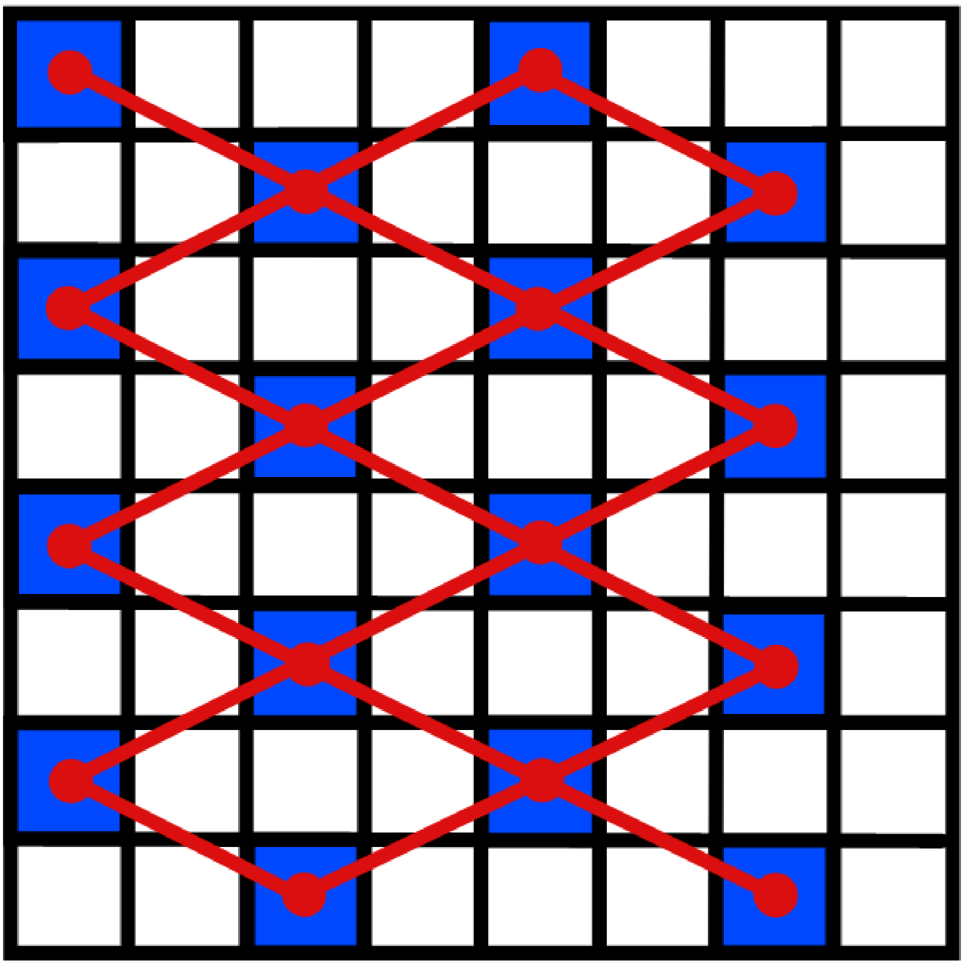
ابتدا صفحه را با ۴ رنگ آبی، زرد، قرمز، سبز مانند شکل ۱ رنگ میکنیم.



میدانیم اگر مهره خر در خانه ای با رنگ x باشد، پس از حرکت باز نیز در خانه ای به رنگ x خواهد بود.از طرفی میتوان گفت از هر خانه ای به رنگ x، مهره خر میتواند به هر خانه دیگری به رنگ x طی چندین حرکت برود؛ به ازای هر خانه یک راس قرار می دهیم و دو راس را وصل می کنیم اگر مهره خر با یک حرکت از راس اول به راس دوم و با یک حرکت از راس دوم به راس اول برود. اگر گراف ساخته شده از راس های یک رنگ همبند باشد مهره خر میتواند از هر خانه یک رنگ به هر خانه دیگری از آن رنگ برود (شکل ۲ گراف خانه های آبی را نشان میدهد که همبند میباشد. به ازای سه رنگ دیگر گراف کاملا مشابهی مانند رنگ آبی ساخته میشود.)

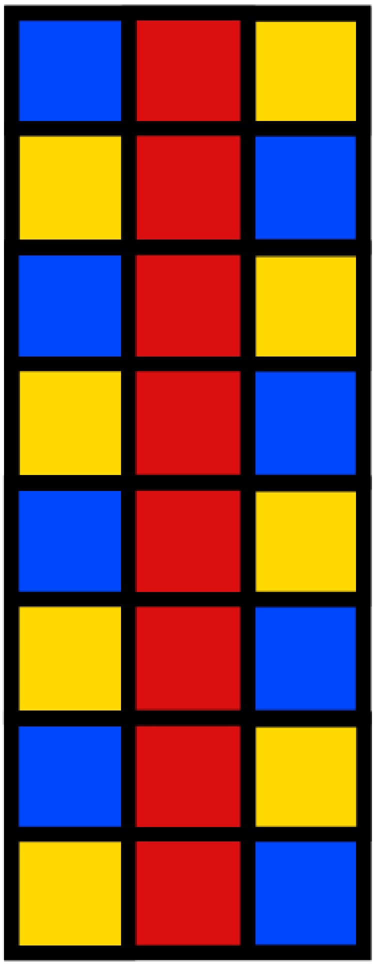
پس هر مهره خر در خانه ای به رنگ x میتواند فقط مهره های در خانه های رنگ x را تقریبا تهدید بکند و همچنین میتواند تمامی خانه های رنگ x را تقریبا تهدید کند. پس در هر رنگ حداکثر ۱ مهره خر میتواند وجود داشته باشد. هر رنگ دقیقا ۱۶ خانه دارد پس به ازای هر رنگ ۱۷ حالت داریم که

جواب برابر با $۱۷^۴$ میشود.



۱۵- گزینه‌ی ۱

مانند شکل صفحه را با ۳ رنگ آبی، زرد و قرمز رنگ می کنیم.



به ازای هر خانه قرمز x خانه y ای وجود ندارد که مهره خر در خانه y بتواند مهره خانه x را تهدید کند و بالعکس. پس هر خانه قرمز به طول مستقل ۲ حالت خواهد داشت که ۸ خانه قرمز داریم پس $۲^{۸} = ۲۵۶$ حالت خواهند داشت.

به ازای هر خانه آبی و زرد مانند بخش قبلی سوال اگر مهره خر در خانه ای به رنگ x باشد میتواند خانه ای به رنگ x را فقط تهدید کند، پس به ازای هر رنگ مستقل مسئله را حل میکنیم. ابتدا به ازای رنگ آبی میدانیم خانه رنگ آبی در سطر i ام فقط خانه رنگ آبی سطر $i - ۱$ و $i + ۱$ را میتواند تهدید کند. F_i را تعریف میکنیم تعداد حالاتی که مهره خر در خانه های آبی سطر اول i قرار دهیم به طوری که همدیگر را تهدید نکند.

میدانیم به ازای $i = ۱$ مقدار $F_۱$ برابر با ۲ است (در خانه آبی سطر اول مهره بگذاریم یا نه).

به ازای $i = ۲$ مقدار $F_۲$ برابر با ۳ است (در خانه آبی سطر دوم بگذاریم یا در خانه آبی سطر اول بگذاریم یا در هیچکدام نگذاریم).
به ازای $i > ۲$ یا در خانه آبی سطر i ام مهره قرار نمی دهیم که بقیه سطر ها تعداد روش های قرار دادن مهره $F_{i-۱}$ خواهد بود. یا در خانه آبی سطر i مهره قرار میدهیم که در خانه آبی سطر $i - ۱$ نمیتوانیم قرار بدهیم و به ازای $i - ۲$ سطر اول تعداد حالت هایی که داریم برابر با $F_{i-۲}$ است (زیرا مهره سطر i نمیتواند هیچکدام از مهره های $i - ۲$ سطر اول را تهدید کند پس مستقل چیده میشوند).
پس: $F_i = F_{i-۱} + F_{i-۲}$ است. به ازای $i = ۸$ مقدار $F_۸$ طبق رابطه بازگشتی برابر با ۵۵ میشود. از طرفی به طرز مشابه ای میتوان گفت تعداد روش های قرار دادن مهره در خانه های زرد نیز برابر با ۵۵ است پس جواب برابر با: $۲۵۶ \times ۵۵ \times ۵۵ = ۲۵۶ \times ۳۰۲۵$ میشود.