

در این قسمت، با یک نمونه از کاربردهای توابع متغیرهای تصادفی یعنی تبدیل توزیع‌های آماری به یک دیگر آشنا خواهیم شد و دو نمونه از این تبدیل‌ها را به صورت عملی پیاده‌سازی خواهیم کرد.

تبدیل لگاریتمی یکی از مهم‌ترین و ساده‌ترین تبدیل‌ها به شمار می‌رود که در موارد مختلف مانند کاهش چولگی یک توزیع آماری کاربرد دارد. همچنین از این تبدیل، می‌توان برای تبدیل یک توزیع یکنواخت به توزیع نمایی استفاده کرد. برای مثال، اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت $X \sim U(0, 1)$ باشد، و تابع Y را به صورت $Y = -\ln(X)$ در نظر بگیریم، آنگاه برای توزیع Y خواهیم داشت:

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|, \quad f_X(x) = 1 \text{ for } x \in [0, 1], \quad \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{y} e^{-\frac{y}{2}} \implies f_Y(y) = \frac{1}{y} e^{-\frac{y}{2}} \implies Y \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{2})$$

بنابراین Y از یک توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ پیروی می‌کند. در ادامه، این موضوع را به صورت عملی اثبات می‌کنیم.

۱- توزیع یکنواخت مربوط به متغیر تصادفی $X \sim U(0, 1)$ را با 10^6 نمونه شبیه‌سازی کنید.

۲- با استفاده از توابع موجود، متغیر $Y = -\ln(X)$ را تشکیل دهید.

۳- تابع چگالی متغیر نمایی متناظر با Y را تشکیل دهید و در یک شکل، در کنار توزیع عملی متغیر Y ترسیم کنید و نتیجه را گزارش کنید.

همانطور که مشاهده شد، از تبدیل لگاریتمی می‌توان برای تبدیل توزیع یکنواخت به نمایی استفاده کرد. همچنین می‌توان از تبدیل‌های مختلفی برای تبدیل توزیع یکنواخت به توزیع نرمال نیز بهره برد. یکی از معروف‌ترین این تبدیل‌ها، تبدیل باکس-مولر (Box-Muller) است.

transform) است. اگر متغیرهای تصادفی U_1 و U_2 ، دو متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت $U(0, 1)$ باشند، آنگاه، تبدیل باکس-مولر به صورت زیر خواهد بود:

$$Z_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cdot \cos(2\pi U_2)$$

$$Z_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cdot \sin(2\pi U_2)$$

که دو متغیر تصادفی حاصل شده Z_1 و Z_2 ، دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع نرمال استاندارد هستند. در ادامه، این تبدیل را به صورت عملی بررسی می‌کنیم.

۴- توزیع‌های یکنواخت $U_1 \sim U(0, 1)$ و $U_2 \sim U(0, 1)$ را با 10^6 نمونه شبیه‌سازی کنید.

۵- توزیع‌های Z_1 و Z_2 را با استفاده از روابط بیان شده تشکیل دهید.

راهنمایی: ابتدا دو متغیر $R = \sqrt{-2 \ln(U_1)}$ و $\theta = 2\pi U_2$ را تشکیل دهید و با استفاده از آن‌ها، Z_1 و Z_2 را بسازید.

۶- تابع چگالی متغیر نرمال استاندارد متناظر با Z_1 و Z_2 را تشکیل دهید و در دو شکل، در کنار توزیع عملی Z_1 و Z_2 ، رسم کنید و نتیجه را گزارش کنید.