به‌نام پاک آفریدگار

پروژه درس نظریه و الگوریتمهای گراف

دانشکدهٔ مهندسی و علوم کامپیوتر

مدرس: فرشاد صفایی، اردیبهشت ماه ۱۴۰۲

ارزیابی تاب‌آوری و استحکام گراف‌ها

۱- مقدمه

استحکام و تاب‌آوری در گرافها و شبکه‌های اجتماعی و پیچیده و همچنین زیرساخت‌های ارتباطی امروزی یکی از ویژگیهای حیاتی و اساسی به شمار میرود. در طی سالیان اخیر این موضوع به یکی از زمینه های پژوهشی مورد علاقه و رو به رشد تبدیل شده است. این زمینه پژوهشی به دنبال آن است تا راه‌کارها، مکانیزم‌ها و معیارهایی را جهت بهبود اتصالپذیری گرافها و شبکه‌ها در برابر خرابیهای تصادفی و حملات سیستماتیک جستجو کند. از این‌رو، معیارهای مختلف و متنوعی برای سنجش و ارزیابی میزان استحکام و تاب آوری گرافها و شبکه‌های پیچیده ارائه شده است. استحکام هر شبکه معمولاً براساس تحمل‌پذیری اشکال و آسیب‌پذیری آن در برابر خرابیهای تصادفی و حملات هدفمند صورت میپذیرد و پژوهشهای بسیاری برای تعیین طراحی شبکه‌ای با استحکام بهینه انجام شده است.

در ادبیات ارزیابی استحکام گرافها و شبکه‌های پیچیده و اجتماعی، معیارهای مختلفی با هدف تبیین و ارزیابی تاب‌آوری گرافها ارائه شده است. هدف از انجام این پروژه آن است که در ابتدا، با برخی از مهمترین این معیارها آشنا شویم. سپس در گام بعدی، به کمک این معیارها نشان دهیم که چگونه میتوان با استفاده از آن‌ها، استحکام و میزان تاب‌آوری گرافها و شبکه‌ها را ارزیابی کرد و نیز گرافهایی با تاب‌آوری بالا ساخت.

معیارهایی که در این پروژه مورد ارزیابی قرار میگیرند به رده معیارهای مبتنی بر برش مینیمم[1] تعلق دارند که در بخش بعدی به تفصیل درباره آنها صحبت خواهیم کرد.

۲- کلاس معیارهای مبتنی بر برش مینیمم

معیارهای مبتنی بر برش مینیمم را میتوان به مانند اشتقاقی از مساله اتصالپذیری کلاسیک نگاه کرد. یکی از مشکلات اتصالپذیری کلاسیک آن است که درباره مولفه‌ها و زیرشبکه‌های به‌جامانده پس از ناهمبندی شبکه بحثی به میان نمی‌آورد و نیز تنزل کارآیی[2] گرافها را با خرابی گره‌ها و لینک‌های مستقل ارزیابی نمیکند. در معیارهای مبتنی بر برش مینیمم، مسالهٔ اصلی یافتن مینیم تعداد مولفه‌هایی از شبکه است که حذف آن‌ها موجب ناهمبندی شبکه خواهد شد. در برخی مواقع و به ویژه برای گراف‌هایی با سایز بزرگ این مساله ممکن است در رده مسایل NP-complete قرار بگیرد.

۲-۱. اتصال‌پذیری یالی و گره‌ای

معیارهای اتصالپذیری اتصالپذیری گره ای[3] و یالی، عوامل مهمی در ارزیابی استحکام گرافها به شمار میروند. در این پروژه بناداریم تا ارتباطی را بین اتصالپذیری گره ای و تقارن در گرافها ایجاد کنیم. سپس نشان خواهیم داد که برای داشتن یک شبکه مستحکم، به دو شرط اتصالپذیری بهینه[4] (OC) و مشابهت گره ای[5] (NS) به طور توامان و همزمان نیاز در یک گراف هست. و این پرسش مهم پدید می‌آید که چگونه میتوان گرافهایی را با داشتن این دو ویژگی طراحی کرد.

تعریف ۱ (اتصالپذیری گره ای κ): *مینیمم تعداد گره‌هایی است که حذف آنها سبب ناهمبند (ایزوله) شدن گراف G میشود*

تعریف ۲ (اتصالپذیری یالی λ): *مینیمم تعداد یالهایی است که حذف آنها سبب ناهمبند شدن گراف G میشود.*

برای مثال، در شبکه کامل K_n، $\kappa=\lambda=n-1$ است.

قضیه ۱: *برای هر گراف مانند G داریم $\kappa\leq\lambda\leq\delta$ طوریکه δ مینیمم درجه گراف است.*

---

[1] Minimum cut
[2] Performance degradation
[3] Node connectivity
[4] Optimally connectivity
[5] Node similarity

لازم به ذکر است که این نامساوی برای گراف کامل Kn برقرار نیست؛ زیرا نمیتوان با حذف رئوس آنرا ناهمبند ساخت. به منظور برقراری این نامساوی برای Kn معمولاً اتصالپذیری گره را به شکل κ-1 تعریف میکنند.

تعریف ۳: *چنانچه در گرافی $\kappa=\lambda=\delta$ باشد، در اینصورت گراف را متصل بهینه گویند که در این پروژه آنرا با مخفف OC نمایش میدهیم.*

دلیل نامگذاری هم این است که در چنین گرافی، تعداد اتصالات، تنوع گرهها و لینکها زیاد بوده و شبکه تا حد امکان مستحکم خواهد شد.

خواسته ۱: فکر میکنید چه استراتژهایی برای ایجاد و ساخت گرافی با ویژگی OC وجود دارد؟

تعریف ۴ (چسبندگی[۶]): *معیارهای اتصالپذیری معمولاً برای کل گراف تعریف میشوند، اما معیار چسبندگی برای تک تک گرهها قابل تعریف است. برطبق تعریف، چسبندگی گرهای مانند v از گراف G عبارتست از اختلاف میان اتصالپذیری یالی در گراف G و اتصالپذیری یالی در غیاب گرهٔ v (یعنی گره v و تمامی لینکهای متصل به آن از گراف G حذف شوند).*

کران بالای چسبندگی ۱ است و به صورت ریاضی به شکل زیر تعریف میشود

$$\lambda_G - \lambda_{G\setminus v}$$

بسته به میزان چسبندگی مرتبط با هر گره، میتوان هر گره را به سه دسته تقسیم بندی کرد: (۱) منفی: یعنی حذف یا خرابی این گره (گره گلوگاهی) منجر به افزایش کل اتصالپذیری میشود؛ (۲) خنثی: یعنی حذف یا خرابی این گره تاثیری در اتصالپذیری کل ندارد و (۳) مثبت: یعنی حذف یا خرابی این گره تاثیری منفی دارد و از اتصالپذیری گراف میکاهد. بدین سیاق، بسته به اینکه هر گراف چه تعداد از انواع گرههای (۱) تا (۳) را داشته باشد، میتوان گراف را ارزیابی کرد.

تعریف ۵: *گروه یک مجموعه متناهی/نامتناهی از عناصر با عملیات دودویی همراه با چهار خاصیت بستار (closure)، انجمنی، همانی و وجود عضو وارون است. به گروهی که هر عضوش وارون پذیر باشد، مونوئید[۷] گفته میشود.*

تعریف ۶ (گروه جایگشتی): *یک گروه متناهی است که عناصر آن جایگشتهایی از یک مجموعه مفروض و عملیات گروه، ترکیبی از جایگشتها در گراف G است.*

تعریف ۷ (خودریختی[۸]): *جایگشتی مانند π از مجموعه رئوس V_G است که لینکها را حفظ میکند. بدین معنی که، اگر u,v دو راس مجاور هم (یال) از گراف G باشند، آنگاه π_u و π_v نیز مجاور هم (یالی از G) خواهند بود. یعنی $\pi \in S_{|V_G|}$ که مجموعه Sn، گروه جایگشتی بر روی n راس گراف G است و مجاورت/عدم مجاورت رئوس را حفظ میکند و به بیان دیگر، G با خودش یکریخت است و داریم*

$$\mathrm{Aut}_G \times V_G \to V_G$$

$$\mathrm{Aut}_G \triangleq \{\exists \pi : V_G \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} V_G \ \ni\ \forall u,v \in V_G, (u,v)\in E_G \Rightarrow (\pi_u,\pi_v)\in E_G\}$$

بایستی اشاره کنیم که خودریختی شکلی از تقارن است که گراف به خودش نگاشت میشود و همزمان اتصالپذیری یالی–راسی آن حفظ میگردد. پس میتوان خودریختی را به یک معنا، تقارن در شی دانست و آنرا به روشی برای نگاشت یک شئ به خودش تعبیر کرد به نحوی که تمامی ساختار شئ مورد نظر دست نخورده باقی بماند. در واقع، خودریختی، یعنی جایگشتی از شماره رئوس یک گراف. یعنی اگر گرافی دارای راسهایی با برچسب ۱ تا n-1 باشد و هر جایگشتی از این اعداد یک گراف را شکل دهد، آنگاه این گرافها با یکدیگر یکریخت[۹] خواهند بود. لازم است اشاره کنیم که مجموعه خودریختیهای یک گراف تحت عمل

---

[6] Cohesiveness
[7] Monoid
[8] Automorphism
[9] Isomorphic

ترکیب توابع، تشکیل یک گروه میدهند. توجه داشته باشید که نگاشت همانی یک گراف به خودش نیز همیشه یک خودریختی است که گاهی اوقات به آن خودریختی بدیهی[۱۰] گفته میشود.

تعریف ۸: *گراف G را مشابهت گره ای (NS) گویند اگر و تنها اگر برای هر دو گره دلخواه u,v داشته باشیم*

$$\forall u,v\in V_G, \exists \pi\in \mathrm{Aut}_G \ni \pi_u = v$$

بدین ترتیب، ویژگی NS در گراف به معنای آن است که همگی گرهها در آن مشابه با یکدیگر به نظر برسند. معمولاً به ویژگی NS، راس–انتقالی[۱۱] نیز گفته میشود. در حقیقت، گراف راس–انتقالی، گرافی است که هر زوج راس آن تحت برخی عناصر گروه خودریختیاش با یکدیگر معادل باشند. برای مثال، گراف رادو (Rado)، گراف مسیر، درختهای منتظم، گراف کیلی (Cayley) و گراف تتراهدرون بریده شده[۱۲]، همگی نمونههایی از گرافهای راس–انتقالی (NS) به شمار میروند. توجه داشته باشید که ویژگی NS الزاماً به معنای وجود تقارن در گراف نیست. ویژگی مشابهت گرهای در کاربردهای پردازش موازی ، مسیریابی بهینه و توزن بار کاربرد دارد. ویژگی NS در گرافها همچنین میتواند به معنای یکسان دیده شدن اهمیت گرهها از دید مهاجم و در نتیجه تحمل پذیری بیشتر این نوع گرافها در برابر حملات تصادفی و هدفمند باشد.

قضیه ۲: *برای هر گراف همبند با ویژگی NS، روابط زیر برقرارند*

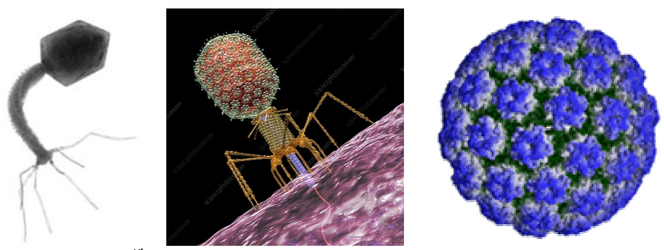
1) $\lambda=\delta$
2) $\kappa\geq 2(\delta+1)/3$
3) if $\delta\leq 4$ then $\kappa=\delta$
4) if G is symmetric then $\kappa=\delta$

تعریف ۹: *گراف G متقارن است اگر و تنها اگر برای هر دو لینک (u,v) و (x,y) از مجموعه یالهای G داشته باشیم*

$$\forall (u,v),(x,y)\in E_G, \exists \pi\in \mathrm{Aut}_G \ni \pi_u = x \wedge \pi_v = y$$

بدین ترتیب میبینیم که ویژگی تقارن، حافظ لینک است و وجود آن میتواند به این معنا باشد که همگی لینکها مشابه به نظر میرسند. به عبارت دیگر، برای هر دو لینک e1=(u,v) و e2=(x,y) از مجموعه یالهای گراف G، جایگشتی مانند π وجود دارد که $\pi_{e_1}=e_2$. به همین دلیل به ویژگی تقارن گاهی اوقات یال–انتقالی نیز گفته میشود.

گراف کامل K_n و گرافهای سیکل Cn متقارن هستند. همچنین، به عنوان نمونههایی از گرافهای متقارن میتوان به پلی هدراهای منتظم مانند تتراهدرون با δ=3، مکعب با δ=3، اکتاهدرون با δ=4 (۴–منتظم)، دودکاهدرون با δ=3 (۳–منتظم)، آیکوزاهدرون با δ=5 (۵–منتظم)، هایپرکیوب q بُعدی با δ=q و تعداد رئوس $n=2^q$، اشاره داشت. شبکه توروس p×q نیز با فرض p,q≥3 دارای ویژگی NS است و در صورتیکه p=q باشد، متقارن نیز هست. توروس q بعدی، همبند بهینه (OC) با κ=λ=δ=2q است. گرافهای Rado نیز متقاراناند و تعداد بینهایت راس و یال دارند. آیکوزاهدرون یک پلی هدرون ۲۰ وجهی با ۳۰ یال، ۱۲ راس (هر راس درجه ۵) است. واژه "icos" برگرفته از یونانی به معنای ۲۰ و "hedron" هندو–اروپایی به معنای صندلی یا نشیمن است. هر وجه آن یک مثلث متساوی الاضلاع[۱۳] است. پوسته بیرونی برخی ویروسها (شکل ۱ (الف)) مشابه با آیکوزاهدرون هستند. در شکل ۱(ب) یک باکترویفاژ نشان داده شده است.

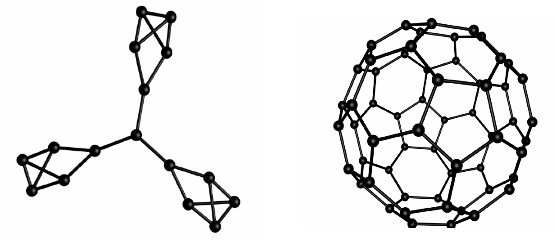


(الف) ویروس پاپیلومای انسانی (HPV)　　(ب) نمایش باکتریوفاژ[۱۴]

شکل ۱. نمایش هندسی ویروس و باکتریوفاژ

[10] Trivial automorphism
[11] Vertex-transitive
[12] Truncated tetrahedron
[13] Equilateral Triangle
[14] Bacteriophage

بد نیست اشاره کنیم که اگر گراف G متقارن و همبند باشد، حتما دارای ویژگی NS (راس–انتقالی) است و گراف با ویژگی NS، منتظم نیز هست. پس تقارن میتواند به معنای منتظم بودن نیز باشد. لیکن عکس قضیه الزاماً برقرار نیست. یعنی، گراف G ممکن است منتظم باشد اما NS نباشد. برای مثال در شکل ۲، گراف (a) منتظم با درجه ۳ است؛ اما متصل بهینه (OC) نیست. زیرا $\kappa=\lambda=1$. همچنین، مشابهت گره ای نیز ندارد. در گراف (b) یا توپ فوتبال[۱۵]، مینیمم درجه $\delta=3$ است و همچنین، $\kappa=\lambda=\delta=3$ است یعنی، گراف توپ فوتبال OC است. همچنین این گراف، NS هم هست؛ زیرا هر گره آن در اشتراک یک ۵ ضلعی و دو ۶ ضلعی قرار دارد. با این حال، تپ فوتبال متقارن نیست زیرا برخی لینکها، فصل مشترک یک ۵ و ۶ ضلعی هستند حال آنکه، برخی دیگر از لینکها فصل مشترک دو ۶ ضلعی هستند. به بیان دیگر، گراف یال–انتقالی (مشابهت لینکی) نیست.



(a) (b)

شکل ۲. نمایش دو گراف منتظم؛ (الف) عدم شباهت گرهای (NS) و (ب) وجود شباهت گرهای اما عدم تقارن

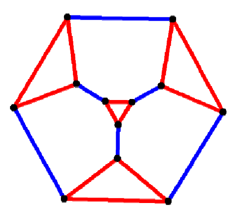
یک قضیه بیان میکند که برای گرافهای همبند با ویژگی NS و مینیمم درجه $\delta\leq4$ رابطه $\kappa=\delta$ برقرار است. در توپ فوتبال نیز، مینیمم درجه ۳ و چون ویژگی NS دارد، این قضیه برقرار است. توپ فوتبال، یک truncated icosahedron است که ۱۲ پنج وجهی و ۲۰ شش وجهی دارد و یکی از سیزده پلی هدراهای شبه منتظمی است که افلاطون و کپلر آنها را مطالعه کردهاند. اکثر این پلی هدراها، ویژگی توامان NS+OC را دارند.

اجسام افلاطونی[۱۶]، چندوجهیهای منتظم هستند؛ یعنی محدب بوده و وجوه آنها چندضلعیهای متجانس منتظم با زوایای مساوی است. به گرافهای متناظر با اجسام افلاطونی، گراف افلاطونی میگویند. در بالا و در ذیل تعریف تقارن، به پنج وجهیهای منتظم اشاره شد. در چندوجهی P و گراف G متناظر با آن، قضیه اولر به مانند گرافهای مسطح وجود دارد.

بایستی اشاره کنیم که اگر گرافی متقارن، منتظم و همبند باشد اما ویژگی NS را نداشته باشد، حتماً دوبخشی است. گراف $K_{n,n}$، هم راس–انتقالی و هم یال–انتقالی است؛ لیکن، گراف $K_{m,n}$, $m\neq n$ و گراف Folkman راس–انتقالی نیستند. بدین ترتیب، گراف ستاره ($K_{1,n}$) یال–انتقالی است اما راس–انتقالی (NS) محسوب نمیشود و در بین گرافها از ناهمگنی بالاتر و تحملپذیری اشکال کمتری برخوردار است.

خواسته ۲: در این پروژه به دنبال آن هستیم تا بتوانیم وجود دو ویژگی توام OC و NS در گرافها را بررسی کرده و از آن برای ساخت شبکههای مستحکم بهره ببریم. بنابراین جستجو کنید و ببینید که چه ابزارها و نرمافزارهایی وجود دارند که میتوانند تمامی خودریختیهای یک گراف را شمارش کنند؟ فهرستی از این نرم افزارها را تهیه کنید. همچنین، بررسی کنید ببینید که آیا این ابزارها قادرند تا شروط NS، تقارن و نیز ویژگی OC را بررسی کنند؟

قضیه ۳: *فرض کنید گراف G منتظم و OC با $\delta\geq3$ باشد. در اینصورت اگر برخی یا تمام گرهها را با زیرگرافهای همبند کامل K_δ جایگزین کنید، گراف حاصل متصل بهینه ($\kappa=\lambda=\delta$) و منتظم خواهد بود.*



شکل ۳. تتراهدرون بریده شده

این فرآیند را که به شکل تکراری بر روی گرههای گراف انجام میشود، truncation/Mutilation میگویند. برای مثال در شکل ۳، شبکه تتراهدرون بریده[۱۷] نشان داده شده است. همانطور که میبینیم هر گره آن با یک مثلث جایگزین شده است. هنگامیکه فرآیند truncation/Mutilation به صورت تکراری برای برخی گرههای گراف انجام شود، نتیجهاش تولید یک شبکه نامتقارن اما OC خواهد بود.

[15] Soccer-ball
[16] Platonic solids

خواسته ۳: جدولی مانند جدول زیر فراهم سازید و به کمک دانش گراف و نیز نرم‌افزارهایی که در خواسته ۲ پیدا کرده‌اید، خواص گرافهای زیر را از منظر ویژگی OC+NS و متقارن بودن بررسی کنید.

گراف	اندازه (تعداد گره)	تعداد یال	ویژگی OC	ویژگی NS	ویژگی تقارن
تتراهدرون					
اکتاهدرون					
مکعب					
آیکوزاهدرون					
توپ فوتبال					
تتراهدرون بریده					
هایپرکیوب					
توروس					
...					

ادعا شده که اتصال تصادفی گره‌ها در مدل شبکه های تصادفی ER وقتی یک یال بین دو گره با یک احتمال مشخص p برقرار گردد، میتواند به عنوان یک استراتژی برای طراحی شبکه‌های OC مورد استفاده واقع شود. این استراتژی به ویژه برای شبکه‌های تصادفیِ به قدر کافی بزرگ میتواند سودمند باشد. قضیه زیر ناظر به این موضوع است.

قضیه ۴: *در هر گراف تصادفی مدل ER به سایز n وقتی احتمال همبندی $p\to 1$ در حالت حدی $n\to\infty$ شرط OC محقق خواهد شد. در این وضعیت، توزیع درجه از پوآسن (گسسته) و طبق قضیه حدمرکزی از توزیع نرمال (حالت پیوسته) تبعیت خواهد کرد.*

خواسته ۴: تعدادی گراف تصادفی مدل ER (این تعداد هرچه بیشتر باشد نتیجه شبیه‌سازی شما بهتر خواهد شد) با سایزهای ۷ تا ۳۰ یا بیشتر گره با متوسط درجه $\sqrt{n}$ تولید کنید. سپس درصد فراوانی گرافهایی را شمارش کنید که ویژگی OC دارند. نموداری فراهم سازید که محور عمودی درصد فراوانی و محور افقی برحسب سایز شبکه‌ها باشد و درصد گرافهایی را که OC هستند، نشان دهد که چگونه برحسب n (سایز گرافها) تغییر پیدا میکند. اگر به نقاط به دست آمده خط (منحنی) رگرسیون برازش کنید، از توزیعی پیروی میکند؟ تحقیق کنید ببینید که آیا در حالت حدی $n\to\infty$، گرافهای تصادفی مدل ER دارای ویژگی NS هستند؟ چرا؟

در کلاس دیدیم که پارامتر قطر مشخصه مهمی در تبیین گرافها است. برای نمونه، گراف ring با سایز n قطری برابر $\lfloor n/2 \rfloor$ دارد که در میان شبکه‌های میان ارتباطی، بدترین حالت، برای شبکه‌ای با مشابهت گره‌ای است.

قضیه ۵: *برای هر گراف منتظم مدل ER به سایز n و $\delta\geq 3$ و قطر D داریم*

$$\begin{cases} a) & n \leq (\delta(\delta-1)^D - 2)/(\delta-2) \\ b) & D \geq \ln(n-1)/\ln\delta \end{cases}$$

برای مثال در گراف کامل K_n، $\delta=n-1, D=1$ و در گراف پیترسن، $n=10, \delta=3, D=2$ است. این گراف یک گراف cubic است (با cube graph و هایپرکیوب تفاوت دارد). گراف مکعبی، گرافی است که درجه تمامی رئوس آن ۳ است؛ یا به عبارتی ۳–منتظم است. این گرافها ، trivalent graph نیز نام دارند. معمولاً در گرافهای تصادفی منتظم، قطر D تقریباً دو برابر این مقدار است. نکته جالب در شرط (الف) از قضیه ۵ این است که برای مثال، تمامی گرافهایی با $\delta=4$ و $D=2$، دارای سایزی کوچکتر از ۱۵ هستند (یعنی $n\leq 15$). بنابراین، اگر بخواهیم یک گراف تصادفی منتظم با ۱۶ گره و $\delta=4$ بسازیم، طبق بند (ب) از قضیه ۴، قطر $D\approx 2$ خواهد شد که با بند (الف) در تناقض است؛ یعنی اساساً چنین گرافی وجود ندارد. در جدول ۲، قطر برخی شبکه‌ها که OC+NS هستند، فهرست شده است. خاصیت تقارن نیز در آنها بررسی شده است.

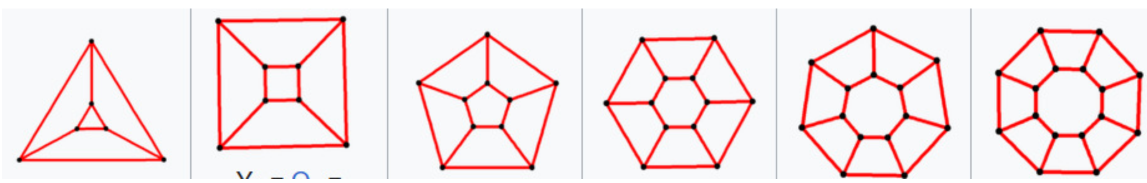
---

[17] Truncated tetrahedron

خواسته ۵: جدولی مانند جدول زیر فراهم سازید و خواص گرافهای مندرج در آن را بررسی و درج کنید.

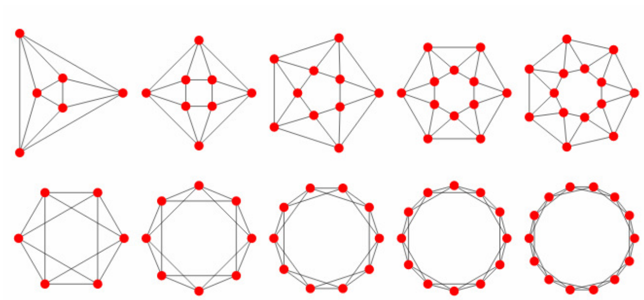
گراف	اندازه (تعداد گره)	تعداد یال	ویژگی OC	قطر	ویژگی NS	ویژگی تقارن
هایپرکیوب						
Torus						
Ring						
Prism						
Antiprism						
Twisted Prism						
…						

در جدول فوق، نام گرافهایی مانند prism و Antiprism درج شده است. برطبق تعریف، گراف prism گرافی است که دارای یکی از prismها در اسکلت خود است. prism یک پلی هدرون است که از یک پایه چندوجهی n طرفه[18] و یک کپی دوم از پایه و n وجه (face) که همگی parallelograms هستند برای اتصال سایدهای متناظر تشکیل شده است. برای نمونه در شکل ۴، گراف Triangular prism با ۶ راس و ۹ یال، Cubical graph با ۸ راس و ۱۲ یال، Pentagonal prism graph با ۰ راس و ۱۵ یال، Hexagonal prism graph با ۱۲ راس و ۱۸ یال، Heptagonal prism graph با ۱۴ راس و ۲۱ یال و بالاخره، Octagonal prism graph با ۱۶ راس و ۲۴ یال به تصویر کشیده شده اند.



شکل ۴. نمایش گرافهای پریزم با حلقه‌های درونی

همچنین برطبق تعریف، گراف n-antiprism گرافی است که با متناظر با اسکلت یک آنتیپریزم است. گرافهای آنتی پریزم، پلی هدرال و مسطح بوده و 2n راس و 4n یال دارند. همچنین با گرافهای circulant یکریخت هستند (به شکل ۵ نگاه کنید).



شکل ۵. گرافهای آنتی پریزم و نمایش حلقه‌های مضاعف آنها

قضیه ۶: *در گرافی به سایز n و قطر D که ویژگی NS دارد، متوسط فاصله عبارتست از*

$$\frac{nD}{2(n-1)} \leq \prec d \succ \leq D$$

[18] *n*-sided polygon base

تعریف ۱۰: *گراف همینگ که با نماد $H(d,q)$ نشان داده میشود، گرافی است که تمامی گره‌های آن بردارهای $(a1,\ldots,ad)$ است به قسمیکه $ai\in\{0,\ldots,q-1\}$ مابین دو بردار، در صورتی لینک برقرار میشود که اختلاف دقیقاً برابر با یک موقعیت باشد؛ یعنی فاصله همینگ برابر با ۱ باشد. به بیان دیگر، گرافهای همینگ ضرب کارتزینی از d کپی از گرافهای کامل Kq هستند.*

تعداد رئوس گراف همینگ برابر q^d، عدد کروماتیک آن برابر q، قطر آن برابر d و تعداد یال آن برابر با $d(q-1)q^d/2$ است. گراف همینگ گرافی متقارن با متوسط درجه آن $d(q-1)$ است و به همین دلیل، $d(q-1)$–منتظم شناخته میشود. افزون براین، گرافهای همینگ، فاصله–متقارن و در نتیجه فاصله–منتظم[19] هستند. خصوصیت فاصله–متقارن که به آن فاصله انتقالی یا مشابهت فاصله‌ای[20] نیز گفته میشود، بدین معنی است که اگر فاصله ژئودزی بین راس u,v با فاصله ژئودزی بین دو راس x,y برابر باشد، آنگاه نگاشتی مانند π وجود دارد که حافظ فاصله (مشابهت فاصله‌ای) است. به واژه ریاضی

$$\forall x, y, u, v \in V_G \text{ where } d_{u,v} = d_{x,y} \quad \exists \pi \in \mathrm{Aut}_G \ni \ \pi_u = x \wedge \pi_v = y$$

چنانچه گرافی فاصله– متقارن باشد، آنگاه متقارن نیز خواهد بود؛ لیکن عکس آن ممکن است برقرار نباشد. گراف فاصله–منتظم نیز یک گراف منتظم است که به ازای هر دو راس u,v از آن، تعداد رئوسی که به فاصله مشخصی از این دو راس قرار دارند تنها به اندازه همین فاصله و نیز فاصله بین u,v بستگی داشته باشد و این امر از نحوه انتخاب u,v مستقل باشد. گرافهای همینگ و هایپرکیوب دو گراف شناخته شده در زمره گرافهای فاصله–انتقالی هستند. از نمونه‌های دیگر میتوان به گرافهای جانسون و گراسمن اشاره داشت.

به ازای d=1، گراف همینگ به گراف کامل Kq ، به ازای q=2 به هایپرکیوب d بعدی $(Q_d\equiv(2,d)\text{-cube})$، به ازای d=2 به lattice دوبعدی و به ازای q=3، به ابرتوروس تبدیل میشود. هایپرکیوب و اَبَرتوروس، گرافهایی unit-distance هستند یعنی فاصله بین هر دو گره دلخواه دقیقاً برابر واحد است؛ به عبارت دیگر، از یک گره به گره دیگر تنها میتوان با یک تغییر در کد دودویی منتسب به آنها گذر کرد.

قضیه ۷: *متوسط فاصله گراف همینگ عبارتست از (اثبات به استقراء)*

$$\prec d \succ = \frac{d(q-1)q^{d-1}}{q^d - 1}$$

نکته مهم دیگری که لازم است بدان اشاره کنیم این است که ویژگی تقارن (مشابهت لینکی) در شبکه‌ها به توازن و تعادل بار ترافیکی در آنها کمک میکند. یعنی هر لینک، حاملِ حجم بار ترافیکی مشخصی به اندازه L است. بدین ترتیب، عدم تقارن در گراف، به معنای آن خواهد بود که برخی لینکها بایستی بار ترافیکی بیشتری را در قیاس با سایر لینکها حمل کنند (L_{max}) و این امر به ازدیاد ترافیک و ازدحام بیشتر در گراف منجر خواهد شد.

قضیه ۸: *اگر گراف G به سایز n، قطر D و مینیمم درجه δ باشد و دارای ویژگی NS همراه با تقارن نیز باشد، آنگاه بار ترافیکی گراف G عبارتست از*

$$L = (n-1) \prec d \succ / \delta$$

فرع قضیه ۸: *چنانچه گراف G متقارن نباشد، آنگاه حداقل بارترافیکی برابر با L است (یعنی $L_{max}\geq L$) که طبیعتاً از حداقل $nD/(2\delta)$ بیشتر خواهد بود.*

خواسته ۶: به عنوان مفروضات شبیه‌سازی، فرض کنید که مابین هر دو گره گراف، یک واحد ترافیک مبادله میشود و جریان ترافیک همواره کوتاهترین مسیرها را انتخاب میکند. در صورت وجود چندین مسیر ، ترافیک بین مسیرها به طور متوازن توزیع خواهد شد. به آزمونهای کمک شبیه‌سازی و فرمولهای تحلیلی بررسی و ارزیابی کنید که حذف و خرابی گره‌ها چه تاثیری بر افزایش بار ترافیکی گرافها و پارامترهای L و L_{max} برجای خواهد گذاشت. ممکن است در یک تعداد شبکه‌ها، این موضوع تاثیر به مراتب کمتری داشته باشد اما در برخی شبکه‌ها نیز تاثیر آن زیاد و قابل توجه باشد. در این خواسته میخواهیم بررسی کنیم که وجود توامان ویژگیهای OC+NS آیا سبب میشود که تاثیر و شدت خرابی گره‌ها کمتر باشد؟ تخریب و حذف گره‌ها مستقیما بر روی بار ترافیکی لینکها یعنی L, L_{max} موثر است و در صورتیکه λ>κ باشد، تعداد مسیرهای مجزای یالی پس از حذف گره یا گره‌های مهم از شبکه ممکن است از تعداد λ به کمتر از آن افت کند. در این صورت چه اتفاقی خواهد افتاد؟ همچنین، تساوی پارامترهای λ و κ به چه معنا خواهد بود؟ تاثیر حذف گره یا گره‌های مهم حداکثر چند عدد از λ مسیر مجزای یالی را خراب خواهد کرد؟

جدولی مانند جدول زیر فراهم سازید و گرافهایی را مورد بررسی و ارزیابی قرار دهید که ویژگی توامان OC+NS دارند. L و L_{max} را برای این گرافها محاسبه کنید. ستون آخر جدول لازم است نشان دهد که اگر درصدی از گره‌ها خراب شوند، افزایش بار ترافیکی بر روی لینکها چنددرصد خواهد بود؟

[19] Regular-distance
[20] Distance-similarity

گراف	اندازه (تعداد گره)	تعداد یال	ویژگی OC	ویژگی NS	ویژگی تقارن	L	L_{max}	درصدافزایش بارترافیکی (خرابی گره‌ها)
Kn								
Torus								
Ring								
Prism								
Antiprism								
همینگ								
...								

۳- گرافها و شبکه‌های دو سطحی[۲۱]

ساخت شبکه‌های دوسطحی با استفاده از دو گراف صورت میپذیرد. یکی گراف مبنا و دیگری گراف هابِ ارتباطی نام دارد که معمولاً با سایز خیلی کوچکتر و قطر کم اختیار میشود. افزون براین، شبکه‌های مبنا و هاب طوری انتخاب میشوند که هر دو شبکه دارای ویژگی OC+NS باشند. بدین ترتیب، مانند آن است که دو ویژگی همبندی بالای گره‌ای و قطر کم را به شکل همزمان در شبکه‌های دو سطحی داشته باشیم. در حالت دو سطحی، تحت یک الگوریتم مشخص (نگاشت پوشا) تعدادی از گره‌های گراف مبنای G به گره‌ای از گراف هاب H متصل میشوند. این نگاشت یک خودریختی از گراف دوسطحی T محسوب میشود.

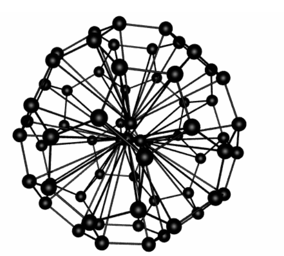
تعریف ۱۱: *گراف دو سطحی با نماد $T(G,H,h)$ نشان داده میشود که در آن G گراف مبنا، H گراف هاب به سایز m با گره‌های $H_1,\ldots,H_m$ است. گرافهای G و H دو ویژگی NS+OC را همزمان دارند. همچنین h یک نگاشت پوشا است که گره‌های G را به H نگاشت میکند. یعنی*

$$\forall v \in V_G, h:\ V_G \rightarrow V_H \ni (v, h(v)) \in E_G$$

از نماد $\hat{H}_i$ برای نمایش مجموعه گره‌هایی از G استفاده میشود که به Hi (گره i ام H) متصل میشوند. برای هر دو گره Hi و Hj از گراف H، یک خودریختی از گراف دوسطحی T وجود دارد، به قسمیکه مجموعه $\hat{H}_i$ (گره‌هایی از G که به گره i از H متصلند) را به $\hat{H}_j$ (گره‌هایی از G که به گره j از H متصلند) نگاشت کند. به عبارت دیگر، ویژگی NS در گراف H برقرار است.

قضیه ۹: *اگر گراف $T(G,H,h)$ دوسطحی بوده و فرض کنیم $\kappa_G \geq 2$ (اتصالپذیری گراف G) و D_G بیانگر قطر G باشد و همچنین فرض کنیم که برای گراف H $\kappa_H > \kappa_G$ و $D_H \leq D_G - 2$، آنگاه T یک گراف OC است که $\kappa_T = \kappa_G + 1$ و $D_T = 2 + D_H$.*

بدین ترتیب میتوان تعدادی گراف دو سطحی از طریق نگاشت گراف‌های مختلف ساخت و پارامترهای مختلف را در آنها ارزیابی کرد. در شکل ۶ شبکه توپ فوتبال دوسطحی نشان داده شده است. گراف مبنای G همان توپ فوتبال شکل ۲(ب) و گراف هاب H نیز تتراهدرون انتخاب شده است. گراف T دوسطحی حاصل، دارای اتصالپذیری گره‌ای ۴ و قطر ۳ است؛ در حالیکه خود توپ فوتبال دارای قطر ۹ و اتصالپذیری گره ای ۳ است. پس میبینیم که ترکیب دوسطحی گرافها میتواند به افزایش اتصالپذیری گره‌ای و کاهش قطر کمک کند که ویژگی ارزشمندی در گرافها به شمار میرود.



شکل ۵. شبکه توپ فوتبال دوسطحی؛ گراف مبنا توپ فوتبال و گراف هاب، تتراهدرون است.

[21] Two-level networks

قضیه زیر درباره بار ترافیکی گرافهای دوسطحی سودمند خواهد بود.

قضیه ۱۰: *اگر $T(G,H,h)$ گراف دوسطحی با گرافهای مبنای G و هاب H باشد و گراف G به سایز n و مینیمم درجه $\delta_G=\kappa_G\geq 2$ باشد. همچنین فرض کنید، H گراف کامل با m گره (یعنی K_m) باشد، آنگاه داریم*

$$\begin{cases} a)\ L(G)_{\max} \leq 3\delta^2 + n/m \\ b)\ L(G \sim H)_{\max} \leq 3(n-\delta)/2 + m - 1 \\ c)\ L(H)_{\max} \leq (1+n/m)^2 \end{cases}$$

بقسمیکه $L(G\sim H)_{\max}$ به معنای بارترافیکی بین لینک‌های گرافهای G و H درون گراف دوسطحی T است.

خواسته ۷: با کمک آزمونهای شبیه‌سازی تعدادی گراف دوسطحی تولید کنید. به اختیار خودتان از تعدادی گراف مشخص مبنا و هاب استفاده کرده و مشخصات انها و گراف دوسطحی حاصل را مورد بررسی و تحلیل قرار بدهید. همچنین در آزمایشهای خود بررسی کنید و ببینید اگر جای گرافهای هاب و مبنا را با یکدیگر تعویض کنید چه تاثیری بر بارترافیکی گراف دوسطحی برجای خواهد گذاشت. سناریوهای حملات تصادفی و هدفمند را به گره‌های گراف هاب H ترتیب دهید و ببینید و گزارش کنید که برای کارآیی کل شبکه و بارترافیکی و سایر پارامترها آن چه اتفاقی خواهد افتاد؟ بار ترافیکی در چه گرافی (گراف مبنا یا هاب) با افزایش چشمگیر مواجه خواهد بود؟ بار ترافیکی لینکهای شبکه مبنا چنددرصد افزایش را تجربه میکنند و برای لینکهای گراف هاب چند درصد افزایش خواهیم داشت؟ آیا آزمونهای شبیه سازی شما این واقعیت را نشان میدهند که ساخت شبکه دوسطحی (چندسطحی) سبب توازن در بار ترافیکی شده و محتملاً بر استحکام و سایر پارامترهای شبکه تاثیرگذار خواهد بود؟
همچنین در آزمونهای شبیه سازی خود بررسی و گزارش کنید که اگر نواحی هاب را جابه جا کرده (یعنی مجموعه گرههایی از G که به H نگاشت شده‌اند ($\hat{H}_i$)) و به مجموعه گره‌های دیگری نگاشت کنیم (سیمبندی مجدد)، برای بار ترافیکی ماکزیمم چه اتفاقی خواهد افتاد؟ آیا بهبود می یابد؟ چنین کاری آیا اساساً سودمند است؟ در اینجا چه الگوریتم سیمبندی میتواند بهینه تلقی گردد؟ آیا در صورت حمله به هاب، استراتژی سیمبندی شما میتواند موثر واقع گردد؟ برای مثال، در شبیه‌سازی فرض کنید گراف مبنای G رینگ با ۳۰ گره و گراف هاب H یک مثلث باشد (m=3). فرض کنید $\hat{H}_i$ مجموعه ای شامل ۱۰ گره مجاور در رینگ باشند که به یک گره از مثلث (گراف H) متصل شده‌اند. بار ترافیکی ماکزیمم در چنین ساختار دوسطحی را محاسبه کنید. در صورت حمله یا خرابی گره‌های هاب، این عدد چه خواهد شد؟ چنددرصد افزایش بارترافیکی داریم؟ اکنون یک بار دیگر فرض کنید، با شماره‌گذاری گره‌های رینگ، مجموعه $\hat{H}_i$ شامل اتصال گره‌های رینگ به فاصله ۳ از هم به یک گره از مثلث H باشد. چه اتفاقی می‌افتد؟

قضیه ۱۱: *در گرافهای مقیاس–آزاد (SF) مدل باراباشی–آلبرت (BA) با فرض پارمتر $m=r$ (یعنی هر گره تازه وارد، r لینک دارد)، روابط زیر برقرارند*

$$\begin{cases} a)\ \text{as } n \to \infty \quad p \to 1 \\ b)\ \text{as } n \to \infty \quad D \to \ln n / \ln\ln n \\ c)\ N(\delta) \approx \dfrac{2r(r+1)n}{(\delta+r+1)(\delta+r+2)(\delta+r+3)} \end{cases}$$

که منظور از $N(\delta)$، تعداد گره‌هایی با مینیمم درجه δ است.

شرط (الف) از قضیه ۱۰ به این نکته دلالت دارد که با افزایش سایز شبکه در حالت حدی، احتمال همبندی به ۱ خواهد رسید. بند (ب) نیز به این حقیقت اشاره دارد که در حالت حدی و افزایش سایز شبکه، قطر شبکه در مدل BA تنها به سایز وابسته بوده و از مقدار اولیه پارامتر r مستقل است. همچنین، در صورتیکه $r\geq 2$ فرض گردد، در حالت حدی، متوسط فاصله به قطر شبکه نزدیک خواهد شد. این امر در شبکه‌ها و گرافهای بزرگ با قطر کم روی میدهد (مانند گراف همینگ) که شاهد پدیده دنیای کوچک خواهیم بود. نکته جالب این است که اگر شرط بند (ج) از قضیه ۱۰ را در نظر بگیریم، میبینیم که فراوانی گره‌هایی با درجه δ، از یک قانون توانی با نمای مقیاسبندی ۳ تبعیت میکند که همان نمای مقیاسبندی در مدل BA است.

قضیه ۱۲: *فرض کنید در گراف دوسطحی T(G,H,h)، G گراف مبنا به سایز n، قطر D و اتصالپذیری گره ای κ با دو ویژگی توام OC+NS باشد. همچنین فرض کنید، گراف هاب H از نوع SF به سایز ۲ و r=2 باشد. در اینصورت، گراف T دارای ویژگی OC با اتصالپذیری κ+1 و قطر* $\min\{\ln n / \ln \ln n, D\}$*است.*

فرع قضیه ۱۲: *برای حالتی که گراف H سایز m و r باشد ، قضیه ۱۲ میتواند مجدداً بازنویسی شود.*

خواسته ۸: یک آزمون شبیه‌سازی تدارک ببینید و یک گراف G با ویژگی توامان OC+NS به سایز مشخص (برای مثال ۱۰۰۰) و اتصالپذیری گره‌ای ۳ تولید کنید. گراف هاب H را از نوع SF با ۲ گره و r=2 بسازید. اتصالات لینکی بین H, G را برطبق روش سیمبندی یک مدل (برای مثال، مدل BA) یا به دلخواه خود برقرار سازید. آیا گراف دوسطحی سخته شده توسط شما ویژگی OC دارد؟ اتصالپذیری گره‌ای، اتصالپذیری یالی، قطر و سایز مشخصات آنرا گزارش کنید. اگر گراف هاب را با پارامترهای دیگر مدل BA بسازید چه خواهد شد؟ اساساً اگر گراف هاب از نوع دنیای کوچک یا گرافهایی با مشخصات دیگر باشد فکر میکنید چه روی خواهد داد؟

یاداشت: این پروژه به تفصیل برای شما دانشجویان عزیز شرح داده شده تا کامل باشد و تقریباً نیازهای شما را از منظر مطالعه مطالب لازم برآورده سازد. به همین دلیل تعداد صفحات آن قدری بیشتر شده است. امیدمندم که کوشش انجام شده در تعریف این پروژه و انجام آن توسط شما عزیزان منجر به شکوفایی علایق و رشد توامندیهای شما در این عرصه گردد که جزو آرزوهای بزرگ بنده است. با این حال، نکات مهمی را که به ذهن من میرسد، به شکل بندهای مختلف در زیر نوشته‌ام که امیدمندم مورد مطالعه و توجه شما نورچشمان قرار بگیرد.

۱- قضیه‌های نوشته شده در متن این گزارش تنها برای درک بیشتر است و به همین دلیل بدون اثبات آورده شده است. شما عزیزان لازم نیست آنها را اثبات کنید؛ هرچند که اثبات آنها کار خیلی دشواری نیست. با این حال، دانشجویان عزیز و علاقه مندی که دوست دارند از نمره اضافی و امتیازی برخوردار شوند، میتوانند در گزارش خود اثبات آنها را بیاورند.

۲- هشت خواسته این پروژه اگرچه به یکدیگر وابسته‌اند، شما عزیزان میتوانید هریک از خواسته‌ها به طور جداگانه انجام داده و نمره آنرا دریافت کنید. بنابراین، آنها را طوری فهرست کرده‌ام که هر خواسته به‌طور جداگانه قابل نمره‌دهی باشد تا اگر کسی به هر دلیلی مایل به انجام برخی بندها نبود، بتواند نمره سایر بخشها را دریافت کند.

۳- تعداد نفرات اعضای این پروژه حداکثر ۲ نفر است و مهلت ارسال آن تا پایان ترم خواهد بود و تمدید نخواهد شد؛ ضمن اینکه در موعد مشخص (معمولا ۱۰ روز پس از ازمون پایانترم)، از تک تک اعضای پروژه پرسش خواهد شد. بدین ترتیب، لازم است که دانشجویان عزیز و محترم نسبت به چگونگی انجام پروژه خود دانش و آگاهی لازم را داشته باشندو استدعا دارم که از کپی و رونویسی بدون یادگیری جداً پرهیز نمایند.

۴- هشت خواسته پروژه، جزو خواسته‌های ضروری آن است. با این حال، دانشجویان عزیز میتوانند بسته به ذوق و سلیقه خود، به بخشهای مختلف پروژه، افزونه‌هایی را بیفزایند که مجدداً نمره مثبت به ایشان تعلق خواهد گرفت. برای مثال، ایجاد فرم *GUI* برای ورود مناسب داده‌ها و پارامترهای مساله، امکان نمایش بصری گرافها و شبکه‌ها، امکان تعریف و افزودن سایر گراف‌ها توسط کاربر و ...

۵- لطفاً در همه حال در هر زمانی که پرسش داشتید حتما به بنده مراجعه کرده یا از طریق ایمیل *f_safaei@sbu.ac.ir* بنده را در جریان اشکالات و ابهامات خود قرار دهید. آرزو دارم که انشالله به درس علاقه مند شده باشید و با انجام این پروژه گامی در راستای افزایش و رشد توانمندیهای خود بردارید.

با آرزوی سرفرازی برای همه شما نازنینان
دوستدار همگی شما
صفایی