

۲. کاربردهای خطای میانگین مربعات

۳۰ نمره

در درس خواندید که با مشاهده متغیر تصادفی X می‌توان متغیر تصادفی Y را پیش‌بینی کرد. به طوری که اگر $g(X)$ تابعی باشد که برای پیش‌بینی Y استفاده می‌شود، این تابع بهترین تخمینگر Y است اگر $E[(Y - g(X))^2]$ کمینه باشد.

روش‌های مشابه این روش برای تخمین مجهول‌های یک مساله وجود دارد، که در این سوال با دو مورد دیگر آشنا می‌شوید:

- فرض کنید تابع $y = f(x) = ax + b$ وجود دارد، درحالی که ما مقادیر پارامترهای a و b را نمی‌دانیم. با مشاهده جفت نقطه‌های (x, y) می‌توان به تخمین خوبی از این تابع رسید. به این فرآیند رگرسیون خطی می‌گویند. برای تخمین این پارامترها، تابع خطای میانگین مربعات را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{MSE}_{\text{regression}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$$

به طوری که x_i و y_i مشاهده‌های ما می‌باشند.

- فرض کنید که می‌خواهید یک نقطه را به عنوان مرکز تعدادی نقطه در صفحه مختصات معرفی کنید، یک راه آن استفاده از خطای میانگین مربعات هست، که برای این مساله به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\text{MSE}_{\text{center}} = \frac{1}{n} \sum (x_i - c_x)^2 + (y_i - c_y)^2$$

به طوری که x_i ها نقاط ما و c مرکز آن‌هاست، که می‌خواهیم بدست آوریم.

می‌دانیم که این توابع، توابعی درجه دو می‌باشند. مقدار کمینه آن‌ها در نقطه‌ای اتفاق می‌افتد که مشتق آن‌ها برابر صفر شود. برای بدست آوردن مقادیر مطلوب دو مساله عنوان شده، نوت‌بوک MSE.ipynb را دنبال کنید و بخش‌های مشخص شده را تکمیل کنید.