③

الف) می توانیم ماتریس A را به فرم ضرب ۳ ماتریس خاص نشان دهیم که به این کار eigen decomposition می گوییم.

اگر A ماتریس $n\times n$ باشد داریم:

$$A = V \Lambda V^{-1}$$

حال ۳ ماتریس را توضیح می دهیم،

$V_{n\times n}$ از کنار هم گذاشتن ستون هایی که هر کدام از این ستون ها eigen vector های A هستند بدست می آید.

$\Lambda_{n\times n}$ ماتریس قطری است که هر کدام از خانه های قطری eigen value ماتریس A است.

$V^{-1}_{n\times n}$ معکوس وارون ماتریس V است که بالاتر تعریف شد.

مثال: اگر $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ داریم:

محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

$$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right)=0$$

$$\Rightarrow (4-\lambda)(3-\lambda)-2=0 \Rightarrow \lambda^2-7\lambda+10=0 \Rightarrow \lambda_1=5,\ \lambda_2=2$$

$$\lambda=2 \Rightarrow AV=\lambda V \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4v_1+v_2=2v_1 \\ 2v_1+3v_2=2v_2 \end{cases} \Rightarrow v_1=-1\ v_2=+2$$

$$\lambda=5 \Rightarrow AV=\lambda V \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4v_1+v_2=5v_1 \\ 2v_1+3v_2=5v_2 \end{cases} \Rightarrow v_1=1\ v_2=1$$

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad V^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = V \Lambda V^{-1} \checkmark$$

ب) در روش نیوتن با استفاده از فرمول زیر آپدیت می کنیم.

$$x_{k+1} = x_k - H_f^{-1}(x_k)\nabla f(x_k)$$

حال به دلیل مشکلاتی که H دارد (در سؤال ۲ به این موضوع پرداخته شده) باید ماتریس H را ترتیب بزنیم. یک راه این است که H را با eigen decomposition به حاصل ضرب ۳ ماتریس بنویسیم.

$$H = V \Lambda V^{-1}$$

حال می‌خواهیم H حتماً positive definite شود. برای اینکار کافی است ماتریس Λ را به طریق زیر تغییر دهیم.

$$\Lambda' = \max(\Lambda, \varepsilon I)$$

اینجا ما مقادیر ویژه منفی را با یک $\varepsilon > 0$ جایگزین می‌کنیم حال H' را به طریق زیر داریم:

$$H' = V \Lambda' V^{-1} \Rightarrow x_{k+1} = x_k - H_f'^{-1}(x_k) \nabla f(x_k)$$

در این روش دیگر در نقاط saddle گیر نمی‌کنیم زیرا $H' > 0$ است.

ب)

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^3 + 3x_1 x_2 + 5x_2^2 + 2x_1^2 x_2$$

$$x_0 = (1 \;\; 0)^T \qquad \nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 + 3x_2 + 4x_1 x_2 \\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_1^2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 24x_1 + 4x_2 & 3 + 4x_1 \\ 3 + 4x_1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x_0) = \nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , H_f(x_0) = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

حال مقادیر ویژه و بردار ویژه H را بدست می‌آوریم.

$$\det(H - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 24-\lambda & 7 \\ 7 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 34\lambda + 191 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 17 \pm 7\sqrt{2}$$

$$(H - \lambda_1 I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 24-\lambda & 7 \\ 7 & 10-\lambda \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow \begin{cases} (24-\lambda_1)v_1 + 7v_2 = 0 \\ 7v_1 + (10-\lambda_1)v_2 = 0 \end{cases}$$

حل با $\lambda_1 = 17 + 7\sqrt{2}$: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

حل با $\lambda_2 = 17 - 7\sqrt{2}$: $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

حال تجزیه مقدار ویژه را می‌نویسیم.

$$H = V \Lambda V^{-1}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 17+7\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 17-7\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda' = \max(\Lambda, \varepsilon I) \overset{\varepsilon=0.1}{=\!=} \begin{pmatrix} 17+7\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 17-7\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

می‌بینیم که Λ' فرقی با Λ نکرده پس H' نیز همان است و داریم:

$$x_1 = x_0 - H_f'^{-1}(x_0)\nabla f(x_0)$$

$$H_f'^{-1} = \frac{1}{191}\begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = (1, 0) - \frac{1}{191}\begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \simeq (0.55 \quad 0.18)$$

$$\Rightarrow x_1 = (0.55 \quad 0.18)$$