الگوریتم‌های پیشرفته

استاد درس

دکتر علی معینی

پارسا محمدپور

محمد رهبری‌مقدم

سعید تریک

دانشکده علوم مهندسی

تمرین سری اول – الگوریتم‌های تصادفی

۱. (نظری) مسئله برش کمینه تصادفی را در نظر بگیرید. فرض کنید در یک گراف خاص، به جای درنظر گرفتن یک برش، h برش داریم. برای سادگی فرض می‌کنیم هیچ اشتراکی بین این h مجموعه وجود ندارد. در این حالت:
الف) احتمال یافتن یک برش بهینه را بیابید.

با توجه به اینکه h تا برش کمینه داریم که هیچ اشتراکی با یکدیگر ندارند،(همچنین مکی‌دانیم که اندازه اینها با یکدیگر برابر است وگره آن‌هایی که بزرگتر از بقیه هستند، دیگر برش کمینه نیستند.) پس جواب این الگوریتم، در مقایسه با حالت قبل، h برابر می‌شود به این دلیل که فرض می‌کنیم هر سری برای عملیات انقباض یالی[1]، نباید در مجموعه یال‌های موجود در آن برش کمینه باشد. از جایی که این مجموعه‌ها هیچ اشتراکی با یکدیگر ندارند، پس می‌توان آن‌ها را جدا جدا حساب کرد و با یکدیگر جمع کرد و از جایی که اندازه مجموعه‌یال‌های موجود در برش کمینه‌ها یکسان است، پس کافی است برای یکی از آن‌ها (مانند حالتی که فقط یک مجموعه بود) حساب کنیم سپس حاصل را ضربدر h کنیم.
این کار را به این دلیل می‌توانیم انجام دهیم چون حالات هیچ اشتراکی با یکدیگر ندارند. دلیل این اشتراک نداشتن هم این است که برای حالتی که هیچ یالی از یکی از مجموعه‌ها انتخاب نشود (یعنی همان الگوریتم کارگِر[2] برای یکی از مجموعه‌ها) باید حداقل یک یال از دیگر مجموعه یال‌های برش مینیمم انتخاب شود. دلیل آن هم این است اصلا برش کمینه به این معنی است که تعداد میزان یال‌های موجود بین دو تا گره یا ابرگره[3] در گراف. حالا در الگوریتم کارگر، اگر فرض کنیم تا مرحله یکی مانده به آخر، همچنان هیچ کدام از یال‌های این مجموعه دیگر انتخاب نشده باشد، پس در اصل این دو تا گره یا ابرگره‌ای که به واسطه این یال‌ها به هم راه داشتند، به یکدیگر متصل نشده‌اند. حالا یا باید در این مرحله یکی از آن یال‌ها انتخاب شود تا این دو تا گره (شایدم ابرگره، هر کدام ممکن است باشند با توجه به وضعیت و نحوه چیدمان یال‌ها) با هم یکی شوند و ابرگره نهایی را بسازند تا مجموعه انتهایی باقی بماند؛ یا اینکه باید یال دیگری انتخاب شود تا در انتها، ما باز هم همان یال‌ها مجموعه‌ای را که می‌خواهیم داشته باشیم. حالا چرا نمی‌تواینیم به غیر از آن‌ها برداریم؟ چون این مجموعه شامل تنها راه‌ها (یال‌ها) بین این دو گره (یا ابر گره) است و اگر چیز دیگری انتخاب کنیم، این دو گره (ابرگره) با هم یکی نمی‌شوند و در مجموعه نهایی باقی مانده، این یال‌ها هم می‌مانند که با این حساب پس باید یا این یال‌ها اشتراکاتی با مجموعه مورد بررسی داشته باشند یا کلا یکی باشند (که این همان حالت شدید اشتراک است). که این مورد با توجه به فرض سوال، ممکن نیست اتفاق بیفتد. پس این حالت‌ها را جداگانه حساب می‌کنیم و با هم جمع می‌کنیم که البته چون سایز مجموعه‌ها یکی است، همانطور که گفته شد می‌توانیم کلا برای یکی حساب کنیم و ضربدر تعداد آن‌ها، h، بکنیم.
پس با این حساب به سراغ اثبات برویم. فرضیات زیر را داریم:

$$k = \min number\ of\ graph\ node'sd\ egree$$

$$c = |\min cut|$$

$$c \leq k \quad otherwise\ ck\ is\ the \min cut\ length$$

$$e = number\ of\ edges\ in\ graph = |E|, \quad |E_i| = number\ of\ remaining\ edge\ in\ ith\ step$$

$$n = number\ of\ nodes\ in\ graph = |N|, \quad |N_i| = number\ of\ remaining\ nodes\ at\ ith\ step$$

[1] edge contraction
[2] Karger's algorithm
[3] super node

$$\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2} \geq e \quad number\ of\ edges = |E|$$

$$e \geq \frac{nk}{2} \quad otherwise \min degree\ is\ not\ k$$

$$p(A_i) = prob.of\ not\ choosing\ any\ mincut\ edge\ in\ ith\ step$$

$$p({A_i}') = \ prob.of\ choosing\ any\ mincut\ edge\ in\ ith\ step$$

$$p(B_i) = prob.of\ not\ choosing\ any\ mincut\ edge\ from\ the\ beginning\ until\ the\ end\ of\ ith\ step$$

$$p(B_i) = \ p\left(\bigcap_{j=1}^{i} A_j\right)$$

پس با این حساب، ما باید احتمال آن را پیدا کنیم که در مرحله آخر هیچ یالی از مجموعه برش کمینه مورد نظر انتخاب نشود، اگر (به شرطی که) در تمام مراحل قبل هیچ یالی از این مجموعه انتخاب نشده باشد. یعنی می‌خواهیم عبارت زیر را محاسبه کنیم:

$$p(B_{n-2}) = \ p\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right)$$

که این عبارت نیز از لحاظ مفهومی برابر است با:

$$\begin{aligned} p(B_{n-2}) = \ p\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right) &= p\left(\bigcap_{i=1}^{n-3} A_i \cap A_{n-2}\right) = p(A_{n-2} \mid B_{n-3})\, p(B_{n-3}) \\ &= \ p(A_{n-2} \mid B_{n-3}) p(A_{n-3} \mid B_{n-4}) p(B_{n-4}) = \cdots \\ &= \ p(A_{n-2} \mid B_{n-3})\, p(A_{n-3} \mid B_{n-4}) \dots\ p(A_2 \mid B_1) p(B_1) \end{aligned}$$

پس بدین ترتیب باید مقدار $p(B_{n-2})$ را حساب کنیم. این مقدار را مستقیما نمی‌توانیم بدست بیاوریم برای همین باید از عبارت بالا استفاده کنیم. حالا با توجه به اینکه می‌دانیم اگر در مراحل قبل، هیچ یالی از برش کمینه را برنداشته باشیم، احتمال برنداشتن یالی از برش کمینه، به صورت زیر است(از اصل متمم و اطلاعات آورده شده در بالا استفاده می‌کنیم):

$$p(A_i|B_{i-1}) = 1 - p((A_i|B_{i-1})') = \ 1 - \frac{c}{|E_i|} \xRightarrow{c\leq k\ \ ,|E_i|\geq\frac{|N_i|k}{2}} p(A_i|B_{i-1}) \geq \ 1 - \frac{2k}{\big(n-(i-1)\big)k}$$

$$\Rightarrow p(A_i|B_{i-1}) \geq \frac{n-i-1}{n-(i-1)}$$

پس بدین ترتیب، داریم:

$$p(B_1) \geq \frac{n-2}{n}$$

$$p(A_2|B_1) \geq \frac{n-3}{n-1}$$

$$p(A_3|B_2) \geq \frac{n-4}{n-2}$$

$$\dots$$

$$p(A_{n-2}|B_{n-3}) \geq \frac{1}{3}$$

پس بدین ترتیب، با استفاده از فرمول داده شده برای باز $p(B_{n-2})$، و مقادیر بدست آمده، خواهیم داشت:

$$p(B_{n-2}) \geq p(A_{n-2}|B_{n-3})\, p(A_{n-3}|B_{n-4}) \dots p(A_2|B_1)\, p(B_1) \Rightarrow$$

$$p(B_{n-2}) \geq \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \dots \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-2}{n} \Rightarrow p(B_{n-2}) \geq \frac{1*2}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow p(B_{n-2}) \geq \frac{2}{n(n-1)}$$

پس احتمال اینکه در انتها برای یک برش، به جواب بهینه برسیم، این مقدار می‌شود. حال با توجه به توضیحات داده شده، چون h تا برش کمینه داریم، پس باید این مقدار را در h ضرب کنیم. پس احتمال کلی برای اینکه در یک بار اجرا به جواب برسیم برابر است با:

$$p \geq \frac{2h}{n(n-1)}$$

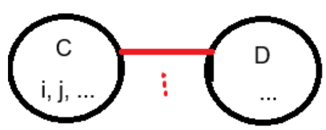
■

اثبات کامل‌تر و مجدد اشتراک نداشتن حالت‌ها:

در انتها یک بار دیگر اثبات اینکه چرا در حالتی که یکی از مجموعه‌های خاص برش کمینه را بررسی می‌کنیم، چرا حتما باید حداقل یکی دیگر از یال‌های یکی دیگر از مجموعه‌های برش کمینه انتخاب شده باشند را می‌آوریم. برای این کار فرض کنید که دو تا مجموعه برش کمینه مجزا داریم که شامل ابرگره‌های A و B برای مجموعه اول هستند گره‌های i و j هم گره‌های این گراف ما باشند. پس داریم:

پس با این حساب و با توجه به تعریف برش کمینه می‌دانیم که هر مسیری از گره i به گره j، حداقل از یکی از یال‌هایی که با رنگ قرمز مشخص شده‌اند می‌گذرد، در غیر این صورت یک یالی وجود دارد که با قطع شدن تمام یال‌های موجود در برش کمینه، همچنان این دو ابرگره را به هم وصل می‌کند. پس به تناقض می‌خوریم. پس باید حتما هر مسیری بین گره i به j، حداقل از یکی از این یال‌ها بگذرد. (اینکه حالا بیشتر از یکی هم می‌تواند باشد یا نه مورد بحث نیست) حال در یکی دیگر از برش‌های کمینه، دو ابرگره مانند C و D داریم. مانند شکل زیر:

که در یکی از این ابرگره‌ها، حداقل یک زوج گره مانند i و j وجود دارند که در مجموعه برش کمینه قبلی (ابر گره‌های A و B) در دو تا ابرگره متفاوت بودند.(اگر هیچ دوتایی به این شکل وجود نداشته باشند، پس ابرگره‌های C و D باید دقیقا همان ابرگره‌های A و B باشند) یعنی برای مثال گره‌های i و j، هر دو در گره C قرار دارند. (اگر در گره D هم باشد باز همین می‌شود و فرقی نمی‌کند) یعنی:



حال در این صورت پس حتما باید یکی از یال‌های مجموعه برش کمینه قبلی برداشته شده باشد. چون در غیر این صورت، مسیرهای بین i و j، همچنان وجود داشتند و از بین نمی‌رفتند. یعنی در عمل انقباض یالی، باید یکی از مسیرهای بین i و j، برداشته شود. (حالا ممکن است که این یال‌ها و ترتیب برداشته شدنشان متفاوت باشد، اما ممکن نیست برداشته نشوند.) در غیر این صورت، (یعنی اگر برداشته نشوند هیچ‌کدام از یال‌ها) این دو هیچگاه با یکدیگر در یک ابرگره قرار نمی‌گرفتند. چون در تشکیل یک ابرگره، تنها گره‌هایی قرار می‌گیرند که تمام یال‌های یک مسیر بینشان برداشته شود. پس باید یک یال از مجموعه برش کمینه قبلی حتما برداشته شده باشد در غیر این صورت، این دو گره با هم یکجا نمی‌توانستند باشند و به تناقض می‌خوریم. پس احتمال این حالت‌ها با یکدیگر اشتراکی ندارند و می‌توان احتمال آن‌ها را با هم جمع کرد. چون در هر حالت، حداقل یکی از یال‌های موجود در دیگر مجموعه‌های

برش کمینه برداشته شده است، پس نمی‌توان گفت در یک حالت، که احتمال جواب بهینه و درست را می‌خواهیم بدست بیاوریم، با حالت دیگری اشتراک دارد. چون در حالت‌های دیگر حداقل یکی از یال‌های این مجوعه برداشته شده است و در این حالت هیچ یالی از این مجموعه نباید برداشته شود. پس این حالت‌ها (احتمال‌شان) با هم هیچ اشتراکی ندارند. پس می‌توانیم احتمال هر کدام را حساب کنیم و باهم جمع کنیم و چون اشتراکی ندارند چیزی نباید کم کنیم و هیچ حالتی را بیش از یکبار نشمارده‌ایم.

■

ب) بیشترین مقدار h چه عددی است؟

با توجه به بازه‌های c (c در اصل برابر با اندازه یال‌های موجود در برش کمینه است) می‌دانیم که c باید کوچک‌تر مساوی مینیمم درجه گراف باشد.(منظور از مینیمم درجه گراف، مینیمم بین درجه تمام گره‌های گراف است. همچنین میدانیم این مقدار بزرگتر مساوی یک است، وگرنه یک گره تنها [1] داریم و در همان ابتدا گراف ناهمبند[2] یا نامتصل است.) همچنین با توجه به اینکه در صورت سوال به صورت پیش‌فرض در نظر گرفته شده که این h تا مجموعه، هیچ اشتراکی ندارند، پس باید حاصلضرب تعداد این مجموعه‌ها(برش‌های مینیمم)، h، در اندازه این مجموعه‌ها، c، کمتر از کل یال‌ها گراف باشد. پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} c \leq k & k = \min Degree\ in\ Graph \geq 1 \\ c\,.\,h \leq |E| & |E|\ is\ number\ of\ Graph\ edges \end{matrix}\right\} \xRightarrow{for\ maximizing\ h, we\ set \leq to = and\ c=1} h = |E|$$

همچنین در قسمت بعدی هم یک مثال از این حالت (حالتی که همانطور روی علامت در نتیجه نوشته شده، کوچکتر مساوی به مساوی تبدیل شده و c هم در آن برابر با یک است.)

حالا اگر بخواهیم این را با توجه به تعداد راس‌های گراف نمایش دهیم، با توجه به اینکه می‌دانیم حداکثر تعداد یال‌های گراف برابر با انتخاب دو از تعداد راس‌های گراف است (تعداد یال‌ها را اگر برابر با $|E| \leq \binom{n}{2}$ می‌باشد که n برابر با تعداد راس‌هاست)، پس می‌توان گفت که:

$$\left.\begin{matrix} c \leq k & k = \min Degree\ in\ Graph \geq 1 \\ c\,.\,h \leq |E| & |E|\ is\ number\ of\ Graph\ edges \\ |E| \leq \binom{n}{2} & n\ is\ number\ of\ vertices \end{matrix}\right\} \xRightarrow{for\ maximizing\ h, we\ set \leq to = and\ c=1\ and\ |E|\ to\ \binom{n}{2}} h = \binom{n}{2}$$

پس با این حساب، مقدار ماکزیمم h در این حالت برابر با $\frac{n(n-1)}{2}$ می‌باشد.

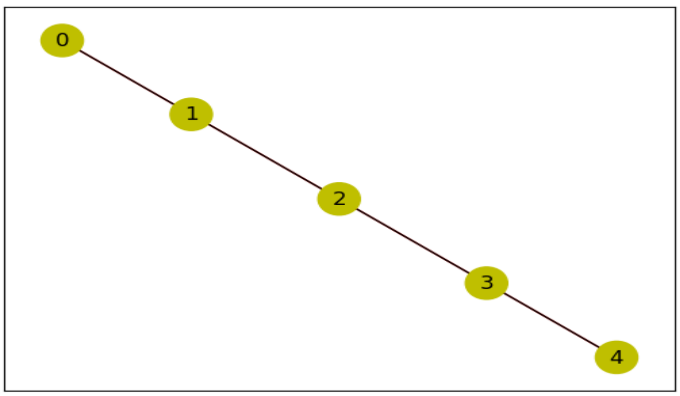
اما اگر بخواهیم دقیق‌تر بررسی کنیم، وقتی که تعداد یال‌ها برابر با $\binom{n}{2}$ می‌باشد، یعنی گراف یک گراف کامل است. در گراف کامل هم می‌دانیم که برش کمینه برابر با n-1 تا یال است (همه یال‌های یک گره را قطع کنیم) که در این حالت هم مجموعه‌های برش کمینه اشتراک دارند و هم اینکه تعداد مجموعه‌های برش کمینه مجزا، نمی‌تواند برابر با این مقدار باشد. پس عملا این یک حدبالای دست‌نیافتنی است. ولی خب یک حدبالا با توجه به تعداد راس‌های گراف است.

[1] isolated node
[2] disconnected

ج) یک مثال برای بیشترین مقدار h ارائه دهید.

گراف‌های خطی گراف‌هایی هستند که در آن‌ها تعداد برش‌های کمینه ماکزیمم می‌باشد. چرا؟ از طرفی درجه هر گره برابر با یک می‌باشد و همچنین کمترین مقدار مورد نیاز یال در آن برای اینکه گراف همبند بماند به کار رفته سات. برای همین در این گراف‌ها، با برش هر یالی، گراف ناهمبند می‌شود. پس در اصل تعداد h برابر با تعداد یال‌ها می‌شود. (در این قسمت برای حالتی در نظر گرفته‌ایم که طبق صورت سوال، هیچ کدام از برش‌های کمینه، باهم اشتراکی نداشته باشند)

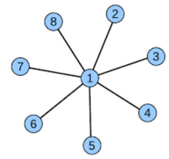
همچنین اگر در فرمول قسمت قبل هم نگاه کنیم، تمام عوامل موثر در فرمول h، در جهت ماکزیمم شدن h حرکت کرده‌اند. کوچکتر مساوی، به مساوی (حالت ماکزیمم آن) تبدیل شده. مقدار اندازه هر برش کمینه (تعداد یال‌ها) هم که میدانیم یک عدد صحیح بزرگتر از صفر باید باشد (اگر صفر باشد هم گراف در اصل در همان ابتدا ناهمبند است) هم کمترین مقدار خود (یک) را دارد. پس مقدار h ماکزیمم شده است.این شکل برای این گراف‌ها می‌باشد.



در این شکل، با قطع هر یال، گراف ناهمبند می‌شود. در این شکل، برش‌های کمینه به صورت زیر هستند:

- {یال بین گره‌های صفر و یک}
- {یال بین گره‌های یک و دو}
- {یال بین گره‌های دو و سه}
- {یال بین گره‌های سه و چهار}

یک حالت دیگر از گراف‌ها که این خاصیت را دارند نیز گراف‌های ستاره‌ای[1] هستند.(توضیحی برای آن مثل حالت بالا نمی‌دهیم و فقط مثالی از آن می‌آوریم. بدیهی است که با قطع هر یال، گراف ناهمبند می‌شود)



[1] star or star-like graph

۲. (نظری) دنباله متناهی و یا نامتناهی شمارا از پیشامدهای $A_1, A_2, \ldots$ را در نظر بگیرید. نشان دهید:

$$P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i)$$

می‌دانیم که با توجه به تعریف مجموعه، در یک مجموعه هر عضو فقط و فقط یکبار موجود است و امکان اینکه در یک مجموعه یک عضو دوبار دیده شود، وجود ندارد. با دانستن این نکته به سراغ اثبات می‌رویم.

عبارت $\bigcup_{i\geq 1} A_i$ در اصل برابر با عبارت $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ می‌باشد. حال با توجه به اینکه می‌دانیم حاصل اجتماع گرفتن از یک مجموعه با مجموعه دیگر، خود یک مجموعه است، پس این حاصل نیز برابر با یک مجموعه است. همچنین طبق تعریف می‌دانیم که در این مجموعه حاصل، هر عضو، متعلق به حداقل یکی از مجموعه‌های A_i می‌باشد. پس اگر این مجموعه حاصل را برابر با مجموعه B در نظر بگیریم، داریم:

$$B = \bigcup_{i\geq 1} A_i = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots\}$$

همچنین با توجه به تعریف احتمال، داریم:

$$p(A) = \sum_{a \in A} p(a)$$

پس با توجه به این تعریف، مقدار احتمال مجموعه B برابر است با:

$$p(B) = p\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{a \in \bigcup_{i\geq 1} A_i} p(a) = \sum_{a \in A_1 \vee a \in A_2 \vee \ldots} p(a)$$

پس حالا اگر ما بیاییم و مقدار زیر را حساب کنیم، خواهیم داشت:

$$\sum_{i\geq 1} P(A_i) = \sum_{i\geq 1} \sum_{a \in A_i} p(a)$$

حالا اگر n_a را برابر با تعداد تکرار *p(a)* در مجموعه بالا در نظر بگیریم،(یا همان تعداد تکرار عضو *a* بین مجموعه‌های A_i) حاصل مجموعه بالا برابر است با تعداد تکرار هر عبارت *p(a)* ضربدر خود *p(a)* به ازای تمام *a* های متمایز (مختلف) عضو مجموعه اجتماع A_i ها (یا همان $\bigcup_{i\geq 1} A_i$). پس داریم:

$$\sum_{i\geq 1} P(A_i) = \sum_{i\geq 1} \sum_{a\,\in\,A_i} p(a) = \sum_{a\,\in\,\bigcup_{i\geq 1} A_i} n_a\, p(a) = \sum_{a\,\in\,\bigcup_{i\geq 1} A_i} p(a) \quad + \sum_{a\,\in\,\bigcup_{i\geq 1} A_i} (n_a - 1)\, p(a)$$
$$= p(B) + \sum_{a\,\in\,\bigcup_{i\geq 1} A_i} (n_a - 1)\, p(a)$$

حالا با توجه به اینکه هر عضو در مجموعه $\bigcup_{i\geq 1} A_i$ طبق تعریف اجتماع، حداقل در یکی از مجموعه‌ها وجود دارد (اگر وجود نداشته باشد پس طبق تعریف اجتماع به تناقض می‌خوریم) پس n_a همواره بزرگترمساوی یک است.(چون حداقل در یکی از مجموعه‌ها بوده و ممکن است در مجموعه‌های دیگر هم باشد ولی مطمئنیم که حداقل در یکی از مجموعه‌ها بوده.) پس مقدار n_a بزرگتر مساوی یک است. پس مقدار عبارت $\sum_{a\,\in\,\bigcup_{i\geq 1} A_i} (n_a - 1)\, p(a)$ برابر است با ضرب یک عدد بزرگتر مساوی صفر در یک احتمال. همچنین با توجه به اصول موضوعه، احتمال هرچیزی هم بین صفر و یک است، پس مقدار هر یک از مقادیر داخل حاصل جمع، هر یک از مقادیر $(n_a - 1)\, p(a)$ بزرگتر مساوی صفر است. پس:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i\geq 1} P(A_i) = p(B) + \sum_{a\,\in\,\bigcup_{i\geq 1} A_i} (n_a - 1)\, p(a) \\ (n_a - 1)\, p(a) \geq 0 \;\Rightarrow \sum_{a\,\in\,\bigcup_{i\geq 1} A_i} (n_a - 1)\, p(a) \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\; p(B) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i)$$

$$\Rightarrow\; p\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i)$$

■

۳. (نظری) فرض کنید A و B دو پیشامد دلخواه باشند.

الف) نشان دهید: p(B-A) = p(B) – p(A∩B)

با توجه به تعریف داریم:

$$B - A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$$
$$B \cap A = \{x \mid x \in B \wedge x \in A\}$$

پس احتمال این مجموعه برابر است با:

$$p(B - A) = \sum_{a \in B \wedge a \notin A} p(a)$$

همچنین با توجه به احتمال خود B داریم:

$$p(B) = \sum_{a \in B} p(a)$$

همچنین برای هر عضو متعلق به B، دو حالت داریم؛ یا آن عضو متعلق به A هم هست، یا آن عضو متعلق به A نیست. پس داریم:

$$p(B) = \sum_{a \in B \wedge a \in A} p(a) + \sum_{a \in B \wedge a \notin A} p(a)$$

حالا در حالتی که یک عضو متعلق به هر دو مجموعه A و B باشد، در اصل در اشتراک آن‌ها است.(این در اصل همان تعریف اشتراک می‌باشد.) همچنین با توجه به تعریف ارائه شده در ابتدای همیت جواب، اگر عضوی در B باشد و در A نباشد، در اصل توصیف کننده مجموعه B-A می‌باشد. پس داریم:

$$\left.\begin{aligned} p(B) &= \sum_{a \in B \wedge a \in A} p(a) + \sum_{a \in B \wedge a \notin A} p(a) \\ p(A \cap B) &= \sum_{a \in B \wedge a \in A} p(a) \\ p(A - B) &= \sum_{a \in B \wedge a \notin A} p(a) \end{aligned}\right\} \Rightarrow p(B) = p(A \cap B) + p(B - A)$$
$$\Rightarrow p(B - A) = p(B) - p(A \cap B)$$

■

ب) فرض کنید A⊆B ، نشان دهید: p(B)≥p(A)

با توجه به تعریف می‌دانیم که:

$$A \subseteq \mathrm{B} \;\Rightarrow\; \forall a \in A \rightarrow a \in B$$

$$p(B) = \sum_{a \in B} p(a)$$

پس با توجه به این موارد، اگر هر عضو موجود در B، دو حالت دارد؛ یا متعلق به A هم هست، یا متعلق به A نیست. پس داریم:

$$p(B) = \sum_{a \in B} p(a) = \sum_{a \in B \wedge a \in A} p(a) + \sum_{a \in B \wedge a \notin A} p(a)$$

حالا با توجه به اینکه می‌دانیم A⊆B است و طبق نوشته ابتدای همین پاسخ، پس اگر در حالتی که $a \in B \wedge a \in A$ باشد، برای برقرار هر دو شرط به طور همزمان، پس باید a در A باشد و با توجه به تعریف زیرمجموعه‌ای ارائه شده در بالا، پس اگر a در A باشد، با توجه به اینکه هر عضو موجود در A در B هم هست (به دلیل زیرمجموعه بودن) پس خودبه‌خود در B هم هست. پس داریم:

$$\begin{aligned} p(B) = \sum_{a \in B} p(a) = \sum_{a \in B \wedge a \in A} p(a) + \sum_{a \in B \wedge a \notin A} p(a) = \sum_{a \in A} p(a) + \sum_{a \in B \wedge a \notin A} p(a) \\ = p(A) + \sum_{a \in B \wedge a \notin A} p(a) \end{aligned}$$

حالا با توجه به اصول موضوعه می‌دانیم که احتمال همیشه بین بازه *[0, 1]* است. پس مقدار حاصل جمع بزرگترمساوی صفر است. پس:

$$\left.\begin{array}{c} p(B) = p(A) + \sum_{a \in B \wedge a \notin A} p(a) \\ \sum_{a \in B \wedge a \notin A} p(a) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p(B) \geq p(A)$$

■

٤. (نظری) اصول موضوعه احتمال را در نظر بگیرید

1) $\forall\, E \subseteq S\,; p(E) \geq 0$
2) $p(S) = 1$
3) $P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} P(A_i) \qquad if\,\forall\, i \neq j;\ A_i\ \cap\ A_j\ =\ \emptyset$

فرض کنید شرط سوم، اجماع شمارا نباشد (یعنی شرط سوم برای ناشمارا پیشامد نیز برقرار باشد). مثال نقضی ارائه دهید و توسط آن نشان دهید که شرط سوم مختص اجماع ناشمارا نیست. (راهنمایی: می‌توانید فضای نمونه را [0, 1] در نظر بگیرید و سپس پیشامدهایی تعریف کنید که از اجماع آن‌ها، شرط دوم نقض شود.)

در ابتدا فرض می‌کنیم که برای حالتی که ناشمارا باشد هم برقرار است و سپس یک مثال نقض برای آن ارائه می‌دهیم و سپس این حالت نقض می‌شود.

طبق گفته صورت سوال، فضای نمونه‌ای را برابر با بازه [0, 1] در نظر می‌گیریم و توزیع را یکنواخت[1] در نظر می‌گیریم. سپس پیشآمد A_i را برابر با احتمال ظاهر شدن عدد i در نظر می‌گیریم؛ به طوریکه عدد i در بازه بین صفر تا یک [0, 1] باشد. حالا باید احتمال هر کدام از این پیشآمدها را حساب کنیم. می‌دانیم که طبق اصل موضوعه شماره یک، این احتمال همواره باید بزرگتر مساوی با صفر باشد. این حالت‌های A_i می‌دانیم که مربوط به حالت ناشمارا هستند. (شامل اعداد حقیقی هستند و با توجه به اینکه اعداد حقیقی، همان مجموعه $\mathbb{R}$، ناشماراست، پس این بازه صفر تا یک هم که قسمتی از آن است، ناشماراست. چون هیچ تابع پوشایی[2] بین اعداد طبیعی، همان $\mathbb{N}$، و اعداد حقیقی وجود ندارد و چون این بازه هم بازه‌ای از اعداد حقیقی است، هیچ تابع پوشایی بین اعداد طبیعی و این بازه وجود ندارد.[3]) حالا ما این را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم؛ حالتی که این مقدار (احتمال $p(A_i)$) برابر با صفر باشد و حالتی که این احتمال بزرگتر از صفر باشد. حالا این دو حالت را به طور مجزا بررسی می‌کنیم:

- **حالت اول($p(A_i) = 0$ باشد):**

فرض می‌کنیم که مقدار $p(A_i) = 0$ برابر با صفر باشد. در این حالت طبق اصل سوم، اگر به ازای تمام مقادیر **مجزای** بین صفر و یک، احتمال $p(A_i)$ را با یکدیگر جمع کنیم، حاصل برابر است با احتمال وقوع پیشآمد حاصل از اجتماع آن‌ها که برابر است با احتمال فضای نمونه‌ای که برابر با یک است. پس اگر این را به صورت ریاضی مانند اصل سوم موضوعه بنویسیم، داریم:

$$p\left(\bigcup_{i\,\in[0,1]} A_i\right) = \sum_{i\,\in[0,1]} p(A_i) \xrightarrow{p(A_i)=0} p(S) = \sum_{i\,\in[0,1]} 0 \Rightarrow 1 = 0 \quad ※$$

پس به صورت بدیهی به تناقض می‌خوریم.

پس قطعا این حالت نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

[1] uniform
[2] onto function
[3] uncountable: There is no injective (one-to-one) function (hence no bijection) from X to the set of natural numbers

- **حالت دوم($p(A_i) > 0$ باشد):**

در این حالت هم مانند حالت قبل با توجه به اصل سوم موضوعه به تناقض می‌خوریم. فرض می‌کنیم که برقرار باشد، پس عبارت اصل سوم موضوعه برای دو طرف را می‌نویسیم. پس داریم:

$$p\left(\bigcup_{i\,\in[0,1]} A_i\right) = \sum_{i\,\in[0,1]} p(A_i) \Rightarrow p(S) = \sum_{i\,\in[0,1]} p(A_i) \xrightarrow{p(A_i)>0} 1 = \infty \quad ※$$

پس در این حالت به تناقض می‌خوریم.

پس در هیچ حالتی وقتی که بازه ناشمارا باشد، نمی‌تواند اصل سوم موضوعه برای این حالت برقرار باشد. پس به تناقض می‌خوریم. پس اصل سوم موضوعه برای این مثال برقرار نمی‌باشد. پس ما یک مثال نقضی ارائه کردیم که در آن اصل سوم موضوعه برای ناشمارا بودن برقرار نیست. پس نمی‌توانیم بگوییم که اصل سوم موضوعه برای حالت ناشمارا هم برقرار است چون مثال نقض دارد.