

۳. بی‌حافظگی توزیع نمایی

۱۵ نمره

فرض کنید شما کارمند یک فروشگاه هستید که به طور متوسط، هر یک ربع، یک مشتری وارد آن می‌شود و همچنین، زمان بین ورود هر مشتری به فروشگاه، از توزیع نمایی پیروی می‌کند. یکی از همکاران شما ادعا می‌کند که با توجه به اینکه به طور میانگین، هر یک ربع، یک مشتری وارد فروشگاه می‌شود، اگر تا ۱۲ دقیقه مشتری جدیدی وارد فروشگاه نشده باشد، آن‌گاه به احتمال زیاد، به زودی یک مشتری جدید وارد فروشگاه می‌شود. در این سوال، قصد داریم شرایط مذکور را به صورت عملی پیاده‌سازی کنیم و در مورد صحت ادعای بیان‌شده نتیجه‌گیری کنیم. برای این‌کار، بازه زمانی بین ورود مشتریان را شبیه‌سازی خواهیم کرد. فرض کنید ساعت کاری روزانه فروشگاه ۸ ساعت است و بازه زمانی بین ورود مشتریان در یک روز، از یک توزیع نمایی پیروی می‌کند. (ورود هر مشتری به فروشگاه را یک آزمایش تصادفی یکسان در نظر بگیرید).

۱- تابعی پیاده‌سازی کنید که پارامترهای یک توزیع نمایی را به همراه تعداد نمونه به عنوان ورودی دریافت کند و توزیع نمایی متناظر را بازگرداند.

۲- تابعی پیاده‌سازی کنید که مقادیر توزیع نمایی شبیه‌سازی‌شده را دریافت کند و در توزیع، برای بازه‌های زمانی بین ورود مشتریان که بیش از ۱۲ دقیقه است، مقدار زمان بعد از ۱۲ دقیقه تا ورود مشتری جدید را حساب کند و در یک آرایه واحد ذخیره کند.
- دقت کنید که در پیاده‌سازی تابع، نباید بازه‌هایی که زمان ورود مشتری از ۸ ساعت کاری گذشته است را در نظر بگیرید.

۳- با استفاده از توابع پیاده‌سازی‌شده، میانگین و هیستوگرام زمان ورود مشتری بعد از ۱۲ دقیقه را در کنار میانگین و هیستوگرام توزیع نمایی با پارامترهای صورت سوال و تعداد $100 \times m$ نمونه به ازای $m = 10, 100, 1000$ رسم کنید و توزیع‌های به دست‌آمده را مقایسه کنید. (برای هر مقدار m ، دو شکل در نظر بگیرید؛ یک شکل برای توزیع نمایی و یک شکل برای توزیع زمان‌های ورود مشتری بعد از ۱۲ دقیقه و دو شکل را در کنار هم به تصویر بکشید).

۴- با توجه به نمودارهای حاصل و با توجه به خاصیت بی‌حافظگی توزیع نمایی، در مورد رد فرض فرد همکار در صورت سوال توضیح دهید و نتیجه‌گیری کنید.

۵- احتمال آن‌که وقتی که بازه زمانی ورود بین دو مشتری از ۱۲ دقیقه بیشتر شده‌است، مشتری جدید ۱۵ دقیقه بعد از مشتری قبلی وارد فروشگاه شود را یک‌بار به صورت عملی و با استفاده از توزیع زمان ورود مشتریان بعد از ۱۲ دقیقه برای $m = 1000$ و یک‌بار به صورت تئوری، با استفاده از خاصیت بی‌حافظگی توزیع نمایی به‌ست آورید و مقادیر حاصل را مقایسه کنید.