قضیه یک:

ثابت کنید متوسط درجه گراف دو بخشی شبه منتظم برابر است با:

$$\langle d \rangle = \frac{2d_1 d_2}{d_1 + d_2}$$

با توجه به تعاریف، می دانیم که گراف دو بخشی شبه منتظم، دارای n1 راس با درجه d1 و n2 راس با درجه d2 می باشد، و بین آن ها رابطه زیر برقرار است:

$$n_1 d_1 = n_2 d_2 \Rightarrow \begin{cases} n_1 = \dfrac{n_2\, d_2}{d_1} \\ n_2 = \dfrac{n_1\, d_1}{d_2} \end{cases}$$

سپس با توجه به اینکه می دانیم متوسط درجه گراف برابر است با مجموع درجه های تمام راس ها، تقسیم بر تعداد راس ها، و با توجه به اینکه در گراف شبه منتظم دو بخشی، n1 راس با درجه d1 و n2 راس با درجه d2 داریم، متوسط درجه به صورت زیر خواهد بود:

$$\langle d \rangle = \frac{\sum d_i}{n_1 + n_2} = \frac{n_1\, d_1 + n_2\, d_2}{n_1 + n_2} = \frac{\dfrac{n\, d_2}{d_1 + d_2} * d_1 + \dfrac{n\, d_1}{d_1 + d_2} * d_2}{\dfrac{n\, d_2}{d_1 + d_2} + \dfrac{n\, d_1}{d_1 + d_2}} = \frac{nd_1\, d_2 \quad + \quad nd_1 d_2}{nd_2 \quad + \quad nd_1} \;=\; \frac{2d_1 d_2}{d_1 \;+\; d_2}$$

قضیه دو:

در گراف های Kb, n-b که b < n/2 و دو بخشی کامل هستند، ثابت کنیدمتوسط درجه برابر است با:

$$\langle d \rangle = 2b$$

با توجه به اینکه گراف دوبخشی کامل می‌باشد، پس باید b تا گره، فقط به n-b تا گره دیگر متصل شوند. پس در مجموع با توجه به اینکه گراف دوبخشی **کامل** می‌باشد، b تا گره با درجه n-b داریم و n-b تا درجه با b تا راس داریم. پس:

$$\langle d \rangle = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{b(n-b) + (n-b)b}{n} = \frac{2(n-b)b}{n}$$

پس در حالت حدی که n به سمت بینهایت می‌رود، پس n-b را با n تقریب میزنیم، سپس n از صورت و مخرج ساده می‌شود و 2b در صورت باقی می‌ماند. پس:

$$\langle d \rangle = 2b$$

قضیه چهار:

ثابت کنید متوسط درجه گراف شبه منتظم تصادفی، برابر است با:

$$\langle d\rangle = (d_1 * (1-P) + d_2\, p) * p$$

با توجه به نحوه ساختن این گراف، می دانیم که در ابتدا d1 تا stub برای n1 راس داریم و d2 تا stub برای n2 تا راس داریم. سپس به صورت تصادفی، از بین تمامی stub هایی که در اختیار داریم، دو تا از آن ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و به یکدیگر وصل می‌کنیم.

همچنین می دانیم که تمام stub های یک راس، درجه آن راس را تشکیل می‌دهد و هر زوج stub ای که در هر مرحله انتخاب می‌کنیم، تشکیل یک یال می‌دهد. پس در حالتی که p فرض کنیم تمامی stub هایی که در هر مرحله برای تشکیل یال انتخاب می‌کنیم، به یکدیگر متصل شوند، پس متوسط درجه می‌شود:

$$\langle d\rangle = \frac{\sum d_i}{n_1+n_2} = \frac{n_1\, d_1 + n_2\, d_2}{n_1+n_2} = \frac{n_1\, d_1 + n_2\, d_2}{n_1+n_2} = \frac{(n\,(1-p))\ d_1 + (n-(n\,(1-p)))\, d_2}{(n\,(1-p)) + (n-(n\,(1-p)))}$$
$$= \frac{(n\,(1-p))\ d_1 + (np)\, d_2}{(n\,(1-p)) + (np)} = \frac{(1-p)\ d_1 + p\, d_2}{(1-p)+p} = (1-p)\ d_1 + p\, d_2$$

پس در حالتی که تمامی زوج stub های انتخابی، به یکدیگر متصل شوند، متوسط درجه گراف، این مقدار خواهد بود؛ اما با توجه به اینکه میدانیم از بین زوج stub های انتخابی، احتمال اینکه آن ها به هم متصل شوند، p می‌باشد، پس تعداد کل یال ها به طور متوسط می‌شود p ضربدر تعداد یال ها پس متوسط درجه هم باید در p ضرب شود. بنابراین متوسط درجه برابر خواهد بود با:

$$\langle d\rangle = \big((1-p)\, d_1 + p\, d_2\big)\, p$$

هرچه کمر گراف گراف کمتر باشد، گراف مستحکم تر است. چون برای مثال اگر در یک جمع دو نفر، آن دونفر هیچ آشنای مشترکی نداشته باشند (تا کمر برابر با سه شود)، قطعا استحکام این گراف کمتر است نسبت به گرافی که در آن دو نفر آشنای سومی هم به صورت مشترک دارند.