

Bazele Procesării Semnalelor

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Braşov, România

January 7, 2015

Fişa disciplinei

- ▶ Număr de ore pe săptămână: 5 (3 curs + 2 seminar) + 2 laborator (3CALC)
- ▶ Studiul după manual, suport de curs, bibliografie şi notiţe: 42
- ▶ Documentare suplimentară în bibliotecă, pe platformele electronice de specialitate şi pe teren: 14
- ▶ Pregătire seminarii/ laboratoare/ proiecte, teme, referate, portofolii şi eseuri: 14
- ▶ Tutoriat: 6
- ▶ Examinări: 4

Conținut I

1. **Analiza Fourier a semnalelor** (recapitulare serii Fourier și transformata Fourier, utilitatea și proprietățile transformatei Fourier, transformata Fourier a unor semnale de interes în ingineria electronică) 6h
2. **Eșantionarea semnalelor** (teorema eșantionării, condiția Nyquist, tipuri de eșantionare) 2h
3. **Semnale discrete. Sisteme de timp discret** (transformata Fourier discretă și cea rapidă, filtrul de mediere, convoluția a două semnale discrete, alte exemple sisteme de timp discret) 4h
4. **Variabile aleatoare** (recapitulare probabilități, variabile aleatoare, densitatea de probabilitate și funcția de repartiție, distribuții, momente statistice, funcții de o variabilă aleatoare) 4h
5. **Cuantizarea semnalelor** (cuantizarea uniformă, cuantizorul optimal Max-Lloyd) 2h

Conținut II

6. **Perechi de variabile aleatoare** (densitatea de probabilitate și funcția de repartiție de ordinul 2, momente statistice pentru perechi de variabile aleatoare, dreapta de regresie) 4h
7. **Semnale aleatoare** (definiție, caracterizare, funcția de auto-corelație și inter-corelație, densitatea spectrală de putere) 4h
8. **Filtrarea semnalelor** (filtrul trece-jos ideal, filtrul trece-bandă ideal, proiectarea filtrelor, caracterizarea statistică a dependenței intrare-ieșire, filtrul adaptat la semnal) 6h
9. **Filtrarea statistică a semnalelor** (filtrul Wiener) 4h
10. **Detecția semnalelor** (criteriul Bayes de decizie) 2h
11. **Transformate unitare** (transformate unitare – definiție, proprietăți, utilizare; transformata Karhunen Loeve) 4h

Bibliografie (curs)

- ▶ Alexandru Spătaru – *Teoria Transmisiunii Informației*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983
- ▶ Mihai Ciuc, Constantin Vertan – *Prelucrarea statistică a semnalelor*, Ed. MatrixROM, București, 2005
- ▶ Sanjit K. Mitra – *Digital Signal Processing – A Computer-based Approach*, 2nd edition, McGraw-Hill, 2001
- ▶ Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer – *Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 1975
- ▶ Csaba Kertesz, Laurentiu Mihai Ivanovici – *Prelucrarea digitală a semnalelor – îndrumar de laborator*, Editura Universității Transilvania din Brașov, 2009

Bibliografie (seminar)

- ▶ A.T. Murgan, I. Spânu, I. Gavăt, I. Sztojanov, V.E. Neagoe, A. Vlad – *Teoria Transmisiunii Informației – probleme*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983
- ▶ Constantin Vertan, Inge Gavăt, Rodica Stoian – *Variabile și procese aleatoare*, Editura Matrix Rom, București, 1999
- ▶ G. Ciucu, V. Craiu, I. Săcuiu – *Probleme de teoria probabilităților*, Editura Tehnică, București, 1974

Condiții prealabile

- ▶ Analiză matematică
 - ▶ Grafice de funcții
 - ▶ Continuitate (funcții continue/discontinue)
 - ▶ Derivabilitate (derivarea funcțiilor continue ... **discontinue?**)
 - ▶ Integrabilitate (integrale definite, primitive)
- ▶ Trigonometrie (sin, cos, forma hiperbolică)
- ▶ Statistică (variabile aleatoare, distribuții, momente statistice, ș.a.m.d.)
- ▶ Matematici speciale (spații vectoriale)

Definiție

Semnal

Variația unei mărimi fizice în funcție de timp (sau orice altă variabilă, e.g. distanță, poziție etc.)

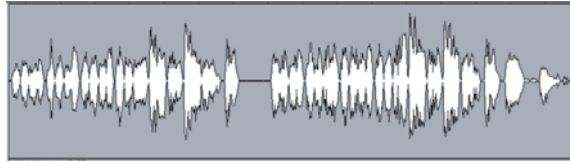
Exemple

- ▶ semnal vocal
- ▶ temperatură
- ▶ tensiune electrică / curent
- ▶ distanță...

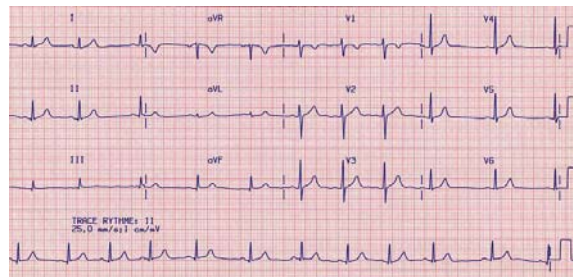
Notăție: $x(t)$, $s(t)$, $f(t)$

Observație: semnale uni-dimensionale (valoarea funcției = un scalar)

Semnale



(a) vocal (reprezentare uzuală)



(b) ECG

Figura 1: Exemple semnale.

Model matematic

- ▶ Funcții continue/discontinue (periodice/neperiodice) într-un spațiu Hilbert*
- ▶ Funcții discrete (ca valoare și timp)
- ▶ Modele statistice (e.g. proces aleator)
- ▶ Modele fractale



* David Hilbert (23 ianuary 1862 – 14 february 1943) - matematician german.

De ce funcții continue?

Continuitate

Limita la stânga = limita la dreapta = valoarea funcției într-un punct.

Practic, variația unui semnal într-un interval infinitesimal mic este predictibilă (și nu foarte mare):

- ▶ corelație intrinsecă într-un semnal *natural*
- ▶ variația nu poate fi infinit de la un punct la altul (pentru semnale din realitate)

De ce spațiu Hilbert?

Spațiu Hilbert

Este o generalizare a spațiului euclidian - de la 2 și 3 dimensiuni, la orice număr finit sau *infinit* de dimensiuni.

Spațiu liniar (complet) de vectori / funcții, cu normă și produs scalar.

Spațiile Hilbert sunt folosite deseori în matematică și fizică. În prelucrarea semnalelor, sunt folosite pentru Analiza Fourier.

Spații Hilbert

Spațiul Hilbert al funcțiilor reale descris de (H, \langle, \rangle) , unde $\langle, \rangle =$ produs scalar, și $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, unde $\|\cdot\|$ = norma spațiului, este un spațiu liniar și normat.

De exemplu, spațiul Hilbert al funcțiilor complexe definite pe un interval $[a, b]$ notat cu $(C^0[a, b], \langle, \rangle)$. Rezultatul produsului scalar ne indică măsura în care o funcție conține cealaltă funcție, deoarece funcțiile cu care reprezentăm semnalele sunt de regulă de o singură variabilă, și anume timpul.

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt \\ \|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \end{array} \right. \quad (1)$$

Paralelă cu spații vectoriale

normă, produs scalar (formulă cu cos) + grafic

Spațiul $\mathcal{L}^2(I)$

Fie $I \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{L}^2(I)$ este mulțimea funcțiilor *măsurabile* (adică integrabile Lebesgue[†]), de pătrat integrabile pe I (adică $\int_I f^2 < \infty$).

$(\mathcal{L}^2(I), <, >)$ este un spațiu Hilbert ($< f, g > = \int_a^b f \cdot g$).

Cu alte cuvinte, condiția de "*pătrat integrabile*" reprezintă condiția ca puterea semnalului pe care îl modelăm cu funcția f să fie mărginită. În practică ea este oricum limitată, însă teoretic un semnal poate avea putere infinită, deci să nu fie de pătrat integrabil.

[†]Integrabilitatea în sens Lebesgue reprezintă o generalizare a integrabilității în sens Riemann, fiind permisă integrarea unei clase mai largi de funcții.

Puterea unui semnal

Pentru un semnal $s(t)$ se definește puterea totală ca fiind:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt \quad (2)$$

Puterea medie pe un interval T (poate fi o perioadă a semnalului):

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s^2(t) dt \quad (3)$$

Taxonomie

continue, discrete, eșantionate, eșantionate și cuantizate (după Sanjit K. Mitra, Digital Signal Processing, McGraw-Hill 2001)

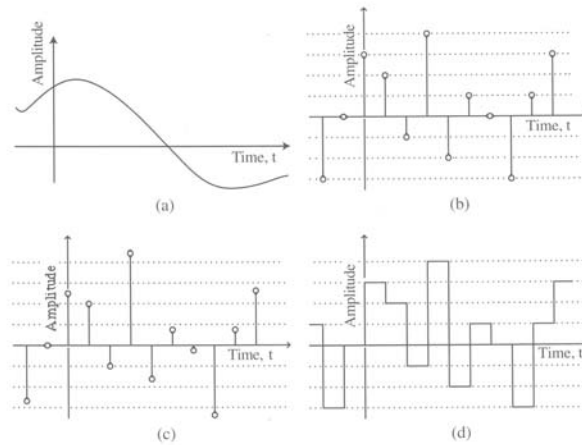


Figure 1.1: (a) A continuous-time signal, (b) a digital signal, (c) a sampled-data signal, and (d) a quantized boxcar signal.

Taxonomie (2)

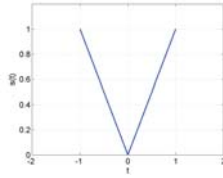
În funcție de periodicitate:

- ▶ periodice: $f(t + T) = f(t)$
- ▶ neperiodice

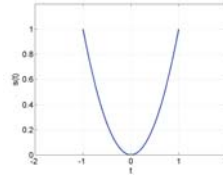
Pentru un semnal periodic ne interesează perioada principală - pe baza căreia se calculează frecvența *fundamentală*

Semnale (funcții) pare și impare

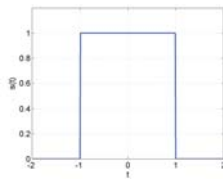
Un semnal $s(t)$ este par, dacă $s(-t) = s(t)$ și este impar, dacă $s(-t) = -s(t)$.



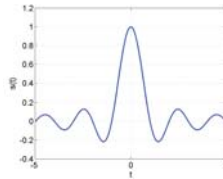
(a) $s(t) = |t|$



(b) $s(t) = t^2$



(c) $s(t) = 1 \text{ pt. } |t| \leq 1$



(d) $s(t) = \text{sinc}(t)$

Figura 2: Exemple de semnale pare.

Semnale (funcții) pare și impare

- Orice combinație liniară de funcții pare este tot o funcție pară.
- Similar, orice combinație liniară de funcții impare este tot o funcție impară.
- Exista însă funcții care nu sunt nici pare, nici impare, cum ar fi $s(t) = t^3 + 1$. Se poate demonstra că orice funcție poate fi scrisă ca o sumă de o funcție pară și una impară.

Perioadă. Frecvență. Pulsație. Spectru

Relația dintre perioadă (T) și frecvență (f) este următoarea:

$$f = \frac{1}{T} \quad (4)$$

Frecvența se măsoară în Hertz (Hz) (în unități de măsură de bază în s^{-1}).

Pulsația ω se definește ca:

$$\omega = 2\pi f \quad (5)$$

Observație: deseori, printr-un abuz de limbaj, frecvență = pulsație!
Nota LA (440 Hz) este o funcție (semnal) sinusoidal de forma $\cos(2\pi 440t)$.

Reprezentare amplitudine-frecvență

Este o reprezentare de tip *spectru*.

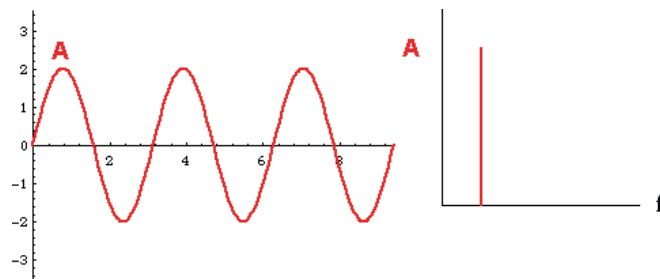


Figura 3: Reprezentarea în domeniul timp și în domeniul frecvență a funcției sinus (semnalul $\sin(\omega t)$).

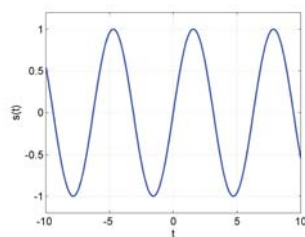
Semnale des întâlnite în electronică

- ▶ sinusoidal
- ▶ dreptunghiular
- ▶ dinte de fierăstrău
- ▶ impuls Dirac δ

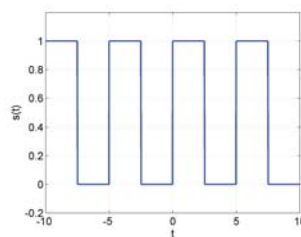


† Paul Adrien Maurice Dirac (8 august 1902 – 20 octombrie 1984) - fizician englez cu contribuții în mecanica cuantică și electrodinamica cuantică.

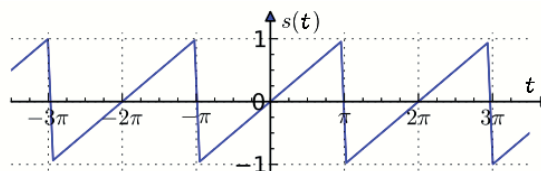
Semnale des întâlnite în electronică (2)



(a) sinusoidal



(b) dreptunghiular



(c) dinte de fierăstrău

Figura 4: Exemple de semnale (sunt ele periodice, pare?).

Impulsuri

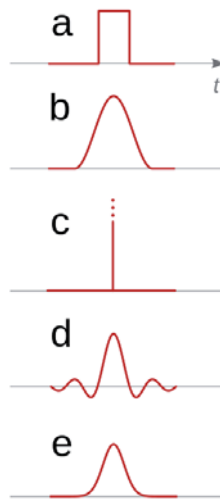


Figura 5: Impulsuri: dreptunghiular, cosinusoidal, Dirac, sinc, gaussian.

Caracteristicile semnalului sinusoidal

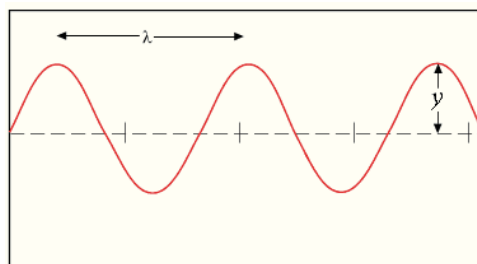


Figura 6: Semnal sinusoidal: $s(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$.

- ▶ amplitudine (y)
- ▶ perioadă (frecvență) și lungime de undă (λ)
- ▶ fază

Sinus sau... cosinus?

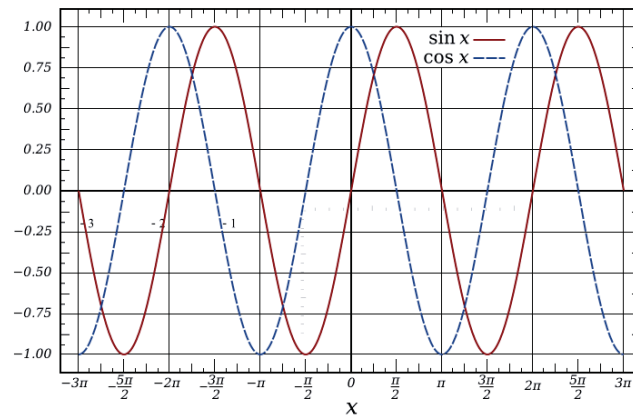


Figura 7: Semnal sinusoidal și semnal cosinusoidal.

Caracteristicile semnalului dreptunghiular

- ▶ amplitudine (y)
- ▶ perioadă (frecvență) și lungime de undă (λ)
- ▶ fază
- ▶ factor de umplere: $\delta = \frac{t_0}{T}$ -

Sinc (sinus cardinal sau sinus atenuat)

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (6)$$

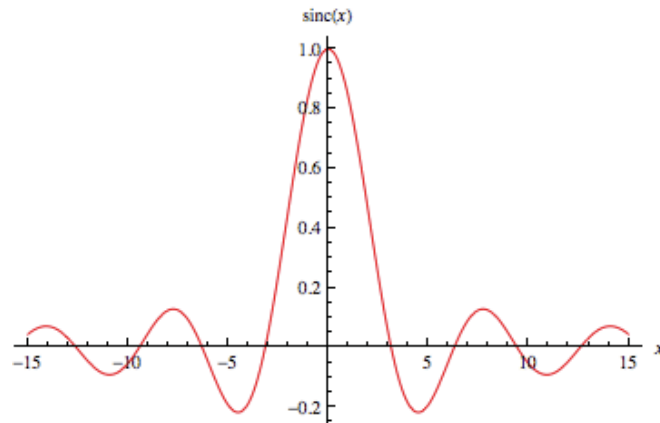


Figura 8: Sinus cardinal.

Impulsul Dirac

Definiție

Impulsul Dirac este un impuls dreptunghiular de durată zero și înălțime *infinit*.

Se spune că este impulsul care există doar la apariția lui. Impulsul Dirac se notează cu $\delta(t)$ și este:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases} \quad (7)$$

Aria impulsului Dirac este 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1 \quad (8)$$

Impulsul Dirac (2)

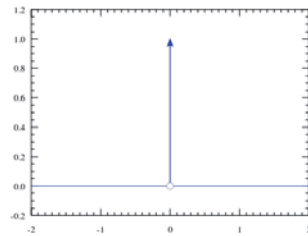


Figura 9: Impulsul Dirac.

Impulsul Dirac se folosește la derivarea funcțiilor discontinue și la eșantionarea semnalelor.

Derivarea funcțiilor... *discontinue*

Cu ajutorul impulsului Dirac, se pot deriva chiar și funcțiile discontinue (de exemplu, o funcție tip treaptă). Pentru o funcție/un semnal $x(t)$ care prezintă o discontinuitate în punctul/la momentul de timp t_0 , derivata în acel punct este ...

$$x'(t) = \begin{cases} x'(t), & t \neq t_0 \\ \underbrace{[x(t_{0+}) - x(t_{0-})]}_{\text{valoarea saltului}} \cdot \underbrace{\delta(t - t_0)}_{\text{momentul saltului}}, & t = t_0 \end{cases} \quad (9)$$

unde t_{0+} este valoarea *la dreapta* momentului de timp t_0 , iar t_{0-} reprezintă valoarea *la stânga* valorii t_0 .

Proprietăți ale impulsului Dirac

Extragerea valorii unei funcții:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0) \quad (10)$$

caz particular: $t_0 = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t) dt = x(0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (11)$$

caz particular: $\omega_0 = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$

Utilizare semnale

- ▶ semnale utile
 - ▶ informații (codate, adaptate la canalul de transmisiune)
 - ▶ comenzi
 - ▶ sincronizare (e.g. semnal de ceas)
 - ▶ modularea altor semnale
- ▶ semnale parazite (zgomote)

Pentru zgomote se utilizează cel mai frecvent ipoteza că acestea sunt independente de semnalul util și că se suprapun în mod aditiv peste semnalul util (model aditiv):

$$y(t) = x(t) + n(t) \quad (12)$$

Semnal + zgomot

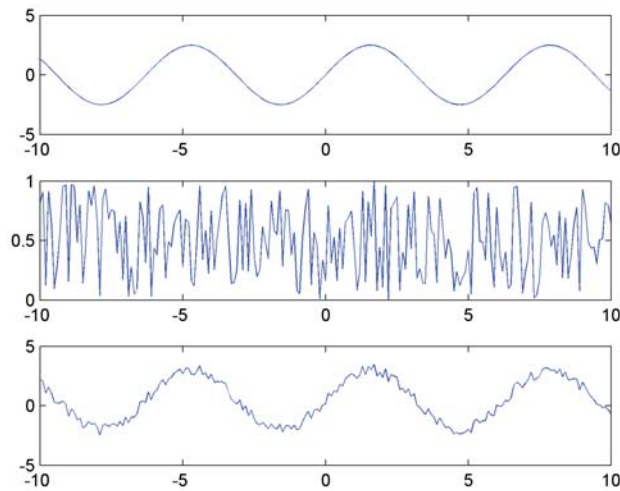


Figura 10: Semnal sinusoidal și zgomot aleator.

Raportul semnal-zgomot

Signal-to-Noise Ratio (SNR)

Se definește ca raportul dintre puterea semnalului util și puterea zgomotului (care fie se cunoaște, fie se estimează):

$$RSZ = \frac{P_{\text{semnal}}}{P_{\text{zgomot}}} \quad (13)$$

Dacă semnalele sunt de medie zero:

$$RSZ = \frac{\sigma_{\text{semnal}}^2}{\sigma_{\text{zgomot}}^2} \quad (14)$$

Definiție echivalentă:

$$RSZ_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_{\text{semnal}}}{P_{\text{zgomot}}} \quad (15)$$

Analiza Fourier

Serii Fourier

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Braşov, România

January 7, 2015

Introducere

- ▶ Sistemele liniare invariante în timp (SLIT) sunt modele des utilizate în prelucrarea semnalelor
- ▶ Un sistem s.n. *liniar* dacă răspunsul acestuia la suma a două semnale este identic cu suma răspunsurilor la fiecare semnal în parte
- ▶ Un sistem s.n. *invariant în timp* dacă răspunsul său la un stimul (semnal) este acelaşi indiferent de momentul de timp la care este aplicat semnalul respectiv la intrarea sistemului
- ▶ Funcţiile proprii ale sistemelor liniare invariante în timp sunt (co)sinusoidale (Teoria Sistemelor)

De ce avem nevoie de cosinusoide?

- ▶ dacă la intrarea unui SLIT aplicăm o cosinoidă pură de frecvență ω_0 , atunci la ieșire vom avea tot o cosinoidă pură ω_0 (cu altă amplitudine și fază)



- ▶ **Important:** Acest fapt permite studierea comportamentului sistemului la un semnal de intrare oarecare, cu condiția să putem scrie semnalul respectiv ca o sumă (chiar infinită!) de cosinusoide

Seria Fourier trigonometrică

Fie $x(t)$ un semnal real oarecare, de durată finită T :

$$x(t) = 0 \quad \forall t \notin [0, T]. \quad (1)$$

- ▶ Problema: scrierea semnalului $x(t)$ ca o sumă numărabilă de semnale sinusoidale
- ▶ Acest lucru este posibil *în interiorul* intervalului $[0, T]$
- ▶ Se poate arăta că, pentru $\forall t \in [0, T]$, semnalul $x(t)$ se poate scrie sub forma unei sume numărabile de cosinusoide și sinusoidale, având toate, un număr întreg de perioade în intervalul de timp considerat.

Frecvențele (co)sinusoidelor respective sunt multipli (întregi) ai frecvenței corespunzătoare duratei T , numită *frecvență fundamentală* și notată cu ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (2)$$

Forma trigonometrică

Are loc relația:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(n\omega_0 t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3)$$

Coeficienții $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ și $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numesc coeficienții dezvoltării semnalului în serie Fourier trigonometrică.

Se poate arăta că funcțiile $\{\cos(n\omega_0 t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ și $\{\sin(n\omega_0 t)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ formează un [set ortogonal de funcții](#).

Baza de funcții Fourier

Dacă produsul scalar al două funcții (reale) de suport temporal T într-un spațiu Hilbert este:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^T f(t)g(t)dt, \quad (4)$$

atunci se poate arăta că:

$$\langle \cos(m\omega_0 t), \cos(n\omega_0 t) \rangle = \begin{cases} T & \text{dacă } m = n = 0 \\ \frac{T}{2} & \text{dacă } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } m \neq n \end{cases} \quad (5a)$$

$$\langle \sin(m\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t) \rangle = \begin{cases} T & \text{dacă } m = n \neq 0 \\ \frac{T}{2} & \text{dacă } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } m \neq n \end{cases} \quad (5b)$$

$$\langle \cos(m\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t) \rangle = 0 \quad \forall m, n. \quad (5c)$$

Calculul coeficienților seriei Fourier

Din ecuațiile (5), rezultă:

$$\begin{aligned}
 \langle x(t), \cos(k\omega_0 t) \rangle &= \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \\
 &= \int_0^T \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(n\omega_0 t) \right) \cos(k\omega_0 t) dt \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \underbrace{\int_0^T \cos(n\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt}_{=0 \text{ pentru } n \neq k} + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \underbrace{\int_0^T \sin(n\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt}_{=0} \\
 &= \begin{cases} \frac{T}{2} c_k & \text{dacă } k \neq 0 \\ T c_k & \text{dacă } k = 0 \end{cases} .
 \end{aligned} \tag{6}$$

Similar vom proceda pentru valorile s_k .

Relații de calcul coeficienți

Rezultă următoarele relații de calcul pentru coeficienții dezvoltării semnalului $x(t)$ în serie Fourier trigonometrică:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \tag{7a}$$

$$c_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{7b}$$

$$s_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{7c}$$

c_0 se numește *componentă continuă*, iar restul coeficienților alcătuiesc *componenta armonică*.

Observații

- ▶ coeficienții $\{c_0, c_1, c_2, \dots, s_1, s_2, \dots\}$ constituie o altă reprezentare a semnalului $x(t)$
- ▶ conform (3), $x(t)$ poate fi reconstruit perfect pe baza coeficienților respectivi
- ▶ reprezentarea sub formă trigonometrică a seriei Fourier a unui semnal este destul de greu de interpretat, datorită prezenței a doi coeficienți (unul “sinusoidal” și celălalt “cosinusoidal”) ce caracterizează fiecare frecvență $n\omega_0$
- ▶ Forma armonică a descompunerii în serie Fourier este mai intuitivă (a se vedea în continuare)

Seria Fourier armonică

Fie A_n și φ_n coordonatele polare ale perechii (c_n, s_n) . Pentru $n > 0$ avem relațiile:

$$A_n = \sqrt{c_n^2 + s_n^2} \quad (8a)$$

$$\varphi_n = -\arctan\left(\frac{s_n}{c_n}\right), \quad (8b)$$

respectiv

$$c_n = A_n \cos(\varphi_n) \quad (9a)$$

$$s_n = -A_n \sin(\varphi_n). \quad (9b)$$

pentru $n = 0$:

$$A_0 = c_0 \quad (10a)$$

$$\varphi_0 = 0. \quad (10b)$$

Forma armonică

Înlocuind relațiile (9) în descompunerea (3), obținem:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(\varphi_n) \cos(n\omega_0 t) - A_n \sin(\varphi_n) \sin(n\omega_0 t)), \quad \forall t \in [0, T] \quad (11)$$

de unde, rezultă forma finală a descompunerii semnalului $x(t)$ în serie Fourier armonică:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n), \quad \forall t \in [0, T] \quad (12)$$

Observații

Forma (12) este mai ușor de interpretat, deoarece conține amplitudinile A_n și fazele φ_n cosinusoidelor de frecvențe $n\omega_0$ ce intervin în descompunerea semnalului nostru periodic.

Șirul de coeficienți $\{A_0, A_1, A_2, \dots\}$ reprezintă *spectrul de amplitudini* al semnalului $x(t)$.

Șirul de coeficienți $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ *spectrul de fază* al acestuia.

Seria Fourier complexă

Forma complexă este cea mai generală formă a descompunerii unui semnal periodic în serie Fourier. Se pornește de la identitatea

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad (13)$$

care se înlocuiește în relația (12), rezultând:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\omega_0 t} + A_n e^{-j\varphi_n} e^{-jn\omega_0 t}) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n} e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{A_{-n}}{2} e^{-j\varphi_{-n}} e^{jn\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (14)$$

Forma complexă

În relația precedentă, am folosit faptul că $\varphi_0 = 0$. În continuare, introducem cantitatea $A_{nc} \in \mathbb{C}$ cu $n \in \mathbb{Z}$ definită astfel:

$$A_{nc} = \begin{cases} A_0 & \text{pentru } n = 0 \\ \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} & \text{pentru } n > 0 \\ \frac{1}{2} A_{-n} e^{-j\varphi_{-n}} & \text{pentru } n < 0 \end{cases}. \quad (15)$$

Cu notația de mai sus, dezvoltarea (14) devine:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (16)$$

relație ce reprezintă dezvoltarea semnalului periodic $x(t)$ în serie Fourier complexă.

Calcule

O modalitate directă și unitară de calcul al coeficienților dezvoltării A_{nc} . Astfel, pentru $n > 0$ avem:

$$\begin{aligned} A_{nc} &= \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} \\ &= \frac{1}{2} (A_n \cos(\varphi_n) + jA_n \sin(\varphi_n)) \\ &= \frac{1}{2} (c_n - js_n) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega_0 t) dt - j \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) (\cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t)) dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Calcule (2)

Pentru $n < 0$ avem în mod similar:

$$\begin{aligned} A_{nc} &= \frac{1}{2} A_{-n} e^{-j\varphi_{-n}} \\ &= \frac{1}{2} (A_{-n} \cos(\varphi_{-n}) - jA_{-n} \sin(\varphi_{-n})) \\ &= \frac{1}{2} (c_{-n} + js_{-n}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(-n\omega_0 t) dt + j \frac{2}{T} \int_T^0 x(t) \sin(-n\omega_0 t) dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) (\cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t)) dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Forma finală

În dezvoltare am folosit faptul că funcția cosinus este pară și că sinus este impară. În sfârșit, pentru A_{0c} se poate scrie:

$$A_{0c} = A_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \underbrace{e^{-j0\omega_0 t}}_{=1} dt. \quad (19)$$

Rezumând, relațiile (17), (18) și (19) pot fi scrise în mod unitar ca:

$$A_{nc} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

Observații

- ▶ Cele trei forme ale descompunerii în serie Fourier ale unui semnal periodic sunt reprezentări echivalente ale aceleiași realități fizice, care exprimă descompunerea unui semnal periodic într-o sumă numărabilă de (co)sinusoide
- ▶ Din oricare dintre cele trei forme se pot deduce celelalte două
- ▶ Forma complexă a descompunerii introduce noțiunea de *frecvență negativă*, care derivă dintr-o construcție matematică și nu are nici o legătură cu realitatea fizică
- ▶ Conform cu (14) și (15), componenta de frecvență negativă $-n\omega_0$ împreună cu cea de frecvență $n\omega_0$ formează împreună componenta sinusoidală de frecvență $n\omega$.

Valabilitatea descompunerii 'în serie Fourier pe \mathbb{R}

- ▶ Toate formele descompunerii în serie Fourier a unui semnal de suport finit sunt valabile doar *în interiorul* intervalului de definiție a semnalului
- ▶ Nici una dintre relațiile (3),(12) sau (16) nu este valabilă pentru $t \notin [0, T]$
- ▶ Dorim ca descompunerea să fie valabilă pe întreg \mathbb{R} și nu numai pe un subinterval al acestuia
- ▶ Pentru aceasta, semnalul inițial ar trebui prelungit în afara domeniului de definiție prin **periodizare**

Periodizare

- ▶ Dorim să calculăm semnalul $y(t)$ pentru care oricare dintre relațiile mai sus-amintite sunt valabile pentru $\forall t \in [0, T]$:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(n\omega_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

- ▶ Datorită periodicității semnalelor sinusoidale și a faptului că frecvențele *tuturor* sinusoidelor sunt multipli ai frecvenței fundamentale, rezultă că $y(t)$ nu este altceva decât semnalul obținut prin replicarea pe întreg \mathbb{R} a semnalului inițial $x(t)$:

$$y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(t - kT), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

Spectrele unor semnale de interes (1)

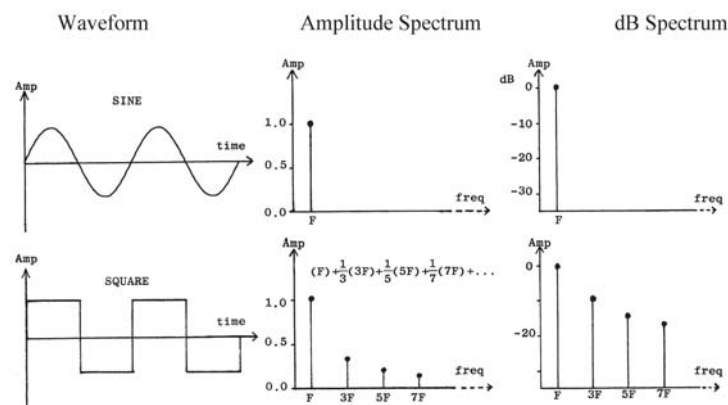


Figura 1: Spectrele semnalelor sinusoidal și dreptunghiular ($dB = 20\log(amp)$).

Spectrele unor semnale de interes (2)

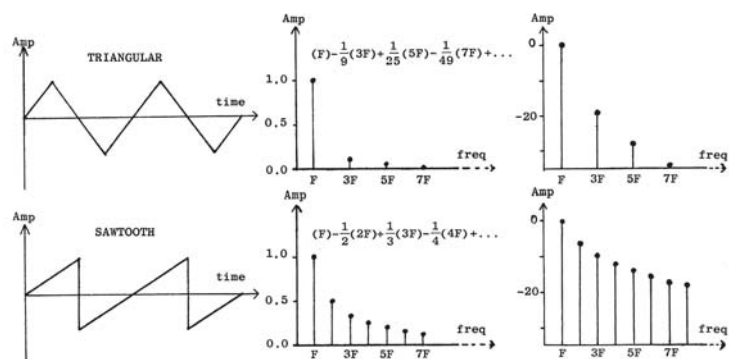


Figura 2: Spectrele semnalelor triunghiular și dinte de fierăstrău ($dB = 20\log(amp)$).

Rezultat generic (vezi Transformata Fourier)

Pentru un semnal oarecare $f(t)$ **periodic**, cu frecvența fundamentală ω_0 , seria Fourier este:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (23)$$

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(k\omega_0 - \omega)t} dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (24)$$

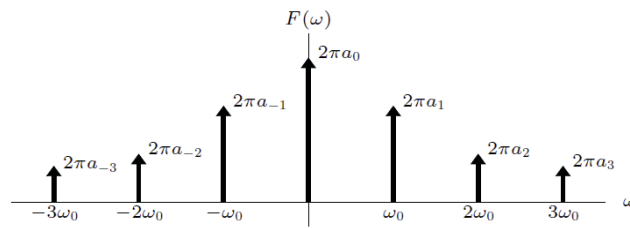
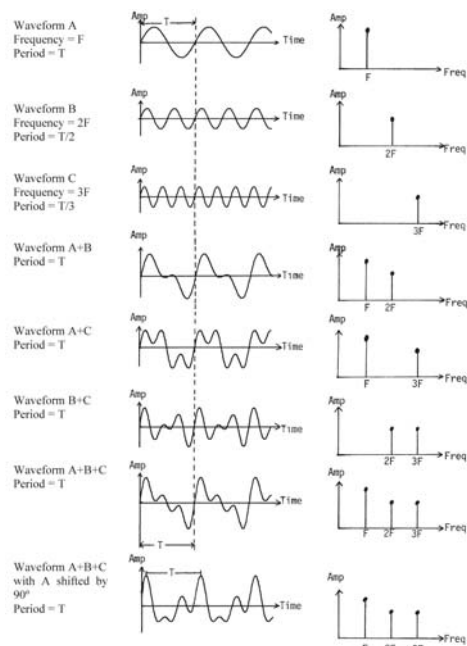


Figura 3: Spectrul corespunzător seriei Fourier armonice a semnalului.

Sinteza Fourier



Effectul Gibbs

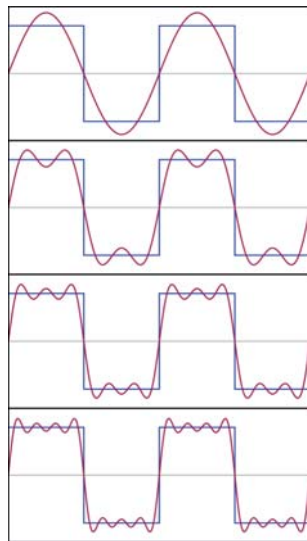


Figura 4: Aproximarea unui semnal dreptunghiular cu un număr prea mic de sinusoidale (1, 2, 3, respectiv 4).

Analiza Fourier

Transformata Fourier

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Braşov, România

January 7, 2015

Introducere

- ▶ Am arătat că un semnal periodic poate fi descompus ca o sumă de un număr numărabil de componente sinusoidale, de frecvențe multipli ai frecvenței de bază a semnalului, numită frecvență *fundamentală*
- ▶ Vom generaliza această descompunere a unui semnal într-o sumă de sinusoidale și pentru semnale neperiodice
- ▶ Forma spectrului unui semnal periodic în funcție de perioada sa T - pe măsură ce T crește, componentele din spectrul semnalului se îndesesc (creșterea lui T este echivalentă cu scăderea frecvenței fundamentale $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, și deci, cu scăderea intervalului de frecvență între două componente succesive).
- ▶ La limită, când $T \rightarrow \infty$, componentele frecvențiale se *contopesc*, iar spectrul semnalului devine de natură continuă.

Ilustrare

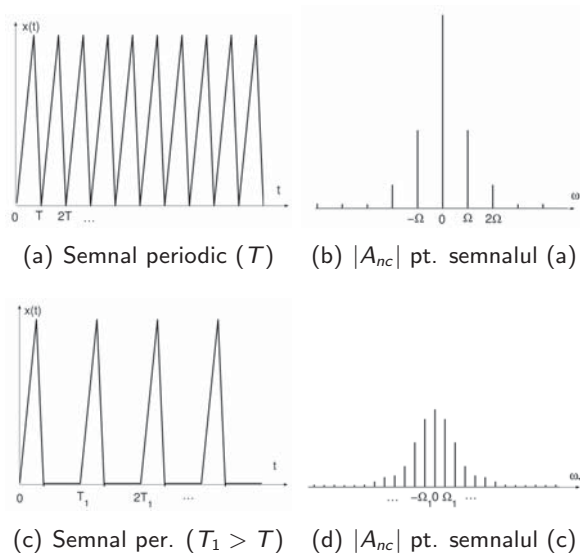


Figura 1: Forma spectrului unui semnal periodic în funcție de perioadă.

Definiție

Fie $x(t)$ un semnal de modul integrabil:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = M < \infty. \quad (1)$$

Se definește transformata Fourier a semnalului $x(t)$ ca fiind semnalul $X(\omega)$:

$$X(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2)$$

Semnalul original $x(t)$ poate fi recuperat din transformata sa prin aplicarea operatorului invers:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{+j\omega t} d\omega \quad (3)$$

Interpretare

- Semnificația lui $X(\omega)$ este similară cu cea a coeficienților A_{nc} , cu deosebirea că în cazul transformatei Fourier, numărul de cosinusoide în care se descompune semnalul devine infinit *nenumărabil*
- Modulul $|X(\omega)|$ și faza $\varphi(\omega)$ ale cantității complexe $X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ sunt amplitudinea, respectiv faza cosinusoidei de frecvență ω ce intră în descompunerea spectrală a semnalului $x(t)$

În ipoteza unui semnal $x(t)$ cu valori reale, valorile transformatei Fourier situate simetric față de 0 sunt complex conjugate:

$$x(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t \Leftrightarrow X(-\omega) = X^*(\omega) \Leftrightarrow \begin{cases} |X(-\omega)| = |X(\omega)| \\ \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega) \end{cases}, \quad (4)$$

Pentru un semnal $x(t)$ real

Relația (3) poate fi rescrisă ca:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 X(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) \\ &\stackrel{\omega = -\Omega}{=} \frac{1}{2\pi} \left(- \int_{\infty}^0 X(-\Omega) e^{-j\Omega t} d\Omega + \int_0^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} \underbrace{X^*(\Omega) e^{-j\Omega t}}_{[X(\Omega) e^{j\Omega t}]^*} d\Omega + \int_0^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(X(\omega) e^{j\omega t} + [X(\omega) e^{j\omega t}]^* \right) d\omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Rezultat

În continuare, folosind faptul că $\forall z \in \mathbb{C}$, avem

$$z + z^* = 2\Re\{z\} \quad (6)$$

și că

$$\Re\{X(\omega)e^{j\omega t}\} = \Re\{|X(\omega)|e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}\} = |X(\omega)|\cos(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (7)$$

Relația (5) devine:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |X(\omega)|\cos(\omega t + \varphi(\omega))d\omega, \quad (8)$$

relație ce justifică afirmația despre semnificația modulului și fazei lui $X(\omega)$.

Proprietățile Transformatei Fourier

Pentru Transformata Fourier vom studia următoarele proprietăți:

- ▶ Liniaritatea
- ▶ Deplasarea în timp
- ▶ Deplasarea în spectru
- ▶ Schimbarea de scală
- ▶ Derivarea în timp
- ▶ Integrarea în timp
- ▶ Conservarea energiei
- ▶ Simetria
- ▶ Convoluția în timp
- ▶ Convoluția în frecvență

Liniaritatea

Fie $x(t)$ și $y(t)$ două semnale de modul integrabil și a și b două constante (reale sau complexe). Liniaritate \Rightarrow transformata Fourier a unei combinații liniare a celor două semnale ponderate cu cele două constante este combinația liniară a transformatelor Fourier a celor două semnale:

$$\mathcal{F}\{ax(t) + by(t)\}(\omega) = a\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) + b\mathcal{F}\{y(t)\}(\omega) \quad (9)$$

Proprietatea este valabilă pentru orice combinație liniară, de oricâte semnale.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{ax(t) + by(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} ax(t)e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} by(t)e^{-j\omega t} dt = \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt + b \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt = a\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) + b\mathcal{F}\{y(t)\}(\omega) \end{aligned} \quad (10)$$

Deplasarea în timp

Deplasarea în timp cu o cantitate constantă t_0 a unui semnal corespunde unei deviații induse în faza spectrului:

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\}(\omega) = X(\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (11)$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t - t_0)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)e^{-j\omega t} dt \stackrel{t-t_0=\tau}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau \\ &= e^{-j\omega t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau}_{X(\omega)} = X(\omega)e^{-j\omega t_0} \end{aligned} \quad (12)$$

Deplasarea în spectru

Deplasarea spectrului unui semnal cu o frecvență constantă ω_0 corespunde înmulțirii semnalului în timp cu o sinusoidă complexă:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega - \omega_0)\}(t) = x(t)e^{j\omega_0 t} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega - \omega_0)\}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) e^{j(\Omega + \omega_0)t} d\Omega \quad \text{unde } \Omega = \omega - \omega_0 \\ &= e^{j\omega_0 t} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega}_{x(t)} = x(t)e^{j\omega_0 t} \end{aligned} \quad (14)$$

Schimbarea de scală

O contracție a semnalului pe axa timpului cu o constantă a corespunde unei relaxări a spectrului cu aceeași constantă și vice-versa.

$$\mathcal{F}\{x(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(at)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt \stackrel{at=\tau}{=} \int_{-S\infty}^{S\infty} x(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \frac{1}{a} d\tau \\ &= \frac{1}{Sa} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau}_{X\left(\frac{\omega}{a}\right)} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

unde cu S s-a notat funcția *signum* (semn),

$$S = \text{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a > 0 \\ -1 & \text{dacă } a < 0 \end{cases}.$$

Exemplificare

Exemplificare pentru $x_2(t) = x_1(2t)$:

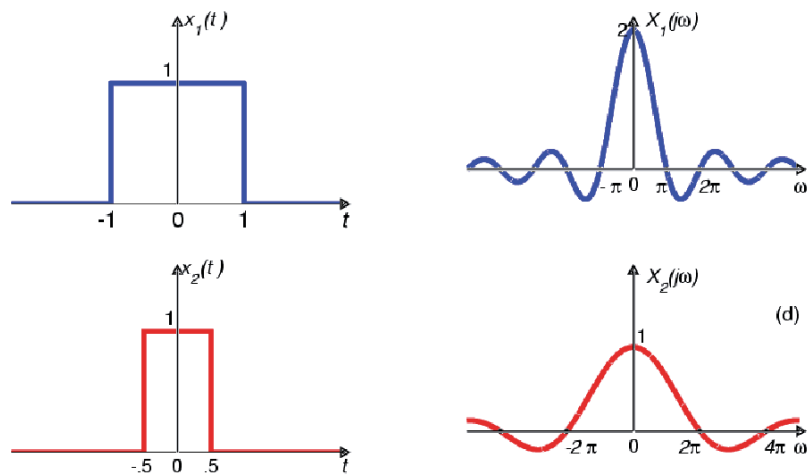


Figura 2: Ilustrarea proprietății de schimbare de scală.

Derivarea în timp

Această proprietate ne va permite să simplificăm semnalul $x(t)$ prin derivare și implicit și calculele transformatei Fourier, urmând ca rezultatul final să țină cont de rezultatul de mai jos:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}(\omega) = j\omega X(\omega) \quad (17)$$

Demonstrație:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (18)$$

Integrarea în timp

Este proprietatea duală proprietății de derivare în timp.

$$\mathcal{F}\left\{\int x(t)dt\right\}(\omega) = \frac{1}{j\omega}X(\omega) \quad (19)$$

Pentru a demonstra această proprietate se aplică relația precedentă.

Conservarea energiei

Proprietate importantă în teoria informației: reprezentarea în domeniul frecvență conține aceeași informație ca semnalul original în spațiul timp, dar de regulă într-un număr mai mic de coeficienți în spațiul transformatei (utilizare în compresia semnalelor).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega\right)}_{x(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j\omega t} dt\right)}_{X^*(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (21)$$

Simetria.

Această proprietate ne ajută atunci când considerăm spectrul unui semnal ca fiind la rândul său un semnal în timp.

$$\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = X(\omega) \Leftrightarrow \mathcal{F}\{X(t)\}(\omega) = 2\pi x(-\omega) \quad (22)$$

Pentru demonstrație se folosește simetria dintre relațiile de transformare directă și inversă ce descriu transformata Fourier.

Convoluția în timp I

Fie $x(t)$ și $y(t)$ două semnale de modul integrabil și $z(t)$ produsul lor de convoluție:

$$z(t) = x(t) \star y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) y(\tau) d\tau \quad (23)$$

Atunci, între transformatele Fourier ale celor trei semnale are loc relația:

$$Z(\omega) = X(\omega) Y(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (24)$$

Demonstrație:

Convoluția în timp II

$$\begin{aligned}
 Z(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) e^{-j\omega t} \underbrace{e^{-j\omega\tau} e^{j\omega\tau}}_{=1} dt d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t - \tau) e^{-j\omega(t - \tau)} dt \right) d\tau \\
 &\stackrel{t - \tau = \theta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta \right)}_{Y(\omega)} d\tau \\
 &= Y(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = X(\omega) Y(\omega)
 \end{aligned}$$

Convoluția în frecvență I

Spectrul semnalului obținut prin produsul a două semnale se obține prin convoluția spectrelor celor două semnale.

Fie $x(t)$ și $y(t)$ două semnale de modul integrabil și fie $z(t)$ semnalul obținut prin produsul lor: $z(t) = x(t)y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Atunci, între transformatele Fourier ale celor trei semnale are loc următoarea relație:

$$\begin{aligned}
 Z(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) \star Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) Y(\omega - \Omega) d\Omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega - \Omega) Y(\Omega) d\Omega
 \end{aligned} \tag{26}$$

Demonstrație:

Convoluția în frecvență II

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) y(\omega - \Omega) d\Omega \right) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) Y(\omega - \Omega) e^{j\omega t} \underbrace{e^{-j\Omega t} e^{j\Omega t}}_{=1} d\omega d\Omega \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega - \Omega) e^{j(\omega - \Omega)t} d\omega \right) d\Omega \\ &\stackrel{\omega - \Omega = \Psi}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\Psi) e^{j\Psi t} d\Psi \right)}_{y(t)} d\Omega \\ &= y(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = x(t) y(t). \end{aligned}$$

Transformatele Fourier ale câtorva semnale de interes

- ▶ impuls Dirac
- ▶ semnal constant
- ▶ cosinus
- ▶ sinus
- ▶ semnal (impuls) dreptunghiular
- ▶ sinus cardinal

T. Fourier a impulsul Dirac

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1. \quad (28)$$

În calculul integralei de mai sus s-a folosit proprietatea de filtrare a impulsului Dirac:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0). \quad (29)$$

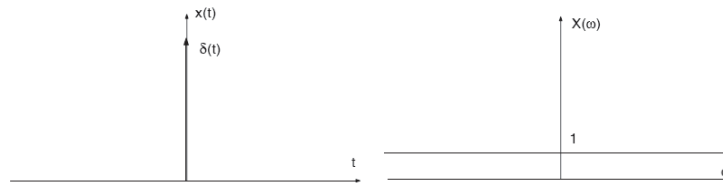


Figura 3: Impulsul Dirac și transformata sa Fourier.

T. Fourier a semnalului constant I

Transformatei Fourier a semnalului constant $x(t) = 1$ nu poate fi calculată direct, din cauza imposibilității calculului limitei

$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-j\omega t}$. Folosim rezultatul anterior și aplicăm proprietatea simetriei transformatei Fourier, care afirmă că două funcții fac pereche Fourier indiferent care din ele e exprimată în timp și care în frecvență. Rezultatul anterior poate fi scris compact ca:

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1(\omega) \quad (30)$$

de unde, aplicând (22), avem:

$$1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega). \quad (31)$$

Într-adevăr, calculând transformata Fourier inversă a semnalului $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$, avem

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t} d\omega = 1 = x(t) \quad (32)$$

T. Fourier a semnalului constant II

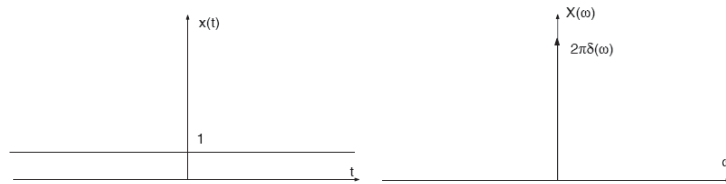


Figura 4: Semnalul constant și transformata sa Fourier.

Observație: în descompunerea unui semnal constant ca o sumă de sinusoidे întră *numai* componenta de frecvență zero, adică semnalul constant!

T. Fourier a funcției cosinus.

Pornim de la forma hiperbolică a funcției cosinus $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ și folosim rezultatul anterior și teorema deplasării în frecvență:

$$\begin{aligned}
 1 &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega) \\
 e^{-j\omega_0 t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \\
 e^{+j\omega_0 t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \\
 \cos(\omega_0 t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))
 \end{aligned} \tag{33}$$

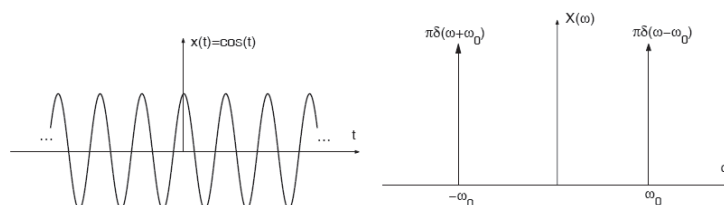


Figura 5: Semnalul cosinusoidal pur și transformata sa Fourier.

T. Fourier a funcției sinus

Transformata Fourier a semnalului $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ se poate deduce în mod similar pornind de la:

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad (34)$$

La fel ca în cazul transformatei Fourier a semnalului constant, rezultatul obținut mai sus este intuitiv, întrucât arată faptul că descompunerea unui semnal cosinusoidal pur de frecvență ω_0 ca o sumă de cosinusoide este compusă dintr-o *singură* cosinusoidă, și anume cea pe frecvența respectivă!

T. Fourier a semnalului dreptunghiular I

Fie semnalul $x(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } |t| \leq T \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (35)$$

Transformata Fourier a lui $x(t)$ se calculează după cum urmează:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-T}^T e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T}^T = \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{j\omega} \\ &= \frac{2j \sin(\omega T)}{j\omega} = 2T \operatorname{sinc}(\omega T) \end{aligned} \quad (36)$$

unde cu $\operatorname{sinc}(x)$ am notat funcția sinus cardinal:

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (37)$$

T. Fourier a semnalului dreptunghiular II

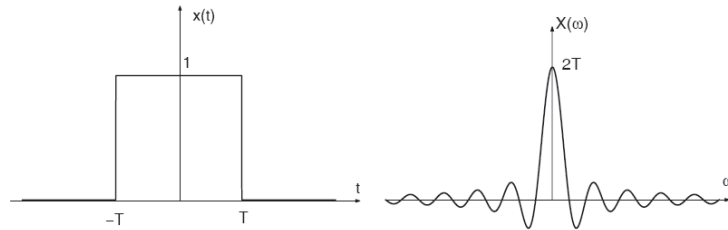


Figura 6: Semnalul de tip dreptunghiular și transformata sa Fourier.

T. Fourier a semnalului sinus cardinal

Aplicând rezultatului anterior teorema simetriei și folosind faptul că semnalul dreptunghiular e par, rezultă că transformata Fourier a unui semnal de tip sinus cardinal, sinc, este o funcție dreptunghiulară (de tip "box"):

$$\text{sinc}(\omega_0 x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_0} & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (38)$$

Rezultatul este extrem de util în proiectarea filtrelor liniare.

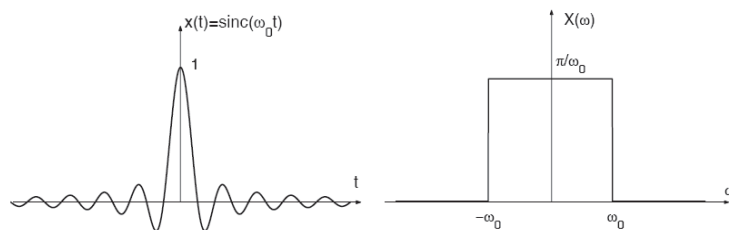


Figura 7: Semnalul de tip sinus cardinal și transformata sa Fourier.

Eșantionarea semnalelor

Teorema eșantionării și condiția Nyquist

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Brașov, România

January 7, 2015

Introducere

- ▶ Teorema eșantionării sau Teorema Nyquist-Shannon este deosebit de importantă pentru trecerea de la domeniul funcțiilor (semnalelor) continue la domeniul funcțiilor (semnalelor) discrete
- ▶ Importanță practică - în conversia semnalelor analogice în semnale digitale
- ▶ Discretizarea semnalelor se face *în timp*^{*} și *în valoare*[†]
- ▶ D.p.d.v. ingineresc, eșantionarea reprezintă a procesul conversiei unui semnal, a unei funcții continue de timp, într-o secvență sau șir de valori, adică într-o funcție discretă a de timp

^{*}proces ce poartă a numele de *eșantionare*.

[†]proces ce poartă a numele de *cuantizare*

Context I

Fie $x(t)$ un semnal de modul integrabil, al cărui spectru $X(\omega)$ este dat de transformata Fourier:

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

Semnalul $x(t)$ poate fi recuperat din spectrul $X(\omega)$ prin transformată Fourier inversă:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{+j\omega t} d\omega \quad (2)$$

Vom presupune în continuare că a spectrul semnalului este mărginit, de forma celui din Figura 1. Mărginirea spectrului se exprimă astfel:

Context II

$$|X(\omega)| = 0 \quad \forall \omega > \Omega_{max}, \quad (3)$$

unde Ω_{max} este frecvența maximă din spectrul semnalului.

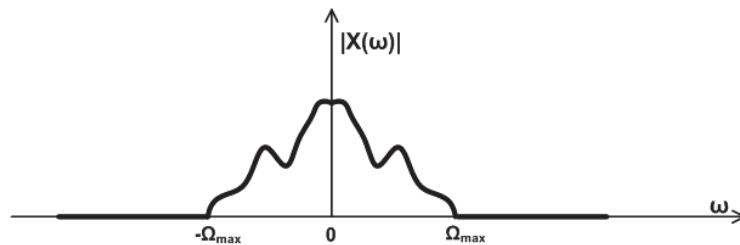


Figura 1: Exemplu de spectru mărginit.

Enunțul teoremei eșantionării

Un semnal $x(t)$ de spectru mărginit poate fi complet reconstruit din eșantioanele sale, cu condiția ca frecvența de eșantionare T_e să fie cel puțin dublul frecvenței maxime Ω_{max} a semnalului.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \text{sinc}(\Omega_{max}(t - kT_e)), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4)$$

$x(kT_e)$ reprezintă eșantioane prelevate din semnalul original, la momente de timp kT_e (multipli întregi de perioada de eșantionare), egal distanțate. Acesta reprezintă cazul eșantionării *uniforme*.

Condiția Nyquist

Versiunea originală a teoremei, care aparține lui Shannon, este următoarea: *Dacă o funcție $x(t)$ nu conține frecvențe mai mari decât B Hz, atunci ea este complet determinată de valorile funcției într-o serie de puncte distanțate la $\frac{1}{2B}$ secunde.*

Condiția ca frecvența de eșantionare să fie măcar dublul frecvenței maxime din spectrul semnalului poartă numele de *condiție Nyquist*.

$$\Omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{\Omega_{max}}} = 2\Omega_{max} \quad (5)$$

$$T_e = \frac{2\pi}{\Omega_e} = \frac{\pi}{\Omega_{max}} \quad (6)$$

Demonstrație originală (Shannon)

Fie $X(\omega)$ spectrul semnalului $x(t)$. Atunci:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{+2\pi W} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

deoarece $X(\omega)$ este zero în afara intervalului (benzii) W de frecvențe. Dacă $t = \frac{n}{2W}$, unde n este un întreg, atunci:

$$x\left(\frac{n}{2W}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{+2\pi W} X(\omega) e^{j\omega \frac{n}{2W}} d\omega$$

În partea stângă avem valorile eșantioanelor prelevate din $x(t)$. Integrala din partea dreaptă reprezintă coeficientul n al dezvoltării în serie Fourier a funcției $X(\omega)$, considerând intervalul $[-W, +W]$ ca perioadă fundamentală. Dar funcția $x(t)$ poate fi refăcută din spectrul $X(\omega)$, deci poate fi refăcută din eșantioanele sale.

Funcția de eșantionare

Eșantioanele semnalului se obțin prin înmulțirea semnalului cu funcția de eșantionare de tip “pieptene” de eșantionare (Figura 2), formată dintr-o sumă sau succesiune de impulsuri Dirac, egal distanțate în timp cu perioada de eșantionare.

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_e) \quad (7)$$

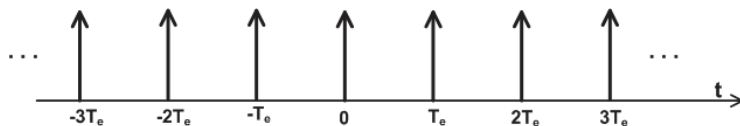


Figura 2: Funcția “pieptene” de eșantionare.

Periodizarea spectrului

Consecința eșantionării o reprezintă periodicizarea a spectrului semnalului original cu Ω_e (vezi Figura 3), ca urmare a descompunerii în serie Fourier a spectrului semnalului original folosită în demonstrația teoremei.

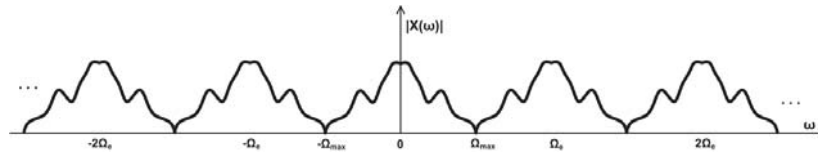


Figura 3: Periodizarea spectrului.

Refacerea semnalului original

Conform teoremei, reconstrucția semnalului este realizată ca o interpolare, o sumă de funcții sinus cardinal ponderate cu valorile eșantioanelor $x(kT_e)$ ale semnalului. Relația (4) reprezintă o descompunere a semnalului original $x(t)$ într-o bază ortonormată de funcții $\{f_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (Fig. 4), unde:

$$f_k(t) = \text{sinc}(\Omega_{\max}(t - kT_e)) \quad (8)$$

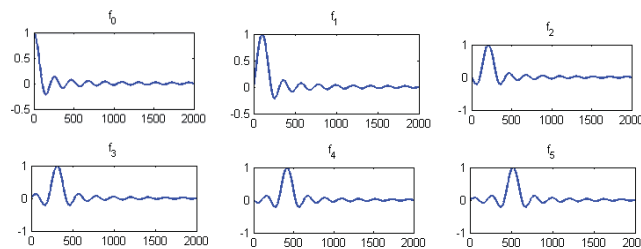


Figura 4: Baza de funcții sinus cardinal pentru $k = \overline{0..5}$.

Tipuri de eșantionare - în funcție de frecvența Ω_e

- ▶ eșantionare *corectă*, când $\Omega_e = 2\Omega_{max}$
- ▶ *supraeșantionare*, pentru $\Omega_e > 2\Omega_{max}$
 - ▶ se realizează o separare netă între replicile spectrale, deci semnalul poate fi refăcut corect
- ▶ *subeșantionare*, $\Omega_e < 2\Omega_{max}$ **nu e îndeplinită cond. Nyquist!**
 - ▶ apare fenomenul de *aliere* (suprapunerea replicilor spectrale)
 - ▶ imposibilitatea refacerii corecte a semnalului original din eșantioanele prelevate
 - ▶ spectrul semnalului refăcut va conține frecvențe aparent înalte dar care sunt frecvențe joase din prima replică spectrală, amestecate (aliante) cu cele din spectrul de bază (Fig. 5)

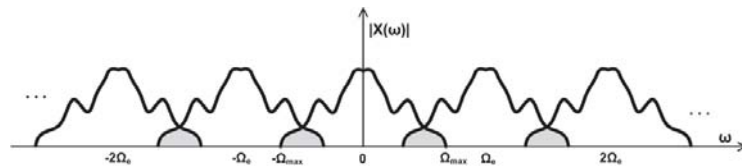


Figura 5: Manifestarea fenomenului de aliere în domeniul spectral.

Exemplu de eșantionare corectă

Fie $x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + A_3 \sin(\omega_3 t + \varphi_3)$,
cu $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = 3\omega_1$:

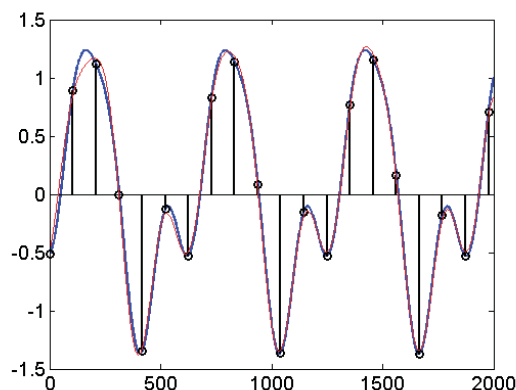


Figura 6: Semnalul $x(t)$ original, eșantionat și reconstruit, în cazul eșantionării corecte cu $\Omega_e = 6\omega_1$. **Observație:** semnalul original (2000 de puncte), reconstruit din doar 20 de eșantioane.

Exemple / aplicații și considerente practice

- ▶ semnal vocal
 - ▶ telefonie: frecvențe cuprinse aprox. 300 - 3400 Hz
 - ▶ banda alocată: 4 kHz (cu interval de gardă)
 - ▶ frecvență eșantionare: 8 kHz
- ▶ semnal audio (Hi-Fi)
 - ▶ frecvențe cuprinse între 200 - 20.000 Hz (22 kHz),
 - ▶ frecvențe tipice de eșantionare: 44.1 kHz (CD), 48 kHz, 88.2 kHz sau 96 kHz

În practică, atunci când nu se cunoaște frecvența maximă din spectrul semnalului, se utilizează un filtru de gardă (filtru trece-jos cu frecvența maximă de tăiere cunoscută).

Subeșantionare și aliere

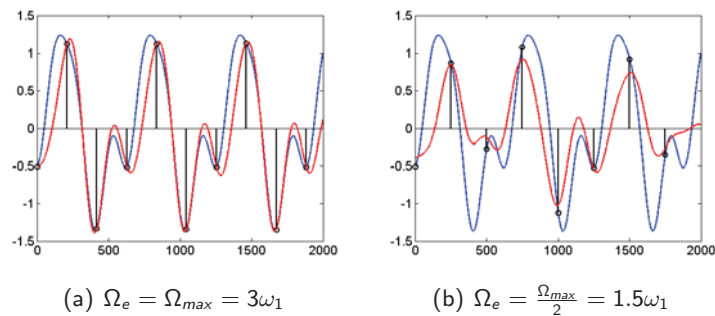


Figura 7: Semnalul $x(t)$ original, eșantionat și reconstruit în cazul unei subeșantionări cu (a) $\Omega_e = 3\omega_1$ și (b) $\Omega_e = 1.5\omega_1$.

Semnalul original nu mai poate fi refăcut din eșantioanele prelevate, dacă nu a fost respectată condiția Nyquist.

Exemplu de aliare - effect Moire

Un alt punct de vedere

Reluăm aceeași problemă, pornind din nou de la mărginirea spectrului semnalului:

$$|X(\omega)| = 0, \quad \forall \omega > \Omega, \quad (9)$$

cu Ω frecvența maximă a acestuia (spectrul semnalului).

Semnalul original $x(t)$ poate fi recuperat din spectrul său $X(\omega)$ astfel:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (10)$$

Construcție

Dezvoltăm spectrul $X(\omega)$ al semnalului nostru într-o *serie Fourier* în interiorul intervalului $[-\Omega, +\Omega]$. Observații:

- ▶ Dezvoltarea în serie Fourier - de regulă pentru semnale *de timp*
- ▶ Pentru un semnal reprezentat în frecvență - o construcție matematică valabilă indiferent de semnificația fizică
- ▶ Dacă coeficienții dezvoltării în serie Fourier a unui semnal temporal reprezintă componente frecvențiale, atunci, invers, semnificația fizică a coeficienților dezvoltării unui semnal de frecvență va fi de componente *temporale*.
- ▶ Dezvoltarea în serie Fourier - numai pentru semnale *periodice* → descompunerea semnalului nu este valabilă *decât* în interiorul intervalului considerat, $[-\Omega, +\Omega]$.

Dezvoltarea în serie Fourier a spectrului semnalului

Dacă perioada funcției (în cazul de față 2Ω), atunci dezvoltarea în serie Fourier complexă va fi:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{jn \frac{2\pi}{2\Omega_{\max}} \omega} \quad \forall \omega \in [-\Omega, +\Omega]. \quad (11)$$

unde ξ_n sunt coeficienții dezvoltării, ce pot fi calculați ca:

$$\xi_n = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} X(\omega) e^{-jn \frac{2\pi}{2\Omega} \omega} d\omega. \quad (12)$$

Prin identificarea termenilor din (12) și (10), rezultă că ξ_n sunt valori ale semnalului original $x(t)$ la anumite momente de timp:

$$\xi_n = \frac{\pi}{\Omega} x\left(-n \frac{\pi}{\Omega}\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (13)$$

Calcule (continuare)

Înlocuim pe $X(\omega)$ dat de (12) în relația (10) și obținem:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{+\Omega} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{jn \frac{2\pi}{2\Omega_{max}} \omega} \right) e^{j\omega t} d\omega \\&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \int_{-\Omega}^{+\Omega} e^{j \underbrace{\left(t + n \frac{\pi}{\Omega} \right) \omega}_{\stackrel{\text{not}}{=} \alpha}} d\omega.\end{aligned}\tag{14}$$

Calcule (continuare)

Integrala precedentă poate fi scrisă astfel:

$$\begin{aligned}\int_{-\Omega}^{+\Omega} e^{j\alpha\omega} d\omega &= \frac{1}{j\alpha} e^{j\alpha\omega} \Big|_{-\Omega}^{+\Omega} = \frac{e^{j\alpha\Omega} - e^{-j\alpha\Omega}}{j\alpha} \\&= \frac{2j \sin(\alpha\Omega)}{j\alpha} = 2\Omega \text{sinc}(\alpha\Omega).\end{aligned}\tag{15}$$

Înlocuind (15) în (14), obținem:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} 2\Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n \text{sinc} \left(\Omega \left(t + n \frac{\pi}{\Omega} \right) \right).\tag{16}$$

Calculare (continuare)

În relația anterioară înlocuim valorile ξ_n date de (13):

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \Omega \frac{\pi}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(-n \frac{\pi}{\Omega}\right) \operatorname{sinc}\left(\Omega\left(t + n \frac{\pi}{\Omega}\right)\right), \quad (17)$$

de unde, reducând termeni și introducând notația

$$T_e \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\pi}{\Omega}, \quad (18)$$

și schimbând variabila după care se face sumarea $k = -n$ obținem relația finală ce reprezintă teorema eșantionării:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \operatorname{sinc}(\Omega(t - kT_e)), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Interpretare

- Din relația (19) concluzionăm că, având disponibile numai valorile semnalului $x(t)$ într-o mulțime discretă de puncte, respectiv la valori de timp distanțate cu cantitatea T_e una față de alta, putem calcula valoarea semnalului la *orice* moment de timp $t \in \mathbb{R}$.
- Notând cu Ω_e frecvența corespunzătoare valorii T_e definite în (18), avem:

$$\Omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{\Omega}} = 2\Omega, \quad (20)$$

ceea ce justifică afirmația din enunțul teoremei conform căreia frecvența de eșantionare trebuie să fie cel puțin dublul frecvenței maxime a semnalului.

Refacerea semnalului original

- ▶ Reconstrucția semnalului din eșantioanele sale se face printr-o sumă de funcții de tip *sinus cardinal*, ponderate cu valorile eșantionate ale semnalului.
- ▶ Relația (19) ne dă descompunerea semnalului original $x(t)$ în baza ortonormală de funcții $\{f_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ cu

$$f_k(t) \stackrel{\text{not}}{=} \text{sinc}(\Omega(t - kT_e)). \quad (21)$$

Observații I

- ▶ Funcția $X(\omega)$ nu este periodică \rightarrow descompunerea acesteia în serie Fourier nu este valabilă decât în intervalul $[-\Omega, +\Omega]$
- ▶ Pentru ca descompunerea (11) să fie valabilă pentru $\forall \omega \in \mathbb{R}$, ar trebui considerat semnalul obținut prin periodizarea lui $X(\omega)$ cu perioada 2Ω
- ▶ Vom considera semnalul $\tilde{X}(\omega)$ obținut ca:

$$\tilde{X}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(\omega - 2k\Omega), \quad (22)$$

atunci relația (11) devine:

$$\tilde{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n e^{jn \frac{2\pi}{2\Omega_{\max}} \omega} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

cu coeficienții ξ_n dați de (12).

Observații II

- ▶ Valorile ξ_n nu sunt altceva decât eșantioanele semnalului continuu \rightarrow *spectrul semnalului eșantionat cu frecvența Ω_e se obține prin periodizarea spectrului semnalului continuu cu perioada Ω_e* (vezi Figura 8)
- ▶ Dacă semnalul este eșantionat cu o frecvență de eșantionare mai mică decât dublul frecvenței maxime ($\Omega_e < 2\Omega$) atunci în spectrul semnalului apare fenomenul de *aliere*, iar semnalul original nu mai poate fi recuperat din eșantioanele sale!
- ▶ Periodizarea spectrului semnalului prin eșantionare ne conduce la o modalitate practică de a recupera originalul, adică semnalul continuu, din versiunea sa eșantionată: prin aplicarea unui filtru trece-jos cu frecvența de tăiere $\Omega_t \in [\Omega, \Omega_e - \Omega]$.

Periodizarea spectrului

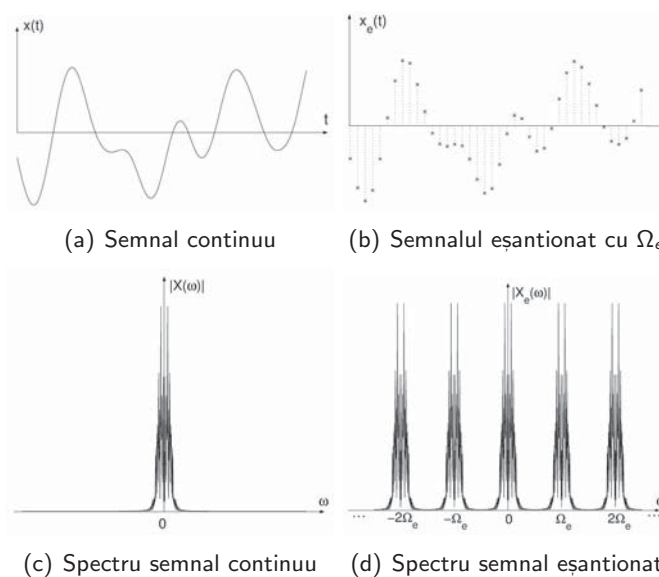


Figura 8: Legătura între spectrele semnalului continuu și al celui

Semnale discrete. Sisteme de timp discret

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Braşov, România

January 7, 2015

Introducere

- ▶ În urma discretizării în timp a unui semnal continuu $x(t)$, cu $t \in \mathbb{R}$, se obţine secvenţa de eşantioane (sau semnalul discret) $x[n]$, cu $n \in \mathbb{Z}$
- ▶ Procesul de discretizare se face în condiţiile date de teorema eşantionării a lui Shannon, adică respectând condiţia Nyquist (conform căreia frecvenţa de prelevare a eşantioanelor semnalului trebuie să fie dublul frecvenţei maxime din spectrul semnalului respectiv)

Operații elementare cu semnale discrete

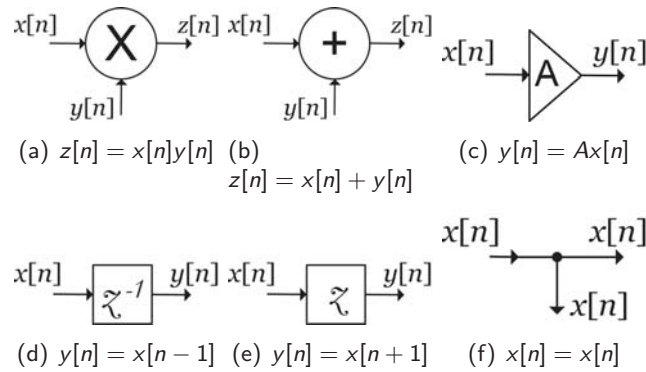


Figura 1: Operații cu $x[n]$ și $y[n]$: modulatorul—sau produsul punct cu punct, sumatorul, multiplicatorul, blocul de întârziere în timp, blocul de devansare în timp, nodul de realizare a unei copii a secvenței originale.

Operația de inversare a axei timpului, deosebit de utilă pentru implementarea produsului de convoluție în timp: $y[n] = x[-n]$.

Mărimi caracteristice

Energia totală a unei secvențe $x[n]$ este definită ca fiind:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \quad (1)$$

O secvență de lungime infinită de valori discrete finite s-ar putea să nu aibă o energie finită.

Puterea medie pentru o secvență neperiodică $x[n]$ este definită astfel:

$$P_x = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^{+K} |x[n]|^2 \quad (2)$$

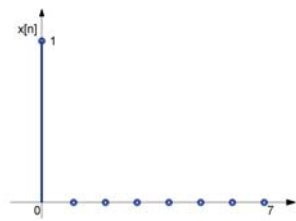
Semnale discrete - *impulsul unitate*

Reprezintă varianta discretă a impulsului Dirac:

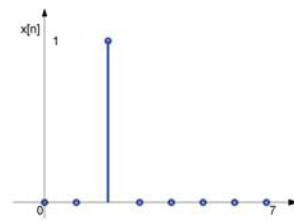
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Impulsul unitate deplasat în timp cu k eșantioane:

$$\delta[n - k] = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases} \quad (4)$$



(a) Impuls unitate



(b) Imp. unitate deplasat cu $k = 2$

Semnale discrete - *treaptă unitate*

Semnalul discret *treaptă unitate*, notat cu $\mu[n]$ este:

$$\mu[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (5)$$

cu varianta sa deplasată în timp, cu k eșantioane:

$$\mu[n] = \begin{cases} 1, & n \geq k \\ 0, & n < k \end{cases} \quad (6)$$

Relații de legătură

Relațiile de legătură dintre impulsul unitate și semnalul treaptă unitate sunt următoarele:

$$\mu[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] \quad (7)$$

$$\delta[n] = \mu[n] - \mu[n - 1] \quad (8)$$

Sisteme de timp discret (STD)

- ▶ Funcția unui STD - de a prelucra o secvență (semnal discret) de intrare pentru a produce sau a genera o secvență sau un semnal discret de ieșire
- ▶ Sunt sisteme de tip SISO (single-input single-output) - vezi Figura 2
- ▶ În practică, cele mai multe semnale sunt digitale iar operațiile conduc tot la semnale digitale
- ▶ De obicei un STD se mai numește *filtru digital* deși nu este obligatoriu implementat cu un procesor cu reprezentarea datelor în virgulă fixă



Figura 2: Reprezentarea schematică a unui sistem de timp discret.

Exemple de sisteme de timp discret

În continuare vom prezenta câteva sisteme de timp discret des utilizate în practică:

- ▶ Acumulatorul
- ▶ Derivatorul (practic un filtru trece-sus)
- ▶ Filtrul de mediere (practic un filtru trece-jos)
- ▶ Interpolatorul

Acumulatorul

Poate cel mai simplu exemplu de sistem de timp discret este *acumulatorul* care este definit de următoarea relație între intrare și ieșire:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n] = y[n-1] + x[n] \quad (9)$$

Răspunsul acumulatorului la momentul n , adică $y[n]$, este suma eșantioanelor secvenței $x[n]$ de la $-\infty$ până la momentul actual n . Practic acumulatorul realizează o însumare a tuturor eșantioanelor unui semnal discret, de la $-\infty$ până la n .

Derivatorul

$$y[n] = x[n] - x[n-1] = x[n+1] - x[n] \quad (10)$$

Exercițiu: Calculați ieșirea unui sistem discret de timp care implementează derivata secundă, pe baza ecuației (10).

Filtrul de mediere I

Filtrul de mediere (cu fereastră glisantă) se numește *M-point moving average filter* în limba engleză și este definit astfel:

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k] \quad (11)$$

Un astfel de sistem este des utilizat pentru a *netezi** variațiile aleatorii dintr-un semnal (cu alte cuvinte, de a reduce zgomotul aleator de bandă largă suprapus peste semnalul util). Să considerăm următorul exemplu: peste semnalul original (util) $s[n]$, unde $s[n] = 2[n(0.9)^n]$ se suprapune un zgomot aleator $d[n]$. Rezultatul este un semnal afectat de zgomot (distorsionat) - vezi Figura 3.

Filtrul de mediere II

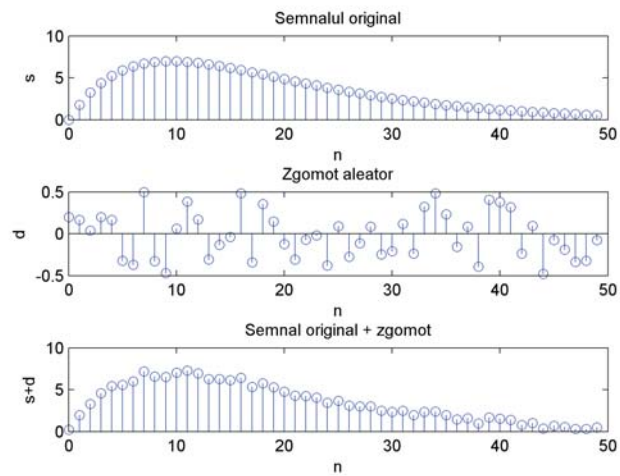
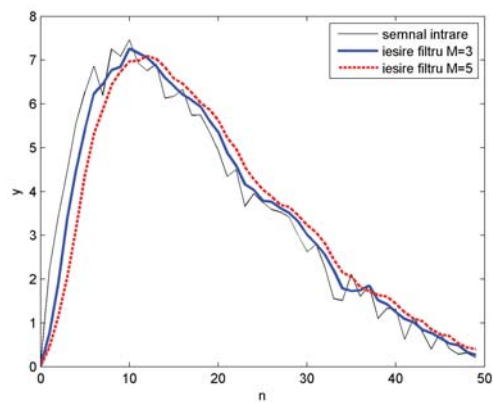


Figura 3: Semnalul util peste care s-a suprapus zgomot.

Filtrul de mediere III

Dacă filtrăm semnalul afectat de zgomot cu un filtru de mediere obținem, în funcție de valoarea parametrului M :



Filtrul de mediere IV

Figura 4: Semnalul de intrare și ieșirea filtrului de mediere pentru $M = 3$ și $M = 5$.

Ce observați?

- ▶ defazaj / întârziere în timp
- ▶ M - mare, efect mediere mai pronunțat

*(engl.) smoothing.

Interpolarea liniară I

Un alt exemplu de sistem de timp discret este acela al interpolării liniare des utilizate pentru estimarea valorilor (lipsă) dintre perechi de eșantioane adiacente ale unui semnal discret. Într-o primă fază semnalul discret $x[n]$ este supraeșantionat și se obține $x_u[n]$. După care noul semnal discret obținut, ce conține zerouri în locurile în care vom dori să calculăm valorile unor noi eșantioane, este trecut printr-un sistem de timp discret care realizează operația de interpolare. În cazul interpolării liniare, valorile noilor eșantioane se situează pe o dreaptă ce unește perechile adiacente de eșantioane din secvența inițială (vezi Figura 5).

Interpolarea liniară II

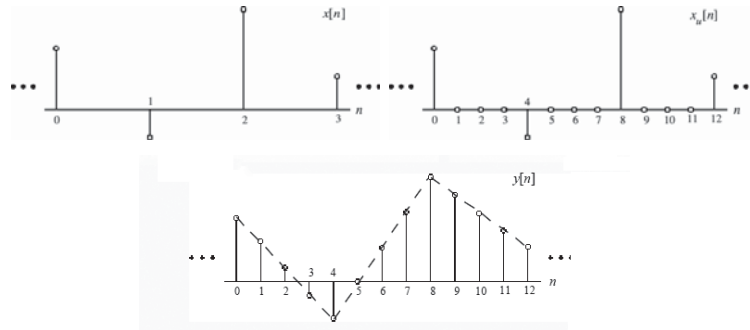


Figura 5: Ilustrarea metodei de interpolare liniară (după S.K. Mitra).

Interpolarea liniară III

În cazul unui interpolator cu factor 2, ieșirea sistemului de timp discret se calculează folosind relația:

$$y[n] = x_u[n] + \frac{1}{2} (x_u[n-1] - x_u[n+1]) \quad (12)$$

În mod similar, în cazul unui interpolator cu factor 3, ieșirea acestuia se calculează astfel:

$$y[n] = x_u[n] + \frac{1}{3} (x_u[n-1] - x_u[n+2]) + \frac{2}{3} (x_u[n-2] - x_u[n+1]) \quad (13)$$

Funcția care implementează supraeșantionarea este:

$$x_u[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (14)$$

Clasificarea sistemelor de timp discret

Clasificarea acestora se bazează pe relația dintre intrarea și ieșirea unui astfel de sistem:

- ▶ Sisteme liniare
- ▶ Sisteme invariante în timp (sau la translație)
- ▶

Sisteme liniare

Sisteme pentru care se respectă principiul superpoziției: dacă pentru un sistem de timp discret $y_1[n]$ și $y_2[n]$ sunt răspunsurile sistemului pentru secvențele de intrare $x_1[n]$ și respectiv $x_2[n]$, atunci pentru o secvență de tip combinație liniară

$x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$, răspunsul sistemului va fi $y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$.

Acumulatorul este un exemplu de sistem liniar. Pentru două secvențe discrete $x_1[n]$ și $x_2[n]$, ieșirile acumulatorului vor fi:

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_1[k], \quad y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_2[k] \quad (15)$$

Ieșirea acumulatorului pentru semnalul de intrare $\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n (\alpha x_1[k] + \beta x_2[k]) = \alpha \sum_{k=-\infty}^n x_1[k] + \beta \sum_{k=-\infty}^n x_2[k] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] \quad (16)$$

Sisteme invariante la translație

Pentru un sistem de timp discret invariant la translație (sau invariant în timp), dacă $y_1[n]$ este răspunsul la intrarea $x_1[n]$, atunci răspunsul la o nouă intrare de forma $x[n] = x_1[n - n_0]$ este la rândul său deplasat în timp: $y[n] = y_1[n - n_0]$. Cu alte cuvinte, răspunsul sistemului invariant în timp la un anumit stimul este același indiferent de momentul de timp la care am aplicat la intrare acel stimul. Proprietatea de invarianță în timp/la translație este obligatorie pentru cele mai multe sisteme de timp discret folosite în practică, cum ar fi filtrele.

Există sisteme care respectă atât proprietatea de liniaritate cât și pe cea de invarianță în timp - acestea poartă numele de sisteme liniare invariante în timp. Astfel de sisteme sunt ușor de analizat din punct de vedere matematic și drept urmare ușor de proiectat și implementat.

Sisteme cauzale

Ieșirea $y[n_0]$ a unui sistem cauzal depinde doar de valorile de intrare $x[n]$ pentru $n \leq n_0$ și nu depinde de eșantioanele cu $n > n_0$. Cu alte cuvinte, modificări ale eșantioanelor de la ieșire nu pot precede modificărilor în semnalul de la intrare. Trebuie menționat faptul că această proprietate este valabilă doar pentru sistemele cu aceeași rată de eșantionare atât la intrare, cât și la ieșire.

Sisteme stabile

Există mai multe definiții ale stabilității unui sistem. Un sistem de timp discret este stabil dacă și numai dacă, pentru orice intrare limitată superior și ieșirea este limitată superior: dacă pentru stimulul $x[n]$, răspunsul sistemului este $y[n]$ și dacă $|x[n]| < B_x$ pentru toate valorile lui n , atunci și $|y[n]| < B_y$ pentru toate valorile lui n , unde B_x și B_y sunt constante (finite). Acest tip de stabilitate se numește BIBO (bounded-input, bounded-output).

Sisteme pasive și fără pierderi

Un sistem se numește pasiv dacă pentru orice semnal de intrare $x[n]$ de energie finită, ieșirea $y[n]$ are cel mult aceeași energie (bineînțeles, tot finită). În cazul în care se îndeplinește egalitatea, se spune despre sistem că este *fără pierderi*.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y[n]|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty \quad (17)$$

Răspunsul la impulsul unitate

Răspunsul unui sistem de timp discret la un semnal de tip impuls unitate $\delta[n]$ se notează cu $\{h[n]\}$ și reprezintă coeficienții ce descriu acel sistem. Concret, pentru un sistem de forma:

$$y[n] = \alpha_1 x[n] + \alpha_2 x[n-1] + \alpha_3 x[n-2] + \alpha_4 x[n-3] \quad (18)$$

dacă $x[n] = \delta[n]$, atunci:

$$h[n] = \alpha_1 \delta[n] + \alpha_2 \delta[n-1] + \alpha_3 \delta[n-2] + \alpha_4 \delta[n-3] \quad (19)$$

Prin urmare, răspunsul sistemului la impulsul unitate este în cazul de față o secvență finită de lungime 4 dată de:

$$\{h[n]\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \quad (20)$$

Transformata Fourier Discretă & Transformata Fourier Rapidă

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Braşov, România

January 7, 2015

Transformata Fourier Discretă (TFD)

- ▶ Odată cu discretizarea semnalelor se pune problema calculului transformatei Fourier pentru semnale discrete
- ▶ În cazul unei secvenţe de lungime finită $x[n]$, de lungime N , cu $0 \leq n \leq N - 1$, se vor calcula doar N valori ale funcţiei $X(\omega)$ în spaţiul transformatei Fourier
- ▶ Aceste N valori discrete de frecvenţă (practic eşantioane ale axei continue de frecvenţe) $\omega = \omega_k$, unde $0 \leq k \leq N - 1$ sunt suficiente pentru a reprezenta în mod unic secvenţa $x[n]$.
- ▶ Cea mai simplă relaţie între secvenţa de lungime finită $x[n]$, cu $0 \leq n \leq N - 1$, şi transformata Fourier $X(\omega)$, se obţine pentru o eşantionare uniformă a axei frecvenţelor ω , între $0 \leq \omega \leq 2\pi$ la valori $\omega_k = \frac{2k\pi}{N}$, cu $0 \leq k \leq N - 1$

TFD directă

$$X[k] = X(\omega)|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (1)$$

$X[k]$ s. n. *Transformată Fourier Discretă*^{*} este la rândul ei o secvență finită, de lungime N , dar în domeniul frecvență.

Deseori, se preferă notarea funcțiilor discrete de tip sinus complex ce alcătuiesc baza de funcții a TFD cu $W_N = e^{-\frac{j2\pi k}{N}}$, și-atunci ecuația (1) devine:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (2)$$

^{*}Discrete Fourier Transform, DFT, în limba engleză.

TFD inversă

Relația inversă a transformatei Fourier discrete[†] este dată de:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3)$$

Pentru a verifica simplu și rapid bijectivitatea TFD, înmulțim ecuația (3) cu W_N^{ln} și apoi însumăm termenii obținuți, cu n de la 0 la $N-1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{ln} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \right) W_N^{ln} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-(k-l)n} \end{aligned} \quad (4)$$

[†]Inverse Discrete Fourier Transform, IDFT în limba engleză.

Observație

Dacă schimbăm ordinea operațiilor de însumare din partea dreaptă a ecuației precedente, obținem:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{ln} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] W_N^{-(k-l)n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \left[\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-kn} \right] \quad (5)$$

Partea dreaptă a ecuației obținute se reduce la $X[l]$ în baza următoarei identități:

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-(k-l)n} = \begin{cases} N, & \text{pentru } k-l = rN, \quad r \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases} \quad (6)$$

Prin urmare, am arătat că ecuația (3) se verifică și reprezintă relația de transformare inversă pentru transformata Fourier discretă.

Exemple I

Fie secvența finită $x[n]$, de lungime N , pentru $0 \leq n \leq N-1$:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Secvența este ilustrată în Figura 1 pentru $N = 8$. TFD $X[k] = 1$ (modul și fază).

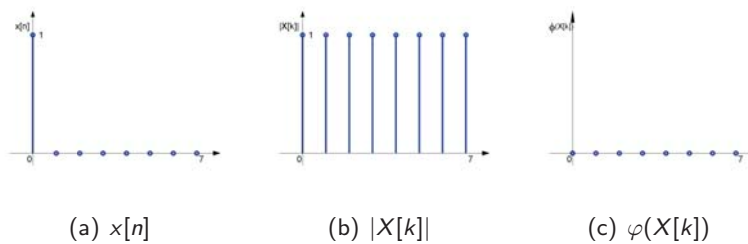


Figura 1: Exemplul 1.

Exemple II

Fie secvența finită $y[n]$, de lungime N , pentru $0 \leq n \leq N - 1$:

$$y[n] = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Rezultatul este $Y[k] = W_N^{km}$, iar modul și faza ilustrate în Fig. 2.

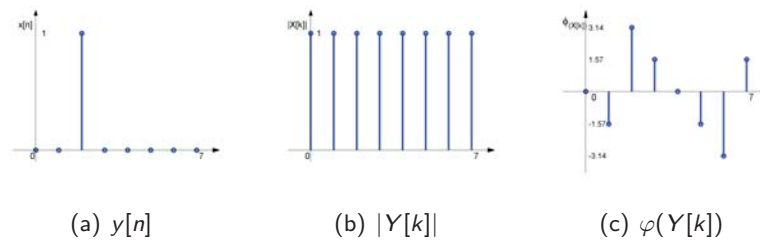


Figura 2: Exemplul 2.

Transformata Fourier Rapidă

- ▶ Transformata Fourier Rapidă[‡] se referă la modalități de eficientizare a calculului transformatei Fourier discrete
- ▶ Este motivul pentru care transformata Fourier s-a impus și continuă să fie utilizată cu succes în foarte multe aplicații
- ▶ Algoritmii de calcul ai transformatei Fourier rapide sunt implementați în procesoarele digitale de semnal[§]
- ▶ Pentru calculul unei singure valori în spațiul transformatei (pentru un anumit k) sunt necesare N operații (înmulțiri și adunări), iar toate aceste calcule sunt necesare pentru fiecare $k = 0, N - 1$
- ▶ Complexitatea sau ordinul de timp al algoritmului de calcul este $O(N^2)$

[‡]Fast Fourier Transform (FFT), în limba engleză.

[§]Digital Signal Processors (DSPs), în limba engleză.

Transformata Fourier Rapidă (cont.)

Cu alte cuvinte, pentru a calcula transformata Fourier discretă este necesară efectuarea unui număr de N^2 înmulțiri complexe, pe un vector de date de lungime N .

Algoritmul FFT clasic a fost propus de James W. Cooley și John Tukey în 1965 și are ordinul de timp în $O(N \cdot \log_2 N)$, pentru N o putere a lui 2 ($N = 2^k$) și are două variante:

- ▶ cu decimare în timp
- ▶ cu decimare în frecvență

Algoritmul FFT cu decimare în timp I

Se exprimă spectrul eșantionat $X(k)$ ca două sume separate, în funcție de secvența pară respectiv cea impară a semnalului:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)w_N^{2kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)w_N^{k(2n+1)} \quad (7)$$

unde $w_N^{2kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2kn} = w_{\frac{N}{2}}^{kn}$ și atunci ecuația (7) devine:

$$\begin{aligned} X(k) &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)w_{\frac{N}{2}}^{kn}}_{X_{par}(k)} + \left[\underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)w_{\frac{N}{2}}^{kn}}_{X_{impar}(k)} \right] \cdot w_N^k \\ &= X_{par}(k) + w_N^k \cdot X_{impar}(k) \end{aligned} \quad (8)$$

Cu $X_{par}(k)$ am notat transformata Fourier discretă a eșantioanelor pare ale secvenței $x(n)$ iar cu $X_{impar}(k)$ transformata Fourier

Algoritmul FFT cu decimare în timp II

discretă a eșantioanelor impare ale secvenței $x(n)$. Transformata Fourier discretă are proprietatea că este simetrică față de mijlocul secvenței, astfel încât pentru $k = 0, \frac{N}{2} - 1$ avem:

$$\begin{aligned} X_{par}(k + \frac{N}{2}) &= X_{par}(k) \\ w_N^{k + \frac{N}{2}} \cdot X_{impar}(k + \frac{N}{2}) &= -w_N^k \cdot X_{impar}(k) \end{aligned} \quad (9)$$

Atunci pentru secvența/semnalul discret $x[n]$, cu $n = 0, N - 1$ secvența FFT asociată pentru $k = 0, \frac{N}{2} - 1$ este:

$$\begin{cases} X(k) &= X_{par}(k) + w_N^k \cdot X_{impar}(k) \\ X(k + \frac{N}{2}) &= X_{par}(k) - w_N^k \cdot X_{impar}(k) \end{cases} \quad (10)$$

Algoritmul FFT cu decimare în timp III

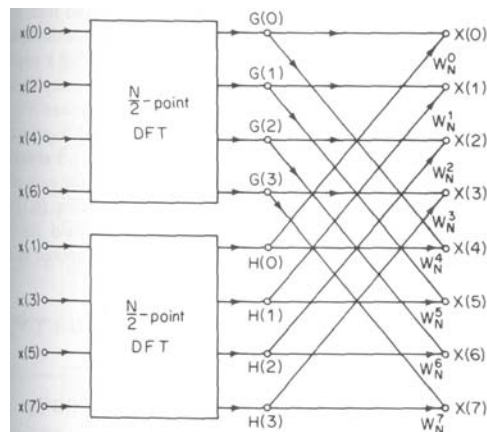


Figura 3: Decimare în timp - primul pas.

Algoritmul FFT cu decimare în timp IV

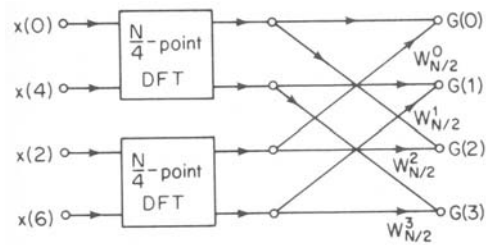


Figura 4: Decimare în timp - al doilea pas.

Algoritmul FFT cu decimare în timp V

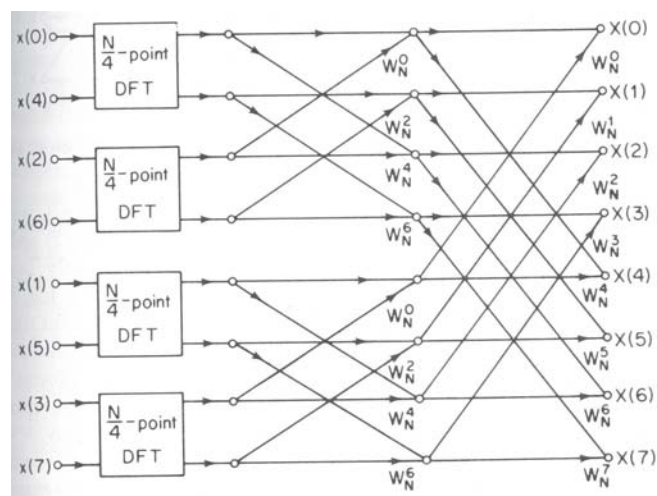


Figura 5: Decimare în timp - al treilea pas.

Algoritmul FFT cu decimare în timp VI

Celula de tip fluture[¶] pentru calculul coeficienților secvenței FFT este prezentată în Figura 6.

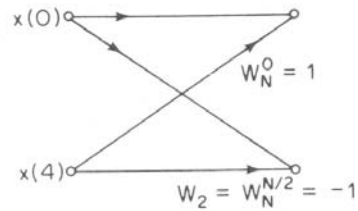


Figura 6: Celula de calcul FFT.

Configurația pentru calculul transformatei Fourier rapide este prezentată în Figura 7

Algoritmul FFT cu decimare în timp VII

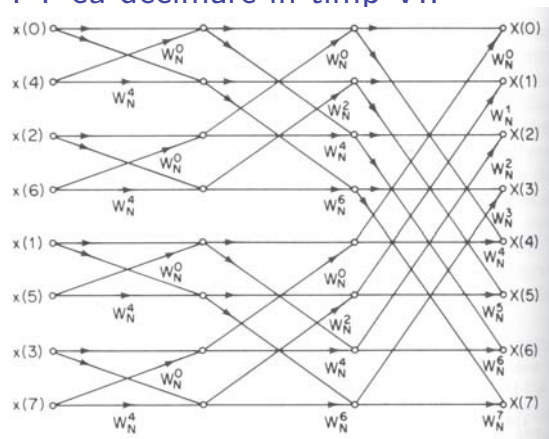


Figura 7: Structura de calcul FFT cu decimare în timp pentru $N = 8$.

Algoritmul FFT cu decimare în timp VIII

Observând că $W_N^{N/2} = e^{-j(2\pi/N) \cdot N/2} = e^{-j\pi} = -1$ se poate simplifica celula de calcul FFT:

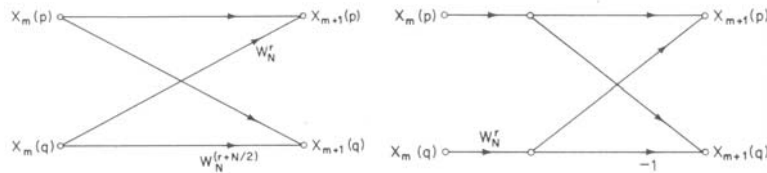


Figura 8: Celula simplificată de calcul FFT conține doar o înmulțire complexă.

Cu această simplificare, structura de calcul FFT pentru $N = 8$ devine:

Algoritmul FFT cu decimare în timp IX

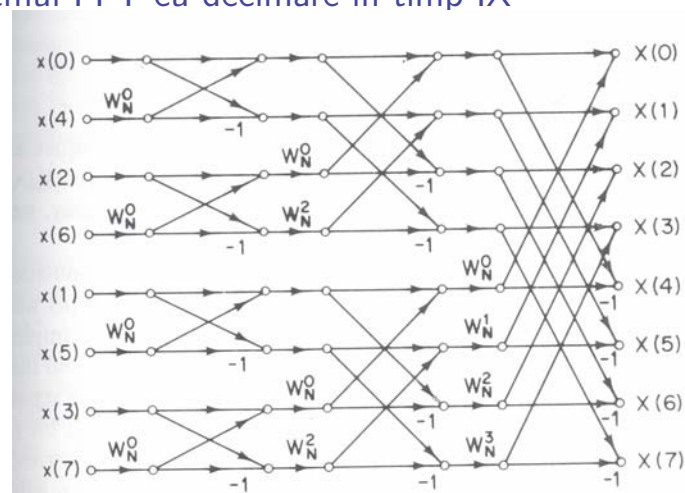


Figura 9: Structura de calcul FFT cu decimare în timp pentru $N = 8$.

Algoritmul FFT cu decimare în timp X

Dacă ordonăm atât intrările, cât și ieșirile se obține următoarea structură:

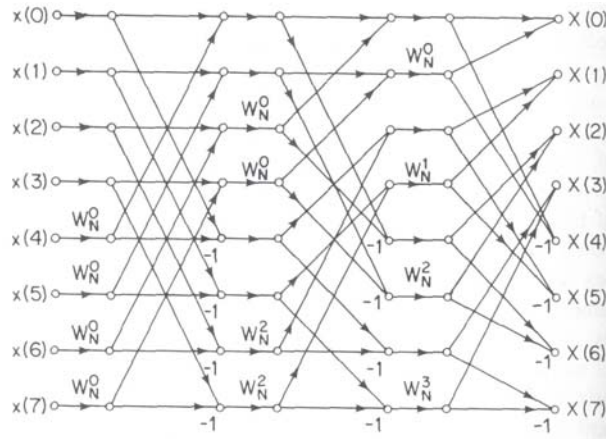


Figura 10: Structura de calcul FFT cu decimare în timp pentru $N = 8$.

¶(engl.) butterfly.

Algoritmul FFT cu decimare în frecvență I

De această dată se dezvoltă termenii pari respectiv cei impari ai transformatei Fourier discrete:

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w_N^{2kn} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) w_N^{2kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) w_N^{2k\left(n + \frac{N}{2}\right)} \quad (11)$$

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) w_{\frac{N}{2}}^{kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) w_{\frac{N}{2}}^{kn} \quad (12)$$

Notăm cu $\inf x(n)$ subsecvența primelor $\frac{N}{2}$ eșantioane și cu $\sup x(n)$ subsecvența ultimelor $\frac{N}{2}$ eșantioane ale secvenței inițiale:

$$X(2k) = X\{\inf x(n)\} + X\{\sup x(n)\} \quad (13)$$

Procedând în mod similar pentru $X(2k + 1)$, obținem:

Algoritmul FFT cu decimare în frecvență II

$$X(2k + 1) = X\{\inf x(n) \cdot w_N^n\} - X\{\sup x(n) \cdot w_N^n\} \quad (14)$$

pentru $k = 0, \overline{\frac{N}{2} - 1}$.

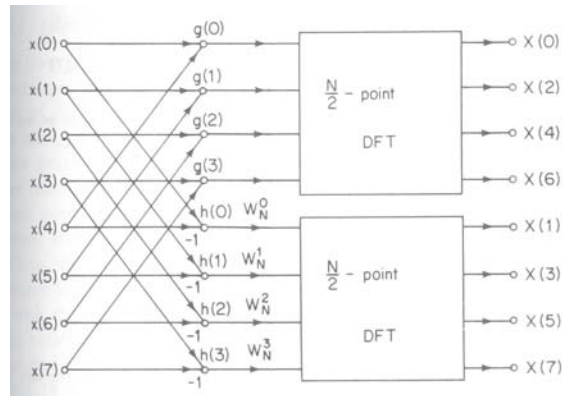


Figura 11: Decimarea în frecvență pentru $N = 8$ - primul pas.

Algoritmul FFT cu decimare în frecvență III

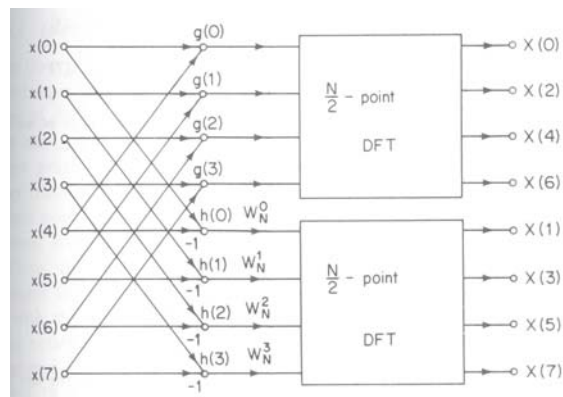


Figura 12: Decimarea în frecvență pentru $N = 8$ - al doilea pas.

Ținând cont de celula de calcul FFT în 2 puncte:

Algoritmul FFT cu decimare în frecvență IV

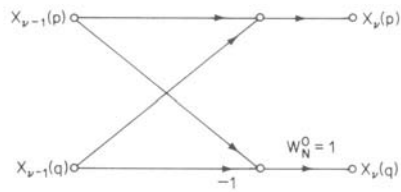


Figura 13: Celulă de tip fluture pentru decimarea în frecvență.

Se obține următoarea structură de calcul FFT pentru $N = 8$ cu decimare în frecvență:

Algoritmul FFT cu decimare în frecvență V

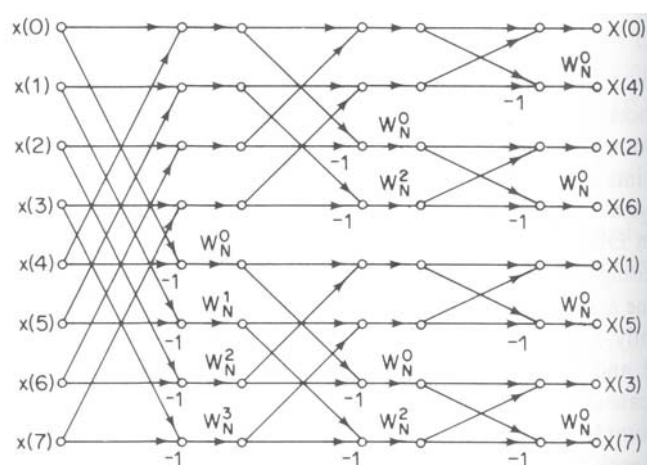


Figura 14: Structura de calcul FFT cu decimare în frecvență pentru $N = 8$.

Aplicații calcul FFT



Figura 15: .

Analiza timp-frecvență a semnalelor

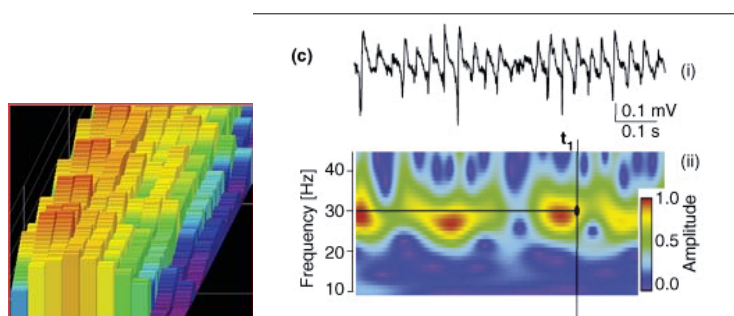


Figura 16: Analiză timp-frecvență.

Semnalul **chirp** I

Semnal cosinusoidal de frecvență liniar crescătoare $\omega_i(t) = \omega_0 + \beta t$

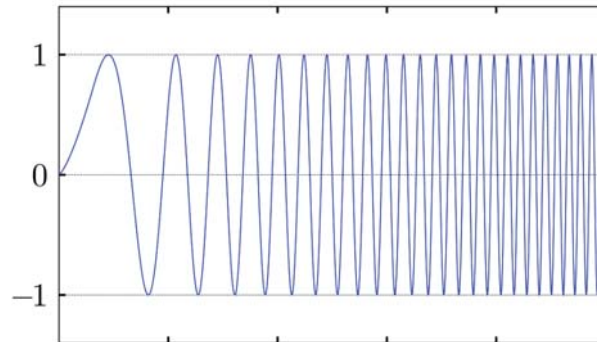


Figura 17: Semnal chirp.

Semnalul **chirp** II

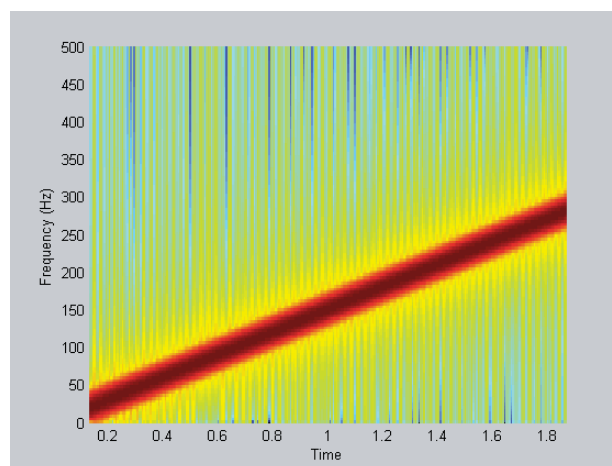


Figura 18: Spectrograma semnalului chirp.

Filtrul trece-jos ideal (filtrul *sinc*)

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Braşov, România

January 7, 2015

Introducere

- ▶ contextul: filtre liniare (modelate cu ajutorul sistemelor liniare invariante în timp)
- ▶ filtrele trece-jos (FTJ) au rolul de a rejecta (elimina) frecvenţele *înalte* din spectrul semnalului de la intrare
- ▶ proiectarea şi implementarea unui FTJ ideal: specificarea frecvenţei de tăiere ω_T
 - ▶ frecvenţele mai mici de ω_T nu sunt alterate
 - ▶ frecvenţele mai mari de ω_T sunt atenuate complet (eliminate)

Sisteme liniare

Un sistem se numește *liniar* dacă, aplicând la intrarea sa o combinație liniară a două semnale $ax_1(t) + bx_2(t)$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, semnalul de ieșire va fi de forma $ay_1(t) + by_2(t)$, unde $y_1(t)$ și $y_2(t)$ sunt răspunsurile sistemului la intrările $x_1(t)$, respectiv $x_2(t)$ (vezi Figura 1).



Figura 1: Sistem liniar.

Sisteme invariante în timp

Sistemul se numește *invariant în timp* dacă acțiunea sa asupra unui semnal $x(t)$ este aceeași indiferent de momentul la care este aplicat semnalul respectiv la intrarea sistemului, conform Figurii 2. Cu alte cuvinte, pentru un același stimul (semnal) aplicat la intrare, răspunsul sistemului este același indiferent de momentul de timp la care este aplicat stimulul.

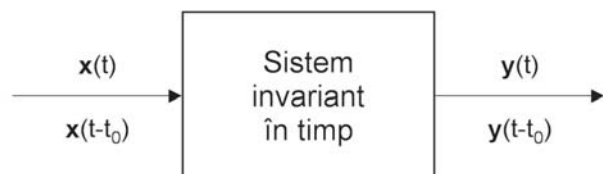


Figura 2: Sistem invariant în timp.

Sisteme liniare invariante în timp (SLIT)

- ▶ SLIT (*filtrele liniare*) au ca funcții proprii semnalele sinusoidale \Rightarrow contextul analizei Fourier a semnalelor
- ▶ dacă aplicăm la intrarea unui filtru liniar un semnal sinusoidal de frecvență ω_0 , semnalul de ieșire va fi tot o sinusoidă de frecvență ω_0 (cu amplitudinea și faza modificate față de sinusoida de intrare)
- ▶ un filtru liniar este complet caracterizat de o funcție care descrie modificarea amplitudinii și a fazei sinusoidelor pentru fiecare frecvență ω_0 , funcție care se numește *funcție de răspuns în frecvență*, notată cu $H(\omega)$
- ▶ în ipoteza că $j\omega = s$, transformata Fourier = transformata Laplace \rightarrow răspunsul în frecvență = funcție de transfer
- ▶ dacă semnalul $x(t)$ aplicat la intrarea filtrului liniar nu este sinusoidal, putem explica forma semnalului de ieșire $y(t)$ tot prin reducere la cazul sinusoidal
- ▶ conform analizei Fourier, orice semnal de modul integrabil $x(t)$ poate fi descompus într-o sumă (infinită) de semnale pur sinusoidale

Context matematic I

Fie transformata Fourier a semnalului $x(t)$:

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

Ținând cont de faptul că transformata Fourier este bijectivă, putem reface semnalul $x(t)$ din spectrul $X(\omega)$, adică îl putem scrie pe $x(t)$ sub forma:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

Relația (2) reprezintă exact descompunerea dorită a semnalului $x(t)$ într-o sumă de sinusoide complexe pure.

Context matematic II

Apoi, pentru *fiecare* componentă sinusoidală de frecvență ω din semnal, putem calcula faza și amplitudinea la ieșire în funcție de cele de la intrare precum:

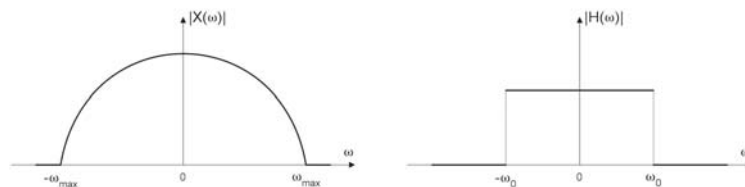
$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad \forall \omega, \quad (3)$$

după care recompunem semnalul de ieșire sumând toate sinusoidale $Y(\omega)$:

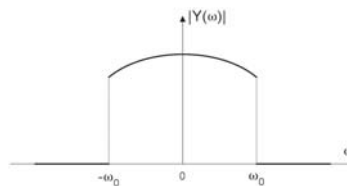
$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4)$$

Filtrul trece-jos (FTJ) ideal / *filtrul sinc*

FTJ ideal lasă să treacă nealterate toate componentele spectrale de frecvențe mai mici decât pragul ω_0 , iar componentele de frecvențe superioare pragului sunt complet rejectate.



(a) Spectrul mărginit al s. de intrare. (b) Modulul filtrului trece-jos ideal.



(c) Spectrul semnalului de la ieșirea filtrului.

Filtrarea trece-jos ideală în domeniul frecvență

- ▶ fie un semnal $x(t)$ de spectru mărginit (de forma Figura 3(a))
- ▶ ne propunem să filtrăm acest semnal cu un FTJ ideal cu frecvența de tăiere $\omega_0 < \omega_{max}$ (modulul funcției de transfer este prezentat în Figura 3(b))
- ▶ rezultatul operației de filtrare în domeniul frecvență va fi $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$; deci, la ieșirea filtrului, semnalul $y(t)$ va avea, teoretic, un spectru Fourier de amplitudine de forma celui din Figura 3(c)
- ▶ semnalul $y(t)$ poate fi construit din spectrul $Y(\omega)$ cf. (4).
- ▶ etapele de mai sus sunt prezentate în Figura 4.

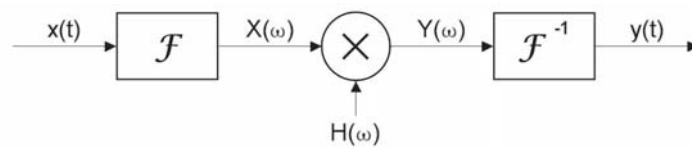


Figura 4: Schema bloc a filtrării în domeniul frecvență.

Modelarea unui FTJ ideal I

Comportamentul filtrului este modelat cu ajutorul unei funcții de transfer $H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$ complexă*

În cazul funcției de transfer a filtrului trece-jos ideal, modulul filtrului (vezi Figura 3(b)) este dat de:

$$|H(\omega)| = \begin{cases} A & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (5)$$

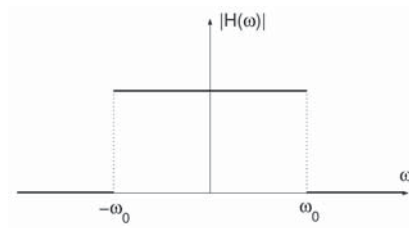
iar faza filtrului este dată de:

$$\phi(\omega) = \begin{cases} -\omega t_0 & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (6)$$

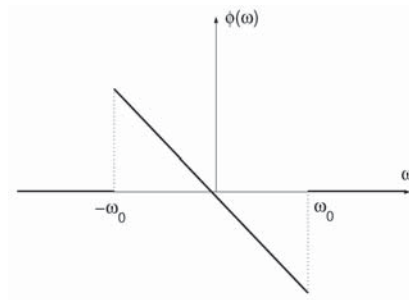
Răspunsul în frecvență (funcția de transfer) al filtrului devine astfel:

$$H(\omega) = \begin{cases} Ae^{-j\omega t_0} & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (7)$$

Modelarea unui FTJ ideal II



(a) Modulul FTJ



(b) Faza FTJ

Modelarea unui FTJ ideal III

- ▶ frecvența ω_0 se numește frecvență de tăiere a filtrului și reprezintă frecvența maximă din semnalul de intrare care este lăsată să treacă de filtru
- ▶ t_0 se numește timp de întârziere de grup și reprezintă întârzierea indusă de filtru în semnal
- ▶ intervalul de frecvențe ω care respectă condiția $|\omega| \leq \omega_0$ se numește *bandă de trecere a filtrului*
- ▶ frecvențele care nu respectă condiția de mai sus alcătuiesc *banda de oprire*
- ▶ pentru un filtru trece-jos care nici nu amplifică, nici nu atenuează componentele de frecvență cuprinse în banda de trecere, $A = 1$.

*un număr complex c sau o funcție complexă se poate scrie sub formă exponențială în funcție de modul și fază, astfel: $c = |c|e^{j\phi}$, unde $|c|$ reprezintă modulul, iar ϕ faza.

Exemplu filtrare FTJ

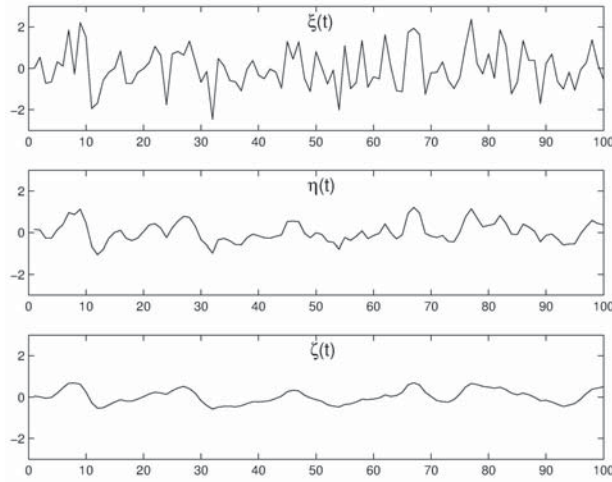


Figura 5: Un semnal $\xi(t)$ de tip zgomot și versiunile sale filtrate cu FTJ cu frecvența de tăiere ω_0 medie, notat $\eta(t)$, respectiv joasă, notat $\zeta(t)$.

Filtrarea trece-jos ideală în domeniul timp I

Considerăm transformata inversă a funcției de transfer, notată $h(t)$ și numită *funcție pondere*:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (8)$$

Astfel, ținând cont de proprietatea transformatei Fourier privind produsul de convoluție, relația (3) poate fi scrisă direct în domeniul temporal:

$$y(t) = h(t) \star x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau \quad (9)$$

Comportamentul filtrului poate fi descris astfel în domeniul timp, utilizând funcția pondere $h(t)$ în locul funcției de transfer (vezi Figura 6).

Filtrarea trece-jos ideală în domeniul timp II

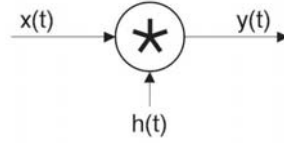


Figura 6: Schema bloc a filtrării în domeniul timp.

Funcția pondere $h(t)$ a filtrului trece-jos ideal se obține aplicând transformata Fourier inversă funcției de transfer:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} A e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{A}{2\pi} \frac{1}{j(t - t_0)} e^{j\omega(t-t_0)} \Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} = \frac{A}{2\pi} \frac{1}{j(t - t_0)} 2j \sin(\omega_0(t - t_0)) \\
 &= \frac{A\omega_0}{\pi} \text{sinc}(\omega_0(t - t_0))
 \end{aligned} \tag{10}$$

Filtrarea trece-jos ideală în domeniul timp III

unde am folosit relația $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$, iar $\text{sinc}(x)$ este funcția sinus cardinal, definită ca:

$$\text{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin(x)}{x} \tag{11}$$

Legătura dintre $H(\omega)$ și $h(t)$ este ilustrată în Figura 7 (a). Deoarece un FTJ nu trebuie să altereze componenta continuă a unui semnal, cu alte cuvinte componenta de frecvență $\omega = 0$ trebuie să treacă prin filtru, pentru un semnal de intrare constant $x(t) = K$, ieșirea filtrului va fi:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = K \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \tag{12}$$

Filtrarea trece-jos ideală în domeniul timp IV

Cum ieșirea filtrului pentru semnalul constant $x(t)$ va fi $y(t) = AK$, rezultă că funcția pondere a filtrului trece-jos trebuie să respecte următoarea condiție de normare:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = A \quad (13)$$

Se observă că $h(t) \neq 0$ pentru $t < 0$, de unde rezultă că filtrul nu este cauzal și, deci, nu poate fi implementat într-un sistem real. Un filtru se numește cauzal dacă semnalul de ieșire apare ca rezultat al aplicării unui semnal la intrarea filtrului, aceasta fiind echivalentă cu condiția $h(t) = 0, \forall t < 0$.

Filtrarea trece-jos ideală în domeniul timp V



Figura 7: Relația dintre funcția de transfer (a) și funcția pondere (b) a unui FTJ prin transformata Fourier.

- ▶ convoluție în timp (exemplu)
- ▶ discuție aproximare funcție sinc cu un număr mic/mare de eșantioane
- ▶ discuție proiectare FTJ în domeniul discret
- ▶ discuție implementare în domeniul frecvență vs. implementare în domeniul timp
- ▶ FTJ introduce o corelație între eșantioanele consecutive ale semnalului

Recapitulare probabilități și statistică

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Brașov, România

January 7, 2015

Noțiunea de probabilitate

Dacă repetăm un experiment de N ori, iar evenimentul A se produce de N_A ori, atunci probabilitatea $P(A)$ de producere a evenimentului A este:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}. \quad (1)$$

În practică vorbim de o *frecvență relativă de apariție*, care devine probabilitate când $N \rightarrow \infty$.

Exemplu aruncarea monezii, aruncarea zarului

Terminologie teoria probabilităților

- ▶ $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ mulțimea tuturor rezultatelor posibile ale unui experiment
- ▶ elementele e_i se numesc realizări experimentale iar submulțimile $A \subset E$ se numesc *evenimente*
- ▶ mulțimea E se numește *evenimentul sigur*
- ▶ mulțimea vidă \emptyset se numește *evenimentul imposibil*
- ▶ submulțimile formate din câte un singur element $\{e_i\}$ se numesc *evenimente elementare*
- ▶ două evenimente A și B se numesc *incompatibile* dacă $A \cap B = \emptyset$

Aruncarea zarului

- ▶ E este mulțimea tuturor celor șase fețe ale zarului
 $E = \{f_1, f_2, \dots, f_6\}$
- ▶ dacă zarul cade, la o aruncare, pe fața f_2 , atunci se produc în același timp evenimentele distincte
 $A = \{\text{față pară}\} = \{f_2, f_4, f_6\}$,
 $B = \{\text{față cu număr} \leq 3\} = \{f_1, f_2, f_3\}$, $C = \{f_2, f_3\}$
- ▶ evenimentele $D = \{\text{față impară}\} = \{f_1, f_3, f_5\}$,
 $E = \{\text{față cu număr} \geq 4\} = \{f_4, f_5, f_6\}$ etc. nu se produc
- ▶ în total, sunt $2^5 = 32$ evenimente distincte care se produc și tot $2^5 = 32$ evenimente care nu se produc simultan, la o singură aruncare a zarului

Axiomele probabilității I

1. Probabilitatea oricărui eveniment este un număr pozitiv:

$$P(A) \geq 0 \quad \forall A \quad (2)$$

2. Probabilitatea evenimentului sigur este egală cu unitatea:

$$P(E) = 1 \quad (3)$$

3. Dacă două evenimente sunt incompatibile, atunci probabilitatea reuniunii celor două evenimente este egală cu suma probabilităților evenimentelor:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (4)$$

Axiomele probabilității II

Observație. Prin extinderea axiomei 3, se poate calcula $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ pentru trei evenimente incompatibile două câte două și tot așa pentru patru ș.a.m.d., cu alte cuvinte, axioma 3 poate fi extinsă pentru orice număr finit de evenimente A_i , $i = 1 \dots, N$. Axioma 3 nu se mai poate extinde, însă, când $N \rightarrow \infty$; deci ea trebuie *completată* pentru a îngloba și cazul unui număr numărabil de mulțimi. Introducem, deci, și axioma 3.1.

- 3.1 Pentru orice mulțime numărabilă de evenimente incompatibile două câte două $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$, cu $A_i \cap A_j = \emptyset$, dacă $i \neq j$, avem:

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) \quad (5)$$

Proprietățile probabilității I

Pe baza celor trei axiome se pot demonstra următoarele proprietăți ale probabilității pe care le vom numera în continuarea axiomelor.

4. $P(\emptyset) = 0$

Demonstrație. Avem $A = A \cup \emptyset$, $\forall A$. Pe de altă parte $A \cap \emptyset = \emptyset$, $\forall A$. Aplicând axioma 3, obținem:

$$P(A) = P(A \cup \emptyset) \stackrel{\text{ax.3}}{=} P(A) + P(\emptyset), \quad (6)$$

de unde rezultă, evident, proprietatea enunțată.

5. $P(\mathcal{C}(A)) = 1 - P(A)$, cu $\mathcal{C}(A) = \{e_i \in E \mid e_i \notin A\}$.

Demonstrație. Avem $A \cup \mathcal{C}(A) = E$ și $A \cap \mathcal{C}(A) = \emptyset$, de unde rezultă:

$$\underbrace{P(E)}_1 = P(A \cup \mathcal{C}(A)) \stackrel{\text{ax.3}}{=} P(A) + P(\mathcal{C}(A)). \quad (7)$$

Proprietățile probabilității II

6. $P(A) \leq 1$, $\forall A$.

Demonstrație. Conform proprietății 5, $P(A) = 1 - P(\mathcal{C}(A))$, iar din axioma 2, $P(\mathcal{C}(A)) \geq 0$.

7. Pentru două evenimente oarecare A și B , avem:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (8)$$

Demonstrație. Putem scrie:

$$A = A \cap E = A \cap (B \cup \mathcal{C}(B)) = (A \cap B) \cup (A \cap \mathcal{C}(B)), \quad (9)$$

și întrucât $(A \cap B) \cap (A \cap \mathcal{C}(B)) = \emptyset$ rezultă, aplicând axioma 3, că:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \mathcal{C}(B)) \quad (10)$$

Proprietățile probabilității III

Pe de altă parte, avem: $A \cup B = (A \cap \mathbb{C}(B)) \cup B$ (vezi Figura 1), cu $(A \cap \mathbb{C}(B)) \cap B = \emptyset$, de unde:

$$P(A \cup B) = P(A \cap \mathbb{C}(B)) + P(B). \quad (11)$$

Eliminându-l pe $P(A \cap \mathbb{C}(B))$ din ecuațiile (10) și (11), obținem relația căutată.

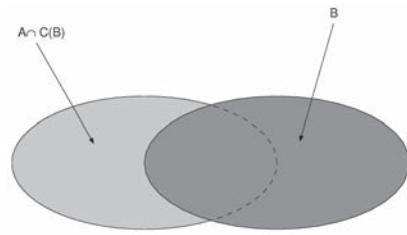


Figura 1: Ilustrarea grafică a relației $A \cup B = (A \cap \mathbb{C}(B)) \cup B$.

Probabilități condiționate. Evenimente independente I

Fie $A, B \subset \Omega$ două evenimente oarecare, cu $P(B) \neq 0$. Se definește probabilitatea evenimentului A condiționat de B ca fiind:

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (12)$$

Probabilitatea de mai sus reprezintă probabilitatea de producere a evenimentului A considerând că evenimentul B s-a produs.

Exemplu. Considerăm experimentul ce constă în aruncarea zarului. Fie evenimentele $A = \{f_2\}$, respectiv $B = \{\text{față pară}\} = \{f_2, f_4, f_6\}$. Evident, avem $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$. Astfel, putem scrie:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}. \quad (13)$$

Rezultatul de mai sus era de așteptat, întrucât $P(A|B)$ reprezintă probabilitatea ca zarul să cadă pe fața f_2 în ipoteza producerii

Probabilități condiționate. Evenimente independente II

evenimentului B , adică știind faptul că zarul a căzut pe o față pară. Invers, putem scrie:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1, \quad (14)$$

ceea ce iarăși e normal, întrucât $P(B|A)$ reprezintă probabilitatea ca zarul să cadă pe o față pară în ipoteza că el a căzut pe fața f_2 .

Definiție. Două evenimente A și B se numesc independente dacă:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (15)$$

Ținând cont de (12), rezultă că dacă A și B sunt independente, avem:

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A), \quad (16)$$

Probabilități condiționate. Evenimente independente III

respectiv

$$P(B|A) = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B), \quad (17)$$

ceea ce justifică definiția (15). Relațiile de mai sus se interpretează în sensul că dacă două evenimente sunt independente, atunci producerea oricăruia dintre ele nu influențează probabilitatea de producere a celuilalt.

Variabile aleatoare

Definiție: o variabilă aleatoare (VA) este o funcție care asociază fiecărui element $e_i \in E$ un număr real.

Vom nota variabilele aleatoare cu litere grecești: ξ, η, ζ, \dots . Putem, deci, scrie că:

$$\xi: E \rightarrow \mathbb{R}. \quad (18)$$

De fiecare dată când se desfășoară experimentul și observăm ca rezultat al acestuia pe e_k , valoarea asociată $\xi(e_k) \stackrel{\text{not}}{=} \xi^{(k)}$ se numește *realizarea particulară* a lui ξ .

Evenimente generate de variabile aleatoare

În practică este de interes cunoașterea probabilității ca o VA să ia valori într-un anumit interval din \mathbb{R} , sau să fie mai mică decât o anumită valoare reală. Probabilitățile însă se definesc pentru evenimente, prin urmare:

Fie ξ o variabilă aleatoare definită pe E și fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Atunci, definim evenimentul $\{x_1 \leq \xi \leq x_2\}$ ca fiind:

$$\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = \left\{ e_i \in E \mid x_1 \leq \xi(e_i) \leq x_2 \right\}. \quad (19)$$

Pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\{x_1 < \xi \leq x_2\}$, $\{\xi < x_1\}$, $\{\xi \geq x_2\}$ etc. nu sunt altceva decât submulțimi ale lui E , ceea ce justifică definirea lor ca evenimente.

Toate probabilitățile menționate pot fi deduse pornind de la expresia funcției de repartiție a variabilei aleatoare.

Funcția de repartiție. Definiție și proprietăți

Se definește funcția de repartiție a unei VA ξ ca $F_\xi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$:

$$F_\xi(x) \triangleq P(\xi \leq x) \quad (20)$$

1. $F_\xi(-\infty) = P(\xi \leq -\infty) = 0$.
2. $F_\xi(\infty) = P(\xi \leq \infty) = 1$.
3. F_ξ e o funcție monoton crescătoare: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,
 $x_1 < x_2 \Rightarrow F_\xi(x_1) \leq F_\xi(x_2)$.

Demonstrație.

$F_\xi(x_2) = P(\xi \leq x_2) = P((\xi \leq x_1) \cup (x_1 < \xi \leq x_2))$. Având în vedere că evenimentele $\{\xi \leq x_1\}$ și $\{x_1 < \xi \leq x_2\}$ sunt incompatibile:

$$F_\xi(x_2) = P(\xi \leq x_1) + P(x_1 < \xi \leq x_2) = F_\xi(x_1) + \underbrace{P(x_1 < \xi \leq x_2)}_{\geq 0}$$

4. $P(x_1 < \xi \leq x_2) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)$.

Funcția de repartiție a VA ξ asociate zarului

$$\forall x \in (-\infty, 1), F_\xi(x) = P(\xi \leq x) = P(\emptyset) = 0$$

$$\forall x \in [1, 2), F_\xi(x) = P(\xi \leq x) = P(\{f_1\}) = \frac{1}{6}$$

$$\forall x \in [2, 3), F_\xi(x) = P(\xi \leq x) = P(\{f_1, f_2\}) = \frac{2}{6}$$

$$\forall x \in [3, 4), F_\xi(x) = P(\xi \leq x) = P(\{f_1, f_2, f_3\}) = \frac{3}{6}$$

$$\forall x \in [4, 5), F_\xi(x) = P(\xi \leq x) = P(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}) = \frac{4}{6}$$

$$\forall x \in [5, 6), F_\xi(x) = P(\xi \leq x) = P(\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}) = \frac{5}{6}$$

$$\forall x \in [6, \infty), F_\xi(x) = P(\xi \leq x) = P(E) = 1$$

Graficul funcției

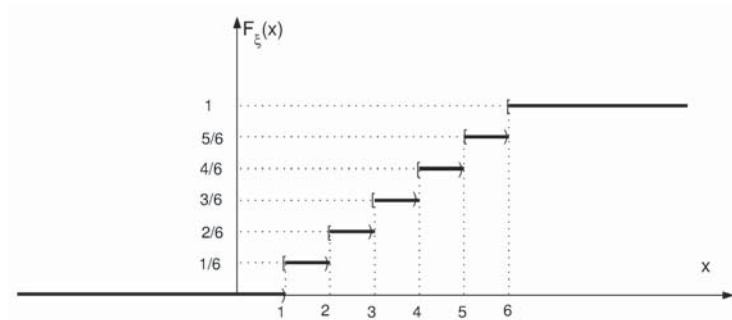


Figura 2: Funcția de repartiție a VA numărul de pe fața zarului.

Definiție. O variabilă aleatoare se numește *continuă* dacă funcția ei de repartiție este continuă pe \mathbb{R} , se numește *discretă* dacă funcția ei de repartiție este o funcție în trepte.

Densitatea de probabilitate I

Densitatea de probabilitate w_ξ a unei VA ξ este derivata funcției sale de repartiție:

$$w_\xi(x) \triangleq \frac{dF_\xi(x)}{dx}. \quad (21)$$

Dacă explicităm derivata în relația de mai sus, obținem:

$$w_\xi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_\xi(x + \Delta x) - F_\xi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < \xi \leq x + \Delta x)}{\Delta x}. \quad (22)$$

Am ținut cont de proprietatea 4 a funcției de repartiție. Rezultă:

$$w_\xi(x)\Delta x \underset{\Delta x \searrow 0}{\approx} P(x < \xi \leq x + \Delta x), \quad (23)$$

Ultima relație justifică denumirea de densitate de probabilitate a funcției w_ξ : valoarea funcției w_ξ într-un punct x permite calculul probabilității ca VA ξ să ia valori într-un interval infinitesimal

Densitatea de probabilitate II

$(x, x + \Delta x]$ (aria de sub graficul lui w_ξ delimitată de $(x, x + \Delta x]$, vezi Figura 3).

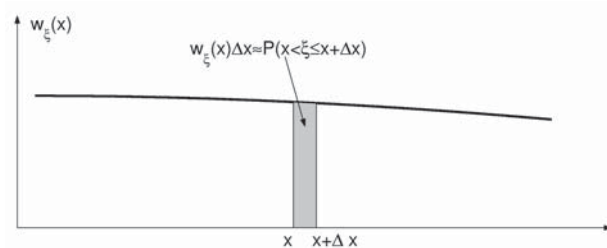


Figura 3: Probabilitatea = aria de sub graficul densității de probabilitate.

Pentru o VA continuă avem că $P(\xi = x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (justificare pentru exemplul zarului, când $N \rightarrow \infty$, zarul devine o sferă, fața devine punct iar probabilitatea fiecărei fețe este $\frac{1}{\infty} = 0$).

Proprietățile densității de probabilitate

1. $w_\xi(x) \geq 0$

Demonstrație. w_ξ este derivata unei funcții crescătoare (F_ξ)

2. $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x w_\xi(u) du.$

Demonstrație. Se ține cont de faptul că F_ξ este primitiva lui w_ξ , și că $F_\xi(-\infty) = 0$

3. Condiția de normare: $\int_{-\infty}^{+\infty} w_\xi(x) dx = 1$

Demonstrație. Se scrie proprietatea 2 în punctul $x = \infty$

4. Pentru $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, avem $\int_{x_1}^{x_2} w_\xi(x) dx = P(x_1 < \xi \leq x_2)$

Demonstrație. Se utilizează proprietatea 2 a densității de probabilitate și proprietatea 4 a funcției de repartiție. Această relație ne arată că aria de sub graficul densității de probabilitate delimitată de un interval reprezintă probabilitatea ca variabila aleatoare să ia valori în intervalul respectiv.

Exemplu (zar)

Funcția de repartiție este constantă peste tot în \mathbb{R} , mai puțin în punctele $x = 1, \dots, 6$, unde are salturi bruște. În derivata funcției de repartiție în aceste puncte vor apărea impulsuri Dirac de arii egale cu $\frac{1}{6}$ (valoarea salturilor).

$$w_{\xi}(x) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \delta(x - i) \quad (24)$$

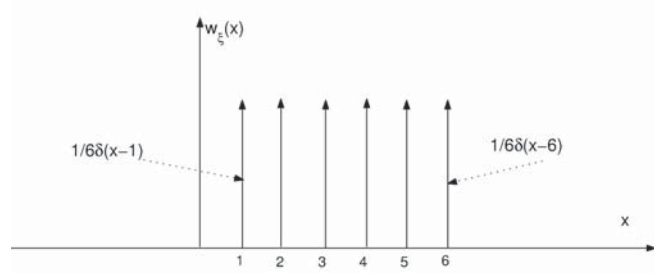


Figura 4: Densitatea de probabilitate a VA *numărul de pe fața zarului*.

Distribuții condiționate

Fie ξ o variabilă aleatoare și A un eveniment oarecare. Prin analogie cu (12), se definește funcția de repartiție a lui ξ condiționată de A :

$$F_{\xi|A}(x) = P((\xi \leq x)|A) = \frac{P((\xi \leq x) \cap A)}{P(A)} \quad (25)$$

În mod similar cu (21), se definește densitatea de probabilitate condiționată:

$$w_{\xi|A}(x) = \frac{dF_{\xi|A}(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P((x < \xi \leq x + \Delta x)|A)}{\Delta x} \quad (26)$$

Exemplu I

Să considerăm o variabilă aleatoare ξ oarecare și evenimentul $A = \{a < \xi \leq b\}$, cu $a < b$ oarecare. Funcția de repartiție condiționată, conform (25), va fi:

$$F_{\xi|\{a < \xi \leq b\}}(x) = \frac{P((\xi \leq x) \cap \{a < \xi \leq b\})}{P(a < \xi \leq b)} = \frac{P((\xi \leq x) \cap \{a < \xi \leq b\})}{F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)} \quad (27)$$

► Pentru $x < a$, avem $\{\xi \leq x\} \cap \{a < \xi \leq b\} = \emptyset$ și deci:

$$F_{\xi|\{a < \xi \leq b\}}(x) = 0 \quad (28)$$

► Pentru $x \in (a, b]$ avem

$\{\xi \leq x\} \cap \{a < \xi \leq b\} = \{a < \xi \leq x\}$, iar (27) se scrie:

$$F_{\xi|\{a < \xi \leq b\}}(x) = \frac{P(a < \xi \leq x)}{F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)} = \frac{F_{\xi}(x) - F_{\xi}(a)}{F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)} \quad (29)$$

Exemplu II

► Pentru $x > b$, avem $\{\xi \leq x\} \cap \{a < \xi \leq b\} = \{a < \xi \leq b\}$, de unde:

$$F_{\xi|\{a < \xi \leq b\}}(x) = \frac{P(a < \xi \leq b)}{F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)} = 1 \quad (30)$$

Densitatea de probabilitate condiționată, aplicând (26), avem:

$$w_{\xi|\{a < \xi \leq b\}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < a \\ \frac{w_{\xi}(x)}{F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)} & \text{dacă } a < x \leq b \\ 0 & \text{dacă } x > b. \end{cases} \quad (31)$$

În Figura 5 sunt ilustrate funcția de repartiție și densitatea de probabilitate condiționate pentru o formă arbitrară a lui $F_{\xi}(x)$.

Exemplu III

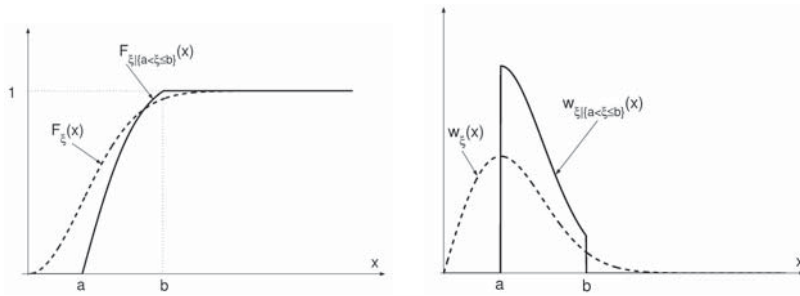


Figura 5: Distribuții condiționate.

Observație: ambele funcții respectă toate proprietățile unei funcții de repartiție, respectiv ale unei densități de probabilitate.

Momente statistice I

Fie o VA ξ având distribuția w_ξ . Se definește **momentul necentrat de ordin k** al variabilei aleatoare ξ și se notează cu $m_\xi^{(k)}$ sau cu $\overline{\xi^k}$ valoarea integralei:

$$m_\xi^{(k)} \stackrel{\text{not}}{=} \overline{\xi^k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k w_\xi(x) dx \quad k = 1, 2, \dots \quad (32)$$

Observație: pentru anumite variabile aleatoare, începând cu un anumit ordin k , momentele de ordin mai mare decât k pot fi infinite

Momentul necentrat de ordin unu (*media* variabilei aleatoare):

$$\overline{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x w_\xi(x) dx \quad (33)$$

Momente statistice II

Momentul necentrat de ordin doi (*media pătratică* a variabilei aleatoare):

$$\overline{\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 w_{\xi}(x) dx \quad (34)$$

Momentele centrate de ordin k ale variabilei aleatoare, notate cu $M_{\xi}^{(k)}$:

$$M_{\xi}^{(k)} \stackrel{\text{not}}{=} \overline{(\xi - \bar{\xi})^k} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{\xi})^k w_{\xi}(x) dx \quad k = 2, 3, \dots \quad (35)$$

Momentul centrat de ordinul doi (*varianța* variabilei aleatoare):

$$M_{\xi}^{(2)} \stackrel{\text{not}}{=} \overline{(\xi - \bar{\xi})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{\xi})^2 w_{\xi}(x) dx \quad (36)$$

Momente statistice III

Rădăcina pătrată a acestuia se notează cu σ_{ξ} și se numește *dispersia* variabilei aleatoare:

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{M_{\xi}^{(2)}} \quad (37)$$

Dispersia unei variabile aleatoare (numită și *abatere medie pătratică*) măsoară gradul de împrăștiere al valorilor variabilei aleatoare față de valoarea medie. Cu cât dispersia este mai mică (sau mai mare), cu atât scade (respectiv crește) probabilitatea ca o realizare particulară a variabilei aleatoare să ia o valoare care să difere puternic de valoarea medie.

În practică, se obișnuiește a se nota varianța ca fiind pătratul dispersiei:

$$M_{\xi}^{(2)} \stackrel{\text{not}}{=} \sigma_{\xi}^2 \quad (38)$$

Momente statistice IV

Pornind de la formula varianței (36), se poate demonstra relația simplă dintre aceasta, media și media pătratică a variabilei aleatoare:

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2x\bar{\xi} + \bar{\xi}^2) w_{\xi}(x) dx \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 w_{\xi}(x) dx}_{\bar{\xi}^2} - 2\bar{\xi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x w_{\xi}(x) dx}_{\bar{\xi}} + \bar{\xi}^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} w_{\xi}(x) dx}_1 \quad (39) \\ &= \bar{\xi}^2 - 2\bar{\xi}^2 + \bar{\xi}^2 = \bar{\xi}^2 - \bar{\xi}^2\end{aligned}$$

Distribuția uniformă I

O variabilă aleatoare ξ are o distribuție uniformă în intervalul $[a, b]$ dacă densitatea ei de probabilitate este de forma:

$$w_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dacă } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (40)$$

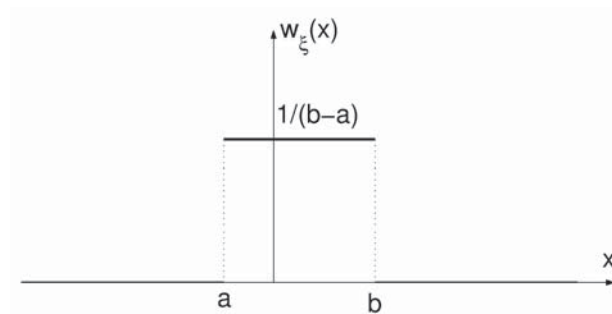


Figura 6: Distribuția uniformă.

Distribuția uniformă II

Forma distribuției indică faptul că o variabilă aleatoare uniformă poate lua cu aceeași probabilitate orice valoare în intervalul $[a, b]$, dar nu poate lua nici o valoare în exteriorul acestuia. Prin calcul

direct, se arată că media și dispersia distribuției uniforme sunt: $\bar{\xi} = \frac{a+b}{2}$ și $\sigma_{\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$. Distribuția uniformă modelează destule

fenomene reale de interes (e.g. eroarea obținută la cuantizarea uniformă cu un număr suficient de mare de nivele).

Distribuția gaussiană (sau normală) I

O variabilă aleatoare este distribuită după o lege normală (sau gaussiană) de parametri $\mu \in \mathbb{R}$ și $\sigma > 0$ (și se notează $\xi: \mathcal{N}(m, \sigma)$) dacă densitatea ei de probabilitate este dată de:

$$w_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (41)$$

Graficul distribuției gaussiene (cunoscut și sub numele de “clopotul lui Gauss”) este prezentat în Figura 7 pentru două valori diferite ale parametrului σ : pe măsură ce σ crește, clopotul se aplatizează și, în același timp, se lățește.

Distribuția gaussiană (sau normală) II

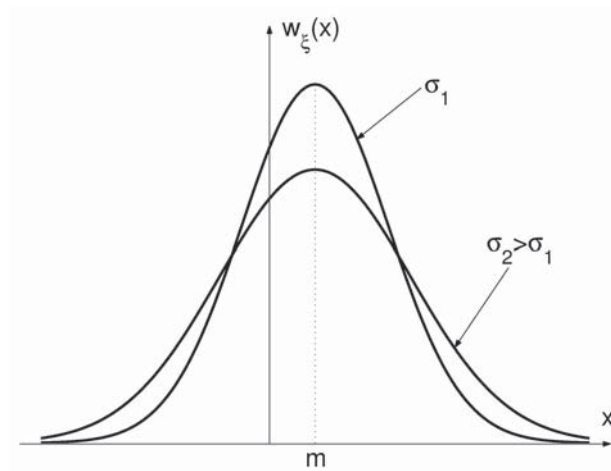


Figura 7: Distribuția normală sau gaussiană.

Distribuția gaussiană (sau normală) III

Prin calcul, se determină că media și dispersia distribuției normale sunt $\bar{\xi} = \mu$, respectiv $\sigma_\xi = \sigma$.

S-a calculat că pentru distribuția gaussiană, probabilitatea ca variabila aleatoare să devieze cu mai mult de 3σ față de valoarea medie este de 0,3%: $P(\mu - 3\sigma \leq \xi \leq \mu + 3\sigma) = 99,7\%$ indiferent de σ .

Distribuția normală este cu siguranță cea mai importantă în studiul prelucrării statistice a semnalelor. Ipoteza de “normalitate” a distribuției multor fenomene reale este justificată de teorema limită centrală (peste 2 cursuri).

Distribuția Rayleigh

$$w_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{dacă } x \geq 0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (42)$$

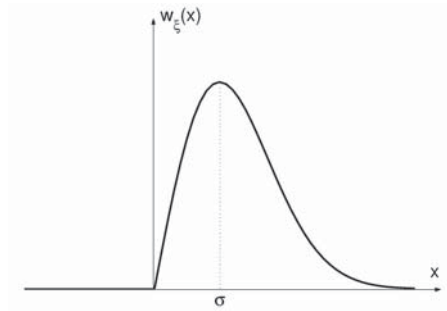


Figura 8: Distribuția Rayleigh.

Media și dispersia sunt $\bar{\xi} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, respectiv $\sigma_{\xi} = \sigma \sqrt{\frac{4-\pi}{2}}$.

Funcții de o variabilă aleatoare

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Brașov, România

January 7, 2015

Context

- ▶ Fie ξ o variabilă aleatoare cu distribuție w_ξ cunoscută
- ▶ și fie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de asemenea cunoscută
- ▶ Obiectiv: aplicând funcția g variabilei ξ , obținem o altă variabilă aleatoare η :

$$\eta = g(\xi) \tag{1}$$

- ▶ Problema: calculul densității de probabilitate a noii variabile aleatoare (w_η) pe baza distribuției variabilei inițiale (w_ξ) și despre funcția de transformare g

Vom ilustra problema pe un exemplu oarecare (funcția $g(x)$ având graficul din Figura 1). Variabila aleatoare ξ ia valori pe axa Ox , în timp ce $\eta = g(\xi)$ pe axa Oy .

Ilustrarea problemei

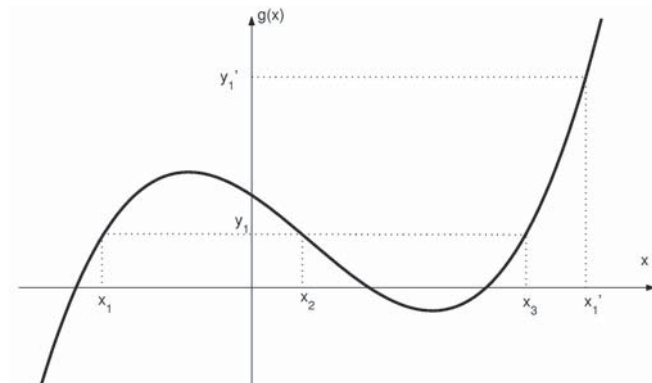


Figura 1: Exemplificarea problemei funcțiilor de o variabilă aleatoare.

Unde trebuie să *danseze* variabila ξ pentru ca variabila η să *danseze* într-un anumit interval dat?

Ilustrarea problemei

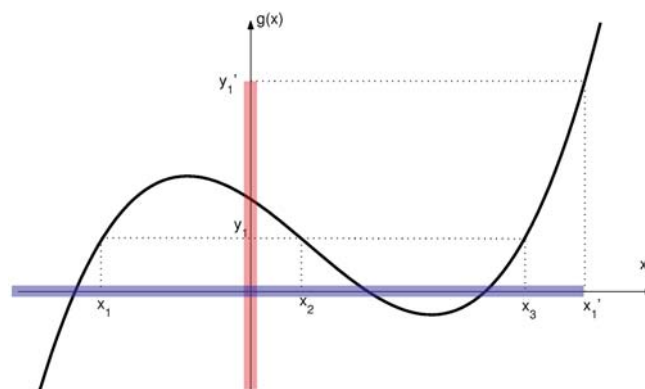


Figura 2: Cazul 1: $\eta \leq y'_1$.

$$F_{\eta}(y'_1) = P(\eta \leq y'_1) = P(\xi \leq x'_1) = F_{\xi}(x'_1) \Big|_{g(x'_1)=y'_1}$$

Ilustrarea problemei

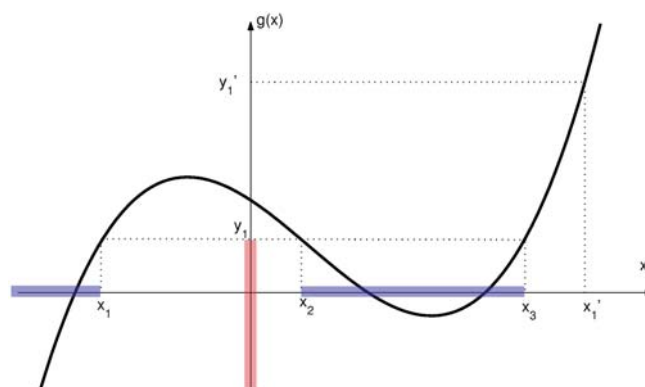


Figura 3: Cazul 2: $\eta \leq y_1$.

$$\begin{aligned}
 F_{\eta}(y_1) &= P(\eta \leq y_1) = P((\xi \leq x_1) \cup (x_2 \leq \xi \leq x_3)) \\
 &= F_{\xi}(x_3) - F_{\xi}(x_2) + F_{\xi}(x_1) \Big|_{g(x_1)=g(x_2)=g(x_3)=y_1}
 \end{aligned}$$

Teoremă

Observație: pentru $\forall y \in \mathbb{R}$, valoarea funcției de repartiție a lui η în punctul respectiv $F_{\eta}(y)$ poate fi scrisă în funcție de valorile funcției de repartiție a variabilei inițiale F_{ξ} în punctele care sunt soluții ale ecuației $g(x) = y$.

Teoremă. Fie ξ o V.A. cu distribuție w_{ξ} cunoscută, și fie $\eta = g(\xi)$, cu $g(x)$ o funcție cunoscută. Atunci, pentru $\forall y \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că ecuația $g(x) = y$ are un număr finit sau cel mult numărabil de soluții, pe care le notăm cu $\{x_1, x_2, \dots\}$, are loc relația:

$$w_{\eta}(y) = \sum_k \frac{w_{\xi}(x_k)}{|g'(x_k)|} \quad (2)$$

Demonstrație I

Observație ec. $g(x) = y_1$ admite 3 soluții: $\{x_1, x_2, x_3\}$. Ec.
 $g(x) = y_1 + dy_1$ admite și ea 3 sol.: $\{x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3\}$

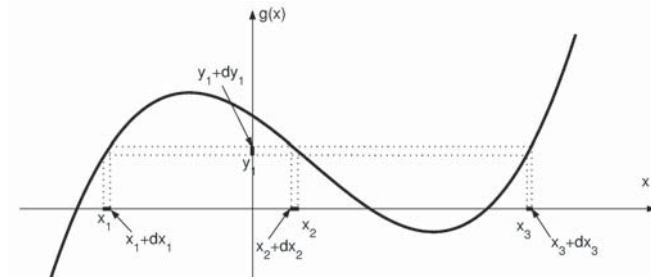


Figura 4: Ecuația $g(x) = y_1$ are soluțiile x_1, x_2 și x_3 .

$$P(y_1 < \eta \leq y_1 + dy_1) = P((x_1 < \xi \leq x_1 + dx_1) \cup (x_2 + dx_2 \leq \xi < x_2) \cup \dots \\ \dots \cup (x_3 < \xi \leq x_3 + dx_3)) \quad (3)$$

Demonstrație II

- Observăm că $dx_2 < 0$, deoarece x_2 se află pe o pantă negativă a funcției (adică $g'(x_2) < 0$)
- Valoarea lui dy_1 poate fi aleasă suficient de mică astfel încât intervalele $(x_i, x_i + dx_i]$ să fie disjuncte (oricât de apropiate ar fi x_i de x_j , în ipoteza că numărul soluțiilor ecuației $g(x) = y$ este finit, sau cel mult numărabil)
- Prin urmare, evenimentele $\{x_i < \xi \leq x_i + dx_i\}$ sunt incompatibile, și, aplicând axioma a treia a probabilităților, avem:

$$P(y_1 < \eta \leq y_1 + dy_1) = P(x_1 < \xi \leq x_1 + dx_1) + P(x_2 + dx_2 \leq \xi < x_2) + \dots \\ \dots + P(x_3 < \xi \leq x_3 + dx_3) \quad (4)$$

Demonstrație III

Când $dy_1 \searrow$, putem aproxima probabilitatea cu aria corespunzătoare a subgraficului funcției de densitate de probabilitate, și, în consecință, relația (4) devine:

$$w_\eta(y_1)dy_1 = w_\xi(x_1)dx_1 + w_\xi(x_2)|dx_2| + w_\xi(x_3)dx_3 \quad (5)$$

Cantitatea dx_2 trebuie considerată în modul deoarece termenul respectiv trebuie să fie pozitiv (reprezintă o probabilitate).

Ținând cont că x_1 , x_2 și x_3 sunt soluțiile ecuației $g(x) = y_1$, putem scrie:

$$y_1 = g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) \quad (6)$$

de unde, prin diferențiere, obținem:

$$dy_1 = g'(x_1)dx_1 = g'(x_2)dx_2 = g'(x_3)dx_3 \quad (7)$$

Demonstrație IV

Înlocuind dx_i cu $\frac{dy_1}{g'(x_i)}$ în ecuația (5) și simplificând pe dy_1 , rezultă:

$$w_\eta(y_1) = \frac{w_\xi(x_1)}{g'(x_1)} + \frac{w_\xi(x_2)}{|g'(x_2)|} + \frac{w_\xi(x_3)}{g'(x_3)} \quad (8)$$

care, ținând cont că atât $g'(x_1)$ cât și $g'(x_3)$ sunt pozitive, deci pot fi înlocuite cu modulul lor, reprezintă exact relația ce trebuia demonstrată.

Observație raționamentul poate fi reluat în mod identic pentru orice formă a graficului funcției $g(x)$, ceea ce face ca demonstrația de mai sus să fie valabilă în cazul general.

Exemplu (1)

Să se calculeze distribuția variabilei aleatoare $\eta = a\xi + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, în funcție de distribuția variabilei aleatoare ξ .

Rezolvare Funcția de transformare a lui ξ în η este $g(x) = ax + b$. Pentru $\forall y \in \mathbb{R}$, ecuația $g(x) = y$ admite o singură soluție, și anume $x_1 = \frac{y-b}{a}$. Cum $g'(x) = a$, relația (2) se scrie:

$$w_\eta(y) = \frac{w_\xi(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{1}{|a|} w_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad (9)$$

Dacă ξ are o distribuție uniformă sau gaussiană, η are același tip de distribuție, dar cu parametri modificați.

Concluzie: o transformare liniară nu modifică *natura* variabilei aleatoare.

Exemplu (2) I

Să se calculeze distribuția variabilei aleatoare $\eta = \cos(\xi)$, unde ξ este o variabilă aleatoare distribuită uniform în intervalul $[0, 2\pi]$.

Rezolvare. Graficul funcției g este prezentat în Figura 5. Pentru $y \notin [-1, 1]$, ecuația $g(x) = y$ nu are soluții, deci $w_\eta(y) = 0$.

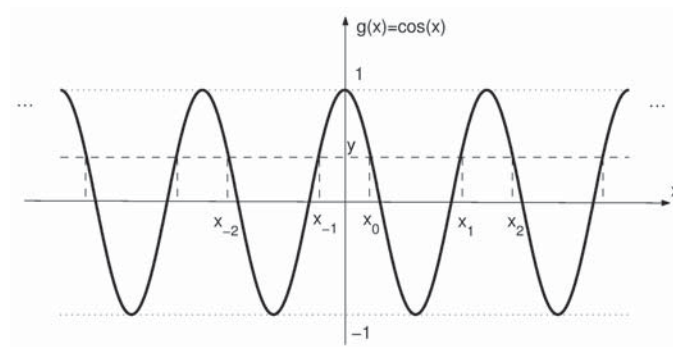


Figura 5: Funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $g(x) = \cos(x)$.

Exemplu (2) II

Pentru $y \in [-1, 1]$, însă, ecuația $g(x) = y$ admite o infinitate numărabilă de soluții de forma:

$$x_k = \begin{cases} \arccos(y) + k\pi & \text{pentru } k = 2l \\ -\arccos(y) + (k+1)\pi & \text{pentru } k = 2l+1 \end{cases} \quad (10)$$

Deoarece $g'(x) = -\sin(x)$, relația (2) poate fi scrisă:

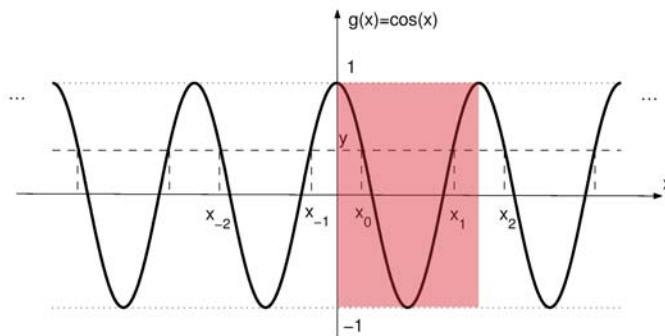
$$w_\eta(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{w_\xi(x_k)}{|-\sin(x_k)|} \quad (11)$$

Trebuie deci să calculăm valoarea densității de probabilitate w_ξ în toate punctele x_k date de (10).

Variabila ξ este distribuită uniform în intervalul $[0, 2\pi]$, deci $w_\xi(x)$ este dată de:

$$w_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{dacă } x \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (12)$$

Exemplu (2) III



Deci, trebuie să identificăm acele valori x_k din intervalul $[0, 2\pi]$, interval pe care valoarea funcției w_ξ este nenulă. Dar funcția $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, rezultă că nu există decât două valori x_k în intervalul căutat, $x_0 = \arccos(y)$ și $x_1 = 2\pi - \arccos(y)$. Având în vedere că $w_\xi(x_k) = 0$ pentru $k \notin \{0, 1\}$, relația (11) devine:

Exemplu (2) IV

$$w_{\eta}(y) = \frac{w_{\xi}(x_0)}{|g'(x_0)|} + \frac{w_{\xi}(x_1)}{|g'(x_1)|} \quad (13)$$

$$w_{\eta}(y) = \frac{w_{\xi}(\arccos(y))}{|-\sin(\arccos(y))|} + \frac{w_{\xi}(2\pi - \arccos(y))}{|-\sin(2\pi - \arccos(y))|} \quad (14)$$

Ținând cont că $\sin(\arccos y) = \sqrt{1 - y^2}$, avem:

$$w_{\eta}(y) = \frac{\frac{1}{2\pi}}{\sqrt{1 - y^2}} + \frac{\frac{1}{2\pi}}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - y^2}} \quad (15)$$

În concluzie, am arătat că:

$$w_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} & \text{pentru } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (16)$$

Exemplu (2) V

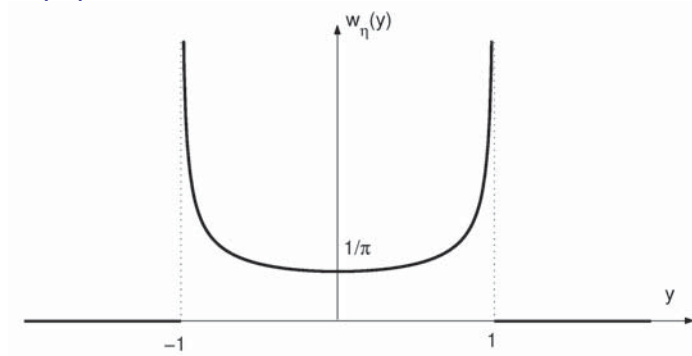


Figura 6: Graficul funcției $w_{\eta}(y)$ dată de relația 16.

Observație: corespunzător zonei în care funcția cosinus este aproape liniară, variabila nouă η are aceeași distribuție (uniformă) ca variabila ξ .

Exemplu (2) VI

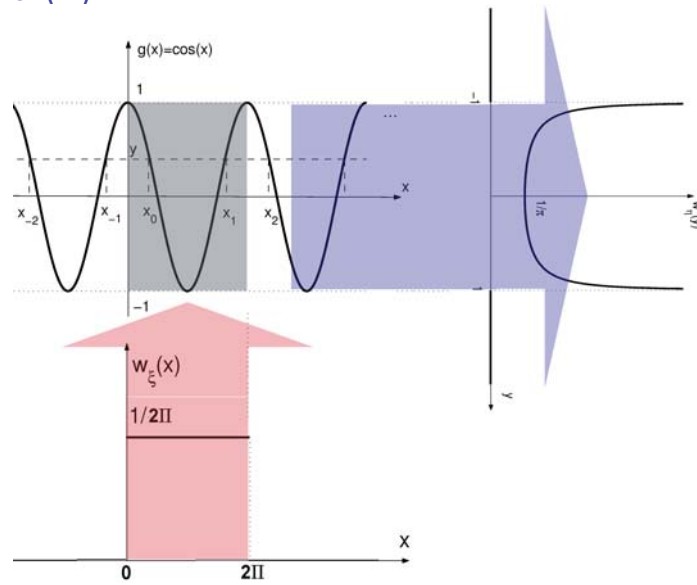


Figura 7: Ilustrarea transformării distribuției inițiale.

Cazul soluțiilor nenumărabile I

Cazul în care teorema (2) nu poate fi aplicată, respectiv cazul acelor $y_i \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $g(x) = y_i$ are ca soluție un întreg interval din \mathbb{R} : $\forall x \in [a, b], g(x) = y_i$.

Fie $\eta = g(\xi)$, cu $g(x)$ dată de

$$g(x) = \begin{cases} -a & \text{dacă } x < -a \\ x & \text{dacă } -a \leq x \leq a \\ a & \text{dacă } x > a \end{cases} \quad (17)$$

ξ are o distribuție $w_\xi(x)$ cunoscută, dar nespecificată (oarecare).

Funcția g are două paliere, adică atât pentru $y_1 = -a$ cât și pentru $y_2 = a$, soluția ecuației $g(x) = y_1$ (respectiv $g(x) = y_2$) este intervalul $(-\infty, -a]$ (respectiv $[a, \infty)$) care sunt mulțimi nenumărabile.

Cazul soluțiilor nenumărabile II

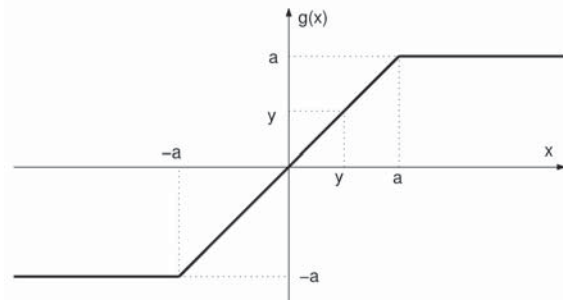


Figura 8: Funcția $g(x)$ dată de (17) .

Vom calcula valorile funcției de repartiție a variabilei transformate F_η , urmărind graficul funcției g :

Cazul soluțiilor nenumărabile III

$$y < -a, \quad F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = 0$$

$$y = -a, \quad F_\eta(-a) = P(\eta \leq -a) = P(\xi \leq -a) = F_\xi(-a)$$

$$y \in (-a, a), \quad F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(\xi \leq y) = F_\xi(y)$$

$$y = a, \quad F_\eta(a) = P(\eta \leq a) = P(\xi \leq \infty) = 1$$

$$y > a, \quad F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(\xi \leq \infty) = 1$$

Sintetizând, avem:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } y < -a \\ F_\xi(y) & \text{dacă } -a \leq y < a \\ 1 & \text{dacă } y \geq a \end{cases} \quad (18)$$

Cazul soluțiilor nenumărabile IV

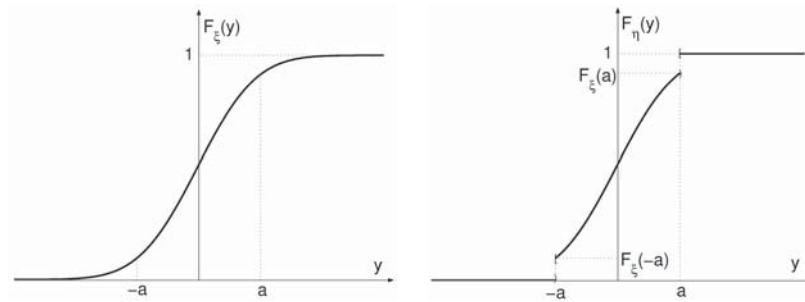


Figura 9: Funcțiile de repartiție ale variabilelor ξ și $\eta = g(x)$.

Observați apariția unor discontinuități în funcția de repartiție a variabilei transformate F_η exact în punctele $y_1 = -a$ și $y_2 = a$

Cazul soluțiilor nenumărabile V

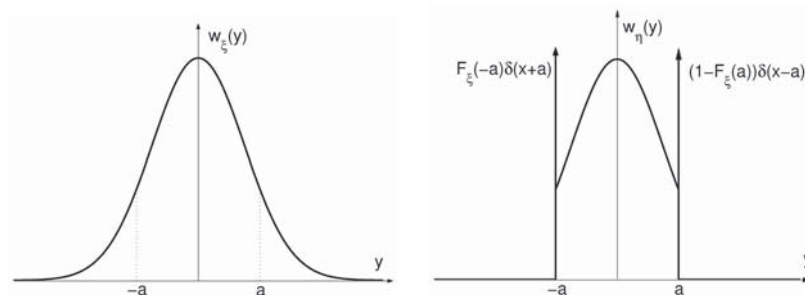


Figura 10: Densitățile de probabilitate ale variabilelor ξ și $\eta = g(x)$.

Discontinuitățile funcției de repartiție conduc la apariția în densitatea de probabilitate w_η a unor impulsuri Dirac în punctele respective, de arie egală cu amplitudinea saltului făcut de F_η

Cazul soluțiilor nenumărabile VI

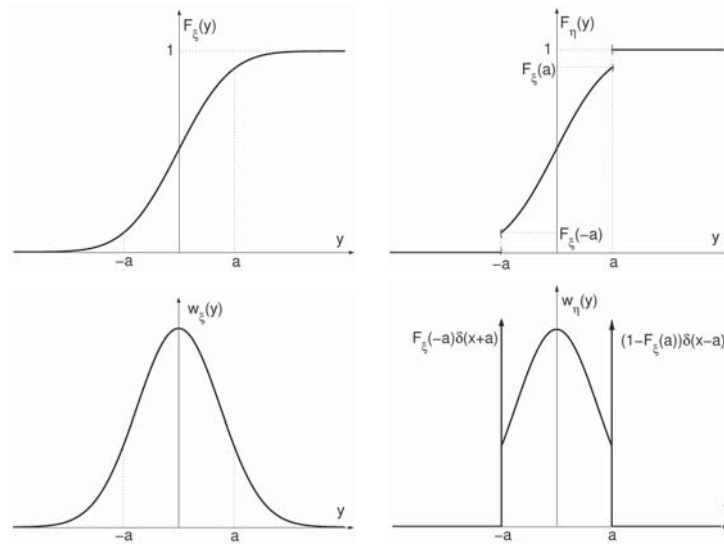


Figura 11: Figură recapitulativă: $F_\xi(x)$, $F_\eta(y)$, $w_\xi(x)$ și $w_\eta(y)$.

Cazul soluțiilor nenumărabile VII

- ▶ Ariile celor două impulsuri Dirac sunt:
 - ▶ $F_\xi(-a) = P(\eta \leq -a) = P(\eta \in (-\infty, -a])$
 - ▶ pentru cel localizat în punctul $y_1 = -a$, respectiv
 - ▶ $1 - F_\xi(a) = P(\eta \geq a) = P(\eta \in [a, \infty))$
 - ▶ pentru impulsul din $y_2 = a$
- ▶ Pentru acei $y_i \in \mathbb{R}$ pentru care soluția ecuației $g(x) = y_i$ este un interval $[a, b]$, în densitatea de probabilitate a variabilei transformate w_η va apărea un impuls Dirac în punctul $y = y_i$ de arie egală cu probabilitatea $P(\xi \in [a, b]) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$
- ▶ Cu alte cuvinte, devine nenulă $P(\eta = y_i)$, deoarece $g(x) = y_i \forall x \in [a, b]$, atunci $\eta = y_i$ cu aceeași probabilitate cu care $\xi \in [a, b]$!

Cazul soluțiilor nenumărabile VIII

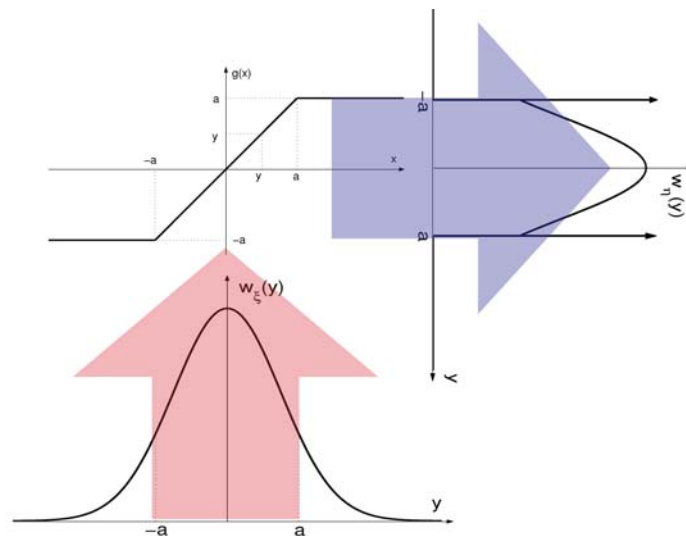


Figura 12: Ilustrarea transformării distribuției inițiale.

Exemplul (3) I

Proprietate importantă

Aplicând unei variabile aleatoare continue ξ oarecare chiar funcția ei de repartiție F_ξ , se obține o variabilă aleatoare distribuită uniform în $[0,1]$

Rezolvare. Trebuie demonstrat că variabila aleatoare $\eta = F_\xi(\xi)$ are distribuție uniformă în $[0,1]$ pentru *orice* formă a funcției de repartiție F_ξ (constrângere: aceasta să fie continuă pe \mathbb{R}).

- Datorită faptului că $F_\xi: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$, pentru $y \notin [0,1]$, ecuația $F_\xi(x) = y$ nu are soluții reale, și, deci, $w_\eta(y) = 0$
- Pentru $y \in [0,1]$, trebuie determinat numărul de soluții ale ecuației $F_\xi(x) = y$
- Funcția de repartiție a oricărei VA este crescătoare pe \mathbb{R}
- Dacă F_ξ ar fi *strict crescătoare*, problema ar fi rezolvată, pentru că funcțiile strict monotone sunt bijective, și, deci, ecuația $F_\xi(x) = y$ ar avea o singură soluție $\forall y \in [0,1]$ și $\forall F_\xi$!

Exemplul (3) II

Totuși, funcția este numai crescătoare, ceea ce înseamnă că poate avea intervale pe \mathbb{R} în care este constantă ($F_\xi(y)$ poate avea paliere) **Observație:** dar un interval din \mathbb{R} pe care F_ξ este

constantă este un interval în care variabila ξ nu ia valori!

$F_\xi(x) = y_1 \quad \forall x \in [a, b]$ implică

$$P(\xi \in [a, b]) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = y_1 - y_1 = 0$$

Să nu uităm că noi aplicăm funcția F_ξ însăși variabilei aleatoare ξ . Ne interesează deci numai restricția funcției F_ξ la intervalele în care ξ ia valori, adică intervalele pe care $w_\xi(x) > 0$, adică intervalele pe care funcția F_ξ este *strict crescătoare*. Figura 13 prezintă un exemplu.

Exemplul (3) III

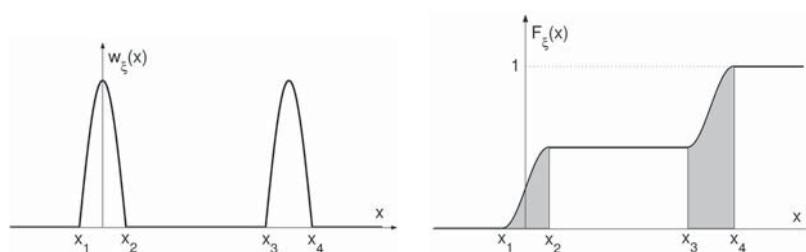


Figura 13: O funcție de densitate de probabilitate w_ξ arbitrară și funcția de repartiție F_ξ corespunzătoare.

Se observă că variabila aleatoare ia valori numai pe reuniunea de intervale $[x_1, x_2] \cup [x_3, x_4]$. Deoarece $\eta = F_\xi(\xi)$, de interes e numai restricția funcției de repartiție la intervalele respective (hașurate în figură): $F_\xi : ([x_1, x_2] \cup [x_3, x_4]) \rightarrow [0, 1]$

Astfel definită, funcția de repartiție este *strict crescătoare*!

Exemplul (3) IV

Întrucât am decis asupra faptului că funcția de trecere este strict crescătoare, ea este bijectivă, deci $\forall y_1 \in [0, 1], \exists! x_1$ astfel încât $y_1 = F_\xi(x_1)$

Aplicând relația (2) dată de teoremă:

$$w_\xi(y_1) = \frac{w_\xi(x_1)}{|F'_\xi(x_1)|} = \frac{w_\xi(x_1)}{|w_\xi(x_1)|} = \frac{w_\xi(x_1)}{w_\xi(x_1)} = 1 \quad (19)$$

În formula de mai sus am folosit faptul că derivata funcției de repartiție este însăși densitatea de probabilitate și că aceasta este pozitivă, deci este egală cu modulul ei. În concluzie:

$$w_\eta(y) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } y \in [0, 1] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (20)$$

Aplicații ale proprietății precedente

- ▶ Cuantizarea optimală Max-Lloyd (vezi prelegerea următoare)
- ▶ Egalizarea histogramei* (vezi capitolul de îmbunătățirea imaginilor din cursul de Prelucrarea și Analiza Imaginilor și metodele de *specificare a histogramei*)



“înainte”



“după”

*histogram equalization.

Teorema de medie I

Teorema de medie permite calculul mediei variabilei aleatoare transformate fără a-i mai calcula acesteia distribuția, ci direct din distribuția variabilei inițiale și din funcția de trecere dintre cele două variabile aleatoare.

Teoremă. Fie $\eta = g(\xi)$. Atunci, media lui η poate fi calculată ca:

$$\bar{\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)w_{\xi}(x)dx \quad (21)$$

Demonstrație. Să revenim la situația ilustrată în Figura 4. Înmulțind relația (5) cu y_1 , și ținând cont de (6), avem:

$$y_1 w_{\eta}(y_1) dy_1 = g(x_1)w_{\xi}(x_1)dx_1 + g(x_2)w_{\xi}(x_2)|dx_2| + g(x_3)w_{\xi}(x_3)dx_3 \quad (22)$$

Teorema de medie II

Valoarea medie a lui η poate fi scrisă:

$$\bar{\eta} \approx \sum_{\substack{j \\ \cup dy_j = \mathbb{R}}} y_j w_{\eta}(y_j) dy_j \xrightarrow{dy_j \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} y w_{\eta}(y) dy \quad (23)$$

Cu alte cuvinte, valoarea $\bar{\eta}$ se obține sumând toate cantitățile de tip $y_j w_{\eta}(y_j) dy_j$ pentru dy_j baleind întreaga axă reală Oy . Dar suma tuturor cantităților $y_j w_{\eta}(y_j) dy_j$ poate fi scrisă, conform relației (22) cu o sumă de cantități de tip $g(x_i)w_{\xi}(x_i)dx_i$. Întrucât g este o funcție, care, prin definiție, alocă *fiecărui* x *un* y *și numai unul*, putem afirma că în suma respectivă de cantități de tip $g(x_i)w_{\xi}(x_i)dx_i$, fiecare va apărea o dată și numai o dată. Cu alte cuvinte, când dy_j va baleia axa Oy , dx_i va baleia axa Ox ! Chiar dacă unei cantități $y_j w_{\eta}(y_j) dy_j$ îi pot corepunde nici una, una sau mai multe cantități de tipul $g(x_i)w_{\xi}(x_i)dx_i$, invers, putem spune că

Teorema de medie III

unei cantități $g(x_i)w_\xi(x_i)dx_i$ îi va corespunde o singură cantitate $y_i w_\eta(y_i)dy_i$ și numai una! Deci, putem scrie:

$$\sum_{\bigcup_j dy_j = \mathbb{R}} y_j w_\eta(y_j) dy_j \approx \sum_{\bigcup_i dx_i = \mathbb{R}} g(x_i) w_\xi(x_i) dx_i, \quad (24)$$

de unde, prin trecere la limită:

$$\bar{\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} y w_\eta(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) w_\xi(x) dx \quad (25)$$

Observație. Deși demonstrația teoremei s-a făcut în ipoteza particulară a unui număr cel mult numărabil de soluții ale ecuației $g(x) = y$, relația (21) este valabilă pentru orice funcție $g(x)$

Exemplu

Să se calculeze media lui $\eta = a\xi + b$ cu $a, b \in \mathbb{R}$. Conform teoremei de medie:

$$\bar{\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b) w_\xi(x) dx = a \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x w_\xi(x) dx}_{\bar{\xi}} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} w_\xi(x) dx}_1 = a\bar{\xi} + b \quad (26)$$

De exemplu, pentru $b = 0$, se poate scrie:

$$\overline{a\xi} = a\bar{\xi}, \quad (27)$$

Deci înmulțirea cu o constantă comută cu medierea statistică (altfel spus, constantele "ies în afara" operatorului de mediere). De-a lungul acestui curs vom face de mai multe ori apel la acest rezultat.

Cuantizarea semnalelor. Cuantizorul optimal Max-Lloyd

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Braşov, România

January 7, 2015

Context

- ▶ Cuantizarea reprezintă a doua operație realizată în cadrul conversiei semnalelor din domeniul continuu în cel discret, după operația de eșantionare
- ▶ Dacă eșantionarea realizează o discretizare în timp a semnalului, operația de cuantizare realizează *discretizarea în amplitudine a eșantioanelor*, prin aproximarea valorilor continue ale acestora cu valori fixe, provenite dintr-o mulțime finită
- ▶ **Observație:** operația nu este bijectivă; cu alte cuvinte, nu se mai poate reface forma originală a semnalului după ce acesta a fost cuantizat
- ▶ Prin urmare, cuantizarea este o operație însoțită de zgomot, numit *zgomot de cuantizare*

Definiție

Considerând că gama de valori a semnalului de intrare $\xi(k)$ este limitată în intervalul $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$, se poate defini o funcție de cuantizare Q .

Aceasta modelează o cuantizare pe L niveluri, asociind fiecărui argument x o valoare y dintr-o mulțime finită cu L elemente, după cum urmează:

$$y = Q(x) = \begin{cases} y_L & \text{dacă } x_L < x \leq x_{L+1} \\ y_{L-1} & \text{dacă } x_{L-1} < x \leq x_L \\ \dots & \\ y_1 & \text{dacă } x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases} \quad (1)$$

unde $x_1 = \xi_{\min}$ iar $x_{L+1} = \xi_{\max}$.

Astfel, semnalul de ieșire va fi:

$$\eta(k) = Q(\xi(k)) \quad (2)$$

Termeni

- ▶ Valorile x_i se numesc *praguri de cuantizare*, în timp ce valorile y_i se numesc *valori cuantizate*
- ▶ Diferența între două praguri de cuantizare succesive x_{i+1} și x_i se notează cu Δ_i și este denumită *pas de cuantizare* sau *cuantă*
- ▶ Specificarea unei funcții de cuantizare constă în alegerea numărului L de niveluri ale cuantizorului, iar apoi în definirea pragurilor de cuantizare x_2, \dots, x_L și a valorilor cuantizate y_1, \dots, y_L .
- ▶ Forma generală a graficului unei funcții de cuantizare este prezentată în Figura 1, în timp ce Figura 2 ilustrează forma unui semnal înainte și după cuantizare
- ▶ Pentru conversia digitală, valorile rezultate în urma cuantizării sunt codate pe un număr de N biți, astfel încât $2^N \geq L$

Forma tipică a unei funcții de cuantizare

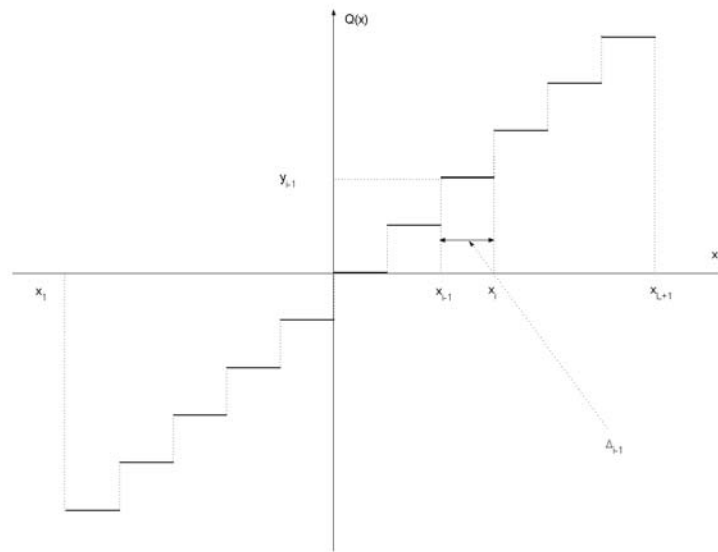


Figura 1: Forma generală a graficului unei funcții de cuantizare.

Exemplu teoretic semnal cuantizat

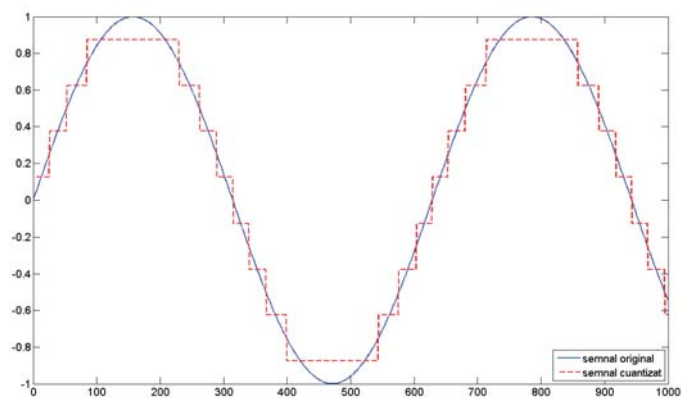


Figura 2: Forma unui semnal sinusoidal înainte și după cuantizare.

Exemplu practic

În practică sunt cuantizate semnale eșantionate!

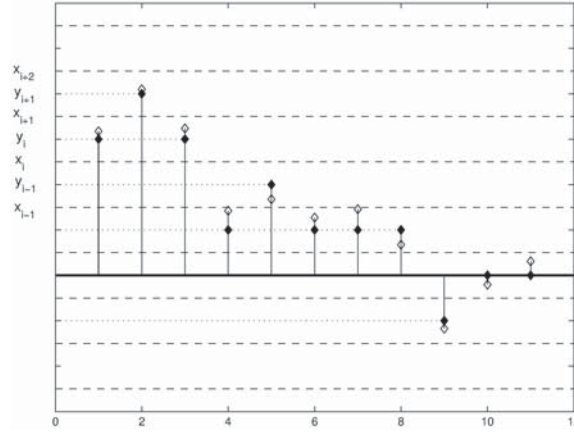


Figura 3: Cuantizarea valorilor unui semnal: cu ◇ sunt figurate valorile originale $\xi(k)$ ale eșantioanelor semnalului, în timp ce valorile cuantizate $Q(\xi(k))$ sunt reprezentate cu ◆.

Cuantizarea uniformă

Cel mai des întâlnit tip de cuantizare este cea uniformă, realizată prin alegerea unui pas de cuantizare unic Δ pe întreg intervalul de valori ale semnalului de intrare:

$$\Delta_{i-1} = \Delta_i = \Delta \quad \forall i = 2, 3, \dots, L \quad (3)$$

Prin urmare, valoarea pasului de cuantizare va fi:

$$\Delta = \frac{\xi_{\max} - \xi_{\min}}{L} \quad (4)$$

Următorul pas este calculul valorilor pragurilor de cuantizare x_2, \dots, x_L ($x_1 = \xi_{\min}$ și $x_{L+1} = \xi_{\max}$ sunt deja cunoscute):

$$x_i = \xi_{\min} + (i - 1)\Delta, \quad \forall i = 2, 3, \dots, L \quad (5)$$

În final, valorile cuantizate se aleg la mijlocul fiecărui interval de cuantizare:

$$y_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \quad \forall i = 1, 2, \dots, L \quad (6)$$

Alegerea valorilor cuantizate reprezintă o convenție, la fel de bine putând fi alese și capetele intervalelor de cuantizare

Zgomotul de cuantizare

Diferența dintre semnalul de intrare și cel cuantizat se numește *eroare de cuantizare* sau *zgomot de cuantizare* și se poate exprima ca o funcție g aplicată semnalului de intrare:

$$e(k) = \xi(k) - \eta(k) = g(\xi(k)) \quad (7)$$

Graficul funcției g corespunzătoare unei cuantizări uniforme, dată de funcția Q din Figura 1, este prezentat în Figura 4.

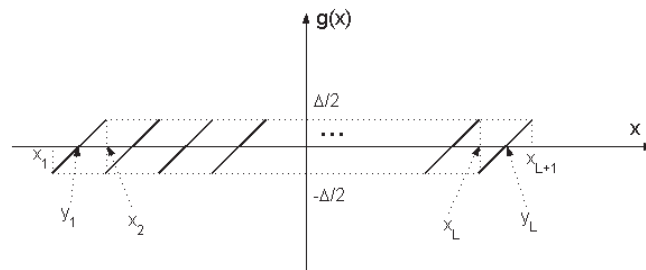


Figura 4: Funcția de eroare pentru cuantizarea uniformă.

Cuantizarea optimală Lloyd–Max I

- ▶ Cuantizarea uniformă nu este una optimală, deoarece nu ține cont de distribuția valorilor semnalului de intrare
- ▶ Ca urmare, zgomotul de cuantizare nu este minimizat; puterea medie a acestuia ar putea fi minimizată prin specificarea unei funcții Q pe baza funcției de densitate de probabilitate a valorilor eșantioanelor semnalului de cuantizat
- ▶ Astfel, o variantă îmbunătățită o constituie cuantizarea Lloyd–Max, care realizează alocarea unor pași de cuantizare mici pe intervalele de valori ale semnalului cu probabilitate mare de apariție, respectiv pași de cuantizare mai mari (și deci erori mai mari) pentru valorile mai puțin probabile
- ▶ Definirea unei reguli de cuantizare Lloyd–Max constă în calculul pragurilor de cuantizare x_2, \dots, x_L și al valorilor cuantizate y_1, \dots, y_L astfel încât eroarea pătratică medie indusă de cuantizare să fie minimă.

Cuantizarea optimală Lloyd–Max II

Eroarea pătratică medie ε este dată de relația:

$$\varepsilon = \overline{(\xi - \eta)^2} = \int_{x_1}^{x_L} [x - Q(x)]^2 w_\xi(x) dx \quad (8)$$

unde semnalul de ieșire $\eta = Q(x)$, L este numărul de niveluri de cuantizare, iar $w_\xi(x)$ este funcția de densitate de probabilitate a valorilor eșantioanelor semnalului de intrare.

Putem rescrie formula erorii pătratice medii, înlocuind $Q(x)$ cu valorile cuantizate corespunzătoare, y_i :

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^L \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i)^2 w_\xi(x) dx \quad (9)$$

Cuantizarea optimală Lloyd–Max III

În continuare, se pune problema minimizării acestei erori în raport cu valorile pragurilor x_i și valorile cuantizate y_i ; prin urmare, vom impune ca derivatele parțiale ale erorii pătratice medii să fie nule:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = 0 & \forall i = 2, 3, \dots, L \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_i} = 0 & \forall i = 1, 2, \dots, L \end{cases} \quad (10)$$

Pentru valorile pragurilor, ecuația devine:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = 2(x_i - y_{i-1})^2 w_\xi(x_i) - 2(x_i - y_i)^2 w_\xi(x_i) = 0 \quad (11)$$

care este echivalentă cu:

$$(x_i - y_{i-1})^2 = (x_i - y_i)^2 \implies -2x_i y_{i-1} + 2x_i y_i = y_i^2 - y_{i-1}^2 \quad (12)$$

De unde obținem:

$$x_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \quad \forall i = 2, \dots, L \quad (13)$$

Cuantizarea optimală Lloyd–Max IV

Cât despre valorile cuantizate y_i , ele se obțin din ecuația:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y_i} = -2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i) w_{\xi}(x) dx = 0 \quad (14)$$

Valorile cuantizate finale vor fi:

$$y_i = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} x w_{\xi}(x) dx}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} w_{\xi}(x) dx} \quad \forall i = 1, 2, \dots, L \quad (15)$$

Astfel, din ecuația (13) putem obține valorile pragurilor x_i în funcție de valorile cuantizate y_{i-1} și y_i , în timp ce ecuația (15) permite calculul valorilor cuantizate y_i în funcție de valorile pragurilor x_i și x_{i+1}

Cuantizarea optimală Lloyd–Max V

Va rezulta un sistem de $2L - 1$ ecuații cu $2L - 1$ necunoscute, a cărui rezolvare duce la definirea valorilor pragurilor și a valorilor cuantizate ale unui cuantizor optimal Lloyd–Max cu L niveluri

În general, nu există o soluție analitică a sistemului Lloyd–Max (se determină prin metode numerice)

În cazul în care semnalul de cuantizat are o distribuție uniformă în intervalul $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$, atunci, ținând cont de expresia funcției de densitate de probabilitate uniformă $w_{\xi}(x) = \frac{1}{\xi_{\max} - \xi_{\min}}$, ecuația (15) se scrie:

$$y_k = \frac{\int_{x_k}^{x_{k+1}} x \frac{1}{\xi_{\max} - \xi_{\min}} dx}{\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{\xi_{\max} - \xi_{\min}} dx} = \frac{\left. \frac{x^2}{2} \right|_{x_k}^{x_{k+1}}}{\left. x \right|_{x_k}^{x_{k+1}}} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \quad (16)$$

Cuantizarea optimală Lloyd–Max VI

Ecuția (13) devine:

$$x_k = \frac{\frac{x_{k-1}+x_k}{2} + \frac{x_k+x_{k+1}}{2}}{2} \quad (17)$$

care poate fi scrisă ca:

$$x_{k+1} - x_k = x_k - x_{k-1} \quad \forall k = 2, \dots, L. \quad (18)$$

Comparând (17) cu (3), rezultă că, în cazul unei distribuții uniforme a semnalului de cuantizat, **cuantizorul optimal este chiar cel uniform!**

Pentru a utiliza un cuantizor uniform trebuie ca valorile semnalului să fie distribuite uniform, altfel eroarea pătratică medie nu va fi minimă!

Exemplu cuantizare uniformă

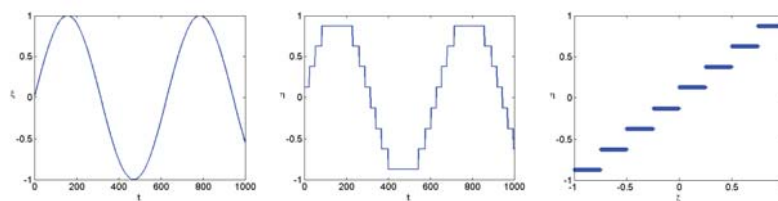


Figura 5: Semnalul sinusoidal de intrare pentru cuantizarea uniformă, semnalul sinusoidal cuantizat și funcția de cuantizare uniformă aferentă.

Observați palierele de aceeași lățime, caracteristice unei cuantizări uniforme. De asemenea, aproximarea mai bună a funcției sinus pentru zona în care funcția este aproximativ liniară și mai puțin bună pentru zona neliniară.

Cuantizare uniformă vs. optimală

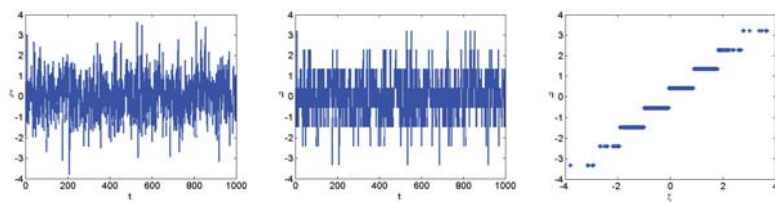


Figura 6: Semnal aleator cu distribuție normală, cuantizat uniform și funcția de cuantizare uniformă corespunzătoare.

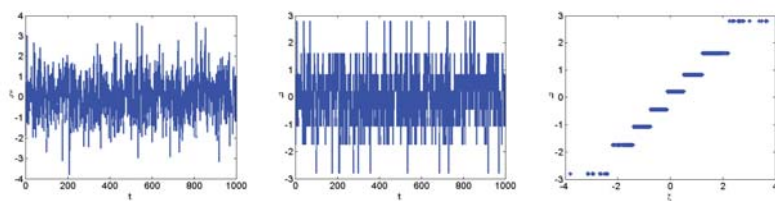


Figura 7: Semnalul distribuit normal înainte și după cuantizarea optimală, și funcția de cuantizare optimală.

Un alt exemplu ($N=8$)

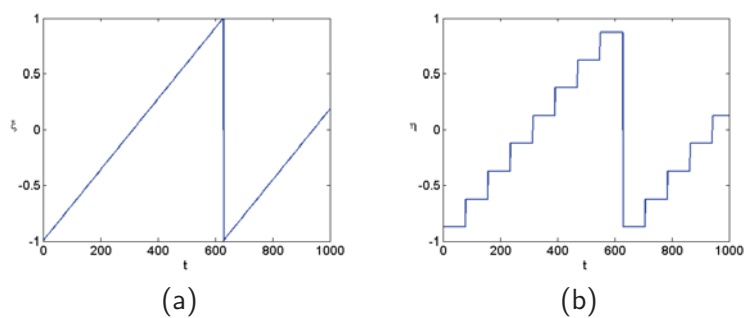


Figura 8: Semnal de tip dinte-de-fierăstrău: (a) original (b) cuantizat.

Perechi de variabile aleatoare

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Braşov, România

January 7, 2015

Cuvânt înainte

- ▶ în cazul în care avem două variabile aleatoare, caracterizarea fiecăreia dintre ele în parte cu mărimile definite până acum permite descrierea completă a comportamentului variabilei respective *independent de cealaltă variabilă*
- ▶ cu alte cuvinte, nu avem suficientă informație pentru a putea evalua eventuala interdependență statistică între cele două variabile considerate
- ▶ această interdependență poate fi studiată folosind mărimi statistice de ordinul doi, specifice *perechii* de variabile aleatoare
- ▶ vom arăta că această caracterizare de ordinul doi a unei perechi de variabile aleatoare este completă, ea înglobând, ca un caz particular, caracterizarea de ordinul unu a fiecăreia dintre cele două variabile aleatoare

Funcția de repartiție de ordinul doi

Fie ξ și η două variabile aleatoare. Prin definiție, funcția de repartiție de ordinul doi a perechii de VA este $F_{\xi\eta}: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$:

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P((\xi \leq x) \cap (\eta \leq y)) \quad (1)$$

Valoarea funcției de repartiție de ordinul doi într-un punct $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ reprezintă probabilitatea ca, în același timp, ξ să fie mai mic decât x_0 și η mai mic decât y_0 ; altfel spus, probabilitatea ca punctul (ξ, η) să se afle în domeniul $D \in \mathbb{R}^2$ ilustrat în Figura 1

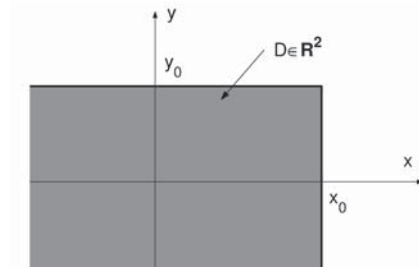


Figura 1: Domeniul de valori al punctului (ξ, η) .

Proprietățile funcției de repartiție de ordinul doi I

1. $F_{\xi\eta}(-\infty, y) = F_{\xi\eta}(x, -\infty) = 0$
Proprietate evidentă, ținând cont că evenimentele $\xi \leq -\infty$, respectiv $\eta \leq -\infty$ sunt de probabilitate zero
2. $F_{\xi\eta}(\infty, \infty) = 1$
Proprietate evidentă: conform definiției, $F_{\xi\eta}(\infty, \infty)$ reprezintă probabilitatea ca ξ și η să ia concomitent valori în \mathbb{R} , ceea ce reprezintă evenimentul sigur
3. $F_{\xi\eta}(x, \infty) = F_{\xi}(x)$, respectiv $F_{\xi\eta}(\infty, y) = F_{\eta}(y)$.

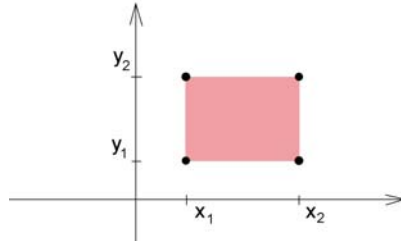
Demonstrație.

$$F_{\xi\eta}(x, \infty) = P((\xi \leq x) \cap (\eta \leq \infty)) = P(\xi \leq x) = F_{\xi}(x)$$

Această proprietate este foarte importantă, întrucât demonstrează ceea ce am enunțat în introducere, și anume faptul că mărimile statistice de ordinul unu specifice fiecăreia dintre variabilele aleatoare pot fi obținute ca un caz particular al mărimilor de ordinul doi ale perechii de variabile aleatoare

Proprietățile funcției de repartiție de ordinul doi II

$$4. P((x_1 < \xi \leq x_2) \cap (y_1 < \eta \leq y_2)) = F_{\xi\eta}(x_2, y_2) - F_{\xi\eta}(x_1, y_2) - F_{\xi\eta}(x_2, y_1) + F_{\xi\eta}(x_1, y_1)$$



Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} P((x_1 < \xi \leq x_2) \cap (y_1 < \eta \leq y_2)) &= \\ &= P((x_1 < \xi \leq x_2) \cap (\eta \leq y_2)) - \\ &\quad P((x_1 < \xi \leq x_2) \cap (\eta \leq y_1)) \end{aligned}$$

Proprietățile funcției de repartiție de ordinul doi III

Fiecare dintre cei doi termeni de mai sus poate fi descompus la rândul lui ca:

$$\begin{aligned} P((x_1 < \xi \leq x_2) \cap (\eta \leq y_2)) &= P((\xi \leq x_2) \cap (\eta \leq y_2)) \\ &\quad - P((x_1 < \xi) \cap (\eta \leq y_2)) \\ &= F_{\xi\eta}(x_2, y_2) - F_{\xi\eta}(x_1, y_2) \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} P((x_1 < \xi \leq x_2) \cap (\eta \leq y_1)) &= P((\xi \leq x_2) \cap (\eta \leq y_1)) \\ &\quad - P((x_1 < \xi) \cap (\eta \leq y_1)) \\ &= F_{\xi\eta}(x_2, y_1) - F_{\xi\eta}(x_1, y_1) \end{aligned}$$

Apoi, prin înlocuirea relațiilor de mai sus, obținem rezultatul ce trebuia demonstrat

Proprietățile funcției de repartiție de ordinul doi IV

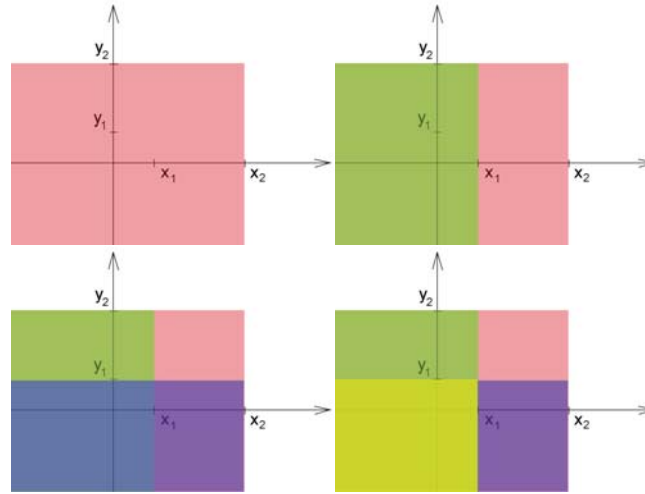


Figura 2: Ilustrarea probabilităților implicate în demonstrarea proprietății.

Densitatea de probabilitate de ordinul doi I

Se definește densitatea de probabilitate de ordinul doi a perechii de variabile aleatoare (ξ, η) ca:

$$w_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

Explicitând formula derivatei, putem scrie:

$$\frac{\partial F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_{\xi\eta}(x + \Delta x, y) - F_{\xi\eta}(x, y)}{\Delta x}$$

după care:

$$w_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial x} \right)}{\partial y} \quad (3)$$

Densitatea de probabilitate de ordinul doi II

$$\begin{aligned}
 w_{\xi\eta}(x, y) &= \frac{\partial \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_{\xi\eta}(x + \Delta x, y) - F_{\xi\eta}(x, y)}{\Delta x} \right)}{\partial y} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial F_{\xi\eta}(x + \Delta x, y)}{\partial y} - \frac{\partial F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial y}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F_{\xi\eta}(x + \Delta x, y + \Delta y) - F_{\xi\eta}(x + \Delta x, y)}{\Delta y}}{\Delta x} \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots \frac{F_{\xi\eta}(x, y + \Delta y) - F_{\xi\eta}(x, y)}{\Delta y} \right) \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{F_{\xi\eta}(x + \Delta x, y + \Delta y) - F_{\xi\eta}(x + \Delta x, y)}{\Delta x \Delta y} \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots \frac{F_{\xi\eta}(x, y + \Delta y) - F_{\xi\eta}(x, y)}{\Delta x \Delta y} \right)
 \end{aligned}$$

Densitatea de probabilitate de ordinul doi III

adică, ținând cont de proprietatea 4 a funcției de repartiție de ordinul doi, putem scrie:

$$w_{\xi\eta}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P((\xi \in (x, x + \Delta x]) \cap (\eta \in (y, y + \Delta y]))}{\Delta x \Delta y} \quad (4)$$

Relația (4) poate fi rescrisă ca:

$$w_{\xi\eta}(x, y) \Delta x \Delta y \underset{\Delta x, \Delta y \searrow 0}{\approx} P((\xi \in (x, x + \Delta x]) \cap (\eta \in (y, y + \Delta y])) \quad (5)$$

Relația (5) poate fi interpretată la fel ca în cazul unidimensional: cu ajutorul densității de probabilitate de ordinul doi $w_{\xi\eta}$ se poate calcula probabilitatea ca, în același timp, ξ să se afle în intervalul infinitesimal $(x, x + \Delta x]$ iar η să se afle în intervalul $(y, y + \Delta y]$. Această probabilitate este dată de *volumul* de sub graficul funcției densitate de probabilitate delimitat de domeniul $(x, x + \Delta x] \times (y, y + \Delta y]$

Proprietățile densității de probabilitate de ordinul doi I

1. $w_{\xi\eta}(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
2. Pentru orice domeniu $D \in \mathbb{R}^2$ care reprezintă un eveniment,

$$P((\xi, \eta) \in D) = \iint_D w_{\xi\eta}(x, y) dx dy$$

Demonstrație. Orice domeniu plan D poate fi descompus ca o reuniune de subdomenii infinitesimale dreptunghiulare nesuprapuse $(x_i, x_i + \Delta x_i] \times (y_j, y_j + \Delta y_j]$

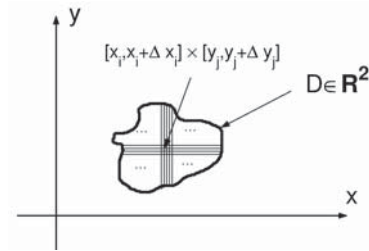


Figura 3: Descompunerea domeniului într-o reuniune de subdomenii.

Proprietățile densității de probabilitate de ordinul doi II

Atunci, se poate scrie:

$$\begin{aligned} P((\xi, \eta) \in D) &\approx P\left((\xi, \eta) \in \bigcup_i \bigcup_j ([x_i, x_i + \Delta x_i] \times [y_j, y_j + \Delta y_j])\right) \\ &= \sum_i \sum_j P((\xi \in [x_i, x_i + \Delta x_i]) \cap (\eta \in [y_j, y_j + \Delta y_j])) \end{aligned} \quad (6)$$

ceea ce, ținând cont de (5), devine:

$$P((\xi, \eta) \in D) \approx \sum_i \sum_j w_{\xi\eta}(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

La limita $\Delta x_i \rightarrow 0$ și $\Delta y_j \rightarrow 0$ q.e.d.

Proprietățile densității de probabilitate de ordinul doi III

3. Condiția de normare a densității de probabilitate de ordinul doi:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} w_{\xi\eta}(x, y) dx dy = 1$$

Demonstrație. Se scrie proprietatea 2 pentru $D = \mathbb{R}^2$

4. $F_{\xi\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y w_{\xi\eta}(u, v) du dv$

Demonstrație. Se scrie proprietatea 2 pentru $D = (-\infty, x] \times (-\infty, y]$ și se ține cont de (1)

5. Calculul densităților de probabilitate de ordinul unu (numite densități *marginale*), în funcție de densitatea de probabilitate de ordinul doi:

$$w_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\xi\eta}(x, y) dy \quad (7)$$

Proprietățile densității de probabilitate de ordinul doi IV

$$w_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\xi\eta}(x, y) dx \quad (8)$$

Demonstrație. Se scrie proprietatea 4 a densității de probabilitate pentru $y = \infty$, și, ținând cont de proprietatea 3 a funcției de repartiție, rezultă:

$$F_{\xi}(x) = F_{\xi\eta}(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\xi\eta}(u, v) du dv \quad (9)$$

de unde:

Proprietățile densității de probabilitate de ordinul doi V

$$w_{\xi}(x) = \frac{dF_{\xi}(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\xi\eta}(u, v) du dv = \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\xi\eta}(x, v) dv \quad (10)$$

S-a ținut cont de faptul că, pentru o funcție oarecare $f(x)$, are loc relația

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(u) du = f(x) \quad (11)$$

Această proprietate ne arată cât de multă informație suplimentară ne aduce caracterizarea de ordinul doi a perechii de variabile aleatoare față de caracterizarea de ordinul unu a fiecăreia dintre variabile

Proprietățile densității de probabilitate de ordinul doi VI

Interpretarea relațiilor (7) și (8): densitățile de probabilitate marginale se obțin prin *proiecția* funcției densitate de probabilitate de ordinul doi pe fiecare dintre cele două axe

Două funcții unidimensionale obținute prin proiecție nu pot conține la fel de multă informație ca funcția bidimensională care a fost proiectată

Consecință: în general, *nu se poate determina densitatea de probabilitate de ordinul doi pornind de la cele două distribuții de ordinul unu!*

Distribuții condiționate I

- ▶ În multe situații din practică, este de interes cunoașterea distribuției lui η atunci când ξ ia o anumită valoare x , respectiv $w_{\eta|\{\xi=x\}}(y)$
- ▶ Aplicarea directă a definiției (vezi prelegere recapitulare) nu este posibilă, deoarece pentru o funcție continuă de densitate de probabilitate, în general, $P(\xi = x) = 0$
- ▶ Totuși, densitatea respectivă poate fi definită printr-o trecere la limită
- ▶ Să considerăm mai întâi evenimentul $A = \{x_1 < \xi \leq x_2\}$
- ▶ Conform definiției funcției de repartiție condiționată, avem:

$$F_{\eta|\{x_1 < \xi \leq x_2\}}(y) = \frac{P((\eta \leq y) \cap (x_1 < \xi \leq x_2))}{P(x_1 < \xi \leq x_2)} = \frac{F_{\xi\eta}(x_2, y) - F_{\xi\eta}(x_1, y)}{F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1)} \quad (12)$$

Distribuții condiționate II

Am aplicat proprietatea 4 a funcției de repartiție de ordinul doi.
Prin derivare după y , obținem:

$$w_{\eta|\{x_1 < \xi \leq x_2\}}(y) = \frac{dF_{\eta|\{x_1 < \xi \leq x_2\}}(y)}{dy} = \frac{\frac{\partial F_{\xi\eta}(x_2, y)}{\partial y} - \frac{\partial F_{\xi\eta}(x_1, y)}{\partial y}}{F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1)} \quad (13)$$

Ținând cont de proprietatea 4 a densității de probabilitate de ordinul doi și de relația (11), putem scrie:

$$\frac{\partial F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y w_{\xi\eta}(u, v) du dv}{\partial y} = \int_{-\infty}^x w_{\xi\eta}(u, y) du \quad (14)$$

de unde (13) se scrie:

Distribuții condiționate III

$$w_{\eta|\{x_1 < \xi \leq x_2\}}(y) = \frac{\int_{-\infty}^{x_2} w_{\xi\eta}(u, y) du - \int_{-\infty}^{x_1} w_{\xi\eta}(u, y) du}{F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1)} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} w_{\xi\eta}(u, y) du}{F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1)} \quad (15)$$

Alegând $x_1 = x$, respectiv $x_2 = x + \Delta x$, putem rescrie (15) sub forma:

$$w_{\eta|\{x < \xi \leq x + \Delta x\}}(y) = \frac{\int_x^{x+\Delta x} w_{\xi\eta}(u, y) du}{F_{\xi}(x + \Delta x) - F_{\xi}(x)} \underset{\Delta x \searrow 0}{\approx} \frac{w_{\xi\eta}(x, y) \Delta x}{w_{\xi}(x) \Delta x} \quad (16)$$

$$w_{\eta|\{\xi=x\}}(y) = \frac{w_{\xi\eta}(x, y)}{w_{\xi}(x)} \quad (17)$$

Distribuții condiționate IV

Pentru un x_1 fixat, funcția $w_{\xi\eta}(x_1, y)$ este o curbă ce reprezintă intersecția între suprafața $w_{\xi\eta}(x, y)$ cu planul $x = x_1$ (vezi Figura 4)

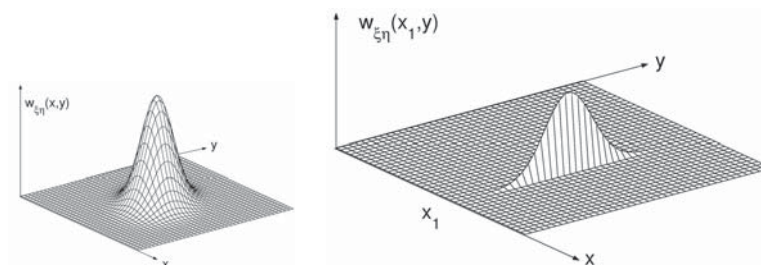


Figura 4: O densitate de probabilitate de ordinul doi și intersecția ei cu planul $x = x_1$.

Distribuții condiționate V

Interpretarea relației (17) este că densitatea de probabilitate $w_{\eta|\{\xi=x_1\}}(y)$ reprezintă ecuația curbei respective normalizate cu $w_{\xi}(x_1)$, astfel încât să devină de arie unitară

Relația (17) poate fi scrisă în mod similar și pentru cealaltă variabilă aleatoare:

$$w_{\xi\eta}(x, y) = w_{\xi|\{\eta=y\}}(x)w_{\eta}(y) = w_{\eta|\{\xi=x\}}(y)w_{\xi}(x) \quad (18)$$

interpretarea funcției $w_{\xi|\{\eta=y\}}$ fiind de intersecție a suprafeței $w_{\xi\eta}(x, y)$ cu planul $y = \text{constant}$

Variabile aleatoare independente

Prin definiție, două variabile aleatoare ξ și η sunt independente dacă evenimentele $\{\xi \leq x\}$ și $\{\eta \leq y\}$ sunt independente pentru orice x și y în \mathbb{R} :

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P((\xi \leq x) \cap (\eta \leq y)) = P(\xi \leq x)P(\eta \leq y) = F_{\xi}(x)F_{\eta}(y) \quad (19)$$

de unde, prin derivare după x și y , obținem:

$$w_{\xi\eta}(x, y) = w_{\xi}(x)w_{\eta}(y) \quad (20)$$

Evident, în ipoteza de independență, relațiile (18) și (17) devin:

$$w_{\xi|\{\eta=y\}}(x) = w_{\xi}(x) \quad (21)$$

$$w_{\eta|\{\xi=x\}}(y) = w_{\eta}(y) \quad (22)$$

Independența este singura ipoteză în care cunoașterea celor două distribuții de ordinul unu este suficientă pentru determinarea distribuției de ordinul doi a perechii de variabile aleatoare

O funcție de două variabile aleatoare I

Fie două variabile aleatoare ξ și η , având distribuția de ordinul doi $w_{\xi\eta}$ cunoscută. Obținem variabila aleatoare ζ aplicând funcția $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (cunoscută) variabilelor aleatoare ξ și η :

$$\zeta = g(\xi, \eta) \quad (23)$$

Ne punem problema calculului densității de probabilitate w_ζ a noii variabile ζ în funcție de distribuția de ordinul doi a variabilelor aleatoare inițiale $w_{\xi\eta}$ și de funcția de transformare g . Avem următoarele relații:

$$F_\zeta(z) = P(\zeta \leq z) = P((\xi, \eta) \in D_z) \quad (24)$$

cu

$$D_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) \leq z \right\} \quad (25)$$

O funcție de două variabile aleatoare II

Trebuie determinat domeniul D_z din (25), după care relația (24) poate fi scrisă (ținând cont de proprietatea 2 a densității de probabilitate de ordinul doi):

$$F_\zeta(z) = \iint_{D_z} w_{\xi\eta}(x, y) dx dy \quad (26)$$

iar apoi

$$w_\zeta(z) = \frac{dF_\zeta(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \iint_{D_z} w_{\xi\eta}(x, y) dx dy \quad (27)$$

Problema care rămâne de rezolvat este determinarea domeniului D_z pentru *fiecare* $z \in \mathbb{R}$, operațiune care necesită o tratare separată pentru fiecare funcție g considerată

Suma a două variabile aleatoare

Fie funcția $g(x, y) = x + y$, deci variabila ζ se obține ca:

$$\zeta = \xi + \eta \quad (28)$$

$D_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq z \right\}$ este prezentat în Figura 5

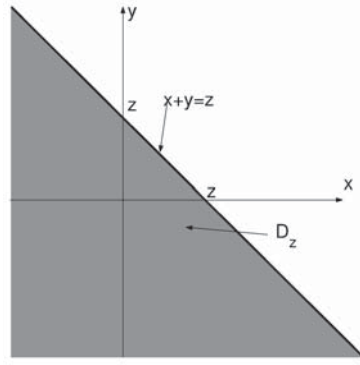


Figura 5: Domeniul D_z pentru funcția $g(x, y) = x + y$.

Suma a două VA (cont.) I

În aceste condiții, ecuația (26) devine:

$$F_\zeta(z) = \iint_{D_z} w_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-y} w_{\xi\eta}(x, y) dx dy \quad (29)$$

iar ecuația (27) devine la rândul ei:

$$\begin{aligned} w_\zeta(z) &= \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-y} w_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{z-y} w_{\xi\eta}(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\xi\eta}(z - y, y) dy \end{aligned} \quad (30)$$

În calculul relației (30) s-a ținut cont de (11)

Suma a două VA (cont.) II

Dacă, în plus, ξ și η sunt independente, atunci relația (30) devine:

$$w_{\zeta}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\xi}(z-y)w_{\eta}(y)dy = w_{\xi}(\zeta) \star w_{\eta}(\zeta) \quad (31)$$

Rezultatul de mai sus, extrem de important, afirmă că densitatea de probabilitate a sumei a două variabile aleatoare independente se obține prin convoluția celor două distribuții

Rezultatul este important și pentru demonstrarea teoremei ce urmează

Teorema limită centrală

Teoremă. Fie $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ variabile aleatoare având distribuții oarecare, satisfăcând doar următoarele condiții:

1. oricare două dintre variabile, ξ_i și ξ_j , sunt independente,
2. nici una dintre variabile nu are o valoare preponderentă față de celelalte, ceea ce e echivalent cu a spune că varianța fiecăreia dintre ele este neglijabilă în raport cu suma varianțelor celorlalte:

$$\sigma_i^2 \ll \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \sigma_j^2$$

Atunci, variabila aleatoare $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$ are o distribuție gaussiană atunci când $N \rightarrow \infty$. Distribuția lui η , conform (31), se obține prin N operații de convoluție a distribuțiilor variabilelor ξ_i

Exemplu

- ▶ să considerăm un caz particular: variabilele aleatoare ξ_i au toate o distribuție uniformă în intervalul $[0, 1]$
- ▶ în Figura 6 sunt prezentate funcțiile rezultate prin convolvarea succesivă a $i = 2, 3 \dots$ distribuții uniforme
- ▶ pe măsură ce i crește, distribuția rezultată variază din ce în ce mai puțin de la i la $i + 1$, tinzând la o funcție invariantă la convoluție (*această funcție este funcția clopot a lui Gauss*)
- ▶ se poate demonstra că prin operația de convoluție între două funcții clopot ale lui Gauss se obține tot o funcție clopot a lui Gauss, ceea ce justifică rezultatul enunțat de teorema limită centrală

Ilustrare exemplu

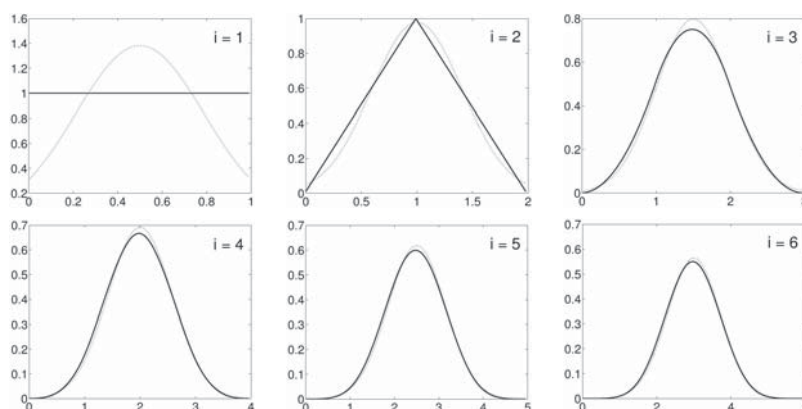


Figura 6: Distribuțiile variabilelor aleatoare obținute prin convolvarea a i distribuții uniforme în $[0,1]$ ($i = 1, \dots, 6$) – reprezentate cu linie continuă – și distribuțiile gaussiene având aceeași medie și dispersie – cu linie punctată.

Teorema de medie I

Teoremă. Media variabilei aleatoare $\zeta = g(\xi, \eta)$, indiferent de funcția g și de distribuția $w_{\xi\eta}$, se poate calcula cu formula:

$$\bar{\zeta} = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) w_{\xi\eta}(x, y) dx dy \quad (32)$$

Exemplu. Media sumei a două variabile aleatoare. Fie $\zeta = \xi + \eta$.

$$\begin{aligned} \bar{\zeta} = \overline{\xi + \eta} &= \iint_{\mathbb{R}^2} (x + y) w_{\xi\eta}(x, y) dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} x w_{\xi\eta}(x, y) dx dy + \iint_{\mathbb{R}^2} y w_{\xi\eta}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (33)$$

Teorema de medie II

$$\begin{aligned} \bar{\zeta} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} w_{\xi\eta}(x, y) dy \right)}_{w_{\xi}(x)} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} w_{\xi\eta}(x, y) dx \right)}_{w_{\eta}(y)} dy \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x w_{\xi}(x) dx}_{\bar{\xi}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y w_{\eta}(y) dy}_{\bar{\eta}} = \bar{\xi} + \bar{\eta} \end{aligned} \quad (34)$$

Concluzie: media sumei a două variabile aleatoare este egală cu suma mediilor, indiferent de gradul de (in)dependență al acestora!

Momente necentrate

Momentele necentrate de ordin (k, l) ale perechii de variabile aleatoare (ξ, η) se definesc ca fiind media statistică a produsului $\xi^k \eta^l$:

$$m_{\xi\eta}^{(k,l)} \triangleq \overline{\xi^k \eta^l} = \iint_{\mathbb{R}^2} x^k y^l w_{\xi\eta}(x, y) dx dy \quad (35)$$

Momentul necentrat mixt de ordin doi (corespunzător lui $k = l = 1$) se numește *corelația* dintre ξ și η , și se notează cu $R_{\xi\eta}$:

$$m_{\xi\eta}^{(1,1)} = \overline{\xi\eta} \stackrel{\text{not}}{=} R_{\xi\eta} = \iint_{\mathbb{R}^2} xy w_{\xi\eta}(x, y) dx dy \quad (36)$$

Momente centrate

Momentele centrate de ordin (k, l) ale perechii (ξ, η) se definesc ca fiind momentele necentrate ale variabilelor centrate (adică ale variabilelor din care s-a scăzut media, astfel încât să devină de medie nulă):

$$M_{\xi\eta}^{(k,l)} \triangleq \overline{(\xi - \bar{\xi})^k (\eta - \bar{\eta})^l} = \iint_{\mathbb{R}^2} (x - \bar{\xi})^k (y - \bar{\eta})^l w_{\xi\eta}(x, y) dx dy \quad (37)$$

Momentul centrat mixt de ordin doi (pentru $k = l = 1$) se numește *covariația* dintre ξ și η , și se notează cu $K_{\xi\eta}$:

$$\overline{(\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta})} \stackrel{\text{not}}{=} K_{\xi\eta} = \iint_{\mathbb{R}^2} (x - \bar{\xi})(y - \bar{\eta}) w_{\xi\eta}(x, y) dx dy \quad (38)$$

Corolar

Se poate arăta că:

$$\begin{aligned} K_{\xi\eta} &= \overline{(\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta})} = \overline{\xi\eta - \xi\bar{\eta} - \bar{\xi}\eta + \bar{\xi}\bar{\eta}} \\ &= \overline{\xi\eta} - \overline{\xi\bar{\eta}} - \overline{\bar{\xi}\eta} + \overline{\bar{\xi}\bar{\eta}} = \overline{\xi\eta} - \bar{\xi}\bar{\eta} - \bar{\xi}\bar{\eta} + \bar{\xi}\bar{\eta} = \overline{\xi\eta} - \bar{\xi}\bar{\eta} = R_{\xi\eta} - \bar{\xi}\bar{\eta} \end{aligned} \quad (39)$$

$$K_{\xi\eta} = R_{\xi\eta} - \bar{\xi}\bar{\eta} \quad (40)$$

În calculul de mai sus s-au folosit două rezultate obținute anterior: media sumei este suma mediilor, respectiv constantele ies în afara operației de mediere (motiv pentru care, de exemplu, $\overline{\bar{\xi}\bar{\eta}} = \bar{\xi}\bar{\eta}$)

Proprietăți

Definiție. Două variabile aleatoare se numesc *decorelate* atunci când covariația dintre ele este nulă: $K_{\xi\eta} = 0$

Proprietate. Dacă două variabile aleatoare sunt independente, atunci ele sunt și decorolate. Reciproca nu este în general valabilă.

Demonstrație. Dacă ξ și η sunt independente, avem:

$$\begin{aligned} \overline{\xi\eta} &= \iint_{\mathbb{R}^2} xyw_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} xyw_{\xi}(x)w_{\eta}(y) dx dy \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} xw_{\xi}(x) dx}_{\bar{\xi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} yw_{\eta}(y) dy}_{\bar{\eta}} = \bar{\xi}\bar{\eta} \end{aligned} \quad (41)$$

și deci:

$$K_{\xi\eta} = \overline{\xi\eta} - \bar{\xi}\bar{\eta} = 0 \quad (42)$$

Dreapta de regresie

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Braşov, România

January 7, 2015

Cuvânt înainte

- ▶ momentele mixte de ordinul doi ale unei perechi de variabile aleatoare (corelația & covariația) sunt o măsură a gradului de dependență liniară între cele două variabile
- ▶ fie următorul exemplu: ne interesează studiul dependenței statistice între două variabile aleatoare
- ▶ în absența cunoștințelor statistice despre ξ și η , se acumulează prin experimentări succesive cât mai multe realizări particulare $(\xi^{(i)}, \eta^{(i)})$ ale perechii de variabile aleatoare, iar punctele rezultate se așează pe un grafic bidimensional
- ▶ din forma norului de puncte rezultat se pot trage concluzii referitoare la tipul de dependență dintre ξ și η

Exemple

- **Cazul 1.** cu cât forma norului seamănă mai pronunțat cu o dreaptă (ca în Figura 1.(a)) cu atât înseamnă că între cele două variabile există o dependență liniară mai puternică, cu alte cuvinte, aproximarea uneia din cealaltă printr-o relație liniară este mai bună
- **Cazul 2.** dacă forma norului este haotică (ca în Figura 1.(b)), înseamnă că ξ și η sunt independente, și încercarea de a o aproxima pe vreuna din cealaltă după o relație oarecare (nu neapărat liniară) este sortită eșecului
- **Cazul 3.** pot exista cazuri în care norul de puncte nu este haotic, dar forma după care se orientează nu este liniară (vezi Figura 1.(c)); în acest caz, variabilele aleatoare sunt independente liniar (ceea ce e echivalent cu faptul că ele sunt decorrelate, după cum vom arăta în continuare) dar nu sunt independente!

Ilustrare exemple

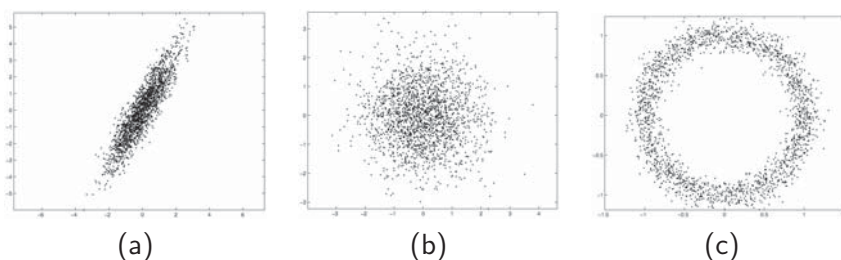


Figura 1: Exemplificarea tipurilor de dependență dintre variabile aleatoare. Diagrama (ξ, η) pentru diverse cazuri (a) ξ și η corelate; (b) ξ și η independente; (c) ξ și η decorrelate, dar dependente.

Problemă

Forma norului de puncte $(\xi^{(i)}, \eta^{(i)})$ este aproximativ fusiformă; se pune problema aflării dreptei (numită *dreaptă de regresie*) care ar aproxima cel mai bine pe η cu o funcție liniară de ξ :

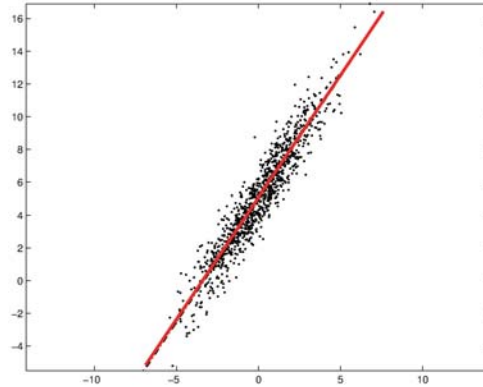


Figura 2: Problema aproximării liniare: norul de puncte $(\xi^{(i)}, \eta^{(i)})$ și dreapta de regresie (cu roșu).

Formularea matematică a problemei

Avem de determinat numerele $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât estimarea liniară a lui η din ξ , notată cu $\hat{\eta}$ și dată de:

$$\hat{\eta} = a\xi + b \quad (1)$$

să se fie “cât mai apropiată posibil” de valoarea reală a lui η . Acest deziderat trebuie tradus matematic, printr-un criteriu de eroare, pe care-l alegem criteriul *erorii pătratice medii minime*. Această alegere este justificată în principal prin faptul că acest criteriu conduce la o soluție matematică ce poate fi exprimată analitic

Se definește, deci, eroarea pătratică medie ε ca fiind:

$$\varepsilon = \overline{(\eta - \hat{\eta})^2} \quad (2)$$

cu ajutorul căreia definim matematic problema ca:

$$\arg \min_{a,b} \varepsilon \quad (3)$$

Rezolvare I

- ▶ problema este una de aflare a minimului unei funcții (pătratică) în funcție de două argumente
- ▶ având în vedere faptul că funcția e pătratică în oricare din cele două argumente, se poate arăta că problema se poate trata separat, ca două probleme de minimizare unidimensională
- ▶ așadar, valorile lui a și b care-l minimizează pe ε se obțin anulând derivatele parțiale:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial b} = 0 \Rightarrow b_o \quad (4a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} = 0 \Rightarrow a_o \quad (4b)$$

unde a_o și b_o reprezintă valorile optime ale parametrilor a și b
Având în vedere că ε poate fi scrisă ca

Rezolvare II

$$\varepsilon = \overline{(\eta - \hat{\eta})^2} = \overline{(\eta - a\xi - b)^2} \quad (5)$$

relația (4a) devine

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial b} = \frac{\partial \overline{(\eta - a\xi - b)^2}}{\partial b} = -2\overline{(\eta - a\xi - b)} = 0 \quad (6)$$

de unde rezultă valoarea lui b :

$$b_o = \bar{\eta} - a\bar{\xi} \quad (7)$$

Înlocuind-o pe aceasta în (5), rezultă:

$$\varepsilon = \overline{((\eta - \bar{\eta}) - a(\xi - \bar{\xi}))^2} \quad (8)$$

după care (4b) poate fi scrisă

Rezolvare III

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} &= \frac{\partial ((\eta - \bar{\eta}) - a(\xi - \bar{\xi}))^2}{\partial a} = -2((\eta - \bar{\eta}) - a(\xi - \bar{\xi}))(\xi - \bar{\xi}) \\ &= -2 \left((\eta - \bar{\eta})(\xi - \bar{\xi}) - a(\xi - \bar{\xi})^2 \right) = -2(K_{\xi\eta} - a\sigma_{\xi}^2) = 0\end{aligned}\quad (9)$$

de unde rezultă valoarea lui a care-l minimizează pe ε :

$$a_o = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi}^2} \quad (10)$$

Înlocuind valorile obținute pentru a_o și b_o (din (10) și (7)) în (1), rezultă că ecuația dreptei de regresie, care aproximează optim pe η ca o funcție liniară de ξ (în sensul erorii pătratice medii) este:

$$\hat{\eta}_o = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi}^2}(\xi - \bar{\xi}) + \bar{\eta} \quad (11)$$

Rezolvare IV

Am notat valoarea optimă a lui $\hat{\eta}$ cu $\hat{\eta}_o$

Observații

- ▶ dacă ξ și η sunt decorelate, adică dacă $K_{\xi\eta} = 0$, atunci avem $\hat{\eta}_o = \bar{\eta}$, adică *cea mai bună aproximare liniară a lui η în funcție de ξ nu depinde de acesta*
- ▶ corolar: între două variabile decorelate nu există nici un fel de dependență liniară
- ▶ dacă $K_{\xi\eta} \neq 0$ atunci singurul lucru ce poate fi afirmat este că ξ și η nu sunt decorelate, între ele există o anumită dependență liniară
- ▶ ce *nu* se poate evalua, însă, pe baza valorii efective a lui $K_{\xi\eta}$ este cât de puternică este dependența respectivă, cu alte cuvinte, cât de apropiat este norul de puncte $(\xi^{(i)}, \eta^{(i)})$ de o dreaptă
- ▶ această măsură poate fi studiată numai analizând valoarea erorii obținute prin aproximarea lui η cu $\hat{\eta}_o$

Coeficientul de corelație I

Scriind formula erorii pătratice medii minime obținute, avem:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\min} &= \overline{(\eta - \hat{\eta}_o)^2} = \overline{\left((\eta - \bar{\eta}) - \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi^2} (\xi - \bar{\xi}) \right)^2} \\ &= \underbrace{\overline{(\eta - \bar{\eta})^2}}_{\sigma_\eta^2} - 2 \underbrace{\frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi^2} \overline{(\eta - \bar{\eta})(\xi - \bar{\xi})}}_{K_{\xi\eta}} + \frac{K_{\xi\eta}^2}{\sigma_\xi^4} \underbrace{\overline{(\xi - \bar{\xi})^2}}_{\sigma_\xi^2} \\ &= \sigma_\eta^2 - 2 \frac{K_{\xi\eta}^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{K_{\xi\eta}^2}{\sigma_\xi^2} = \sigma_\eta^2 - \frac{K_{\xi\eta}^2}{\sigma_\xi^2} \\ &= \sigma_\eta^2 \left[1 - \left(\frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} \right)^2 \right]\end{aligned}\quad (12)$$

Termenul pus în evidență în expresia finală a erorii pătratice medii minime se notează cu $\rho_{\xi\eta}$ și se numește *coeficient de corelație*:

Coeficientul de corelație II

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} \quad (13)$$

Coeficientul de corelație $\rho_{\xi\eta}$ reprezintă valoarea normalizată a covariației, care permite evaluarea absolută a măsurii dependenței liniare între ξ și η ; dacă scriem:

$$\varepsilon_{\min} = \sigma_\eta^2 (1 - \rho_{\xi\eta}^2) \quad (14)$$

se observă că $\rho_{\xi\eta}$ este de modul subunitar, în caz contrar, eroarea pătratică medie devenind negativă, ceea ce este imposibil, având în vedere că aceasta reprezintă media pătratului unei valori:

$$|\rho_{\xi\eta}| \leq 1 \quad (15)$$

Mai mult, se observă că pe măsură ce $|\rho_{\xi\eta}| \nearrow 1$, eroarea pe care o facem aproximându-l pe η cu $\hat{\eta}_o$ este din ce în ce mai mică. La limită, avem:

Coeficientul de corelație III

$$|\rho_{\xi\eta}| = 1 \Leftrightarrow \varepsilon_{\min} = 0 \Leftrightarrow \eta = \hat{\eta}_o$$

dacă modulul coeficientului de corelație este egal cu unu, între ξ și η există o dependență liniară funcțională: norul de puncte $(\xi^{(i)}, \eta^{(i)})$ este o dreaptă (dacă media pătratică a unei variabile aleatoare este nulă, atunci variabila aleatoare respectivă, în cazul nostru $\eta - \eta_o$) este determinist egală cu 0)

semnificația unei valori negative a coeficientului de corelație

($\rho_{\xi\eta} < 0$): panta dreptei de regresie este negativă, în nici un caz faptul că ξ și η sunt mai puțin corelate decât în cazul $\rho_{\xi\eta} \geq 0$

Ilustrare și interpretare coeficient de corelație

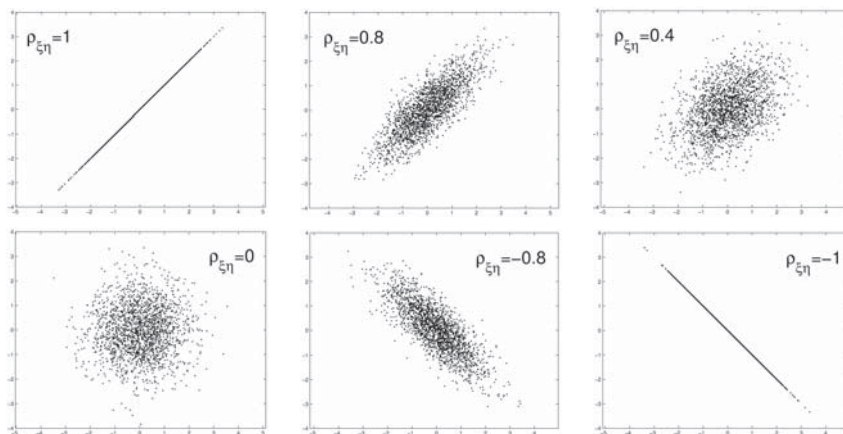


Figura 3: Forma norului de puncte $(\xi^{(i)}, \eta^{(i)})$ pentru diverse valori ale coeficientului de corelație.

Distribuția gaussiană de ordinul doi

Variabilele aleatoare ξ și η se zice că au o distribuție gaussiană (sau normală) de ordinul doi de parametri $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ (și se notează $(\xi, \eta): \mathcal{N}(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$) dacă densitatea lor de probabilitate de ordinul doi este dată de:

$$w_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right) \right]} \quad (16)$$

cu μ_1 și μ_2 oarecare, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ și $|r| \leq 1$

Observații

- ▶ dacă perechea (ξ, η) are o distribuție gaussiană de ordinul doi, atunci și ξ și η au o distribuție gaussiană de ordinul unu:
 $\xi: \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$, respectiv $\eta: \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$
- ▶ reciproca afirmației de mai sus nu e valabilă: faptul că atât ξ cât și η au fiecare o distribuție gaussiană de ordinul unu nu garantează faptul că perechea (ξ, η) are o distribuție gaussiană de ordinul doi!
- ▶ primii patru parametri ai gaussienei de ordinul doi au semnificația de medii, respectiv dispersii, ale celor două variabile aleatoare
- ▶ al cincilea parametru, respectiv ρ , reprezintă coeficientul de corelație între ξ și η :

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}} = \dots = \rho \quad (17)$$

Ilustrare

Forma clopotului lui Gauss bidimensional va fi mai mult sau mai puțin elongată în funcție de cât de apropiat este $|\rho|$ de 1 (respectiv de 0):

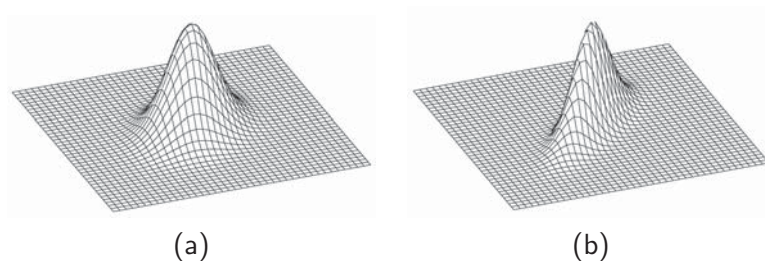


Figura 4: Forma distribuției gaussiene de ordinul doi pentru: (a) $\rho = 0,3$ și (b) $\rho = 0,8$.

Proprietate

Din faptul că $\rho_{\xi\eta} = \rho$ decurge o proprietate importantă a gaussienei: pentru $\rho = 0$, se poate scrie:

$$\begin{aligned} w_{\xi\eta}(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right]} \\ &= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)} \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)} \quad (18) \\ &= w_{\xi}(x)w_{\eta}(y) \end{aligned}$$

Interpretare: dacă două variabile aleatoare cu distribuție gaussiană de ordinul doi sunt decorelate, atunci ele sunt și independente!

Aplicații ale dreptei de regresie în prelucrarea semnalelor

- ▶ estimarea frecvenței purtătoare la recepție
- ▶ estimarea ratei de modificări pentru un semnal
- ▶ detecția tranzițiilor unui semnal

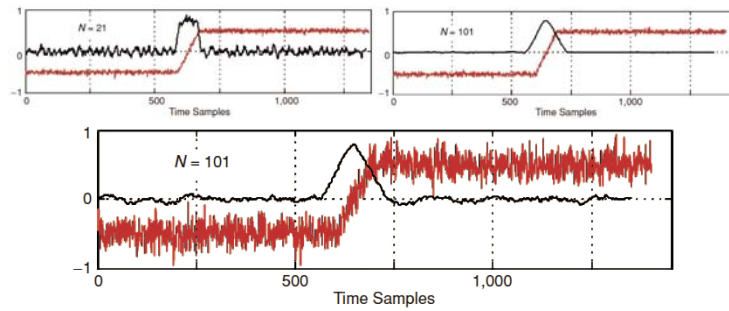


Figura 5: Semnal cu zgomot (roșu) și panta dreptei de regresie (negru) calculată pentru N eşantioane (fereastră glisantă).

Semnale aleatoare (modelarea semnalelor ca procese aleatoare)

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Braşov, România

January 7, 2015

Cuvânt înainte

- ▶ semnalele aleatoare - *colecții* de variabile aleatoare cu desfășurare în timp
- ▶ semnalele aleatoare sunt semnale guvernate de legi probabilistice (i.e. valoarea unui semnal aleator la un moment dat este, într-o anumită măsură, *impredictibilă*)
- ▶ matematic, un semnal aleator este o funcție definită atât pe spațiul eșantioanelor Ω cât și pe \mathbb{R} :

$$\xi : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (1)$$

- ▶ dacă fixăm $\omega_k \in \Omega$, atunci avem de-a face cu o *realizare particulară* a semnalului aleator, $\xi(\omega_k, t) \stackrel{\text{not}}{=} \xi^{(k)}(t)$, care este ceea ce convențional numim un *semnal*, adică o funcție de timp

Ilustrare semnal aleator

Termenul de *semnal aleator* se referă la o *clasă de semnale* caracterizate de aceleași proprietăți statistice, și nu la vreun semnal anume numit realizare particulară a semnalului aleator (vezi Figura 4)

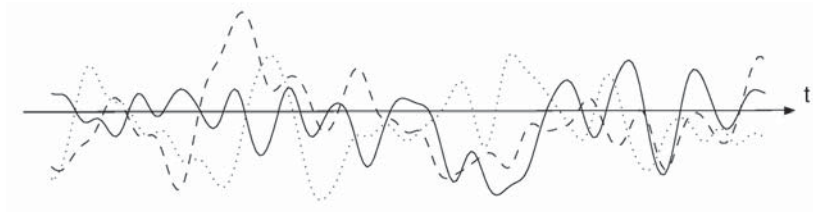


Figura 1: Diverse realizări particulare ale unui semnal aleator.

Caracterizarea statistică a semnalelor aleatoare

Dacă fixăm un moment de timp oarecare t_1 , valoarea semnalului la momentul respectiv de timp este o *variabilă aleatoare*
 $\xi(t_1) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

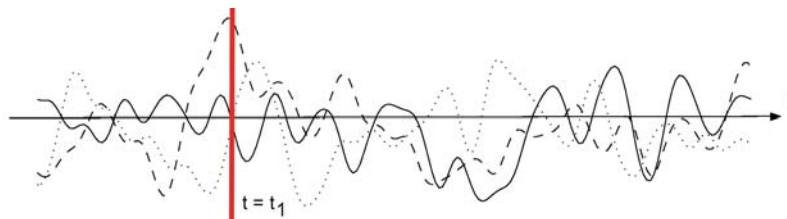


Figura 2: Semnal aleator și momentul de timp fixat t_1 .

Putem deci folosi pentru descrierea statistică a semnalului aleator mărimile statistice introduse în capitolele anterioare pentru caracterizarea variabilelor aleatoare sau a perechilor de variabile aleatoare

Caracterizarea de ordinul unu a semnalelor aleatoare I

Prin definiție, funcția de repartiție de ordinul unu a semnalului aleator $\xi(t)$ este:

$$F_{\xi}(x_1, t_1) \triangleq P(\xi(t_1) \leq x_1) \quad (2)$$

Definiția (2) este similară celei pentru o V.A. cu diferența că, în cazul semnalelor, funcția de repartiție depinde și de timp

Funcția de repartiție trebuie să caracterizeze întreg semnalul, adică variabilele aleatoare $\xi(t_1)$ pentru *orice* moment de timp $t_1 \in \mathbb{R}$

Densitatea de probabilitate de ordinul unu a semnalului este:

$$w_{\xi}(x_1, t_1) = \frac{\partial F_{\xi}(x_1, t_1)}{\partial x_1} \quad (3)$$

Pe baza densității de probabilitate se pot calcula momentele statistice ale semnalului (inclusiv media, media pătratică și varianța acestuia):

Caracterizarea de ordinul unu a semnalelor aleatoare II

$$\overline{\xi(t_1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 w_{\xi}(x_1, t_1) dx_1 \quad (4)$$

$$\overline{\xi^2(t_1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 w_{\xi}(x_1, t_1) dx_1 \quad (5)$$

$$\sigma_{\xi}^2(t_1) = \overline{\xi^2(t_1)} - \overline{\xi(t_1)}^2 \quad (6)$$

Toate aceste mărimi statistice de ordinul unu permit caracterizarea completă a comportamentului statistic al semnalului la orice moment de timp

Ceea ce nu poate fi evaluat, însă, cu ajutorul acestor mărimi este interdependența statistică între valorile semnalului la două momente de timp diferite, pentru aceasta fiind nevoie de mărimi statistice de ordinul doi

Caracterizarea de ordinul doi a semnalelor aleatoare I

Prin definiție funcția de repartiție de ordinul doi a semnalului aleator $\xi(t)$ este funcția de repartiție de ordinul doi a variabilelor aleatoare $\xi(t_1)$ și $\xi(t_2)$:

$$F_{\xi\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2) \triangleq P((\xi(t_1) \leq x_1) \cap (\xi(t_2) \leq x_2)) \quad (7)$$

Funcția de repartiție de ordinul doi depinde și de momentele de timp t_1 și t_2

Densitatea de probabilitate de ordinul doi a semnalului este:

$$w_{\xi\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_{\xi\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (8)$$

$w_{\xi\xi}$ permite calculul momentelor mixte ale acestuia:

Caracterizarea de ordinul doi a semnalelor aleatoare II

Prin definiție, **funcția de autocorelație** a semnalului ca fiind corelația dintre $\xi(t_1)$ și $\xi(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$:

$$R_{\xi}(t_1, t_2) \triangleq \overline{\xi(t_1)\xi(t_2)} = \iint_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 w_{\xi\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (9)$$

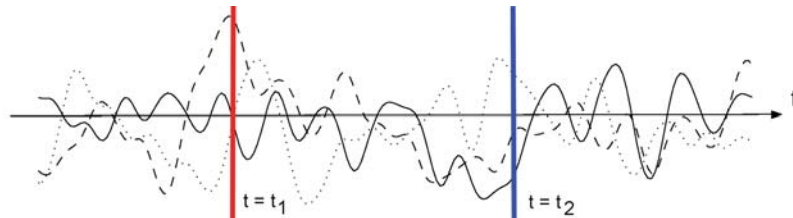


Figura 3: Semnal aleator și momentele de timp t_1 și t_2 .

Observație: funcția de autocorelație ar trebui notată cu $R_{\xi\xi}$ în spiritul notațiilor de până acum - vom folosi însă forma simplificată

Caracterizarea de ordinul doi a semnalelor aleatoare III

Similar, putem defini funcția de autocovariație a semnalului ca fiind funcția de autocorelație a valorilor centrate ale semnalului:

$$K_{\xi}(t_1, t_2) \triangleq \overline{(\xi(t_1) - \bar{\xi}(t_1)) (\xi(t_2) - \bar{\xi}(t_2))} = \overline{\xi(t_1)\xi(t_2)} - \bar{\xi}(t_1) \bar{\xi}(t_2) \quad (10)$$

Descrierea statistică a semnalelor aleatoare ar putea continua prin definirea densităților de probabilitate de ordin superior lui doi

Evident, cu cât ordinul este mai mare, cu atât descrierea semnalului este *mai completă*. Pe de altă parte, cu cât ordinul este mai mare, cu atât devin mai greu de estimat în mod practic mărimile respective. Din aceste motive, majoritatea aplicațiilor în prelucrarea statistică a semnalelor folosesc mărimile de ordin cel mult doi (medie, funcție de autocorelație, etc.)

Semnale staționare I

Noțiune foarte importantă în teoria statistică a semnalelor — *staționaritatea semnalelor aleatoare*

Staționaritate în sens strict: un semnal aleator $\xi(t)$ se zice că este staționar în sens strict de ordinul n dacă densitatea sa de probabilitate de până la ordinul n este invariantă la o translație τ oarecare în timp $\forall \tau \in \mathbb{R}$:

$$w_{\underbrace{\xi \dots \xi}_n}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = w_{\underbrace{\xi \dots \xi}_n}(x_1, \dots, x_n, t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) \quad (11)$$

Relația (11) este valabilă pentru orice $n' < n$, întrucât densitatea de ordin n' se obține ca densitate marginală a celei de ordin n

În particular, un semnal staționar în sens strict de ordinul doi este un semnal pentru care:

Semnale staționare II

$$w_{\xi}(x_1, t_1) = w_{\xi}(x_1, t_1 + \tau), \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad (12)$$

$$w_{\xi\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2) = w_{\xi\xi}(x_1, x_2, t_1 + \tau, t_2 + \tau), \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad (13)$$

Dacă alegem $\tau = -t_1$ în relația (12), obținem:

$$w_{\xi}(x_1, t_1) = w_{\xi}(x_1, 0) = w_{\xi}(x_1) \quad (14)$$

Prima consecință directă a staționarității unui semnal este faptul că densitatea sa de probabilitate de ordinul unu *nu depinde de timp*: la orice moment de timp t , variabila aleatoare $\xi(t)$ are *aceeași* densitate de probabilitate

Consecința imediată a acestui fapt este că media, media pătratică și dispersia semnalului au aceeași proprietate: dacă înlocuim (14) în relațiile (4)–(6), obținem:

Semnale staționare III

$$\overline{\xi(t_1)} = \bar{\xi}, \quad (15)$$

$$\overline{\xi^2(t_1)} = \bar{\xi^2} \quad (16)$$

$$\sigma_{\xi}^2(t_1) = \sigma_{\xi}^2 \quad (17)$$

Dacă, în plus, alegem $\tau = -t_2, \forall \tau \in \mathbb{R}$ în ecuația (13), obținem:

$$w_{\xi\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2) = w_{\xi\xi}(x_1, x_2, t_1 - t_2, 0) = w_{\xi\xi}(x_1, x_2, t_1 - t_2) \quad (18)$$

Relația (18) ne arată că densitatea de probabilitate de ordinul doi a semnalului staționar în sens strict de ordinul doi nu depinde de cele două momente de timp ca atare, ci numai de diferența dintre ele (oricare două valori ale semnalului localizate la același ecart temporal una față de cealaltă vor avea aceeași distribuție de ordinul doi, indiferent de localizarea lor absolută pe axa timpului)

Semnale staționare IV

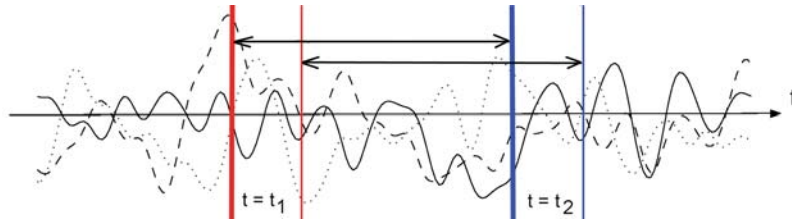


Figura 4: Semnal aleator și diferența dintre momentele de timp t_1 și t_2 .

Evident, aceste proprietăți se răsfrâng asupra momentelor mixte ale semnalului, adică funcțiile de autocorelație și autocovariație, care vor avea și ele aceeași proprietate de a nu depinde de cele două argumente ca atare, ci numai de diferența dintre ele: introducând (18) în relațiile (9) și (10), obținem:

Semnale staționare V

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1 - t_2) \quad (19)$$

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_1 - t_2) \quad (20)$$

cu

$$R_{\xi}(\tau) = \overline{\xi(t)\xi(t+\tau)} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (21)$$

$$K_{\xi}(\tau) = R_{\xi}(\tau) - \bar{\xi}^2 \quad (22)$$

Se observă din relația (22) că în ipoteza staționarității, funcțiile de autocorelație și autocovariație diferă numai printr-o constantă.

Dacă, în plus, semnalul este de medie nulă, atunci cele două funcții coincid.

Staționaritate în sens larg I

- ▶ staționaritatea în sens strict este o ipoteză greu de verificat în practică pentru majoritatea semnalelor reale, chiar și pentru valori mici ale lui n
- ▶ în practică, se folosește o ipoteză simplificată, și anume cea de staționaritate în sens larg, care implică invarianța la o translație în timp nu a densităților de probabilitate, ci a momentelor semnalului de ordinul unu și doi
- ▶ **Definiție:** un semnal se numește **staționar în sens larg** dacă:
 1. media lui este independentă de timp (relația (15));
 2. funcția lui de autocorelație depinde doar de diferența dintre cele două argumente ale sale (relația (19))

Staționaritate în sens larg II

- ▶ se poate arăta că din (15) și (19) se pot deduce și relațiile de invarianță la o translație în timp a celorlalte momente de interes, cu alte cuvinte că și relațiile (16), (17) și (20) sunt adevărate în ipoteza staționarității în sens larg.
- ▶ în cele ce urmează, ne vom referi pe scurt la semnalele staționare în sens larg ca fiind *semnale staționare*
- ▶ majoritatea semnalelor reale sunt fie staționare, fie pot fi approximate pe durate mai lungi sau mai scurte cu semnale staționare, ceea ce explică interesul arătat pentru acest tip de semnale

Proprietățile funcției de autocorelație I

1. Funcția de autocorelație este pară.

$$R_{\xi}(\tau) = R_{\xi}(-\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad (23)$$

Demonstrație. Pornind de la (21) și alegând $\tau = t_1 - t$, obținem $R_{\xi}(\tau) = \overline{\xi(t_1 - \tau)}\xi(t_1) = R_{\xi}(-\tau)$

Interpretare. $R_{\xi}(\tau)$ reprezintă corelația între două valori ale semnalului decalate în timp cu τ , oriunde ar fi ele localizate în mod absolut pe axa timpului. Fie două momente t_1 și t_2 , cu $t_2 - t_1 = \tau$. Atunci, t_2 e decalat cu τ față de t_1 , în timp ce t_1 e decalat cu $-\tau$ față de t_2 . Rezultă că $R_{\xi}(\tau)$ și $R_{\xi}(-\tau)$ măsoară, de fapt, același lucru, și anume corelația dintre variabilele aleatoare $\xi(t_1)$ și $\xi(t_2)$, deci trebuie obligatoriu să fie egale!

Proprietățile funcției de autocorelație II

2. Funcția de autocorelație este maximă în origine.

$$R_{\xi}(0) \geq |R_{\xi}(\tau)| \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad (24)$$

Demonstrație. Calculăm media pătratică a diferenței $\xi(t) - \xi(t + \tau)$:

$$\begin{aligned} \overline{(\xi(t) - \xi(t + \tau))^2} &= \overline{\xi^2(t) - 2\xi(t)\xi(t + \tau) + \xi^2(t + \tau)} \\ &= \underbrace{\overline{\xi^2(t)}}_{R_{\xi}(0)} - 2\underbrace{\overline{\xi(t)\xi(t + \tau)}}_{R_{\xi}(\tau)} + \underbrace{\overline{\xi^2(t + \tau)}}_{R_{\xi}(0)} \quad (25) \\ &= 2(R_{\xi}(0) - R_{\xi}(\tau)) \end{aligned}$$

Cum media pătratică este obligatoriu pozitivă, rezultă că $R_{\xi}(0) \geq R_{\xi}(\tau)$. Repetând raționamentul de mai sus pornind de la $\xi(t) + \xi(t + \tau)$, va rezulta că $R_{\xi}(0) \geq -R_{\xi}(\tau)$, ceea ce completează demonstrația relației (24).

Proprietățile funcției de autocorelație III

Interpretare: valoarea funcției de autocorelație în 0 reprezintă corelația dintre valoarea semnalului la un moment de timp dat și ea însăși. Este evident că această corelație (care e perfectă) nu poate fi mai mică decât corelația respectivei valori cu altă valoare a semnalului, decalată cu un τ oarecare.

3. în ipoteza că în semnal nu există componente periodice sau deterministe, valoarea funcției de autocorelație la infinit este egală cu pătratul mediei semnalului.

$$R_{\xi}(\infty) = \bar{\xi}^2 \quad (26)$$

Demonstrație. Revenind la (21) observăm că atunci când $\tau \rightarrow \infty$, avem de-a face cu două valori care, deși provin din același semnal, datorită ecartului temporal dintre ele, este verosimil să nu mai fie legate statistic una de alta, adică să fie independente. În acest caz, media produsului devine egală cu produsului mediilor, care sunt egale, și deci, relația (26) este

Proprietățile funcției de autocorelație IV

demonstrată. Presupunerea de independență statistică între două valori ale semnalului foarte îndepărtate temporal una de cealaltă nu mai e valabilă dacă, de exemplu, în semnal există o componentă periodică.

4. Media pătratică și varianța semnalului se obțin din funcția de autocorelație astfel:

$$\bar{\xi}^2 = R_{\xi}(0) \quad (27)$$

$$\sigma_{\xi}^2 = R_{\xi}(0) - R_{\xi}(\infty) \quad (28)$$

Demonstrație. Relația (27) nu este altceva decât exprimarea relației (21) pentru $\tau = 0$, ținând în plus cont de (16), în timp ce relația (28) decurge firesc din ecuațiile (27) și (26).

Proprietățile funcției de autocorelație V

5. Dacă semnalul aleator este periodic, atunci și funcția lui de autocorelație este periodică, având aceeași perioadă ca semnalul.

$$\xi(t) = \xi(t + T) \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow R_\xi(\tau) = R_\xi(\tau + T) \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad (29)$$

Demonstrație. Scriem că

$$R_\xi(\tau + T) = \overbrace{\xi(t) \xi(t + \tau + T)}^{\xi(t+T)} = \overline{\xi(t + T) \xi(t + \tau + T)} = R_\xi(\tau) \quad (30)$$

Interpretare: $R_\xi(\tau)$ este corelația dintre $\xi(t)$ și $\xi(t + \tau)$, care, datorită faptului că $\xi(t + \tau) = \xi(t + \tau + T)$ este identică cu corelația dintre $\xi(t)$ și $\xi(t + \tau + T)$, care nu este altceva decât $R_\xi(\tau + T)$.

Funcția de intercorelație

Fie $\xi(t)$ și $\eta(t)$ două semnale staționare. Pornind de la relația (21) se scrie funcția de intercorelație dintre $\xi(t)$ și $\eta(t)$ precum:

$$R_{\xi\eta}(\tau) = \overline{\xi(t) \eta(t + \tau)} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (31)$$

și funcția de intercovariație $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$K_{\xi\eta}(\tau) = \overline{(\xi(t) - \bar{\xi}(t)) (\eta(t + \tau) - \bar{\eta}(t + \tau))} = R_{\xi\eta}(\tau) - \bar{\xi} \bar{\eta} \quad (32)$$

Funcția de intercorelație nu mai este o funcție pară. În schimb, reluând demonstrația de la proprietatea 1 a funcției de autocorelație, se poate arăta că funcția de intercorelație este caracterizată de:

$$R_{\xi\eta}(\tau) = R_{\eta\xi}(-\tau) \quad (33)$$

Semnale ergodice. Medii temporale ale semnalului

Fie $\xi^{(k)}(t)$ o realizare particulară a semnalului aleator staționar $\xi(t)$. Prin definiție media temporală a realizării particulare este:

$$\widetilde{\xi^{(k)}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \xi^{(k)}(t) dt \quad (34)$$

Funcția de autocorelație temporală calculată pe $\xi^{(k)}(t)$:

$$R_{\xi^{(k)}}^t(t_1, t_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \xi^{(k)}(t + t_1) \xi^{(k)}(t + t_2) dt \quad (35)$$

Făcând schimbarea de variabilă $t + t_2 = \tau$, funcția de autocorelație temporală depinde doar de diferența dintre cele două argumente:

$$R_{\xi^{(k)}}^t(t_1, t_2) = R_{\xi^{(k)}}^t(t_1 - t_2) \quad (36)$$

Ergodicitate în sensul mediei și în sensul autocorelației

Un semnal aleator staționar $\xi(t)$ se numește *ergodic în sensul mediei* dacă media temporală a oricărei realizări particulare ale sale este aceeași și este egală cu media statistică:

$$\bar{\xi} = \widetilde{\xi^{(k)}} \quad \forall k \quad (37)$$

Un semnal aleator staționar $\xi(t)$ se numește *ergodic în sensul funcției de autocorelație* dacă funcția sa de autocorelație calculată pe oricare realizare particulară a sa este identică cu funcția de autocorelație statistică:

$$R_{\xi}(\tau) \equiv R_{\xi^{(k)}}^t(\tau) \quad \forall k \quad (38)$$

Ergodicitate

Observații:

- ▶ problema ergodicității nu s-ar putea pune în absența ipotezei de staționaritate a semnalului
- ▶ dacă semnalul ar fi nestaționar, atunci media lui statistică ar varia cu timpul, deci n-ar fi unică, și, deci, nu s-ar mai putea pune problema egalității cu media temporală a unei realizări particulare oarecare
- ▶ ergodicitatea este o ipoteză făcută de multe ori din lipsă de suficiente date, și nu întotdeauna verificată în practică
- ▶ ergodicitatea permite calculul mărimilor statistice ale semnalului pornind de la o singură realizare particulară a acestuia, 'și este invocată ori de câte ori avem nevoie de mărimile respective în condițiile în care dispunem de un număr insuficient de realizări particulare ale semnalului pentru o estimare precisă a acestora

Teorema ergodicității mediei I

Fie $\xi^{(k)}(t)$ o realizare particulară a semnalului aleator staționar $\xi(t)$. Fie $\mu_T^{(k)}(\xi)$ media temporală a realizării particulare trunchiate pe intervalul $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$:

$$\mu_T^{(k)}(\xi) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \xi^{(k)}(t) dt \quad (39)$$

Media temporală astfel definită este o variabilă aleatoare, variind de la o realizare particulară la alta. Media statistică a lui $\mu_T^{(k)}(\xi)$ este:

$$\overline{\mu_T^{(k)}(\xi)} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \xi^{(k)}(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{\xi^{(k)}(t)}_{\bar{\xi}} dt = \frac{1}{T} \bar{\xi} t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \bar{\xi} \quad (40)$$

Teorema ergodicității mediei II

În dezvoltarea de mai sus, am folosit ipoteza de staționaritate a semnalului prin faptul că media statistică este invariantă în timp. De asemenea, folosit faptul că operația de mediere statistică comută cu operația de sumare (integrare); în plus constantele (raportul $\frac{1}{T}$) ies în afara operației de mediere.

Semnalul $\xi(t)$ se este ergodic în sensul mediei dacă:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\left(\mu_T^{(k)}(\xi) - \bar{\xi}\right)^2} = 0 \quad (41)$$

Interpretare varianța variabilei aleatoare $\mu_T^{(k)}(\xi)$ tinde la 0 atunci când $T \rightarrow \infty$; echivalent cu a spune că variabila respectivă este deterministă, egală cu media ei.

Densitatea spectrală de putere I

- ▶ ne propunem caracterizarea din punct de vedere spectral a semnalelor aleatoare staționare în sens larg
- ▶ problemă delicată, datorită faptului că ipoteza de staționaritate a unui semnal implică faptul că acesta este de modul neintegrabil!

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi(t)| dt = \infty \quad (42)$$

- ▶ dacă un semnal este staționar, atunci el este *obligat* să aibă suport spațial infinit
- ▶ dacă semnalul ar avea un suport temporal finit, să zicem, $\xi(t) = 0$ pentru $t \notin [T_1, T_2]$, atunci mediile semnalului nu ar fi invariante în timp și, deci, semnalul nu ar fi staționar. Ceea ce implică faptul că, în realitate, nu există semnale pur staționare.

Densitatea spectrală de putere II

Urmare: nu putem calcula transformata Fourier a vreunei realizări particulare a semnalului (una din condițiile de existență a transformatei Fourier este integrabilitatea modulului semnalului)

Pentru o realizare particulară a semnalului, $\xi^{(k)}$, considerăm o variantă trunchiată a acesteia, $\xi_T^{(k)}$:

$$\xi_T^{(k)}(t) = \begin{cases} \xi^{(k)}(t) & \text{dacă } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (43)$$

Datorită limitării suportului temporal, varianta trunchiată este de modul integrabil și, deci, transformata Fourier a acesteia există:

$$X_T^{(k)}(\omega) = \mathcal{F} \left\{ \xi_T^{(k)}(t) \right\} (\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_T^{(k)}(t) e^{-j\omega t} dt \quad (44)$$

Densitatea spectrală de putere III

Energia realizării particulare trunchiate a semnalului este dată de:

$$\begin{aligned} E_{\xi_T^{(k)}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\xi_T^{(k)} \right)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_T^{(k)} \xi_T^{(k)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_T^{(k)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T^{(k)}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T^{(k)}(\omega) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_T^{(k)} e^{j\omega t} dt \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T^{(k)}(\omega) X_T^{(k)*}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| X_T^{(k)}(\omega) \right|^2 d\omega \end{aligned} \quad (45)$$

unde prin $()^*$ am notat operatorul de conjugare complexă.

Densitatea spectrală de putere IV

Ne-am folosit și de faptul că semnalul original $\xi_T^{(k)}$ poate fi recuperat din echivalentul său spectral prin transformare Fourier inversă:

$$\xi_T^{(k)}(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ X_T^{(k)}(\omega) \right\} (t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T^{(k)}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (46)$$

Puterea realizării particulare trunchiate a semnalului este dat'a de:

$$P_{\xi_T^{(k)}} = \frac{E_{\xi_T^{(k)}}}{T} = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| X_T^{(k)}(\omega) \right|^2 d\omega \quad (47)$$

Mărimea $\left| X_T^{(k)}(\omega) \right|^2$ reprezintă o caracteristică spectrală a semnalului, dar care caracterizează o singură realizare particulară (trunchiată)

Densitatea spectrală de putere V

Pentru a obține o măsură care să caracterizeze semnalul aleator în ansamblul lui, trebuie să realizăm o mediere statistică. Definim puterea medie a semnalului trunchiat ca media statistică a puterii:

$$P_{\xi_T} = \overline{P_{\xi_T^{(k)}}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\left| X_T^{(k)}(\omega) \right|^2}}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\left| X_T^{(k)}(\omega) \right|^2}}{T} d\omega \quad (48)$$

Prin trecere la limită când $T \rightarrow \infty$ (pentru a elimina efectul trunchierii), se definește puterea medie a semnalului netrunchiat:

$$P_{\xi} = \lim_{T \rightarrow \infty} P_{\xi_T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{\left| X_T^{(k)}(\omega) \right|^2}}{T} d\omega \quad (49)$$

Densitatea spectrală de putere VI

Integrandul din ecuația (49) se notează cu q_ξ și se numește *densitatea spectrală de putere* a semnalului:

$$q_\xi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{|X_T^{(k)}(\omega)|^2}}{T} \quad (50)$$

Iar puterea medie a semnalului devine:

$$P_\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} q_\xi(\omega) d\omega \quad (51)$$

Semnificația cantității $q_\xi(\omega)d\omega$ este de *putere medie a semnalului conținută de frecvențele acestuia din intervalul $[\omega, \omega + d\omega]$* .

Densitatea spectrală de putere este o funcție *reală, pozitivă și pară*.

Teorema Wiener–Hincin

Teorema Wiener–Hincin face legătura între funcția de autocorelație și densitatea spectrală de putere a semnalelor aleatoare staționare în sens larg

Teoremă. Densitatea spectrală de putere a unui semnal aleator staționar în sens larg este transformata Fourier a funcției sale de autocorelație

$$q_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_\xi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (52)$$

$$R_\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} q_\xi(\omega) e^{+j\omega\tau} d\omega \quad (53)$$

Spunem că funcțiile $R_\xi(\tau)$ și $q_\xi(\omega)$ sunt *perechi Fourier*

Densitatea spectrală de putere de interacțiune

Prin definiție, densitatea spectrală de putere de interacțiune între două semnale aleatoare staționare $\xi(t)$ și $\eta(t)$ este:

$$q_{\xi\eta}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{X_T^{(k)*}(\omega) Y_T^{(k)}(\omega)}}{T} \quad (54)$$

Din (54) se poate defini densitatea reciprocă $q_{\eta\xi}$ care este legată de $q_{\xi\eta}$ prin:

$$q_{\eta\xi}(\omega) = q_{\xi\eta}^*(\omega) \quad (55)$$

Densitatea de putere de interacțiune nu mai are semnificația fizică de putere, ci este mai degrabă o măsură a dependenței statistice dintre cele două semnale, exprimată în frecvență. Se calculează ca transformata Fourier a funcției de intercorelație:

$$q_{\xi\eta}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{\xi\eta}(\tau)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\xi\eta}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (56)$$

Zgomotul alb

Un semnal aleator staționar se numește zgomot de bandă largă dacă densitatea sa spectrală de putere poate fi considerată cu bună aproximație constantă într-o bandă largă de frecvențe:

$$q_{\xi}(\omega) \approx \begin{cases} K & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_T \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (57)$$

unde ω_T este o frecvență foarte mare (mult mai mare decât frecvențele semnalului util). În teorie, acest tip de semnal este *modelat* cu un semnal ce are densitatea spectrală de putere constantă în toată gama de frecvențe. Acest semnal se numește *zgomot alb* (prin analogie cu lumina albă, care are componente în toată gama de frecvențe vizibile)

Deci, zgomotul alb are

$$q_{\xi}(\omega) = K \quad \forall \omega \quad (58)$$

Drept urmare, are funcția de autocorelație

$$R_{\xi}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{q_{\xi}(\omega)\}(\tau) = K\delta(\tau) \quad (59)$$

Ilustrare $q_{\xi}(\omega)$ și $R_{\xi}(\tau)$ zgomot alb

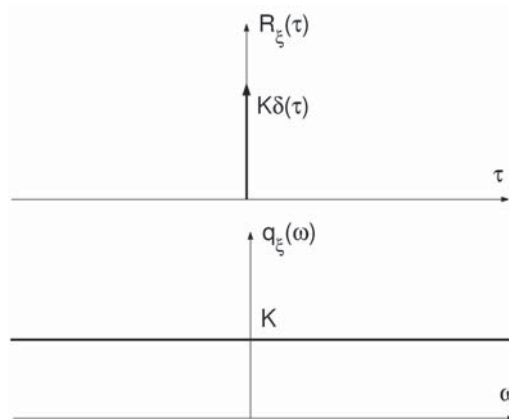


Figura 5: Funcția de autocorelație și densitatea spectrală de putere ale zgomotului alb.

Zgomotul alb este un semnal aleator *pur decorelat*, întrucât $R_{\xi}(t_1) = 0 \ \forall t_1 \neq 0$, și are putere infinită (este o idealizare!)

Trecerea semnalelor aleatoare prin sisteme liniare invariante în timp (filtrarea semnalelor)

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Braşov, România

January 7, 2015

Sisteme liniare invariante în timp I

Un sistem se numeşte *liniar* dacă, aplicând la intrare o combinaţie liniară a două semnale $ax_1(t) + bx_2(t)$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, semnalul de ieşire poate fi scris sub forma $ay_1(t) + by_2(t)$, unde $y_1(t)$ şi $y_2(t)$ sunt răspunsurile sistemului la $x_1(t)$, respectiv $x_2(t)$.

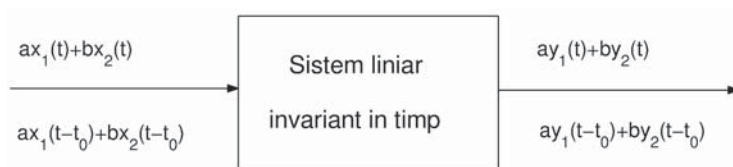


Figura 1: Sistem liniar invariant în timp.

Sistemul se numeşte *invariant în timp* dacă acţiunea sa asupra unui semnal $x(t)$ este aceeaşi indiferent de momentul când este aplicat semnalul respectiv la intrarea sistemului.

Sisteme liniare invariante în timp II

- ▶ se știe din teoria sistemelor că sistemele liniare invariante în timp (*filtrele liniare*) au ca funcții proprii semnalele sinusoidale
- ▶ altfel spus, dacă aplicăm la intrarea unui filtru liniar un semnal sinusoidal de frecvență ω_0 , semnalul de ieșire va fi tot o sinusoidă de frecvență ω_0 (cu amplitudinea și faza modificate față de sinusoida de intrare)
- ▶ un filtru liniar va fi, deci, complet caracterizat de o funcție care să descrie modificarea amplitudinii și a fazei sinusoidelor pentru fiecare frecvență ω_0 , funcție care se numește *funcție de transfer* și se notează cu $H(\omega)$

Un exemplu simplu I

Să considerăm filtrul liniar format dintr-o celulă RC din Figura 2:

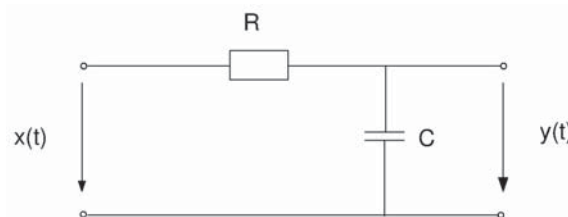


Figura 2: Celulă RC.

Dacă tensiunea de intrare este $x(t) = X \cos(\omega_0 t + \varphi_X)$, atunci putem scrie tensiunea de ieșire sub forma $y(t) = Y \cos(\omega_0 t + \varphi_Y)$

Un exemplu simplu II

Relația dintre amplitudinile și fazele semnalelor de intrare și ieșire poate fi exprimată simplu, considerând reprezentarea semnalelor sub formă complexă: astfel, dacă avem $\underline{X} = X \exp(j\varphi_X)$ și $\underline{Y} = Y \exp(j\varphi_Y)$, atunci putem scrie:

$$\underline{Y} = \frac{\frac{1}{j\omega_0 C}}{R + \frac{1}{j\omega_0 C}} \underline{X} = \frac{1}{1 + j\omega_0 RC} \underline{X} \quad (1)$$

Cantitatea $\frac{1}{1 + j\omega_0 RC}$ este exact valoarea funcției de transfer a filtrului pentru frecvența ω_0 :

$$H(\omega_0) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{1}{1 + j\omega_0 RC} \quad (2)$$

Putem, deci, scrie că:

$$\underline{Y} = H(\omega_0) \underline{X} \quad (3)$$

Observație importantă

Dacă semnalul $x(t)$ aplicat la intrarea filtrului liniar nu este sinusoidal, putem explica forma semnalului de ieșire $y(t)$ tot prin reducere la cazul sinusoidal – analiza Fourier a semnalelor spune că orice semnal de modul integrabil $x(t)$ poate fi descompus ca o sumă (infinită) de semnale pur sinusoidale.

Dacă $X(\omega)$ este transformata Fourier a lui $x(t)$:

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4)$$

atunci îl putem scrie pe $x(t)$ sub forma:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5)$$

Relația (5) reprezintă exact descompunerea dorită a semnalului $x(t)$ într-o sumă de sinusoidale pure.

Filtrarea = produs de convoluție (în domeniul timp) I

Dacă $x(t)$ este un semnal real: $X(-\omega) = X^*(\omega) = |X(\omega)|e^{-j\varphi(\omega)}$
atunci relația (5) devine:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega \quad (6)$$

Modulul $|X(\omega)|$ și faza $\varphi(\omega)$ ale cantității complexe $X(\omega)$ sunt amplitudinea, respectiv faza cosinusoidei de frecvență ω ce intră în componența semnalului $x(t)$. Cu alte cuvinte, cantitatea $X(\omega)$ este tocmai reprezentarea sub formă complexă a sinusoidelor respective.

Apoi, pentru *fiecare* componentă sinusoidală de frecvență ω din semnal, putem calcula faza și amplitudinea la ieșire în funcție de cele la intrare (vezi relația (3)) precum:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad \forall \omega \quad (7)$$

Filtrarea = produs de convoluție (în domeniul timp) II

apoi *recompunem* semnalul de ieșire sumând toate sinusoidelor $Y(\omega)$:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (8)$$

Ținând cont de proprietatea transformatei Fourier privind produsul de convoluție, relația (7) poate fi scrisă direct în domeniul temporal, considerând transformata Fourier inversă a funcției de transfer, notată $h(t)$ și numită *funcție pondere*:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (9)$$

Astfel, relația (7) poate fi scrisă ca:

Filtrarea = produs de convoluție (în domeniul timp) III

$$y(t) = h(t) \star x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau \quad (10)$$

În cele ce urmează vom arăta cum influențează trecerea prin filtre liniare mărimile statistice ce caracterizează semnalele aleatoare.

Relații între mărimile statistice la trecerea prin SLIT I

Considerând că la intrarea unui filtru liniar aplicăm un semnal aleator staționar $\xi(t)$, la ieșire vom obține un semnal aleator $\eta(t)$. Se poate arăta că semnalul de la ieșire este tot staționar. Rescriind relația (10), obținem pentru orice realizare particulară a acestora:

$$\eta(t) = h(t) \star \xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \xi(t-\tau) d\tau \quad (11)$$

Înmulțind relația (11) cu $\xi(t-\theta)$ și aplicând operația de mediere statistică, obținem:

$$\overline{\eta(t)\xi(t-\theta)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \xi(t-\tau) \xi(t-\theta) d\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \overline{\xi(t-\tau)\xi(t-\theta)} d\tau \quad (12)$$

Relații între mărimile statistice la trecerea prin SLIT II

Prin identificare de termeni și ținând cont de faptul că funcția de autocorelație a unui semnal este pară, rezultă:

$$R_{\xi\eta}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) R_{\xi}(\theta - \tau) d\tau = h(\theta) \star R_{\xi}(\theta) \quad (13)$$

ceea ce, în domeniul frecvență, devine:

$$q_{\xi\eta}(\omega) = H(\omega) q_{\xi}(\omega) \quad (14)$$

Pe de altă parte, dacă înmulțim relația (11) cu $\eta(t - \theta)$, obținem:

$$\overline{\eta(t)\eta(t - \theta)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \xi(t - \tau) \eta(t - \theta) d\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \overline{\xi(t - \tau) \eta(t - \theta)} d\tau \quad (15)$$

ceea ce, prin identificare de termeni, devine:

Relații între mărimile statistice la trecerea prin SLIT III

$$R_{\eta}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) R_{\xi\eta}(\tau - \theta) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) R_{\eta\xi}(\theta - \tau) d\tau = h(\theta) \star R_{\eta\xi}(\theta) \quad (16)$$

Rescriind relația (16) în frecvență, obținem:

$$q_{\eta}(\omega) = H(\omega) q_{\eta\xi}(\omega) \quad (17)$$

Folosind în continuare expresia densității spectrale de putere de interacțiune și înlocuind pe $q_{\xi\eta}$ cu valoarea lui dată de relația (14), avem:

$$q_{\eta}(\omega) = H(\omega) q_{\xi\eta}^*(\omega) = H(\omega) H^*(\omega) q_{\xi}^*(\omega) = |H(\omega)|^2 q_{\xi}^*(\omega) \quad (18)$$

de unde, ținând cont de faptul că densitatea spectrală de putere a unui semnal e o funcție reală, rezultă:

Relații între mărimile statistice la trecerea prin SLIT IV

$$q_{\eta}(\omega) = |H(\omega)|^2 q_{\xi}(\omega) \quad (19)$$

Relația (19) stabilește legătura dintre mărimile statistice ale semnalelor aleatoare aflate la intrarea și ieșirea filtrului liniar. Evident, funcția de autocorelație a semnalului de la ieșire poate fi scrisă:

$$R_{\eta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} q_{\eta}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 q_{\xi}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (20)$$

Trecerea semnalelor aleatoare prin filtrul trece-jos ideal I

Filtrul trece-jos (FTJ) ideal lasă să treacă nealterate toate armonicile semnalului cu frecvențe mai mici decât un anumit prag, în timp ce armonicile cu frecvențe superioare pragului respectiv sunt complet rejectate. Un asemenea comportament este modelat cu ajutorul unei funcții de transfer $H(\omega) = |H(\omega)| \exp(j\phi(\omega))$ ale cărei modul și fază sunt date de (vezi Figura 3):

$$|H(\omega)| = \begin{cases} A & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (21)$$

respectiv,

$$\phi(\omega) = \begin{cases} -\omega t_0 & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (22)$$

Trecerea semnalelor aleatoare prin filtrul trece-jos ideal II

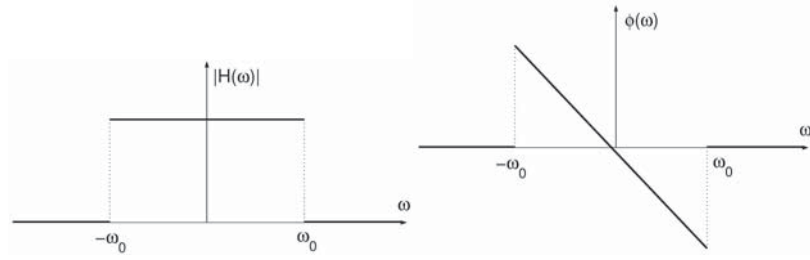


Figura 3: Modulul și faza unui filtru trece-jos ideal.

Frecvența ω_0 se numește frecvență de tăiere a filtrului și reprezintă frecvența maximă din semnalul de intrare care este lăsată să treacă de filtru, iar t_0 se numește timp de întârziere de grup și reprezintă întârzierea indusă de filtru în semnal

Funcția pondere a filtrului $h(t)$ se obține aplicând transformata Fourier inversă funcției de transfer:

Trecerea semnalelor aleatoare prin filtrul trece-jos ideal III

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} A e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{A}{2\pi} \frac{1}{j(t-t_0)} e^{(j\omega(t-t_0))} \Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} = \frac{A}{2\pi} \frac{1}{j(t-t_0)} 2j \sin(\omega_0(t-t_0)) \\
 &= \frac{A\omega_0}{\pi} \text{sinc}(\omega_0(t-t_0))
 \end{aligned} \tag{23}$$

unde am folosit relația $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$, iar $\text{sinc}(x)$ este funcția sinus cardinal, definită ca:

$$\text{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin(x)}{x} \tag{24}$$

Se observă că $h(t) \neq 0$ pentru $t < 0$, de unde rezultă că filtrul nu este cauzal și, deci, nu poate fi implementat în timp real.

Trecerea semnalelor aleatoare prin filtrul trece-jos ideal IV

Un filtru se numește causal dacă semnalul de ieșire apare ca rezultat al aplicării semnalului de intrare la intrarea filtrului.

Aceasta este echivalentă cu condiția ca $h(t) = 0 \forall t < 0$.

Într-adevăr, ținând cont de prima egalitate din relația (10), observăm că dacă $\exists \tau_1 < 0$ pentru care $h(\tau_1) \neq 0$, atunci în expresia lui $y(t)$ va apărea $x(t - \tau_1)$ care este valoarea lui x la un moment de timp ulterior lui t .

Dacă la intrarea filtrului se aplică un semnal aleator staționar $\xi(t)$ având densitatea spectrală de putere $q_\xi(\omega)$, atunci densitatea spectrală de putere a semnalului la ieșire $\eta(t)$ se scrie, ținând cont de (19), ca:

$$q_\eta(\omega) = \begin{cases} A^2 q_\xi(\omega) & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (25)$$

în timp ce funcția lui de autocorelație devine:

Trecerea semnalelor aleatoare prin filtrul trece-jos ideal V

$$R_\eta(\tau) = \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} q_\xi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (26)$$

În cazul particular în care semnalul de intrare este zgomot alb, atunci funcția de autocorelație a semnalului la ieșire devine:

$$R_\eta(\tau) = \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} K e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{A^2 K \omega_0}{\pi} \text{sinc}(\omega_0 \tau) \quad (27)$$

În obținerea rezultatului de mai sus am reluat calculul de la (23). Forma funcției de autocorelație a semnalului de la ieșirea filtrului trece-jos ideal este prezentată în Figura 4.

Trecerea semnalelor aleatoare prin filtrul trece-jos ideal VI

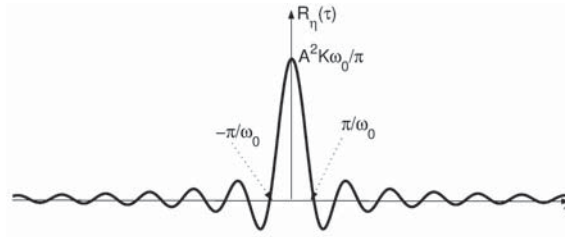


Figura 4: Funcția de autocorelație a semnalului de la ieșirea filtrului trece-jos ideal având la intrare un zgomot alb.

Observație: deși semnalul la intrare este complet decorelat, prin filtrarea acestuia cu un FTJ, se induce o corelație în semnal. Mai mult, considerând într-o primă aproximație, că numai lobul principal al funcției *sinc*, situat în intervalul $[-\frac{\pi}{\omega_0}, \frac{\pi}{\omega_0}]$, are valori importante, și neglijând restul funcției, putem afirma că această corelație este cu atât mai importantă cu cât banda de trecere a filtrului (în cazul de față ω_0) este mai îngustă.

Trecerea semnalelor aleatoare prin filtrul trece-jos ideal VII

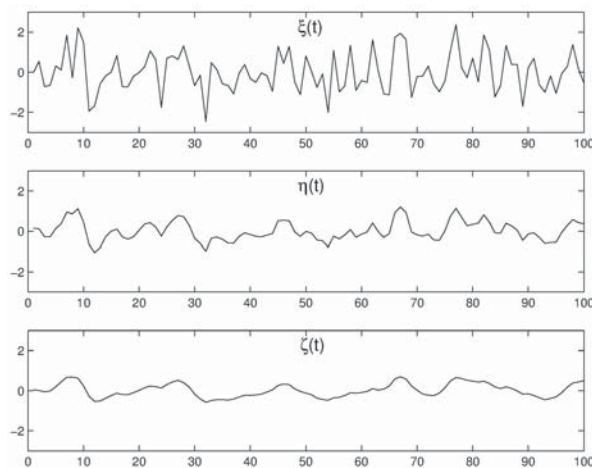


Figura 5: Realizare particulară a unui semnal zgomot alb $\xi(t)$ și versiunile sale filtrate cu filtre trece-jos cu frecvența de tăiere ω_0 medie, notat $\eta(t)$, respectiv joasă, notat $\zeta(t)$.

Trecerea semnalelor aleatoare prin filtrul trece-jos ideal VIII

- ▶ inducerea corelației în semnal este ilustrată în Figurile 5, 6 și 7
- ▶ în Figura 5 sunt prezentate versiunile originală $\xi(t)$ și filtrate cu filtre trece-jos cu frecvență de tăiere medie $\eta(t)$, respectiv joasă $\zeta(t)$ a unui semnal zgomot alb
- ▶ se poate observa că pe măsură ce frecvența de tăiere scade, cu alte cuvinte, selectivitatea filtrului crește, semnalul este mai neted, ceea ce înseamnă că este mai corelat
- ▶ acest fapt reiese și mai evident din Figura 6, care prezintă norul de puncte bidimensional $(s(t); s(t + \tau))$ pentru $\tau = 1$ pentru fiecare dintre cele trei semnale
- ▶ s-a presupus că semnalele sunt ergodice în sensul autocorelației
- ▶ se observă faptul că semnalul original este perfect decorelat (norul de puncte este haotic) în timp ce între esantioanele semnalelor filtrate există o corelație, fapt indicat de forma liniară a norului de puncte

Trecerea semnalelor aleatoare prin filtrul trece-jos ideal IX

- ▶ mai mult, corelația din semnalul filtrat cu filtrul mai selectiv $\zeta(t)$ (Figura 6.(c)) este mai mare decât cea indusă de filtrul mai puțin selectiv $\eta(t)$ (Figura 6.(b))

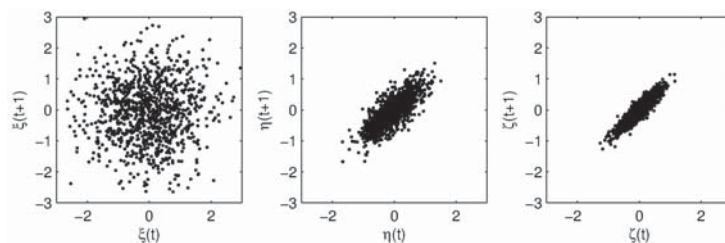


Figura 6: Norul de puncte $(s(t), s(t + 1))$ pentru semnalele din Figura 5.

În Figura 7 este prezentat norul de puncte bidimensional $(s(t), s(t + \tau))$ pentru cele două semnale filtrate ($\eta(t)$ și $\zeta(t)$) pentru diverse valori ale lui τ .

Trecerea semnalelor aleatoare prin filtrul trece-jos ideal X

Corelația indusă în $\zeta(t)$ este mai puternică: valori relativ distanțate în timp ale lui $\zeta(t)$ încă mai sunt corelate, în timp ce corelația se *stinge* mai repede în $\eta(t)$.

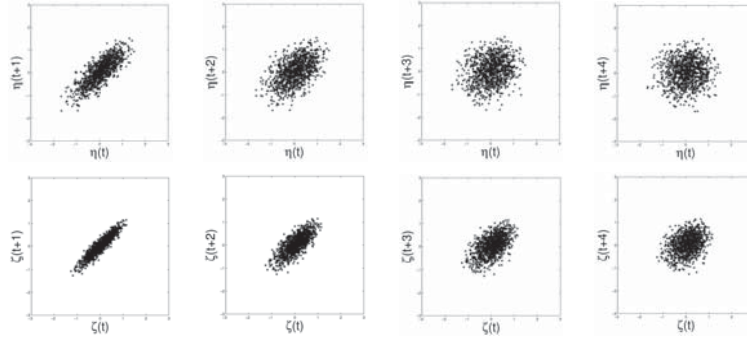


Figura 7: Norul de puncte $(s(t), s(t + \tau))$ pentru semnalul filtrat cu FTJ mai puțin selectiv (rândul de sus), respectiv pentru filtrul mai selectiv (rândul de jos) pentru $\tau = 1, 2, 3, 4$.

Trecerea semnal. aleatoare prin filtrul trece-bandă ideal I

Filtrul trece-bandă (FTB) ideal este filtrul care lasă să treacă nealterate armonicile semnalului de intrare situate într-un interval de frecvențe dat și elimină complet celelalte armonici. Modulul și faza funcției de transfer $H(\omega)$ sunt:

$$|H(\omega)| = \begin{cases} A & \text{dacă } |\omega| \in [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (28)$$

$$|\phi(\omega)| = \begin{cases} -(\omega - \omega_0)t_0 & \text{dacă } \omega \in [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}] \\ -(\omega + \omega_0)t_0 & \text{dacă } \omega \in [-\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, -\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (29)$$

unde ω_0 reprezintă frecvența centrală a benzii, $\Delta\omega$ lărgimea de bandă, iar t_0 timpul de întârziere de grup. Modulul și faza filtrului trece bandă ideal sunt prezentate în Figura 8

Trecerea semnal. aleatoare prin filtrul trece-bandă ideal II

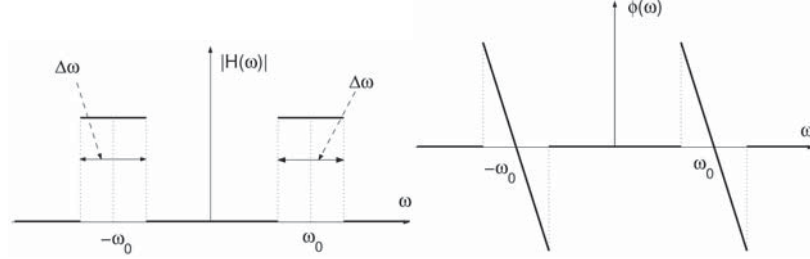


Figura 8: Modulul și faza unui filtru trece-bandă ideal.

Funcția pondere a FTB ideal este dată de:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \{H(\omega)\} (t) = \frac{A\Delta\omega}{\pi} \text{sinc} \left(\frac{\Delta\omega}{2}(t - t_0) \right) \cos(\omega_0 t) \quad (30)$$

Trecerea semnal. aleatoare prin filtrul trece-bandă ideal III

relație ce poate fi obținută pornind de la rezultatul din ecuația (23) și aplicând teorema convoluției în frecvență a transformatei Fourier. Dacă la intrarea FTB ideal se aplică semnalul aleator staționar $\xi(t)$, atunci la ieșire vom avea semnalul $\eta(t)$ având densitatea spectrală de putere și funcția de autocorelație date de:

$$q_\eta(\omega) = \begin{cases} A^2 q_\xi(\omega) & \text{dacă } |\omega| \in [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (31)$$

$$R_\eta(\tau) = A^2 \left(\int_{-\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{-\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} q_\xi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega + \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} q_\xi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \right) \quad (32)$$

Trecerea semnal. aleatoare prin filtrul trece-bandă ideal IV

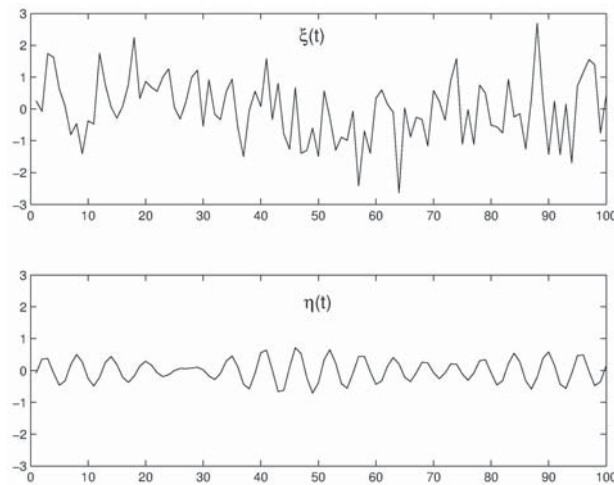


Figura 9: Realizare particulară a unui semnal zgomot alb $\xi(t)$ și versiunea sa filtrată cu un FTB $\eta(t)$.

Trecerea semnal. aleatoare prin filtrul trece-bandă ideal V

Dacă semnalul de intrare este zgomot alb, atunci funcția de autocorelație a semnalului de ieșire devine:

$$R_{\eta}(\tau) = \frac{A^2 K \Delta \omega}{\pi} \text{sinc} \left(\frac{\Delta \omega}{2} \tau \right) \cos(\omega_0 t) \quad (33)$$

Graficul funcției de autocorelație, realizat în ipoteza $\Delta \omega \ll \omega_0$:

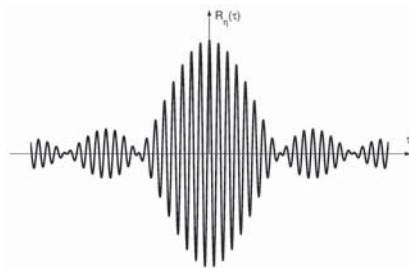


Figura 10: Funcția de autocorelație a semnalului de la ieșirea filtrului trece-bandă ideal având la intrare un zgomot alb.

Trecerea semnal. aleatoare prin filtrul trece-bandă ideal VI

În Figura 9 sunt prezentate versiunile originală și filtrată cu un FTB selectiv (cu bandă de trecere îngustă) a unei realizări particulare a unui semnal zgomot alb. Se poate observa tendința filtrului de a păstra niște sinusoide de frecvențe relativ apropiate, semnalul filtrat semănând destul de bine cu o sinusoidă, spre deosebire de cel original.

În Figura 11 este figurat norul de puncte bidimensional $[\eta(t); \eta(t + \tau)]$ pentru diverse valori ale lui τ , observându-se faptul că în semnal s-a indus o corelație pe termen destul de lung, datorată selectivității filtrului utilizat. Deci, și în cazul FTB putem trage aceleași concluzii ca cele discutate în cazul FTJ, relative la corelația suplimentară indusă într-un semnal aleator prin operația de filtrare liniară.

Trecerea semnal. aleatoare prin filtrul trece-bandă ideal VII

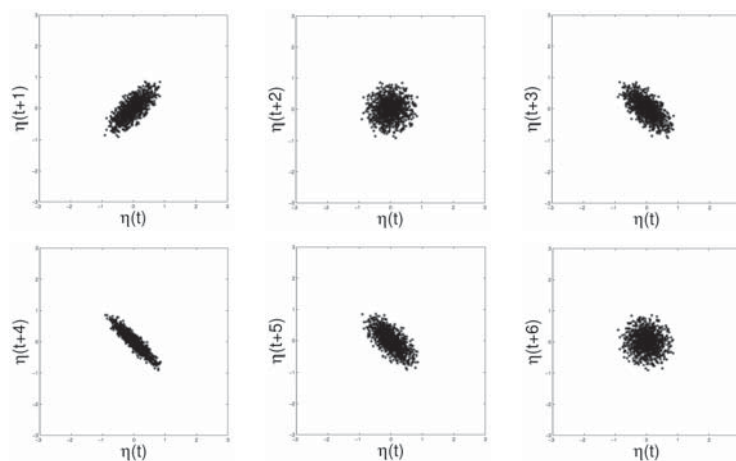


Figura 11: Norul de puncte $(s(t), s(t + \tau))$ pentru semnalul filtrat cu FTB $\eta(t)$ din Figura 9 pentru $\tau = 1, \dots, 6$.

Filtrul adaptat la semnal

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Braşov, România

January 7, 2015

Introducere

- ▶ Filtrul adaptat la semnal este un tip aparte de filtru, proiectarea acestuia făcându-se prin specificarea funcţiei pondere în domeniul timp, nu prin specificarea funcţiei de tranfer în domeniul frecvenţă ca la filtrele prezentate anterior.
- ▶ Acest filtru se foloseşte de regulă pentru detecţie, de exemplu într-un lanţ de transmisiune, mai exact, atunci când se cunoaşte forma semnalului original transmis, care la recepţie este afectat de zgomot.

Definiție I

- ▶ fie $s(t)$ un semnal determinist de durată finită
- ▶ se definește filtrul adaptat la semnal ca fiind filtrul liniar invariant în timp care are următoarea funcție de transfer:

$$h(t) = K \cdot s(-(t - t_0)) \quad (1)$$

- ▶ K și t_0 sunt constante reale oarecare, cu constrângerea că t_0 trebuie astfel ales încât filtrul să fie *causal*
- ▶ un filtru (sau un semnal) se spune că este cauzal, dacă $h(t) = 0$ pentru $t < 0$.
- ▶ un exemplu de filtru adaptat la semnal este prezentat în Figura 1.

Definiție II

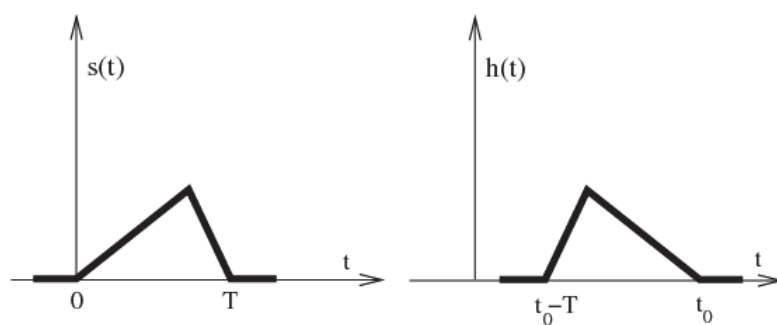


Figura 1: Exemplu de filtru adaptat la semnal - semnalul original și funcția pondere a filtrului.

Definiție III

Funcția de transfer a filtrului adaptat la semnal este:

$$H(\omega) = K \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = K \int_{-\infty}^{\infty} s(-(t - t_0)) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (2)$$

Făcând schimbarea de variabilă $\tau = -(t - t_0)$ obținem:

$$H(\omega) = -K \int_{\infty}^{-\infty} s(\tau) \cdot e^{-j\omega(t_0 - \tau)} d\tau = K \cdot e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot e^{j\omega \tau} d\tau \quad (3)$$

$$H(\omega) = K S^*(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (4)$$

unde $S(\omega)$ este transformata Fourier a semnalului $s(t)$, iar $S^*(\omega)$ complex conjugata acesteia.

Maximizarea raportului semnal-zgomot prin filtrare liniară

Contextul este următorul:

- dispunem de un semnal rezultat prin perturbarea (aditivă) cu zgomot $n(t)$ a unui semnal util $s(t)$
- aplicând acest semnal, $x(t) = s(t) + n(t)$, la intrarea unui filtru liniar invariant în timp având funcția pondere $h(t)$, obținem la ieșire un semnal pe care, datorită liniarității filtrului, îl putem interpreta ca fiind componentă utilă plus componentă remanentă a zgomotului
- așadar, putem scrie semnalul de la ieșirea filtrului sub forma $y(t) = s_o(t) + n_o(t)$, unde $s_o(t)$ este semnalul ce l-am obține la ieșire dacă la intrare am avea $s(t)$, iar $n_o(t)$ este semnalul rezultat prin trecerea prin filtru a lui $n(t)$

Formularea problemei

- ▶ problema pe care ne-o punem în continuare este aflarea celui filtru liniar care face ca raportul semnal-zgomot după filtrare să fie maxim
- ▶ în acest sens, definim raportul semnal-zgomot la un moment de timp fixat t_f ca fiind raportul dintre puterea instantanee a semnalului util la momentul respectiv de timp și puterea medie a zgomotului
- ▶ pentru semnalele de la ieșirea filtrului, aceasta se scrie:

$$RSZ_{t_f} = \frac{|s_o(t_f)|^2}{P_{n_o}} \quad (5)$$

Rezolvarea problemei I

Ținând cont de faptul că

$$\begin{aligned} s_o(t_f) &= \mathcal{F}^{-1}\{S_o(\omega)\}(t_f) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)S(\omega)\}(t_f) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t_f} d\omega \end{aligned} \quad (6)$$

respectiv,

$$P_{n_o} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} q_{n_o}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 q_n(\omega) d\omega \quad (7)$$

relația (5) devine:

$$RSZ_{t_f} = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t_f} d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 q_n(\omega) d\omega} \quad (8)$$

Rezolvarea problemei II

Vom folosi inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz, conform căreia, pentru orice două funcții având valori complexe $A(x)$ și $B(x)$ are loc relația:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} A(x)B(x)dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |A(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} |B(x)|^2 dx \quad (9)$$

cu egalitate dacă și numai dacă

$$A(x) = kB^*(x), \quad \forall x \quad (10)$$

unde k este o constantă.

Astfel, alegem în mod convenabil:

$$A(\omega) = H(\omega)\sqrt{q_n(\omega)} \quad (11)$$

Rezolvarea problemei III

respectiv,

$$B(\omega) = \frac{S(\omega)e^{j\omega t_f}}{\sqrt{q_n(\omega)}} \quad (12)$$

În relațiile (11) și (12) s-a ținut cont de faptul că densitatea spectrală de putere $q_n(\omega)$ este o funcție pozitivă. Se observă, de asemenea, că prin alegerea făcută produsul $A(\omega)B(\omega)$ reprezintă exact integrandul aflat la numărătorul expresiei (8).

Astfel, folosind (9), obținem:

$$RSZ_{t_f} \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)\sqrt{q_n(\omega)}|^2 d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{S(\omega)e^{j\omega t_f}}{\sqrt{q_n(\omega)}} \right|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 q_n(\omega) d\omega} \quad (13)$$

Rezolvarea problemei IV

de unde, prin reducerea primei integrale de la numărător cu cea de la numitor (care sunt identice), se obține:

$$\text{RSZ}_{t_f} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{S(\omega)e^{j\omega t_f}}{\sqrt{q_n(\omega)}} \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{q_n(\omega)} d\omega \quad (14)$$

Se observă că integrala care limitează superior raportul semnal-zgomot nu depinde de filtrul folosit, ci numai de semnalul util și de puterea zgomotului la intrare, care sunt date.

Rezultă, deci, că această integrală reprezintă raportul semnal-zgomot maxim ce se poate obține prin filtrare liniară:

$$\text{RSZ}_{t_f, \max} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{q_n(\omega)} d\omega \quad (15)$$

Rezolvarea problemei V

Mai mult, raportul semnal-zgomot obținut își poate atinge valoarea maximă dată de (15) dacă în ecuația (14) se obține egalitate, cu alte cuvinte, când este întrunită condiția ca inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz să se transforme în egalitate, mai precis, când relația (10) este îndeplinită.

Ținând cont de (11) și (12), aceasta devine:

$$H(\omega)\sqrt{q_n(\omega)} = k \left(\frac{S(\omega)e^{j\omega t_f}}{\sqrt{q_n(\omega)}} \right)^* \quad (16)$$

ceea ce, ținând cont că $q_n(\omega)$ e reală, se scrie:

$$H(\omega) = k \frac{S^*(\omega)e^{-j\omega t_f}}{q_n(\omega)} \quad (17)$$

Presupunând mai departe că zgomotul care perturbă semnalul este zgomot alb, și deci, q_n este constantă, rezultă că funcția de

Rezolvarea problemei VI

transfer a filtrului care maximizează raportul semnal-zgomot la ieșire devine:

$$H(\omega) = k_1 S^*(\omega) e^{-j\omega t_f} \quad (18)$$

Readucându-ne aminte de relația (4), putem concluziona că *filtrul care maximizează raportul semnal-zgomot pentru un semnal util dat este chiar filtrul adaptat la semnalul util.*

Acest rezultat are câteva aplicații practice importante, dintre care menționăm aici pe scurt numai detecția semnalelor, unde problema care se pune este de a decide asupra transmiterii unui semnal dintr-o mulțime finită de semnale cunoscute în prezența zgomotului.

Exemplu

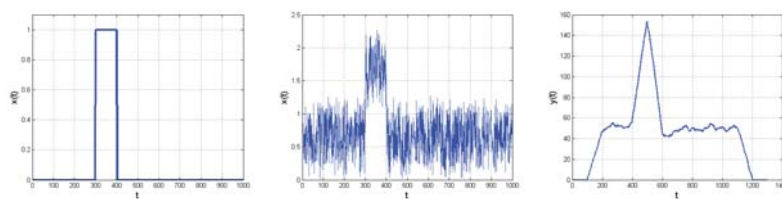


Figura 2: Semnal impuls dreptunghiular, semnalul afectat de zgomot și semnalul $y(t)$ de la ieșirea filtrului adaptat la semnal.

Valoarea maximă din semnalul $y(t)$ indică poziția în care filtrul adaptat la semnal a detectat un impuls dreptunghiular similar cu funcția pondere, adică locul în care potrivirea dintre semnalul $x(t)$ de la intrarea filtrului și “semnalul” $h(t)$ a fost cea mai bună.

Detecția semnalelor

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Brașov, România

January 7, 2015

Introducere

Modelul unui lanț de transmisiune cu detecție pe care îl vom lua în considerare în acest capitol este prezentat în Figura 1:

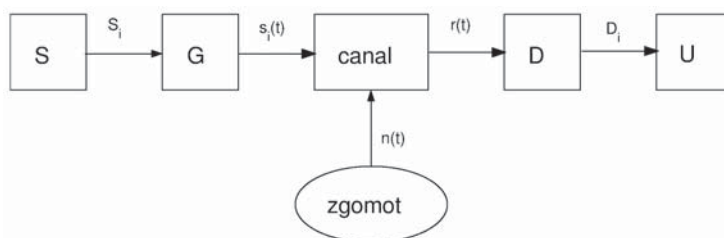


Figura 1: Schema generală a unui lanț de transmisiune cu detecție.

Termeni

- ▶ Sursa **S** este o sursă discretă de informație, care emite simboluri S_i dintr-o mulțime cu M simboluri $\{S_0, S_1, \dots, S_{M-1}\}$ cu probabilități $P(S_i) \stackrel{\text{not}}{=} P_i$ cunoscute
- ▶ Pt. fiecare simbol S_i , generatorul de semnal **G** generează un semnal $s_i(t)$ pe durata $t \in [0, T]$, care este transmis pe canal
- ▶ în timpul transmisiunii, semnalul util este afectat de zgomot $n(t)$, care este un semnal aleator perturbator de natură aditivă, astfel încât semnalul recepționat la ieșirea din canal se poate scrie $r(t) = s_i(t) + n(t)$ pentru $t \in [0, T]$
- ▶ Problema detecției, respectiv a implementării blocului de decizie **D**, este ca pe baza semnalului recepționat $r(t)$ pe o durată $[0, T]$ să se decidă asupra simbolului emis de sursă.
- ▶ Ieșirea blocului de decizie către utilizatorul final **U** este o decizie D_i , care semnifică faptul că se *decide* că s-a transmis simbolul S_i (ceea ce poate corespunde sau nu realității).

Exemplu sursă binară

În Figura 2 este prezentat un exemplu pentru un caz particular: sursă binară ($M = 2$), semnale constante $s_0(t) = 0$, $s_1(t) = A$ pentru $t \in [0, T]$ alocate celor două simboluri.

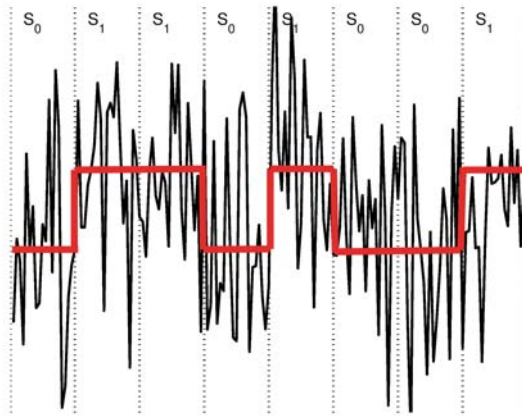


Figura 2: Cu roșu semnalul corespunzător mesajului $S_0S_1S_1S_0S_1S_0S_0S_1$ la intrarea pe canal, iar cu negru semnalul la ieșirea din canal.

Contextul problemei

- ▶ Semnalele $s_i(t)$ emise de generatorul \mathbf{G} pot fi deterministe, cunoscute atât la emisie, cât și la recepție (caz în care spunem că ne aflăm într-o ipoteză *simplă*) sau pot fi la rândul lor aleatoare, caz în care spunem că ne aflăm într-o ipoteză *compusă* (caz în care ceea ce diferă între semnalele $s_i(t)$ pentru $i = 0, \dots, M - 1$ sunt parametrii statistici ai acestora)
- ▶ La recepție, decizia poate fi luată pe baza semnalului $r(t)$ observat în mod continuu, pentru $t \in [0, T]$, sau acesta poate fi discretizat (spunem că spațiul observațiilor este discret)
- ▶ În cazul discret, se alege un număr de N momente de timp în intervalul $[0, T]$: $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq T$ și se rețin numai valorile semnalului recepționat la acele momente:
 $r_i \stackrel{\text{not}}{=} r(t_i)$ pentru $i = 1, \dots, N$.
- ▶ Decizia se va lua pe baza vectorului aleator N -dimensional având drept componente cele N valori ale semnalului recepționat: $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$.

Regula Bayes de decizie în ipoteza binară simplă I

Ipoteza binară simplă: alfabetul sursei este binar: $\{S_0, S_1\}$, iar semnalele $s_i(t)$ cu $i = 0, 1$ sunt deterministe.

Pentru fiecare simbol emis de sursă decizia se va lua pe baza vectorului recepționat $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$.

Din cauza zgomotului, care este un proces aleator, observația \mathbf{r} va diferi de la simbol la simbol, chiar în ipoteza transmiterii aceluiași simbol S_i de către sursă, ceea ce ne conduce la a-l considera pe \mathbf{r} ca fiind o realizare particulară a unui vector aleator N -dimensional, pe care-l vom nota $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_N)$:

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{R}^{(k)} \quad (1)$$

Deducerea unui criteriu de decizie în aceste condiții constă în calculul unei hipersuprafețe de decizie în \mathbb{R}^N , care să-l împartă pe acesta în două zone de decizie Δ_0 și Δ_1 .

Regula Bayes de decizie în ipoteza binară simplă II

unde $\Delta_0 \cap \Delta_1 = \emptyset$, respectiv $\Delta_0 \cup \Delta_1 = \mathbb{R}^N$ (practic o problemă de clasificare sau partiționare a spațiului \mathbb{R}^N).

Dacă vectorul recepționat $\mathbf{r} \in \Delta_0$ se decide D_0 , iar dacă $\mathbf{r} \in \Delta_1$ se decide D_1 .

Canalul de transmisiune astfel obținut este un canal binar.

Paranteză: s-ar putea lua în considerare împărțirea lui \mathbb{R}^N în trei zone de decizie: Δ_0 , Δ_1 , respectiv Δ_{anulare} : în acest caz, dacă $\mathbf{r} \in \Delta_{\text{anulare}}$, nu se ia nici o decizie asupra simbolului transmis de sursă, considerându-se că o decizie ar fi prea riscantă. Canalul de transmisiune astfel obținut devine un canal cu alfabet binar la intrare și alfabet ternar la ieșire, care, se numește, după caz, fie *canal binar cu anulări*, fie *canal binar cu erori și anulări*.

Ilustrarea geometrică a problemei I

- ▶ Avem următoarele date: $s_0(t) = 0$, $s_1(t) = A$, pentru $t \in [0, T]$, iar la recepție luăm decizia pe baza a $N = 2$ eșantioane, deci $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$
- ▶ În absența zgomotului, avem $r(t) = s_0(t) = 0$, dacă sursa emite S_0 și, deci $\mathbf{R}|S_0 = [0, 0]$
- ▶ respectiv $r(t) = s_1(t) = A$ pentru simbolul S_1 ceea ce conduce la $\mathbf{R}|S_1 = [A, A]$
- ▶ Situația este ilustrată în Figura 3(a)
- ▶ În prezența zgomotului, avem $\mathbf{R}|S_0 = [n_1, n_2]$, respectiv $\mathbf{R}|S_1 = [A + n_1, A + n_2]$ unde n_1 și n_2 reprezintă valorile zgomotului la cele două momente alese pentru eșantionarea semnalului $r(t)$
- ▶ Norii de puncte corepunzători eșantioanelor recepționate ($\mathbf{R}^{(i)}|S_0$, respectiv $\mathbf{R}^{(i)}|S_1$) obținuți la transmisiunea unui număr mare de simboluri în acest caz particular sunt ilustrați în Figura 3(b)

Ilustrarea geometrică a problemei II

- ▶ S-a considerat în acest exemplu că cele două eșantioane de zgomot n_1 și n_2 sunt independente, de unde rezultă structura haotică a celor două aglomerări de puncte
- ▶ Dreapta punctată din Figura 3.(b) pare cea mai naturală alegere (dintr-un punct de vedere strict calitativ) pentru împărțirea lui \mathbb{R}^2 în cele două zone de decizie Δ_0 (semiplanul de sub dreaptă) și Δ_1 (semiplanul de deasupra dreptei)
- ▶ Delimitarea într-un spațiu \mathbb{R}^2 este o dreaptă sau o curbă, în \mathbb{R}^3 o suprafață, iar în \mathbb{R}^N o hipersuprafață
- ▶ Se observă, de asemenea, că există puncte clasificate greșit (puncte "◇" în Δ_1 , respectiv puncte "○" în Δ_0 , acestea corespunzând unor decizii greșite).

Ilustrarea geometrică a problemei III

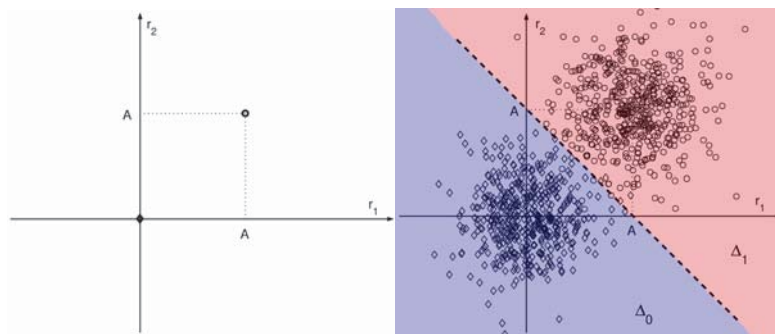


Figura 3: Exemplificare 2D a procesului de decizie: cu ◇ sunt figurate punctele $\mathbf{R}^{(i)}|S_0$, iar cu ○ punctele $\mathbf{R}^{(i)}|S_1$ în absența (a) / prezența (b) zgomotului.

Rezolvare (ca o problemă de optimizare) I

Împărțirea lui \mathbb{R}^N în cele două zone de decizie trebuie făcută în sensul minimizării unui criteriu de eroare.

Astfel, presupunem că deciziile sunt legate de niște costuri presupuse cunoscute (impuse de aplicație) C_{ij} cu $i, j = 0, 1$, care sunt numere pozitive ($C_{ij} \geq 0$) care reprezintă costul deciziei D_j când sursa emite S_i :

$$C_{ij} = \text{Cost}(S_i \cap D_j) \quad i, j = 0, 1 \quad (2)$$

Cu cât este de dorit ca un eveniment $S_i \cap D_j$ să se întâmple mai rar, cu atât costul aferent C_{ij} este mai mare. Pentru majoritatea transmisiunilor digitale, evenimentele $S_0 \cap D_1$ (respectiv, transmiterea eronată a unui "0") și $S_1 \cap D_0$ (respectiv, transmiterea eronată a unui "1") sunt la fel de nedorite, caz în care trebuie ales $C_{01} = C_{10}$. De asemenea, alegerea naturală pentru costurile evenimentelor "transmisie corectă" este $C_{00} = C_{11} = 0$. Există însă cazuri în care importanța deciziilor

Rezolvare (ca o problemă de optimizare) II

eronate diferă: $C_{01} \neq C_{10}$ (un exemplu tipic este detecția țintelor aeriene cu un sistem radar).

Regula de decizie Bayes se ia în sensul minimizării costului mediu al deciziei. Odată definite costurile aferente fiecărui eveniment $S_i \cap D_j$ ce poate surveni la transmisia unui simbol pe canal, se definește valoarea medie a costului de decizie \bar{C} :

$$\begin{aligned} \bar{C} &= C_{00}P(D_0 \cap S_0) + C_{01}P(D_1 \cap S_0) + C_{10}P(D_0 \cap S_1) + C_{11}P(D_1 \cap S_1) \\ &= C_{00}P(D_0|S_0)P_0 + C_{01}P(D_1|S_0)P_0 + \dots \\ &\quad \dots C_{10}P(D_0|S_1)P_1 + C_{11}P(D_1|S_1)P_1 \end{aligned} \quad (3)$$

În dezvoltarea (3) s-a folosit formula probabilității condiționate. Pentru simplificarea formalismului matematic, vom folosi următoarele convenții de notație simplificate:

Rezolvare (ca o problemă de optimizare) III

$$\begin{aligned}w(\xi) &\stackrel{\text{not}}{=} w_\xi(x) \\w(\xi) &\neq w(\eta) \\w_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) &\stackrel{\text{not}}{=} w_{R_1 R_2 \dots R_N}(r_1, \dots, r_N) \\d\mathbf{r} &\stackrel{\text{not}}{=} dr_1 dr_2 \dots dr_N \\ \int &\stackrel{\text{not}}{=} \int \dots \int\end{aligned}\tag{4}$$

În aceste condiții, putem scrie:

$$P(D_0|S_0) = P((\mathbf{R}|S_0) \in \Delta_0) = \int_{\Delta_0} w_{\mathbf{R}|S_0}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \tag{5}$$

unde $w_{\mathbf{R}|S_0}$ reprezintă densitatea de probabilitate de ordinul N a variabilelor aleatoare R_1, \dots, R_N în ipoteza emiterii simbolului S_0

Rezolvare (ca o problemă de optimizare) IV

(cu alte cuvinte, revenind la exemplul din Figura 3, densitatea de probabilitate a punctelor figurate cu \diamond).

Relația (5) nu reprezintă altceva decât extinderea la cazul a N variabile aleatoare a proprietății densității de probabilitate de ordinul doi

În mod similar, și celelalte probabilități $P(D_j|S_i)$ pot fi scrise:

$$P(D_j|S_i) = P((\mathbf{R}|S_i) \in \Delta_j) = \int_{\Delta_j} w_{\mathbf{R}|S_i}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad i, j = 0, 1 \tag{6}$$

ceea ce conduce la următoarea relație pentru costul mediu:

$$\overline{C} = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 C_{ij} P_i \int_{\Delta_j} w_{\mathbf{R}|S_i}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \tag{7}$$

În continuare, ținând cont că:

Rezolvare (ca o problemă de optimizare) V

$$\int_{\Delta_0} w_{R|S_0}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_{\Delta_1} w_{R|S_0}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{\mathbb{R}^N} w_{R|S_0}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = P\left((\mathbf{R}|S_0) \in \mathbb{R}^N\right) = 1 \quad (8)$$

putem scrie în relația (7) toate integralele pe domeniul Δ_1 ca niște integrale pe Δ_0 , după:

$$\int_{\Delta_1} w_{R|S_i}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1 - \int_{\Delta_0} w_{R|S_i}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad i = 0, 1 \quad (9)$$

Astfel, valoarea costului mediu devine:

Rezolvare (ca o problemă de optimizare) VI

$$\begin{aligned} \bar{C} = & C_{00}P_0 \int_{\Delta_0} w_{R|S_0}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + C_{10}P_1 \int_{\Delta_0} w_{R|S_1}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \\ & + C_{01}P_0 \left(1 - \int_{\Delta_0} w_{R|S_0}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}\right) + C_{11}P_1 \left(1 - \int_{\Delta_0} w_{R|S_1}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

ceea ce poate fi rescris mai compact:

$$\bar{C} = C_{01}P_0 + C_{11}P_1 + \int_{\Delta_0} [P_1(C_{10} - C_{11})w_{R|S_1}(\mathbf{r}) - P_0(C_{01} - C_{00})w_{R|S_0}(\mathbf{r})] d\mathbf{r} \quad (11)$$

Din punct de vedere matematic, problema minimizării costului mediu \bar{C} din (11) este una de minimizare a ariei unui subgrafic în

Rezolvare (ca o problemă de optimizare) VII

funcție de domeniul ales. Soluția poate fi vizualizată dacă facem o analogie 1D: în Figura 4 este graficul unei funcții $f(x)$ oarecare. Alegând dom. $D_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 0\}$ obținem $\int_{D_1} f(x)dx \rightarrow \min$

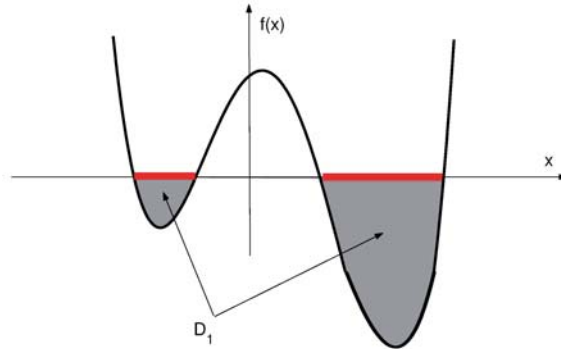


Figura 4: Alegerea domeniului care minimizează aria de sub graficul unei funcții.

Rezolvare (ca o problemă de optimizare) VIII

Într-adevăr, orice alt domeniu D_2 am adăuga la D_1 , avem $\int_{D_1 \cup D_2} f(x)dx > \int_{D_1} f(x)dx$, întrucât $\int_{D_2} f(x)dx > 0$. Revenind la problema alegerii intervalului Δ_0 care minimizează costul mediu \bar{C} din (11), rezultă că putem scrie, prin analogie cu situația ilustrată anterior că pentru $\bar{C} = \bar{C}_{\min} \Leftrightarrow$:

$$\Delta_0 = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^N \mid P_1(C_{10} - C_{11})w_{\mathbf{R}|S_1}(\mathbf{r}) - P_0(C_{01} - C_{00})w_{\mathbf{R}|S_0}(\mathbf{r}) < 0 \right\} \quad (12)$$

Rezultă, că domeniul Δ_1 care minimizează costul mediu este dat de:

$$\Delta_1 = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^N \mid P_1(C_{10} - C_{11})w_{\mathbf{R}|S_1}(\mathbf{r}) - P_0(C_{01} - C_{00})w_{\mathbf{R}|S_0}(\mathbf{r}) > 0 \right\} \quad (13)$$

Rezolvare (ca o problemă de optimizare) IX

Având în vedere că $\mathbf{r} \in \Delta_0 \Rightarrow D_0$, respectiv $\mathbf{r} \in \Delta_1 \Rightarrow D_1$, relațiile (12) și (13) pot fi scrise mai compact astfel:

$$P_1(C_{10} - C_{11})w_{R|S_1}(\mathbf{r}) \underset{D_0}{\overset{D_1}{\geq}} P_0(C_{01} - C_{00})w_{R|S_0}(\mathbf{r}) \quad (14)$$

ceea ce, prin rearanjarea termenilor, conduce la forma finală a criteriului de decizie Bayes:

$$\frac{w_{R|S_1}(\mathbf{r})}{w_{R|S_0}(\mathbf{r})} \underset{D_0}{\overset{D_1}{\geq}} \frac{P_0(C_{01} - C_{00})}{P_1(C_{10} - C_{11})} \quad (15)$$

Termenul din stânga se notează cu $\Lambda(\mathbf{r})$ și se numește raport de plauzibilitate:

$$\Lambda(\mathbf{r}) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{w_{R|S_1}(\mathbf{r})}{w_{R|S_0}(\mathbf{r})} \quad (16)$$

Rezolvare (ca o problemă de optimizare) X

În timp ce termenul din dreapta (care este constant) se notează cu K și se numește pragul testului:

$$K \stackrel{\text{not}}{=} \frac{P_0(C_{01} - C_{00})}{P_1(C_{10} - C_{11})} \quad (17)$$

Conform relației (15), rezultă schema bloc a blocului de decizie **D** din Figura 5. Prima operație este extragerea eșantioanelor r_i cu $i = 1, \dots, N$ din semnalul continuu $r(t)$, pentru $t \in [0, T]$, apoi se calculează raportul de plauzibilitate conform relației 16, decizia finală fiind dată de rezultatul comparației acestuia cu pragul testului dat de 17.

Rezolvare (ca o problemă de optimizare) XI

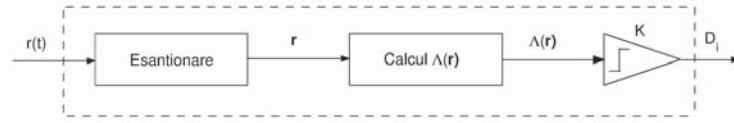


Figura 5: Schema bloc a blocului de detecție **D** din Figura 1 conform regulii de decizie Bayes.

Uneori se preferă exprimarea regulii de decizie Bayes în formă logaritmică, aceasta conducând la o expresie matematic mai simplă. Având în vedere că funcția logaritm natural este strict crescătoare, se poate rescrie relația (15) sub forma:

$$\ln \Lambda(\mathbf{r}) \underset{D_0}{\overset{D_1}{\geq}} \ln K \quad (18)$$

ce reprezintă exprimarea criteriului Bayes în formă logaritmică.

Statistica suficientă

Se poate face întotdeauna o schimbare de coordonate în \mathbb{R}^N astfel încât toată informația necesară deciziei să fie conținută într-o singură coordonată din spațiul transformat. Acea coordonată se numește *statistică suficientă*. Astfel, dacă se face schimbarea de coordonate $[R_1, \dots, R_N] \Leftrightarrow \underbrace{[L_1, \dots, L_N]}_L$, astfel încât,

$$w_{L_2, \dots, L_N | S_0}(l_2, \dots, l_N) = w_{L_2, \dots, L_N | S_1}(l_2, \dots, l_N) \quad (19)$$

ceea ce, altfel spus, semnifică faptul că coordonatele L_2, \dots, L_N nu conțin informație relevantă la decizie, atunci coordonata L_1 este statistica suficientă, iar regula de decizie Bayes se scrie:

$$\frac{w_{L|S_1}(l_1, \dots, l_N)}{w_{L|S_0}(l_1, \dots, l_N)} = \frac{w_{L_1|S_1}(l_1)}{w_{L_1|S_0}(l_1)} \underset{D_0}{\overset{D_1}{\geq}} \frac{P_0(C_{01} - C_{00})}{P_1(C_{10} - C_{11})} \quad (20)$$

Criteriul Bayes pentru zgomot alb gaussian I

Vom particulariza regula de decizie Bayes pentru una din ipotezele statistice cel mai des folosite pentru zgomotul de pe canal: vom presupune că $n(t)$ este un semnal aleator staționar, zgomot alb, având o distribuție de ordinul unu gaussiană: $n(t) : \mathcal{N}(0, \sigma_n)$ pentru $\forall t \in [0, T]$.

Pentru a păstra generalitatea, nu vom particulariza cele două semnale $s_0(t)$ și $s_1(t)$, dar le vom presupune cunoscute.

În aceste ipoteze, densitățile de probabilitate $w_{R|S_i}(\mathbf{r})$ ce intervin în regula de decizie se calculează după cum urmează.

În ipoteza transmiterii lui S_0 avem $r(t) = s_0(t) + n(t)$ pentru $t \in [0, T]$, ceea ce se poate scrie în formă eșantionată:

$$R_i|S_0 = s_{0i} + n_i \quad i = 1, \dots, N, \quad (21)$$

unde $s_{0i} \stackrel{\text{not}}{=} s_0(t_i)$ reprezintă valorile *cunoscute* ale semnalului s_0 la momentele de timp alese pentru eșantionarea lui $r(t)$, iar

Criteriul Bayes pentru zgomot alb gaussian II

$n_i \stackrel{\text{not}}{=} n(t_i)$ reprezintă valorile *aleatoare* ale zgomotului la aceleași momente.

Cu aceste precizări, din relația (21) rezultă că variabila aleatoare $R_i|S_0$, a cărei realizare particulară este r_i , rezultă prin sumarea unei variabile aleatoare gaussiene n_i peste o constantă s_{0i} (în ipoteza transmiterii lui S_0 , valorile s_{0i} sunt constante din punct de vedere *statistic* și nu temporal. Altfel spus, în expresia celui de-al i -lea eșantion al semnalului recepționat în ipoteza S_0 va apărea *întotdeauna* valoarea s_{0i}).

Aplicând rezultatul (??), rezultă că și $R_i|S_0$ are o distribuție gaussiană, cu media dată de suma dintre media inițială și constanta adunată: $R_i|S_0 : \mathcal{N}(s_{0i}, \sigma_n)$, ceea ce este echivalent cu:

$$w_{R_i|S_0}(r_i) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{(r_i - s_{0i})^2}{2\sigma_n^2} \right]} \quad i = 1, \dots, N \quad (22)$$

Criteriul Bayes pentru zgomot alb gaussian III

Avem, deci, distribuțiile de ordinul unu ale tuturor componentelor vectorului $\mathbf{R}|S_0$. Pentru a putea aplica, însă, criteriul Bayes, avem nevoie de distribuția de ordinul N a tuturor componentelor. Dar cunoștințele despre distribuțiile de ordin inferior nu oferă suficientă informație pentru calculul distribuțiilor de ordin mai mare, decât într-o singură ipoteză: cea de independență între variabilele aleatoare. Cum $n(t)$ este modelat ca fiind zgomot alb, înseamnă că variabilele $n(t_i)$ și $n(t_j)$ sunt decorelate pentru $t_i \neq t_j$, și cum, în plus amândouă sunt gaussiene, putem presupune că ele sunt și independente statistic (pentru ca $n(t_i)$ și $n(t_j)$ să fie independente, ar trebui ca și modelul statistic de ordinul doi al zgomotului să fie tot gaussian. În practică, cum nu există semnal pur aleator, nu se poate presupune decorelarea sau independența între $n(t_i)$ și $n(t_j)$ pentru $t_j \rightarrow t_i$. Se poate alege, însă, ecartul temporal minim între două momente succesive t_{i-1} și t_i suficient de mare ca corelația

Criteriul Bayes pentru zgomot alb gaussian IV

din semnal să se *stingă*; astfel, ipoteza independenței între valorile $n(t_i)$ devine verosimilă).

Rezultă că și variabilele aleatoare $R_i|S_0$ și $R_j|S_0$ sunt independente pentru $i \neq j$, întrucât ele rezultă prin sumarea unor constante peste n_i , respectiv n_j . Putem, deci, scrie:

$$w_{\mathbf{R}|S_0}(\mathbf{r}) = \prod_{i=1}^N w_{R_i|S_0}(r_i) = \left(\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \right)^N e^{\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N (r_i - s_{0i})^2 \right]} \quad (23)$$

Raționamentul se poate relua în mod absolut similar și pentru $w_{\mathbf{R}|S_1}(\mathbf{r})$:

$$w_{\mathbf{R}|S_1}(\mathbf{r}) = \prod_{i=1}^N w_{R_i|S_1}(r_i) = \left(\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \right)^N e^{\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N (r_i - s_{1i})^2 \right]} \quad (24)$$

Criteriul Bayes pentru zgomot alb gaussian V

Cu densitățile de probabilitate deduse, rezultă că raportul de plauzibilitate se scrie:

$$\begin{aligned}
 \Lambda(\mathbf{r}) &= \frac{w_{R|S_1}(\mathbf{r})}{w_{R|S_0}(\mathbf{r})} = \frac{\left(\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}}\right)^N e^{\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N (r_i - s_{1i})^2\right]}}{\left(\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}}\right)^N e^{\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N (r_i - s_{0i})^2\right]}} \\
 &= e^{\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N ((r_i - s_{1i})^2 - (r_i - s_{0i})^2)\right]} \quad (25) \\
 &= e^{\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N (r_i^2 - 2r_i s_{1i} + s_{1i}^2 - r_i^2 + 2r_i s_{0i} - s_{0i}^2)\right]} \\
 &= e^{\left[\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N r_i (s_{1i} - s_{0i}) - \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N (s_{1i}^2 - s_{0i}^2)\right]}
 \end{aligned}$$

Pentru cazul de față este de preferat exprimarea criteriului Bayes în forma sa logaritmică. Astfel, relația (18) devine:

Criteriul Bayes pentru zgomot alb gaussian VI

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N r_i (s_{1i} - s_{0i}) - \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N (s_{1i}^2 - s_{0i}^2) \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \ln K \quad (26)$$

care, poate fi scrisă sub formă finală ca:

$$\sum_{i=1}^N r_i (s_{1i} - s_{0i}) \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln K + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (s_{1i}^2 - s_{0i}^2) \quad (27)$$

Observație. Termenul din stânga al relației (27),

$l_1 \stackrel{\text{not}}{=} \sum_{i=1}^N r_i (s_{1i} - s_{0i})$ reprezintă statistica suficientă în acest caz, respectiv cea coordonată unică ce conține toată informația necesară deciziei.

Exemplu

Să particularizăm relația (27) pentru următoarele semnale:
 $s_0(t) = 0$, $s_1(t) = A$ pentru $t \in [0, T]$. Astfel, $s_{0i} = 0$ și $s_{1i} = A$
 $\forall i = 1, \dots, N$. Fie $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$ (simboluri echiprobabile),
 $C_{00} = C_{11}$ (costuri egale pentru deciziile corecte) și $C_{01} = C_{10}$
(costuri egale pentru deciziile greșite), ceea ce conduce la $K = 1$,
respectiv $\ln K = 0$. În aceste condiții, relația (27) se scrie:

$$\sum_{i=1}^N r_i(A - 0) \underset{D_0}{\overset{D_1}{\geq}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (A^2 - 0) \quad (28)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i \underset{D_0}{\overset{D_1}{\geq}} \frac{A}{2} \quad (29)$$

Revenind la exemplul prezentat în Figura 3.(b), pentru $N = 2$,
relația (29) se scrie $r_1 + r_2 \underset{D_0}{\overset{D_1}{\geq}} A$, ceea ce corespunde soluției găsite
pe baza argumentelor calitative (ecuația dreptei punctate din
figură este $r_1 + r_2 = A$).

Discuție asupra costurilor

În acest punct este utilă discuția influenței costurilor asupra
deciziei. Să presupunem că alegem $C_{01} > C_{10}$, ceea ce este un
mod de a *comunica* sistemului de decizie că evenimentul $S_0 \cap D_1$
este mai de nedorit decât $S_1 \cap D_0$. În aceste condiții, avem $K > 1$,
respectiv $\ln K > 0$, iar regula de decizie revine $r_1 + r_2 \underset{D_0}{\overset{D_1}{\geq}} A + \alpha$ cu
 $\alpha = \sigma_n^2 \ln K > 0$. Altfel spus, dreapta care separă cele două zone
de decizie se *mută* în sus cu o cantitate α care e cu atât mai
importantă cu cât raportul costurilor $\frac{C_{01}}{C_{10}}$ este mai mare. În
consecință, sistemul va favoriza decizia D_0 în detrimentul deciziei
 D_1 (pe măsură ce dreapta *glisează* în sus, din ce în ce mai multe
puncte intră în Δ_0), ceea ce este exact comportamentul așteptat!
Trebuie remarcat că, în acest caz, probabilitatea globală de eroare
va crește, ceea ce scade, însă, este valoarea medie a costului.

Transformate unitare. Transformata Karhunen–Loève

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Braşov, România

January 7, 2015

Semnale aleatoare în timp discret

- Sunt obținute din semnalele aleatoare în timp continuu prin eşantionare, cu o anumită perioadă T_e (vezi Figura 1)
- Conform teoremei eşantionării, pentru ca semnalul continuu să poată fi reconstituit fără nici o pierdere din eşantioanele sale, trebuie ca frecvența de eşantionare să fie de cel puțin două ori mai mare ca frecvența maximă a semnalului f_{\max} :

$$f_e = \frac{1}{T_e} \geq 2f_{\max} \quad (1)$$

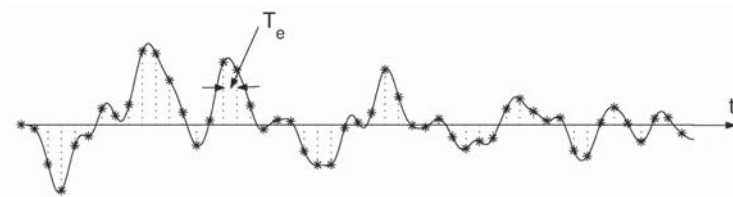


Figura 1: Eşantionarea semnalelor aleatoare.

Reprezentarea semnalelor aleatoare în timp discret I

Semnalele aleatoare în timp discret sunt reprezentate sub formă de secvență de numere:

$$[\dots, \xi(-T_e), \xi(0), \xi(T_e), \xi(2T_e), \dots, \xi(nT_e), \dots] \quad (2)$$

fiecare dintre aceste numere fiind o variabilă aleatoare *continuă*. În cele ce urmează, vom omite din notație perioada de eșantionare, adică vom nota:

$$\xi(n) \stackrel{\text{not}}{=} \xi(nT_e) \quad (3)$$

Evident, datorită naturii discrete a reprezentării temporale a semnalului, atât densitățile de probabilitate de orice ordin cât și momentele semnalului vor fi și ele reprezentate tot în timp discret. În rest, toate considerentele discutate în capitolele precedente rămân valabile și în reprezentarea în timp discret. În particular, un semnal aleator în timp discret $\xi(n)$ se numește staționar în sens larg (pe scurt, staționar) dacă:

Reprezentarea semnalelor aleatoare în timp discret II

$$\overline{\xi(n)} = \bar{\xi} \quad (4)$$

$$R_{\xi}(n, k) = \overline{\xi(n)\xi(k)} = R_{\xi}(n - k) \quad (5)$$

În continuare, vom presupune ipoteza de staționaritate pentru toate semnalele în timp discret considerate.

În ceea ce privește reprezentarea spectrală a semnalelor aleatoare în timp discret, sigura modificare față de reprezentarea în timp continuu este dată de faptul că, datorită eșantionării cu perioadă T_e , cea mai mare frecvență ce poate fi reprezentată în spectrul semnalului (conform condiției Nyquist) este:

$$\omega_{\max} = \frac{\omega_e}{2} = \frac{\pi}{T_e} \quad (6)$$

Reprezentarea semnalelor aleatoare în timp discret III

Deci, ținând cont de convenția de notație $T_e = 1$, densitatea spectrală de putere a semnalului, obținută ca fiind transformata Fourier în timp discret a funcției sale de autocorelație:

$$q_\xi(\omega) = \mathcal{F}\{R_\xi(k)\}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_\xi(k) e^{-j\omega k} \quad (7)$$

va avea componente în intervalul de frecvențe $[-\pi, \pi]$.

Matricea de autocorelație I

Vom defini o structură foarte importantă în studiul semnalelor aleatoare în timp discret, și anume matricea de autocorelație. Vom porni prin a defini vectorul $\xi \in \mathbb{R}_{N \times 1}$ ca fiind vectorul coloană ce conține N eșantioane ale unui semnal staționar:

$$\xi = [\xi(0) \quad \xi(1) \quad \cdots \quad \xi(N-1)]^T \quad (8)$$

unde prin $()^T$ am notat operatorul de transpunere de matrici.

Matricea de autocorelație a semnalului, notată cu R_ξ , se definește ca:

$$R_\xi \triangleq \overline{\xi \xi^T} \quad (9)$$

Explicitând înmulțirea și ținând cont de faptul că funcția de autocorelație a semnalului este pară, avem:

Matricea de autocorelație II

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_\xi &= \begin{bmatrix} \xi(0) \\ \xi(1) \\ \vdots \\ \xi(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(0) & \xi(1) & \cdots & \xi(N-1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \overline{\xi(0)\xi(0)} & \overline{\xi(0)\xi(1)} & \cdots & \overline{\xi(0)\xi(N-1)} \\ \overline{\xi(1)\xi(0)} & \overline{\xi(1)\xi(1)} & \cdots & \overline{\xi(1)\xi(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\xi(N-1)\xi(0)} & \overline{\xi(N-1)\xi(1)} & \cdots & \overline{\xi(N-1)\xi(N-1)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} R_\xi(0) & R_\xi(1) & R_\xi(2) & \cdots & R_\xi(N-1) \\ R_\xi(1) & R_\xi(0) & R_\xi(1) & \cdots & R_\xi(N-2) \\ R_\xi(2) & R_\xi(1) & R_\xi(0) & \cdots & R_\xi(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_\xi(N-1) & R_\xi(N-2) & R_\xi(N-3) & \cdots & R_\xi(0) \end{bmatrix} \quad (10)
 \end{aligned}$$

Matricea de autocorelație III

În mod similar, se definește și matricea de autocovariație \mathbf{K}_ξ ca:

$$\mathbf{K}_\xi \triangleq \overline{(\xi - \bar{\xi})(\xi - \bar{\xi})^T} = \mathbf{R}_\xi - \bar{\xi}\bar{\xi}^T \quad (11)$$

care, la fel ca matricea de autocorelație, se poate scrie sub forma:

$$\mathbf{K}_\xi = \begin{bmatrix} K_\xi(0) & K_\xi(1) & K_\xi(2) & \cdots & K_\xi(N-1) \\ K_\xi(1) & K_\xi(0) & K_\xi(1) & \cdots & K_\xi(N-2) \\ K_\xi(2) & K_\xi(1) & K_\xi(0) & \cdots & K_\xi(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_\xi(N-1) & K_\xi(N-2) & K_\xi(N-3) & \cdots & K_\xi(0) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Se observă din relațiile (10) și (12) că atât matricea de autocorelație cât și cea de autocovariație sunt simetrice și au o structură de tip Toeplitz (o matrice este de tip Toeplitz dacă

Matricea de autocorelație IV

elementele de pe orice diagonală paralelă cu diagonală principală sunt egale).

O altă proprietate importantă a celor două matrici este aceea că sunt pozitiv definite. Vom demonstra această afirmație pentru matricea de autocorelație. Vom arăta că $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_{N \times 1}$, avem

$$\mathbf{x}^T \mathbf{R}_\xi \mathbf{x} \geq 0 \quad (13)$$

Fie un vector coloană oarecare $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{N \times 1}$ și fie variabila aleatoare scalară $\eta = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\xi}$. Avem:

$$\overline{\eta^2} = \overline{\eta \eta^T} = \overline{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\xi} (\mathbf{x}^T \boldsymbol{\xi})^T} = \overline{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \overline{\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^T} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{R}_\xi \mathbf{x} \quad (14)$$

Am folosit faptul că η este un scalar, deci el este egal cu transpusa sa. Cum, prin definiție, $\overline{\eta^2} \geq 0$, rezultă proprietatea enunțată.

Faptul că matricea de autocorelație (autocovariație) este simetrică și pozitiv definită este echivalent cu a spune că valorile sale proprii sunt toate pozitive.

Transformate unitare I

Termenul de tranformată unitară se referă la o clasă de matrici *unitare* folosite pentru reprezentarea semnalelor. O matrice pătratică având componente complexe $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{N \times N}$ se numește unitară dacă:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{*T} \quad (15)$$

unde prin $()^*$ am notat operatorul de conjugare complexă.

Să menționăm chiar de la început că, deși cazul complex nu este deloc neglijabil (de exemplu, transformata Fourier discretă se obține cu ajutorul unei matrici \mathbf{A} având elemente complexe!), în acest capitol vom trata numai problema transformatelor cu coeficienți reali, deci vom presupune în continuare $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{N \times N}$, caz în care condiția de unitaritate devine:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \quad (16)$$

Transformate unitare II

Fiind dată matricea \mathbf{A} unitară și vectorul coloană

$\xi = [\xi(0) \ \xi(1) \ \cdots \ \xi(N-1)]^T$, se definește transformata lui ξ ca fiind vectorul coloană $\eta = [\eta(0) \ \eta(1) \ \cdots \ \eta(N-1)]^T$ obținut ca:

$$\eta = \mathbf{A}\xi \quad (17)$$

Considerând elementele matricii $\mathbf{A} = \{a(k, n)\}_{k,n=0,\dots,N-1}$, relația (17) se poate scrie:

$$\eta(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(k, n)\xi(n), \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (18)$$

Transformata inversă, care permite recuperarea vectorului original ξ din cel transformat η se scrie, ținând cont de (16):

$$\xi = \mathbf{A}^T \eta \quad (19)$$

Transformate unitare III

sau, element cu element:

$$\xi(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a(k, n)\eta(k), \quad \forall n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (20)$$

Semnificația unei transformate unitare poate fi înțeleasă scriind matricea \mathbf{A}^T sub forma

$$\mathbf{A}^T = [\mathbf{a}_0 \ \mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_{N-1}] \quad (21)$$

unde \mathbf{a}_k sunt vectori coloană:

$$\mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} a(k, 0) \\ a(k, 1) \\ \vdots \\ a(k, N-1) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Transformate unitare IV

Cu aceste notații, relațiile care dau transformata directă (18), respectiv pe cea inversă (19), pot fi scrise sub forma:

$$\eta(k) = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{a}_k = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{a}_k \rangle \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (23)$$

respectiv:

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{k=0}^{N-1} \eta(k) \mathbf{a}_k \quad (24)$$

unde cu $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$ a fost notat produsul scalar între vectorii coloană $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{R}_{N \times 1}$, definit ca:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \triangleq \mathbf{f}^T \mathbf{g} = \sum_{i=0}^{N-1} f(i)g(i) \quad (25)$$

Calculul lui $\boldsymbol{\xi}$ din relația (24) se interpretează ca o *descompunere* a acestuia într-o altă bază a lui \mathbb{R}^N , și anume cea formată din coloanele matricii \mathbf{A}^T : $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N-1}\}$.

Transformate unitare V

Coeficienții dezvoltării lui $\boldsymbol{\xi}$ în această bază sunt chiar componentele $\eta(k)$ ale vectorului transformat $\boldsymbol{\eta}$.

Conform (23), aceștia se obțin prin produs scalar între vectorul dezvoltat $\boldsymbol{\xi}$ și axa \mathbf{a}_k , care nu reprezintă altceva decât *proiecția* lui $\boldsymbol{\xi}$ pe \mathbf{a}_k .

În plus, noua bază în care se reprezintă semnalul este ortonormală, fapt asigurat de condiția (16) de unitaritate impusă matricii \mathbf{A} . (16) se poate rescrie ca:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_N \quad (26)$$

ceea ce, scris explicit în funcție de vectorii \mathbf{a}_k , devine:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^T \\ \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Transformate unitare VI

Din relația de mai sus, rezultă că:

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (28)$$

ceea ce este echivalent cu a spune că baza $\{\mathbf{a}_k\}_{k=0,\dots,N-1}$ pe care se descompune vectorul original ξ este ortonormală, întrucât fiecare doi vectori din set sunt perpendiculari, iar norma fiecăruia este unu!

Un exemplu I

Să considerăm un exemplu pentru care avem o reprezentare geometrică: $N = 2$. Fie vectorul $\xi = [5, 2]^T$ din Figura 2. Cele două componente ale vectorului ξ reprezintă coeficienții dezvoltării vectorului în baza canonică $\{\mathbf{e}_x = [1, 0]^T, \mathbf{e}_y = [0, 1]^T\}$ aleasă din oficiu pentru reprezentarea oricărui vector din \mathbb{R}^2 . Adică $\xi = [5, 2]^T$ este echivalent cu: $\xi = 5\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$

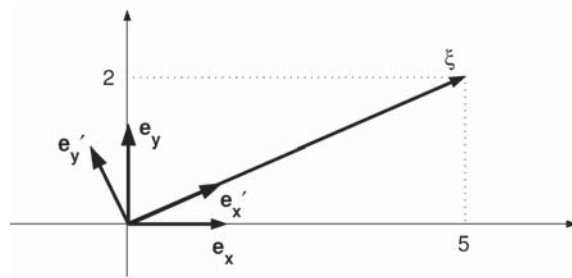


Figura 2: Exemplu de schimbare de bază.

Un exemplu II

$$\langle \xi, \mathbf{e}_x \rangle = 5$$

$$\langle \xi, \mathbf{e}_y \rangle = 2$$

Să considerăm baza $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y\}$ obținută printr-o rotație a bazei canonice astfel încât versorul \mathbf{e}'_x să devină coliniar cu vectorul considerat ξ . În noua bază $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y\}$ componentele lui ξ devin:

$$\langle \xi, \mathbf{e}'_x \rangle = \sqrt{29}$$

$$\langle \xi, \mathbf{e}'_y \rangle = 0$$

$$\xi = \sqrt{29}\mathbf{e}'_x + 0\mathbf{e}'_y = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e}'_x & \mathbf{e}'_y \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{29} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\eta}}$$

Deci, vectorul transformat $\boldsymbol{\eta} = [\sqrt{29}, 0]^T$ este noua reprezentare a lui ξ în baza considerată.

Aplicațiile transformatelor unitare

Cea mai importantă aplicație este compresia de date, care este posibilă datorită proprietății transformatelor utilizate în practică de a *compacta* energia într-un număr redus de coeficienți în spațiul transformat. Important: o transformată unitară conservă energia semnalului:

$$E_{\boldsymbol{\eta}} = \|\boldsymbol{\eta}\|^2 = \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{A}\xi)^T \mathbf{A}\xi = \xi^T \underbrace{\mathbf{A}^T \mathbf{A}}_{I_N} \xi = \xi^T \xi = \|\xi\|^2 = E_{\xi} \quad (29)$$

Deși energia totală se conservă, pentru majoritatea transformatelor utilizate în practică, aceasta tinde să fie distribuită inegal între coeficienții spațiului transformat. Cu alte cuvinte, energia este concentrată într-un număr redus de coeficienți ai transformării, restul putând fi neglijăți, pierderea de informație indusă fiind extrem de mică.

Transformata Karhunen–Loève I

Problema care se pune este aceea de calcul al matricii unitare

$$\mathbf{L} = [\mathbf{I}_0 \quad \mathbf{I}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{I}_{N-1}]^T \quad (30)$$

cu ajutorul căreia să compactăm cât mai bine energia în spațiul transformatei, cu alte cuvinte, să concentrăm energia într-un număr minim de coeficienți în spațiul transformării.

Fie $\boldsymbol{\eta}$ transformata vectorului original $\boldsymbol{\xi}$:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{L}\boldsymbol{\xi} = [\eta(0) \quad \cdots \quad \eta(m-1) \quad \eta(m) \quad \cdots \quad \eta(N-1)]^T \quad (31)$$

Din vectorul $\boldsymbol{\eta}$ păstrăm numai primele m componente, restul înlocuindu-le cu niște constante c_i . Cu alte cuvinte, îl aproximăm pe $\boldsymbol{\eta}$ cu $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ dat de:

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = [\eta(0) \quad \cdots \quad \eta(m-1) \quad c_m \quad \cdots \quad c_{N-1}]^T \quad (32)$$

Transformata Karhunen–Loève II

Cu ajutorul vectorului aproximat în spațiul original

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{L}^T \tilde{\boldsymbol{\eta}} \quad (33)$$

se definește eroarea pătratică medie indusă de aproximarea în spațiul transformatei ca fiind:

$$\varepsilon = \overline{\|\boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\xi}}\|^2} \quad (34)$$

Problema din punct de vedere matematic este de determinare a matricii \mathbf{L} a transformării astfel încât eroarea pătratică medie (34) să fie minimă.

Trecând eroarea pătratică medie din (34) în spațiul transformatei, avem:

Transformata Karhunen–Loève III

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \overline{(\boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\xi}})^T (\boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\xi}})} \\
 &= \overline{(\mathbf{L}^T (\boldsymbol{\eta} - \tilde{\boldsymbol{\eta}}))^T (\mathbf{L}^T (\boldsymbol{\eta} - \tilde{\boldsymbol{\eta}}))} \\
 &= \overline{(\boldsymbol{\eta} - \tilde{\boldsymbol{\eta}})^T \underbrace{\mathbf{L}\mathbf{L}^T}_{\mathbf{I}_N} (\boldsymbol{\eta} - \tilde{\boldsymbol{\eta}})} \\
 &= \overline{(\boldsymbol{\eta} - \tilde{\boldsymbol{\eta}})^T (\boldsymbol{\eta} - \tilde{\boldsymbol{\eta}})} = \overline{\|\boldsymbol{\eta} - \tilde{\boldsymbol{\eta}}\|^2} \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} \overline{(\eta(i) - \tilde{\eta}(i))^2} = \sum_{i=0}^{N-1} \overline{(\eta(i) - \tilde{\eta}(i))^2}
 \end{aligned} \tag{35}$$

Ținând cont că primele m componente ale lui $\boldsymbol{\eta}$ și $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ sunt identice, rezultă că eroarea pătratică medie poate fi scrisă ca:

$$\varepsilon = \sum_{i=m}^{N-1} \overline{(\eta(i) - c_i)^2} \tag{36}$$

Transformata Karhunen–Loève IV

În acest punct, putem determina constantele c_k care minimizează eroarea ε impunând ca:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_k} = \frac{\partial}{\partial c_k} \left(\sum_{i=m}^{N-1} \overline{(\eta(i) - c_i)^2} \right) = \overline{-2(\eta(k) - c_k)} = 0 \tag{37}$$

de unde rezultă:

$$c_k = \overline{\eta(k)} \quad \forall k = m, \dots, N-1 \tag{38}$$

Înlocuind (38) în (36), obținem:

$$\varepsilon = \sum_{i=m}^{N-1} \overline{(\eta(i) - \overline{\eta(i)})^2} \tag{39}$$

Dar, conform (23), avem

Transformata Karhunen–Loève V

$$\eta(i) = \xi^T \mathbf{l}_i = \mathbf{l}_i^T \xi \quad (40)$$

de unde:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sum_{i=m}^{N-1} \overline{(\eta(i) - \overline{\eta(i)})} (\eta(i) - \overline{\eta(i)}) \\ &= \sum_{i=m}^{N-1} \overline{(\mathbf{l}_i^T \xi - \overline{\mathbf{l}_i^T \xi})} (\xi^T \mathbf{l}_i - \overline{\xi^T \mathbf{l}_i}) \\ &= \sum_{i=m}^{N-1} \mathbf{l}_i^T (\xi - \overline{\xi}) (\xi - \overline{\xi})^T \mathbf{l}_i \\ &= \sum_{i=m}^{N-1} \mathbf{l}_i^T \underbrace{(\xi - \overline{\xi}) (\xi - \overline{\xi})^T}_{\mathbf{K}_\xi} \mathbf{l}_i = \sum_{i=m}^{N-1} \mathbf{l}_i^T \mathbf{K}_\xi \mathbf{l}_i \end{aligned} \quad (41)$$

Transformata Karhunen–Loève VI

Relația (41) ne dă scrierea cantității de minimizat ε în funcție de necunoscutele \mathbf{l}_i . Nu putem, însă, trece direct la minimizarea lui ε fără a ține cont de constrângerile asupra vectorilor \mathbf{l}_i de a fi de normă unitară, întrucât sunt coloanele unei matrici unitare. Astfel, minimizarea lui ε cu constrângerile $\mathbf{l}_i^T \mathbf{l}_i = 1$ revine la minimizarea expresiei:

$$\Psi = \sum_{i=m}^{N-1} \left[\mathbf{l}_i^T \mathbf{K}_\xi \mathbf{l}_i - \lambda_i (\mathbf{l}_i^T \mathbf{l}_i - 1) \right] \quad (42)$$

unde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sunt multiplicatorii Lagrange aferenți constrângerilor impuse.

Pentru rezolvarea elegantă, sub formă vectorială, a problemei minimizării lui Ψ din (42), definim gradientul vectorial al unei expresii scalare. Fie $E(\mathbf{v})$ o funcție scalară de vectorul $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_N]^T$. Definim gradientul lui E după \mathbf{v} ca fiind:

Transformata Karhunen–Loève VII

$$\nabla_{\mathbf{v}} E = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial v_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial E}{\partial v_N} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Vectorul \mathbf{v} care minimizează pe E se obține făcând:

$$\nabla_{\mathbf{v}} E = \mathbf{0} \quad (44)$$

Mai mult, se poate arăta prin calcul direct că pentru orice matrice simetrică ($\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$) avem:

$$\nabla_{\mathbf{v}} (\mathbf{v}^T \mathbf{B} \mathbf{v}) = 2\mathbf{B} \mathbf{v} \quad (45)$$

Ținând cont că matricea de covariație \mathbf{K}_{ξ} este simetrică, și că putem scrie $\mathbf{I}_i^T \mathbf{I}_i = \mathbf{I}_i^T \mathbf{I}_N \mathbf{I}_i$, atunci, aplicând rezultatele enunțate mai sus, rezultă că vectorii \mathbf{v}_k care minimizează pe Ψ se obțin din ecuația:

Transformata Karhunen–Loève VIII

$$\nabla_{\mathbf{I}_k} \Psi = 2\mathbf{K}_{\xi} \mathbf{I}_k - 2\lambda_k \mathbf{I}_k = \mathbf{0} \quad (46)$$

de unde rezultă că:

$$\mathbf{K}_{\xi} \mathbf{I}_k = \lambda_k \mathbf{I}_k \quad (47)$$

Cu alte cuvinte, coloanele matricii transformatei Karhunen–Loève (prescurtată în cele ce urmează KL) \mathbf{L}^T , cu ajutorul căreia se compactează optim energia vectorului original ξ , sunt *vectorii proprii* ai matricii de covariație ai vectorului respectiv! Iar multiplicatorii Lagrange λ_i sunt *valorile proprii* atașate vectorilor \mathbf{I}_i .

Observații I

Înlocuind vectorii \mathbf{l}_k din (47) în expresia (41), obținem valoarea minimă a erorii pătratice medii:

$$\varepsilon_{\min} = \sum_{i=m}^{N-1} \mathbf{l}_i^T \underbrace{\mathbf{K}_\xi}_{\lambda_i \mathbf{l}_i} \mathbf{l}_i = \sum_{i=m}^{N-1} \lambda_i \underbrace{\mathbf{l}_i^T \mathbf{l}_i}_1 = \sum_{i=m}^{N-1} \lambda_i \quad (48)$$

Cu alte cuvinte, eroarea pătratică medie obținută în cazul optimal este suma valorilor proprii aferente axelor ale căror componente au fost *suprimate*. Din această observație deducem ordinea de așezare a coloanelor \mathbf{l}_i în matricea \mathbf{L}^T : dacă dorim să eliminăm componentele vectorului $\boldsymbol{\eta}$ localizate la coadă atunci vectorii \mathbf{l}_k trebuie ordonați în sens descrescător al valorilor proprii aferente:

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_0 & \mathbf{l}_1 & \cdots & \mathbf{l}_{N-1} \end{bmatrix} \quad (49)$$

$\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{N-1}$

Observații II

În continuare, calculând matricea de covariație a vectorului transformat $\boldsymbol{\eta}$, avem:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\eta &= \overline{(\boldsymbol{\eta} - \bar{\boldsymbol{\eta}})(\boldsymbol{\eta} - \bar{\boldsymbol{\eta}})^T} \\ &= \overline{\mathbf{L}(\boldsymbol{\xi} - \bar{\boldsymbol{\xi}})(\mathbf{L}(\boldsymbol{\xi} - \bar{\boldsymbol{\xi}}))^T} \\ &= \overline{\mathbf{L}(\boldsymbol{\xi} - \bar{\boldsymbol{\xi}})(\boldsymbol{\xi} - \bar{\boldsymbol{\xi}})^T \mathbf{L}^T} \\ &= \overline{\mathbf{L}(\boldsymbol{\xi} - \bar{\boldsymbol{\xi}})(\boldsymbol{\xi} - \bar{\boldsymbol{\xi}})^T} \mathbf{L}^T = \mathbf{L} \mathbf{K}_\xi \mathbf{L}^T \end{aligned} \quad (50)$$

Ținând cont de (47), ecuația (50) se scrie:

$$\mathbf{K}_\eta = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{l}_0^T \\ \mathbf{l}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{l}_{N-1}^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\mathbf{K}_\xi \begin{bmatrix} \mathbf{l}_0 & \mathbf{l}_1 & \cdots & \mathbf{l}_{N-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^T} = \cdots \quad (51)$$

Observații III

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_\eta &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_0^T \\ \mathbf{I}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{N-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\xi \mathbf{I}_0 & \mathbf{K}_\xi \mathbf{I}_1 & \cdots & \mathbf{K}_\xi \mathbf{I}_{N-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_0^T \\ \mathbf{I}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{N-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \mathbf{I}_0 & \lambda_1 \mathbf{I}_1 & \cdots & \lambda_{N-1} \mathbf{I}_{N-1} \end{bmatrix} \quad (52) \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Observații IV

Semnificația rezultatului (52) este aceea că, în noile coordonate, coeficienții dezvoltării sunt complet decorelați! Mai mult, se observă că

$$\lambda_i = \sigma_{\eta(i)}^2 \quad (53)$$

adică valorile λ_i au semnificația de varianță a coeficientului descompunerii vectorului ξ pe axa \mathbf{I}_i , ceea ce justifică alegerea făcută mai înainte, de eliminare a componentelor pe axele cu λ_i mic. Într-adevăr, în lumina relației (53), aceasta semnifică înlocuirea cu media lor a componentelor de varianță mică, ceea ce este natural.

În Figura 3 este prezentat un exemplu de schimbare de coordonate cu transformata KL pentru un set de vectori 3D cu componente puternic corelate (ceea ce se poate observa din forma liniară a norului de puncte reprezentând vectorii respectivi). Se observă că în noile coordonate, una din axe este chiar axa principală a norului

Observații V

de puncte, ceea ce este echivalent cu a spune că, în medie, componentele vectorilor pe celelalte două axe (perpendiculare pe axa principală) vor fi mici, ele putând fi eliminate cu o pierdere de informație redusă.

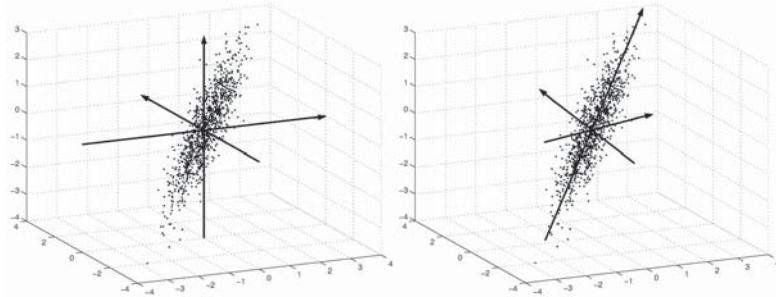


Figura 3: Exemplu de schimbare de coordonate a unui set de vectori cu componente puternic corelate înainte și după aplicarea transformatei KL.

Filtrarea optimală. Filtrul Wiener

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Braşov, România

January 13, 2015

Formularea problemei

- ▶ dorim să proiectăm un filtru liniar care, aplicându-i-se la intrare un semnal aleator discret $\xi(n)$, să producă la ieşire un semnal $\eta(n)$ (tot discret) care să fie cât mai apropiat de un semnal aleator dorit $\gamma(n)$
- ▶ atât semnalul de intrare, cât şi cel dorit a fi obţinut la ieşire, sunt presupuse staţionare şi de medie nulă
- ▶ putem exprima similaritatea între semnalul dorit şi cel obţinut la ieşirea filtrului prin intermediul diferenţei dintre cele două semnale (numit *semnal eroare*):

$$e(n) = \gamma(n) - \eta(n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

- ▶ este de dorit ca $e(n)$ să aibă valori cât mai mici
- ▶ problema este ilustrată în Figura 1

Ilustrarea problemei

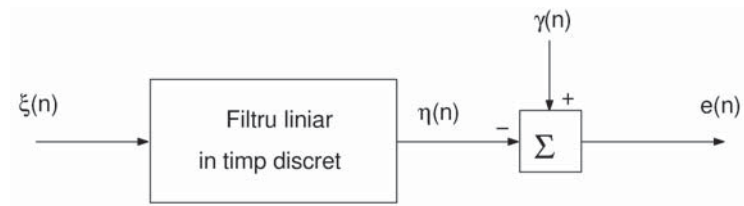


Figura 1: Punerea problemei filtrării optimale a semnalelor.

Impunem din start sistemului căutat de a fi liniar și invariant în timp, relația dintre semnalele de intrare și ieșire fiind:

$$\eta(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \xi(n-k) \quad (2)$$

Observații

- Relația (2) reprezintă adaptarea relației ce exprimă convoluția pentru cazul semnalelor în timp discret, considerând în plus un filtru causal
- Valorile h_k se numesc coeficienții filtrului și constituie necunoscutele problemei puse
- Sunt posibile două tipuri de structuri de filtre: cele cu număr finit de coeficienți, care se numesc filtre de tip FIR (*Finite Impulse Response*), și cele cu un număr infinit de coeficienți, care se numesc filtre IIR (*Infinite Impulse Response*)

Formularea matematică a problemei

- ▶ pentru a pune problema în ecuație trebuie definit un criteriu de eroare, prin care să traducem matematic dezideratul enunțat, și anume asemănarea semnalului de ieșire $\eta(n)$ cu cel dorit $\gamma(n)$ (minimizarea erorii pătratice medii)
- ▶ semnalul eroare se scrie ca:

$$e(n) = \gamma(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h_k \xi(n-k) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

iar eroarea medie pătratică ε se definește ca:

$$\varepsilon = \overline{e(n)^2} \quad (4)$$

- ▶ datorită staționarității semnalelor, eroarea pătratică medie este independentă de momentul de timp ales n
- ▶ problema enunțată se traduce matematic prin găsirea ponderilor h_k care minimizează pe ε dat de (4)
- ▶ Filtrul optimal astfel obținut se numește filtru Wiener

Principiul ortogonalității I

Valorile ponderilor h_i care minimizează eroarea pătratică medie sunt acele valori în care derivata acesteia este nulă. Derivata lui ε după ponderea h_i se scrie ca:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial h_i} = \frac{\partial \overline{e^2(n)}}{\partial h_i} = \overline{2e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial h_i}} = -2\overline{e(n)\xi(n-i)}, \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

de unde rezultă că:

$$\overline{e_o(n)\xi(n-i)} = 0, \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

unde cu $e_o(n)$ am notat valoarea optimă a erorii, adică cea corespunzătoare lui ε_{\min} .

Relația (6) este expresia *principiului ortogonalității*, și, deși constituie un rezultat intermediar, are o interpretare importantă. Principiul ortogonalității afirmă că, în cazul optimal, diferența

Principiul ortogonalității II

dintre ce dorim și ce avem la ieșirea filtrului la un moment de timp dat este decorelată cu toate eșantioanele anterioare ale semnalului de intrare!

Decorelarea erorii față de semnalul de intrare semnifică faptul că am extras maximum de informație din acesta, întrucât nu mai există nici o legătură statistică (de tip liniar, singurul tip de legătură ce poate fi evaluat cu ajutorul corelației) între semnalul de care dispunem (cel de intrare) și ceea ce mai lipsește semnalului de ieșire pentru ca acesta să corespundă întru totul cerințelor noastre (i.e. să fie egal cu semnalul dorit $\gamma(n)$).

Corelația dintre semnalul de ieșire și eroarea optimală poate fi scrisă ca:

Principiul ortogonalității III

$$\begin{aligned}\overline{e_o(n)\eta(n-i)} &= \overline{e_o(n) \left(\sum_{k=0}^{\infty} h_{k,o} \xi(n-i-k) \right)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h_{k,o} \overline{e_o(n) \xi(n-i-k)}\end{aligned}\quad (7)$$

unde cu $h_{k,o}$ am notat ponderile optimale, care minimizează pe ε .
Înlocuind (6) în (7), rezultă

$$\overline{e_o(n)\eta(n-i)} = 0, \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

relație ce reprezintă corolarul principiului ortogonalității, care afirmă că eroarea obținută în cazul optimal este decorelată și cu valorile prezentă și anterioare ale semnalului de ieșire.

Ecuatiile Wiener–Hopf

Vom deduce relațiile de calcul al ponderilor filtrului Wiener. Pornind de la principiul ortogonalității (6), și înlocuind expresia erorii (3) în cazul optimal, obținem:

$$\overline{\left(\gamma(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h_{k,o} \xi(n-k) \right) \xi(n-i)} = 0, \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

$$\underbrace{\overline{\gamma(n) \xi(n-i)}}_{R_{\xi\gamma}(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} h_{k,o} \underbrace{\overline{\xi(n-i) \xi(n-k)}}_{R_{\xi}(i-k)} \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Prin identificarea mediilor din ecuația de mai sus cu valorile funcției de autocorelație a semnalului de intrare R_{ξ} , respectiv a funcției de intercorelație dintre semnalul de intrare și cel dorit la ieșirea filtrului $R_{\xi\gamma}$, obținem relația căutată:

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_{k,o} R_{\xi}(i-k) = R_{\xi\gamma}(i), \quad \forall i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Observații I

- ▶ Ecuatiile (11) poartă numele de ecuațiile Wiener–Hopf și reprezintă un sistem liniar de o infinitate de ecuații cu o infinitate de necunoscute, care permite calculul ponderilor optimale $h_{k,o}$ în funcție de autocorelația semnalului de intrare și de intercorelația dintre semnalul de intrare și cel dorit la ieșirea filtrului (presupuse cunoscute).
- ▶ **Important:** soluția sistemului de ecuații Wiener–Hopf poate fi scrisă în domeniul spectral, observând că termenul stâng al relației (11) reprezintă convoluția în timp discret dintre funcția de autocorelație a semnalului de intrare și secvența $\{h_{k,o}\}_{k \in \mathbb{N}}$ a ponderilor filtrului Wiener
- ▶ relația (11) poate fi scrisă în domeniul spectral sub forma:

$$q_{\xi}(\omega) H_o(\omega) = q_{\xi\gamma}(\omega), \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi] \quad (12)$$

Observații II

- unde $H_o(\omega)$ este funcția de transfer a filtrului optimal, adică transformata Fourier în timp discret a secvenței de coeficienți $h_{k,o}$:

$$H_o(\omega) = \mathcal{F}\{h_{k,o}\}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{k,o} e^{-j\omega k} \quad (13)$$

- Ecuația (12) permite calculul funcției de transfer a filtrului optimal ca:

$$H_o(\omega) = \frac{q_{\xi\gamma}(\omega)}{q_{\xi}(\omega)} \quad (14)$$

Ecuațiile Wiener–Hopf pentru filtru de tip FIR I

Considerând numărul de coeficienți ai filtrului finit, adică:

$$h_k = 0 \quad \forall k = M, M+1, M+2, \dots \quad (15)$$

relația dintre ieșire și intrarea filtrului este dată de:

$$\eta(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h_k \xi(n-k) \quad (16)$$

Structura filtrului Wiener de tip FIR, care implementează relația (16) este prezentată în Figura 2.

Ecuatiile Wiener-Hopf pentru filtru de tip FIR II

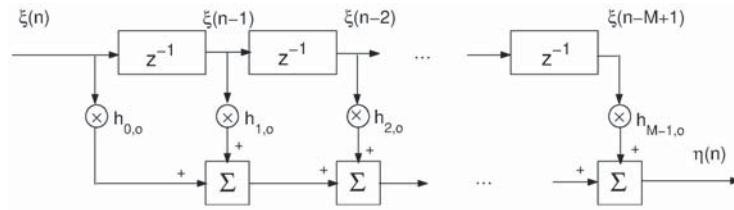


Figura 2: Schema bloc a unui filtru optimal cu număr finit de coeficienți (filtru de tip FIR).

În acest caz particular, sistemul de ecuații Wiener-Hopf (11) devine:

$$\sum_{k=0}^{M-1} h_{k,o} R_{\xi}(i-k) = R_{\xi\gamma}(i), \quad \forall i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

Ecuatiile Wiener-Hopf pentru filtru de tip FIR III

Scriind relațiile de mai sus pentru $i = 0, 1, \dots, M-1$, obținem următorul sistem de M ecuații cu M necunoscute, a cărui soluție vor fi ponderile filtrului optimal $h_{k,o}$:

$$\begin{aligned} h_{0,o} R_{\xi}(0) + h_{1,o} R_{\xi}(-1) + \dots + h_{M-1,o} R_{\xi}(-M+1) &= R_{\xi\gamma}(0) \\ h_{0,o} R_{\xi}(1) + h_{1,o} R_{\xi}(0) + \dots + h_{M-1,o} R_{\xi}(-M+2) &= R_{\xi\gamma}(1) \\ \dots & \\ h_{0,o} R_{\xi}(M-1) + h_{1,o} R_{\xi}(M-2) + \dots + h_{M-1,o} R_{\xi}(0) &= R_{\xi\gamma}(M-1) \end{aligned} \quad (18)$$

Ținând cont de faptul că funcția de autocorelație R_{ξ} este pară, sistemul (18) poate fi scris sub formă matricială ca:

$$\mathbf{h}_o = \mathbf{R}_{\xi}^{-1} \mathbf{r}_{\xi\gamma} \quad (19)$$

Forma matricială

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_{\xi}(0) & R_{\xi}(1) & \cdots & R_{\xi}(M-1) \\ R_{\xi}(1) & R_{\xi}(0) & \cdots & R_{\xi}(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{\xi}(M-1) & R_{\xi}(M-2) & \cdots & R_{\xi}(0) \end{bmatrix}}_{R_{\xi}} \begin{bmatrix} h_{0,o} \\ h_{1,o} \\ \vdots \\ h_{M-1,o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\xi\gamma}(0) \\ R_{\xi\gamma}(1) \\ \vdots \\ R_{\xi\gamma}(M-1) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Notând cu \mathbf{h}_o vectorul coloană al ponderilor optimale :

$$\mathbf{h}_o \stackrel{\text{not}}{=} \begin{bmatrix} h_{0,o} \\ h_{1,o} \\ \vdots \\ h_{M-1,o} \end{bmatrix} \quad (21)$$

și cu $\mathbf{r}_{\xi\gamma}$ vectorul ce conține valorile funcției de intercorelație dintre semnalul de intrare și cel dorit la ieșire:

$$\mathbf{r}_{\xi\gamma} \stackrel{\text{not}}{=} \begin{bmatrix} R_{\xi\gamma}(0) \\ R_{\xi\gamma}(1) \\ \vdots \\ R_{\xi\gamma}(M-1) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Aplicații ale filtrării optimale: atenuarea zgomotului I

Presupunem că semnalul de intrare $\xi(n)$ reprezintă versiunea perturbată cu zgomot aditiv $\nu(n)$ a unui semnal de interes $\zeta(n)$

$$\xi(n) = \zeta(n) + \nu(n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Dorim ca ieșirea filtrului să aproximeze cât mai bine semnalul util:

$$\gamma(n) \equiv \zeta(n) \quad (24)$$

Presupunem că semnalul $\nu(n)$ reprezintă un zgomot alb, independent de semnalul util, de unde rezultă că funcția de autocorelație a semnalului de intrare este:

$$\begin{aligned} R_{\xi}(k) &= \overline{\xi(n)\xi(n+k)} = \overline{(\zeta(n) + \nu(n))(\zeta(n+k) + \nu(n+k))} \\ &= \underbrace{\overline{\zeta(n)\zeta(n+k)}}_{R_{\zeta}(k)} + \underbrace{\overline{\zeta(n)\nu(n+k)}}_0 + \underbrace{\overline{\zeta(n+k)\nu(n)}}_0 + \underbrace{\overline{\nu(n)\nu(n+k)}}_{R_{\nu}(k)} \\ &= R_{\zeta}(k) + R_{\nu}(k) \end{aligned} \quad (25)$$

Aplicații ale filtrării optimale: atenuarea zgomotului II

Am folosit faptul că procesele ζ și ν sunt independente, ceea ce face ca $\overline{\zeta(n_1)\nu(n_2)} = \underbrace{\overline{\zeta(n_1)}\overline{\nu(n_2)}}_0 = 0$.

În plus, intercorelația dintre ξ și γ se scrie:

$$\begin{aligned} R_{\xi\gamma}(i) &= \overline{\xi(n)\gamma(n+i)} = \overline{(\zeta(n) + \nu(n))\zeta(n+i)} \\ &= \underbrace{\overline{\zeta(n)\zeta(n+i)}}_{R_\zeta(i)} + \underbrace{\overline{\nu(n)\zeta(n+i)}}_0 = R_\zeta(i) \end{aligned} \quad (26)$$

de unde rezultă că vectorul $\mathbf{r}_{\xi\gamma}$ este prima coloană a matricii de autocorelație a semnalului util \mathbf{R}_ζ :

$$\mathbf{r}_{\xi\gamma} = \begin{bmatrix} R_\zeta(0) \\ R_\zeta(1) \\ \vdots \\ R_\zeta(M-1) \end{bmatrix} \stackrel{\text{not}}{=} \mathbf{r}_\zeta \quad (27)$$

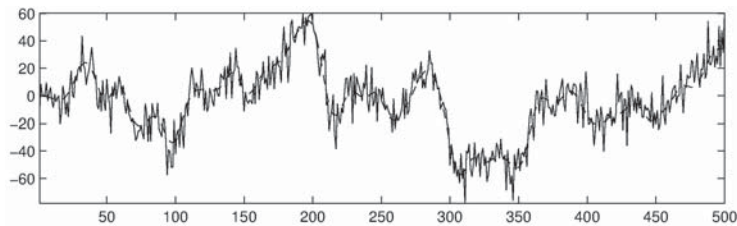
Aplicații ale filtrării optimale: atenuarea zgomotului III

Ținând cont de autocorelația zgomotului alb, rezultă că matricea de autocorelație a zgomotului este diagonală: $\mathbf{R}_\nu = \sigma_\nu^2 \mathbf{I}_N$.

Prin particularizarea relației (19) pentru datele deduse mai sus, rezultă forma finală a coeficienților filtrului Wiener optimal pentru atenuarea zgomotului:

$$\mathbf{h}_o = (\mathbf{R}_\zeta + \sigma_\nu^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{r}_\zeta \quad (28)$$

În Figura 3 este prezentat un exemplu de filtrare de zgomot cu un filtru Wiener.



Aplicații ale filtrării optimale: atenuarea zgomotului IV

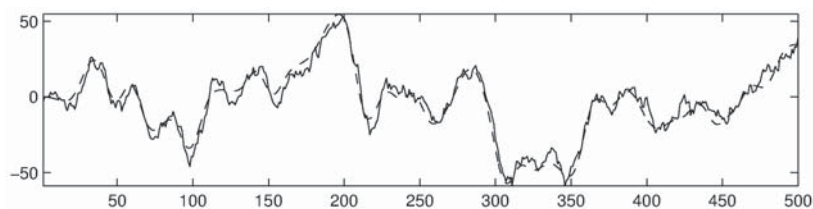


Figura 3: Exemplu de atenuare de zgomot cu un filtru optimal: în figura de sus, semnalul original (cu linie întreruptă) și cel perturbat cu zgomot alb (cu linie continuă). În figura de jos, semnalul original (cu linie întreruptă) și semnalul rezultat prin filtrarea cu un filtru Wiener cu 20 de coeficienți (cu linie continuă).

Aplicații: predicția I

Scopul predicției este ca la fiecare moment de timp n să se estimeze valoarea următoare a semnalului de intrare. Considerând semnalul de intrare $\xi(n)$, alegem semnalul de ieșire dorit al filtrului Wiener predictor ca fiind:

$$\gamma(n) \equiv \xi(n+1) \quad (29)$$

Astfel, intercorelația dintre semnalul de intrare și cel dorit este:

$$R_{\xi\gamma}(i) = \overline{\xi(n)\gamma(n+i)} = \overline{\xi(n)\xi(n+i+1)} = R_{\xi}(i+1) \quad (30)$$

ceea ce face ca vectorul $\mathbf{r}_{\xi\gamma}$ din (22) să fie:

$$\mathbf{r}_{\xi\gamma} = \begin{bmatrix} R_{\xi}(1) \\ R_{\xi}(2) \\ \vdots \\ R_{\xi}(M) \end{bmatrix} \stackrel{\text{not}}{=} \mathbf{r}_{\xi} \quad (31)$$

Aplicații: predicția II

Vectorul ponderilor optimale ale filtrului Wiener predictor este astfel dat de:

$$\mathbf{h}_o = \mathbf{R}_\xi^{-1} \mathbf{r}_\xi \quad (32)$$

Observații referitoare la relația (32):

- ▶ problema predicției unui semnal se pune numai în cazul în care între eșantioanele semnalului respectiv există o oarecare corelație
- ▶ dacă $\xi(n)$ este complet decorelat, adică $R_\xi(i) = 0$ pentru $i \neq 0$, atunci vectorul \mathbf{r}_ξ din (31) este nul și la fel va fi și vectorul ponderilor optimale \mathbf{h}_o și, implicit, și ieșirea filtrului predictor!
- ▶ se poate arăta că eroarea de predicție este cu atât mai mică cu cât între eșantioanele semnalului există o corelație mai puternică.

Exemplu predicție

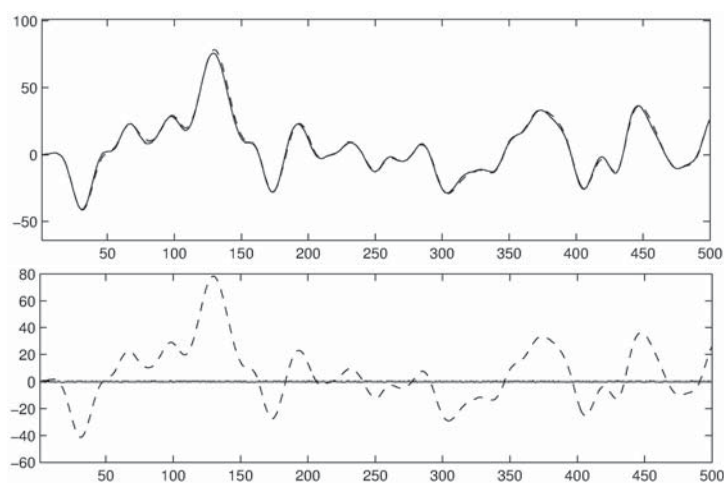


Figura 4: Sus - semnalul original (linie întreruptă) și cel “prezis” de un filtru Wiener cu 20 de coeficienți (linie continuă). Jos - semnalul original (linie întreruptă) și eroarea de predicție (cu linie continuă).

Utilizare

- ▶ Predicția este utilizată pentru compresia semnalelor (e.g. semnalul vocal se codează foarte bine prin predicție liniară)
- ▶ Dacă predicția este *bună* (i.e. valoarea *prezisă* aproximează fidel valoarea reală a semnalului), atunci pe canal se poate transmite numai diferența dintre cele două valori, care, fiind în medie mică (vezi Figura 4), poate fi codată pe un număr redus de biți
- ▶ Având în vedere că regula de predicție este cunoscută, partea predictibilă a semnalului poate fi reprodusă exact la recepție
- ▶ Din aceasta, prin adăugarea erorii transmise pe canal, poate fi reconstruit fiecare eșantion al semnalului
- ▶ Astfel, se poate face o transmisiune cu compresie a semnalului, practic fără pierderi, pe baza redundanței (corelației) existente în acesta.

Schema bloc a unui lanț de transmisiune cu predicție

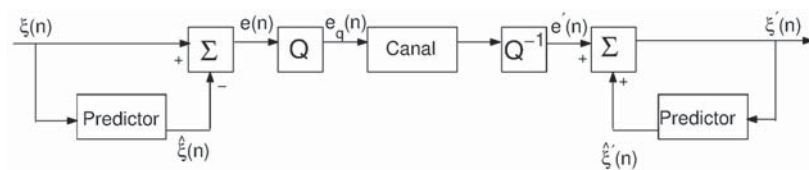


Figura 5: Schema bloc a unui lanț de transmisiune cu predicție.

Blocul \mathbf{Q} este bloc de codare a erorii: eroarea este cuantizată, apoi codată cu un cod entropic (Huffman) ce exploatează distribuția puternic neuniformă a valorilor acesteia: valorile mici au probabilitate de apariție mare, în timp ce valorile mari apar rar. Blocul \mathbf{Q}^{-1} reprezintă bloc de decodare a erorii. Singurele pierderi (diferența dintre $e(n)$ și $e'(n)$) sunt cele datorate operației de cuantizare).