

به نام خدا

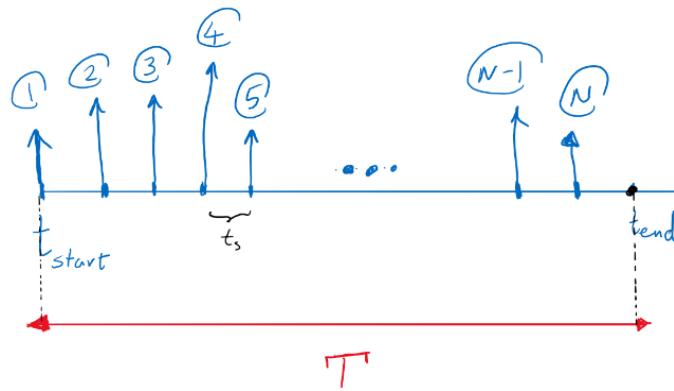
سیگنال ها و سیستم ها

تمرین کامپیوتری پنجم

بخش اول:

از آنجایی که شبیه سازی ها در محیط متلب و با کامپیوuter انجام می شود، همه می سیگنال هایی که در شبیه سازی ها با آن ها سروکار داریم سیگنال های گسسته است. لذا همه می نتایج باید با عنوانین مطرح شده در کلاس در حوزه می گسسته تطابق داشته باشد. اما همان گونه که چندین بار سر کلاس مطرح شد و در ادامه درس نیز خواهیم دید، دو حوزه می گسسته و پیوسته، روابط بسیار نزدیکی دارند و مفاهیم آنها با یکدیگر در تطابق است.

فرض کنید در MATLAB، در حوزه زمانی، یک سیگنال x به طول N سمپل و معادل T ثانیه داریم ($t_s = \frac{1}{f_s} = \frac{T}{N}$) و می خواهیم آن را به حوزه فوریه ببریم (به شکل زیر نگاه کنید). در واقع f_s فرکانس نمونه برداری و t_s فاصله زمانی بین دو سمپل را نشان می دهد. این دو پارامتر به ما می گویند که از سیگنال پیوسته اصلی به چه صورت نمونه برداری شده است و سیگنال گسسته می فعالی تولید شده است. برای رسم دقیق سیگنال در حوزه زمانی اگر بازه زمانی مربوط به سیگنال معلوم باشد $t = t_{start}: t_s: t_{end} - t_s$ به طوری که $t_{start} - t_{end} = T$ می توان به راحتی آن را با دستور $plot(t, x)$ (یا $stem(t, x)$) رسم کرد.



برای بردن سیگنال به حوزه فوریه از دستور $y = fftshift(fft(x))$ استفاده می کنیم. fft دستور اصلی است و $fftshift$ فقط بازه متقاضی حول فرکانس صفر را ایجاد می کند (مشابه آنچه که در درس در بخش سری فوریه گسسته مطرح شد). خروجی این دستور یعنی y یک بردار با N سمپل است که هر درایه آن یک عدد مختلط است لذا هر درایه یک اندازه و یک فاز دارد. نکته می مهم در اینجا این است که هر یک از این N عدد به دست آمده متعلق به چه فرکانسی می باشد؟

فرکانس ها به صورت $f = \frac{-f_s}{2} : \frac{f_s}{N} : \frac{f_s}{2} - \frac{f_s}{N}$ خواهند بود. بنابراین برای رسم اندازه می توان از دستور $\text{plot}(f, \text{angle}(y))$ و برای رسم فاز می توان از دستور $\text{plot}(f, \text{abs}(y))$ استفاده کرد.

راجع به بازه های در نظر گرفته شده (هایلایت سبز)، سه نکته زیر حائز اهمیت هستند:

نکته اول:

در کلاس برای تطابق با کتاب اپنهایم، کلمه ω فرکانس به ω اطلاق شد ولی در این تمرین کامپیوتری به $\frac{\omega}{2\pi}$ عنوان فرکانس می دهیم. دلیل این امر این است که از دست عدد π راحت شویم.

نکته دوم:

اگر خاطرتان باشد در کلاس گفتیم بیشترین فرکانس (از منظر تغییرات سریع زمانی) در حوزه گسسته فرکانس $\frac{1}{2}$ است که در اینجا می بینید جای آن عدد $\frac{f_s}{2}$ نشسته است. در واقع در سرتاسر درس سیگنال، نرخ نمونه برداری برابر $f_s = 1$ هرتز در نظر گرفته می شود (یک سمپل در هر ثانیه). از این نکته می توان نتیجه گرفت هر چه از سیگنال پیوسته در حوزه زمان با نرخ بالاتری نمونه برداری کنیم ($f_s > 1$)، در سیگنال گسسته به دست آمده، می توان فرکانس های بالاتر را نیز (در صورت وجود) مشاهده کرد چون بازه فرکانسی قابل مشاهده افزایش پیدا می کند. در حالت حدی، اگر نرخ نمونه برداری به سمت بی نهایت برود (یا به عبارت دیگر $(0 \rightarrow t_s)$ برود، عمل سیگنال گسسته به دست آمده با سیگنال پیوسته اصلی یکی خواهد بود و هر مولفه فرکانسی که در سیگنال اصلی بوده است، در سیگنال گسسته نیز مشاهده می شود. در این قسمت کاملا باید درک کرده باشید که در sampling (نمونه برداری) که یک سیگنال پیوسته را به یک سیگنال گسسته تبدیل می کند چه چیزی از بین می رود.

نکته سوم:

نکته ای آخر راجع به رزولوشن فرکانسی است که ایجاد شده است یعنی $\delta_f = \frac{f_s}{N}$ (هایلات سبز را نگاه کنید). اگر از رابطه ای که با هایلایت زرد رنگ مشخص شده است استفاده کنید می توان دید که رزولوشن فرکانسی برابر است با $\delta_f = \frac{1}{T}$ ، یعنی رزولوشن فرکانسی برابر با عکس طول زمانی سیگنال است و هیچ ربطی هم به نرخ نمونه برداری f_s ندارد. هرچه می خواهید نرخ نمونه برداری را افزایش دهید اما رزولوشن فرکانسی مدامی که طول زمانی سیگنال (T ثانیه) تغییری نکند هیچ تغییری نمی کند. حال ببینیم مفهوم رزولوشن چیست؟ رزولوشن فرکانسی گام های فرکانسی است که می توان در نظر گرفت تا سیگنال گسسته را در فضای فوریه توصیف کرد. این مفهوم را با یک مثال توضیح می دهیم. فرض کنید طول زمانی یک سیگنال $T = 1$ ثانیه است و نرخ نمونه برداری $f_s = 20 Hz$ است. بنابراین رزولوشن فرکانسی برابر $\delta_f = 1 Hz$ می شود و بازه فرکانسی که در حوزه فوریه می

سیگنال نمونه برداری شده می توان مشاهده کرد به صورت $f = -10 : 1 : 9$ هرتز خواهد بود (هایلات سبز).
اگر سیگنال اصلی حاوی دو سیگنال تک تن (تک فرکانس) به صورت

$$x_1(t) = \exp(1j * 2\pi * 5 * t) + \exp(1j * 2\pi * 8 * t)$$

باشد، طبیعتاً قله هایی در اندازه ای سیگنال در حوزه ای فوریه، در فرکانس های 5 و 8 هرتز مشاهده خواهید کرد.

حال فرض کنید سیگنال اصلی حاوی دو سیگنال تک تن به صورت

$$x_2(t) = \exp(1j * 2\pi * 5 * t) + \exp(1j * 2\pi * 5.1 * t)$$

باشد. در این حالت فقط یک قله در اندازه ای سیگنال در حوزه ای فوریه، در فرکانس 5 هرتز مشاهده خواهید کرد و دیگر توانایی تفکیک این دو سیگنال را در حوزه ای فوریه نخواهید داشت زیرا اختلاف فرکانس دو سیگنال تک تن کمتر از $1 Hz = \delta_f$ می باشد. بنابراین رزولوشن فرکانسی قدرت تفکیک پذیری فرکانسی را در حوزه ای فوریه نشان می دهد. حتماً این مثال را به عنوان "تمرین شماره ۱-۰" در نظر بگیرید و آن را در متلب شبیه سازی کنید و نتایج را گزارش کنید تا بهتر آن را درک کنید. بازه ای زمانی سیگنال را از $t_{start} = 0$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و $f_s = 20 Hz$ را در نظر بگیرید.

حال به سراغ تمارین می رویم. قبل از آن توجه داشته باشید در هر سوالی که از شما خواسته شده اندازه سیگنال در حوزه ای فوریه را رسم کنید، ماکریم خروجی را برابر یک در نظر بگیرید. برای این کار کافی است خروجی دستور $\text{fftshift}(\text{fft}(x))$ یعنی y را به $\text{max}(\text{abs}(y))$ تقسیم کنید. دلیل این است که دستور fft یک ضریب ثابتی به تبدیل فوریه اضافه می کند که برای ما اهمیتی ندارد. همچنین از دستورهای ylim و xlim به درستی استفاده کنید تا سیگنال ها به خوبی نمایش داده شوند.

تمرین ۱-۱

سیگنال $x_1(t) = \cos(10\pi t)$ را در نظر بگیرید.

الف) این سیگنال را در حوزه ای زمان با در نظر گرفتن بازه ای زمانی $t_{start} = -1$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 50 Hz$ رسم کنید.

ب) اندازه ای این سیگنال در حوزه ای فوریه را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید. آیا نتیجه به دست آمده با دانسته های شما تطابق دارد؟

تمرین ۱ (۲)

سیگنال $x_2(t) = \cos(30\pi t + \frac{\pi}{4})$ را در نظر بگیرید.

الف) این سیگنال را در حوزه زمان با در نظر گرفتن بازه زمانی $t_{start} = 0$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 100 \text{ Hz}$ رسم کنید.

ب) اندازه ای این سیگنال در حوزه فوریه را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید. آیا نتیجه به دست آمده با دانسته های شما تطابق دارد؟

ج) فاز این سیگنال در حوزه فوریه را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید. برای این کار ابتدا فاز را در فرکانس هایی که اندازه در آنها ناچیز است صفر کنید و سپس فاز را به صورت مضربی از π نمایش دهید. برای این کار از دستور زیر استفاده کنید. آیا نتیجه به دست آمده با دانسته های شما تطابق دارد؟

```
tol = 1e-6;  
y(abs(y) < tol) = 0;
```

```
theta = angle(y);
```

```
plot(f,theta/pi)  
xlabel 'Frequency (Hz)'  
ylabel 'Phase / \pi'
```

بخش دوم:

در تمرین کامپیوترا قبل، برای ارسال پیام، کدگذاری روی دامنه سیگنال اعمال شد، حال می خواهیم کدگذاری روی فرکانس داشته باشیم.

به عنوان مثال برای سرعت ارسال اطلاعات $\frac{bit}{sec} 1$ ، به جای بیت صفر سیگنال $x_0(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ را به مدت یک ثانیه و به جای بیت یک، سیگنال $x_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$ را به مدت یک ثانیه ارسال می کنیم. در گیرنده، برای رمز گشایی از سیگنال دریافتی، کافی است در هر یک ثانیه، سیگنال دریافتی را به حوزه فوریه ببریم (دستور fft) و در بین فرکانس های انتخابی اولیه، فرکانس اصلی سیگنال را پیدا کنیم و متناظر با آن بیت ارسالی را استخراج کنیم.

به عنوان یک مثال دیگر اگر بخواهیم سرعت ارسال اطلاعات $\frac{bit}{sec} 2$ باشد، برای ارسال 00 سیگنال $x_0(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ را به مدت یک ثانیه، برای ارسال 01 سیگنال $x_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$ را به مدت یک ثانیه، برای ارسال 10 سیگنال $x_2(t) = \sin(2\pi f_2 t)$ را به مدت یک ثانیه و برای ارسال 11 سیگنال $x_3(t) = \sin(2\pi f_3 t)$ را به مدت یک ثانیه ارسال می کنیم. برای رمز گشایی در گیرنده، مشابه حالت قبلی، کافی است در هر یک ثانیه، سیگنال دریافتی را به حوزه فوریه ببریم (fft) و فرکانس اصلی سیگنال را از بین فرکانس های انتخابی اولیه پیدا کنیم و متناظر با آن دو بیت ارسالی را استخراج کنیم (توجه داشته باشید، fft گرفتن نقش همان *correlation* گرفتن با سیگنال های سینوسی با فرکانس های مختلف را ایفا می کند. همچنین استفاده از $fftsifft$ را فراموش نکنید!)

حال سوال اینجاست که مقادیر فرکانس ها را چگونه انتخاب کنیم؟

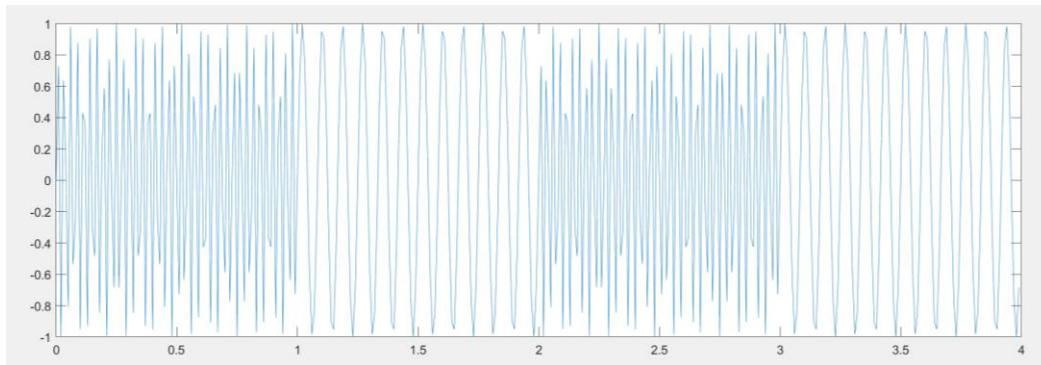
طبق آنچه در مقدمه بخش یک گفته شد، بازه فرکانسی یک سیگنال به طول $N=100$ سمپل و یک ثانیه $f_s = 100 Hz$ (به صورت 50:1:49) به صورت 50-49-48-47-46-45-44-43-42-41-40-39-38-37 هرتز خواهد بود. می دانیم سیگنال های حقیقی هم فرکانس منفی و هم فرکانس مثبت دارند، پس فقط به بخش فرکانس های مثبت توجه می کنیم.



برای سرعت ارسال اطلاعات $\frac{bit}{sec} 1$ دو فرکانس را به صورت زیر انتخاب می کنیم (فرکانس های 12 و 37 هرتز):



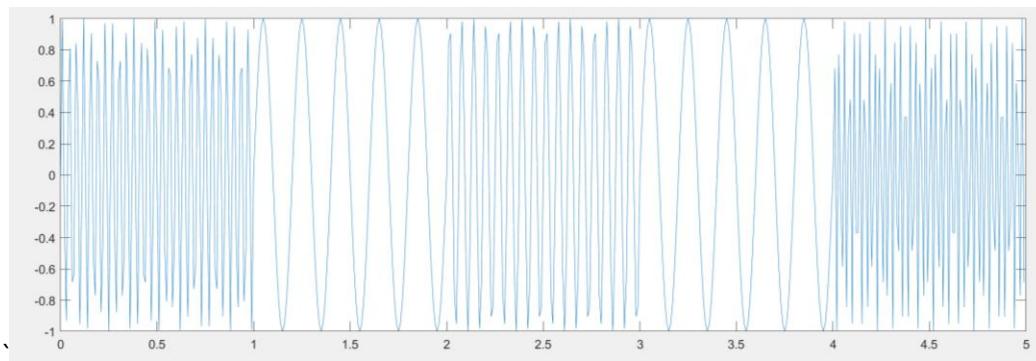
مثلاً رشته بیت 1010 به صورت زیر ارسال می شود:



برای سرعت ارسال اطلاعات $\frac{bit}{sec}$ 2، چهار فرکانس را به صورت زیر انتخاب می کنیم (فرکانس های ۵، ۱۶، ۲۷، ۳۸ هرتز):



مثلا رشته بیت 1000010011 به صورت زیر ارسال می شود.



توجه داشته باشید لزومی ندارد انتخاب فرکانس ها به گونه ای که در بالا ذکر شده است باشد. در این انتخاب ها سعی شده است فرکانس ها بیشترین فاصله‌ی ممکن را از هم داشته باشند تا وقتی داده نویزی می شود در تصمیم گیری دچار اشتباہ کمتری شویم. توجه داشته باشید وقتی داده نویزی شود و یک بازه‌ی یک ثانیه‌ی ای از داده را

به حوزه‌ی فوریه می‌بریم، دیگر لزوماً فقط یک قله‌ی مرتفع نخواهیم دید و ممکن است قله‌ی جابجا شود. به همین علت هرچه فاصله‌ی فرکانس‌ها از هم بیشتر شود تصمیم گیری دچار خطای کمتری می‌شود. شایان ذکر است در داده‌های نویزی، از میان فرکانس‌های انتخابی اولیه، مولفه‌ای که بیشترین مقدار را در اندازه‌ی تبدیل فوریه دارد به عنوان فرکانس اصلی در نظر می‌گیریم و سپس متناظر با آن سیگنال اصلی استخراج می‌شود. حال به سراغ شبیه‌سازی این موارد می‌رویم.

تمرین ۲) تمرین کامپیوتری قبل را این بار با فرض کدگذاری در فرکانس تکرار می‌کنیم.

هدف این تمرین ارسال پیام به زبان انگلیسی از فرستنده به گیرنده است. هر پیام فقط شامل حروف کوچک انگلیسی، فاصله، نقطه، ویرگول، علامت تعجب، سمی کالن (;) و کوتیشن (‘’) است. بنابراین در مجموع ۳۲ کاراکتر داریم. به هر کاراکتر ۵ بیت مرتبط می‌کنیم.

تمرین ۱-۲) یک سلول به اسم Mapset با ابعاد 32×2 درست کنید. در سطر اول خود کارکترها را قرار دهید و در سطر دوم ۵ بیتی که به آنها مرتبط کردید را قرار دهید (پاسخ این قسمت کاملاً مشابه تمرین کامپیوتری قبل است).

تمرین ۲-۲) تابعی به نام *coding_freq* بنویسید که ورودی‌های آن ۱) پیام مورد نظر برای ارسال و ۲) سرعت ارسال اطلاعات باشد و خروجی آن پیام کدگذاری شده باشد. بیشترین سرعت ارسال اطلاعات را ۵ بیت بر ثانیه در نظر خواهیم گرفت.

تمرین ۳-۲) خروجی تابع *coding_freq* را برای پیام (کلمه‌ی) *signal* با سرعت ارسال اطلاعات یک و پنج بیت بر ثانیه به صورت جداگانه رسم کنید.

تمرین ۴-۲) تابعی به نام *decoding_freq* بنویسید که ورودی‌های آن ۱) پیام کدگذاری شده (سیگنال زمانی تولید شده در قسمت قبل) و ۲) سرعت ارسال اطلاعات باشد و خروجی آن پیام رمز گشایی شده باشد. تابعی که نوشته‌ید را روی همان پیام *signal* که در قسمت ۳-۲ با سرعت ارسال‌های مختلف گُد کردید تست کنید تا مطمئن شوید کدتان درست کار می‌کند.

تمرین ۵-۲) در این قسمت می‌خواهیم به سیگنال دریافتی در گیرنده نویز اضافه کنیم تا شبیه‌سازی مشابه شرایط واقعی شود. به پیام *signal* بعد از این که کدگذاری شد نویز گوسی با واریانس 0.0001 و میانگین صفر

اضافه کنید و بعد آن را *bit rate* *decode* کنید. آیا بازهم پیام *signal* استخراج شد؟ نتایج را برای های یک و پنج به صورت جداگانه گزارش کنید.

تمرین ۶-۲) قدرت نویز را کم کم و طی چندین مرحله افزایش دهید و هر بار قسمت ۵-۲ را تکرار کنید. مشاهدات خود را گزارش کنید. کدام یک از دو *bit rate* به نویز مقاوم تر بودند؟ آیا نتایج با آنچه در مقدمه بیان شد همخوانی داشتند؟

تمرین ۷-۲) طی شبیه سازی هایی که در قسمت ۶-۲ انجام دادید، بیشترین واریانس نویز که *bit rate* پنج به آن مقاوم بود به صورت تقریبی چند بود؟ برای *bit rate* یک چه طور؟

تمرین ۸-۲) به نظر شما با چه راهکاری می توان *bit rate* را نسبت به نویز مقاوم تر کرد؟ قدری درنگ کنید و سپس پاسخ را مطالعه کنید.

پاسخ این است که هر چه فاصله‌ی فرکانس‌های انتخابی بیشتر باشند کدگذاری نسبت به نویز مقاوم تر می‌شود. بنابراین هر چه پهنه‌ای باند بیشتری مصرف کنیم می‌توانیم با سرعت بیشتری اطلاعات را ارسال کنیم و در عین حال نسبت به نویز مقاوم باشیم.

آنچه که بارها راجع به افزایش پهنه‌ای باند شنیدید که منجر به سرعت بیشتری در اینترنت می‌شود همین نکته است.

تمرین ۹-۲) راجع به پاسخ مطرح شده در قسمت قبل، اگر نرخ نمونه برداری f_s را افزایش دهیم ولی پهنه‌ای باند مصرفی را افزایش ندهیم، بازهم سرعت ارسال اطلاعات به نویز مقاوم می‌شود؟

نکات کلی:

- فایل نهایی شما باید به صورت یک فایل زیپ شامل گزارشکار به فرمت PDF و کد های متلب و سایر فایل های خواسته شده باشد.