(4) مرز تصمیم جایی است که Discriminant functions ما برابر باشند.

طبق Hands-on درس می‌دانیم

$$g_1(x) = -\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T \Sigma_1^{-1}(x-\mu_1) - \frac{1}{2}\ln|\Sigma_1| + \ln P(C_1)$$

$$g_2(x) = -\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T \Sigma_2^{-1}(x-\mu_2) - \frac{1}{2}\ln|\Sigma_2| + \ln P(C_2)$$

$$g_1(x) = g_2(x)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T \Sigma_1^{-1}(x-\mu_1) - \frac{1}{2}\ln|\Sigma_1| + \ln P(C_1) = -\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T \Sigma_2^{-1}(x-\mu_2) - \frac{1}{2}\ln|\Sigma_2| + \ln P(C_2)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1-2 \\ x_2-3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1-2 \\ x_2-3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\ln 4 + \ln 0.6 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1-5 \\ x_2-1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1-5 \\ x_2-1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\ln 6 + \ln 0.4$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-2)^2}{4} + (x_2-3)^2\right) \underbrace{-\frac{1}{2}\ln 4 + \ln 0.6}_{\mathrm{I}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-5)^2}{2} + \frac{(x_2-1)^2}{3}\right) \underbrace{-\frac{1}{2}\ln 6 + \ln 0.4}_{\mathrm{II}}$$

$$\text{constant terms} = \mathrm{I} - \mathrm{II} = -\frac{1}{2}\ln\frac{4}{6} + \ln\frac{0.6}{0.4} = \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}$$

$$\frac{(x_1-2)^2}{4} + (x_2-3)^2 - 3\ln\frac{3}{2} = \frac{(x_1-5)^2}{2} + \frac{(x_2-1)^2}{3}$$

$$3(x_1-2)^2 + 12(x_2-3)^2 - 36\ln\frac{3}{2} = 6(x_1-5)^2 + 4(x_2-1)^2$$

$$3(x_1^2-4x_1+4) + 12(x_2^2-6x_2+9) - 36\ln\frac{3}{2} = 6(x_1^2-10x_1+25) + 4(x_2^2-2x_2+1)$$

$$-3x_1^2 + 48x_1 - 34 - 36\ln\frac{3}{2} + 8x_2^2 - 64x_2 = 0$$

$$8x_2^2 - 64x_2 - 3x_1^2 + 48x_1 - 34 - 36\ln 3/2 = 0$$

می‌بینیم که به یک معادله به فرم $a x_1^2 + b x_2^2 + c x_1 + d x_2 + e = 0$ رسیدیم که

در واقع hyperquadric ای است که مرز تصمیم بین C_1 و C_2 است.