

2

ANALIZA SISTEMELOR AUTOMATE LINIARE ȘI CONTINUE

2.1 SCOPUL ȘI METODELE ANALIZEI

Analiza unui sistem automat își propune să determine comportarea și performanțele sale, atât în regim staționar cât și în regim tranzitoriu (dinamic), având ca date inițiale structura și parametrii elementelor componente ale sistemului.

Cea mai completă apreciere a performanțelor sistemului și deci a comportării sale, se poate face prin determinarea variației în timp a mărimii de ieșire y ca urmare a unei variații a mărimii de intrare u sau ca urmare a variației unei perturbații p ; cunoscând în acest mod răspunsul sistemului, la variația mărimii de intrare sau a perturbației, pot fi măsurati indicii de calitate ai regimului staționar și tranzitoriu, stabilindu-se în consecință dacă sistemul analizat poate fi sau nu utilizat în cazul concret dat.

O condiție necesară, dar nu și suficientă, pentru ca un sistem automat să poată fi utilizat în practică este *stabilitatea* sistemului, respectiv proprietatea sistemului de a restabili, prin acțiunea sa, un nou regim staționar, atunci când, datorită variației mărimii de intrare sau a unei perturbații, a fost scos dintr-un regim staționar anterior; la un sistem stabil, regimul tranzitoriu are astfel o durată limitată.

Un sistem instabil nu este utilizabil, deoarece nu poate îndeplini scopul pentru care este creat, de a realiza pe cale automată, o anumită lege de dependență între mărimea de ieșire și cea de intrare. La sistemele instabile, mărimea de ieșire are variații necontrolate, întrucât un nou regim staționar nu mai este restabilit după ieșirea dintr-un regim staționar anterior.

Determinarea performanțelor unui sistem are deci sens numai în cazul când sistemul este stabil și, de aceea, analiza comportării sistemelor cuprinde o verificare prealabilă a stabilității.

2.1.1 Tipuri de semnale utilizate în automatică

Performanțele verificate prin analiza sistemelor depind de tipul semnalului aplicat la intrare sau de tipul variației perturbației.

În acest scop, se folosesc anumite semnale deterministe (semnale care au o evoluție

cunoscută în timp și la care constantele ce le caracterizează pot fi ajustate) impuse prin normative. Ele pot fi aperiodice și periodice. Semnalele aperiodice frecvent aplicate sistemelor automate sunt: *impulsul unitar-Dirac*, *treapta unitară*, *rampa unitară*, *rampă pătratică*, etc. Semnalele periodice sunt de tip *armonic*, *sinusoidale*, *de frecvență variabilă*.

• Impulsul unitar-Dirac (v. fig. 2.1,a) notat cu $\delta(t)$, are valori nule în toate intervalele de timp, cu excepția momentului $t = 0$ (momentul aplicării sale) când valoarea sa tinde către infinit:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t \neq 0, \\ \infty, & \text{pentru } t = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Aria cuprinsă între curba de variație a impulsului și axa timpului este egală cu unitatea:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.2)$$

Dacă impulsul unitar este aplicat la momentul $\tau \neq 0$ (v. fig. 2.2,a), atunci este notat cu $\delta(t - \tau)$.

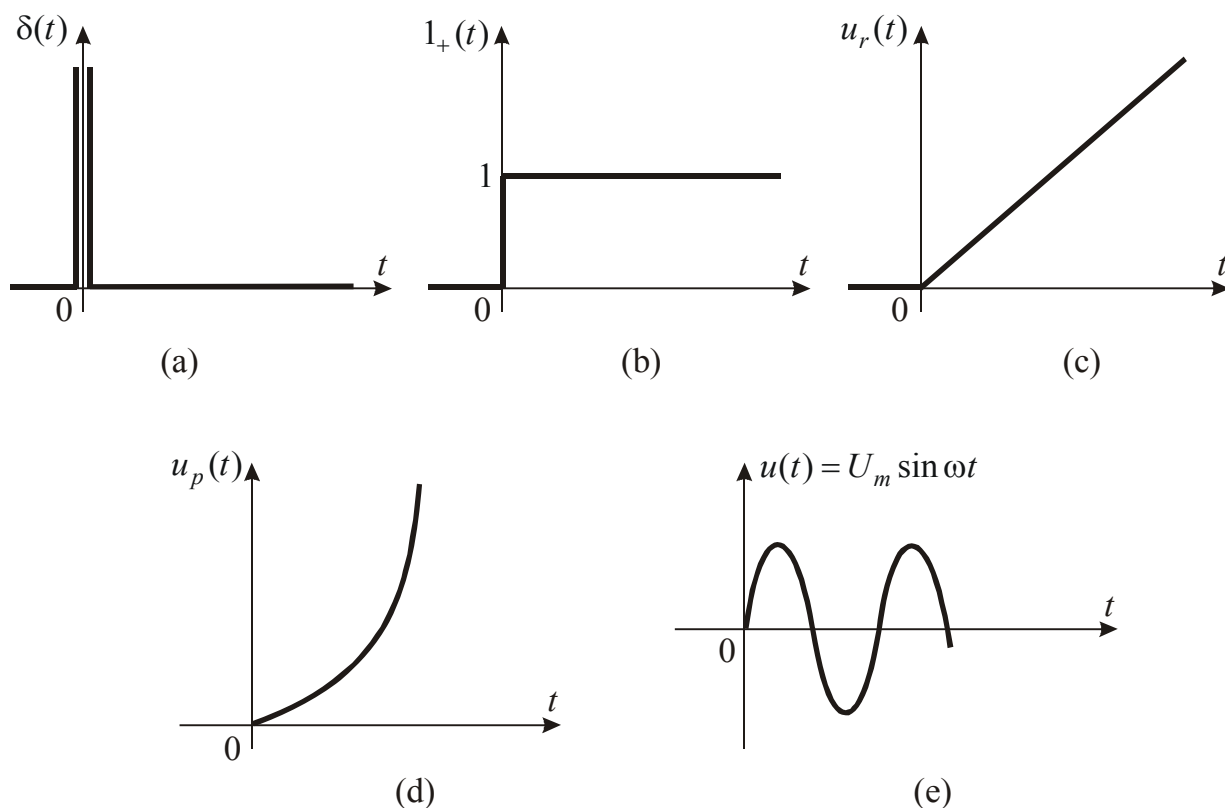


Fig.2.1 Tipuri de semnale utilizate în automatică: impuls unitar-Dirac (a); treaptă unitară (b); rampă unitară (c); rampă pătratică (d); semnal sinusoidal (e).

Răspunsul unui element sau sistem liniar la un impuls unitar-Dirac este denumit *funcție pondere* și va fi notat cu $w(t)$.

• Treapta unitară (v. fig. 2.1,b), notată cu $1_+(t)$, are valoarea zero pentru $t < 0$, face un salt la valoarea 1 în momentul $t = 0$ și păstrează această valoare pentru întregul interval $t > 0$:

$$1_+(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t < 0, \\ 1, & \text{pentru } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Dacă treapta unitară este aplicată la momentul $\tau \neq 0$ (v. fig. 2.2,b), atunci este notată cu $1_+(t - \tau)$.

Răspunsul unui element sau sistem liniar la o treaptă unitară este denumit *funcție indicială* sau *răspuns indicial* și va fi notat cu $h(t)$.

• Rampa unitară (v. fig. 2.1,c), are valoarea zero pentru $t < 0$ și valoarea $u_r(t) = t$ pentru $t \geq 0$:

$$u_r(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t < 0, \\ t, & \text{pentru } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Funcția rampă unitară reprezintă o creștere cu viteză de variație unitară; deci, dreapta care reprezintă variația în timp a funcției face un unghi de 45° cu axa timpului.

• Rampa pătratică (v. fig. 2.1,d), are valoarea zero pentru $t < 0$ și $u_p(t) = t^2/2$, pentru $t \geq 0$:

$$u_p(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t < 0, \\ \frac{t^2}{2}, & \text{pentru } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Semnalele cu variație parabolică sunt mai rar aplicate la intrarea sistemelor automate.

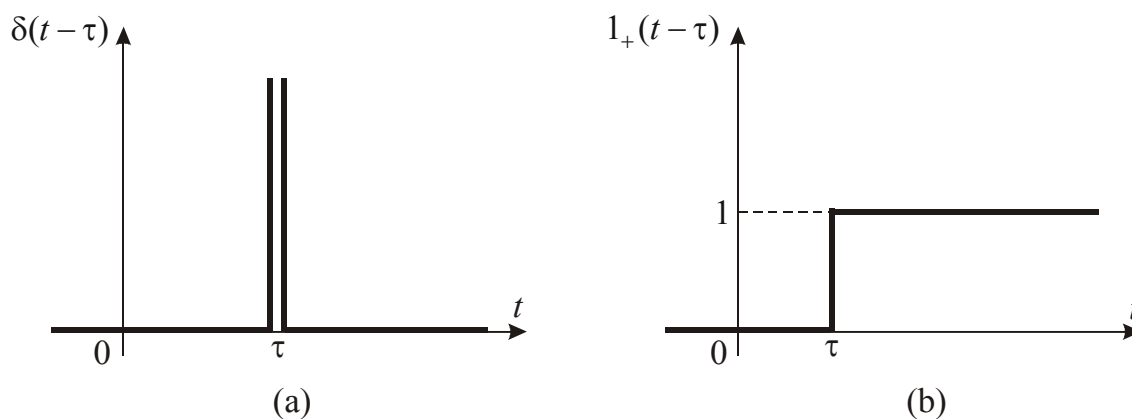


Fig.2.2 Tipuri de semnale utilizate în automatică: impuls unitar-Dirac aplicat la momentul $\tau \neq 0$ (a); treaptă unitară aplicată la momentul $\tau \neq 0$ (b).

• În cadrul metodelor de frecvență utilizate în analiza sistemelor automate sunt aplicate semnale sinusoidale de frecvență variabilă (v. fig. 2.1,e):

$$u(t) = U_m \sin \omega t. \quad (2.6)$$

Impulsul unitar-Dirac reprezintă derivata în sens generalizat a treptei unitare:

$$\delta(t) = \frac{d1_+(t)}{dt}. \quad (2.7)$$

În mod similar între semnalele rampă unitară și treaptă unitară există următoarea relație:

$$1_+(t) = \frac{du_r(t)}{dt}. \quad (2.7')$$

Pentru sistemele liniare și continue, cu parametrii constanți și localizați, relația (2.7) conduce la o relație de forma:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad (2.8)$$

între răspunsurile la impulsul unitar și la treapta unitară.

Cu ajutorul semnalelor tip, studiul funcționării sistemului automat cu comportare liniară la o variație oarecare a mărimii de intrare u , se reduce la descompunerea acesteia în semnale tip, la determinarea comportării sistemului automat în raport cu fiecare din aceste semnale tip și în cele din urmă, la suprapunerea efectelor, pentru a se afla răspunsul sistemului.

2.1.2 Modele matematice intrare-ieșire ale elementelor și sistemelor liniare și continue

Pentru studiul sistemelor automate este necesară cunoașterea în cele mai mici amănunte a instalațiilor tehnologice supuse automatizării, precum și a semnalelor la care sunt supuse acestea. Pe această bază se obțin informațiile inițiale necesare analizei și sintezei sistemelor automate.

Forma cea mai cuprinzătoare de exprimare a informațiilor inițiale este modelul matematic (ecuația ce descrie comportarea elementului sau a sistemului dat în regim dinamic și staționar); cunoscând constantele fizice ale elementului sau sistemului, proprietățile lui sunt complet determinate.

Modelul matematic se stabilește pornind de la legile fizice care guvernează fenomenele care au loc: legile lui Kirchhoff în cazul elementelor (sistemelor) electrice, diverse forme de exprimare a legii conservării energiei, proprii diferitelor obiecte reglate, de exemplu legea lui Newton, etc. Stabilirea modelului matematic nu întâmpină dificultăți în cazul unor elemente (sisteme), de exemplu cele electrice, caracterizate ca rapide (motoare electrice, generatoare, etc.). La acestea, procesele fizice se supun cu o bună aproximare modelului matematic, în general liniar, iar constantele fizice pot fi determinate relativ ușor.

În cazul proceselor lente mai simple, ca reglarea temperaturii, a presiunii, debitului, etc., stabilirea modelului matematic este posibilă, dar se complică cunoașterea parametrilor; la procesele lente complexe chiar stabilirea ecuației devine imposibilă. În plus, aceste procese sunt neliniare, ceea ce complică studiul chiar în condițiile cunoașterii modelului matematic.

Mărimile de intrare și de ieșire ca și comenzile ce trec de la ieșirea unui element la intrarea celui următor și care apar în modelul matematic ce descrie funcționarea elementului (sistemului) respectiv pot avea diverse naturi fizice: pur mecanică, hidraulică, pneumatică, electrică, electronică, sau pot fi mărimi numerice reprezentând un raport; ele pot fi, de asemenea derivatele sau integralele unor mărimi în raport cu timpul. Este normal

deci ca aceste mărimi să fie reprezentate prin niște coordonate generalizate. Se poate demonstra echivalența unor elemente (sisteme) de natură fizică diferită (electrică, mecanică, hidraulică, pneumatică, etc.), dar descrise de modele matematice identice.

Se consideră deocamdată că funcționarea unui element (sistem) poate fi descrisă de o ecuație diferențială care reprezintă o relație între mărimea de ieșire (mărimea controlată) și mărimea de intrare, notate prin coordonate generalizate așa cum se arată convențional în figura 2.3. Pentru un sistem oarecare se poate scrie următoarea relație:

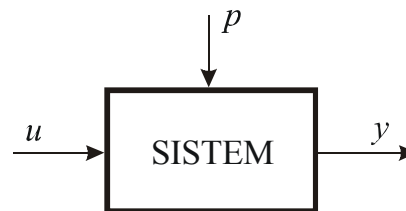


Fig.2.3 Schema-bloc generală a unui sistem având intrarea u , perturbația p și ieșirea y .

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = ku(t). \quad (2.9)$$

În practică, comportarea elementului sau sistemului însuși este influențată și perturbată de unii factori exteriori (marcați pe fig. 2.3, prin săgeata p).

Acești factori perturbatori sunt reprezentați prin termenul $p(t)$ adăugat la membrul din dreapta al ecuației (2.9), care devine:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = ku(t) + p(t). \quad (2.10)$$

Prezentarea modelelor matematice ale obiectelor reglate (elemente, sisteme) sub forma (2.10), unde $n = 1, 2, 3, \dots$, permite generalizarea studiului și concluziilor la o întreagă clasă de elemente (sisteme) care au același model matematic indiferent de tipul constructiv, de parametri fizici, etc.; pentru aceleași valori ale constantelor ce intervin în modele matematice (vor fi prezentate în detaliu în §2.2.1 și 2.2.2), ele au aceeași comportare în regim dinamic și staționar.

În această ordine de idei se vor prezenta în continuare câteva “elemente tip” frecvent întâlnite în automatică, modelele lor matematice intrare-ieșire și câteva posibilități de realizare fizică ale acestora [7,13,15÷17,21÷23,30,31].

a) Elementul proporțional (P)

Elementul proporțional este caracterizat de relația:

$$y = Ku, \quad (2.11)$$

unde K este o constantă.

Ca elemente proporționale pot fi considerate, cu anumite aproximații, unele tipuri de amplificatoare electronice, o serie de traductoare, anumite elemente mecanice fără inerție, etc., adică în general acele elemente care multiplică de K ori semnalul primit la intrare.

În figura 2.4 sunt prezentate câteva exemple de elemente proporționale.

Răspunsurile elementului proporțional la un semnal treaptă unitară și la un semnal rampă unitară, în ipoteza $K > 1$, sunt reprezentate în figura 2.5,a și 2.5,b.

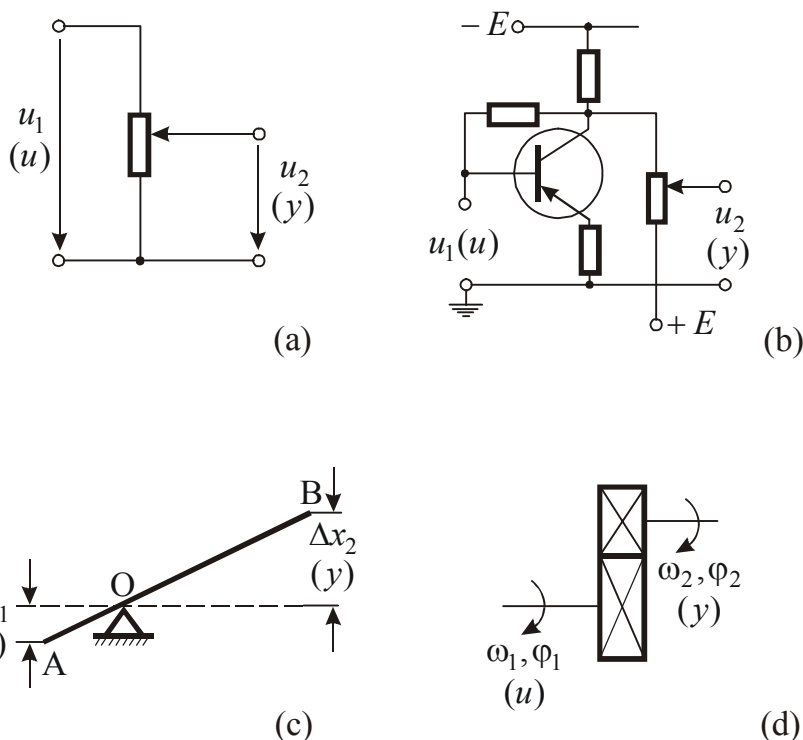


Fig.2.4 Exemple de elemente proporționale.

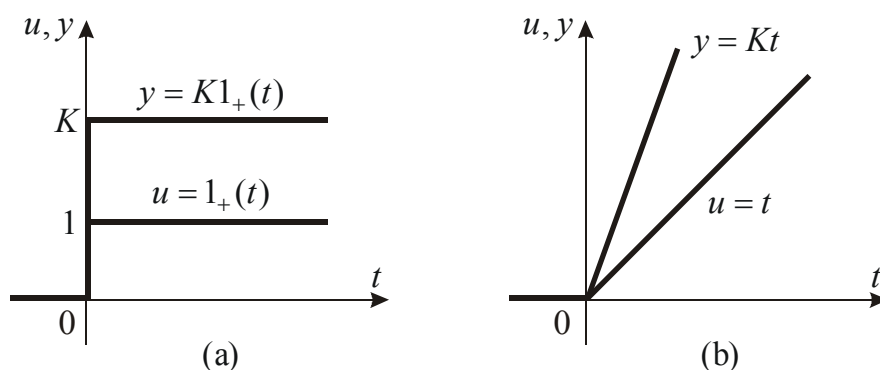


Fig.2.5 Răspunsurile elementului proporțional la un semnal treaptă unitară (a) și la un semnal rampă unitară (b).

b) Elementul integrator (I)

Elementul integrator este descris de relația:

$$y = K \int u dt. \quad (2.12)$$

în care K este un coeficient de proporționalitate și considerându-se condițiile inițiale nule.

Răspunsurile elementului integrator la semnale treaptă și rampă unitară sunt reprezentate în figura 2.6,a și 2.6,b.

Exemple de elemente integratoare:

- Un condensator electric (v. fig. 2.7,a) la care între tensiunea de la borne și intensitatea curentului există relația:

$$u = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (2.13)$$

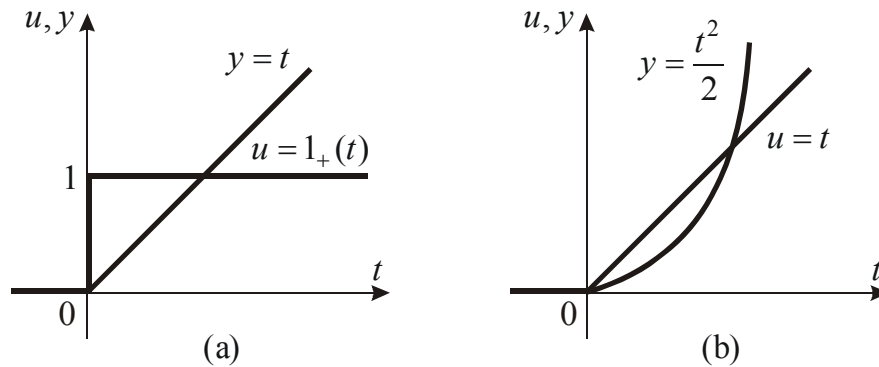


Fig.2.6 Răspunsurile elementului integrator la semnale treaptă unitară (a) și rampă unitară (b).

• Dependența dintre fluxul magnetic creat de o bobină (v. fig. 2.7,b) și tensiunea de la bornele acesteia este caracterizată prin relația:

$$\Phi = \frac{1}{w} \int u dt. \quad (2.14)$$

• Deplasarea unghiulară a unui arbore mecanic (v. fig. 2.7,c) în funcție de viteza unghiulară:

$$\varphi = \int \omega dt. \quad (2.15)$$

• Între nivelul apei într-un rezervor și debitele a două robinete (unul de umplere iar celălalt de evacuare) (v. fig. 2.7,d) se poate stabili o relație asemănătoare cu relația generală (2.12):

$$H = \frac{1}{S} \int (Q - G) dt. \quad (2.16)$$

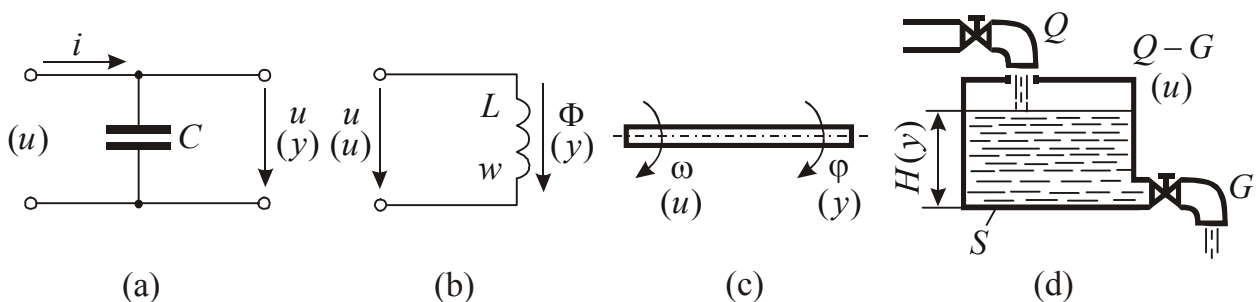


Fig.2.7 Exemple de elemente integratoare.

• Servomotorul hidraulic SM este comandat printr-un servoamplificator SA (v. fig.2.8,a) prin al cărui piston se trimite ulei sub presiune în SM.

Dependența dintre deplasarea tijei pistonului SA și debitul Q , considerând o presiune constantă în întreg cilindrul, este prezentată grafic în figura 2.8,b, printr-o linie punctată. Se poate aproxima acest grafic cu o linie dreaptă, pentru care există dependența liniară:

$$Q = ax_1, \quad (2.17)$$

reprezentată în desen printr-o linie continuă.

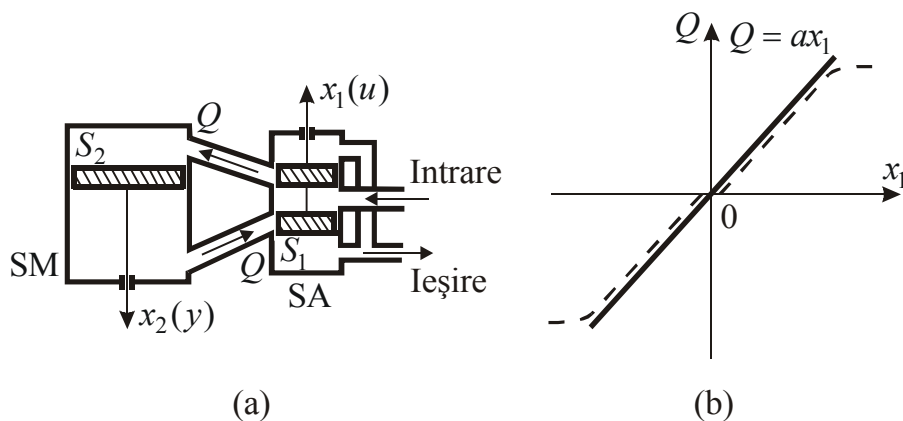


Fig.2.8 Element integrator: servomotorul hidraulic (a); reprezentarea grafică a dependenței $Q = f(x_1)$ (b).

În condițiile unui lichid incompresibil, se obține:

$$Q = S_2 \frac{dx_2}{dt} = ax_1, \quad (2.18)$$

unde S_2 reprezintă suprafața pistonului SM.

În consecință se poate scrie relația:

$$x_2 = \frac{1}{S_2} \int Q dt \approx \frac{a}{S_2} \int x_1 dt. \quad (2.19)$$

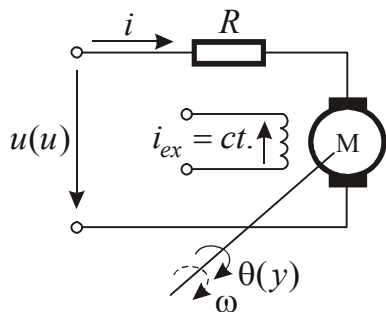


Fig.2.9 Schema unui motor de c.c. cu excitație independentă.

• Ca element integrator poate fi considerat, cu anumite aproximații și neglijări, motorul de curent continuu comandat prin indus, de putere mică (v. fig. 2.9) în cazul când, ca mărime de intrare este considerată tensiunea aplicată, iar ca mărime de ieșire poziția unghiulară a arborului pe care este montat rotorul; viteza unghiulară poate fi considerată, cu aproximațiile menționate, proporțională cu tensiunea de intrare, iar poziția unghiulară reprezintă integrala în timp a vitezei unghiulare.

Se consideră că motorul are excitație separată și constantă, $i_{ex} = ct.$ (v. fig. 2.9) și că circuitul rotorului are o inductivitate neglijabilă și o rezistență echivalentă R .

Aplicând teorema a II-a a lui Kirchhoff la circuitul rotorului se poate scrie:

$$u = Ri + e, \quad (2.20)$$

unde i este curentul rotorului, iar e – tensiunea contraelectromotoare.

Dar tensiunea contraelectromotoare este proporțională cu viteza unghiulară:

$$e = K\omega = K \frac{d\theta}{dt}. \quad (2.21)$$

Înlocuind relația (2.21) în expresia (2.20) se obține:

$$u = Ri + K \frac{d\theta}{dt}. \quad (2.22)$$

Neglijând rezistența echivalentă $R \approx 0$ (cazul motoarelor de c.c. de putere mică) rezultă:

$$u \cong K \frac{d\theta}{dt}, \quad (2.23)$$

sau:

$$\theta = K_1 \int u dt. \quad (2.24)$$

c) Elementul derivativ (D)

În cazul elementului derivativ, mărimea de ieșire este proporțională cu derivata mărimii de intrare, deci:

$$y = K \frac{du}{dt}, \quad (2.25)$$

unde K este un coeficient de proporționalitate.

În figurile 2.10,a și 2.10,b, sunt reprezentate răspunsurile elementului derivativ la semnale treaptă și rampă unitară (considerând impulsul-Dirac ca derivată în sens generalizat a treptei unitare).

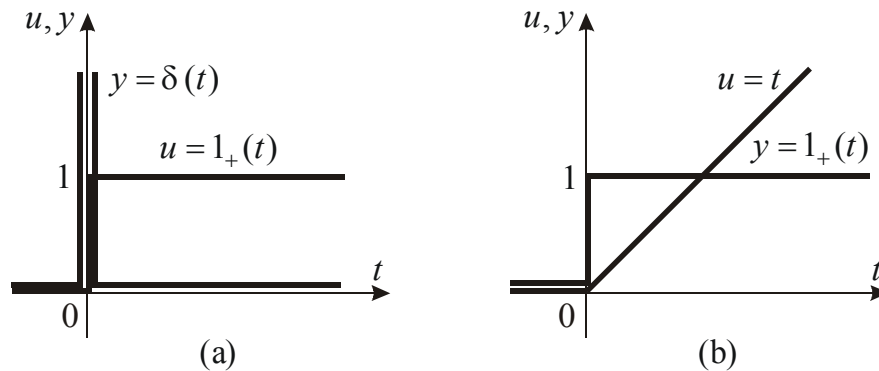


Fig.2.10 Răspunsurile elementului derivativ la semnale treaptă unitară (a) și rampă unitară (b).

Exemple de elemente derivate:

- Un element derivativ deosebit de sugestiv este condensatorul electric ideal (v. fig. 2.11,a), la care se poate scrie:

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (2.26)$$

- În figura 2.11,b este prezentat un alt element electric al cărui model matematic intrare-ieșire (considerând ca mărime de intrare intensitatea curentului și ca mărime de ieșire tensiunea de la borne) este identic cu modelul matematic general (2.25):

$$u = L \frac{di}{dt}. \quad (2.27)$$

• Generatorul tahometric (v. fig. 2.11,c) este un element derivativ, dacă se consideră ca mărime de intrare poziția unghiulară a arborelui pe care este montat rotorul, iar ca mărime de ieșire tensiunea la borne; tensiunea este proporțională cu viteza unghiulară, care reprezintă derivata poziției unghiulare în raport cu timpul:

$$u = K\omega = K \frac{d\phi}{dt}. \quad (2.28)$$

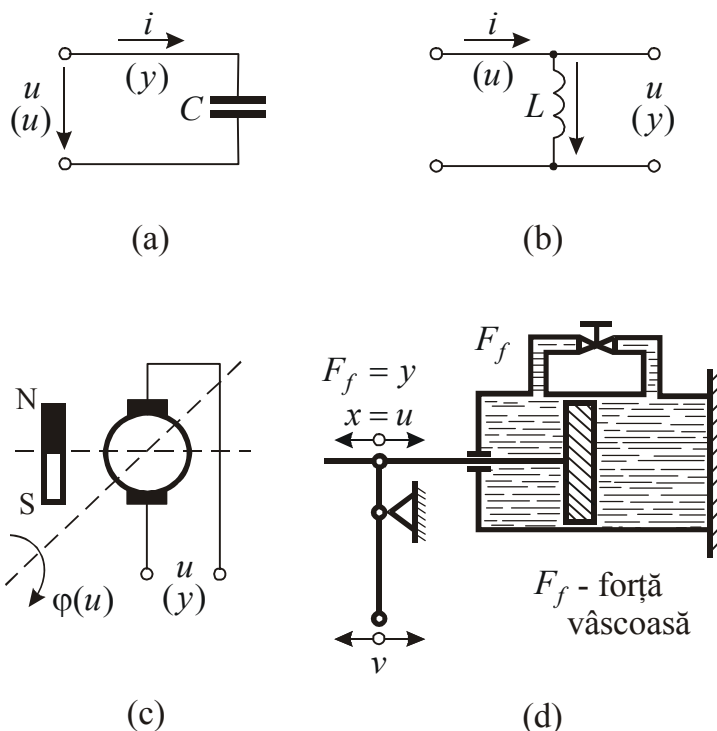


Fig.2.11 Exemple de elemente derivate.

• Elementul mecanic (amortizorul hidraulic) din figura 2.11,d reprezintă cu anumi-
te aproximații și neglijări, un element derivativ. Ecuația generală a acestuia este de for-
ma:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + K_f \frac{dx}{dt} + K_R x = F, \quad (2.29)$$

unde m este masa elementului în mișcare, K_f – constanta de frecare vâscoasă, K_R – constanta de elasticitate, iar F – forța rezultantă. Considerându-se în ecuația (2.29), $m = K_R = 0$ cu notațiile din figură, se obține:

$$F = F_f = y = K_f \frac{du}{dt}. \quad (2.30)$$

d) Elementul de întârziere de ordinul I (elementul aperiodic)

Elementul de întârziere de ordinul I este descris de următoarea ecuație diferențială de ordinul I:

$$T \frac{dy}{dt} + y = Ku, \quad (2.31)$$

în care T este constanta de timp a elementului, iar K este o constantă.

Pentru un semnal de intrare treaptă unitară, rezolvând ecuația (2.31) se obține răspunsul elementului aperiodic de forma:

$$y = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad (2.32)$$

reprezentat în figura 2.12,a, pentru $K = 1$.

În mod analog, răspunsul elementului pentru un semnal de intrare rampă unitară are expresia (v. fig. 2.12,b):

$$y = T \left(e^{-\frac{t}{T}} + \frac{t}{T} - 1 \right), \quad (2.33)$$

considerându-se $K = 1$.

După cum se constată din figurile 2.12,a și 2.12,b, mărimea de ieșire a elementelor de întârziere de ordinul I trece cu o anumită întârziere prin valorile pe care le ia mărimea de intrare, ceea ce explică denumirea acestor elemente.

Majoritatea elementelor întâlnite în sistemele automate pot fi approximate prin elemente de întârziere de ordinul I.

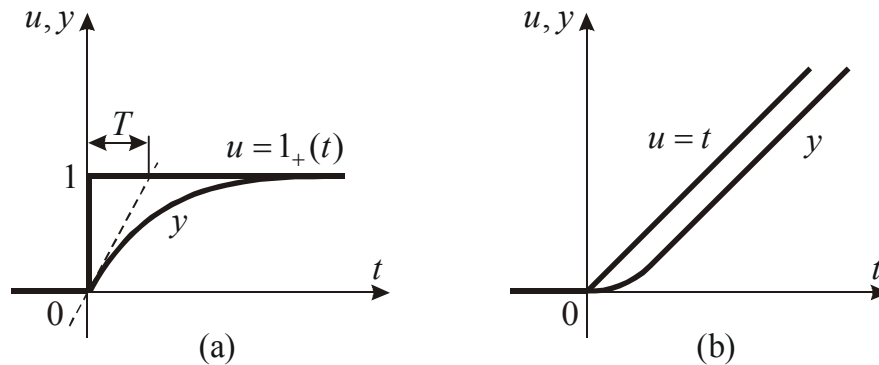


Fig.2.12 Răspunsurile elementului de întârziere de ordinul I la semnale treaptă unitară (a) și rampă unitară (b).

Exemple de elemente de întârziere de ordinul I (elemente aperiodice):

• Circuitele RC respectiv RL, funcționând în gol (v. fig. 2.13,a și 2.13,b), constituie elemente aperiodice.

În cazul circuitului RC (funcționând în gol) având ca mărime de intrare tensiunea u_1 , iar ca mărime de ieșire tensiunea u_2 , prin aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff se obțin ecuațiile:

$$u_1 = Ri + \frac{1}{C} \int i dt, \quad (2.34)$$

și:

$$u_2 = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (2.35)$$

Deoarece:

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{1}{C}i, \quad (2.36)$$

ecuația (2.34) devine:

$$u_1 = RC \frac{du_2}{dt} + u_2, \quad (2.37)$$

sau:

$$u_1 = T \frac{du_2}{dt} + u_2, \quad (2.38)$$

unde $T = RC$ este constanta de timp a circuitului.

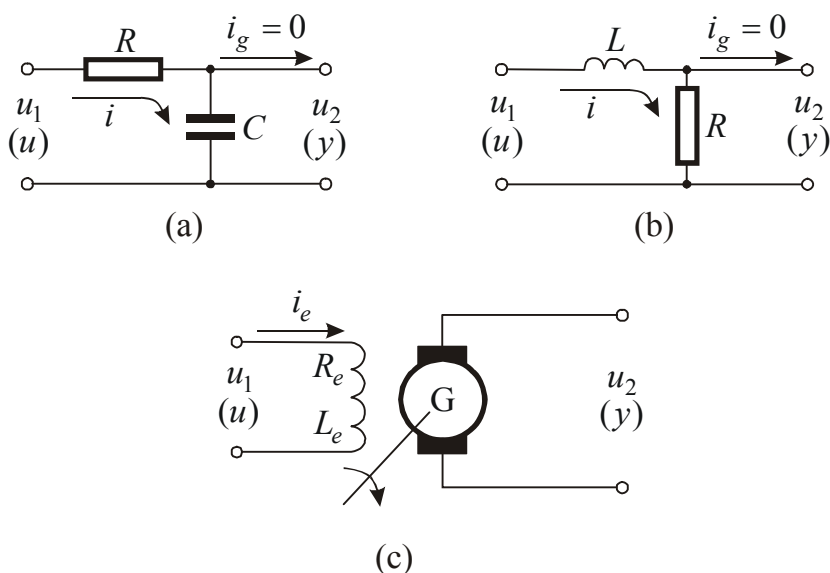


Fig.2.13 Exemple de elemente de întârziere de ordinul I.

În mod similar pentru circuitul RL, funcționând în gol, se poate scrie:

$$u_1 = Ri + L \frac{di}{dt}, \quad (2.39)$$

respectiv:

$$u_2 = Ri. \quad (2.40)$$

Înlocuind expresia lui i din relația (2.40) în ecuația (2.39) se obține:

$$u_1 = u_2 + \frac{L}{R} \frac{du_2}{dt}, \quad (2.41)$$

sau:

$$u_1 = T \frac{du_2}{dt} + u_2, \quad (2.42)$$

unde $T = L/R$ este constanta de timp a circuitului.

• În cazul generatorului de curent continuu din figura 2.13,c, considerându-se ca mărimi de intrare și de ieșire, tensiunea u_1 și respectiv tensiunea u_2 , pentru circuitul de excitație se scrie ecuația:

$$L_e \frac{di_e}{dt} + R_e i_e = u_1, \quad (2.43)$$

unde i_e este curentul de excitație și L_e, R_e – parametrii circuitului de excitație.

Considerând că generatorul funcționează pe porțiunea liniară a caracteristicii, tensiunea de ieșire u_2 , poate fi considerată proporțională cu curentul de excitație i_e , deci:

$$u_2 = K i_e, \quad (2.44)$$

unde K este coeficient de proporționalitate.

Înlocuind expresia lui i_e din relația (2.44) în expresia (2.43) rezultă:

$$\frac{L_e}{K} \frac{du_2}{dt} + \frac{R_e}{K} u_2 = u_1, \quad (2.45)$$

sau:

$$\frac{L_e}{R_e} \frac{du_2}{dt} + u_2 = \frac{K}{R_e} u_1. \quad (2.46)$$

Făcându-se notațiile:

$$\frac{K}{R_e} = K_g, \quad \frac{L_e}{R_e} = T_g, \quad (2.47)$$

cu aceste notații ecuația (2.46) devine:

$$T_g \frac{du_2}{dt} + u_2 = K_g u_1. \quad (2.48)$$

• Schimbătorul de căldură cu contact, des întâlnit în practica inginerilor poate fi considerat un element de întârziere de ordinul I.

Se presupune deci că într-un vas umplut cu un lichid cald la temperatura τ_1 se scufundă un corp a cărui temperatură $\tau_2 < \tau_1$.

Conform legii lui Newton, cantitatea de căldură q , transmisă în unitatea de timp corpului scufundat va fi:

$$q = k(\tau_1 - \tau_2), \quad (2.49)$$

în care k este coeficientul general de transfer al căldurii.

Pe de altă parte, viteza cu care crește temperatura este proporțională cu cantitatea de

căldură q ce îi este transmisă și invers proporțională cu căldura specifică c a corpului, presupunând că el are o conductibilitate termică infinită și deci:

$$\frac{d\tau_2}{dt} = \frac{q}{c}. \quad (2.50)$$

Introducând expresia lui q în (2.49), se obține ecuația elementului aperiodic:

$$\frac{c}{k} \frac{d\tau_2}{dt} + \tau_2 = \tau_1. \quad (2.51)$$

e) *Elementul derivativ real de ordinul zero*

Elementul derivativ real de ordin zero este caracterizat de următoarea relație:

$$T \frac{dy}{dt} + y = K \frac{du}{dt}, \quad (2.52)$$

în care T este constanta de timp a elementului.

Exemple de elemente derivate reale de ordin zero:

• Circuitele RC respectiv RL, funcționând în gol (v. fig. 2.14,a și 2.14,b), reprezintă elemente derivate reale.

Pentru circuitul RC (funcționând în gol), alegând ca mărime de intrare tensiunea u_1 , și ca mărime de ieșire tensiunea u_2 , se pot scrie ecuațiile (teorema a II-a lui Kirchhoff):

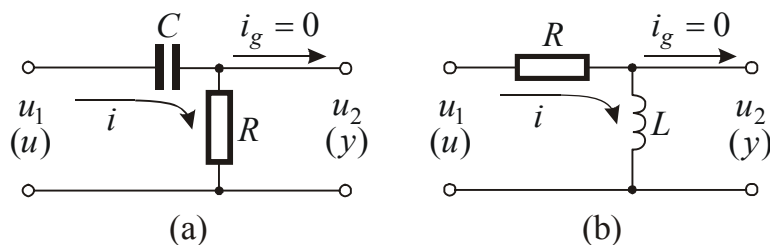


Fig.2.14 Elemente derivate reale de ordinul zero.

$$u_1 = \frac{1}{C} \int i dt + Ri \quad (2.53)$$

și:

$$u_2 = Ri. \quad (2.54)$$

Deoarece din relația (2.54) se obține:

$$i = \frac{1}{R} u_2, \quad (2.55)$$

înlocuind expresia (2.55) și derivând ecuația (2.53) devine:

$$T \frac{du_2}{dt} + u_2 = T \frac{du_1}{dt}, \quad (2.56)$$

unde $T = RC$.

În mod analog pentru circuitul RL, funcționând în gol, se poate scrie:

$$u_1 = Ri + L \frac{di}{dt}, \quad (2.57)$$

și:

$$u_2 = L \frac{di}{dt}. \quad (2.58)$$

Înlocuind expresia lui i din relația (2.58) în ecuația (2.57), se obține:

$$T \frac{du_2}{dt} + u_2 = T \frac{du_1}{dt}, \quad (2.59)$$

unde $T = L/R$.

• Dispozitivul hidraulic din figura 2.15 poate fi considerat un element derivativ real.

Asupra pistonului acționează următoarele forțe:

– forța de amortizare:

$$F_{am} = S(P_2 - P_1), \quad (2.60)$$

unde $S = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \frac{\delta^2}{D^2})$ este suprafața eficace a pistonului, D – diametrul pistonului, δ – diametrul tijei, iar $(P_2 - P_1)$ reprezintă diferența dintre presiunea de deasupra și cea de dedesubtul pistonului;

– forța arcului:

$$F_a = cx, \quad (2.61)$$

unde c este constanta de rigiditate a arcului;

– forța de inerție, a cărei influență se neglijează.

În conformitate cu ecuația lui Bernoulli:

$$F_{am} = \frac{R_e \mu S}{d} (v_2 - v_1), \quad (2.62)$$

unde R_e este numărul lui Reynolds, μ – coeficientul dinamic al vâscozității lichidului, d – diametrul orificiului practicat în piston, v_1 – viteza de deplasare a punctului D:

$$v_1 = \frac{dz}{dt}, \quad (2.63)$$

iar v_2 este viteza de deplasare a punctului A:

$$v_2 = \frac{dx}{dt}. \quad (2.64)$$

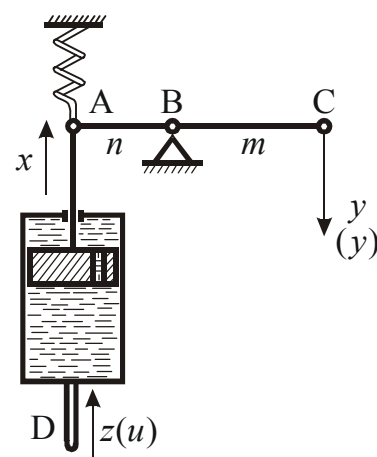


Fig.2.15 Dispozitiv hidraulic derivativ real.

Legea echilibrului forțelor care acționează asupra pistonului este:

$$F_{am} + F_a = 0.$$

După înlocuirea valorilor forțelor se obține următoarea expresie:

$$\frac{R_e \mu S}{cd} \frac{dx}{dt} + x = \frac{R_e \mu S}{cd} \frac{dz}{dt}. \quad (2.65)$$

Dacă pentru mărimea de ieșire se adoptă deplasarea punctului C:

$$y = \frac{m}{n} x = kx, \quad (2.66)$$

ecuația mișcării devine:

$$T \frac{dy}{dt} + y = KT \frac{dz}{dt}, \quad (2.67)$$

în care, constanta de timp a dispozitivului este:

$$T = \frac{\pi D^2}{4} \frac{R_e \mu (1 - \frac{\delta^2}{D^2})}{cd}.$$

f) Elementul derivativ real de ordinul unu

Elementul derivativ real de ordinul unu este descris de ecuația diferențială:

$$T \frac{dy}{dt} + y = K(u + T_0 \frac{du}{dt}), \quad (2.68)$$

în care T , T_0 sunt constante de timp.

Exemple de elemente derivate reale de ordinul unu:

• În figura 2.16,a este reprezentat un circuit electric a cărui model matematic intrare-ieșire este identic cu modelul matematic general (2.68). Pentru acest circuit se pot scrie relațiile:

$$u_2 = R_2 i + \frac{1}{C} \int i dt, \quad (2.69)$$

$$u_1 = R_1 i + u_2. \quad (2.70)$$

Din ecuațiile (2.69) și (2.70) se elimină intensitatea curentului, obținându-se o relație în care apar numai tensiunea de intrare și de ieșire:

$$i = \frac{1}{R_1} (u_1 - u_2), \quad (2.71)$$

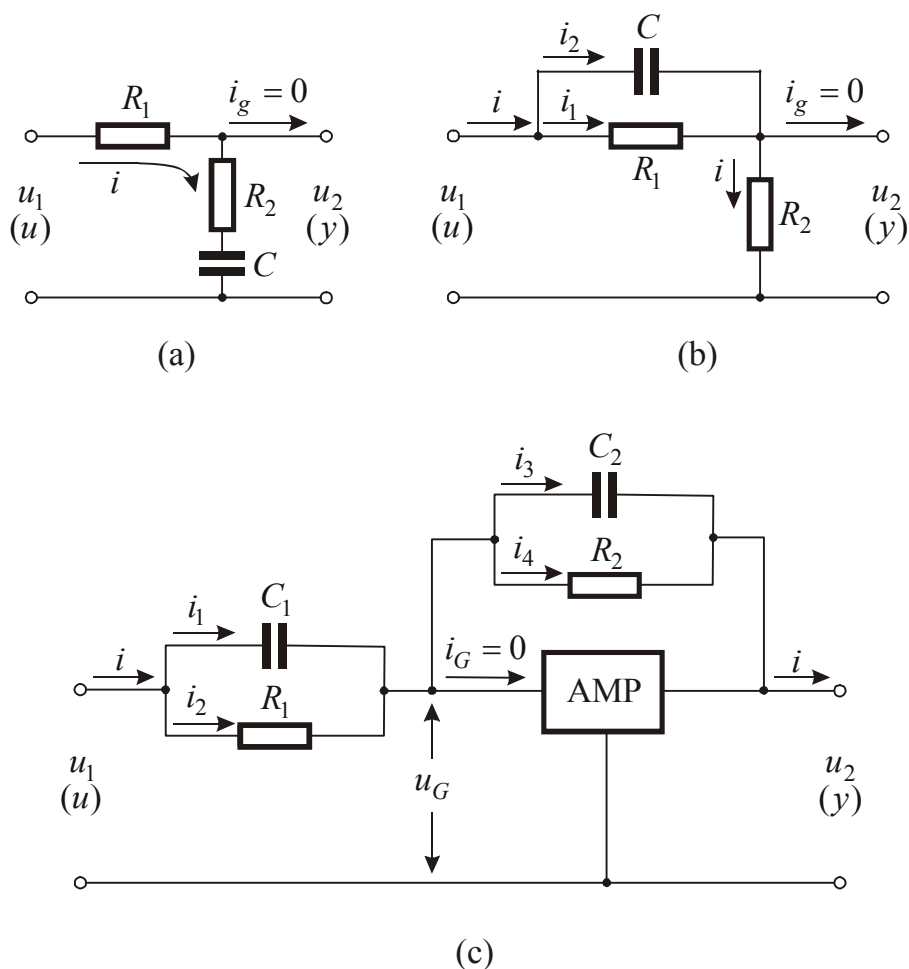


Fig.2.16 Elemente derivate reale de ordinul unu.

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1}(u_1 - u_2) + \frac{1}{R_1 C}(u_1 - u_2)dt, \quad (2.72)$$

$$\frac{du_2}{dt} \frac{R_1 + R_2}{R_1} + \frac{1}{R_1 C}u_2 = \frac{R_2}{R_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{R_1 C}u_1, \quad (2.73)$$

$$T \frac{du_2}{dt} + u_2 = T_0 \frac{du_1}{dt} + u_1, \quad (2.74)$$

unde $T = C(R_1 + R_2)$, $T_0 = CR_2$, $K = 1$.

• În mod analog se poate proceda și pentru circuitul electric din figura 2.16,b (în conformitate cu teoremele I-a și a II-a ale lui Kirchhoff):

$$u_1 = R_1 i_1 + R_2 i, \quad (2.75)$$

$$u_2 = R_2 i, \quad (2.76)$$

$$i = i_1 + i_2. \quad (2.77)$$

Din relația (2.76) se obține:

$$i = \frac{1}{R_2} u_2. \quad (2.78)$$

Pentru circuitul studiat se poate scrie:

$$u_1 - u_2 = \frac{1}{C} \int i_2 dt, \quad (2.79)$$

$$u_1 - u_2 = R_1 i_1. \quad (2.80)$$

Din expresiile (2.79) și (2.80) se obțin expresiile pentru i_1 și i_2 în funcție de tensiunile u_1 și u_2 :

$$i_1 = \frac{1}{R_1} (u_1 - u_2), \quad (2.81)$$

$$i_2 = C \left(\frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} \right). \quad (2.82)$$

Înlocuind relațiile (2.78), (2.81), (2.82) în ecuația (2.77), după câteva reduceri de termeni, se obține:

$$C \frac{du_2}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} u_2 = \frac{1}{R_1} u_1 + C \frac{du_1}{dt}, \quad (2.83)$$

în care, notând cu:

$$T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C, \quad T_0 = R_1 C, \quad K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad (2.84)$$

rezultă ecuația:

$$T \frac{du_2}{dt} + u_2 = K(u_1 + T_0 \frac{du_1}{dt}). \quad (2.85)$$

• Amplificatorul electronic cu rezistență de intrare mare, $i_G = 0$, în combinație cu rețelele RC (v. fig. 2.16,c), se comportă ca un element derivativ real de ordinul unu.

Din figură rezultă:

$$u_1 = u_G + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt = u_G + R_1 i_2, \quad (2.86)$$

$$u_2 = u_G - \frac{1}{C_2} \int i_3 dt = u_G - R_2 i_4, \quad (2.87)$$

$$i = i_1 + i_2 = i_3 + i_4. \quad (2.88)$$

Dacă amplificarea A este suficient de mare, $u_G = -u_2/A \approx 0$. Se obține în final:

$$T \frac{du_2}{dt} + u_2 = -K(u_1 + T_0 \frac{du_1}{dt}), \quad (2.89)$$

în care s-au făcut notațiile: $T_0 = R_1 C_1$, $T = R_2 C_2$, $K = R_2/R_1$.

g) *Elementul de întârziere de ordinul II (elementul oscilant)*

Elementul de întârziere de ordinul II, denumit uneori și element oscilant este descris de o ecuație diferențială de ordinul II:

$$T_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + T \frac{dy}{dt} + y = Ku. \quad (2.90)$$

Coeficientul $T_0 > 0$ are dimensiunea de timp la pătrat ($[T_0] = [timp]^2$); coeficientul $T > 0$ are dimensiunea de timp ($[T] = [timp]$) iar K este o constantă.

Exemple de elemente de întârziere de ordinul II:

• Circuitele RLC (v. fig. 2.17), presupunând că funcționează în gol. Ca și în exemplele anterioare se consideră ca mărime de intrare tensiunea u_1 , iar ca mărime de ieșire tensiunea u_2 .

Pentru un circuit RLC (funcționând în gol) se pot scrie următoarele relații (teorema a II-a a lui Kirchhoff):

$$u_1 = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt, \quad (2.91)$$

$$u_2 = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (2.92)$$

Dar, din relația (2.92) se obține:

$$i = C \frac{du_2}{dt}. \quad (2.93)$$

Prin înlocuirea expresiei (2.93) în ecuația (2.91), aceasta devine:

$$u_1 = LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + RC \frac{du_2}{dt} + u_2, \quad (2.94)$$

sau, notând:

$$LC = T_0, \quad RC = T, \quad K = 1, \quad (2.95)$$

se obține:

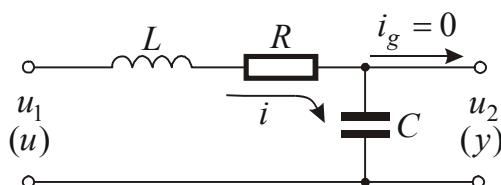


Fig.2.17 Element de întârziere de ordinul II: circuitul RLC.

$$T_0 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + T \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1. \quad (2.96)$$

• Sistemul de urmărire din figura 2.18 se comportă ca un element de întârziere de ordinul II.

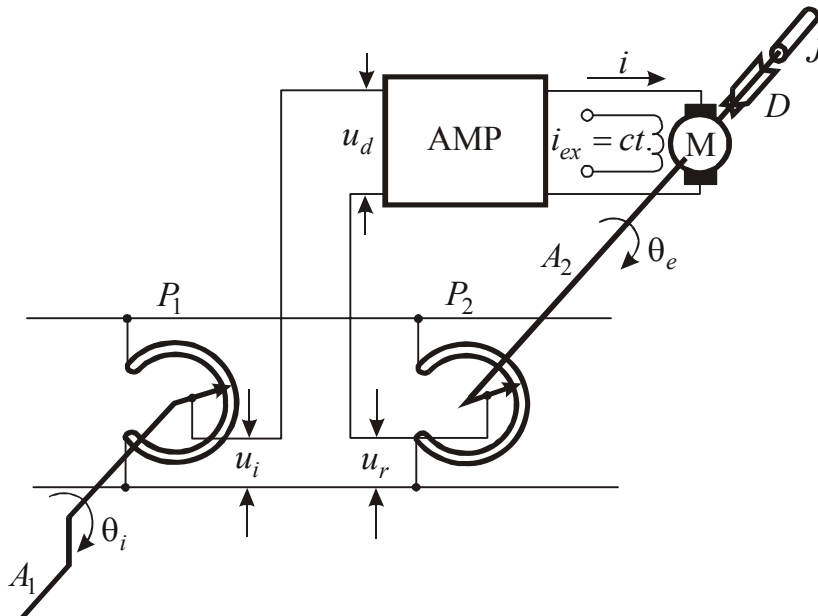


Fig.2.18 Sistem de urmărire a poziției unghiulare.

Acest sistem are rolul de a asigura ca arborele A_2 să urmărească automat poziția unghiulară a arborelui A_1 , care poate varia arbitrar; se asigură deci în regimuri staționare, egalitatea pozițiilor unghiulare θ_e și θ_i :

$$\theta_e = \theta_i. \quad (2.97)$$

Potențiometrele identice P_1 și P_2 (ale căror cursoare sunt solidare cu arborii A_1 și A_2) au rolul de traductoare, asigurând relațiile de proporționalitate:

$$u_i = K_1 \theta_i, \quad u_r = K_1 \theta_e, \quad (2.98)$$

(constanta de proporționalitate K_1 , fiind aceeași pentru ambele potențiometre).

Tensiunile continue u_i și u_r sunt conectate în opoziție, deci la intrarea amplificatorului AMP rezultă o tensiune:

$$u_d = u_i - u_r. \quad (2.99)$$

Cu anumite aproximații și neglijări se poate considera că valoarea curentului i , debitat de amplificatorul AMP, este proporțională cu tensiunea de intrare u_d a amplificatorului, deci:

$$i = K_2 u_d, \quad (2.100)$$

unde K_2 este o constantă de proporționalitate.

În regimuri staționare, când condiția (2.97) este îndeplinită, din relațiile (2.98) rezultă:

$$u_r = u_i \quad (2.101)$$

și deci, conform cu ecuația (2.99):

$$u_d = 0, \quad (2.102)$$

respectiv, având în vedere relația (2.100), expresia:

$$i = 0. \quad (2.103)$$

Ca urmare, rotorul motorului de curent continuu (având excitație separată și constantă, cu un curent de excitație $i_{ex} = ct.$) se va găsi în repaus.

Dacă arborele A_1 își schimbă poziția unghiulară și deci unghiul θ_i variază, egalitățile (2.97), (2.101), (2.102), (2.103) nu mai au loc; sistemul intră în regim tranzitoriu. În funcție de sensul rotirii arborelui A_1 va apărea o tensiune u_d de un anumit sens, deci un curent i de un anumit sens, ceea ce va determina rotirea rotorului motorului M și a arborelui A_2 în sensul necesar pentru ca unghiul θ_e să ajungă la noua valoare a unghiului θ_i ; la restabilirea egalității (2.97) regimul tranzitoriu se încheie, începând un nou regim staționar.

Ecuația diferențială care descrie matematic funcționarea sistemului poate fi obținută pornind de la echilibrul dinamic al cuplurilor care acționează asupra arborelui A_2 : cuplul motor și cuplurile rezistente.

Cuplul motor C_m este proporțional cu produsul dintre curentul i și fluxul de excitație Φ_{ex} , deci:

$$C_m = K_3 \Phi_{ex} i, \quad (2.104)$$

unde K_3 este o constantă de proporționalitate.

Întrucât $i_{ex} = ct.$ rezultă $\Phi_{ex} = ct.$ și notând:

$$K_3 \Phi_{ex} = K_4, \quad (2.105)$$

expresia (2.104) capătă forma:

$$C_m = K_4 i. \quad (2.106)$$

Cuplurile rezistente sunt cuplul de accelerație C_a , cuplul de frecări vâscoase C_f și alte cupluri rezistente C_r . Echilibrul dinamic al cuplurilor care acționează asupra arborelui A_2 este deci exprimat de egalitatea:

$$C_m = C_a + C_f + C_r. \quad (2.107)$$

Considerând cu aproximație că celelalte cupluri rezistente nu au valori importante, deci:

$$C_r \approx 0, \quad (2.108)$$

din expresia (2.107) se obține:

$$C_m = C_a + C_f. \quad (2.109)$$

Cuplul de accelerație C_a are expresia:

$$C_a = J \frac{d^2 \theta_e}{dt^2}, \quad (2.110)$$

unde J este momentul de inerție echivalent al tuturor maselor în rotație solidare cu arborele A_2 .

Cuplul de frecări vâskoase C_f este proporțional cu viteza de rotație a arborelui A_2 ; deci:

$$C_f = D \frac{d\theta_e}{dt}, \quad (2.111)$$

unde D este coeficientul de frecări vâskoase.

Înlocuind relațiile (2.106), (2.110) și (2.111) în expresia (2.109) se obține:

$$K_4 i = J \frac{d^2 \theta_e}{dt^2} + D \frac{d\theta_e}{dt}. \quad (2.112)$$

Din expresiile (2.98), (2.99) și (2.100) rezultă însă:

$$i = K_2 u_d = K_2 (u_i - u_r) = K_2 K_1 (\theta_i - \theta_e) \quad (2.113)$$

și înlocuind relația (2.113) în expresia (2.112), se obține:

$$J \frac{d^2 \theta_e}{dt^2} + D \frac{d\theta_e}{dt} = K_4 K_2 K_1 (\theta_i - \theta_e); \quad (2.114)$$

notând:

$$K_4 K_2 K_1 = K_T$$

și ordonând termenii, ecuația capătă forma:

$$J \frac{d^2 \theta_e}{dt^2} + D \frac{d\theta_e}{dt} + K_T \theta_e = K \theta_i. \quad (2.115)$$

• Un exemplu semnificativ de element de întârziere de ordinul II îl reprezintă elementul mecanic (amortizorul hidraulic) din figura 2.11,d descris de ecuația diferențială (2.29) în care nu se mai fac nici un fel de aproximații și neglijări.

• Ecuația diferențială liniarizată a mișcării elementului de măsurare centrifugal, a cărui schemă este reprezentată în figura 2.19,a se încadrează în tipul general de ecuații diferențiale de ordinul II ce caracterizează funcționarea elementelor de întârziere de ordinul II.

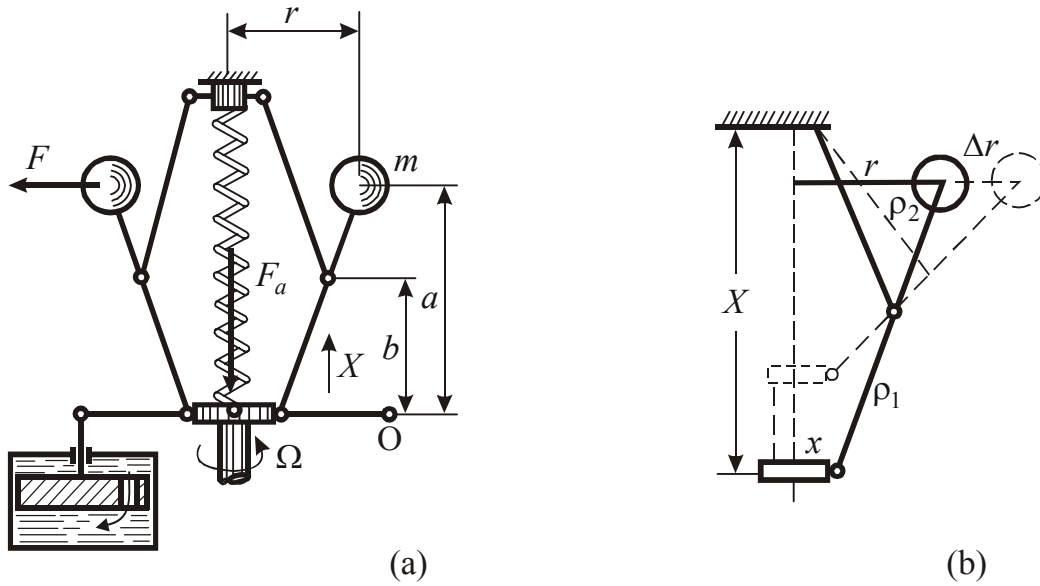


Fig.2.19 Element de întârziere de ordinul II: elementul de măsurare centrifugal (a); determinarea relațiilor geometrice din elementul de măsurare centrifugal (b).

Mărimea de intrare a dispozitivului centrifugal este viteza unghiulară Ω , iar mărimea de ieșire deplasarea mufei X .

Se alcătuieste ecuația forțelor ce acționează asupra mufei. Forța activă de deplasare este forța centrifugă aplicată greutateților. Acestei forțe i se opun: forța datorită elasticității arcului, forțele de amortizare și forțele de inerție. Se exprimă forțele prin mărimile de intrare și de ieșire, prin vitezele și accelerațiile acestora. Totodată se raportează toate forțele la centrul masei mufei:

– forța centrifugă aplicată greutateților, raportată la centrul masei mufei:

$$F = 2 \frac{a}{b} r m \Omega^2, \quad (2.116)$$

– forța arcului:

$$F_a = cX, \quad (2.117)$$

– forța de inerție a maselor în mișcare de translație:

$$F_i = m_r \frac{d^2 X}{dt^2}, \quad (2.118)$$

– forța dezvoltată de amortizorul hidraulic:

$$F_{am} = S(P_1 - P_2). \quad (2.119)$$

Pe baza legii echilibrului forțelor se poate scrie relația:

$$m_r \frac{d^2 X}{dt^2} + S(P_1 - P_2) + cX = 2m \frac{a}{b} r \Omega^2, \quad (2.120)$$

în care m_r este masa părților în mișcare de translație, raportată la centrul masei mufei, m

– masa greutatei, S – suprafața efectivă a pistonului, P_1 și P_2 – presiunile lichidului deasupra și dedesubtul pistonului, r – distanța dintre centrul masei greutatei și axa de rotație, a și b – distanțele față de punctul O a punctelor de aplicare a forței centrifuge reale și a celei raportate.

În cazul examinat, viteza relativă de deplasare a lichidului prin orificiu este proporțională cu viteza mufei. De aceea forța de amortizare poate fi exprimată prin relația:

$$F_{am} = S(P_1 - P_2) = \frac{SR_e\mu}{d} \frac{dX}{dt}, \quad (2.121)$$

unde R_e este numărul lui Reynolds, μ – coeficientul dinamic al vâscozității, d – diametrul orificiului.

Forța centrifugă F din ecuația (2.120) este funcție neliniară de X și Ω .

Pentru liniarizarea ecuației se consideră:

$$\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega, \quad F = F_0 + \Delta F \quad \text{și} \quad X = X_0 + x,$$

unde Ω_0 este viteza inițială, iar X_0 a fost astfel ales încât la viteza inițială $\Omega = \Omega_0$, să fie îndeplinită condiția $x = 0$; astfel:

$$\Delta F = 2m \frac{a}{b} \Omega_0^2 \Delta r + 4m \frac{a}{b} r_0 \Omega_0 \Delta\Omega. \quad (2.122)$$

Considerând legătura cinematică dintre r și x (v. fig. 2.19,b):

$$\Delta r = \frac{\rho_2}{\rho_1} x, \quad (2.123)$$

și:

$$\Delta F = 2m \frac{a}{b} \Omega_0^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} x + 4m \frac{a}{b} r_0 \Omega_0 \Delta\Omega. \quad (2.124)$$

Trecând în ecuația inițială la abateri și introducând creșterile determinate ale forțelor, ecuația în abateri a elementului de măsurare centrifugal este:

$$m_r \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{SR_e\mu}{d} \frac{dx}{dt} + (c - 2m \frac{a}{b} \Omega_0^2 \frac{\rho_2}{\rho_1}) x = 4m \frac{a}{b} r_0 \Omega_0 \Delta\Omega. \quad (2.125)$$

h) Elementul de anticipare de ordinul I sau elementul proporțional-derivativ (PD)

Elementul proporțional-derivativ are mărimea de ieșire y formată din două componente: una proporțională cu mărimea de intrare u , iar cealaltă proporțională cu derivata mărimii de intrare; ecuația acestui element are deci aspectul:

$$y = K(u + T \frac{du}{dt}), \quad (2.126)$$

în care K este un factor de proporționalitate, iar T – constanta de timp a componentei

derivative.

Din ecuația (2.126), pentru $K = 1$, rezultă că răspunsul la un semnal treaptă unitară al elementelor PD are aspectul din figura 2.20,a (considerând impulsul-Dirac ca derivată în sens generalizat a semnalului treaptă unitară) iar răspunsul la un semnal rampă unitară are aspectul din figura 2.20,b.

Efectul de anticipare, care justifică denumirea elementului (denumit, de asemenea, de ordinul I, datorită faptului că ecuația diferențială (2.126) este de ordinul I), rezultă evident din considerarea răspunsului la o rampă unitară (v. fig. 2.20,b); mărimea de ieșire y trece prin anumite valori înaintea mărimii de intrare u , deci cu anticipare; astfel, prin valoarea x_α mărimea y trece în momentul t_2 , iar mărimea u , în momentul t_1 , cu $t_1 > t_2$.

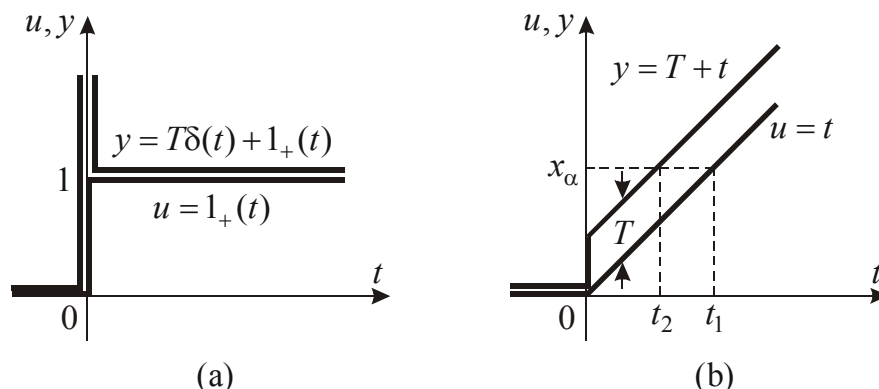


Fig.2.20 Răspunsurile elementului PD la semnale treaptă unitară (a) și rampă unitară (b).

Exemple de elemente de anticipare de ordinul I (elemente proporțional-derivative):

- Circuitele prezentate în figurile 2.16,a,b și c se comportă ca elemente PD în cazul în care: $T_0 \gg T$.

- Elemente de anticipare de ordinul I sunt, cu o serie de aproximări, reglatoarele proporțional-derivative (în realitate în cazul reglatoarelor PD mai apar o serie de constante de timp foarte mici, denumite constante de timp parazite, care în calcule de obicei se neglijează).

i) Elementul de anticipare de ordinul II sau elementul PDD₂

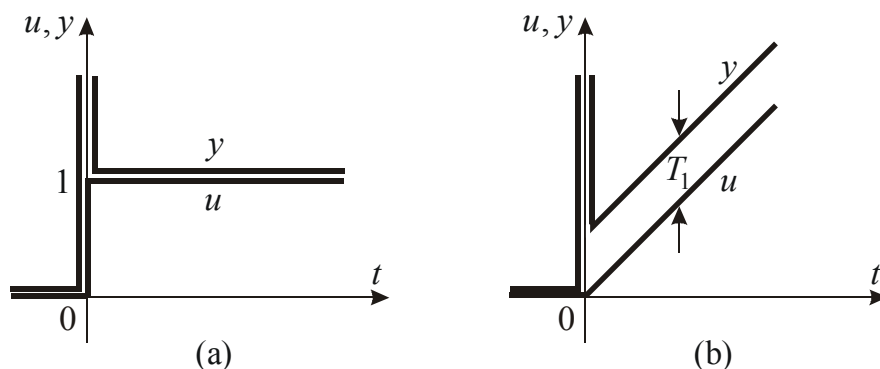
Elementul PDD₂ are trei componente ale mării de ieșire y : una proporțională cu mărimea de intrare u , a doua proporțională cu prima derivată a mării de intrare, iar a treia proporțională cu a doua derivată a mării de intrare, deci:

$$y = K(u + T_1 \frac{du}{dt} + T_2^2 \frac{d^2u}{dt^2}), \quad (2.127)$$

în care K este un factor de proporționalitate, iar T_1 , T_2 – constantele de timp ale componentelor derivative.

Din ecuația (2.127), pentru $K = 1$, rezultă că răspunsul la un semnal treaptă unitară al elementelor PDD₂ are aspectul din figura 2.21,a, iar răspunsul la un semnal rampă unitară aspectul din figura 2.21,b (considerând, ca și anterior, impulsul-Dirac ca derivată în sens generalizat al trepte unitare).

Deosebirea față de comportarea elementelor PD este evidențiată în cazul răspunsurilor la semnalul rampă unitară.


 Fig.2.21 Răspunsurile elementului PDD₂ la semnale treaptă unitară (a) și rampă unitară (b).

Exemple de elemente PDD₂:

• Elemente de anticipare de ordinul II sunt regulatoarele PDD₂, cu semnificația că în realitate în cazul regulatoarelor PDD₂ apar o serie de constante de timp foarte mici (constante de timp parazite). În calcule aproximative, constantele de timp parazite pot fi neglijate.

j) Elementul proporțional-integral sau elementul PI

Elementul proporțional-integral are două componente ale mărimii de ieșire \$y\$: una proporțională cu mărimea de intrare \$u\$, iar a doua proporțională cu integrala în timp a mărimii de intrare; deci:

$$y = K(u + \frac{1}{T} \int u dt), \quad (2.128)$$

unde \$K\$ este un factor de proporționalitate, iar \$T\$ – constanta de timp a componentei integrale.

Din ecuația (2.128) rezultă că răspunsul unui element PI la un semnal treaptă unitară are aspectul din figura 2.22, în ipoteza \$K > 1\$.

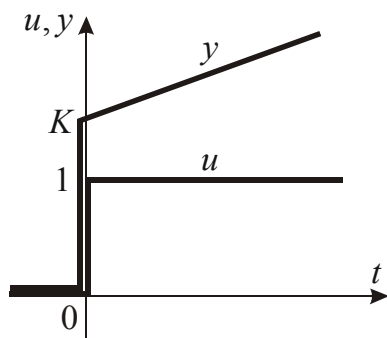


Fig.2.22 Răspunsul elementului PI la un semnal treaptă unitară.

Exemple de elemente PI:

• În figura 2.23 este dat un exemplu de element PI, un element mecanic cu mișcare liniară; mărimea de intrare este deplasarea pistonului \$x\$, iar cea de ieșire, deplasarea cilindrilor \$w\$. Pentru \$F = m = 0\$, ecuația generală având forma (2.29), devine:

$$K_f v + K_R x = 0, \quad (2.129)$$

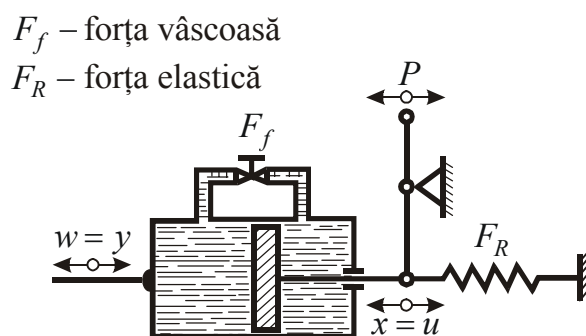


Fig.2.23 Element proporțional-integral mecanic.

unde v este viteza rezultantă a pistonului în raport cu cilindrul:

$$v = \frac{dx}{dt} - \frac{dw}{dt}. \quad (2.130)$$

Înlocuind relația (2.130) în expresia (2.129) se obține:

$$w = x + K \int x dt, \quad (2.131)$$

în care $K = K_R / K_f$.

• Elemente PI sunt reglatoarele PI, pentru care însă relația (2.128) este valabilă numai cu anumite aproximații.

k) Elementul proporțional-integral-derivativ, sau elementul PID

Elementul PID are trei componente ale mărimii de ieșire y : una proporțională cu mărimea de intrare u , a doua proporțională cu integrala în timp a mărimii de intrare, iar a treia proporțională cu derivata mărimii de intrare:

$$y = K(u + \frac{1}{T_1} \int u dt + T_2 \frac{du}{dt}), \quad (2.132)$$

unde K , T_1 și T_2 au semnificațiile menționate la elementele anterioare.

Din ecuația (2.132) rezultă că răspunsul unui element PID la un semnal treaptă unitară are aspectul din figura 2.24, în ipoteza $K > 1$.

Elemente PID sunt reglatoarele PID; aceste reglatoare realizează însă numai cu anumite aproximații relația (2.132).

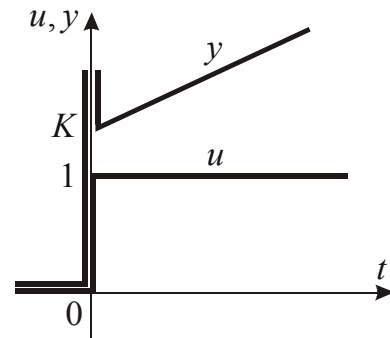
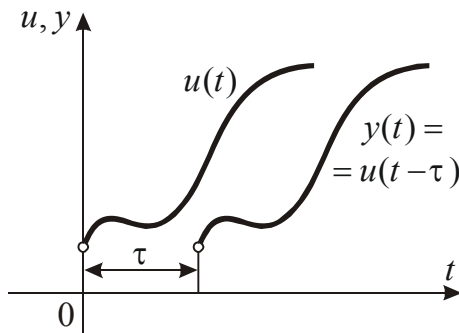


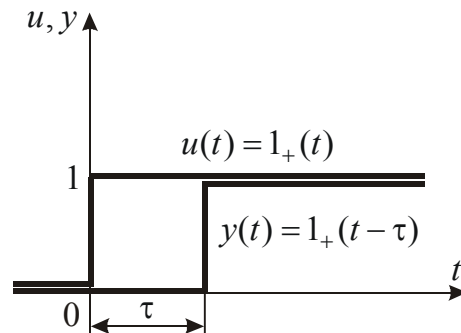
Fig.2.24 Răspunsul unui element PID la un semnal treaptă unitară.

l) Elementul cu timp mort sau cu întârziere constantă

Elementul cu timp mort, denumit uneori și element cu întârziere de transport se caracterizează prin faptul că mărimea de ieșire y reproduce fidel variațiile mărimii de intrare u , însă cu o întârziere constantă (v. fig. 2.25,a); deci are loc egalitatea:



(a)



(b)

Fig.2.25 Răspunsurile unui element cu timp mort la un semnal oarecare (a) și la un semnal treaptă unitară (b).

$$y(t) = u(t - \tau), \quad \tau \geq 0. \quad (2.133)$$

Din ecuația (2.133) rezultă că răspunsul unui element cu timp mort la un semnal treaptă unitară are aspectul din figura 2.25,b.

Exemple de elemente cu timp mort:

• Instalațiile de transport de masă și energie la care mărimea de ieșire rezultă numai după un anumit timp τ , reprezintă elemente cu timp mort (v. fig. 2.26,a,b).

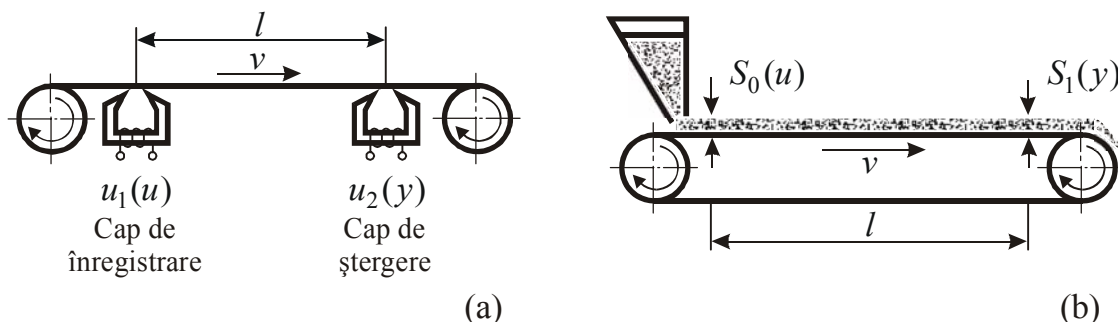


Fig.2.26 Exemple de elemente cu timp mort.

2.1.3 Performanțele sistemelor automate liniare și continue

Performanțele impuse funcționării unui sistem automat constituie *indici de calitate ai procesului de reglare*; satisfacerea anumitor performanțe este necesară întrucât avantajele automatizării referitoare la îmbunătățirea desfășurării procesului tehnologic automatizat și a calității producției se pot manifesta în mod corespunzător numai dacă însăși funcționarea sistemului automat îndeplinește anumiți indici necesari de calitate, deci anumite performanțe. Aceste performanțe se referă la obținerea unei valori impuse pentru un indicator de calitate sau la limitarea valorii acestuia.

Performanțele sistemelor automate se pot referi la regimul staționar și la regimul tranzitoriu, ca urmare a variației mărimii de intrare sau a unei perturbații, precum și la caracteristicile de frecvență, deci la regimul staționar sinusoidal [5,7,11,15÷17,22,23,36].

2.1.3.1 Principalele performanțe pentru răspunsul la o variație în treaptă a mărimii de intrare

• Eroarea staționară

Acest indice de calitate caracterizează precizia de funcționare a sistemelor automate în regim staționar.

Considerând un sistem automat liniar, cu parametrii constanți, se poate defini eroarea (sau abaterea) staționară ε_{st} ca fiind:

$$\varepsilon_{st} = u - y_{st}, \quad (2.134)$$

unde y_{st} reprezintă valoarea staționară (sau stabilizată) a mărimii de la ieșire:

$$y_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t), \quad (2.135)$$

iar u – mărimea aplicată la intrare.

Pentru un semnal de intrare u , treaptă unitară, răspunsul sistemului, respectiv variația în timp a mărimii reglate y , poate avea aspectul din figura 2.27,a sau din figura 2.27,b, în primul caz eroarea staționară fiind nulă, iar în al doilea caz fiind diferită de zero, întrucât $y_{st} \neq u$. Sistemul din figura 2.27,a satisface deci performanța:

$$\varepsilon_{st} = 0, \quad (2.136)$$

iar pentru sistemele de tipul celui din figura 2.27,b se impune limitarea erorii staționare la o valoare impusă ε_{stimp} (valoarea maximă admisibilă din considerente legate de buna desfășurare a procesului tehnologic automatizat); deci se impune performanța:

$$\varepsilon_{st} \leq \varepsilon_{stimp}, \quad (2.137)$$

performanțele staționare caracterizând astfel precizia cu care mărimea reglată urmărește variațiile tipice ale mărimii de referință (treaptă, rampă, etc.). Condiția (2.137) este exprimată de obicei în procente, erorile fiind raportate la valoarea staționară a mărimei de ieșire y_{st} .

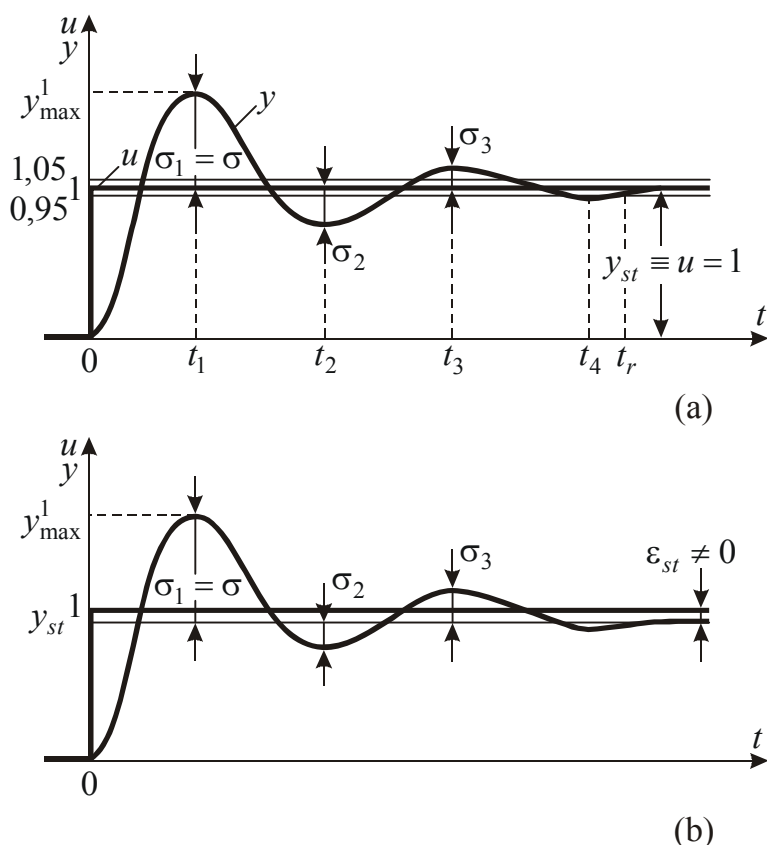


Fig.2.27 Răspunsul indicial al unui sistem de ordinul doi: $\varepsilon_{st} = 0$ (a); $\varepsilon_{st} \neq 0$ (b).

• Suprareglajul

Suprareglajul σ reprezintă un indice de calitate al regimului tranzitoriu al sistemelor automate.

Suprareglajul σ (v. fig. 2.27,a și 2.27,b) se definește cu depășirea maximă de către

mărimii de ieșire y în decursul regimului tranzitoriu, provocat de variația în treaptă a mărimii de intrare u , a valorii staționare care se stabilește după terminarea acestui regim:

$$\sigma = y_{\max}^1 - y_{st} . \quad (2.138)$$

Depășirea maximă apare în prima pseudo-perioadă a oscilației amortizate.

La sistemele stabile, cum este și cazul sistemului din figura 2.27, oscilațiile mărimii de ieșire y , sunt amortizate și deci suprareglajul apare la prima depășire a valorii staționare y_{st} .

În anumite cazuri, procesul tranzitoriu poate fi aperiodic, rezultând deci $\sigma = 0$.

De regulă, suprareglajul σ se raportează la valoarea staționară a mărimii de ieșire y_{st} și se exprimă procentual:

$$\sigma \% = \frac{y_{\max}^1 - y_{st}}{y_{st}} 100 . \quad (2.139)$$

Deoarece depășirile însemnate ale valorii staționare y_{st} , pot provoca suprasolicitări ale elementelor instalației sau procesului tehnologic reglat, conducând fie la uzura prematură, fie chiar la deteriorarea acestora, valoarea suprareglajului trebuie limitată. Astfel, se impune o condiție restrictivă, exprimată de asemenea procentual:

$$\sigma [\%] \leq \sigma_{imp} [\%], \quad (2.140)$$

unde $\sigma_{imp} [\%]$ reprezintă valoarea impusă (maximă admisibilă) a suprareglajului, în funcție de tipul și condițiile de funcționare ale instalației tehnologice sau ale procesului reglat.

• Gradul de amortizare

Gradul de amortizare reprezintă de asemenea un indice de calitate al regimului tranzitoriu al sistemelor automate.

Pentru o variație dată a mărimii de intrare $y(t)$, gradul de amortizare δ (v. fig. 2.27,a și 2.27,b) reprezintă diferența dintre unitate și raportul amplitudinilor a două semi-oscilații succesive de același semn, ale mărimii de ieșire y , măsurate față de valoarea staționară y_{st} :

$$\delta = 1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 1 - \frac{\sigma_3}{\sigma} , \quad (2.141)$$

unde s-a ținut seama că $\sigma_1 = \sigma$.

Pentru δ se impune restricția:

$$\delta \geq \delta_{imp} , \quad (\delta_{imp} \leq 1), \quad (2.142)$$

unde δ_{imp} este valoarea impusă (minimă admisibilă) gradului de amortizare.

Cu cât δ este mai mare (deci mai apropiat de 1) cu atât amortizarea oscilațiilor din timpul regimului tranzitoriu este mai rapidă, deci procesul tranzitoriu al sistemului automat este de mai bună calitate.

• **Durata regimului tranzitoriu (timpul de răspuns)**

Acest indice de calitate caracterizează rapiditatea procesului tranzitoriu al reglării și are o deosebită însemnătate în analiza sistemelor automate.

Durata regimului tranzitoriu t_r , reprezintă intervalul de timp măsurat de la începutul procesului tranzitoriu și până în momentul când în valoare absolută, diferența dintre mărimea de ieșire y și valoarea sa staționară y_{st} scade sub o anumită limită fixată, fără a mai depăși ulterior această limită. Se consideră deci, că regimul tranzitoriu se termină, restabilindu-se un nou regim staționar, atunci când:

$$|y - y_{st}| \leq \Delta, \quad (2.143)$$

unde Δ reprezintă limita fixată.

De cele mai multe ori în practică se adoptă:

$$\Delta = 0,05y_{st}, \quad (2.144)$$

după cum s-a considerat și în figura 2.27,a, deci o gamă de $\pm 5\%$ în jurul valorii staționare y_{st} .

În scopul asigurării rapidității necesare desfășurării procesului de reglare automată, pentru timpul de răspuns t_r se impune o performanță de forma:

$$t_r \leq t_{r\text{imp}}, \quad (2.145)$$

unde $t_{r\text{imp}}$ este valoarea maximă admisibilă impusă de specificul instalației tehnologice automatizate și al procesului tehnologic respectiv.

• **Timpul de creștere, timpul primului maxim și timpul primei atingeri a valorii staționare**

Indicii de calitate enumerați dau de asemenea indicații asupra rapidității procesului de reglare. Acești indici se referă la răspunsul y pentru o variație în treaptă a mărimii de intrare u (v. fig. 2.28).

Timpul de creștere, notat cu t_c , este definit ca fiind timpul necesar pentru ca răspunsul y să crească de la valoarea $0,05y_{st}$ până la valoarea $0,95y_{st}$.

De cele mai multe ori se folosește unul din următoarele procedee pentru determinarea valorii t_c :

– Primul procedeu: se duce o dreaptă prin punctele curbei y , care au ordonatele $0,05y_{st}$ și $0,95y_{st}$ (punctele A și B din fig. 2.28), stabilindu-se punctele de intersecție ale acestei drepte cu axa timpului și cu orizontala dusă prin ordonata $y = y_{st}$ (punctele C și D); pentru t_c se adoptă o valoare egală cu proiecția CD' pe axa timpului a segmentului de dreaptă CD dintre cele două puncte de intersecție.

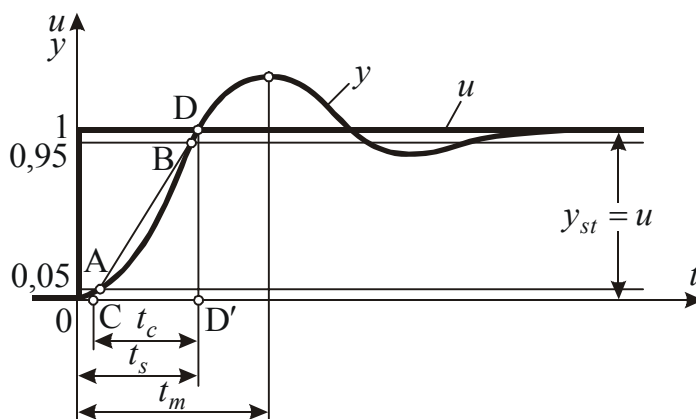


Fig.2.28 Răspunsul indicial al unui sistem de ordinul doi cu punerea în evidență a timpului de creștere (t_c), timpului primului maxim (t_m) și a timpului primei atingeri a valorii staționare (t_s).

– Al doilea procedeu: se trasează tangenta la curba y în punctul curbei care are ordonata $0,05y_{st}$ sau în punctul de inflexiune al curbei, stabilindu-se punctele de intersecție ale tangentei cu axa absciselor și cu orizontala dusă prin ordonata $y = y_{st}$; pentru t_c se adoptă o valoare egală cu proiecția pe axa timpului a segmentului de tangentă cuprins între cele două puncte de intersecție.

Definirea timpului primului maxim t_m și a timpului primei atingeri a valorii staționare t_s , rezultă din figura 2.28 reprezentată pentru cazul când $\varepsilon_{st} = 0$ și deci $y_{st} = u$.

2.1.3.2 Principalele performanțe pentru răspunsul la o variație în treaptă a unei perturbații

• Eroarea staționară

Și în acest caz eroarea staționară este definită de relația (2.134).

Răspunsul y al unui sistem la o variație în treaptă a perturbației p (pentru $u = ct$.) poate avea aspectul din figura 2.29,a, cu:

$$\varepsilon_{st} = 0, \quad (2.146)$$

sau, din figura 2.29,b, cu:

$$\varepsilon_{st} \neq 0. \quad (2.147)$$

Observație. Spre deosebire de reprezentările din figurile 2.27,a și 2.27,b, în figurile 2.29,a și 2.29,b, valorile u și y nu mai sunt nule pentru $t < 0$; dacă s-ar considera $u = 0$ și $y = 0$, pentru $t < 0$, aceasta ar atrage $y_{st} = 0$ și la $t > 0$ în figura 2.29,a, respectiv $y_{st} = \varepsilon_{st} \approx 0$ în figura 2.29,b, și performanța staționară și anumite performanțe tranzitorii nu ar mai putea fi exprimate procentual.

De fapt, în figurile 2.27,a și 2.27,b, valorile lui u și y pentru $t < 0$ sunt considerate nule numai în mod convențional; în realitate, la $t < 0$ mărimile u și y au anumite valori constante, nenule, corespunzătoare regimului staționar anterior variației în treaptă unitară a mărimii u .

Performanța staționară impusă răspunsului la o variație în treaptă a unei perturbații este de forma (2.136), fie de o formă analogă cu (2.137), din considerente legate de buna desfășurare a procesului tehnologic automatizat.

• Abaterea maximă

Abaterea maximă, notată cu v , se definește pentru regimul tranzitoriu provocat de o perturbație și reprezintă depășirea maximă a valorii staționare y_{st} de către mărimea de ieșire y (v. fig. 2.29,a și 2.29,b).

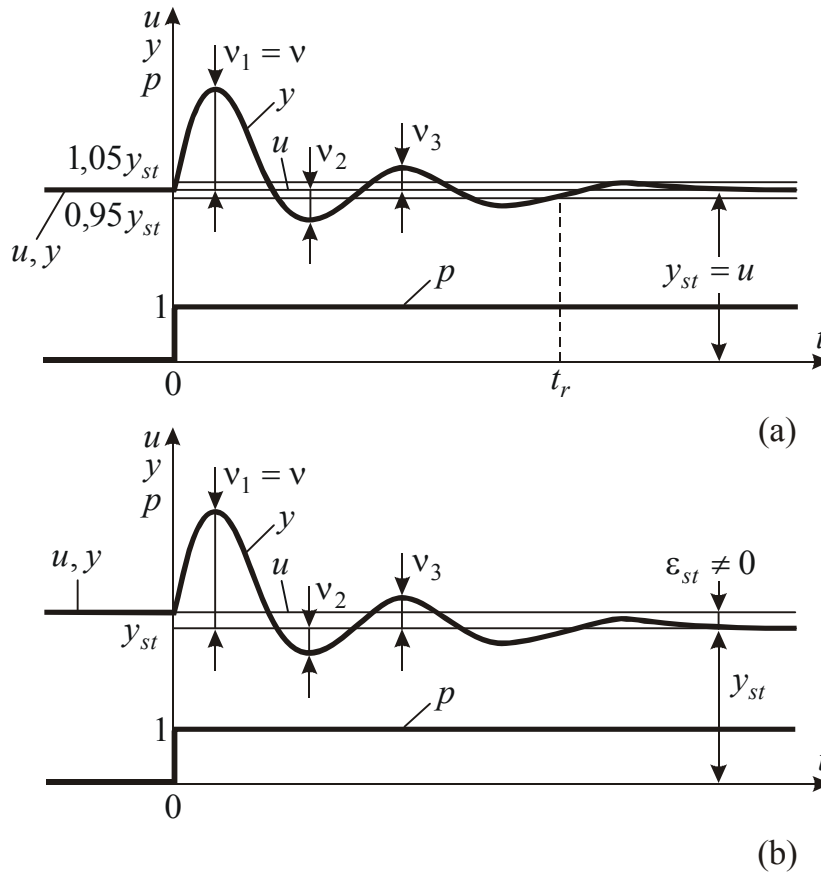


Fig.2.29 Răspunsul unui sistem de ordinul doi la o variație în treaptă a perturbației: $\varepsilon_{st} = 0$ (a); $\varepsilon_{st} \neq 0$ (b).

Din considerente analoge cu cele expuse la suprareglaj, se impune pentru abaterea maximă v , o condiție de forma:

$$v \leq v_{imp}, \quad (2.148)$$

unde v_{imp} este valoarea impusă. Pentru exprimarea în procente a condiției (2.148), abaterea maximă se raportează la y_{st} .

• Gradul de amortizare

În cazul variației unei perturbații p (v. fig. 2.29,a și 2.29,b) gradul de amortizare ρ se definește ca diferența dintre unitate și raportul amplitudinilor a două semioscilații succesive de același semn ale răspunsului y la variația respectivă a perturbației, considerate în raport cu valoarea staționară y_{st} :

$$\rho = 1 - \frac{v_3}{v_1} = 1 - \frac{v_3}{v}, \quad (2.149)$$

unde s-a ținut seamă că $v_1 = v$.

Pentru o amortizare rapidă a oscilațiilor se impune:

$$\rho \geq \rho_{imp}, \quad (2.150)$$

ρ_{imp} fiind valoarea impusă (evident, $\rho_{imp} \leq 1$).

• Durata regimului tranzitoriu

Timpul de răspuns, t_r (v. fig. 2.29,a), se definește ca și în cazul răspunsului la o variație în treaptă a mărimii de intrare, fiind impusă o performanță de forma (2.145).

2.1.3.3 Performanțe impuse regimului sinusoidal

Pentru regimul sinusoidal, respectiv regimul staționar corespunzând aplicării unor semnale sinusoidale de frecvență variabilă la intrarea sistemului, se impune ca performanță lărgimea de bandă, caracterizând proprietățile de filtru ale sistemului, respectiv comportarea acestuia în raport cu perturbațiile de înaltă frecvență.

Performanța lărgimii de bandă va fi expusă în cadrul §2.4.2, după prezentarea caracteristicilor de frecvență.

2.1.4 Metodele de analiză ale sistemelor automate liniare și continue

Pentru analiza sistemelor automate este folosită o varietate relativ largă de metode.

O primă metodă constă în *stabilirea ecuației diferențiale* care leagă mărimea de ieșire y și derivatele ei (în raport cu timpul) de mărimea de intrare u și derivatele ei (în raport cu timpul) și în rezolvarea acestei ecuații, soluția reprezentând răspunsul y al sistemului la un semnal de intrare u dat. Având variația în timp a mărimii de ieșire y , toate performanțele (staționare și tranzitorii) pot fi determinate, verificând astfel dacă sunt îndeplinite condițiile impuse acestor performanțe.

În mod analog pot fi stabilite ecuații în care intervin mărimea de ieșire, derivatele ei, o perturbație și derivatele ei, rezultând răspunsul y , la variația unei perturbații, răspuns care permite verificarea performanțelor răspunsului la perturbație.

Metoda devine greu utilizabilă pentru sistemele industriale complexe deoarece necesită rezolvarea unor ecuații diferențiale de grad superior. În ultimul timp, însă calculatoarele electronice își aduc un aport prețios în acest domeniu.

O a doua metodă, larg folosită, utilizează *funcțiile de transfer*, deci transformata Laplace directă și inversă, pentru analiza sistemelor automate; această metodă permite de asemenea să se obțină răspunsul sistemului la o variație a mărimii de intrare sau la o variație a unei perturbații, ceea ce permite verificarea îndeplinirii performanțelor impuse.

Utilizarea funcțiilor de transfer permite să se stabilească anumite corespondențe între domeniul variabilei complexe și domeniul timpului, corespondențe utile atât pentru analiza, cât și pentru sinteza sistemelor automate.

Metoda funcțiilor de transfer prezintă dezavantajul că în cazul unor ecuații de ordin superior, rezolvarea acestora și aplicarea transformatelor inverse Laplace, pentru aflarea variațiilor $\varepsilon(t)$, respectiv $y(t)$, implică dificultăți care fac metoda improprie analizei și sintezei sistemelor automate de complexitate mai ridicată.

Un al treilea grup de metode sunt *metodele de frecvență* pentru analiza performanțelor sistemelor automate. Aceste metode stabilesc corespondențe între domeniul frecvențelor și domeniul timpului, care permit ca stabilitatea și comportarea sistemelor automate să fie apreciate fără a fi necesară rezolvarea ecuațiilor diferențiale care descriu matematic funcționarea sistemelor respective; acest lucru reprezintă un important avantaj, îndeosebi în cazul sistemelor complexe, cu un număr mare de elemente, care conduc la ecuații diferențiale de ordin ridicat.

Un al patrulea grup de metode, utilizate mai recent pentru analiza și proiectarea sistemelor automate, sunt metodele bazate pe *folosirea variabilelor de stare* (respectiv a *variabilelor de fază*), variabile care definesc univoc și complet starea unui sistem și permit să se determine evoluția sa viitoare. Aceste metode au avantajul că permit folosirea limbajului matriceal – vectorial pentru descrierea matematică a funcționării sistemului, avantaj care capătă o însemnătate deosebită în cazul sistemelor multivariabile.

În sfârșit, un alt grup de metode prevede utilizarea calculatoarelor electronice pentru determinarea performanțelor sistemelor automate. Calculatoarele electronice digitale sunt utilizate în mod curent pentru analiza sistemelor automate, existând metode numerice pentru obținerea răspunsului unui sistem automat la un semnal de intrare dat.

2.2 METODA INTEGRĂRII ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ÎN ANALIZA SISTEMELOR AUTOMATE

Una din metodele utilizate pentru analiza sistemelor automate liniare și continue (menționată în §2.1.4) este *metoda de analiză în domeniul timpului*. Metoda permite obținerea unor informații complete și precise asupra funcționării sistemului prin studierea răspunsului $y(t)$ pentru o variație dată la intrare $u(t)$ [7,15,17].

Determinarea răspunsului sistemului automat prin calcul necesită rezolvarea ecuațiilor diferențiale (modelelor matematice) care descriu funcționarea elementelor sistemului automat și a sistemului în ansamblu.

2.2.1 Calculul răspunsului unui sistem automat de ordinul întâi

O serie de elemente (sisteme) sunt descrise de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi. În mod convențional, aceste elemente (sisteme) se numesc de ordinul întâi, ordinul ecuației diferențiale determinând, în acest mod, ordinul sistemului automat.

Forma generală a ecuației diferențiale liniare pentru un element (sistem) de ordinul întâi este:

$$a_0 \frac{dy}{dt} + a_1 y = b_1 u, \quad (2.151)$$

sau, sub formă normalizată:

$$T \frac{dy}{dt} + y = Ku, \quad (2.152)$$

unde T este constanta de timp:

$$T = \frac{a_0}{a_1}, \quad (2.153)$$

iar K este un coeficient:

$$K = \frac{b_1}{a_1}. \quad (2.154)$$

Se studiază în continuare răspunsul sistemului de ordinul întâi la intrarea căruia se aplică un semnal treaptă unitară.

Corespunzător celor două regimuri fundamentale de funcționare ale sistemelor automate, staționar și tranzitoriu, mărimea de la ieșire $y(t)$ are o componentă forțată $y_f(t)$ și respectiv o componentă liberă $y_l(t)$, astfel că soluția generală a ecuației (2.152) se poate scrie:

$$y(t) = y_f(t) + y_l(t), \quad (2.155)$$

valabilă în fiecare moment t .

La sfârșitul regimului tranzitoriu, componenta liberă se anulează:

$$y_l(t) = 0, \quad (2.156)$$

astfel că:

$$y(t) = y_f(t) = y_{st} = ct., \quad (2.157)$$

unde y_{st} este valoarea staționară a mărimii de ieșire.

Dacă se scrie ecuația (2.152) pentru noul regim staționar:

$$T \frac{dy_f}{dt} + y_f = Ku, \quad (2.158)$$

În conformitate cu relația (2.157), primul termen este nul și ecuația (2.158) devine:

$$y_f(t) = Ku(t) = K1_+(t). \quad (2.159)$$

Pentru găsirea componentei libere (componenta de regim tranzitoriu) se scrie ecuația caracteristică aferentă ecuației diferențiale (2.152):

$$Tp + 1 = 0, \quad (2.160)$$

care conduce la rădăcina:

$$p = -\frac{1}{T}. \quad (2.161)$$

Pentru componenta liberă va rezulta o expresie de forma:

$$y_l(t) = Ce^{pt} = Ce^{-\frac{t}{T}}, \quad (2.162)$$

unde C se determină din condițiile inițiale.

Înlocuind relațiile (2.159) și (2.162) în expresia (2.155) se obține:

$$y(t) = K + Ce^{-\frac{t}{T}}. \quad (2.163)$$

Ținând seama de condiția inițială:

$$y(t) = 0 \text{ pentru } t = 0,$$

din relația (2.163) rezultă:

$$C = -K. \quad (2.164)$$

Expresia finală a răspunsului sistemului de ordinul întâi pentru un semnal de intrare treaptă unitară, este:

$$y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}). \quad (2.165)$$

Reprezentarea grafică a acestui răspuns este indicată în figura 2.30.

Se remarcă faptul că, componenta tranzitorie a răspunsului sistemului automat de ordinul întâi $y_l(t)$ depinde de constanta de timp T : cu cât aceasta este mai mică cu atât regimul tranzitoriu are o durată mai scurtă.

Curba punct – linie – punct, este graficul derivatei lui $y(t)$, reprezentând răspunsul elementului de ordin unu la impuls unitar și având forma unei exponențiale descrescătoare.

Se observă că pentru $t = T$, mărimea $y(t)$, din expresia (2.165), este egală cu $0,632K$; de asemenea pentru $t = 3T$, mărimea $y = 0,95K$, regimul tranzitoriu considerându-se încheiat.

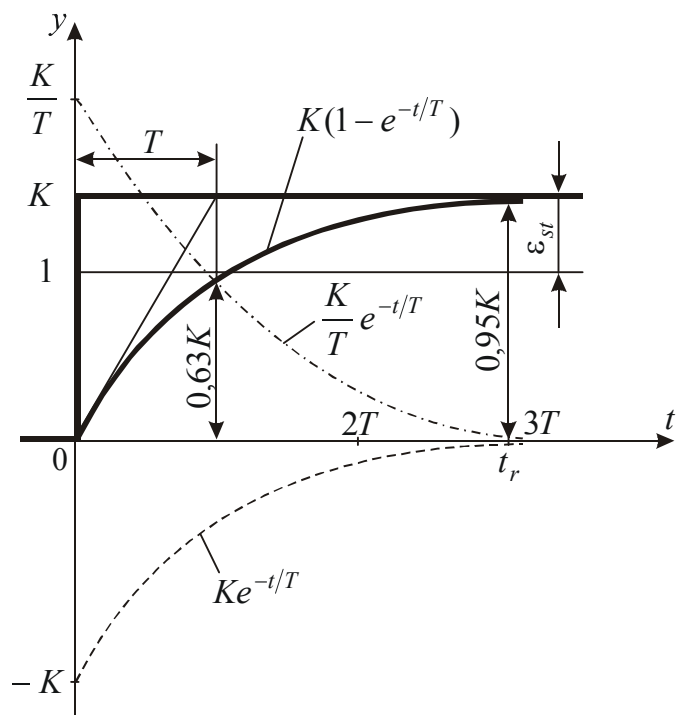


Fig.2.30 Răspunsul unui sistem automat de ordinul întâi pentru un semnal de intrare treaptă unitară.

Un sistem automat de ordinul întâi este caracterizat prin următoarele performanțe staționare și tranzitorii:

- T constanta de timp ce caracterizează viteza de răspuns a sistemului;
- t_r durata procesului tranzitoriu, mărime care este proporțională cu constanta de timp ($t_r \cong 3T$);
- ε_{st} eroarea în regim staționar care, pentru sistemul de ordinul întâi, în conformitate cu relația (2.134) și pentru un semnal de intrare treaptă unitară, este: $\varepsilon_{st} = u - y_{st} = 1 - K$.

2.2.2 Calculul răspunsului unui sistem automat de ordinul doi

Elementele (sistemele) a căror modele matematice sunt ecuații diferențiale de ordinul doi, de forma generală:

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_2 u, \quad (2.166)$$

sunt denumite, în mod convențional, elemente (sisteme) de ordinul doi.

Ecuația (2.166) poate fi scrisă sub o formă frecvent folosită în automatică:

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy}{dt} + y = Ku, \quad (2.167)$$

sau:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = K\omega_n^2 u, \quad (2.168)$$

unde $\omega_n = 1/T$ este *pulsația naturală a sistemului neamortizat* (are dimensiunea de $[\text{secundă}]^{-1}$), ξ – *factorul de amortizare* (mărime adimensională), K – coeficient.

Parametrii enunțați au expresiile:

$$T = \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a_2}} = \frac{1}{\omega_n}, \quad \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}}, \quad K = \frac{b_2}{a_2}. \quad (2.169)$$

Între parametrii K, T, ξ și constantele fizice (coeficienții ecuației diferențiale) ale elementului (sistemului) considerat se stabilesc anumite relații. Astfel pentru sistemul de urmărire a poziției unghiulare (v. fig. 2.18) se obține:

$$T = \frac{\sqrt{J}}{\sqrt{K_T}} = \frac{1}{\omega_n}, \quad \xi = \frac{D}{2\sqrt{K_T} \sqrt{J}}, \quad K = 1, \quad (2.170)$$

în care J, D, K_T au semnificațiile specificate în §2.1.2.

Pentru a analiza, în domeniul timp, un sistem automat de ordinul doi este necesar, așa cum s-a mai menționat, să se obțină răspunsul sistemului pentru un anumit tip de

semnal aplicat la intrare. Se consideră că mărimea de intrare $u(t)$, are o variație în treaptă unitară (v. fig. 2.31).

Și în acest caz, soluția generală a ecuației (2.168) are două componente: o componentă forțată $y_f(t)$ (corespunzătoare regimului staționar) și o componentă liberă $y_l(t)$ (corespunzătoare regimului tranzitoriu):

$$y(t) = y_f(t) + y_l(t). \quad (2.171)$$

Dacă se ține seama că în noul regim staționar, după anularea componentei libere, va rezulta:

$$y_f(t) = y_{st}(t) = ct, \quad (2.172)$$

deoarece în acest regim:

$$u(t) = ct. = 1 \quad (2.173)$$

și variația în timp a mărimii $y(t)$ trebuie să aibă, în noul regim staționar, același aspect ca și variația în timp a mărimii $u(t)$.

Considerând deci că regimul tranzitoriu s-a încheiat, adică:

$$y_l(t) = 0 \quad (2.174)$$

și:

$$y(t) = y_{st}(t) = y_f(t) = ct., \quad (2.175)$$

ecuația (2.168) (în care în continuare se va lua $K = 1$) pentru noul regim staționar se poate scrie:

$$\frac{d^2 y_f}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy_f}{dt} + \omega_n^2 y_f = \omega_n^2 u. \quad (2.176)$$

Având în vedere relația (2.172), primii doi termeni sunt nuli și ecuația (2.176) devine:

$$\omega_n^2 y_f = \omega_n^2 u, \quad (1.177)$$

respectiv, ținând seama și de relația (2.173):

$$y_f(t) = y_{st}(t) = u(t) = 1. \quad (2.178)$$

Se constată că la sistemul analizat eroarea staționară, pentru un semnal de intrare treaptă unitară, este nulă:

$$\varepsilon_{st} = u - y_{st} = 0. \quad (2.179)$$

Pentru găsirea componentei libere $y_l(t)$ se scrie ecuația caracteristică aferentă ecuației diferențiale (2.168):

$$p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2 = 0, \quad (2.180)$$

care conduce la rădăcinile:

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}. \quad (2.181)$$

În practică toți factorii care intervin în expresiile (2.169) sunt pozitivi, de aceea factorul de amortizare ξ nu poate lua valori negative, ci numai valorile:

$$\xi \geq 0. \quad (2.182)$$

Pentru $\xi = 0$, din relația (2.181) se obțin două rădăcini imaginare:

$$p_{1,2} = \pm j\omega_n, \quad (2.183)$$

pentru:

$$0 < \xi < 1, \quad (2.184)$$

rădăcinile p_1 și p_2 sunt complex conjugate; pentru:

$$\xi = 1, \quad (2.185)$$

se obține o rădăcină reală dublă:

$$p_{1,2} = -\omega_n, \quad (2.186)$$

iar pentru $\xi > 1$ rezultă două rădăcini diferite.

Pentru componenta liberă $y_l(t)$, va rezulta o expresie de forma:

$$y_l(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}, \quad (2.187)$$

unde C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale.

Înlocuind relațiile (2.178) și (2.187) în expresia (2.171) se obține:

$$y(t) = 1 + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}. \quad (2.188)$$

Prima condiție inițială are expresia:

$$y(t) = 0 \quad \text{pentru} \quad t = 0. \quad (2.189)$$

A doua condiție inițială are expresia:

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{pentru} \quad t = 0. \quad (2.190)$$

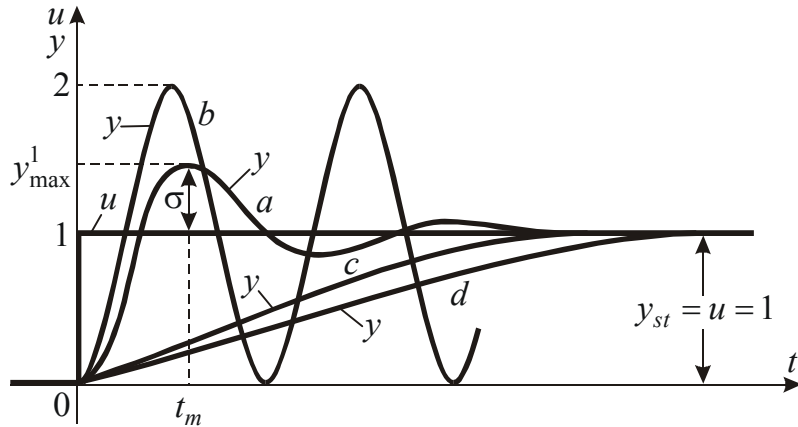


Fig.2.31 Răspunsul indicial al unui sistem de ordinul doi pentru diverse valori ale factorului de amortizare ξ .

Aplicând prima condiție inițială (2.189) la expresia (2.188) se obține:

$$1 + C_1 + C_2 = 0, \quad (2.191)$$

respectiv:

$$C_1 + C_2 = -1. \quad (2.192)$$

În mod analog aplicând a doua condiție inițială (2.190) la expresia (2.188) rezultă:

$$p_1 C_1 + p_2 C_2 = 0. \quad (2.193)$$

Din relațiile (2.192) și (2.193) se obțin:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & p_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}} = \frac{-p_2}{p_2 - p_1}, \quad C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ p_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}} = \frac{p_1}{p_2 - p_1}. \quad (2.194, 2.195)$$

În ipoteza (2.184), care este cea mai frecventă în practică, se poate verifica ușor, înlocuind valorile p_1 și p_2 din (2.181) în relațiile (2.194) și (2.195), că C_1 și C_2 sunt mărimi complex conjugate.

Conform cu (2.181), considerând:

$$p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}, \quad (2.196)$$

iar:

$$p_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (2.197)$$

și înlocuind expresiile (2.194), (2.195), (2.196) și (2.197) în relația (2.188), se obține:

$$y(t) = 1 - \frac{-\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{-2j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} e^{j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{-\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{-2j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} e^{-j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t} = \\
 & = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[\frac{\xi}{2j} (e^{j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t} - e^{-j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t}) + \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2} (e^{j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t} + e^{-j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t}) \right] = \\
 & = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\xi \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \sqrt{1-\xi^2} \cos \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t). \quad (2.198)
 \end{aligned}$$

Reprezentând în planul complex rădăcinile p_1 și p_2 (în ipoteza făcută (2.184)) și notând unghiul φ ca în figura 2.32, din relația (2.181) se constată că:

$$|p_1| = |p_2| = \sqrt{\xi^2 \omega_n^2 + \omega_n^2 (1-\xi^2)} = \omega_n, \quad (2.199)$$

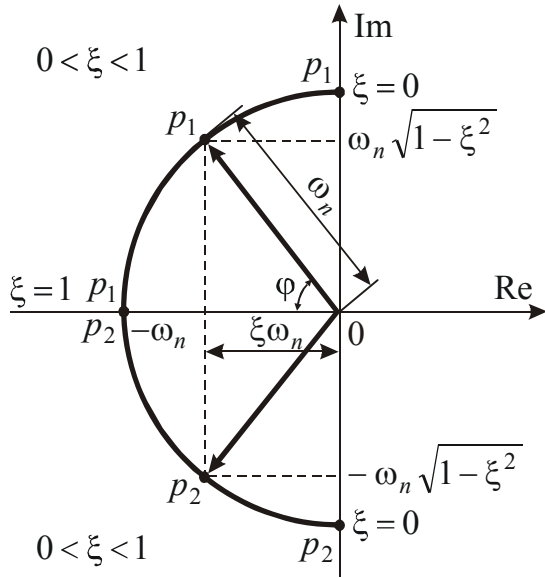


Fig.2.32 Reprezentarea rădăcinilor ecuației caracteristice în planul complex pentru diverse valori ale lui ξ .

iar din figura 2.32 rezultă:

$$\cos \varphi = \frac{\xi \omega_n}{\omega_n} = \xi \quad (2.200)$$

și:

$$\sin \varphi = \frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{\omega_n} = \sqrt{1-\xi^2}, \quad (2.201)$$

respectiv:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}. \quad (2.202)$$

Înlocuind relațiile (2.200) și (2.201) în (2.198), expresia răspunsului sistemului devine:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\cos \varphi \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \sin \varphi \cos \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) = \\
 &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi), \quad (2.203)
 \end{aligned}$$

respectiv, având în vedere relația (2.202):

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}). \quad (2.204)$$

În ipoteza (2.184), răspunsul sistemului de ordinul doi la un semnal de intrare treaptă unitară are o componentă liberă (tranzitorie) sinusoidală amortizată.

2.2.3 Studiul influenței factorului de amortizare

Factorul de amortizare ξ are o influență hotărâtoare asupra regimului tranzitoriu din punct de vedere al amortizării (ceea ce a determinat și denumirea acestui factor). În acest regim prezintă interes, după cum s-a mai menționat, doi indici de calitate: suprareglajul și durata regimului tranzitoriu (în cazul în care cauza apariției regimului tranzitoriu a fost variația semnalului de la intrare).

Factorul de amortizare ξ exercită deci o influență determinantă asupra suprareglajului, iar în cazul sistemului considerat (sistem automat de ordinul doi descris de ecuația (2.167) sau (2.168)) rezultă că suprareglajul (v. fig. 2.31, curba *a*) este determinat numai de factorul ξ .

Pentru $\xi = 0$, răspunsul sistemului de ordinul doi la un semnal de intrare treaptă unitară (2.204), are forma:

$$y(t) = 1 - \sin(\omega_n t + \frac{\pi}{2}) = 1 - \cos \omega_n t, \quad (2.205)$$

pentru $\varphi = \pi/2$ (v. fig. 2.32)

Regimul tranzitoriu în acest caz este denumit *regim oscilatoriu neamortizat* sau *întreținut* și este reprezentat prin curba *b* din figura 2.31. Întrucât mărimea de ieșire $y(t)$ nu ajunge la o valoare staționară constantă sistemul nu este stabil (de fapt, sistemul se află la limita de stabilitate – v. subcap. 2.4).

Datorită faptului că răspunsul sistemului neamortizat are pulsația ω_n , acest factor a primit denumirea menționată anterior de pulsație naturală a sistemului neamortizat.

Pentru $0 < \xi < 1$, răspunsul sistemului are expresia analitică (2.204) și este reprezentat în figura 2.31, curba *a*. Rezultă deci în acest caz un *regim oscilatoriu subamortizat*.

Pentru $\xi = 1$, din expresia (2.204) rezultă o nedeterminare; prin înlăturarea acesteia se obține răspunsul (v. fig. 2.31, curba *c*):

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \quad (2.206)$$

deci se obține un regim tranzitoriu aperiodic, denumit *regim aperiodic critic amortizat*.

Dacă se consideră $\omega_n = ct.$, în cazul diferitelor ipoteze făcute mai sus asupra valorilor parametrului ξ în gama $0 \leq \xi \leq 1$, se constată că rădăcinile ecuației caracteristice se deplasează pe un semicerc de rază ω_n (v. fig. 2.32).

În cazul $\xi > 1$, din expresia (2.181) rezultă că rădăcinile ecuației caracteristice sunt reale și diferite, iar componenta corespunzătoare regimului tranzitoriu va fi formată din două exponențiale de semne diferite. Răspunsul sistemului, prezentat grafic în figura 2.31, curba *d*, are expresia analitică:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \operatorname{sh}(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t - \varphi). \quad (2.207)$$

Regimul tranzitoriu este tot aperiodic, dar de durată mai lungă decât în cazul $\xi = 1$; acest regim este denumit *regim aperiodic supraamortizat*.

Revenind la cazul (2.184), se poate determina dependența dintre suprareglajul σ și factorul de amortizare ξ . În acest scop, se anulează derivata dy/dt , determinându-se toate momentele de maxim și de minim ale răspunsului y , printre care și t_m , timpul la care apare suprareglajul σ .

Întrucât:

$$y(t_m) = y_{st} + \sigma = 1 + \sigma = y_{\max}^1,$$

rezultă:

$$\sigma = y(t_m) - 1. \quad (2.208)$$

Derivând relația (2.203) și anulând derivata se obține:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = \\ = -\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} [-\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi) + \omega_n \sqrt{1-\xi^2} e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi)] = 0, \end{aligned}$$

de unde, conform și cu relația (2.202):

$$\operatorname{tg}(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \operatorname{tg}\varphi, \quad (2.209)$$

ceea ce conduce la relația din care se obțin toate momentele de maxim și de minim ale răspunsului y :

$$\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t = K\pi, \quad \text{cu } K = 0, 1, 2, \dots \quad (2.210)$$

Pentru $K = 0$ se obține $t = 0$, deci minimumul din origine, ceea ce confirmă condiția inițială (2.190), derivata dy/dt fiind nulă la $t = 0$.

Pentru $K = 1$ se obține timpul t_m (v. fig. 2.31) la care apare suprareglajul:

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}, \quad (2.211)$$

valoare confirmată și de faptul că între minimumul din origine și maximumul de la t_m , intervalul de timp este egal cu o jumătate de perioadă a oscilației amortizate, de pulsație $\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$, deci :

$$t_m = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}. \quad (2.212)$$

Înlocuind relația (2.211) în (2.208), cu considerarea relației (2.203), se obține:

$$\begin{aligned}\sigma &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} + \varphi) - 1 = \\ &= -\frac{e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\pi + \varphi) = \frac{e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \varphi,\end{aligned}\quad (2.213)$$

sau, având în vedere relația (2.201), rezultă:

$$\sigma = e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}, \quad (2.214)$$

confirmându-se faptul că suprareglajul σ , în cazul sistemului considerat, depinde numai de ξ și nu depinde de ω_n .

Dependența (2.214) este reprezentată în figura 2.33, suprareglajul fiind exprimat în procente.

Relația (2.214) este foarte utilă și pentru proiectarea sistemelor automate.

După cum s-a menționat, o valoare mare a suprareglajului, peste valoarea impusă, atrage după sine suprasolicitarea sau chiar deteriorarea sistemului automat. Din figura 2.33 se observă că suprareglajul este cu atât mai scăzut cu cât factorul de amortizare ξ are o valoare mai apropiată de 1. Cum factorul ξ depinde de parametrii sistemului, aceștia se aleg în așa fel încât să corespundă valorii impuse a suprareglajului.

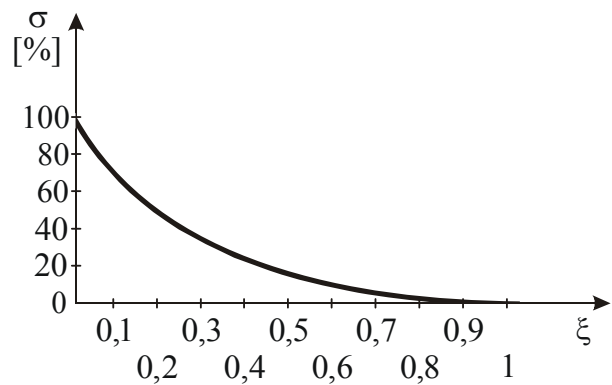


Fig.2.33 Dependența suprareglajului $\sigma = f(\xi)$ de factorul de amortizare pentru un sistem de ordinul doi.

În mod analog se poate determina și dependența dintre factorul de amortizare ξ și gradul de amortizare δ . Făcând în relația (2.210) $K = 3$ se obține timpul t_3 corespunzător maximului relativ y_3 (v. fig. 2.27), care determină depășirea σ_3 ce urmează suprareglajului σ :

$$t_3 = \frac{3\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (2.215)$$

Introducând t_3 din relația (2.215) în expresia (2.203) se obține :

$$y_3(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n \frac{3\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sin \varphi} \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \frac{3\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} + \varphi) = 1 + e^{-\frac{3\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}. \quad (2.216)$$

Întrucât (v. fig. 2. 27):

$$y_3 = 1 + \sigma_3, \quad (2.217)$$

rezultă:

$$\sigma_3 = e^{-\frac{3\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}. \quad (2.218)$$

Înlocuind relațiile (2. 214) și (2, 218) în expresia (2.141) se obține gradul de amortizare pentru sistemele de ordinul II:

$$\delta = 1 - \frac{\sigma_3}{\sigma} = 1 - \frac{e^{-\frac{3\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}} = 1 - e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}. \quad (2.219)$$

Se constată că la fel ca și suprareglajul σ , gradul de amortizare δ depinde numai de ξ și nu depinde de ω_n .

Factorul de amortizare ξ exercită o anumită influență și asupra duratei regimului tranzitoriu t_r , însă ținând seama că în practică factorul ξ are o gamă limitată de variație ($0,5 < \xi < 0,9$) determinată de faptul că suprareglajele admisibile sunt cele corespunzătoare acestei game, influența factorului ξ asupra duratei t_r este redusă.

2.2.4 Studiul influenței pulsației naturale a sistemului neamortizat

În paragraful 2.1.3 s-a arătat că regimul tranzitoriu se poate considera încheiat atunci când mărimea de ieșire intră într-o gamă de $\pm 5\%$ din valoarea sa staționară și ulterior nu o mai părăsește. Aceasta înseamnă, în cazul sistemului automat analizat (sistem automat de ordinul doi descris de ecuația diferențială (2.168)), că regimul tranzitoriu sa va încheia când componenta corespunzătoare regimului tranzitoriu $y_l(t) = y_{tr}(t)$ a mărimii de ieșire va intra în banda $\pm 0,05 y_{st}$ și nu o va mai părăsi.

Din expresiile (2.171) și (2.203) rezultă:

$$y_{tr}(t) = -\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi) \quad (2.220)$$

și deci, având în vedere și relația (2.178), condiția încheierii regimului tranzitoriu devine:

$$|y_{tr}(t)| = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi) \leq 0,05 y_{st} = 0,05. \quad (2.221)$$

Ținând seama de faptul că valorile absolute ale sinusului sunt limitate la unitate, condiția (2.221) poate fi înlocuită prin alta acoperitoare:

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \leq 0,05, \quad (2.222)$$

sau, în cazul egalității, când $t = t_r$:

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0,05. \quad (2.223)$$

Din relația (2.223) se obține:

$$-\xi\omega_n t_r = \ln(0,05\sqrt{1-\xi^2}), \quad (2.224)$$

respectiv:

$$t_r = \frac{\ln(0,05\sqrt{1-\xi^2})}{-\xi\omega_n}. \quad (2.225)$$

Înlocuind în relația (2.225) valorile ξ curent folosite în practică, se obțin pentru t_r valorile din tabelul 2.1.

Datele din tabelul 2.1 confirmă faptul că factorul ω_n exercită o influență hotărâtoare asupra duratei regimului tranzitoriu t_r .

Pentru sistemele de tipul luat în considerare (descrise de o ecuație diferențială de ordinul doi de forma (2.168), care cuprinde în membrul al doilea numai mărimea de intrare, fără derivatele acesteia), denumite sisteme de ordinul doi, se poate stabili o relație aproximativă, acoperitoare, pentru durata regimului tranzitoriu.

Tab.2.1 Influența factorului ω_n asupra duratei regimului tranzitoriu t_r .

ξ	t_r	ξ	t_r
0,5	$\frac{6,28}{\omega_n}$	0,8	$\frac{4,37}{\omega_n}$
0,6	$\frac{5,35}{\omega_n}$	0,9	$\frac{4,25}{\omega_n}$
0,7	$\frac{4,78}{\omega_n}$		

Astfel, considerând componenta corespunzătoare regimului tranzitoriu a răspunsului $y(t)$ la timpii t_1 și t_2 , avem:

$$y_{tr}^{t_1}(t) = -\frac{e^{-\xi\omega_n t_1}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_1 + \varphi), \quad (2.226)$$

$$y_{tr}^{t_2}(t) = -\frac{e^{-\xi\omega_n t_2}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_2 + \varphi). \quad (2.227)$$

Pentru simplificare se consideră valorile maxime ale funcției sinus, în acest caz se obține:

$$\frac{y_{tr}^{t_1}(t)}{y_{tr}^{t_2}(t)} = e^{\xi\omega_n(t_2-t_1)}, \quad (2.228)$$

de unde:

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\xi \omega_n} \ln \frac{y_{tr}^{t_1}(t)}{y_{tr}^{t_2}(t)}. \quad (2.229)$$

Începutul procesului tranzitoriu are loc la $t_1 = 0$, când $y_{tr}^{t_1} = 1$; sfârșitul lui, la $t_2 = t_r$, când $y_{tr}^{t_2} = 0,05$, sau uneori $0,02$. Înlocuind aceste valori în relația (2.229) se obține $t_2 = t_r$:

$$t_r = \frac{1}{\xi \omega_n} \ln \frac{1}{0,05} \cong \frac{3}{\xi \omega_n}, \text{ sau } t_r = \frac{1}{\xi \omega_n} \ln \frac{1}{0,02} \cong \frac{4}{\xi \omega_n}. \quad (2.230)$$

Se consideră că regimul tranzitoriu este optim, atunci când sistemul automat nu efectuează oscilații, adică pentru:

$$t_r = t_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (2.231)$$

(expresia lui t_m a fost obținută în §2.2.3).

Considerând relația (2.230), din expresia (2.231) se obține factorul de amortizare optim, iar din relația (2.202) se obține unghiul φ corespunzător (v. fig. 2.34); deci:

$$\xi = \xi_{opt} = 0,707, \quad \varphi = \varphi_{opt} = 45^\circ. \quad (2.232)$$

Practic realizarea valorii lui ξ din relațiile (2.232) este costisitoare; din acest motiv se admite că regimul tranzitoriu să se sfârșească după un număr dat de oscilații, de exemplu, $t_r = (1 \div 5)T$ (T reprezintă perioada oscilației amortizate):

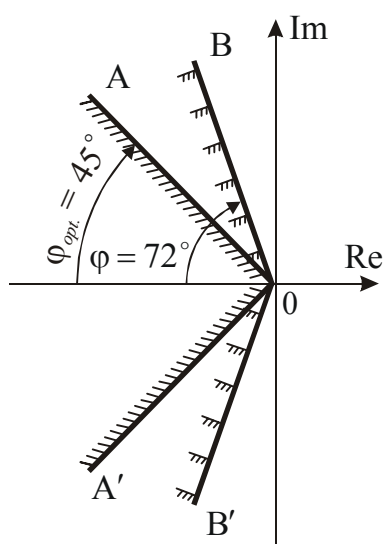


Fig. 2.34 Reprezentarea dreptelor $0A$ și $0A'$, respectiv $0B$ și $0B'$ corespunzătoare valorii φ_{opt} și celei minime admise φ_5 .

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}},$$

unde $\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ reprezintă pulsația oscilației amortizate). Pentru aceste valori se obține:

$$\xi_1 = 0,44, \quad \varphi_1 = 64^\circ,$$

respectiv:

$$\xi_5 = 0,3, \quad \varphi_5 = 72^\circ. \quad (2.233)$$

În figura 2.34, sunt reprezentate dreptele $0A$ și $0A'$, respectiv $0B$ și $0B'$ corespunzătoare valorii φ_{opt} și celei minime admise φ_5 . Pentru toate rădăcinile ecuației caracteristice aferente ecuației diferențiale care descrie funcționarea unui sistem automat de tipul celui considerat, plasate în domeniul mărginit de acele drepte, durata regimului tranzi-

toriu este $t_r < T/2$, respectiv $t_r < 5T$.

Relația (2.230) este acoperitoare deoarece, pentru diferite valori ξ , conduce la valori mai mari pentru t_r , decât cele din tabelul 2.1, durata reală a regimului tranzitoriu fiind astfel mai mică decât cea obținută cu relația (2.230); aceasta înseamnă că dacă durata t_r , rezultată din relația aproximativă (2.230) va satisface performanța (2.145), cu atât mai mult durata reală t_r (mai mică decât cea obținută prin calcul) va satisface performanța menționată.

De altfel, după cum s-a specificat cu ocazia relației (2.222) și datele din tabelul 2.1 sunt acoperitoare.

2.3 METODA FUNCȚIILOR DE TRANSFER ÎN ANALIZA SISTEMELOR AUTOMATE

Metoda funcțiilor de transfer își găsește o largă aplicare în analiza sistemelor automate [1,5,7,13,15÷18,20÷22,30,31,36]. Metoda prezintă avantaje evidente față de metoda integrării ecuațiilor diferențiale în cazul în care ecuațiile diferențiale sunt complicate și de ordin superior.

Aparatul matematic utilizat este calculul operațional care se bazează pe *transformarea Laplace*.

În cursul acestui subcapitol se introduce noțiunea de *funcție de transfer*.

2.3.1 Transformarea Laplace – directă și inversă

Transformarea directă Laplace permite ca studiul unei funcții $f(t)$ să fie trecut din domeniul real al timpului (domeniul variabilei reale) în domeniul variabilei complexe $s = \sigma + j\omega$.

Prin aplicarea transformatelor Laplace, în condiții inițiale nule, ecuațiile diferențiale care descriu funcționarea elementelor sistemelor automate devin ecuații algebrice, cu polinoame de variabilă complexă s .

Fie $f(t)$ o funcție măsurabilă reală sau complexă, definită pe dreapta reală și s un parametru real sau complex.

Definiția 1. Dacă:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.234)$$

există, ea poartă numele de *integrala lui Laplace unilaterală a funcției $f(t)$* .

Dacă $f(t) = 0$ pentru $t < 0$, integrala (2.234) se reduce la:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (2.235)$$

Se notează:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (2.236)$$

Definiția 2. Transformarea care face să corespundă funcției $f(t)$ funcția $F(s)$, poartă numele de *transformare Laplace*, iar $F(s)$ se numește *transformata Laplace a funcției $f(t)$* .

Fie α marginea inferioară a numerelor reale s_0 , pentru care expresia $e^{-s_0 t} f(t)$ este funcție sumabilă în $[0, \infty)$. Transformata Laplace $F(s)$ este definită în semiplanul deschis $\operatorname{Re} s > \alpha$, iar α se numește *abscisă de convergență* corespunzătoare funcției $f(t)$.

Definiția 3. Se numește *original* o funcție complexă $f(t)$, definită pe $[0, \infty)$ (dacă se extinde $f(t)$ pe $(-\infty, +\infty)$, atunci $f(t) = 0$, pentru $t < 0$), continuă pe acest interval în afară, eventual, de un număr finit de puncte și cu creștere mărginită.

Definiția 4. Fie $f(t)$ un original și p_0 abscisa sa de convergență. Se numește *transformata Laplace a funcției $f(t)$* (sau *image*) funcția:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Se vor prezenta, în continuare, câteva dintre proprietățile importante ale transformatei Laplace:

Propoziția 1. Transformata Laplace este o transformare liniară, adică:

$$\mathcal{L}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda \mathcal{L}[f(t)] + \mu \mathcal{L}[g(t)], \quad (2.237)$$

unde λ, μ sunt constante complexe.

Propoziția 2. (Teorema asemănării) Dacă $F(s)$ este imaginea funcției $f(t)$, oricare ar fi constanta $a > 0$, avem:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right). \quad (2.238)$$

Propoziția 3. (Teorema întârzierii) Dacă $f(t)$ este un original și τ_0 constantă, $f(t - \tau)$ este un original și:

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} \mathcal{L}[f(t)]. \quad (2.239)$$

Propoziția 4. (Derivata unui original) Dacă $f(t)$ are derivată continuă pe $(0, \infty)$ și dacă $f'(t)$ este un original (de unde rezultă că și $f(t)$ este un original și $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0)$ există), atunci din $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ se deduce:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0). \quad (2.240)$$

Dacă $f(t)$ are derivată continuă de ordinul n pe $(0, \infty)$ și dacă $f^{(n)}(t)$ este un original și $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, rezultă:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (2.241)$$

Propoziția 5. (Derivarea imaginii) Dacă $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, atunci:

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)]. \quad (2.242)$$

Propoziția 6. (Integrarea unui original) Fie $f(t)$ un original. Dacă $f(t)$ este continuă pe $(0, \infty)$ și $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, atunci:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(s)}{s}. \quad (2.243)$$

Propoziția 7. (Integrarea imaginii) Dacă $f(t)/t$ este un original și $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, atunci:

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(q)dq. \quad (2.244)$$

Propoziția 8. Fie $f(t)$ un original și p abscisa de convergență corespunzătoare. Atunci $e^{at}f(t)$ este un original și pentru $\operatorname{Re} s > p + a$ avem:

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s - a). \quad (2.245)$$

Propoziția 9. Dacă $f(t)$ și $g(t)$ sunt originale și abscisele lor de convergență sunt p_1 , respectiv p_2 , atunci funcția numită produs de convoluție:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad (2.246)$$

este un original cu abscisa de convergență $p_0 \geq \max(p_1, p_2)$. Dacă $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ și $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, atunci:

$$F(s) \cdot G(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau\right]. \quad (2.247)$$

Propoziția 10. Dacă $f(t)$ este un original și $F(s)$ transformata sa Laplace, atunci în fiecare punct t în care f este diferențiabilă, are loc formula de inversiune a lui Mellin – Fourier:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s)e^{st}ds. \quad (2.248)$$

Propoziția 11. Dacă $f(t)$ și $g(t)$ sunt originale cu abscisele de convergență, p_1 , respectiv p_2 , produsul lor $f(t) \cdot g(t)$ este un original cu abscisa de convergență $p_1 + p_2$.

Dacă $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ și $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, avem:

$$\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(q)G(s-q)dq, \quad a > p_1. \quad (2.249)$$

Propoziția 12. (Teorema valorii finale) Dacă $f(t)$ este un original și $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, atunci valoarea finală $f(\infty)$ a funcției $f(t)$ este dată de relația:

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s), \quad (2.250)$$

dacă există $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$.

Propoziția 13. (Teorema valorii inițiale) Dacă $f(t)$ este un original și $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, atunci valoarea inițială $f(0+)$ a funcției $f(t)$ este dată de relația:

$$f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s), \quad t > 0. \quad (2.251)$$

Propoziția 14. Dacă $F(s)$ este o funcție rațională:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}, \quad (2.252)$$

în care gradul numărătorului este mai mic decât gradul numitorului, iar $B(s)$ are rădăcini simple, fie acestea s_0, s_1, \dots, s_n , atunci $F(s)$ este transformata Laplace (imaginea) a funcției:

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} e^{s_k t}. \quad (2.253)$$

Dacă una dintre rădăcini este zero, de exemplu $s_0 = 0$, relația (2.253) se scrie:

$$f(t) = \frac{A(0)}{R(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{A(s_k)}{R'(s_k)} \frac{e^{s_k t}}{s_k}, \quad (2.254)$$

cu $B(s) = sR(s)$.

Această egalitate (2.254) se numește *formula lui Heaviside*.

Pornind de la definiția transformatei Laplace și utilizând diversele propoziții, în tabelul 2.2 sunt prezentate originalele, respectiv imaginile Laplace obținute pentru o serie de funcții mai des utilizate în automatică. Este de remarcat faptul că prin aplicarea transformatei Laplace ecuațiilor diferențiale care descriu funcționarea elementelor sistemelor automate, în condiții inițiale nule, se obțin relații algebrice ce definesc dependența între două variabile complexe, relații supuse operațiilor algebrice de adunare, înmulțire, împărțire.

În practică, se face apel în mod curent la tabele de transformate Laplace, tabele aflate în toate lucrările de specialitate, calculul operațional dovedindu-și astfel marea eficiență.

Tab.2.2 Originalele și imaginile unor funcții utilizate curent în automatică.

Nr.	Originalul	Imagina Laplace
1.	$\delta(t)$ impuls unitar-Dirac	1
2.	$1_+(t)$ treaptă unitară	$1/s$
3.	$A1_+(t)$ treaptă neunitară	A/s
4.	e^{-at}	$1/(s+a)$
5.	$a^{\alpha t}, a > 1$	$1/(s - \alpha \ln a)$
6.	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
7.	te^{-at}	$1/(s+a)^2$
8.	$e^{-at}(1-at)$	$s/(s+a)^2$
9.	$t^{n-1}/(n-1)!$	$1/s^n$, pentru n întreg și pozitiv
10.	$\frac{1}{b}e^{-\frac{a}{b}t}$	$\frac{1}{bs+a}$
11.	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
12.	$\frac{1}{a^2}te^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{(as+1)^2}$
13.	$\frac{(d-a)e^{-at} - (d-b)e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{s+d}{(s+a)(s+b)}$
14.	$\sin at$	$a/(s^2+a^2)$
15.	$\cos at$	$s/(s^2+a^2)$
16.	$\text{sh } at$	$a/(s^2-a^2)$
17.	$\text{ch } at$	$s/(s^2-a^2)$
18.	$1 - \cos at$	$a^2/s(s^2+a^2)$
19.	$\text{ch } at - 1$	$a^2/s(s^2-a^2)$
20.	$e^{-bt} \sin at$	$a/((s+b)^2+a^2)$
21.	$e^{-bt} \cos at$	$(s+b)/((s+b)^2+a^2)$
22.	$\sin(\omega t \pm \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi \pm s \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
23.	$\cos(\omega t \pm \varphi)$	$\frac{s \cos \varphi \pm \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
24.	$e^{-bt} \sin(\omega t \pm \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi \pm (s+b) \sin \varphi}{(s+b)^2 + \omega^2}$
25.	$e^{-bt} \cos(\omega t \pm \varphi)$	$\frac{(s+b) \cos \varphi \pm \omega \sin \varphi}{(s+b)^2 + \omega^2}$

2.3.2 Definiția funcției de transfer

În cazul unui sistem automat liniar și continuu pentru fiecare element al său ca și pentru întreg ansamblul, dependența mărimii de ieșire $y(t)$ de mărimea de intrare $u(t)$ și de timp se poate exprima printr-o ecuație diferențială liniară cu coeficienții constanți:

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = \\ = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + b_2 \frac{d^{m-2} u(t)}{dt^{m-2}} + \dots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t), \end{aligned} \quad (2.255)$$

unde $a_i (i = 0, \dots, n)$ și $b_j (j = 0, \dots, m)$ sunt constante dependente de natura și structura elementului (sistemului) considerat; $n \geq m$ (condiția de realizabilitate fizică).

Definiția funcției de transfer poate fi ilustrată aplicând transformata Laplace relației (2.255), în ipoteza tuturor condițiilor inițiale nule; se obține astfel ecuația:

$$\begin{aligned} (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) = \\ = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_{m-1} s + b_m) U(s), \end{aligned} \quad (2.256)$$

unde:

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)], \quad Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]. \quad (2.257)$$

Din relația (2.256) rezultă:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n}, \quad (2.258)$$

cu $n \geq m$ și $s = \sigma + j\omega$.

Relația (2.258) reprezintă un raport de două polinoame de variabilă s , reprezentând o funcție algebrică rațională, care are drept singularități numai rădăcinile polinomului de la numitor, adică polii lui $G(s)$. Acest raport se numește *funcție de transfer*; se observă că funcția de transfer $G(s)$ a unui element (sistem) dat, depinde numai de coeficienții $(a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_m) \neq 0$, care reprezintă constante de material și parametrii caracteristici ai elementului (sistemului). Funcția $G(s)$ pentru un element (sistem) dat este aceeași, indiferent de forma și tipul variației de la intrare $u(t)$.

Se definește ca funcție de transfer a unui element liniar și continuu, sau ansamblu de elemente liniare și continue, raportul dintre transformata Laplace a mărimii de ieșire și transformata Laplace a mărimii de intrare (a elementului sau ansamblului de elemente), în condiții inițiale nule.

Notăm în continuare funcțiile de transfer prin $G(s)$. Funcțiile de transfer care se referă la sisteme automate în stare închisă vor fi notate cu $G_0(s)$, indicele simbolizând faptul că buclele sistemelor sunt închise.

Egalând cu zero polinomul de la numitorul funcției de transfer se obține *ecuația*

caracteristică aferentă ecuației diferențiale care descrie matematic funcționarea sistemului automat.

Folosirea funcțiilor de transfer pentru calculul sistemelor automate are deosebite avantaje.

În primul rând, trecerea de la funcțiile de transfer ale elementelor componente la funcția de transfer a unui ansamblu de elemente se face foarte ușor (după cum va rezulta din §2.3.3), variabilele intermediare (reprezentând mărimile transmise între elementele menționate) fiind extrem de simplu eliminate. Numărul de tipuri de elemente utilizate în cadrul sistemelor automate (traductoare, amplificatoare, reglatoare, mașini electrice, elemente hidraulice, elemente pneumatice, instalații tehnologice, etc.) fiind relativ limitat, funcțiile de transfer ale majorității tipurilor de elemente, ca și ecuațiile diferențiale corespunzătoare elementelor respective, se găsesc în diferitele lucrări destinate sistemelor automate; datorită acestui fapt, având astfel funcțiile de transfer ale elementelor componente ale unui sistem se poate determina foarte ușor funcția de transfer a întregului sistem.

Prin metoda integrării ecuațiilor diferențiale, o asemenea trecere, de la un număr de ecuații diferențiale cunoscute, corespunzătoare elementelor componente, la ecuația diferențială pentru ansamblul elementelor, în care intervin numai mărimile de intrare și de ieșire ale ansamblului și derivatele lor, deci cu eliminarea tuturor variabilelor intermediare, poate fi efectuată numai în cazul sistemelor foarte simple.

În al doilea rând, obținând relativ ușor funcția de transfer $G_0(s)$ a unui sistem, pornind de la funcțiile de transfer cunoscute ale elementelor componente și cunoscând semnalul de intrare $u(t)$, deci transformata sa $U(s)$, se poate obține imediat transformata răspunsului $Y(s)$, întrucât:

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s)}{H(s)} \quad (2.259)$$

și deci:

$$Y(s) = G_0(s)U(s) = \frac{K(s)}{H(s)}U(s), \quad (2.260)$$

prin $K(s)$ și $H(s)$ fiind notate polinoamele de la numărătorul și numitorul funcției de transfer $G_0(s)$ a sistemului cu buclă închisă.

În funcție de expresia obținută $Y(s)$ este posibil ca în lucrările de specialitate cu tabele de transformate Laplace să fie găsită direct transformata Laplace inversă, deci răspunsul căutat $y(t)$.

Avantajele folosirii funcțiilor de transfer pentru analiza sistemelor automate pot fi ilustrate prin intermediul următoarelor exemple:

- Elementul de întârziere de ordinul I (elementul aperiodic) este descris de ecuația diferențială (2.31).

Aplicând transformarea Laplace ecuației (2.31), în ipoteza condițiilor inițiale nule, se obține:

$$(Ts + 1)Y(s) = KU(s). \quad (2.261)$$

Funcția de transfer a elementului aperiodic, este:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{Ts + 1}. \quad (2.262)$$

Pentru determinarea răspunsului la o treaptă unitară se pot folosi două căi: se rezolvă ecuația diferențială (2.31) sau se folosește relația (2.260). A doua cale, se va observa, este mai simplă. Astfel din expresia (2.262) rezultă:

$$Y(s) = \frac{K}{Ts + 1} U(s), \quad (2.263)$$

se cunoaște că:

$$u(t) = 1_+(t), \quad (2.264)$$

deci:

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}. \quad (2.265)$$

Se obține astfel:

$$Y(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} = K \left(\frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} \right) = K \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right), \quad (2.266)$$

rezultând, prin transformarea Laplace inversă, răspunsul la un semnal treaptă:

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T}). \quad (2.266')$$

• Elementul de întârziere de ordinul doi (elementul oscilant) este descris de ecuația diferențială (2.168), din care prin aplicarea transformării Laplace se obține (pentru $K = 1$):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (2.267)$$

Din relația (2.267), rezultă:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} U(s) \quad (2.268)$$

și pentru:

$$u(t) = 1_+(t), \quad (2.269)$$

respectiv pentru:

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}, \quad (2.270)$$

se obține:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (2.271)$$

egalitate obținută prin identificare și verificabilă imediat.

Având în vedere că:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2, \quad (2.272)$$

relația (2.271) poate fi pusă sub forma:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \left[\frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{(s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2} \right], \quad (2.273)$$

respectiv, folosind tabelele de transformate Laplace se obține prin transformare inversă:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - (e^{-\xi\omega_n t} \cos \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) = \\ &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\sqrt{1-\xi^2} \cos \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \xi \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t), \end{aligned} \quad (2.274)$$

sau, ținând seama și de relațiile (2.200), (2.201), rezultă:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\sin \varphi \cos \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \cos \varphi \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) = \\ &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi), \end{aligned} \quad (2.275)$$

După cum se vede, răspunsul unui sistem de ordinul doi la o mărime de intrare treaptă unitară, în ipoteza $0 < \xi < 1$, se obține pe o cale mai simplă și mai rapidă.

Utilizarea funcțiilor de transfer permite ușor să se găsească răspunsul $y(t)$ al sistemului de ordinul doi (la variația în treaptă unitară a semnalului de intrare) și pentru cazul $\xi = 1$ (caz care în §2.2.3 conducea la o nedeterminare și necesita derivări repetate la numărător și la numitor pentru ridicarea nedeterminării); pentru $\xi = 1$, expresia (2.271) devine:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\omega_n}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \quad (2.276)$$

$$= \frac{1}{s} - \left[\frac{s + \omega_n}{(s + \omega_n)^2} + \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \right] = \frac{1}{s} - \left[\frac{1}{s + \omega_n} + \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \right], \quad (2.276)$$

rezultând prin transformare Laplace inversă:

$$y(t) = 1 - (e^{-\omega_n t} + \omega_n t e^{-\omega_n t}) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \quad (2.277)$$

se obține astfel expresia (2.206).

• Elementul proporțional-integral (PI) este caracterizat de ecuația (2.128). Aplicând transformarea Laplace relației (2.128), cu condiții inițiale nule, se obține:

$$Y(s) = K \left(U(s) + \frac{1}{Ts} U(s) \right), \quad (2.278)$$

respectiv:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \left(1 + \frac{1}{Ts} \right). \quad (2.279)$$

Din relația (2.279) rezultă că răspunsul unui element PI la un semnal treaptă unitară se poate obține în modul următor:

$$Y(s) = K \left(1 + \frac{1}{Ts} \right) U(s) = K \left(1 + \frac{1}{Ts} \right) \frac{1}{s} = K \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{T} \frac{1}{s^2} \right). \quad (2.280)$$

Prin aplicarea transformării Laplace inverse la expresia (2.280) rezultă răspunsul indicial al elementului PI (v. fig. 2.22):

$$y(t) = K \left(1 + \frac{1}{T} t \right). \quad (2.281)$$

• Elementul proporțional-integral-derivativ (PID), după cum s-a mai menționat, are trei componente ale mărimii de ieșire $y(t)$: una proporțională cu mărimea de intrare $u(t)$, a doua proporțională cu integrala în timp, iar a treia proporțională cu derivata acesteia. Pentru elementul PID dependența mărimii de ieșire de cele trei componente ale mărimii de intrare este prezentată matematic prin relația (2.132).

În condiții inițiale nule, din expresia (2.132) se obține:

$$Y(s) = KU(s) + K \frac{1}{T_1} \frac{U(s)}{s} + KT_2 s U(s), \quad (2.282)$$

deci:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \left(1 + \frac{1}{T_1 s} + s T_2 \right). \quad (2.283)$$

Din expresia (2.283) rezultă răspunsul unui element PID la un semnal treaptă

unitară (v. fig. 2.24):

$$Y(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_1 s} + s T_2 \right) U(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_1 s} + s T_2 \right) \frac{1}{s} = K \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{T_1} \frac{1}{s^2} + T_2 \right). \quad (2.284)$$

Aplicăm la relația (2.284) transformarea Laplace inversă:

$$y(t) = K \left(1 + \frac{1}{T_1} t + T_2 \delta(t) \right). \quad (2.285)$$

• Elementul cu timp mort este caracterizat de relația (2.133). Aplicând transformarea Laplace relației (2.133), se obține:

$$Y(s) = U(s) e^{-\tau s}, \quad (2.286)$$

rezultând:

$$G_\tau(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-\tau s}. \quad (2.287)$$

Cu ajutorul funcției de transfer (2.287) se poate obține ușor răspunsul elementului cu timp mort în cazul în care mărimea de intrare are o variație în treaptă unitară:

$$Y(s) = e^{-\tau s} U(s) = e^{-\tau s} \frac{1}{s}, \quad (2.288)$$

$$y(t) = 1_+(t - \tau). \quad (2.289)$$

În tabelul 2.3 sunt prezentate funcțiile de transfer ale principalelor elemente tip ce intră în componența unui sistem automat.

2.3.3 Funcțiile de transfer ale schemelor complexe

Funcția de transfer, așa cum s-a arătat, reprezintă o expresie algebrică în domeniul complex, de cele mai multe ori sub forma unui raport de polinoame, care caracterizează funcționarea unui element sau sistem, în condiții inițiale nule.

Un mod de reprezentare a sistemului automat îl constituie schema-bloc funcțională, care evidențiază relațiile dintre diferitele blocuri funcționale ce compun sistemul. Dacă fiecare element component al sistemului este caracterizat printr-o relație intrare-ieșire, respectiv are o anumită funcție de transfer, folosind un grup de reguli de calcul ce vor fi demonstrate în prezentul paragraf, se poate determina funcția de transfer a ansamblului, respectiv a unui element echivalent cu întregul ansamblu; echivalența constă în faptul că pentru același semnal aplicat la intrarea ansamblului și la intrarea elementului echivalent, răspunsul ansamblului și elementului vor fi identice.

Relațiile de calcul menționate sunt foarte simple și se referă la cele trei tipuri de conexiuni principale ale elementelor sistemelor automate: conexiunea serie, conexiunea paralel, conexiunea cu reacție. De asemenea aceste reguli permit să se determine ușor func-

Tab.2.3 Funcțiile de transfer ale principalelor tipuri de elemente utilizate în automatică.

Nr. crt.	Tipul elementului	Ecuția diferențială	Funcția de transfer
1.	Element proporțional	$y(t) = Ku(t)$	$G(s) = K$
2.	Element integrator	$y(t) = K \int u dt$	$G(s) = \frac{K}{s}$
3.	Element derivativ	$y(t) = K \frac{du}{dt}$	$G(s) = Ks$
4.	Element cu timp mort	$y(t) = u(t - \tau)$	$G(s) = e^{-\tau s}$
5.	Element de întârziere de ordinul întâi	$T \frac{dy}{dt} + y = Ku(t)$	$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$
6.	Element cu timp mort și întârziere de ordinul întâi	$T \frac{dy}{dt} + y = Ku(t - \tau)$	$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{Ts + 1}$
7.	Element derivativ real de ordinul zero	$T \frac{dy}{dt} + y = K \frac{du}{dt}$	$G(s) = \frac{Ks}{Ts + 1}$
8.	Element derivativ real de ordinul unu	$T \frac{dy}{dt} + y = K(u + T_0 \frac{du}{dt})$	$G(s) = \frac{K(1 + T_0 s)}{1 + Ts}$
9.	Element de întârziere de ordinul doi (oscilant)	$T_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + T \frac{dy}{dt} + y = Ku(t)$	$G(s) = \frac{K}{T_0 s^2 + T_1 s + 1}$
10.	Element cu timp mort și întârziere de ordinul doi	$T_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + T \frac{dy}{dt} + y = Ku(t - \tau)$	$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{T_0 s^2 + T_1 s + 1}$
11.	Element de anticipare de ordinul întâi (element proporțional-derivativ)	$y(t) = K(u + T \frac{du}{dt})$	$G(s) = K(1 + Ts)$
12.	Element de anticipare de ordinul doi (element PDD ₂)	$y(t) = K(u + T_1 \frac{du}{dt} + T_2^2 \frac{d^2 u}{dt^2})$	$G(s) = K(1 + T_1 s + T_2^2 s^2)$
13.	Element proporțional-integral	$y(t) = K(u + \frac{1}{T} \int u dt)$	$G(s) = K \frac{1 + Ts}{Ts}$
14.	Element proporțional-integral-derivativ	$y(t) = K(u + \frac{1}{T_1} \int u dt + T_2 \frac{du}{dt})$	$G(s) = K \frac{T_1 T_2 s^2 + T_1 s + 1}{s T_1}$

ția de transfer a sistemului închis și funcția de transfer a elementului de comparație când este cunoscută funcția de transfer a sistemului deschis (cu bucla principală întreruptă).

Pentru ca regulile de calcul, ce urmează a fi prezentate să poată fi aplicate pentru reducerea schemelor-bloc a sistemelor automate este necesar să fie respectată condiția de unidirecționalitate a elementelor sistemelor automate (elementele asigură transferul semnalelor într-un singur sens) precum și condiția ca acestea să fie caracterizate de o mărime de intrare și una de ieșire.

2.3.3.1 Conexiunea serie (cascadă)

Mai multe elemente sunt legate în serie, dacă semnalul de ieșire al fiecăruia este aplicat la intrarea elementului următor (v. fig. 2.35). Fie funcțiile de transfer ale elementelor componente, definite prin:

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)}, \quad G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)}, \quad G_3(s) = \frac{Y_3(s)}{Y_2(s)}, \quad \dots, \quad G_n(s) = \frac{Y_n(s)}{Y_{n-1}(s)}. \quad (2.290)$$

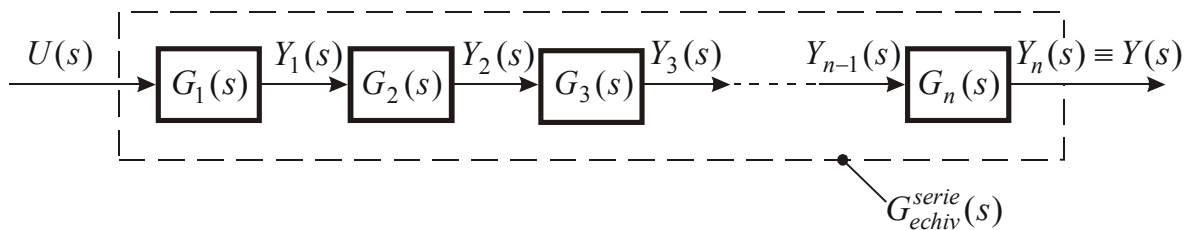


Fig.2.35 Conexiunea în serie a elementelor.

În acest caz se caută funcția de transfer a întregului ansamblu, definită ca:

$$G_{echiv}^{serie}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}. \quad (2.291)$$

Din relațiile (2.290) și (2.291) rezultă:

$$\begin{aligned} G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s) \cdot \dots \cdot G_n(s) &= \\ &= \frac{Y_1(s)}{U(s)} \cdot \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} \cdot \frac{Y_3(s)}{Y_2(s)} \cdot \dots \cdot \frac{Y_n(s)}{Y_{n-1}(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_{echiv}^{serie}(s), \end{aligned} \quad (2.292)$$

sau:

$$G_{echiv}^{serie}(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s), \quad \text{unde } i \in (1, \dots, n). \quad (2.293)$$

Funcția de transfer a unui ansamblu de elemente legate în serie este deci egală cu produsul funcțiilor de transfer ale elementelor respective.

2.3.3.2 Conexiunea paralel

Mai multe elemente sunt legate în paralel dacă primesc același semnal de intrare, iar semnalele de ieșire se însumează (v. fig. 2.36). Cunoșcând funcțiile de transfer ale elementelor componente, definite prin:

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)}, \quad G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)}, \quad G_3(s) = \frac{Y_3(s)}{U(s)}, \dots, \quad G_n(s) = \frac{Y_n(s)}{U(s)}, \quad (2.294)$$

se caută funcția de transfer a întregului ansamblu, definită ca:

$$G_{echiv}^{paralel}(s) = \frac{Y_T(s)}{U(s)}. \quad (2.295)$$

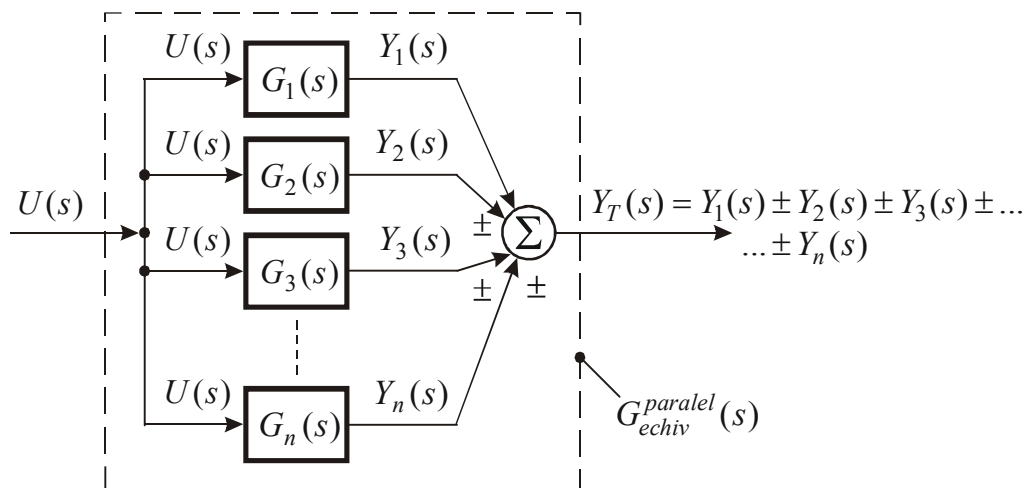


Fig.2.36 Conexiunea în paralel a elementelor.

Deoarece:

$$y_T = y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm \dots \pm y_n, \quad (2.296)$$

rezultă:

$$Y_T(s) = Y_1(s) \pm Y_2(s) \pm Y_3(s) \pm \dots \pm Y_n(s) \quad (2.297)$$

și înlocuind în expresia (2.295) se obține:

$$G_{echiv}^{paralel}(s) = \frac{Y_1(s) \pm Y_2(s) \pm Y_3(s) \pm \dots \pm Y_n(s)}{U(s)}, \quad (2.298)$$

respectiv, având în vedere relația (2.294), rezultă:

$$G_{echiv}^{paralel}(s) = G_1(s) \pm G_2(s) \pm G_3(s) \pm \dots \pm G_n(s), \quad (2.299)$$

sau:

$$G_{echiv}^{paralel}(s) = \sum_{i=1}^n (\pm) G_i(s), \quad \text{unde } i \in (1, \dots, n). \quad (2.300)$$

Funcția de transfer a unui ansamblu de elemente legate în paralel este deci egală cu suma funcțiilor de transfer ale elementelor respective.

2.3.3.3 Conexiunea cu reacție

În cadrul conexiunii cu reacție, semnalul de la ieșirea unui element, având funcția de

transfer $G_1(s)$, este adus pe o cale inversă de transmitere înapoi spre intrarea elementului, direct sau prin intermediul unui alt element având funcția de transfer $G_2(s)$ (v. fig. 2.37). Reacția poate fi *pozitivă* sau *negativă*, după cum semnalul adus înapoi la intrare se însușmează sau se scade din semnalul de intrare aplicat din exterior.

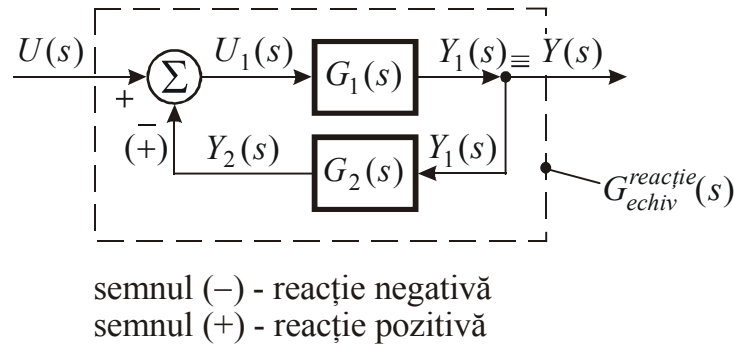


Fig.2.37 Conexiunea cu reacție.

Cunoscând funcțiile de transfer ale elementelor componente, definite ca:

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)}, \quad G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} \quad (2.301)$$

și având în vedere că în cazul unei reacții negative:

$$U_1(s) = U(s) - Y_2(s), \quad (2.302)$$

se caută funcția de transfer a întregului ansamblu definită ca:

$$G_{echiv}^{reactie}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \equiv \frac{Y_1(s)}{U(s)}. \quad (2.303)$$

Din relația (2.302) se obține:

$$U(s) = U_1(s) + Y_2(s) \quad (2.304)$$

și înlocuind în expresia (2.303) și împărțind la numărător și numitor cu $U_1(s)$ rezultă:

$$G_{echiv}^{reactie}(s) = \frac{\frac{Y(s)}{U_1(s)}}{1 + \frac{Y_2(s)}{U_1(s)}}. \quad (2.305)$$

Din relația (2.301) se obține:

$$Y_2(s) = Y_1(s)G_2(s) \quad (2.306)$$

și înlocuind în expresia (2.305) rezultă:

$$G_{echiv}^{reactie}(s) = \frac{\frac{Y(s)}{U_1(s)}}{1 + \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} G_2(s)}, \quad (2.307)$$

respectiv, având în vedere prima relație din (2.301), se obține:

$$G_{echiv}^{reactie}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}. \quad (2.308)$$

Pentru cazul unei reacții pozitive se obține:

$$G_{echiv}^{reactie}(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)}. \quad (2.309)$$

În cazul unei reacții directe, când mărimea $Y(s)$ ar fi adusă direct la elementul de comparație de la intrare, fără a mai fi instalat elementul de pe calea de reacție din figura 2.37, funcția de transfer a ansamblului se obține din relația (2.308) sau (2.309) făcând $G_2(s) = 1$ (întrucât funcția de transfer a unei legături directe este egală cu unitatea, mărimile de intrare și ieșire pentru o asemenea legătură fiind identice) și rezultă deci:

$$G_{echiv}^{reactie}(s) = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)}. \quad (2.310)$$

În cazul unor legături inverse (reacții) multiple (v. fig. 2.38,a) se obține schema echivalentă din figura 2.38,b, pentru care se aplică relațiile de calcul (2.308) și (2.309) a funcției de transfer echivalente.

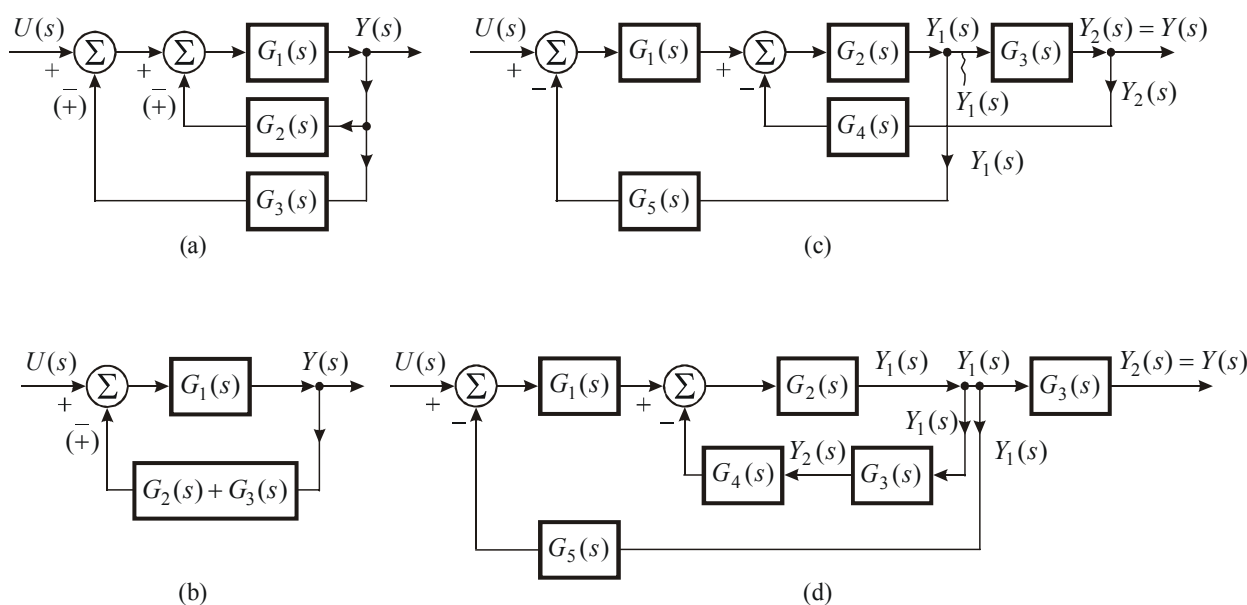


Fig.2.38 Conexiuni cu reacții multiple și cu reacții încrucișate: schema unui sistem automat cu reacții multiple (a); schema unui sistem automat echivalent în care reacțiile multiple au fost înlocuite cu o reacție unică (b); schema unui sistem automat în care apar reacții ce se întrepătrund (reacții încrucișate) (c); schema unui sistem automat echivalent la care s-a înlăturat întrepătrunderea reacțiilor (d).

În unele scheme de elemente apar reacții care se întrepătrund (reacții încrucișate), cum este cazul de exemplu în figura 2.38,c. În asemenea cazuri, ținând seama de liniaritatea sistemului și a elementelor, unele elemente pot fi considerate de mai multe ori, pe diferite trasee ale semnalelor, astfel încât să rezulte reacții care nu se mai întrepătrund și deci să poată fi aplicate relațiile stabilite la acest punct, noua schemă obținută fiind echivalentă cu cea inițială. În acest sens, schema de elemente din figura 2.38,d este echivalentă cu cea din figura 2.38,c. În schema inițială, la intrarea elementului având funcția de transfer $G_4(s)$ este aplicat semnalul $Y_2(s)$, obținut de la ieșirea elementului cu funcția de transfer $G_3(s)$, căruia i se aplică la intrare semnalul $Y_1(s)$; în a doua schemă, în serie cu elementul cu funcția de transfer $G_4(s)$ se introduce un nou element cu funcția de transfer $G_3(s)$, ceea ce permite ca reacția respectivă să pornească din punctul în care se află semnalul $Y_1(s)$, înlăturându-se astfel întrepătrunderea celor două reacții (reacția prin elementul având funcția de transfer $G_5(s)$ rămâne neschimbată). Pentru schema prezentată în figura 2.38,d se pot aplica relațiile stabilite la acest punct.

2.3.3.4 Funcția de transfer a sistemului deschis și a sistemului închis

Pentru un sistem automat complex, format dintr-o reuniune de elemente situate pe legătura directă (sau principală), se poate calcula o funcție de transfer globală (sau echivalentă) a acestora, aplicând relațiile stabilite mai înainte. Această funcție se notează cu $G(s)$ și reprezintă *funcția de transfer a sistemului automat deschis* sau *funcția de transfer a legăturii directe* (sau *principale*); ea înglobează deci, funcțiile de transfer ale tuturor elementelor de pe legătura directă, mai puțin elementul de comparație (v. fig. 2.39):

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{\varepsilon(s)} = G_{echiv}(s), \quad (2.311)$$

expresie în care $G_{echiv}(s)$ reprezintă funcția de transfer echivalentă a elementelor situate pe calea directă (exceptând elementul de comparație).

Funcția de transfer a sistemului automat închis sau *cu legătură inversă* se notează cu $G_0(s)$ (v. fig. 2.39,a,b) și se definește ca:

$$G_0(s) \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)}. \quad (2.312)$$

Folosind relațiile (2.308) și (2.309) se poate determina expresia lui $G_0(s)$ în func-

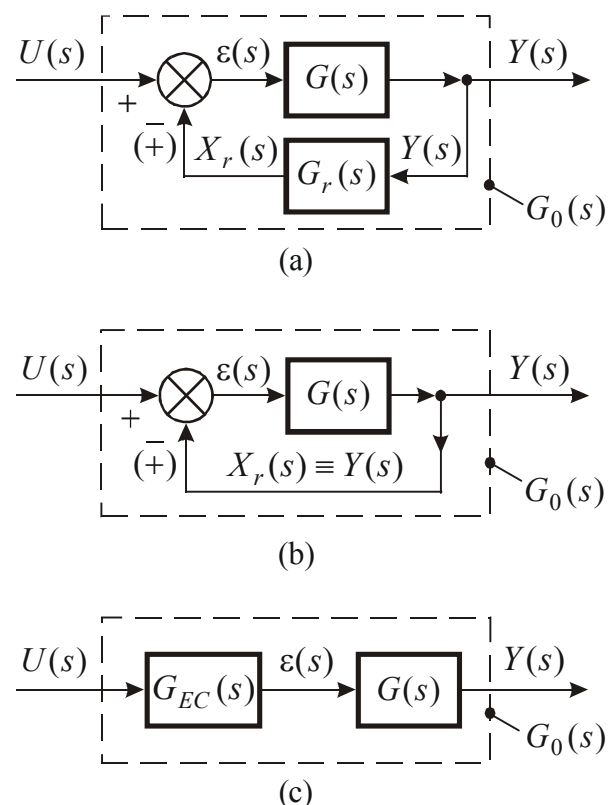


Fig.2.39 Schemele-bloc ale sistemului automat închis și sistemului automat deschis: schema-bloc a unui sistem automat închis cu reacție neunitară (a); schema-bloc a unui sistem automat închis, cu reacție unitară (directă) (b); schema-bloc echivalentă a unui sistem automat închis, în raport cu funcțiile de transfer ale sistemului deschis și a elementului de comparație (c).

ție de $G(s)$ și $G_r(s)$ (funcția de transfer a elementului (elementelor) de pe legătura inversă (sau legătura de reacție), v. fig. 2.39,a):

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)G_r(s)}. \quad (2.313)$$

Considerându-se un sistem cu reacție directă (v. fig. 2.39,b), se poate scrie relația:

$$\varepsilon(s) = U(s) - X_r(s) = U(s) - Y(s). \quad (2.314)$$

Se împarte fiecare termen prin $Y(s)$ și se obține:

$$\frac{\varepsilon(s)}{Y(s)} = \frac{U(s)}{Y(s)} - 1, \quad (2.315)$$

sau:

$$\frac{1}{G(s)} = \frac{1}{G_0(s)} - 1 = \frac{1 - G_0(s)}{G_0(s)}. \quad (2.316)$$

Rezultă:

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)} \quad (2.317)$$

și:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}. \quad (2.318)$$

Relațiile (2.317) și (2.318) permit să se calculeze $G(s)$, respectiv $G_0(s)$ (una în funcție de cealaltă), în cazul unui sistem cu reacție principală directă.

2.3.3.5 Funcția de transfer a elementului de comparație

Considerând sistemul cu reacție principală directă din figura 2.39,b, pentru elementul de comparație se poate defini o funcție de transfer $G_{EC}(s)$ de forma:

$$G_{EC}(s) = \frac{\varepsilon(s)}{U(s)}, \quad (2.319)$$

Având în vedere că:

$$\varepsilon(s) = U(s) - Y(s), \quad (2.320)$$

respectiv:

$$U(s) = \varepsilon(s) + Y(s), \quad (2.321)$$

prin înlocuirea în expresia (2.319) se obține:

$$G_{EC}(s) = \frac{\varepsilon(s)}{\varepsilon(s) + Y(s)} \quad (2.322)$$

și împărțind cu $\varepsilon(s)$ la numărător și la numitor rezultă:

$$G_{EC}(s) = \frac{1}{1 + \frac{Y(s)}{\varepsilon(s)}}. \quad (2.323)$$

Având în vedere expresia (2.311), relația anterioară devine:

$$G_{EC}(s) = \frac{1}{1 + G(s)}. \quad (2.324)$$

Comparând relația (2.318) cu (2.324), se poate scrie:

$$G_0(s) = G(s)G_{EC}(s), \quad (2.325)$$

rezultând schema echivalentă din figura 2.39,c.

Dacă pe reacția principală se găsește un element (de obicei un traductor ca în figura 2.40,a) cu funcția de transfer $G_4(s)$, atunci sistemul automat respectiv poate fi echivalat cu un sistem cu reacție principală directă, introducând însă anumite elemente suplimentare, cu păstrarea echivalenței față de sistemul inițial.

Astfel, aplicând o relație de forma (2.308) la schema din figura 2.40,a, se obține pentru sistemul închis o funcție de transfer de forma:

$$G_0(s) = \frac{\Delta Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)G_4(s)}. \quad (2.326)$$

Intercalând între semnalul $U(s)$ și elementul de comparație două elemente legate în serie (v. fig. 2.40,b), cu funcțiile de transfer $G_4(s)$ și $G_5(s) = 1/G_4(s)$, sistemul din figu-

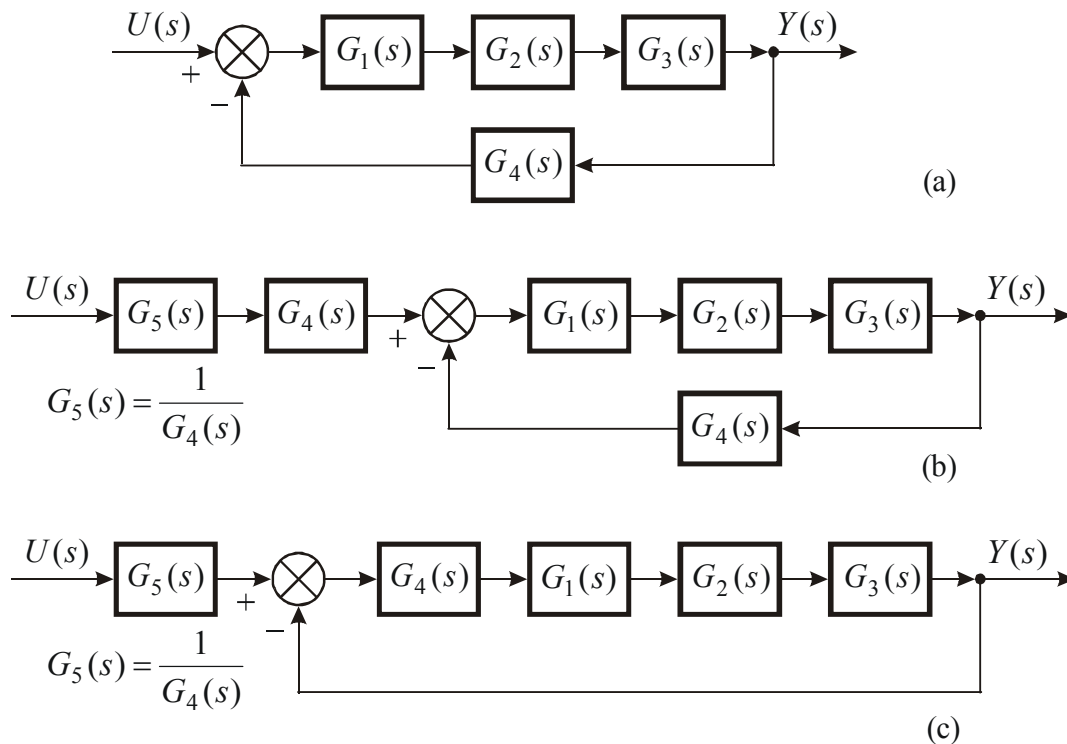


Fig.2.40 Schema-bloc a unui sistem automat cu reacție neunitară transformat într-un sistem cu reacție unitară.

ra 2.40,b este echivalent cu cel inițial, deoarece funcția de transfer a ansamblului celor două elemente suplimentare, legate în serie, este egală cu unitatea:

$$G_4(s)G_5(s) = G_4(s) \frac{1}{G_4(s)} = 1. \quad (2.327)$$

Ca urmare, funcția de transfer a întregului ansamblu reprezentat în figura 2.40,b, notată cu $G_T(s)$, are expresia:

$$G_T(s) = \frac{\Delta Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{G_4(s)} G_4(s) \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}, \quad (2.328)$$

deci o expresie identică cu (2.326).

Pe de altă parte, expresia (2.328) permite ca schema sistemului (cu păstrarea echivalenței menționate) să fie prezentată sub forma din figura 2.40,c, în care reacția principală este directă. Astfel, pentru această schemă funcția de transfer a întregului ansamblu are forma:

$$G_T(s) = \frac{\Delta Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{G_4(s)} \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}, \quad (2.329)$$

deci identică cu relațiile (2.326) și (2.328).

Relațiile stabilite permit să se treacă ușor de la o schemă funcțională cu element pe calea de reacție, la o schemă echivalentă cu reacție directă, acest tip de scheme fiind, în multe cazuri, mai avantajoase pentru efectuarea calculelor. În acest scop, pornind de la schema inițială (v. fig. 2.40,a), este necesar ca elementul de pe calea de reacție să fie introdus pe calea directă, iar înaintea elementului de comparație să se introducă un element având o funcție de transfer egală cu inversa funcției de transfer a elementului (v. fig. 2.40,c); prezența acestui element nu modifică mult calculele deoarece în multe cazuri funcțiile de transfer ale elementelor plasate de obicei pe calea de reacție (de regulă tractoare) pot fi approximate prin niște constante.

În tabelul 2.4 sunt prezentate, în mod sintetic, câteva reguli care stau la baza transformării schemelor funcționale.

Pentru cazul în care sistemul are mai multe intrări, fiecare dintre acestea se tratează independent. Ieșirea sistemului se obține ca sumă a efectelor semnalelor aplicate la intrările sistemului.

Pentru sistemele complexe, care conțin mai multe bucle și mai multe intrări, se poate obține o schemă echivalentă, a carei funcție de transfer se scrie pe baza relațiilor deja stabilite. Procedura de reducere a schemelor funcționale complexe poate fi prezentată sub forma următorului algoritm, care are la bază transformările din tabelul 2.4:

1. se combină toate elementele legate în serie – transformarea 1;
2. se combină toate elementele legate în paralel – transformarea 2;
3. se combină toate buclele interioare (secundare) – transformările 3, 4 și 5;
4. se deplasează punctele de sumare la stânga și punctele de intersecție la dreapta buclei principale – transformările 6 și 8;
5. se repetă etapele 1÷4 până ce a fost obținută o schemă echivalentă pentru o intrare particulară;
6. se repetă etapele 1÷5 pentru fiecare intrare a sistemului.

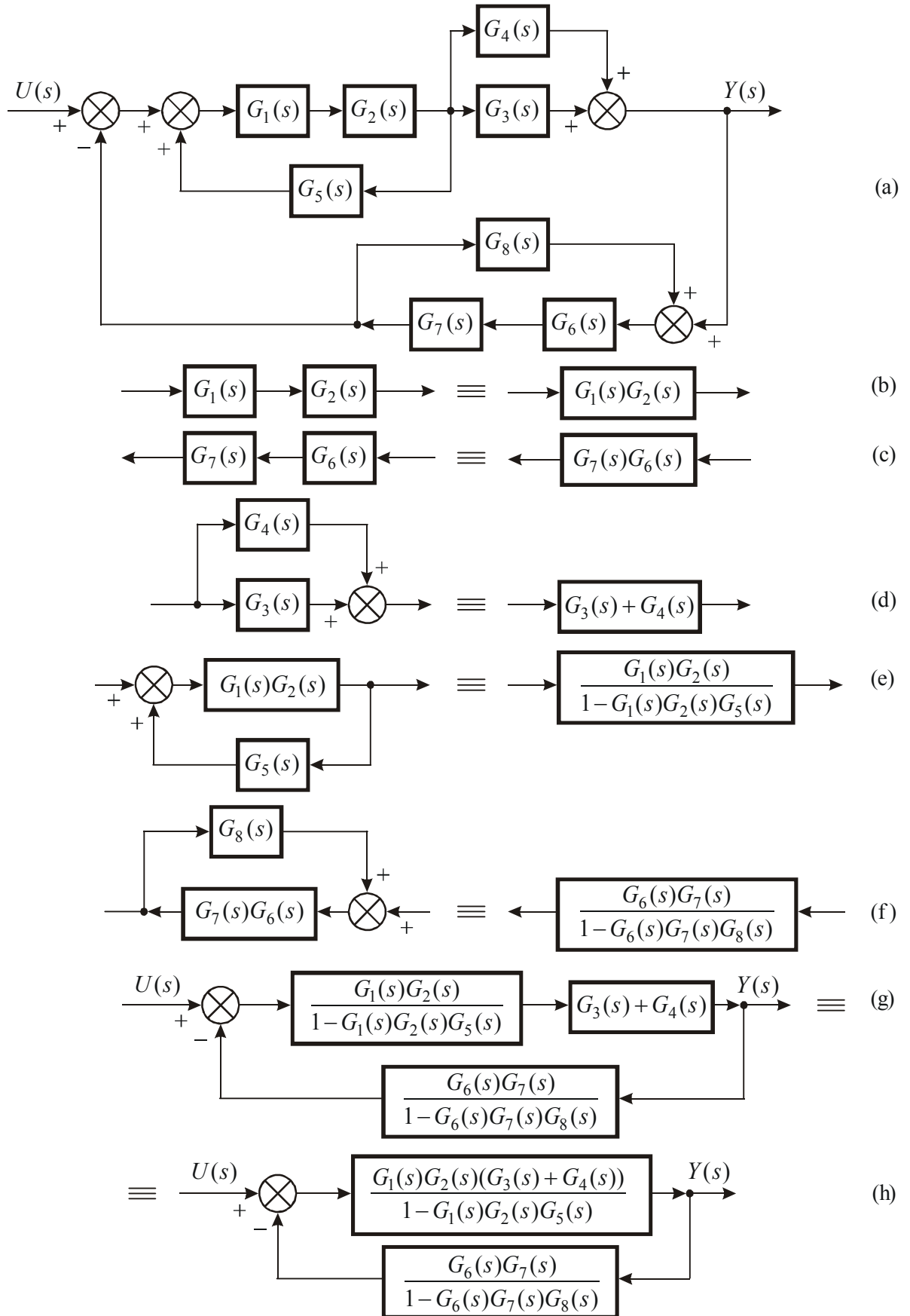


Fig.2.41 Schema-bloc a unui sistem automat prevăzut cu mai multe reacții locale: schema generală (a); echivalența a două elemente legate în serie (b), (c); echivalența a două elemente legate în paralel (d); schema echivalentă a unui sistem cu reacție pozitivă (e), (f); schemele simplificate ale sistemului (g), (h).

Pentru a se ilustra procedura de obținere a unei scheme echivalente, corespunzătoare unei scheme funcționale date, se consideră structura din figura 2.41.

Pentru această schemă se obține ușor expresia generală a funcției de transfer efectuând transformările din figurile 2.41,a,b,c,d,e,f,g,h:

$$G_0(s) = \frac{\frac{G_1(s)G_2(s)(G_3(s) + G_4(s))}{1 - G_1(s)G_2(s)G_5(s)}}{1 + \frac{G_1(s)G_2(s)(G_3(s) + G_4(s))}{1 - G_1(s)G_2(s)G_5(s)} \cdot \frac{G_6(s)G_7(s)}{1 - G_6(s)G_7(s)G_8(s)}}, \quad (2.330)$$

sau:

$$G_0(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)(G_3(s) + G_4(s))(1 - G_6(s)G_7(s)G_8(s))}{(1 - G_1(s)G_2(s)G_5(s))(1 - G_6(s)G_7(s)G_8(s)) + G_1(s)G_2(s) \cdot \dots \cdot G_6(s)G_7(s)(G_3(s) + G_4(s))}. \quad (2.331)$$

Folosind aceleași reguli de reducere a schemelor-bloc se pot găsi scheme echivalente pentru funcții de transfer date. Astfel, pentru un element de ordinul întâi având funcția de transfer $G(s) = 1/(s + a)$ se poate deduce o schemă echivalentă pornind de la relațiile:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s + a}, \quad Y(s) = \frac{U(s)}{s + a}, \quad (2.332)$$

sau:

$$Y(s) = \frac{1}{s}(U(s) - aY(s)). \quad (2.333)$$

Schema echivalentă corespunzătoare unui element de întârziere de ordinul întâi, cu funcția de transfer $G(s)$, este prezentată în figura 2.42.

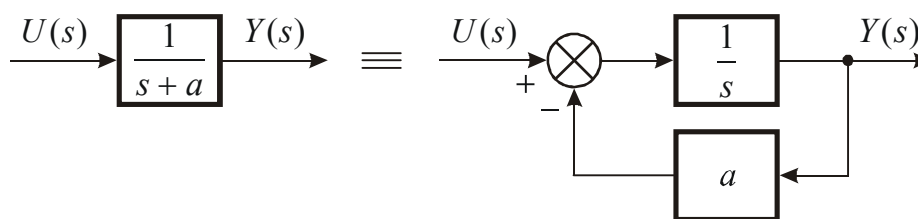


Fig.2.42 Schema echivalentă a unui sistem de ordinul întâi.

2.3.4 Determinarea erorii staționare cu ajutorul funcției de transfer a sistemului deschis

Eroarea sistemului în regim staționar ε_{st} se poate obține direct cu ajutorul funcției de transfer a sistemului deschis $G(s)$, în condițiile în care reacția este unitară ($G_r(s) = 1$).

La sistemele liniare și continue, fără timp mort, funcția de transfer a sistemului deschis $G(s)$, definită în relația (2.311) este reprezentată prin raportul a două polinoame în s , notate în continuare cu $K(s)$ și $D(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{K(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^r + a_1 s^{r-1} + a_2 s^{r-2} + \dots + a_{r-1} s + a_r}. \quad (2.334)$$

În practică întotdeauna:

$$r > m, \quad (2.335)$$

deoarece elementele fizice din care este format un sistem automat introduce întârzieri în transmiterea semnalelor, iar la elementele de întârziere, după cum s-a menționat, gradul numitorului funcției de transfer este mai mare decât gradul numărătorului.

Expresia (2.334) poate fi pusă sub o formă care să dea direct indicațiile necesare asupra erorii staționare a sistemului automat. În primul rând, se pune în evidență prezența ca factor comun la numitor a variabilei complexe s la o anumită putere, deci numărul de poli în origine: dacă $a_r = 0$, atunci apare s factor comun, dacă $a_r = 0$ și $a_{r-1} = 0$, atunci apare s^2 factor comun, iar dacă $a_r \neq 0$ și $a_{r-1} \neq 0$, atunci nu apare s factor comun (sau apare s^0 în factor). În al doilea rând, după separarea factorului comun la numitor, se împart (și se înmulțesc) numărătorul și numitorul cu termenii care nu conțin variabila s , astfel încât, apărând un coeficient suplimentar, termenii care nu conțin variabila s devin egali cu unitatea.

Rezultă astfel:

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{\varepsilon(s)} &= \frac{K(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^r + a_1 s^{r-1} + a_2 s^{r-2} + \dots + a_{r-1} s + a_r} = \\ &= \frac{K_a}{s^\alpha} \frac{Q_m(s)}{P_n(s)} = \frac{K_a}{s^\alpha} \frac{q_0 s^m + q_1 s^{m-1} + q_2 s^{m-2} + \dots + q_{m-1} s + 1}{p_0 s^n + p_1 s^{n-1} + p_2 s^{n-2} + \dots + p_{n-1} s + 1}, \end{aligned} \quad (2.336)$$

deci:

$$Q_m(0) = 1 \quad (2.337)$$

și:

$$P_n(0) = 1. \quad (2.338)$$

Factorul K_a este denumit *factor total de amplificare* al sistemului, iar α reprezintă numărul de poli în origine ai funcției de transfer pentru calea directă. Valoarea α definește tipul sistemului. Astfel, sistemul pentru care $\alpha = 0$, este de tipul zero, cel pentru care $\alpha = 1$, de tipul unu, ș.a.m.d. În practică α are valorile 0, 1 sau 2; sistemele cu $\alpha > 2$ nu sunt stabile (problemă ce va fi discutată mai târziu).

Ținând seama de tipul sistemului și de tipul semnalului aplicat la intrare, pornind de la expresia (2.336) a funcției de transfer a sistemului deschis se pot defini coeficienții de eroare și eroarea în regim staționar a sistemului. Astfel, având în vedere relațiile (2.319) și (2.324), în ipoteza reacției principale directe, se obține:

$$\varepsilon(s) = G_{EC}(s)U(s) = \frac{1}{1 + G(s)}U(s) = U(s) \frac{1}{1 + \frac{K_a}{s^\alpha} \frac{Q_m(s)}{P_n(s)}} \quad (2.339)$$

și aplicând teorema valorii finale, rezultă:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} [s \varepsilon(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s U(s) \frac{1}{1 + \frac{K_a}{s^\alpha} \frac{Q_m(s)}{P_n(s)}} \right]. \quad (2.340)$$

• La sistemele cu $\alpha = 0$, în cazul aplicării unui semnal de intrare treaptă unitară:

$$u(t) = 1_+(t), \quad (2.341)$$

deci:

$$U(s) = \frac{1}{s} \quad (2.342)$$

și din expresia (2.340) se obține eroarea staționară:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{s} \frac{1}{1 + K_a \frac{Q_m(s)}{P_n(s)}} \right] = \frac{1}{1 + K_a}, \quad (2.343)$$

deoarece:

$$\frac{Q_m(s)}{P_n(s)} = 1, \quad (2.344)$$

conform cu relațiile (2.337) și (2.338).

Aplicând la intrarea acelorasi sisteme un semnal treaptă unitară:

$$u(t) = t, \quad (2.345)$$

deci:

$$U(s) = \frac{1}{s^2}, \quad (2.346)$$

se obține din expresia (2.340):

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + K_a \frac{Q_m(s)}{P_n(s)}} \right] \rightarrow \infty, \quad (2.347)$$

ceea ce arată că în regim staționar răspunsul $y(t)$ va fi o rampă cu un coeficient unghiular diferit de cel al rampei $u(t) = t$ aplicate la intrare și deci, cu creșterea timpului, diferența ε_{st} dintre $u(t)$ și $y_{st}(t)$ va tinde către infinit.

Un rezultat analog se obține și în cazul aplicării unui semnal de intrare parabolă unitară:

$$u(t) = \frac{t^2}{2}, \quad (2.348)$$

deci:

$$U(s) = \frac{1}{s^3}. \quad (2.349)$$

• La sistemele cu $\alpha = 1$, aplicarea unui semnal de intrare treaptă unitară:

$$u(t) = 1_+(t), \quad U(s) = \frac{1}{s},$$

conduce la următoarea expresie pentru relația (2.340):

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{s} \frac{1}{1 + \frac{K_a}{s} \frac{Q_m(s)}{P_n(s)}} \right] = 0, \quad (2.350)$$

având în vedere și (2.344).

Din expresia (2.350) rezultă că sistemele cu $\alpha = 1$ au eroarea staționară nulă la semnale de intrare treaptă unitară.

Aplicând la intrarea acestora sisteme un semnal rampă unitară:

$$u(t) = t, \quad U(s) = \frac{1}{s^2},$$

din relația (2.340) se obține:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + \frac{K_a}{s} \frac{Q_m(s)}{P_n(s)}} \right] = \frac{1}{K_a}. \quad (2.351)$$

Dacă la intrarea acestor sisteme se aplică un semnal parabolă unitară:

$$u(t) = \frac{t^2}{2}, \quad U(s) = \frac{1}{s^3},$$

relația (2.340) conduce la:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{s^3} \frac{1}{1 + \frac{K_a}{s} \frac{Q_m(s)}{P_n(s)}} \right] \rightarrow \infty, \quad (2.352)$$

ceea ce arată că în regim staționar răspunsul $y(t)$ va fi o parabolă diferită de parabola unitară a semnalului de intrare și deci, cu creșterea timpului, diferența ε_{st} între $u(t)$ și $y_{st}(t)$ va tinde către infinit.

- La sistemele de tip doi ($\alpha = 2$) aplicarea unui semnal treaptă unitară:

$$u(t) = 1_+(t), \quad U(s) = \frac{1}{s},$$

conduce pentru (2.340) la o expresie:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{s} \frac{1}{1 + \frac{K_a}{s^2} \frac{Q_m(s)}{P_n(s)}} \right] = 0. \quad (2.353)$$

aplicarea unui semnal rampă unitară:

$$u(t) = t, \quad U(s) = \frac{1}{s^2},$$

conduce la:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + \frac{K_a}{s^2} \frac{Q_m(s)}{P_n(s)}} \right] = 0, \quad (2.354)$$

iar aplicarea unui semnal parabolă unitară:

$$u(t) = \frac{t^2}{2}, \quad U(s) = \frac{1}{s^3},$$

conduce la:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{s^3} \frac{1}{1 + \frac{K_a}{s^2} \frac{Q_m(s)}{P_n(s)}} \right] = \frac{1}{K_a}. \quad (2.355)$$

Rezultatele obținute pentru diferite valori ale lui α (diverse tipuri de sisteme) și diferite tipuri de semnale aplicate la intrare sunt prezentate în tabelul 2.5.

Se constată că pentru fiecare valoare α există un singur tip de semnal de intrare pentru care eroarea staționară este finită și diferită de zero; în aceste cazuri, valoarea erorii staționare variază invers proporțional cu factorul total de amplificare.

În tabelul 2.5 sunt reprezentate și constantele de eroare (coeficienții K_P , K_V , K_A) și care se pot defini astfel:

Tab.2.5 Valorile erorii staționare și coeficienților de eroare obținute pentru diferite tipuri de sisteme și de semnale aplicate la intrare.

Intrare	Treaptă unitară		Rampă unitară		Parabolă unitară	
Tipul sistemului	K_P	Eroarea staționară	K_V	Eroarea staționară	K_A	Eroarea staționară
Tip 0 ($\alpha = 0$)	K_a	$\frac{1}{1 + K_P}$	0	∞	0	∞
Tip 1 ($\alpha = 1$)	∞	0	K_a	$\frac{1}{K_V}$	0	∞
Tip 2 ($\alpha = 2$)	∞	0	∞	0	K_a	$\frac{1}{K_A}$

• Pentru un semnal de intrare treaptă unitară se definește *coeficientul de eroare de poziție* K_P sub forma:

$$K_P = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{K_a}{s^\alpha} \frac{Q_m(s)}{P_n(s)} \right] = \begin{cases} K_a \frac{Q_m(0)}{P_n(0)} = K_a, & \text{pentru } \alpha = 0, \\ \infty, & \text{pentru } \alpha > 0. \end{cases} \quad (2.356)$$

• Pentru un semnal de intrare rampă unitară se definește *coeficientul de eroare de viteză*:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} [sG(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{K_a}{s^{\alpha-1}} \frac{Q_m(s)}{P_n(s)} \right] = \begin{cases} 0, & \text{pentru } \alpha = 0, \\ K_a \frac{Q_m(0)}{P_n(0)} = K_a, & \text{pentru } \alpha = 1, \\ \infty, & \text{pentru } \alpha > 1. \end{cases} \quad (2.357)$$

• *Coeficientul de eroare de accelerație* se definește pentru un sistem cu reacție unitară la intrarea căruia se aplică un semnal de intrare parabolă unitară:

$$K_A = \lim_{s \rightarrow 0} [s^2 G(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{K_a}{s^{\alpha-2}} \frac{Q_m(s)}{P_n(s)} \right] = \begin{cases} 0, & \text{pentru } \alpha = 0, 1, \\ K_a \frac{Q_m(0)}{P_n(0)} = K_a, & \text{pentru } \alpha = 2, \\ \infty, & \text{pentru } \alpha > 2. \end{cases} \quad (2.358)$$

Cunoașterea coeficienților de eroare ușor calculabili din funcția de transfer a sistemului deschis permite calculul erorii în regim staționar.

Rezultatele din tabelul 2.5 sunt aplicabile numai sistemelor cu reacție unitară. Aceste rezultate pot fi extinse și la sisteme cu reacție neunitară însă stabile. Astfel, dacă $G_0(s)$ reprezintă funcția de transfer a sistemului închis iar $G_{0i}(s)$ funcția de transfer ideală (a

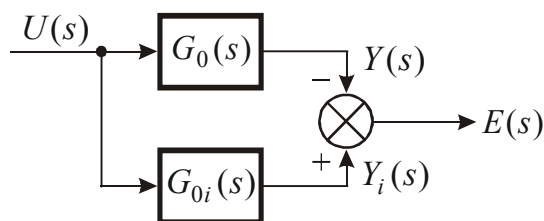


Fig.2.43 Schema pentru calculul erorii unui sistem automat.

sistemului care realizează ieșirea dorită), eroarea se definește ca fiind diferența între cele două mărimi $y_i(t)$ și $y(t)$ obținute la ieșirea sistemelor automate cu funcțiile de transfer $G_0(s)$ și $G_{0i}(s)$ (v. fig. 2.43).

Eroarea staționară în acest caz se calculează cu ajutorul relației:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} [sE(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \{s[Y_i(s) - Y(s)]\} = \lim_{s \rightarrow 0} \{sU(s)[G_{0i}(s) - G_0(s)]\}, \quad (2.359)$$

iar coeficienții de eroare pentru intrare treaptă, rampă și parabolă unitară se calculează cu relațiile:

$$K'_P = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} [G_{0i}(s) - G_0(s)]}, \quad (2.360)$$

$$K'_V = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [G_{0i}(s) - G_0(s)]}, \quad (2.361)$$

$$K'_A = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} [G_{0i}(s) - G_0(s)]}. \quad (2.362)$$

Ținând seama de relația (2.359) și de definiția coeficienților de eroare K'_P , K'_V , K'_A , eroarea staționară pentru un sistem cu reacție neunitară se calculează cu relațiile:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{st} &= \frac{1}{K'_P} - \text{pentru intrare treaptă unitară,} \\ \varepsilon_{st} &= \frac{1}{K'_V} - \text{pentru intrare rampă unitară,} \\ \varepsilon_{st} &= \frac{1}{K'_A} - \text{pentru intrare parabolă unitară.} \end{aligned} \quad (2.363)$$

Pentru a stabili o relație între coeficienții de eroare în general, dați prin relațiile (2.360), (2.361), (2.362) și coeficienții de eroare pentru sistemul cu reacție unitară, se consideră că sistemul dorit are funcția de transfer egală cu unitatea $G_{0i}(s) = 1$ iar sistemul real are reacția unitară:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}.$$

Ținând seama de aceste ipoteze și de definiția coeficienților de eroare, se obține:

$$K'_P = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1 + G(s)} \right]} = 1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1 + K_P, \quad (2.364)$$

$$K'_V = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{s} \frac{1}{1 + G(s)} \right]} = \lim_{s \rightarrow 0} [sG(s)] = K_V, \quad (2.365)$$

$$K'_A = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + G(s)} \right]} = \lim_{s \rightarrow 0} [s^2 G(s)] = K_A. \quad (2.366)$$

Rezultatele obținute sunt utile în proiectare; astfel când se impune performanța $\varepsilon_{st} = 0$ la semnale de intrare treaptă unitară, este necesar să se obțină $\alpha = 1$, iar când se impune $\varepsilon_{st} = 0$ la semnale de intrare rampă unitară, este necesar ca sistemul să fie astfel proiectat încât să se obțină $\alpha = 2$.

Când nu se impune o performanță de forma $\varepsilon_{st} = 0$, ci o performanță de forma (2.137):

$$\varepsilon_{st} \leq \varepsilon_{st \text{ imp}},$$

aceasta conduce la o condiție de forma:

$$K_a \geq K_{a \text{ imp}}, \quad (2.367)$$

unde $K_{a \text{ imp}}$ este valoarea impusă pentru factorul total de amplificarea, corespunzătoare valorii impuse $\varepsilon_{st \text{ imp}}$.

2.3.5 Obținerea funcției pondere din funcția de transfer

După cum s-a menționat în §2.3.2., prin definiție, se numește funcție de transfer a unui element al sistemului automat (respectiv sistem) raportul dintre transformatele directe Laplace ale variabilei de la ieșire $y(t)$, respectiv de la intrare $u(t)$, ale elementului (sistemului) considerat.

Pornind de la definiția funcției de transfer, apare evidentă posibilitatea de a se calcula răspunsul sistemului la orice funcție de intrare ce admite o transformată Laplace, dacă funcția de transfer a elementului (sistemului) este cunoscută:

$$Y(s) = G(s)U(s). \quad (2.368)$$

Relația (2.368) surprinde sensul matematic al funcției de transfer: $U(s)$ este transferată de la intrarea la ieșirea elementului (sistemului) printr-o operație de transfer; funcția de transfer caracterizează deci tranzitul unei acțiuni printr-un element (sistem) liniar.

Funcției de transfer i se poate atribui însă, și un sens fizic.

În §2.1.1 s-a arătat că răspunsul unui element sau al unui sistem la un impuls-Dirac $\delta(t)$ aplicat la intrare se numește funcție pondere, notată cu $w(t)$.

Având în vedere că:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \delta(t) dt = 1, \quad (2.369)$$

din relația de definiție a funcției de transfer rezultă că dacă:

$$u(t) = \delta(t) \quad (2.370)$$

și deci:

$$y(t) = w(t),$$

atunci:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}[w(t)]}{\mathcal{L}[\delta(t)]} = \mathcal{L}[w(t)], \quad (2.371)$$

respectiv:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]. \quad (2.372)$$

Rezultă astfel că semnificația fizică a funcției de transfer, și anume: funcția de transfer $G(s)$ a unui element (sistem) reprezintă transformata directă Laplace a funcției pondere a elementului (sistemului).

Din relația (2.327) rezultă că funcția pondere definește în aceeași măsură cu funcția de transfer comportarea unui element sau sistem automat.

Pentru sistemul de ordinul întâi, a cărui funcție de transfer este dată de relația (2.262), în conformitate cu cele menționate mai sus, funcția pondere se obține sub forma:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{Ts+1}\right] = \frac{K}{T} e^{-t/T}. \quad (2.373)$$

Din relațiile (2.267) și (2.372) rezultă că funcția pondere $w(t)$ (răspunsul la un impuls-Dirac $u(t) = \delta(t)$ aplicat la intrare) pentru sistemul de ordinul doi, va avea expresia:

$$\begin{aligned} w(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{(s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-\xi^2})^2}\right] = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t), \end{aligned} \quad (2.374)$$

deci va avea aspectul unei sinusoide amortizate (considerând $0 < \xi < 1$).

Se poate arăta că răspunsul la o perturbație treaptă unitară are, în anumite cazuri, un aspect analog cu răspunsul la $u(t) = \delta(t)$, deci aspectul unei funcții pondere.

Astfel, se consideră sistemul din figura 2.44, cu o perturbație $p = 1_+(t)$ aplicată între blocul 1, cu funcția de transfer:

$$G_1(s) = K_1 \frac{T_i s + 1}{T_i s}, \quad (2.375)$$

reprezentând deci un regulator PI, conform cu expresia (2.279) și blocul 2, reprezentând restul sistemului, cu funcția de transfer:

$$G_2(s) = \frac{K_2}{T_2 s + 1}, \quad (2.376)$$

unde K_2 este factorul de amplificare al blocului 2 și T_2 este constanta de timp a acestui bloc.

Presupunând că la intrare nu se aplică semnal, deci:

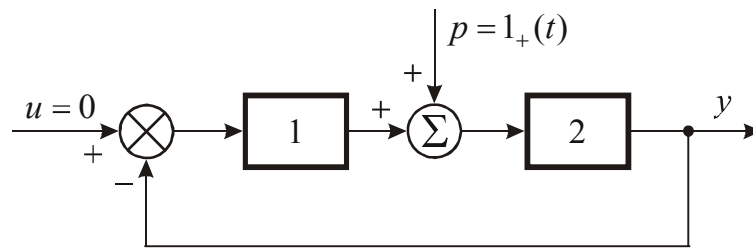


Fig.2.44 Schema-bloc a unui sistem automat închis, cu reacție principală directă având mărimea de intrare $u = 0$ și perturbația $p = 1_+(t)$.

$$u(t) = 0, \quad (2.377)$$

mărimea de ieșire $y(t)$ va reprezenta răspunsul sistemului la perturbația $p = 1_+(t)$.

Considerând deci sistemul ca având intrarea în punctul de aplicare al perturbației, funcția de transfer $G_{0P}(s)$ a sistemului închis, definită în raport cu perturbația, va avea expresia (ținând seama de relațiile (2.308) sau (2.313)) următoare:

$$G_{0P}(s) = \frac{\Delta Y(s)}{P(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)}, \quad (2.378)$$

deci:

$$Y(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)} P(s). \quad (2.379)$$

Înlocuind $P(s) = 1/s$ (deoarece $p = 1_+(t)$) și expresiile considerate pentru $G_1(s)$ și $G_2(s)$, se obține:

$$Y(s) = \frac{\frac{K_2}{T_2 s + 1}}{1 + \frac{K_1 K_2}{T_i} \frac{T_i s + 1}{s(T_2 s + 1)}} \frac{1}{s} = \frac{K_2 T_i s}{T_i T_2 s^2 + T_i (K_1 K_2 + 1)s + K_1 K_2} \frac{1}{s} =$$

$$= \frac{\frac{K_2}{T_2}}{s^2 + \frac{K_1 K_2 + 1}{T_2} s + \frac{K_1 K_2}{T_i T_2}}. \quad (2.380)$$

Notând:

$$\sqrt{\frac{K_1 K_2}{T_i T_2}} = \omega_n, \quad \frac{K_1 K_2 + 1}{T_2} = 2\xi\omega_n, \quad (2.381)$$

deci:

$$\xi = \frac{\frac{K_1 K_2 + 1}{T_2}}{2\omega_n} = \frac{K_1 K_2 + 1}{2T_2 \sqrt{\frac{K_1 K_2}{T_i T_2}}} = \frac{K_1 K_2 + 1}{2\sqrt{\frac{K_1 K_2 T_2}{T_i}}} \quad (2.382)$$

și ținând seama, conform cu notațiile (2.381), că:

$$\frac{K_2}{T_2} = \omega_n^2 \frac{T_i}{K_1}, \quad (2.383)$$

ecuația (2.380) devine:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2 \frac{T_i}{K_1}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (2.384)$$

respectiv răspunsul la perturbație va avea expresia:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2 \frac{T_i}{K_1}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n \frac{T_i}{K_1}}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{(s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-\xi^2})^2}\right] = \\ &= \frac{\omega_n \frac{T_i}{K_1}}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\omega_n \xi t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t). \end{aligned} \quad (2.385)$$

Din relațiile (2.374) și (2.385) se verifică faptul că răspunsul la o perturbație treaptă unitară este analog, în anumite cazuri, cu răspunsul la o mărime de intrare impuls-Dirac, deci cu o funcție pondere.