Subject .... Date ....

معنا شناسی نظریه بازی ها

Game Theoretical Semantics

پارسا تسبیح نو، دانشکده ریاضی - دانشگاه تهران.

- در این متن به معرفی دستگاه معنی شناسی نظریه بازی ها (GTS) می پردازیم و شکل گیری و خواص آن را بررسی می کنیم.

و در نهایت نگاهی بر منطق محاسبه پذیری (Computability logic) خواهیم داشت.

Subject .... Date ....

• دستگاه معنی شناسی نظریه بازی ها مانند معنی شناسی تارسکی تعریفی برای درستی عبارات در زبان های فرمال ارائه می دهد، معرفی این دستگاه را با بررسی بازی ها شروع می کنیم.

• در دستگاه معنی شناسی نظریه بازی ها (با GTS نمایش می دهیم) معمولاً از بازی ها با دو بازیکن که برای سهولت در ادامه با E (Verifier) و A (Falsifier) و یک برنده نشان می دهیم، استفاده می شود.

• نظریه بازی ها در قرن 18 به طور شهودی مورد استفاده قرار می گرفته، اگرچه صورت فرمال امروزی آن را می توان در اوایل قرن بیستم دید که ریاضی دانان نظریه مجموعه ها روی آن کار کردند، علی الخصوص زرملو که در کتاب "تاثیر نظریه مجموعه ها بر نظریه بازی شطرنج" (On an Application of set theory on the Theory of the Game of Chess) چاپ شده در 1913 ثابت کرد بازی شطرنج "اکیداً مشخص" است، یعنی (Strictly determined). این کتاب آغاز فضایی جدی تر در زمینه بازی ها بود.

البته نظریه بازی ها به شکل مستقل توسط فون نیومن در مقاله 1928 تحت عنوان "نظریه بازی های استراتژیک" (On Theory of Games of Strategy) معرفی شد.

• اگرچه نیاز ما در این متن به تعریف بازی اندک و در سطح شهودی کافی است، در ادامه تعریف بازی با دو بازیکن آمده.

تعریف ۱) به مجموعه Ω ، مجموعه حرکات گوییم، در هر مرحله هر بازیکن حرکت خود را

از Ω انتخاب می کند. در طول انجام بازی دنباله ای از اعضا Ω مثل

$D := a_0 a_1 a_2 \cdots$ ساخته می شود. به یک دنباله نامتناهی از اعضا Ω

یک دست از بازی گوییم. به یک دنباله متناهی از Ω یک موقعیت گوییم.

تابع f را تابع نوبت گوییم و f هر موقعیت را به E یا A متناظر می کند.

بسته به قوانین هر بازی دو مجموعه WA و WE موجود است که اعضا آنها دنباله ها از Ω

هستند، و اگر $x \in WA$ یعنی هر دنباله ای از Ω که x پیشوندی از آن باشد عضو WA

است و WE نیز به همین شکل تعریف می شود.

لذا هر بازی را می توان به صورت چهارتایی مرتب $G = (\Omega, f, WA, WE)$ نمایش داد.

قضیه ۱) در بازی دلخواه G اگر موقعیت دلخواه x در WE باشد، در WA نیست و بالعکس.

برهان: فرض کنیم $x \in WE$ و $x \in WA$ و بدون از دست دادن کلیت $f(x) = E$.

از آنجا که طبق تعریف هر بازی که از x به بعد انجام شود در WE خواهد بود و

بازی تنها یک برنده دارد لذا هر دست ممکن در WE است پس $x \notin WA$.

تعریف ۲) یک بازی را کامل گوییم اگر هر دست از آن یا عضو WA یا عضو WE باشد.

بازی های منطقی معمولاً کامل هستند.

تعریف 3) بازی G را خوش تعریف گوییم اگر به ازای هر دست مثل p از آن موقعیت x، پیشوند p موجود باشد که اگر $p \in W_A$ آنگاه $x \in W_A$ و اگر $p \in W_E$ آنگاه $x \in W_E$.

در نتیجه یک بازی کامل را خوش تعریف گوییم اگر هر دست از آن در متناهی مرحله برنده داشته باشد.

تعریف 4) بازی G را متناهی گوییم اگر $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد که در هر دست مثل p از G در مرحله nام برنده مشخص باشد.

تعریف 5) تابع S را برای هر بازیکن، مثلاً A، یک استراتژی گوییم اگر هر موقعیت مثل x که $f(x)=A$ را به یک عضو از Q ببرد. (و بالعکس)

تعریف 6) استراتژی S را برای بازیکن دلخواه مثلاً A، استراتژی برد گوییم اگر در هر دست بازی اگر A مطابق S بازی کند، مستقل از بازی E پیروز شود. (و بالعکس)

قضیه 2) حداکثر یک بازیکن استراتژی برد دارد.

برهان: فرض کنیم S_A و S_E به ترتیب استراتژی برد برای A و E باشد.

اگر هردو مطابق استراتژی بردشان بازی کنند، هردو باید برنده شوند، اما طبق تعریف حداکثر یک برنده داریم، لذا فرض خلف باطل است.

تعریف 7) بازی ها را مشخص گوییم اگر یکی از بازیکنان استراتژی برد داشته باشد.

• گیل و استوارت (Gale and Stewart) در 1953 نشان دادند همه بازی ها مشخص نیستند. (با استفاده از اصل انتخاب)

قضیه 3) هر بازی متناهی، مشخص است.

برهان: فرض کنیم A بازیکن اول باشد و استراتژی برد ندارد. در نتیجه هر موقعیت ایجاد شده توسط A نمی تواند پیروزی A را مستقل از ادامه بازی تضمین کند، به عبارت دیگر به ازای هر موقعیت ایجاد شده توسط A، دست کم یک استراتژی برای E موجود است که A برنده نشود، از آنجا که بازی متناهی است در آن استراتژی E برنده می شود.

• در 1933 تارسکی در مقاله "On the Concept of truth in Formal languages"
شرایط لازم و کافی برای درستی منطقی برای عبارات در زبان فرمال ارائه کرد که سعی
بر جلوگیری از مشکلات مثل پارادوکس دروغگو - "این جمله غلط است" - داشت.

~~صورت [illegible] این تعریف برای منطق مرتبه اول در ادامه آمده.~~

~~تعریف 8 [illegible]~~

• در دهه 50 هنکین متوجه شد که می‌توان عباراتی منطقی ساخت که شهوداً معنی‌پذیر
هستند اما در تعریف تارسکی نمی‌گنجند. برای مثال:

○ برای هر x_0، y_0 موجود است که برای هر x_1، y_1 موجود است که ...

$$\varphi := \forall x_0 \exists y_0 \forall x_1 \exists y_1 \cdots$$

فرمول φ به دلیل داشتن نامتناهی سور در تعریف تارسکی که ذات بازگشتی دارد، معنی‌پذیر
نیست. اما هنکین با ساختن نوعی بازی برای عباراتی مثل φ درستی تعریف کرد:

I. اگر $\varphi = \forall x_i \psi(x_i)$، A یک متغیر a_i انتخاب کرده و جایگزین x_i می‌کند و بازی
روی $\psi(x_i / a_i)$ ادامه می‌یابد

II. اگر $\varphi = \exists x_i \psi(x_i)$، E متغیر a_i انتخاب کرده و به جای x_i قرار می‌دهد و بازی
روی $\psi(x_i / a_i)$ ادامه می‌یابد

- پیروزی A به منزله نادرستی و پیروزی E به منزله درستی φ می‌باشد.

Subject .... Date ....

• اندولی پس از هنتین هیستیکا بازی ها را برای دیگر علائم منطقی $\{\vee, \forall, \neg\}$ گسترش داد به طوری که هر عبارت در زبان مرتبه اول را در ساختار مشخص می‌توان تبدیل به یک بازی کرد.

تعریف G بازی G را برای ساختار M اینگونه تعریف می‌کنیم: برای عبارت φ

I) اگر $\varphi = \alpha \wedge \beta$، A یکی از α یا β را انتخاب و بازی روی عبارت منتخب ادامه می‌یابد.

II) اگر $\varphi = \forall x\, \alpha(x)$، A متغیر ثابت a را انتخاب کرده و بازی روی $\alpha(^{x}|_{a})$ ادامه می‌یابد (به طوری که نام a برای x آزاد باشد).

III) اگر $\varphi = \alpha \vee \beta$، E یکی از α یا β را انتخاب کرده و بازی ادامه می‌یابد.

IV) اگر $\varphi = \exists x\, \alpha(x)$، E یک متغیر ثابت مثل b را که نام b برای x در α آزاد است، انتخاب کرده و بازی روی $\alpha(^{x}|_{b})$ ادامه می‌یابد.

V) اگر $\varphi = \neg \alpha$، آنگاه بازی به طور قرینه روی α ادامه می‌یابد - یعنی جای A و E را عوض می‌کنیم -.

VI) اگر φ یک رابطه (predicate) باشد، آنگاه درستی φ به معنی پیروزی E و نادرستی آن به معنی پیروزی A می‌باشد.

در نهایت عبارت φ را در GTS درست در نظر می‌گیریم اگر E استراتژی برد داشته باشد.

clips™

Subject .... Date ....

قضیه 4) از آنجا که هر عبارت مرتبه اول متناهی است لذا بازی متناظر با آن در GTS متناهی است، در نتیجه طبق قضایای 2 و 3 در GTS حتماً یا درست یا غلط می باشد یعنی اصل ترد ثالث (Law of excluded middle) در GTS برقرار است.

$$\models_{GTS} \varphi \text{ or } \models_{GTS} \neg\varphi$$

قضیه 5) در هر زبان مرتبه اول مثل L، و هر L-ساخت مثل M، هر عبارت مثل φ در GTS درست است اگر و تنها اگر در ~~دسته~~ معنی شناسی تارسکی درست باشد. ($\models_{GTS}\varphi$ iff $\models_{TS}\varphi$)

برهان:

حکم را با استقرا روی پیچیدگی φ ثابت می کنیم.

پایه: اگر φ یک رابطه باشد (predicate) طبق تعریف حکم برقرار است.

I. $\varphi = \alpha \wedge \beta$

- اگر $\models_{TS}\varphi$ آنگاه طبق تعریف TS می دانیم α و β در TS درست هستند پس در GTS نیز طبق فرض استقرا درست هستند، در نتیجه برای E هم در α و هم در β استراتژی برد وجود دارد، لذا مستقل از بازی A، برای E در φ استراتژی برد موجود است، در نتیجه $\models_{GTS}\varphi$.

- اگر $\models_{GTS} \varphi$ پس E در φ استراتژی برد دارد، از آنجا که $\varphi = \alpha \wedge \beta$

پس نوبت A برای بازی می باشد در نتیجه E هم در α و هم در β استراتژی

برد دارد - طبق قضیه 2 -. پس $\models_{GTS} \alpha$ و $\models_{GTS} \beta$.

در نتیجه طبق فرض استقرا $\models_{TS} \alpha$ و $\models_{TS} \beta$ و همچنین طبق تعریف تارسکی

می توان نتیجه گرفت $\models_{TS} \alpha \wedge \beta$ پس $\models_{TS} \varphi$.

II. $\varphi = \alpha \vee \beta$.

- اگر $\models_{TS} \varphi$، طبق تعریف $\models_{TS} \alpha$ یا $\models_{TS} \beta$.

بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می کنیم $\models_{TS} \alpha$، طبق فرض استقرا $\models_{GTS} \alpha$

لذا E در α استراتژی برد دارد، از آنجا که در φ، نوبت E برای بازی می باشد

E، α را برای ادامه انتخاب می کند و در نتیجه E در φ نیز استراتژی برد دارد.

پس $\models_{GTS} \varphi$.

- اگر $\models_{GTS} \varphi$، پس E در φ استراتژی برد دارد.

از آنجا که نوبت E می باشد و بازی های موجود α و β هستند، پس E

در α یا β استراتژی برد دارد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می کنیم α،

در نتیجه $\models_{GTS} \alpha$ پس $\models_{TS} \alpha$ (طبق فرض استقرا).

در نتیجه طبق تعریف TS، داریم $\models_{TS} \alpha \vee \beta$ پس $\models_{TS} \varphi$.

Subject .... Date ....

VII : $\varphi = \forall x \psi(x)$

- اگر $\models_{TS} \varphi$ پس به ازای هر a که متغیری مشخص است

$\psi(a^x/a)$ درست است، در نتیجه برای A هیچ متغیری مثل a' موجود نیست

که $\psi(^x/a')$ در TS نادرست باشد و طبق قرار داد در نتیجه طبق فرض استقرا در $\mathcal{E}TS$

نیز چنین است و از آنجا که φ متناهی است وطبق قضیه 3 و از آنجا که A

استراتژی برد ندارد پس E استراتژی برد دارد در نتیجه $\models_{\mathcal{E}TS} \varphi$.

- اگر $\models_{\mathcal{E}TS} \varphi$ پس E در φ استراتژی برد دارد وطبق قضیه 2، A

استراتژی برد ندارد، پس طبق تعریف a موجود نیست که $\not\models_{\mathcal{E}TS} \psi(^x/a)$

پس طبق فرض استقرا در TS نیز چنین است، در نتیجه $\models_{TS} \forall x \psi(x)$

پس $\models_{TS} \varphi$.

IV. $\varphi = \exists x \psi(x)$

- اگر $\models_{TS} \varphi$ پس a موجود است به طوری که $\models_{TS} \psi(x/a)$. لذا طبق فرض استقرا $\models_{GTS} \psi(x/a)$، از آنجا که در φ نوبت E برای بازی [illegible] می‌باشد، E، a را در $\psi(x)$ بجای x انتخاب می‌کند و همان طور که پیشتر نشان دادیم E استراتژی بردی در φ دارد. درنتیجه $\models_{GTS} \exists x \psi(x)$ پس $\models_{GTS} \varphi$

- اگر $\models_{GTS} \varphi$ پس a موجود است که a برای x در $\psi(x)$ آزاد است و همچنین $\models_{GTS} \psi(x/a)$، پس طبق فرض استقرا $\models_{TS} \psi(x/a)$ و طبق تعریف تارسکی $\models_{TS} \exists x \psi(x)$ درنتیجه $\models_{TS} \varphi$.

V. در نهایت حالت $\varphi = \neg \psi$ را بررسی می‌کنیم که از هوشمندانه‌ترین تعاریف هینتیکا در GTS می‌باشد.

- اگر $\models_{TS} \varphi$، از آنجا که $\varphi \wedge \neg \varphi$ در TS همواره غلط است لذا $\neg \varphi$ در TS غلط است و طبق فرض می‌دانیم $\neg\varphi = \neg(\neg\psi) = \psi$
- به همراه قانون ترد ثالث که همواره مفروض است - پس طبق فرض استقرا ψ در GTS نیز غلط است درنتیجه طبق تعریف GTS، A در ψ استراتژی برد دارد از آنجا که طبق تعریف GTS، نماد "$\neg$" جای بازیکنان را تعویض می‌دهد پس E در $\neg\psi$ استراتژی برد دارد، درنتیجه $\models_{GTS} \neg\psi$ پس $\models_{GTS} \varphi$.

Subject .... Date ....

- اگر $\models_{e\text{-}TS} \varphi$ آنگاه طبق تعریف E در φ استراتژی برد دارد

و از آنجا که $\varphi = \neg\neg\varphi$ پس A در $\neg\varphi$ استراتژی برد دارد پس $\neg\varphi$ در e-TS

غلط است و نتیجه می‌گیریم طبق فرض استقرا $\neg\varphi$ در TS نیز غلط است در نتیجه

$\not\models_{TS} \neg\varphi$ پس $\models_{TS} \varphi$.

• به این ترتیب طبق قضیه 5 حاصل e-TS و TS برابر است.

در نتیجه e-TS با دستگاه استنتاج طبیعی نیز یکسان است.

همچنین قضایای صحت و تمامیت و معادلاً قضیه فشردگی در e-TS برقرار است.

• برای درک بیشتر e-TS در مثال های زیر آن را با دستگاه استنتاج طبیعی مقایسه می کنیم.

I. $\varphi = p \to (q \vee \neg q)$.

- ابتدا دستگاه استنتاج طبیعی:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[p]^1 \\ q \vee \neg q \ \text{همواره درست}\end{array}}{p \to (q \vee \neg q)}\ I\to$$

در نتیجه $\vdash_{ND} \varphi$.

Subject .... Date ....

ـ برای بررسی φ در CTS ابتدا زبان آن را در زبان $\{\forall,\exists,\wedge,\vee,\neg\}$ بازنویسی می کنیم:

$\psi_{\text{tg}} = \neg p \vee (q \vee \neg q)$ ، $\psi \equiv \varphi$

نوبت اول بازی متعلق به E می باشد و همین طور نوبت دوم.

همان طور که قبلا نشان دادیم E در $q \vee \neg q$ استراتژی برد دارد، در نتیجه در نوبت اول می تواند $(q \vee \neg q)$ را برای ادامه بازی انتخاب کند.

در نتیجه E استراتژی برد دارد پس $\models_{CTS} \psi$ و از آنجا که $\psi \equiv \varphi$ پس به طور شهودی ـ به معنی تنظیم زبان φ به طوری که معنی آن تغییر نکند ـ φ نیز در CTS صحیح است.

II. در ساختار حساب اعداد طبیعی φ را چنین معرفی می کنیم

$$\varphi = \forall n(\exists m(2.m > n)).$$

ـ در دستگاه استنتاج طبیعی برای φ داریم

$$\cfrac{\cfrac{2.(n+1) > n}{\exists m\,(2.m > n)}}{\forall n\,(\exists m(2.m > n)}$$

در نتیجه $\vdash_{NQ} \varphi$.

clips

Subject .... Date ....

— در GTS، برای هر n که در نوبت اول توسط A مشخص شود، E می تواند n+1 به جای m قرار دهد، آنگاه حتماً $n < 2(n+1)$، برقرار خواهد بود

پس E استراتژی برد دارد، در نتیجه $\models_{GTS} \varphi$.

• همانطور که در مثال ها دیدیم و از تعریف برمی‌آید، GTS برخلاف ~~معنا~~ معنی شناسی تارسکی کمتر در مورد سینتکس است و بیشتر روی معنی عبارات متمرکز است به همین دلیل از GTS در مورد زبان طبیعی نیز استفاده می‌شود. در واقع ~~یکی~~ یکی از مهمترین کاربرد های GTS در زبان طبیعی است که به دلیل پیچیدگی و ارتباط زیاد با فلسفه از ورود به این زمینه خود داری می کنیم.

• با رشد GTS و ورود هرچه بیشتر نظریه بازی ها به حوزه منطق ریاضی، در سال 2003 جاپاریدز (Japaridze) منطق محاسبه پذیری (Computability Logic) را معرفی کرد، که برخلاف منطق کلاسیک که در تلاش برای فرمال کردن درستی برای فرمول های منطقی بوده، منطق محاسبه پذیری (با CoL نمایش می دهیم) سعی بر معرفی منطق به صورت دستگاهی فرمال برای محاسبه پذیری دارد.

در منطق کلاسیک فرمول ها به شکل عبارت های درست یا غلط هستند در حالی که در CoL فرمول ها مسائل محاساتی هستند که درستی آنها به معنی همواره محاسبه پذیر بودن آنها می باشد.

در ساحت CoL مسائل محاسبه پذیری به شکل بازی های میان ماشین و محیط دیده می شوند که محاسبه پذیری (همان درستی) مسئله φ، به معنی وجود یک استراتژی برد برای ماشین می باشد که تا حدی مشابه GTS است.

این دیدگاه در ساحت CoL گسترشی بر تز چرچ-تورینگ (Church-Turing Thesis) است که به آن پویایی (interactive) می دهد، زیرا فرض وجود تابعی که φ را محاسبه کند را با وجود ماشینی که مستقل از حرکات محیط همواره در بازی متناظر پیروز شود یکی می داند.

از خواص بسیار بزرگ ساحت CoL می توان به جامع بودن آن اشاره کرد، یعنی منطق کلاسیک، منطق شهودگرایی و منطق های دیگر از این دست همگی با اعمال محدودیت هایی خاص بر ساحت CoL قابل ساخت هستند.

منابع:

1) صفحات ویکی پدیا زیر:
Game Semantics, Game Theory, Computability logic,
Semantic Theory of Truth, Alfred Tarski

2) دانشنامه فلسفه دانشگاه استنفورد (Stanford Encyclopedia of Philosophy)
plato.stanford.edu

3) Game-Theoretical Semantics, Hintikka, Carlson (1979)