Lösning av andra ordningens kopplad diff. ekv. (Matlab)

Antag att vi har en diff. ekv som vi vill lösa

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -2x' + xy \\ y'' &= 3y' - y + 2x'' \end{aligned}\right\} (1)$$

Målet är att skriva om (1) till ett system av första ordningens diff. ekv.

Börja med att eliminera andraderivator med avseende på t ur varje ekvation.

$$x'' = -2x' + xy$$

$$y'' = 3y' - y + 2(-2x' + xy)$$

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -2x' + xy \\ y'' &= 3y' - y - 4x' + 2xy \\ &= 3y' - 4x' + y(2x-1) \end{aligned}\right\} (2)$$

För att skriva om (2) till system av första ordningen så gör vi ett variabelbyte.

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= x \\ u_2 &= x' \\ s_1 &= y \\ s_2 &= y' \end{aligned}\right\} (3)$$

Derivera (3) med avseende på t ger

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= x' \\ u_2' &= x'' \\ s_1' &= y' \\ s_2' &= y'' \end{aligned}\right\} (4)$$

Ekvation (4), (3) och (2) ger

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -2u_2 + u_1 \cdot s_1 \\ s_1' &= s_2 \\ s_2' &= 3s_2 - 4u_2 + s_1(2u_1 - 1) \end{aligned}\right\} (5)$$

Ekvation (5) är nu ett system med 4st första ordningens diff. ekv.

Detta kan vi lösa med Matlabs ode 45!

I Matlab tänker vi vektoriserat dvs

Antag vektorn

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$u_1 = Z(1)$

$u_2 = Z(2)$

$s_1 = Z(3)$

$s_2 = Z(4)$

Derivera (6) map t

$$\bar{Z}' = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ s_1' \\ s_2' \end{bmatrix} \quad (7)$$

Ekvation (7) och (5) ger

$$\bar{Z}' = \begin{bmatrix} u_2 \\ -2u_2 + u_1 s_1 \\ s_2 \\ 3s_2 - 4u_2 + s_1(2u_1 - 1) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Detta kan vi nu implementera som en funktion i Matlab och lösa med ode 45.

$[\bar{t}, \bar{Z}] = \text{ode45}(@\text{myfun}, \bar{t}, [x_0, x_0', y_0, y_0'])$

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{bmatrix}$$

$x_0 = 0 \qquad y_0 = 0$

$x_0' = 1 \qquad y_0' = 0$

$t = 0 \ldots 4$

1000