1) Складіть рівняння дотичної до параболи $y = x^2$, що паралельна до січної, проведеної через точки з абсцисами $x_1 = 1,\ x_2 = 3$

$x = 1 : y = 1^2 = 1$
$x = 3 : y = 3^2 = 9$

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-1}{3-2} = \frac{8}{2} = 4$

$y' = 2x$
$y' = k \Rightarrow 2x = 4$
$x = 2$

$y = 2^2 = 4$
Точка дотику - $M(2;\ 4)$

$y = k(x - x_0) + y_0 = 4(x - 2) + 4 = 4x - x$

Відповідь: $y = 4x - x$

2.1) $y = (cos\ x)^{arcsin\ x}$

$ln(y) = arcsin(x)ln(cos\ x)$

$\frac{y'}{y} = arcsin'(x)ln(cos\ x) + arcsin(x)ln'(cos\ x) =$
$\frac{ln(cos\ x)}{\sqrt{1-x^2}} + arcsin\ x\frac{-sin\ x}{cos\ x} = \frac{ln(cos\ x)}{\sqrt{1-x^2}} - arcsin(x)\ tan(x)$

$y' = (cos\ x)^{arcsin\ x}(\frac{ln(cos\ x)}{\sqrt{1-x^2}} - arcsin(x)\ tan(x))$

2.2)

$$\begin{cases} x = 3cos2t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} =- \ 6sin\ 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = 6sin(t)cos(t) = 3sin\ 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3sin\ 2t}{-6sin\ 2t} = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{-1}{2} = 0$$

3) Проведіть повне дослідження та побудуйте графік функції

$y = x + \frac{\ln(x)}{x}$

1. Область визначення

$\ln x$ визначено для $x > 0$

$1/x$ визначено для $x \neq 0$

$x \in (0; + \infty)$

2. Точки перетину з осями

$x \neq 0 -$ Вісь Oy не перетинає

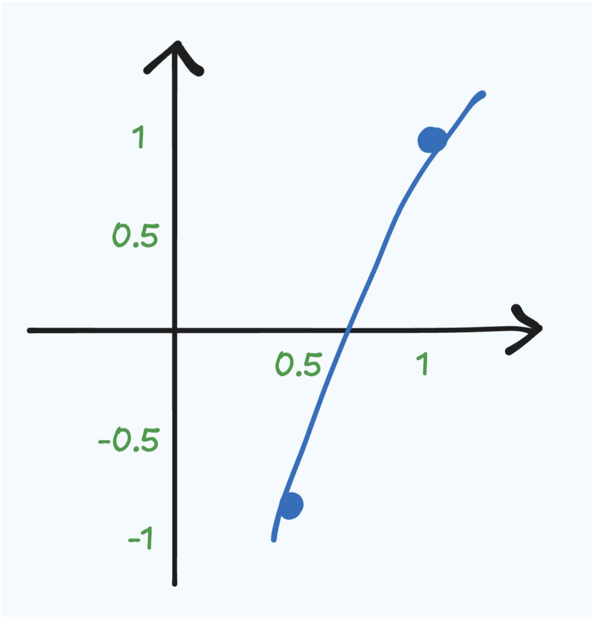
$y = 0 : x + \frac{ln(x)}{x} = 0$

$\frac{x^2+ln(x)}{x} = 0$

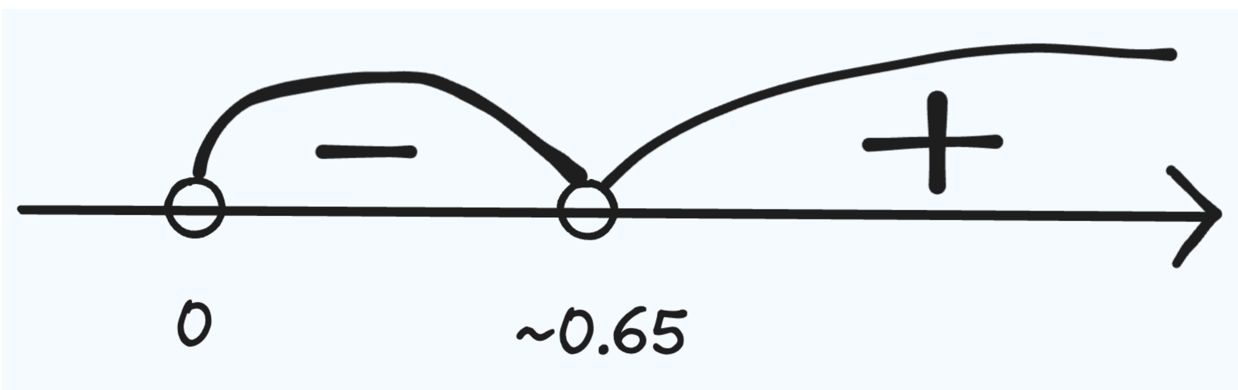
$x^2 + ln(x) = 0$

Це рівняння яке не має елементарного розв'язку

Графічне розв'язання показує, що $x \approx 0.65$



3. Проміжки знакосталості



4. Оскільки область визначення несиметрична, то функція ні парна, ні непарна

5. Асимптоти

Оскільки $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} (x + \frac{ln(x)}{x}) = - \infty$, то $x = 0$ - вертикальна асимптота k = $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} (\frac{x^2+ln(x)}{x^2}') = \lim\limits_{x \to \infty} (\frac{2x^2+1}{2x^2}') = \lim\limits_{x \to \infty} (\frac{4x}{4x}) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \frac{ln(x)}{x} - x) = 0$

$y = x$ - похила асимптота

6. Екстремуми та інтервали монотонності

$y' = 1 + \frac{1-ln(x)}{x^2} = \frac{x^2+1-ln(x)}{x^2}$

Оскільки x^2 зростає швидше, ніж $ln(x)$, похідна y' > 0

7. Точки перегину та точки перегину

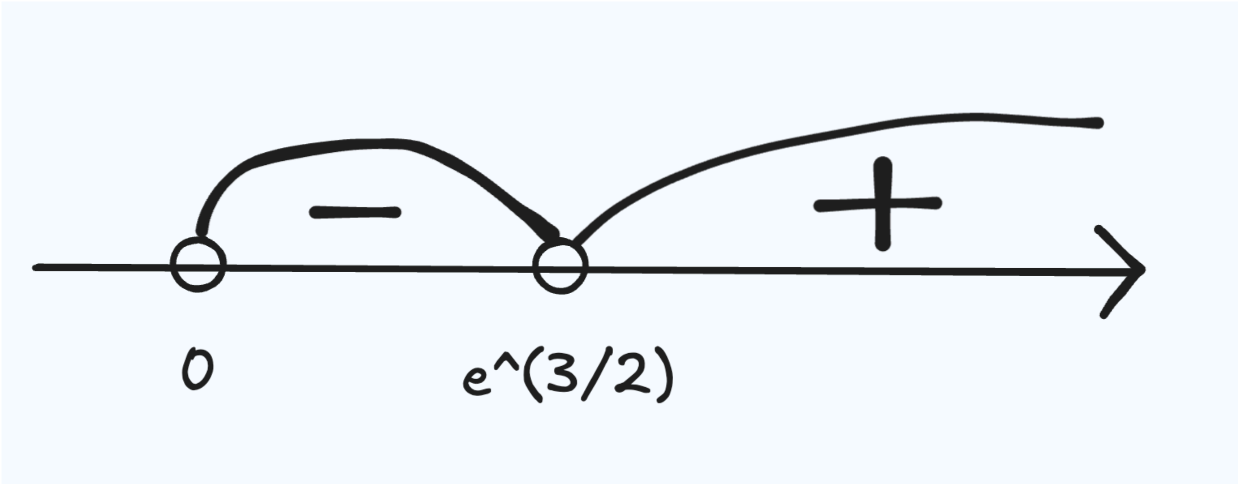
$y'' = \frac{x^2(2x-\frac{1}{x})-2x(x^2+1-ln(x))}{x^4} = \frac{2x^2-x-2x^2-2x+2xln(x)}{x^4} = \frac{-3x+2xln(x)}{x^4} = \frac{-3+2ln(x)}{x^3}$

$y'' = 0 \Rightarrow \frac{-3+2ln(x)}{x^3} = 0,\ x \neq 0$

$-3 + 2ln(x) = 0$

$ln(x) = \frac{3}{2}$

$x = e^{\frac{3}{2}}$ - точка перегину



Тоді на інтервалі $(0;\ e^{\frac{3}{2}})$ функція опукла, а на $(e^{\frac{3}{2}};\ +\infty)$ - ввігнута

8. Графік функції