Варіант 26

1. Дослідити на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$$

$$n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\ln(n+1)} > 0$$

За ознакою Лейбніца:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{\ln(n+2)} < \frac{1}{\ln(n+1)} \to a_{n+1} < a_n$$

Отже ряд є збіжним

2. Знайдіть область збіжності

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{n-1}}{2n \times 3^n}$$

$$a_n = \frac{(x-5)^{n-1}}{2n \times 3^n} \qquad a_{n+1} = \frac{(x-5)^n}{2(n+1) \times 3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-5)^n}{2(n+1) \times 3^{n+1}} \times \frac{2n \times 3^n}{(x-5)^{n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-5)n}{(n+1)3} \right| = \left| \frac{x-5}{3} \right|$$

$$\left| \frac{x-5}{3} \right| < 1 \Rightarrow |x-5| < 3 \to 2 < x < 8$$

$$x = 2 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-5)^{n-1}}{2n \times 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \times 3^{n-1}}{2n \times 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n \times 3} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$x = 8 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(8-5)^{n-1}}{2n \times 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2n \times 3^n} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\text{Оскільки при x=2 ряд збіжний (за ознакою Лейбніца),}$$
$$\text{а при x=8 розбіжний, область збіжності} = [2, 8)$$

3. Обчисліть з точністю

$$\int_0^{0,1} \frac{\sin x}{x} dx \quad e = 10^{-4}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$n = 0 : \frac{a^1}{1 \times 1!} \approx 10^{-1}$$

$$n = 1 : -\frac{a^3}{3 \times 3!} = -\frac{10^{-3}}{18} \approx -5,5556 \times 10^{-5}$$

$$n = 2 : \frac{a^5}{5 \times 5!} = \frac{10^{-5}}{600} \approx 1,6667 \times 10^{-8}$$

$$0,1 - 5,5556 \times 10^{-5} + 1,6667 \times 10^{-8} \approx 0,09994$$

$$\int_0^{0,1} \frac{\sin x}{x} dx = 0,09994$$