۳. کاربرد حد مرکزی در توزیع برنولی — ۳۵ نمره

یک آزمایش برنولی را با احتمال موفقیت p در نظر بگیرید. اگر X_i را خروجی i_امین آزمایش و $S_n = X_۱ + X_۲ + ... + X_n$ در نظر بگیریم، S_n یک توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و p خواهد داشت.

۱. یک توزیع دو جمله‌ای با $n = ۲۷۰$ و $p = ۰/۳$ را در نظر بگیرید. نمودار این توزیع را رسم کنید. (دقت کنید در محور افقی، همه مقادیر ممکن را در نظر بگیرید.)

۲. برای داشتن یک نمودار معیار، این توزیع را استاندارد کنید. (این کار را با کم کردن مقادیر x از میانگین و تقسیم آنها بر انحراف معیار انجام دهید.)

۳. حال نمودار توزیع نرمالی با میانگین ۰ و انحراف معیار ۱ ایجاد کنید و به نمودار بالا اضافه کنید. چه مشاهده می‌کنید؟

۴. مجموع طول میله‌های نمودار چند جمله‌ای را محاسبه کنید. آیا این مقدار برابر ۱ می‌باشد؟ با این وجود به نظر شما چرا چنین چیزی در نمودار بالا مشاهده می‌شود؟

۵. برای حل این مشکل، باید تابع توزیع نرمال در یک ضریبی ضرب شود. برای بدست آوردن این ضریب از روش ریمان کمک بگیرید:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N}\sum_{i=۰}^{N} f(x_i) \quad ; \quad x_i = a + i\frac{b-a}{N}$$

ضریب به‌دست‌آمده را به همراه انحراف معیار توزیع بخش ۱ گزارش کنید. چه مشاهده می‌کنید؟ توضیح دهید.

توزیع دو جمله‌ای و نرمال را بعد از اعمال این ضریب در یک شکل رسم کنید. آیا مشکل برطرف شده است؟

با توجه به نتایج بالا می‌توان گفت که می‌شود از توزیع نرمال به عنوان یک تقریب برای توزیع دوجمله‌ای استفاده کرد. به بیان ریاضی داریم:

$$Binomial(n,p,k) \approx \frac{۱}{\sqrt{np(۱-p))}}\phi(\frac{k-np}{\sqrt{np(۱-p))}})$$

- $\phi(x)$ همان توزیع نرمال استاندارد می‌باشد.

حال در ادامه از این نتیجه بهره خواهیم برد.

۶. احتمال دقیقا ۵۵ بار رو آمدن یک سکه سالم را یک بار به کمک توزیع دوجمله‌ای و یک بار به کمک توزیع نرمال بدست آورید.

با تعمیم قضیه بالا داریم:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \int_a^b \phi(x)\,dx$$

۷. حال احتمال تعداد ۴۰ الی ۶۰ بار رو آمدن سکه سالم را به کمک قضیه بالا بدست آورید.