

## ۱. نمونه برداری و حد مرکزی

۳۵ نمره

در این سوال می‌خواهیم قضیه حد مرکزی و ویژگی‌های آن را به صورت تجربی ببینیم و با دانسته‌های تئوری آن‌ها را تحلیل کنیم. به این منظور ابتدا سه توزیع زیر را در نظر بگیرید:

- توزیع پواسون با نرخ ۱۰
- توزیع نمایی با نرخ  $\frac{1}{4}$
- توزیع هندسی با احتمال موفقیت  $\frac{1}{5}$

۱. برای هر یک از توزیع‌ها میانگین و واریانس آن‌ها را گزارش کنید.

۲. برای هر توزیع، به ازای سه اندازه نمونه ۳۰، ۳۰۰ و ۳۰۰۰ هرکدام ۱۰۰۰ بار نمونه برداری کنید و سپس هیستوگرام میانگین این نمونه‌ها را رسم کنید. (دقت کنید که طول گام محور افقی همه‌ی نمودارها یکسان باشند تا قابل مقایسه شوند.)

۳. برای هر توزیع بالا، میانگین و خطای استاندارد را گزارش کنید. با افزایش اندازه نمونه، چه تغییری در این پارامترها مشاهده می‌کنید؟

۴. به ازای هر توزیع به‌دست‌آمده، یک توزیع نرمال با میانگین و انحراف معیار همان توزیع رسم کنید و به نمودارهای بالا اضافه کنید. چه مشاهده می‌کنید؟ به نظر شما با افزایش سایز نمونه، توزیع‌های به‌دست‌آمده به چه تابعی میل خواهند کرد؟ پارامترهای این تابع وابسته به چه پارامترهای توزیع‌های اولیه می‌باشد؟

۵. حال فرض کنید که به احتمال  $\frac{1}{4}$  یک توزیع را از سه توزیع بیان شده در ابتدای سوال انتخاب می‌کنیم و سپس از آن توزیع به اندازه سایز نمونه، نمونه برمی‌داریم. این کار را ۱۰۰۰ بار و به ازای سه تعداد نمونه اشاره شده انجام دهید و سپس توزیع میانگین نمونه‌ها را رسم کنید، چه مشاهده می‌کنید. میانگین و خطای استاندارد این میانگین‌ها را گزارش کنید.

۶. آیا می‌توانید میانگین و انحراف معیار نمونه‌ها را پیش از نمونه برداری و با توجه به توزیع‌های اولیه بدست‌آورد؟ اگر بله فرمول آن را بنویسید و این کار را برای بخش قبل انجام دهید.

۷. به توزیع‌های بدست آمده در بخش ۵، یک توزیع نرمال با میانگین و واریانس آن توزیع اضافه کنید. با توجه به نتایج به‌نظر شما توزیع‌های حاصل از بخش ۴، مشترکاً نرمال می‌باشند؟ آیا این قضیه برای همه‌ی توزیع‌های حاصل از قضیه حد مرکزی برقرار می‌باشد؟ تحلیل کنید.