6

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) = \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \qquad Ax\leq b \quad , Q\in\mathbb{R}^2 , c\in\mathbb{R}^2 , b\in\mathbb{R}^3$$

$$L(x,\lambda) = \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx + \lambda^T(Ax-b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = Qx + c + A^T\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow Qx + c + A^T\lambda = 0 \Rightarrow x = -Q^{-1}(c+A^T\lambda)$$

جایگذاری $x$ در تابع لاگرانژین :

$$L(-Q^{-1}(c+A^T\lambda),\lambda) = \underbrace{\frac{1}{2}\left((-Q^{-1}(c+A^T\lambda))^T Q(-Q^{-1}(c+A^T\lambda))\right)}_{\mathrm{I}} + \overbrace{c^T(-Q^{-1}(c+A^T\lambda))}^{\mathrm{II}} + \underbrace{\lambda^T(A(-Q^{-1}(c+A^T\lambda))-b)}_{\mathrm{III}}$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}((c+A^T\lambda)^TQ^{-1}QQ^{-1}(c+A^T\lambda)) = \frac{1}{2}(c+A^T\lambda)Q^{-1}(c+A^T\lambda)$$

$$\mathrm{III} = -\lambda^T(AQ^{-1}(c+A^T\lambda)) - b^T\lambda$$

$$\Rightarrow L(-Q^{-1}(c+A^T\lambda),\lambda) = \frac{1}{2}(c+A^T\lambda)Q^{-1}(c+A^T\lambda) - c^TQ^{-1}(c+A^T\lambda) - \lambda^T(AQ^{-1}(c+A^T\lambda)) - b^T\lambda$$

$$\Rightarrow L(-Q^{-1}(c+A^T\lambda),\lambda) = -\frac{1}{2}(c+A^T\lambda)^TQ^{-1}(c+A^T\lambda) - b^T\lambda$$

$$\max_{\lambda\geq 0} -\frac{1}{2}(c+A^T\lambda)^TQ^{-1}(c+A^T\lambda) - b^T\lambda$$

$$\Rightarrow \min_{\lambda\geq 0} +\frac{1}{2}(c+A^T\lambda)^TQ^{-1}(c+A^T\lambda) + b^T\lambda$$

مسئله دوگان مسئله بهینه بالا است .