آشنایی با نظریه طیفی گراف ها

گرد آورندگان:
پارسا تسبیح گو
محمدرضا معتبر
استاد :
دکتر سیامک یاسمی

دانشکده ریاضی
پاییز ۹۹

فهرست

چکیده

در ابتدا انواع روابط گراف ها و ماتریس ها را بررسی می کنیم و مفاهیمی از گراف را معرفی می کنیم سپس با استفاده از خواص ماتریس ها به بررسی ساختار و خواص گراف ها می پردازیم و بعضی از خواص ماتریس ها رو به خواص گراف ها ترجمه می کنیم بعضی جا ها هم با استفاده از جبر خطی قضایایی در گراف را ثابت می کنیم.

مقدمه

نظریه طیفی گراف ها در دهه ۵۰-۶۰ میلادی به وجود آمد.

Cheeger و Hoffman و Kirchhoff در این زمینه فعالیت داشته اند.

Cheeger : نامساوی Cheeger از مهم ترین قضایای نظریه طیفی گراف است.

Hoffman : کران بالا برای عدد استقلال گراف های منتظم.

Kirchhoff : شمارش تعداد زیر درخت های فراگیر گراف که در الکترونیک کاربرد گسترده دارد.

ماتریس ها در ارتباط با گراف ها

برای ورود از گراف به جبر خطی از روی گراف ها ماتریس هایی می سازیم.

برای تبدیل گراف به ماتریس راه های زیادی وجود دارد ولی معروف ترین ها و پر کاربرد ترین ها :

۱ - ماترییس مجاورت

۲ - ماتریس وقوع

۳ - ماتریس درجات

٤ - ماتریس لاپلاس

هستند.

حال به تعریف این ماتریس ها می پردازیم

ماتریس مجاورت

تصور کنید $G(V,E)$ یک گراف ساده است که تعداد رئوس آن برابر n می باشد.تصور کنید که رئوس G به صورت دلخواه همانند $v_1,\dots,v_n$ لیست شده اند. ماتریس مجاورت A با توجه به لیست رئوس, یک ماتریس $n \times n$ صفر و یک است که در صورتی درایه (i, j) برابر ۱ است که v_i و v_j با یکدیگر مجاور باشند و نیز در صورتی برابر صفر است که آن ها با یکدیگر مجاور نباشند.

توجه کنید که با این تعریف ماتریس مجاورت یک گراف ساده متقارن است.

ماتریس مجاورت همچنین می تواند برای نمایش گراف های بی جهت با حلقه ها و یال های چندگانه نیز استفاده شود. با این وجود دیگر به دلیل وجود یال ها و حلقه های چندگانه ماتریس مجاورت یک ماتریس صفر و یک نیست.

تمامی گراف های بی جهت از جمله گراف های چندگانه و شبه گراف ها دارای ماتریس مجاورت متقارن می باشند.

چون ماتریس های متقارن حقیقی قطری شدنی هستند پس ماتریس مجاورت قطری شدنی است.

ماتریس وقوع

تصور کنید $G(V, E)$ یک گراف بی جهت است و $v_1,\dots,v_n$ رئوس آن و $e_1,\dots,e_n$ یال های آن باشند.

ماتریس وقوع M باتوجه به ترتیب V و E یک ماتریس $n \times m$ می باشد به صورتی که درایه (i, j) هنگامی برابر ۱ است که e_j با v_i برخورد داشته باشند و در غیر این صورت ۰ است.

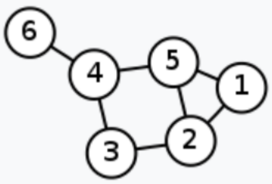
ماتریس درجات

تصور کنید $G(V, E)$ یک گراف بی جهت است و $v_1,\dots,v_n$ رئوس آن است در این صورت ماتریس درجات D ماتریسی $n \times n$ است که درایه (i, i) برابر درجه v_i و بقیه خانه ها صفر هستند.

ماتریس لاپلاس

تصور کنید G یک گراف بی جهت با n راس است ماتریس لاپلاس L برابر است با ماتریس درجات G منهای ماتریس مجاورت G.

توجه کنید که از آن جا که حاصل جمع هر سطر ماتریس لاپلاس صفر است پس دترمینان آن همواره صفر است.

Labelled graph	Degree matrix	Adjacency matrix	Laplacian matrix
	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

تعاریفی از ساختار گراف

گراف چند بخشی

گراف G را k بخش گوییم اگر و تنها اگر بتوان رئوس آن را به kدسته افراز کرد به صورتی که یال های گراف بین دسته ها باشد و هیچ یالی در یک دسته نباشد.

عدد رنگی

گراف G را k رنگ پذیر گوییم اگر بتوان رئوس G را با k رنگ طوری رنگ کرد که هیچ یالی دو سر همرنگ نداشته باشد.

عدد رنگی G را کوچک ترین عدد طبیعی k در نظر می گیریم که G , k رنگ پذیر باشد و $\chi(G) = k$.

چند جمله ای مشخصه گراف

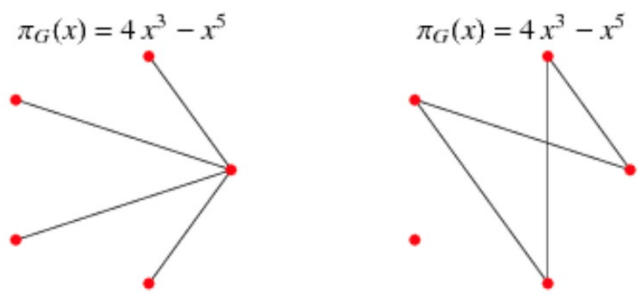
مقادیر ویژه گراف همان مقادیر ویژه ماتریس مجاورتش(A) است. فرض کنید $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ ریشه های چند جمله ای مشخصه باشد در این صورت $\phi(G;\lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$.

طیف گراف G برابر لیست مقادیر ویژه متمایز همراه با درجه آن ها در چند جمله ای مشخصه است و آن را $Spec(G) = \binom{\lambda_1,\ldots,\lambda_t}{m_1,\ldots,m_t}$ نمایش می دهند.

ارتباط ساختار گراف با چند جمله ای مشخصه

هر گراف را نمی توان از روی چند جمله ای مشخصه اش ساخت.

کوچک ترین مثال برای گراف ۵ راسی موجود است :



حدس بازسازی

deck(G) را خانواده همه زیر گراف های G که از حذف یک راس از G بدست می آیند می نامیم.

صورت حدس بازسازی(Ulam) : اگر deck(G) = deck(H) آنگاه H و G یکریخت هستند.

$$\phi(G;\lambda) = \sum_{v\in V(G)} \phi(G\backslash v;\lambda)\frac{d}{d\lambda}$$

در نتیجه با داشتن deck(G) میتوان $\phi(G;\lambda)$ را بجز جمله ثابت آن که det(A(G)) است بدست آورد.

همچنین Tutte نشان داد می توان det(A(G)) را پیدا کرد در نتیجه می توان $\phi(G;\lambda)$ را پیدا کرد.

یافتن $\phi(G;\lambda)$ با داشتن چند جمله ای های مشخصه اعضای deck(G) همچنان حل نشده باقی مانده است اما برای درخت ها حل شده است.

اثبات شده است که اگر چند جمله ای های مشخصه $deck(\overline{G})$ را داشته باشیم می توان $\phi(G;\lambda)$ را ساخت.

از روی deck(G) تعداد زیر درخت ها و تعداد دورهای همیلتونی را می توان پیدا کرد.

قضیه ۱

$\sum \lambda i$ = Trace A

Trace A برابر مجموع قطر اصلی و منفی ضریب λ^{n-1} در $\det(\lambda I - A)$ است.

ایده های اثبات:

۱- $\phi(G; \lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$

۲- استقرا

نتیجه : در گراف های ساده ضریب λ^{n-1} در چندجمله ای مشخصه ماتریس مجاورت برابر صفر و در گراف های بدون جهت ضریب λ^{n-1} در ماتریس مجاورت ۲ برابر تعداد طوقه ها است. همچنین در چند جمله ای مشخصه ماتریس لاپلاس ضریب λ^{n-1} برابر مجموع درجات است.

قضیه ۲

برای ماتریس $n \times n$ متقارن حقیقی A و $\lambda \in R$ که λ یک مقدار ویژه A نیز هست در چند جمله ای مشخصه A برابر درجه λ $n - \text{rank}(\lambda I - A)$.

قضیه لایبنیتز

$\prod \lambda_i = (-1)^n \phi(G; 0) = \det A = \sum_\sigma (\text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)})$

که سیگما روی جایگشت های ۱ تا n بسته شده است.

مثال

رنک ماتریس مجاورت $K_{m,n}$, ۲ است در نتیجه ۲ مقدار ویژه متفاوت λ_1 و λ_2 دارد . از آن جایی که Trace برابر ۰ است پس $\lambda_1 = -\lambda_2$. حال این مقدار را b می نامیم. در نتیجه $\phi(K_{m,n}; \lambda) = \lambda^{n+m} - b\lambda^{n+m-2}$ حال به محاسبه b می پردازیم.از آن جایی که λ فقط روی قطر اصلی ظاهر شده است طبق قاعده لایبنیتز جملاتی که ضریب λ^{n+m-2} دارند $n + m - 2$ تا از درایه های قطر اصلی را شامل میشوند. دو درایه باقی مانده $-a_{i,j}$ و $-a_{j,i}$ هستند. از آن جایی که $m \times n$ یال داریم پس $m \times n$ زوج ناصفر داریم.

در نتیجه $b^2 = mn$ و $\text{Spec}(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} \sqrt{mn} & 0 & -\sqrt{mn} \\ 1 & m+n-2 & 1 \end{pmatrix}$.

فرض کنید چند جمله ای مشخصه گراف G به صورت $\sum_{i=0}^{n} c_i\lambda^{n-i}$ باشد. آنگاه نشان دادیم $c_0 = 1$ و $c_1 = -\text{Trace } A$.

نحوه محاسبه c_2 برای $K_{m,n}$ برای همه گراف ها گسترش می یابد.

زیر ماتریس اصلی

زیر ماتریس اصلی ماتریس A ماتریسی است که از انتخاب سطر ها و ستون ها با اندیس برابر به دست می آید.

زیر ماتریس اصلی زیر گراف القایی گراف G است.

مانند محاسبه c_2 , c_i برابر مجموع دترمینان زیر ماتریس های اصلی $i \times i$, $-A$ است.

برای مثال c_3 برابر است با مجموع دترمینان زیر ماتریس های اصلی 3×3 , $-A$.

دترمینان زیر ماتریس اصلی 3×3, ۲- است اگر و تنها اگر زیر گراف القایی متناظرش مثلث باشد در غیر این صورت ۰ است.
در نتیجه c_3 برابر است با ۲- برابر تعداد مثلث های G .

در حالت کلی داریم $c_i = (-1)^i \sum_{|S|=i} \det(A(G[S]))$.

گراف های دو بخشی

لم ۱ : اگر G دو بخشی باشد و λ مقدار ویژه G با درجه m باشد آنگاه λ- نیز مقدار ویژه G با درجه m است.

ایده های اثبات:

۱- می توان فرض کرد تعداد رئوس دو بخش با هم برابرند(با اضافه کردن راس تنها) پس $A = \begin{pmatrix} \cdot & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$.

۲- فرض کنید $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ بردار ویژه برای λ باشد.

۳- حال $u = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ در نظر بگیرید می توان نشان داد چون v بردار ویژه λ است u بردار ویژه λ– است.

نتیجه : در گراف دوبخشی کمترین مقدار ویژه قرینه بزرگ ترین مقدار ویژه است.

لم ۲ : درایه (i, j) ماتریس A^k تعداد گشت های به طول k از i به j است.

ایده اثبات:

استقرا.

قضیه ۳

گزاره های زیر معادلند:

۱- G دو بخشی است.

۲- G دور فرد ندارد.

۳- مقادیر ویژه G زوج های قرینه هستند.

٤- چند جمله ای مشخصه G چند جمله ای در $\lambda^۲$ است.

٥- برای هر t صحیح مثبت $\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^{۲t-۱} = ۰$.

ایده های اثبات :

۱- برای اثبات معادل بودن ۱ با ۲ از تعاریف خود گراف و برهان خلف استفاده می کنیم.

۲- لم ۱ ثابت کرد ۱ , ۳ را نتیجه می دهد.

۳- معادل بودن ۳ و ٤ به صورت بدیهی و تنها با نوشتن چند جمله ای مشخصه و ضرب کردن دو پرانتزی که هم زوج هستند اثبات می شود.

٤- ۳, ٥ را با توجه به این که ۲t-۱ فرد است و همچنان اعداد سیگما دو به دو قرینه می مانند نتیجه می دهد.

٥- برای اثبات این که ٥ , ۲ را نتیجه می دهد از خاصیتی از ماتریس مجاورت استفاده می کنیم که دردرایه A^k (i, j) تعداد گشت های k یالی از راس i به راس j وجود دارد و از قضیه ای در جبر خطی استفاده می کنیم که اگر λ مقدار ویژه A باشد آنگاه λ^k مقدار ویژه A^k است. البته این قضیه نیز مورد استفاده قرار میگیرد که گراف گشت بسته فرد دارد اگر و تنها اگر دور فرد داشته باشد.

چند جمله ای مینیمم

$\Psi(A)$ را چند جمله ای مینیمم A می نامیم که دارای کمترین درجه ممکن است و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است.

اگر G یک گراف باشد $\psi(G)$ همان $\psi(A)$ است که A ماتریس مجاورت G است.

قضیه ٤

فرض کنید $\lambda_۱,\ldots,\lambda_t$ مقادیر ویژه متمایز A باشند آنگاه چند جمله ای مینیمم ماتریس A برابر است با:

$$\psi(A) = \prod_{i=۱}^{t}(\lambda - \lambda_i)$$

ایده اثبات:

طبق قضیه کیلی-همیلتون A در ϕ صدق میکند در نتیجه $\psi \mid \phi$.

مقادیر ویژه و پارامتر های گراف

مقادیر ویژه و پارامتر های گراف

قضیه ۵

قطر گراف کمتر از تعداد مقادیر ویژه متمایز است.

اثبات :

فرض کنید A ماتریس مجاورت G باشد. A در چند جمله ای از درجه r صدق می کند اگر و تنها اگر ترکیب خطی از $A^۰ \ldots A^r$ برابر ۰ باشد. از آن جا که تعداد مقادیر ویژه متمایز درجه چند جمله ای مینیمم A است کافیست نشان دهیم $A^۰ \ldots A^k$ مستقل خطی است

وقتی که k کوچک تر مساوی $diam(G)$ است. کافیست نشان دهیم به ازای k کوچکتر مساوی $diam(G)$, A^k ترکیب خطی نیست$A^۰,\ldots,A^{k-۱}$. v_i و v_j عضو $V(G)$ به طوری که $d(v_i, v_j) = k$ با استفاده از شمارش گشت ها $A^k_{i,j} \neq ۰$ اما $A^t_{i,j} = ۰$ برای $t < k$ در نتیجه A^k ترکیب خطی توان های کوچک تر k نیست.

لم ۳ : اگر A ماتریس حقیقی و متقارن باشد و $f(x) = x^TAx$ آنگاه مقدار ماکسیمم و مینیمم f روی بردارهای یکه به ترتیب λ_{max} و λ_{min} می باشد.

ایده های اثبات :

استفاده از ضرایب لاگرانژ

لم ۴ : اگر H زیر گراف القایی G باشد :

$$\lambda_{min}(G) \le \lambda_{min}(H) \le \lambda_{max}(H) \le \lambda_{max}(G)$$

لم ۵ : برای هر گراف G :

$$\delta(G) \le \frac{۲e(G)}{n(G)} \le \lambda_{max}(G) \le \Delta(G)$$

ایده های اثبات :

۱- اصل لانه کبوتری
۲- x_j را بزرگ ترین درایه بردار x تعریف می کنیم که x بردار ویژه برای مقدار ویژه λ است.

$$\lambda x_j = (Ax)_j = \sum_{vi \in N(vj)} xi \le d(v_j)x_j \le \Delta(G)x_j$$

$$\lambda_{max} \ge \frac{۱Tn}{\sqrt{n}} A \frac{۱n}{\sqrt{n}} = \frac{۱}{n} \sum \sum aij = \frac{۲e(G)}{n}$$

قضیه *

می خواهیم ثابت کنیم $\lambda_{max} = \Delta(G)$ اگر و تنها اگر G منتظم باشد.

اثبات :

فرض کنید $\lambda_{max} = \Delta(G)$ پس اگر x بردار ویژه λ_{max} باشد:

$$\lambda_{max}\, x_j = (Ax)_j = \sum_{vi \in N(vj)} xi = d(v_j)x_j = \Delta(G)x_j$$

پس تمام عناصر x برابرند پس ۱_n بردار ویژه است λ_{max} است پس $\lambda_{max}.۱_n = A.۱_n$ که سمت راست بردار درجات است و سمت چپ برابر برداری است که همه عناصرش λ_{max} پس گراف منتظم است چون همه درجات برابر λ_{max} می شوند.

حال فرض کنید G , k-منتظم باشد ۱_n بردار ویژه A(G) است با مقدار ویژه λ = k قرار می دهیم $x = ۱_n$ در نتیجه

$x_i = x_j = ۱$ پس $\sum_{vi \in N(vj)} xi = d(vj)$ همچنین $d(v_j)x_j = d(v_j) = k = \Delta(G) = \Delta(G)x_j$ در نتیجه

$$\lambda = \lambda x_j = (Ax)_j = \sum_{v_i \in N(v_j)} x_i = d(v_j)x_j = \Delta(G)x_j = \Delta(G)$$

نشان داده بودیم $\lambda_{max} \le \Delta(G)$ پس $\lambda_{max} = \Delta(G)$.

کران عدد رنگی گراف

تعریف : گراف G را بحرانی گوییم اگر به ازای هر v , $\chi(G \setminus v) = \chi(G) - ۱$.

لم ۶ : اگر G گرافی بحرانی باشد آنگاه $\delta(G) \ge \chi(G) - ۱$.

اثبات :

برهان خلف فرض کنید $\delta(G) \le \chi(G) - ۲$ و d(v) برابر δ(G) باشد. از آنجا که G بحرانی است پس

$\chi(G \setminus v) = \chi(G) - ۱$ از آن جا که $d(v) \le \chi(G) - ۲$ پس حداقل یک رنگ وجود دارد که در همسایه های v ظاهر نشده است پس G را می توان با $\chi(G) - ۱$ رنگ , رنگ کرد و این تناقض است.

قضیه Wilf

برای هر گراف G , $\chi(G) \leq ۱ + \lambda_{max}(G)$.

اثبات : فرض کنید $\chi(G) = k$. تا جایی از G راس حذف می کنیم که عدد رنگی گراف باقی مانده k باشد حال گراف بدست آمده را H می نامیم و می دانیم H بحرانی است طبق لم ۶ $\delta(H) \geq k - ۱$ همچنین طبق

لم ۵ $\delta(H) \leq \lambda_{max}(H)$ طبق لم ۴ $\lambda_{max}(H) \leq \lambda_{max}(G)$ در نتیجه داریم:

$$\chi(G) = k \leq ۱ + \delta(H) \leq ۱ + \lambda_{max}(H) \leq ۱ + \lambda_{max}(G)$$

نتیجه

فرض کنید G منتظم نباشد طبق قضیه * $\lambda_{max} < \Delta(G)$ در نتیجه طبق قضیه Wilf , $\chi(G) < ۱ + \Delta(G)$ و از آن جا که χ و Δ هر دو طبیعی هستند پس $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

تعداد مولفه های همبندی گراف

قضیه ۶

تعداد مولفه های همبندی گراف G برابر است با $n(L(G))$.

اثبات :

فرض کنید x عضو $N(L(G))$ آنگاه $L(G) . x = ۰$ در نتیجه :

$$۰ = x^T . L(G) . x = \sum_{(i, j) \in e(G)} (xi - xj)^۲$$

در نتیجه اگر i و j در یک مولفه همبندی باشند $x_j = x_i$. با این روش اگر G , k مولفه همبندی داشته باشد می توانیم پایه ای k عضوی برای $N(L(G))$ بسازیم.

قضیه matrix tree (Kirchhoff)

تعریف : فرض کنید e یالی در G باشد G.e از حذف یال های بین دو سر e و ترکیب رئوس دو سر e حاصل می شود.

لم ۷ : $\tau(G) = \tau(G.e) + \tau(G - e)$ ($\tau(G)$ برابر تعداد زیر درخت های فراگیر G است).

ایده اثبات :

حالت بندی روی وجود یا عدم وجود یال e در زیر درخت فراگیر.

لم ۸ : فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ و حقیقی باشد و $E_{i,i}$ ماتریسی است که درایه (i, i) برابر ۱ و بقیه خانه ها صفر است $\det(A + E_{i,i}) = \det(A) + \det(A[i])$.

ایده اثبات :

بسط دترمینان بر حسب ستون i ام.

صورت قضیه matrix tree :

$$\tau(G) = \det(L(G)[i])$$

اثبات :

حکم را به استقرا روی $n = |V(G)| + |E(G)|$ ثابت می کنیم.

پایه : $n = ۲$ تنها حالت ممکن گراف دو راسی بدون یال است که زیر درخت فراگیر ندارد و $\det(L(G)[i]) = ۰$

پس $\tau(G) = \det(L(G)[i])$.

گام :

اگر i راس تنها باشد آنگاه روشن است که G زیر درخت فراگیر ندارد پس $\tau(G) = ۰$ همچنین سطر و ستون i ام $L(G)$ تماما صفر است پس $\det(L(G)[j]) = ۰$ $(j \neq i)$ و همچنین $\det(L(G)[i]) = \det(L(G \setminus i)) = ۰$ پس حکم برقرار است.

ابتدا رابطه $L(G)$ و $L(G - e)$ را بررسی می کنیم :

توجه کنید که $L(G)[i] = L(G - e)[i] + E_{j,j}$ که i و j دو سر یال e هستند.

حال از دو طرف رابطه بالا دترمینان گرفته و طبق لم ۸ :

$$\det(L(G)[i]) = \det(L(G - e)[i] + E_{j,j}) = \det(L(G - e)[i]) + \det(L(G - e)[i, j])$$
$$= \det(L(G - e)[i]) + \det(L(G)[i, j])$$

حال رابطه $L(G)$ و $L(G.e)$ را بررسی می کنیم :

فرض کنیم راس i را در راس j فشرده کرده ایم ($L(G.e)$ سطر و ستون i ندارد) در نتیجه $L(G.e[j]) = L(G)[i,j]$.

پس نشان دادیم: $\det(L(G)[i]) = \det(L(G - e)[i]) + \det(L(G.e)[j]) = \tau(G - e) + \tau(G.e) = \tau(G)$