

به نام خدا

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

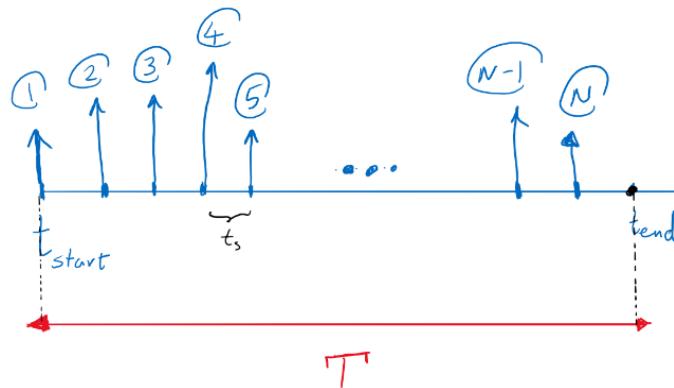
تمرین کامپیوتری ششم

مقدمه:

جهت تاکید، مقدمه‌ای که در تمرین کامپیوتری قبل بیان شد را مجدد تکرار می‌کنیم. در این تمرین کامپیوتری از مفاهیم این مقدمه برای پیاده‌سازی‌ها استفاده می‌کنیم.

از آنجایی که شبیه سازی‌ها در محیط متلب و با کامپیوتر انجام می‌شود، همه‌ی سیگنال‌هایی که در شبیه سازی‌ها با آن‌ها سروکار داریم سیگنال‌های گسسته‌است. لذا همه‌ی نتایج باید با عنوانی مطرح شده در کلاس در حوزه‌ی گسسته تطابق داشته باشد. اما همان‌گونه که چندین بار سر کلاس مطرح شد و در ادامه درس نیز خواهیم دید، دو حوزه‌ی گسسته و پیوسته، روابط بسیار نزدیکی دارند و مفاهیم آنها با یکدیگر در تطابق است.

فرض کنید در MATLAB، در حوزه‌ی زمان، یک سیگنال (*بردار*) x به طول N سمپل و معادل T ثانیه داریم و می‌خواهیم آن را به حوزه‌ی فوریه ببریم (به شکل زیر نگاه کنید). در واقع f_s فرکانس نمونه برداری و t_s فاصله‌ی زمانی بین دو سمپل را نشان می‌دهد. این دو پارامتر به ما می‌گویند که از سیگنال پیوسته اصلی به چه صورت نمونه برداری شده است و سیگنال گسسته‌ی فعلی تولید شده است. برای رسم دقیق سیگنال در حوزه‌ی زمان اگر بازه‌ی زمانی مربوط به سیگنال معلوم باشد $t = t_{start}:t_s:t_{end} - t_s$ به طوری که $t = t_{start}:t_s:t_{end} - t_s$ (یا $stem(t,x)$) رسم کرد.



برای بردن سیگنال به حوزه‌ی فوریه از دستور $y = \text{fftshift}(\text{fft}(x))$ استفاده می‌کنیم. fft دستور اصلی است و fftshift فقط بازه‌ی متقاضن حول فرکانس صفر را ایجاد می‌کند (مشابه آنچه که در درس در بخش سری فوریه گسسته مطرح شد). خروجی این دستور یعنی y یک بردار با N سمپل است که هر درایه‌ی آن یک عدد مختلط

است لذا هر درایه یک اندازه و یک فاز دارد. نکته‌ی مهم در این جا این است که هر یک از این N عدد به دست آمده متعلق به چه فرکانسی می‌باشد؟

فرکانس‌ها به صورت $f = \frac{-f_s}{2} : \frac{f_s}{N} : \frac{f_s}{2} - \frac{f_s}{N}$ خواهند بود. بنابراین برای رسم اندازه می‌توان از دستور $\text{plot}(f, \text{angle}(y))$ و برای رسم فاز می‌توان از دستور $\text{plot}(f, \text{abs}(y))$ استفاده کرد.

راجع به بازه‌ی فرکانس‌های در نظر گرفته شده (هایلایت سبز)، سه نکته‌ی زیر حائز اهمیت هستند:

نکته‌ی اول:

در کلاس برای تطابق با کتاب اپنهایم، کلمه‌ی فرکانس به ω اطلاق شد ولی در این تمرین کامپیووتری به $\frac{\omega}{2\pi}$ عنوان فرکانس می‌دهیم. دلیل این امر این است که از دست عدد π راحت شویم.

نکته‌ی دوم:

اگر خاطرتان باشد در کلاس گفتیم بیشترین فرکانس (از منظر تغییرات سریع زمانی) در حوزه‌ی گسته فرکانس $\frac{1}{2}$ است که در اینجا می‌بینید جای آن عدد $\frac{f_s}{2}$ نشسته است. در واقع در سرتاسر درس سیگنال، نرخ نمونه برداری برابر $1 = f_s$ هرتز در نظر گرفته می‌شود (یک سمپل در هر ثانیه). از این نکته می‌توان نتیجه گرفت هر چه از سیگنال پیوسته در حوزه‌ی زمان با نرخ بالاتری نمونه برداری کنیم ($f_s > 1$)، در سیگنال گسته به دست آمده، می‌توان فرکانس‌های بالاتر را نیز (در صورت وجود) مشاهده کرد چون بازه‌ی فرکانسی قابل مشاهده افزایش پیدا می‌کند. در حالت حدی، اگر نرخ نمونه برداری به سمت بی نهایت برود (یا به عبارت دیگر $(0 \rightarrow t_s)$ برود، عملاً سیگنال گسته به دست آمده با سیگنال پیوسته اصلی یکی خواهد بود و هر مولفه‌ی فرکانسی که در سیگنال اصلی بوده است، در سیگنال گسته نیز مشاهده می‌شود. در این قسمت کاملاً باید درک کرده باشید که در sampling (نمونه برداری) که یک سیگنال پیوسته را به یک سیگنال گسته تبدیل می‌کند چه چیزی از بین می‌رود.

نکته‌ی سوم:

نکته‌ی آخر راجع به رزولوشن فرکانسی است که ایجاد شده است یعنی $\delta_f = \frac{f_s}{N}$ (هایلات سبز را نگاه کنید). اگر از رابطه‌ای که با هایلایت زرد رنگ مشخص شده است استفاده کنید می‌توان دید که رزولوشن فرکانسی برابر است با $\delta_f = \frac{1}{T}$ ، یعنی رزولوشن فرکانسی برابر با عکس طول زمانی سیگنال است و هیچ ربطی هم به نرخ نمونه برداری f_s ندارد. هرچه می‌خواهید نرخ نمونه برداری را افزایش دهید اما رزولوشن فرکانسی مدامی که طول زمانی سیگنال (T ثانیه) تغییری نکند هیچ تغییری نمی‌کند. حال ببینیم مفهوم رزولوشن چیست؟ رزولوشن فرکانسی گام‌های فرکانسی است که می‌توان در نظر گرفت تا سیگنال گسته را در فضای فوريه توصیف کرد. این مفهوم

را با یک مثال توضیح می دهیم. فرض کنید طول زمانی یک سیگنال $T = 1$ ثانیه است و نرخ نمونه برداری $f_s = 20 \text{ Hz}$ است. بنابراین رزولوشن فرکانسی برابر $\delta_f = 1 \text{ Hz}$ می شود و بازه‌ی فرکانسی که در حوزه‌ی فوریه می سیگنال نمونه برداری شده می توان مشاهده کرد به صورت $9 : 1 : -10$ هرتز خواهد بود (هایلات سبز). اگر سیگنال اصلی حاوی دو سیگنال تک تن (تک فرکانس) به صورت

$$x_1(t) = \exp(1j * 2\pi * 5 * t) + \exp(1j * 2\pi * 8 * t)$$

باشد، طبیعتاً قله‌هایی در اندازه‌ی سیگنال در حوزه‌ی فوریه، در فرکانس‌های 5 و 8 هرتز مشاهده خواهید کرد.

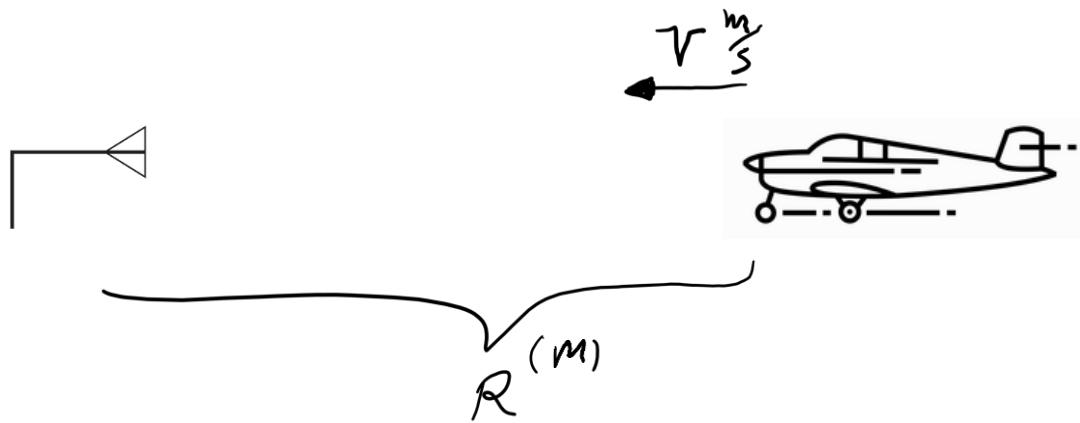
حال فرض کنید سیگنال اصلی حاوی دو سیگنال تک تن به صورت

$$x_2(t) = \exp(1j * 2\pi * 5 * t) + \exp(1j * 2\pi * 5.1 * t)$$

باشد. در این حالت فقط یک قله در اندازه‌ی سیگنال در حوزه‌ی فوریه، در فرکانس 5 هرتز مشاهده خواهید کرد و دیگر توانایی تفکیک این دو سیگنال را در حوزه‌ی فوریه نخواهید داشت زیرا اختلاف فرکانس دو سیگنال تک تن کمتر از $1 \text{ Hz} = \delta_f$ می باشد. بنابراین رزولوشن فرکانسی قدرت تفکیک پذیری فرکانسی را در حوزه‌ی فوریه نشان می دهد. حال به سراغ تمارین می رویم.

بخش اول:

می خواهیم توسط یک رادار، فاصله و سرعت یک جسم را بیابیم.



سیگنال ارسالی رادار به صورت $x(t) = \cos(2\pi f_c t)$ است.

این سیگنال به سمت جسم ساطع می شود و به آن برخورد می کند. به علت متحرک بودن جسم و پدیده دیپلر، فرکانس آن عوض شده و سپس با یک تاخیری در گیرنده دریافت می شود. به عبارت دیگر سیگنال دریافتی به صورت زیر خواهد بود (مقدار $\alpha < 1$ اهمیتی ندارد):

$$y(t) = \alpha \cos(2\pi(f_c + f_d)(t - t_d))$$

در رابطه f_d همان فرکانس دیپلر است که تغییر فرکانس را به وجود آورده است. فرض کنید رابطه $f_d = \beta V$ با سرعت جسم به صورت V می باشد که β عددی معلوم است.

همچنین در رابطه بالا t_d همان تاخیر است که طبق آنچه در تمرین کامپیوترا قبل بیان شد، رابطه $t_d = \rho C$ می باشد که ρ عددی معلوم است ($\rho = \frac{2}{C}$ و C سرعت نور است).

تمرین ۱-۱) سیگنال ارسالی رادار را با در نظر گرفتن $f_c = 5 \text{ Hz}$ ، بازه زمانی $t_{start} = 0$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 100 \text{ Hz}$ رسم کنید.

تمرین ۲-۱) سیگنال دریافتی را با در نظر گرفتن فرضیات قسمت قبل ($f_c = 5 \text{ Hz}$ ، $R = 250 \text{ Km}$ ، $V = 180 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$) و همچنین با فرض $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.3$ رسم کنید. مقدار β را تا انتهای بخش اول ثابت و معلوم فرض کنید.

تمرین ۱-۳) حال به صورت برعکس به مساله نگاه کنید. یعنی فرض کنید سیگنال دریافتی را داریم و می خواهیم از روی آن سرعت و فاصله را محاسبه کنیم. به عبارت دیگر می بایست f_d و t_d را تخمین زده و سپس از روی آنها سرعت و فاصله را بیابیم. روشی پیشنهاد دهید که این کار را برای ما به صورت اتوماتیک انجام دهد. روشان را توضیح داده و پیاده سازی کرده و نتایج آن را گزارش کنید.

راهنمایی: به سیگنال دریافتی دقیق کنید. سیگنال دریافتی را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$y(t) = \alpha \cos(2\pi(f_c + f_d)(t - t_d))$$

$$y(t) = \alpha \cos(2\pi(f_c + f_d)t - 2\pi(f_c + f_d)t_d))$$

$$y(t) = \alpha \cos(2\pi f_{new}t + \varphi_{new})$$

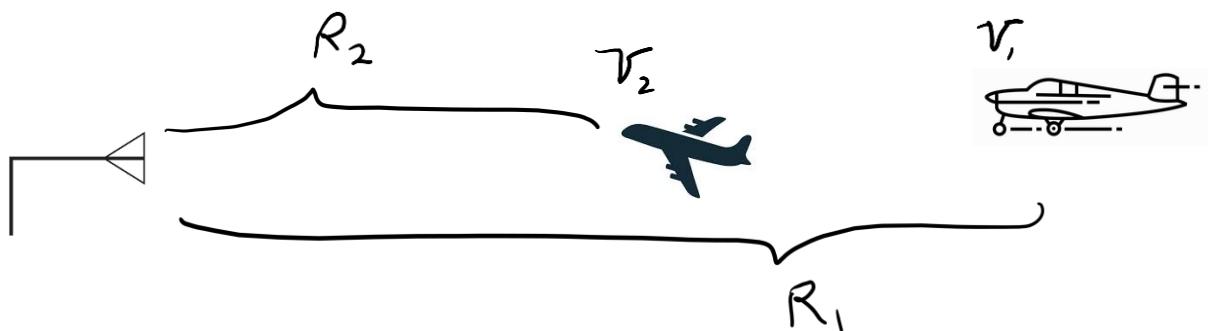
سیگنال دریافتی یک سیگنال با فرکانس f_{new} و فاز φ_{new} است. پس با بردن سیگنال به حوزه‌ی فوریه و استخراج فرکانس غالب و فاز متناظر با آن، پارامترهای مساله استخراج می شوند.

تمرین ۱-۴) حال به سیگنال دریافتی کمی نویز اضافه کنید و تمرین ۱-۳ را تکرار کنید. قدرت نویز را کم کم و طی چندین مرحله افزایش دهید و ببینید تا کجا همچنان می توانید سرعت و فاصله را به درستی تشخیص دهید. کدام پارامتر حساسیت بیشتری به حضور نویز دارد؟

تمرین ۱-۵) حالت ایده آل بدون نویز را در نظر بگیرید. فرض کنید به جای یک جسم، دو جسم مختلف با پارامترهای زیر داریم:

$$R_1 = 250 \text{ Km}, \quad V_1 = 180 \frac{\text{Km}}{\text{h}}, \quad \alpha_1 = 0.5$$

$$R_2 = 200 \text{ Km}, \quad V_2 = 216 \frac{\text{Km}}{\text{h}}, \quad \alpha_2 = 0.6$$



سیگنال دریافتی در رادار حاصل جمع اکوهای برگشتی از این دو جسم است. رابطه‌ی سیگنال دریافتی را نوشته و با همان فرضیات قسمت‌های قبل آن را رسم کنید.

تمرین ۱-۶) حال به صورت برعکس به مساله نگاه کنید. یعنی فرض کنید سیگنال دریافتی را داریم و می‌خواهیم از روی آن سرعت و فاصله‌ی دو جسم را محاسبه کنیم. روش‌ستان را شرح داده و پیاده سازی کنید.

تمرین ۱-۷) اگر سرعت دو جسم داده شده برابر باشد ولی فاصله‌ها متفاوت باشد، با ذکر دلیل بیان کنید آیا باز هم قادر خواهید بود سرعت و فواصل آنها را استخراج کنید؟ حداقل اختلاف سرعت دو جسم چه قدر باید باشد تا بتوانید پارامترهای دو جسم را درست تخمین بزنید؟

تمرین ۱-۸) اگر فاصله‌ی دو جسم داده شده برابر باشد ولی سرعت‌ها متفاوت باشد، آیا قادر خواهید بود سرعت‌ها و فاصله‌ی آنها را استخراج کنید؟

تمرین ۱-۹) اگر تعداد اجسام را ندانیم، راهی پیشنهاد دهید که بتوان هم تعداد آنها را فهمید و هم پارامترهای آنها را استخراج کرد.

بخش دوم:

مطابق شکل زیر ۱۲ کلید متناظر با ۱۲ نُت مختلف از یک ابزار موسیقی (مثل پیانو و ...) را در نظر می گیریم.

C C# D D# E F F# G G# A A# B

C	523.25 Hz	C # 554.37 Hz
D	587.33 Hz	D # 622.25 Hz
E	659.25 Hz	
F	698.46 Hz	F # 739.99 Hz
G	783.99 Hz	G # 830.61 Hz
A	880 Hz	A # 932.33 Hz
B	987.77 Hz	

فرضیات زیر را در نظر می گیریم:

- ✓ با فشردن هر یک از کلیدها، یک سیگنال تک نُن به صورت $\sin(2\pi f_c t)$ با فرکانسی که در شکل مشخص شده است تولید می شود.
- ✓ مدت زمان استاندارد نگه داشتن هر کلید یعنی پارامتر T و پارامترهای زمانی به صورت زیر می باشند.

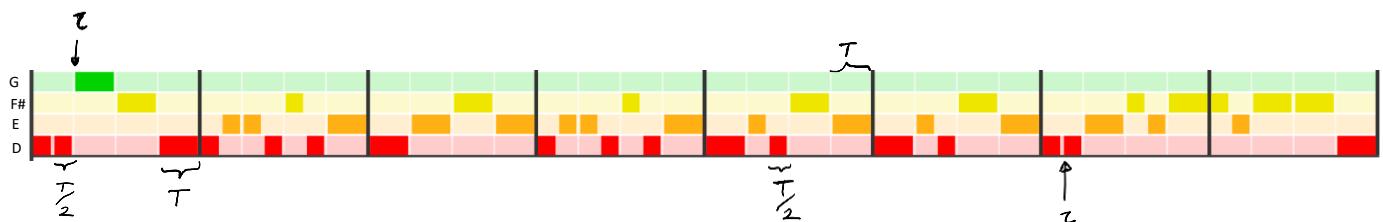
$$t = t_{start}: t_s: t_{end} - t_s$$

$$t_{start} = 0, \quad f_s = 8 KHz, \quad t_{end} = T = 0.5 sec$$

✓ گاهی اوقات، هر کلید نیمی از زمان استاندارد، یعنی $\frac{T}{2} = 0.25 sec$ نگه داشته می شود.

✓ فاصله‌ی بین زدن دو کلید متوالی $\tau = 25 msec$ است (استراحت بین دو کلید).

تمرین ۱-۲) موسیقی زیر را تولید کرده و با دستور sound گوش کنید.



تمرین ۲-۲) بخش کوتاهی از نُت یک موسیقی ساده را در اینترنت پیدا کرده و مشابه تمرین ۱-۲ آن را تولید کنید. با دستور audiowrite موسیقی ای که ساخته اید را با اسم mysong.wav ذخیره کنید و فایل آن را به همراه گزارشتان آپلود کنید. هر سمپل از داده ای که ساختید با چند بیت ذخیره شده است؟

تمرین ۳-۲) اگر یک فایل موسیقی در اختیار شما قرار بگیرد که آن فایل طبق فرضیاتی که در ابتدای بخش چهارم مطرح شد تولید شده باشد، روشی پیشنهاد دهید که نوتهای آن و زمان نگه داشتن هر کلید را استخراج کند. روش پیشنهادی خود را روی موسیقی تمرین ۱-۲ پیاده کرده تا از صحت آن اطمینان یابید.

۰. فایل نهایی شما باید به صورت یک فایل زیپ شامل گزارشکار به فرمت PDF و کدهای متلب و سایر فایل‌های خواسته شده باشد.