Parsa Daghigh 810101419

الف)

1)

فرم کلی الگوریتم line search به صورت زیر است:

می‌خواهیم $\min f(x)$ را پیدا کنیم. ابتدا باید نقطه x را انتخاب کنیم. سپس باید جهت p_k را انتخاب کنیم.
سپس باید stepsize را انتخاب کنیم و در جهت آن حرکت کنیم که با α_k نشان می‌دهیم.
برای آپدیت کردن نقاط خود از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

سپس این آپدیت را تا زمانی ادامه می‌دهیم که چند حالت دارد.

۱) به تعداد iteration تمامی الگوریتم را اجرا کنیم. برای مثال بعد ۱۰۰۰ بار متوقف شود.

۲) تا جایی که الگوریتم همگرا (converge) شود ادامه می‌دهیم.

ب) جهت نزول در تابع که با p_k آن را معرفی کردیم رابطه نزدیکی با گرادیان دارد زیرا
ما می‌خواهیم در جهت نزولی حرکت کنیم که با گرادیان می‌شود آن را توصیف کرد.

به عبارت ریاضی داریم:

$$\nabla f(x_k)^T p_k < 0$$

p_k باید شرط روبه‌رو را داشته باشد.

ج) روش های یافتن stepsize به دو روش کلی exact و inexact تقسیم می‌شود.
از روش های معروف در الگوریتم های exact که به دنبال پیدا کردن بهترین α_k هستند می‌توان
به روش Newthon- Rahpson اشاره کرد. در این روش باید به فرمول زیر α_k را آپدیت کنیم

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{f'(\alpha_k)}{f''(\alpha_k)}$$

می‌بینیم که تا converge کند. با محاسبه مشتق می‌توان این
مشتقات را محاسبه کرد.

از روش های inexact (تقریبی) می‌توان به روش backtracking اشاره کرد. در این

روش ما ابتدا با یک α_k رندم شروع می کنیم و تا زمانی که نامساوی زیر صادق باشد به کار خود ادامه می دهیم.

$$f(x+\alpha p) \le f(x) + c_1 \alpha \nabla f(x)^T p \implies 0<c_1<1$$

درواقع این یک شرط کافی برای پیدا کردن بهترین α است پس یک روش ترتیبی محسوب می شود.

روش دیگری هم به نام wolf وجود دارد که با شرط زیر آپدیت می کند. مانند قبل α رندم داریم و:

$$f(x+\alpha p) \le f(x) + c_1 \alpha \nabla f(x)^T p \quad \text{و} \quad |\nabla f(x+\alpha p)^T p| \le c_2 |\nabla f(x)^T p|$$

ت) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2^2)^2 \qquad x_0^T = (0,1)\ ,\ p_0^T = (-1,-1)$

می خواهیم نشان دهیم p جهتی نزولی است. ابتدا گرادیان را محاسبه می کنیم.

$$\nabla f(x)^T = (2x_1 + 2x_2^2\ ,\ 4x_2^3 + 4x_1 x_2)$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0)^T p_0 = (2(0) + 2(1)^2)(-1) + (4(1)^3 + 4(0)(1))(-1)$$

$$= -2 - 4 = -6 < 0 \Rightarrow \nabla f(x_0)^T p_0 < 0$$

پس طبق صورت مسئله نشان دادیم که جهت نزولی است.

حال مسئله بهینه سازی روبه رو را داریم: $\min_{\alpha>0} f(x_k + \alpha p_k)$

$$k=0 \Rightarrow f(x_0 + \alpha p_0) = f((0,1)^T + \alpha(-1,-1)^T) = f((-\alpha, 1-\alpha)^T)$$

طبق تعریف f $\Rightarrow f((-\alpha, 1-\alpha)^T) = (-\alpha + (1-\alpha)^2)^2 = (\alpha^2 - 3\alpha + 1)^2$

$$\Rightarrow \min f(x) = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

و می بینیم که هر دو مثبت اند پس $\alpha = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ جواب های بهینه کننده مسئله ما هستند.