دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

Principles of Communication Systems

CA3

Parsa Darban

810100141

به نام خدا

اصول سیستم‌های مخابراتی (دکتر صباغیان)

تمرین کامپیوتری سری **سوم** (تحلیل سیستم ها در حضور نویز ها تصادفی)

نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

پارسا دربان ــ ۸۱۰۱۰۰۱۴۱

این فایل شامل گزارش و نتایج شبیه سازی‌های انجام شده است.

***** فایل شبیه سازی با متلب مربوط به هر قسمت این تمرین با عنوان CA3_Codes پیوست شده است.**

سوال ۱: آمار و احتمالات - توزیع رایلی

سوال ۲: فرآیند تصادفی

سوال ۳: آشنایی با مخابرات دیجیتال - کوانتیزاسیون

چکیده

این تمرین به بررسی سیگنال های دریافتی با حضور نویز میپردازد.

در ابتدا با توزیع رایلی که یک متغیر تصادفی است آشنا می شویم. زیرا نویزهایی که به سیگنال ها اضافه میشوند تصادفی هستند، و آشنایی با آن ها برای ما لازم است.

در بخش بعدی به تحلیل فرآیند تصادفی و بررسی شروط لازم برای آنکه فرآیند ما WSS باشد ، میپردازیم.

و در بخش آخر با یک سیستم مخابرات دیجیتال با مدولاسیون MPAM آشنا میشویم و کارکرد آن را در حضور نویز بررسی میکنیم.

سوال ۱: آمار و احتمالات (توزیع رایلی)

در این بخش به بررسی متغیر تصادفی رایلی میپردازیم.

قسمت الف: تابع چگالی احتمال و رسم آن

همانطور که در صورت پروژه بیان شده ، اگر دو متغیر تصادفی نرمال و مستقل x و y دارای میانگین صفر و واریانس یک باشند ، توزیع رایلی از رابطه زیر به دست می آید.

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

حال به محاسبه تابع چگالی آن (pdf) میپردازیم.

ابتدا باید دانست که تابع چگالی x و y مطابق روبه رو است.

$$f=e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}*\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2)}}$$

حال با توجه به تعریف بالا داریم:

$$F_X(x;\sigma)=\iint_{D_x} f_U(u;\sigma)f_V(v;\sigma)\,dA \qquad و \qquad D_x=\left\{(u,v):\sqrt{u^2+v^2}\le x\right\}$$

$$F_X(x;\sigma)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}\int_0^x re^{-r^2/(2\sigma^2)}\,dr\,d\theta=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^x re^{-r^2/(2\sigma^2)}\,dr$$

حال اگر از تابع بالا مشتق بگیریم نتیجه برابر با:

$$f_X(x;\sigma)=\frac{d}{dx}F_X(x;\sigma)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

حال به محاسبه امید و واریانس آن میپردازیم:

$$E(z)=\int_{-\infty}^{\infty} z.f(z)\,dz=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\sigma^2(z)=E(z^2)-(E(z))^2=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma$$

از این روابط در ادامه استفاده میکنیم.

در شکل زیر تابع چگالی و تابع توزیع را مشاهده میکنیم.

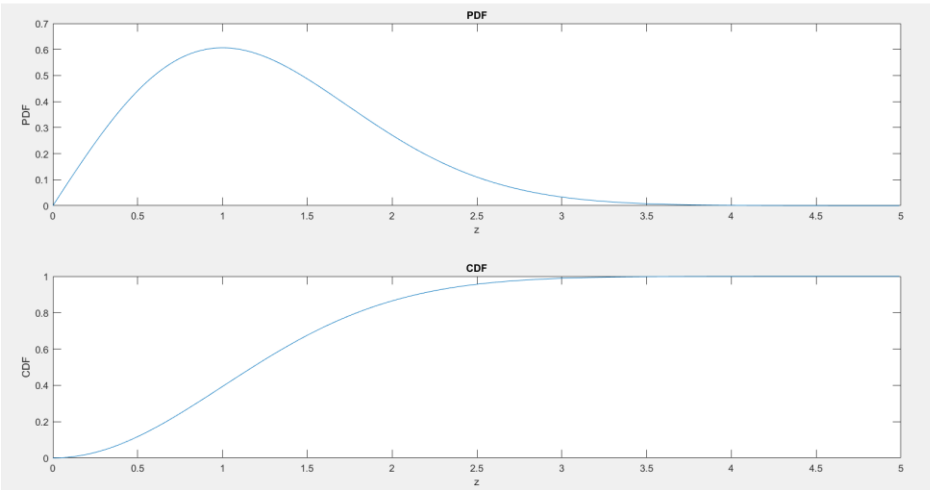

Figure 1.1(PDF & CDF of Rayleigh distribution)

قسمت ب: تولید متغیرهای تصادفی نرمال

در این بخش به تولید متغیر های نرمال و مستقل x و y میپردازیم که باعث ایجاد متغیر رایلی ما میشود. با استفاده از دستور randn این متغیر ها را با طول 10^3 میسازیم. این دستور متغیر ها را با میانگین نزدیک صفر و واریانس نزدیک به یک برای ما تولید میکند.

حال هیستوگرام آن ها را با تعداد bin=100 (تعداد میله های رسم شده) نمایش میدهیم.

نتایج به صورت زیر است:

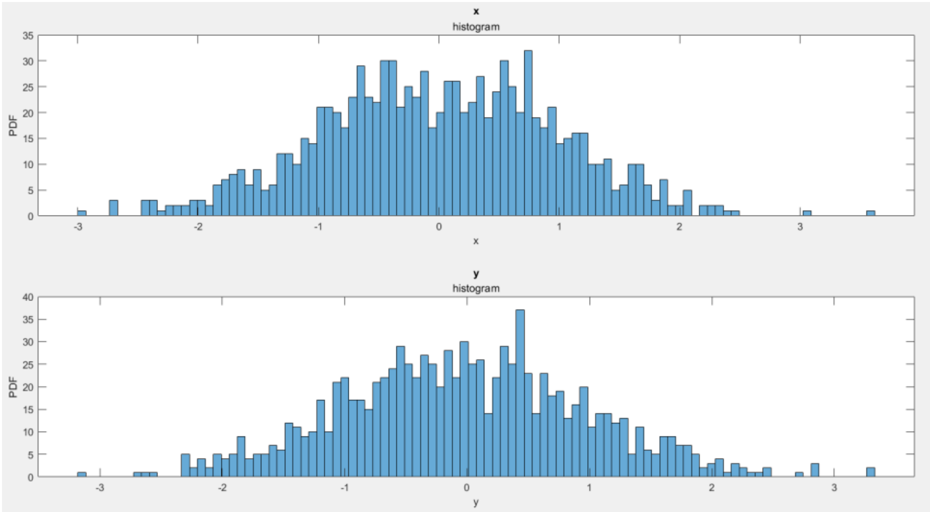

Figure 1.2(histogram of two normal distribution (N=1000))

میانگین متغیر تصادفی x

xb	-0.0040
xvar	0.9476

میانگین متغیر تصادفی y

yb	-0.0301
yvar	0.9927

همانطور که مشاهده میشود میانگین و واریانس آن منطبق بر خواسته سوال است.

قسمت ج: تولید متغیر تصادفی رایلی

در اینجا با استفاده از روابط موجود z را تولید میکنیم.

ابتدا به میانگین و واریانس آن میپردازیم.

همانطور که مشاهده میشود این اعداد با نتایج حاصل شده در بخش الف همخوانی دارند.

(واریانس فرض شده ما تقریبا برابر با یک است)

zb	1.2561
zvar	0.4341

$$E(z)=\int_{-\infty}^{\infty} z.f(z)\, d z=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1.2533\right)$$

$$\sigma^2(z)=E(z^2)-(E(z))^2=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma \qquad \left(2-\frac{\pi}{2}=0.4292\right)$$

نمودار هیستوگرام آن به شکل زیر است.

همانطور که میبینیم شکل آن به طور تقریبی شبیه pdf در بخش اول شده است.

اما اگر طول آن را افزایش دهیم، شکل به طور دقیق شبیه میشود که آن را در بخش بعدی پیاده سازی میکنیم.

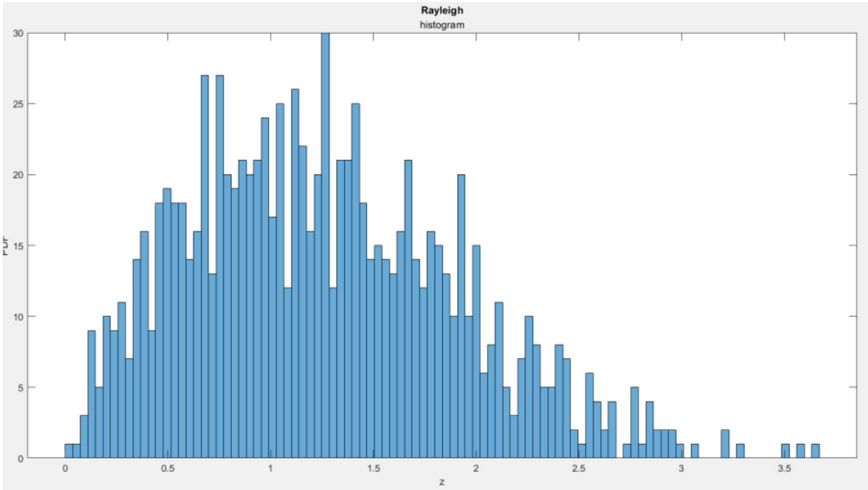

Figure 1.3(histogram of Rayleigh distribution(N=1000))

قسمت د: تاثیر افزایش N

در این بخش طول متغیر های نرمال را برابر با 10^5 میگیریم.

همانطور که میبینیم میانگین و واریانس هر سه متغیر به مقادیری که انتظار داشته نزدیک تر شده.

xb	-0.0033	yb	0.0015	zb	1.2517
xvar	0.9962	yvar	1.0007	zvar	0.4302

همانطور که میبینیم ، با توجه به اینکه اعداد ما چوت با دقت بالایی محاسبه شدند در نتیجه هیستوگرام آن ها نیز به نمودار pdf آن ها شبیه تر است.

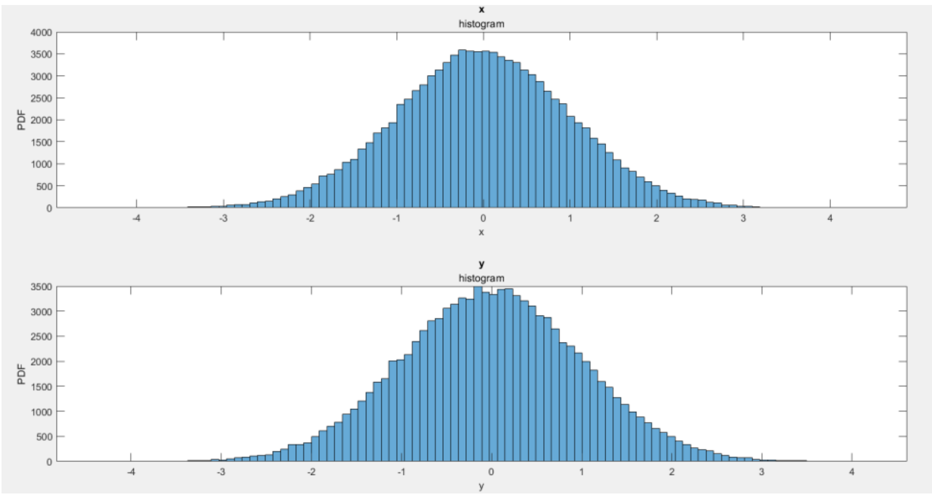

Figure 1.4(histogram of two normal distribution(N=100000))

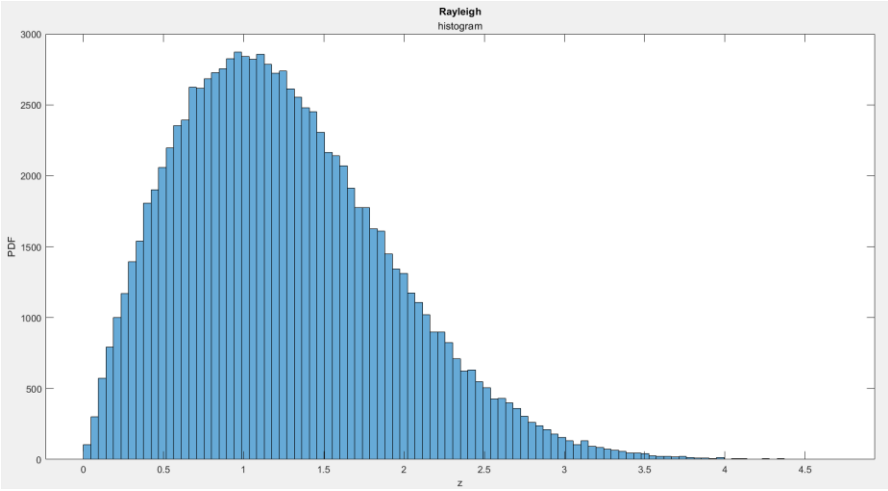

Figure 1.5(histogram of Rayleigh distribution(N=100000))

همانطور که مشاهده میشود با افزایش N ، میانگین و واریانس متغیر نرمال به ترتیب به صفر و یک نزدیک تر شده و در نتیجه توزیع رایلی که از دو متغیر نرمال ساخته شده نیز به مقادیر مورد انتظار نزدیک شده .

شکل حاصل از آن ها نیز به pdf آن ها نیز نزدیک است.

سوال ۲: فرآیند تصادفی

مقدمه: در این بخش به بررسی یک فرآیند تصادفی میپردازیم.

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta) \qquad ; \qquad \begin{cases} A = 10 \\ \omega_0 = 5\pi \dfrac{rad}{sec} \\ \Theta \sim U(0, 2\pi) \end{cases}$$

قسمت الف: میانگین و خود همبستگی فرآیند تصادفی X(t)

ابتدا میانگین این فرآیند را محاسبه میکنیم.

$$E(X(theta))=\int X(theta)f(theta)\,d\,(theta)=A\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\omega t+theta)}{2\pi}\,d\,(theta)=0$$

همانطور که مشاهده میشود، میانگین آن به زمان وابسته نیست.

حال تابع خود همبستگی آن را محاسبه میکنیم.

$$Rx(t1,t2)=E\{A^2\cos(\omega t1+theta).\cos(\omega t2*theta)\}$$

$$=\frac{A^2}{2}E\{\cos(\omega(t1+t2)+2\Theta)+\cos(\omega(t1\text{-}t2))\}=\frac{A^2}{2}\left(\cos(\omega(t1\text{-}t2))+\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}.\cos(\omega(t1+t2)+2\Theta)\,d\,\Theta\right)$$

$$=\frac{A^2}{2}\cos(\omega(t1\text{-}t2))$$

نتیجه به صورت مقابل است:

$$Rx(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau) \qquad (t1\text{-}t2)=\tau$$

همانطور که میبینیم تابع خود همبستگی از لحاظ زمانی به اختلاف زمانی وابسته است.

پس میتوان نتیجه گرفت این فرآیند از نوع WSS است.

قسمت ب: رسم نمودار میانگین فرآیند X(t)

در این بخش میخواهیم میانگین فرآیند را رسم کنیم . ابتدا خود فرآیند را میسازیم. با استفاده از دستور unifrnd بازه تتا را تعریف میکنیم. با توجه به fs داده شده و بازه زمانی ما در ۱۰۰ زمان مختلف نیازمند تتا های رندوم به طول $۱۰^{۵}$ هستیم.

سپس روی هر زمان، بر روی تتای آن ها میانگین میگیریم و آن را رسم میکنیم.

نتیجه به شکل زیر است:

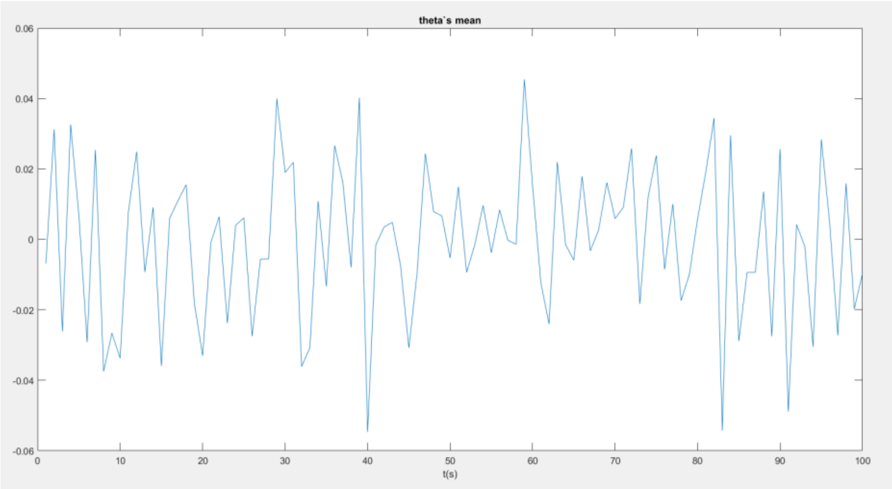

Figure 2.1(theta's mean)

قسمت ج: رسم نمودار خود همبستگی فرآیند X(t)

در اینجا با استفاده از دو حلقه for و رابطه خودهمبستگی یک فرآیند ، نمودار سه بعدی خود همبستگی را رسم میکنیم.

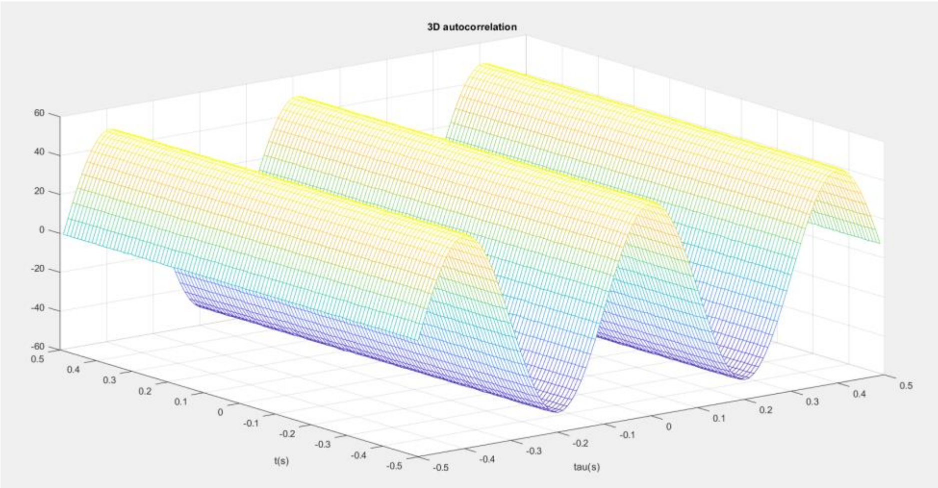

Figure 2.2(3D auto correlation)

همانطور که مشاهده میشود در یک tau ، زمان تغییر نمیکند.

همچنین با میانگین گرفتن از این تابع (در بخش های بعدی) و میانگین گرفته شده از تتا (در قسمت قبل) متوجه آن میشویم که نه تنها به زمان وابسته نیست بلکه به تابع خود همبستگی آن به اختلاف دو زمان وابسته است.

*از نمودار میانگین بخش قبل میتوان دید که به صفر نزدیک است.

قسمت د: مقایسه با محاسبات تئوری

نتایج به دست آمده در بخش اول را رسم میکنیم. نتایج آن به شرح زیر است:

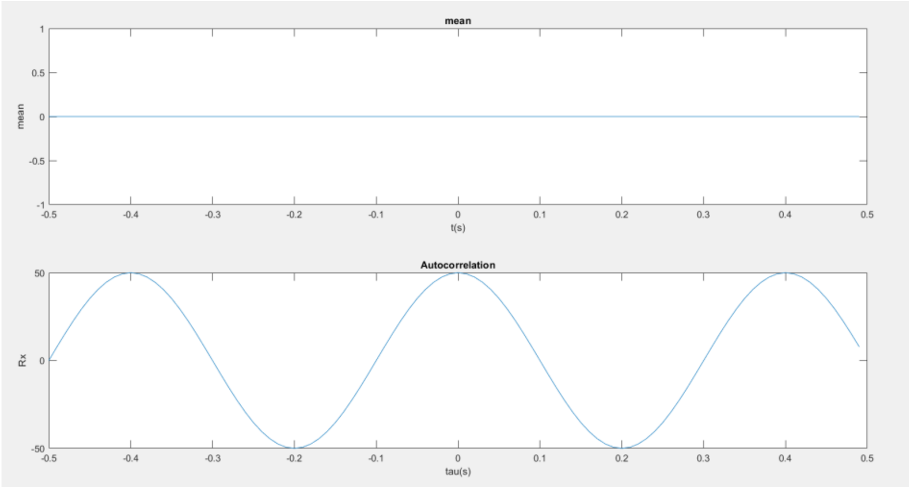

Figure 2.3(Plot mean & autocorrelation (result of hand calculation))

میتوان مشاهده کرد که تابع میانگین آین بخش و بخش دوم به هم شبیه هستند با این تفاوت که بخش یک به صفر نزدیک است.

همچنین با توجه به اینکه در هر tau ، زمان آن تغییر ندارد ، با میانگیری از آن به شکل دوم میرسیم.

قسمت ه: ایستان سازی فرآیند

برای آنکه فرآیند خود را ایستان کنیم از تابع خودهمبستگی آن نسبت به زمان میانگین میگیریم .

نتیجه آن مطابق زیر است که با محاسبات دستی تفاوتی ندارد.

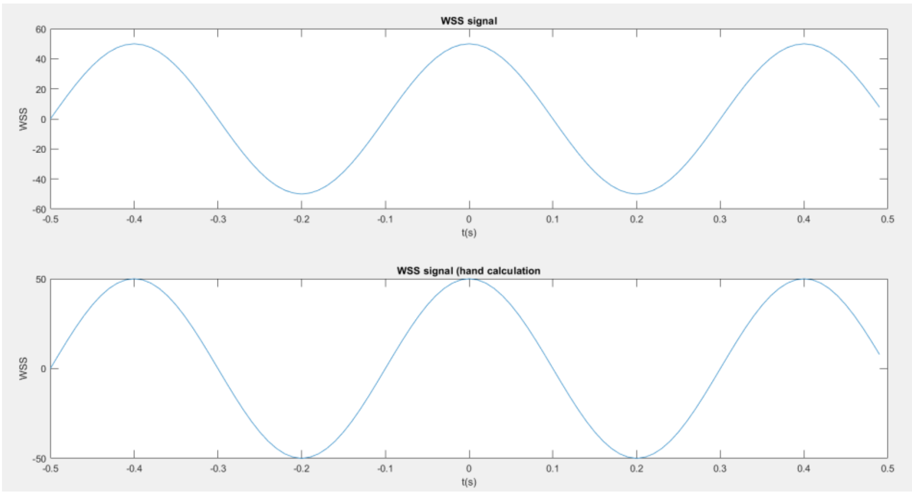

Figure 2.3(comparing hand calculation stationary & made stationary)

همچنین درصد خطای آن نیز استدلال بالا را ثابت میکند.

error 1.2581e-05

سوال ۳: آشنایی با مخابرات دیجیتال(کوانتیزاسیون)

مقدمه: در این بخش از یک سیگنال آنالوگ نمونه برداری کرده و آن را به سطح های کوانتیزاسیون تصویر میکنیم. سیگنال گرفته شده را با نویز جمع کرده و سپس آن را دمدوله کرده و سیگنال دیجیتال آن را دریافت میکنیم. در نهایت خطای آن را محاسبه میکنیم.

$$m(t) = 10 + 5\sin(3\pi t) + 3\cos^3(\pi t) + \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) \qquad 0 \le t \le 3$$

قسمت الف: تعریف سیگنال پیوسته

ابتدا سیگنال داده شده را به صورت آنالوگ رسم میکنیم. با توجه به بازه زمانی داده شده و تعداد سمپل N=50000 ، فرکانس نمونه برداری را به صورتی که آنالوگ باشد، رسم میکنیم.

$$fc=\frac{50000}{3}$$

نتیجه آن به شکل زیر است:

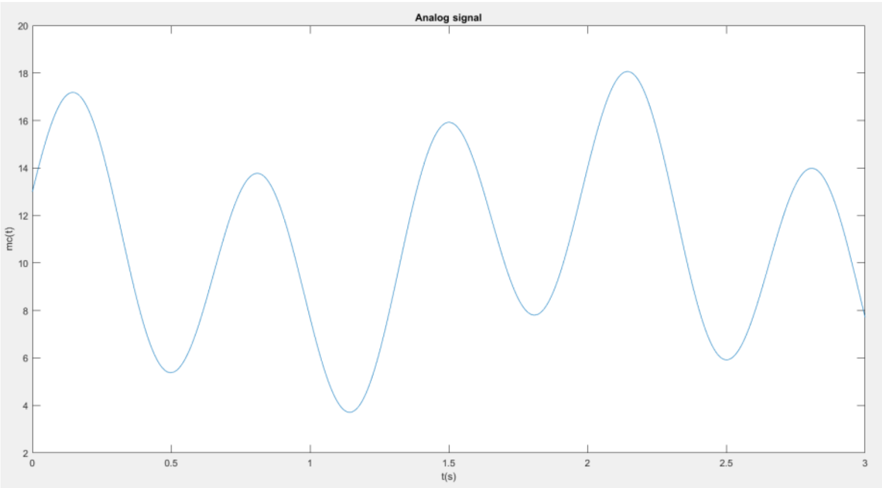

Figure 3.1(Analog m(t))

قسمت ب: نمونه برداری و تولید سیگنال گسسته

حال با نمونه فرکانس برداری سیگنالی را با طول ۱۰۰ به صورت گسسته رسم میکنیم. در اینجا باید بر روی زمان و خود سیگنال با گام ۵۰۰ حرکت کنیم و مقدار آن ها را نگه داریم.

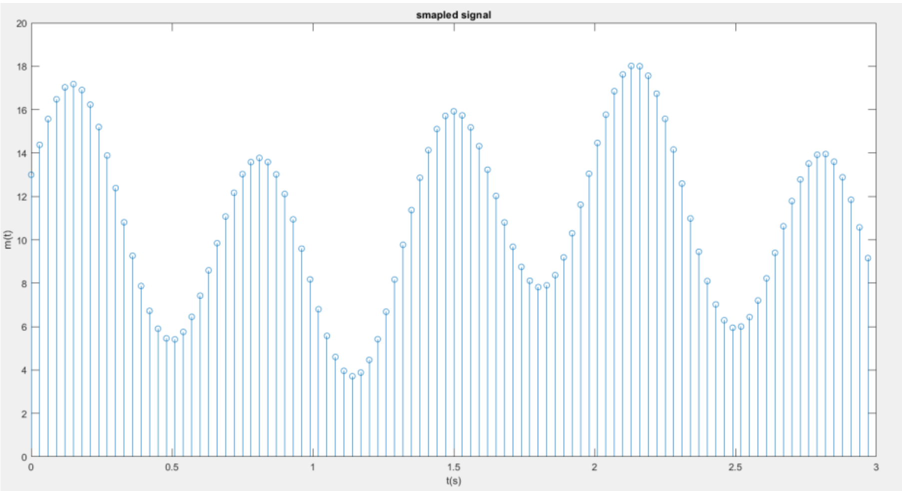

Figure 3.2(discrete signal)

قسمت ج: کوانتیزاسیون

در اینجا ۳۲ سطح کوانتیزاسیون را انتخاب میکنیم. به طوری که کمینه و بیشینه آن را از هم کم کرده و به سطوحی با فاصله برابر ایجاد میکنیم. حال سیگنالی گسسته ای که داریم را بر نزدیک ترین سطح کوانتیزاسیون تبدیل میکنیم و آن ها را رسم میکنیم.

نتیجه مطابق شکل زیر است.

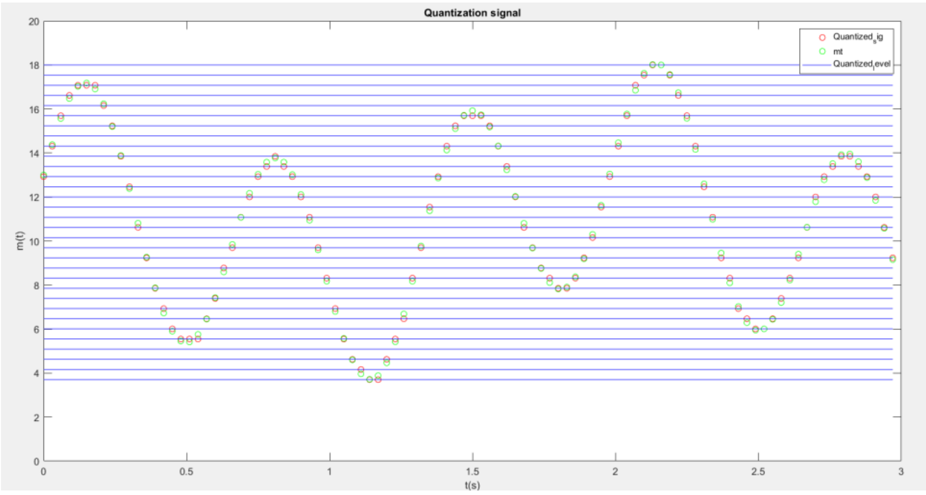

Figure 3.3(Quantized signal)

قسمت د: دیجیتال سازی سیگنال کوانتایز شده

ابتدا انرژی پالس مثلثی داده شده را محاسبه میکنیم. با توجه به اینکه بازه زمانی آن ۱ ثانیه است ، انرژی همان توان آن است.

EnergyP 333.3340

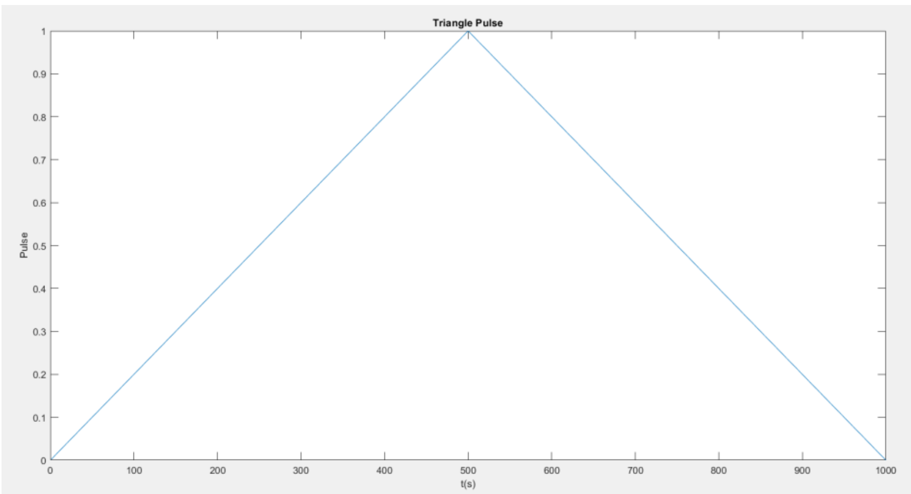

Figure 3.4(Triangle Pulse)

سپس هرکدام از سطح های کوانتیزاسیون را لول بندی کرده و هر به هر لول یک graycode اختصاص میدهیم. با استفاده از این graycode ها یک دامنه خاص به آنها نسبت میدهیم. این دامنه ها ضرایبی فرد از پالس مثلثی هستند. سیگنال نهایی ارسال شده مطابق شکل زیر است:

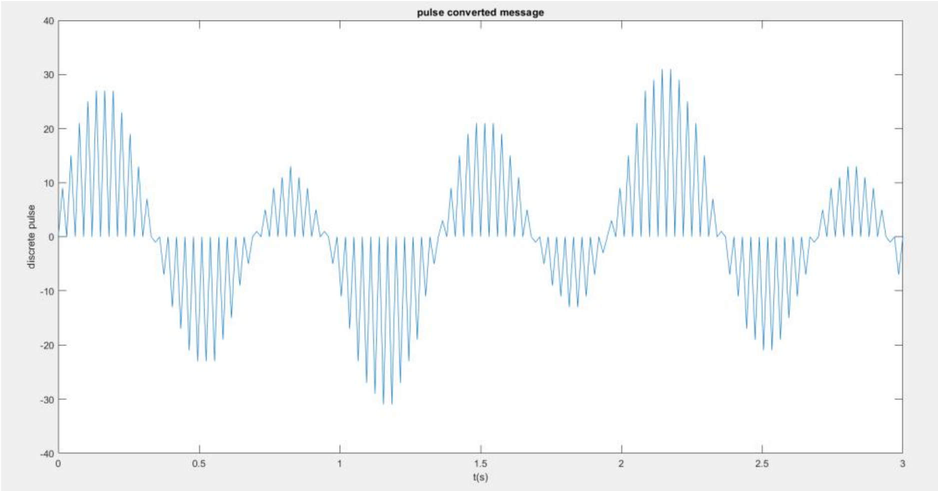

Figure 3.5(Pulse message)

همانطور که میبینم در اینجا به ازای هر لول ، ضریبی از ۳۱+ تا ۳۱- از پالس مثلثی را داریم.

قسمت ه : دریافت سیگنال دیجیتال در گیرنده

با توجه به رابطه SNR و توان سیگنال میتوانیم ، توان نویز را پیدا کرده و با توجه به اینکه σ^2، برابر با توان نویز است ، جذر آن را در نویز گوسی نرمال ساخته شده ضرب میکنیم.

$$SNR=\frac{S}{N}$$

$$N=S*10^{-0.2}$$

پس توان نویز برابر با :

Pn 58.7801

دقت شود Pn همان واریانس(σ^2) است.

شکل نویز و حاصل افزودن آن با سیگنال در زیر آمده است.

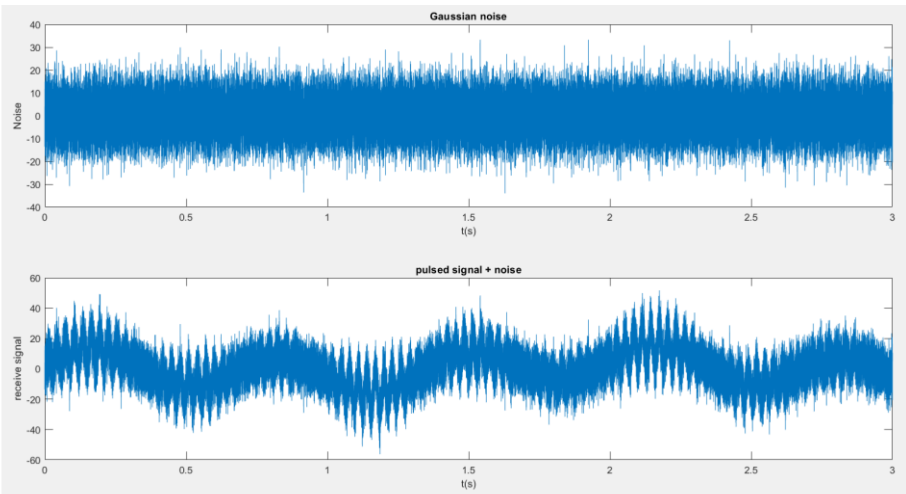

Figure 3.6(Received signal)

قسمت و : دیکود کردن سیگنال دیجیتال

برای دیکود کردن این بخش ابتدا رشته پالس را بار دیگر در پالس مثلثی ضرب میکنیم. حاصل این ضرب ، ضریبی از انرژی پالس که در قسمت های قبل محاسبه شده، است. نتیجه را بر انرژی پالس تقسیم میکنیم و ضرایب جدیدی را به دست می آوریم. دلیل آنکه ضرایب جدید است ، این است که به سیگنال ما نویز اضافه شده و طبیعتا باعث تغییر دامنه های قبل میشود.

سپس با پیاده سازی برعکس الگوریتم کوانتایز کردن ، سیگنال گسسته دریافت شده را رسم میکنیم. به طوری که ابتدا ضرایب به دست آمده را به نزدیک ترین عدد فرد گرد کرده و آن را به سطح های کوانتیزاسیون ربط میدهیم.

نتیجه مطابق زیر است:

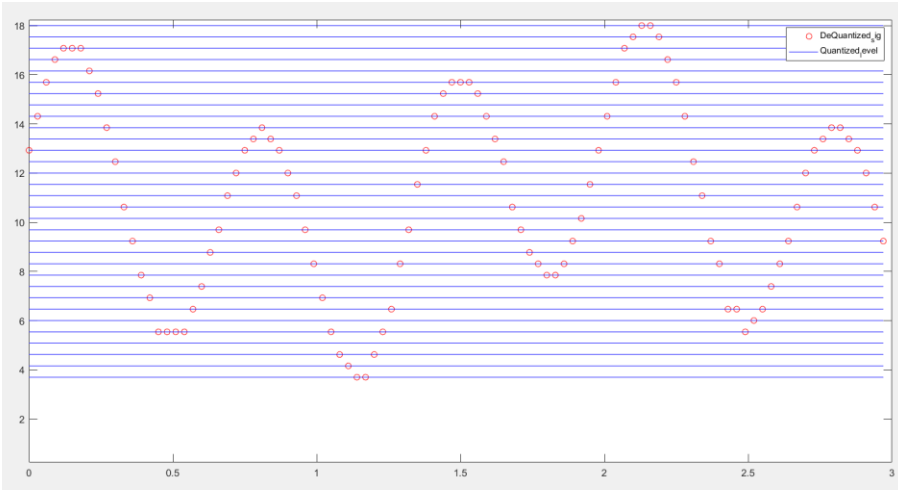

Figure 3.7(Demodulated signal)

برای محاسبه درصد خطای سیگنال دریافتی از دو روش استفاده میکنیم.

یکی با استفاده از دامنه های دریافتی به طوری این دامنه ها هنگامی که به لول های کوانتیزاسیون نسبت داده میشوند ، به خاطر اضافه شدن نویز میتوانند لول های متفاوتی را بگیرند. این اتفاق هنگام رند کردن آن ها به نزدیک ترین عدد فرد اتفاق میافتد.

در این روش درصد خطا برابر با

Amperror 4

روش بعدی استفاده از graycode های ساخته شده است که میتوانیم بیت به بیت را باهم مقایسه میکنیم. در این صورت خطای آن برابر:

Graycode_error 0.8000

جواب آن به درصد میباشد.

قسمت ز : تبدیل سیگنال کوانتایی شده به آنالوگ (امتیازی) و رسم دیاگرام

در اینجا میخواهیم سیگنال به دست آمده را ، به سیگنال آنالوگ همانند آنچه که در ورودی داشتیم تبدیل کنیم.

با توجه به اینکه سیگنال گسسته ای که داشتیم به نزدیک ترین عدد فرد رند شده ، دقت بالایی در گیرنده داشتیم. پس اگر نقاط آن را با بازه زمانی که در ابتدا داشتیم رسم کنیم ، با دقت خوبی سیگنالمان را دمدوله کرده ایم.

نتیجه آن به شکل زیر است.

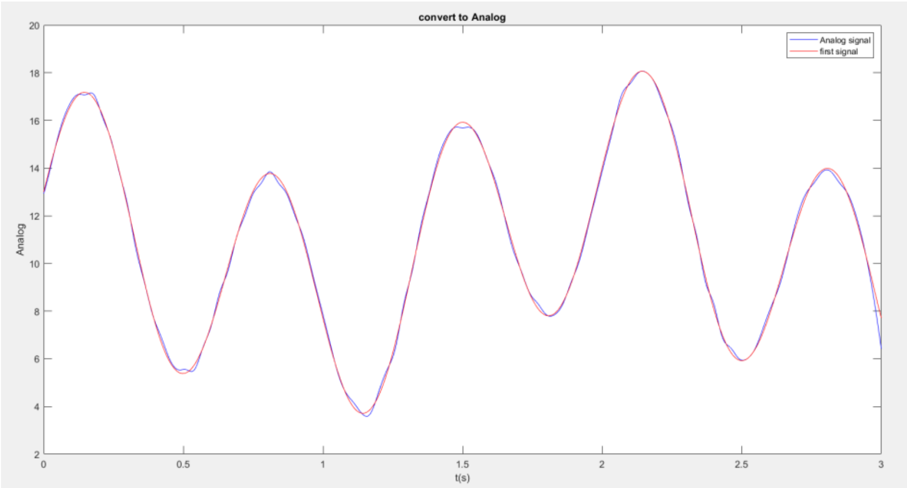

Figure 3.8(Analog signal)

خطای به دست آمده از آن نیز برابر با :

Receive_error 0.0204

میتوان اعداد دیجیتال به دست آمده در ابتدای کوانتایز کردن سیگنال با نویز آن را به اعداد فرد در حد پایین آن(نه لزوما نزدیکترین) تصویر کرد زیرا نویز اضافه شده میتواند دامنه سیگنال ما را اضافه میکند و اما همیشه این برقرار نیست و شاید در حد پایین گرفتن سیگنال نویز ، میتوان آن را با خطای کمتری به آنالوگ تبدیل کرد.

بلوک دیاگرام مدوله کردن

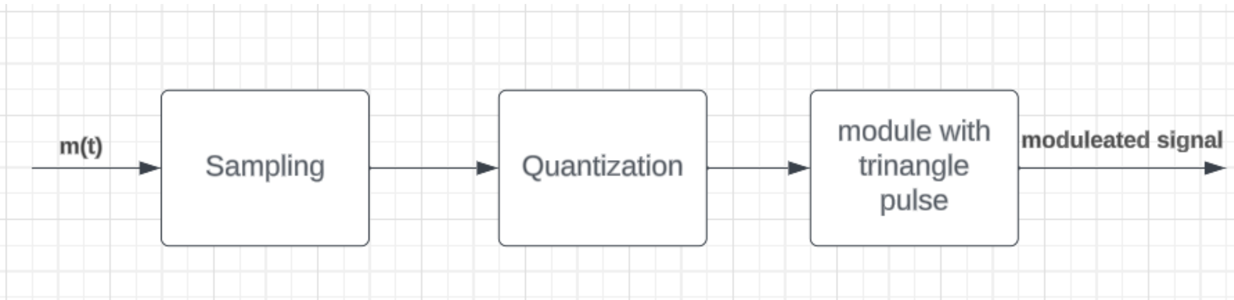

Figure 3.9(Modulation Block diagram)

بلوک دیاگرام دمدوله کردن

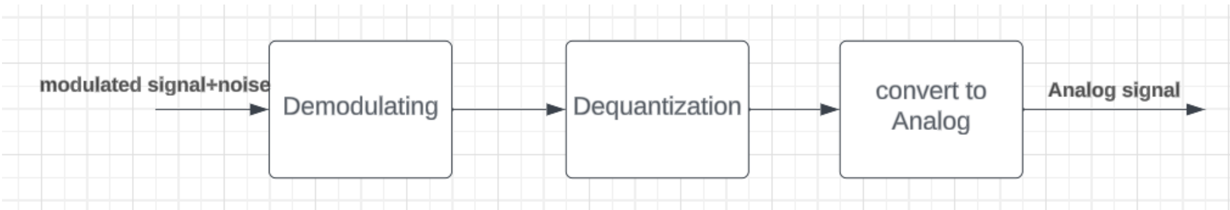

Figure 3.10(Demodulation Block diagram)

* تابع رند کردن به نزدیک ترین عدد فرد ، از سایت متلب برداشته شده.

منبع

https://www.mathworks.com/