

2.4 METODE DE FRECVENȚĂ ÎN ANALIZA SISTEMELOR AUTOMATE

2.4.1 Caracteristici de frecvență. Avantajele metodelor de frecvență

Comportarea la frecvență prezintă un deosebit interes pentru analiza și sinteza sistemelor automate liniare.

Metodele de analiză descrise în subcapitolele 2.2 și 2.3 necesită fie rezolvarea ecuațiilor caracteristice aferente ecuațiilor diferențiale care descriu funcționarea sistemelor, fie obținerea transformatei inverse Laplace a expresiei $Y(s)$ (ceea ce presupune cunoașterea rădăcinilor numitorului acestei expresii și deci ale numitorului funcției de transfer, deoarece $Y(s) = G_0(s)U(s)$, deci tot cunoașterea rădăcinilor ecuației caracteristice (v. §2.3.2)), fie, în unele cazuri, în care apare funcția pondere, obținerea din nou a transformatei inverse a funcției de transfer (v. §2.3.5).

Pentru sisteme descrise de ecuații diferențiale până la ordinul 3 sau 4, rezolvarea ecuațiilor caracteristice nu implică dificultăți mari; în cazul sistemelor automate descrise de ecuații diferențiale de ordine mai mari, rezolvarea ecuației caracteristice presupune, efectuarea unor calcule laborioase.

Datorită considerentelor menționate, în teoria sistemelor de reglare automată s-au dezvoltat larg metodele de frecvență, utile atât în analiza, cât și în proiectarea acestora [1, 5, 7, 13, 15÷18, 21, 30, 31, 36].

În domeniul analizei, metodele de frecvență au avantajul că permit să se obțină (cu o anumită aproximație) răspunsul unui sistem la un semnal de intrare treaptă (și deci permit să se aprecieze performanțele sistemului) fără a fi necesară rezolvarea ecuației caracteristice aferente ecuației diferențiale care descrie matematic funcționarea sistemului. De asemenea, în aceleași condiții (fără rezolvarea ecuației caracteristice) metodele de frecvență permit aprecierea stabilității și a gradului de stabilitate al sistemului. Totodată, posibilitatea de a trece direct de la analiză la proiectare (la îmbunătățirea performanțelor, atunci când analiza arată că aceste performanțe nu îndeplinesc condițiile impuse) face ca metodele de frecvență să-și păstreze și în prezent actualitatea, chiar în condițiile posibilităților de calcul ale sistemelor automate cu ajutorul calculatoarelor electronice.

Analiza prin frecvență a sistemelor automate reprezintă studiul regimului permanent (staționar) armonic al variației $y(t)$, de la ieșirea sistemului, pentru o variație $u(t)$ la intrare, armonică de pulsație ω , cu amplitudine constantă.

Fie sistemul automat reprezentat în figura 2.45. La intrare se aplică o variație armonică, de pulsație ω și amplitudine constantă:

$$u(t) = Ae^{j\omega t}, \quad (2.386)$$

sau:

$$U(s) = \frac{A}{s - j\omega}. \quad (2.387)$$

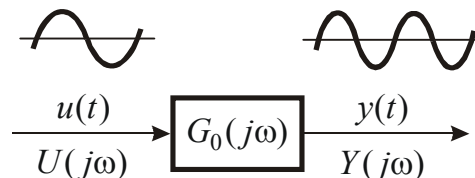


Fig.2.45 Schema generală a unui sistem închis, reprezentat în domeniul frecvențelor.

Rezultă că, în conformitate cu expresia (2.259), se poate scrie:

$$Y(s) = G_0(s)U(s) = G_0(s) \frac{A}{s - j\omega} = \frac{K(s)}{H(s)} \frac{A}{s - j\omega}. \quad (2.388)$$

Se presupune că $H(s)$ are rădăcini simple, plasate în semiplanul stâng al planului complex:

$$\operatorname{Re}[s_{1,2,\dots,n}] = p_k < 0, \quad \text{unde } k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.389)$$

deci, $G_0(s) = K(s)/H(s)$ nu are poli în origine sau în semiplanul drept al planului complex.

Prin aplicarea regulii lui Heaviside (v. relația (2.254)) se obține:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t) = \frac{K(j\omega)}{H(j\omega)} A e^{j\omega t} + A \sum_{k=1}^n \frac{K(p_k) e^{-p_k t}}{H'(p_k)(p_k - j\omega)}. \quad (2.390)$$

Primul termen din relația (2.390) reprezintă regimul permanent (staționar):

$$y_{st}(t) = G_0(j\omega)u(t), \quad (2.391)$$

unde $y_{st}(t)$, $u(t)$ sunt variații armonice sinusoidale, iar $G_0(j\omega) \stackrel{\Delta}{=} K(j\omega)/H(j\omega)$ reprezintă funcția de transfer a sistemului automat închis, obținută din $G_0(s) = K(s)/H(s)$ prin înlocuirea variabilei s cu $j\omega$.

Al doilea termen din relația (2.390) reprezintă regimul liber (tranzitoriu) care se anulează pentru $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[A \sum_{k=1}^n \frac{K(p_k) e^{-p_k t}}{H'(p_k)(p_k - j\omega)} \right] = 0. \quad (2.392)$$

Cunoașterea regimului permanent (staționar) armonic pentru toate valorile pulsației ω , respectiv cunoașterea funcției $G_0(j\omega)$ pentru $0 < \omega < \infty$, permite aflarea variației complete $y(t)$ a răspunsului sistemului automat.

Dar, mărimile sinusoidale reprezintă un caz particular al mărimilor periodice. Orice funcție periodică $f(t)$ de perioadă T , care satisface condițiile lui Dirichlet (este mărginită, având un număr finit de discontinuități și extreme în intervalul unei perioade) poate fi descompusă într-o serie Fourier infinită de sinusoidale cu frecvențele multipli ai frecvenței $f = 1/T$ a funcției $f(t)$. Astfel:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi}{T} nt + b_n \sin \frac{2\pi}{T} nt \right). \quad (2.393)$$

Componenta de pulsație $n\omega$ din această serie se numește armonică de ordinul n a funcției periodice.

Coefficienții seriei Fourier (2.393) se pot determina analitic:

$$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt, \quad (2.394)$$

reprezentând valoarea medie a funcției $f(t)$, deoarece media funcțiilor sinusoidale pe un număr întreg de perioade este nulă:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos \frac{2\pi}{T} n t dt \quad (2.395)$$

și:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin \frac{2\pi}{T} n t dt. \quad (2.396)$$

Coeficienții seriei Fourier se pot determina și grafic, când $f(t)$ este cunoscută sub formă grafică.

În continuare, se poate scrie:

$$a_n \cos \frac{2\pi}{T} n t + b_n \sin \frac{2\pi}{T} n t = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) e^{j \frac{2\pi}{T} n t} + \frac{1}{2} (a_n + j b_n) e^{-j \frac{2\pi}{T} n t}. \quad (2.397)$$

Se notează:

$$\begin{aligned} (a_n - j b_n) &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} n t} dt \triangleq \frac{2}{T} \Im(j \frac{2\pi}{T} n), \\ (a_n + j b_n) &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{+j \frac{2\pi}{T} n t} dt \triangleq \frac{2}{T} \Im(-j \frac{2\pi}{T} n), \end{aligned} \quad (2.398)$$

unde funcțiile \Im au semnificația de operatori.

Înlocuind expresiile (2.398) în seria (2.393), se obține:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{T} \sum_1^{\infty} \left[\Im(j \frac{2\pi}{T} n) e^{+j \frac{2\pi}{T} n t} + \Im(-j \frac{2\pi}{T} n) e^{-j \frac{2\pi}{T} n t} \right]. \quad (2.399)$$

Datorită simetriei în raport cu $n = 0$ și considerând:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} 0 t} dt = \frac{1}{T} \Im(j \frac{2\pi}{T} 0) \Big|_{n=0}, \quad (2.400)$$

seria (2.399) se scrie:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \Im(j \frac{2\pi}{T} n) e^{+j \frac{2\pi}{T} n t}. \quad (2.401)$$

Relația (2.401) reprezintă forma exponențială a seriei Fourier. Se poate spune că semnalele periodice, dar nesinusoidale, prezintă un spectru discontinuu (discret), dat de coeficienții seriei Fourier. Deoarece un semnal oarecare poate fi considerat un semnal pe-

riodic, cu perioadă $T \rightarrow \infty$, spectrul acestuia va fi un spectru limită al unui spectru discret; în acest caz seria Fourier tinde către o integrală Fourier. Într-adevăr, pentru $T \rightarrow \infty$, se obține:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Big|_{T \rightarrow \infty} \rightarrow d\omega, \quad (2.402)$$

iar:

$$n \frac{2\pi}{T} = n\omega_0 \Big|_{T \rightarrow \infty} n d\omega = \omega,$$

adică, toate valorile lui ω cuprinse între $-\infty$ și $+\infty$. Rezultă transformarea inversă Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \mathfrak{I}^{-1}[F(j\omega)]. \quad (2.403)$$

Transformarea directă Fourier este:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \mathfrak{I}[f(t)]. \quad (2.404)$$

Transformarea Fourier reprezintă, așa cum se remarcă, un caz particular al transformărilor bilaterale Laplace (cu limite simetrice); ea se obține făcând, în cea din urmă, schimbarea de variabilă $s = j\omega$. Astfel :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \xrightarrow{(s=j\omega)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(j\omega) \quad (2.405)$$

și:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \xrightarrow{(s=j\omega)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = f(t). \quad (2.406)$$

Condițiile de existență ale transformării Fourier sunt mai severe decât cele pentru transformarea Laplace. Astfel, pentru a se efectua transformarea directă Fourier (deci, pentru a se putea efectua integrala Fourier (v. relația (2.404)) trebuie ca funcția $f(t)$ să fie convergentă, adică să nu mai depindă de timp, după o anumită valoare a acestuia. În aceste condiții, funcțiile tip treaptă, rampă, etc. nu admit transformate Fourier; pentru a se utiliza și în aceste cazuri transformarea Fourier, se consideră o variație tip treaptă, rampă, etc. într-un interval finit de timp, ceea ce conferă acestor funcții caracterul de convergență și face posibilă aplicarea transformării integrale Fourier (adică la determinarea lui $y(t)$ nu se consideră regimul tranzitoriu până la $t \rightarrow \infty$, ci numai în intervalul care interesează, astfel ca funcția să îndeplinească condițiile lui Dirichlet).

Relațiile (2.403) și (2.404) permit deci, determinarea comportării unui sistem în domeniul frecvențelor, cunoscând comportarea lui în domeniul timpului și invers.

În concluzie se poate nota că reprezentarea în frecvență a unui sistem se obține prin aplicarea la intrarea sistemului a unui semnal sinusoidal de frecvență $f = \omega/2\pi$, $u =$

$= A \sin \omega t$, care în cazul sistemelor liniare determină la ieșirea acestora un răspuns sinusoidal de aceeași frecvență, dar având amplitudine și fază diferite față de semnalul de la intrare; pentru aprecierea răspunsului în frecvență al unui sistem definit prin funcția de transfer $G(s)$, se înlocuiește $s = j\omega$ în expresia funcției de transfer și pentru diverse valori ale pulsației ω se determină modulul și argumentul funcției $G(j\omega)$.

Pentru analiza și sinteza sistemelor automate în domeniul frecvențelor sunt utilizate mai multe caracteristici de frecvență, și anume: caracteristica amplitudine-fază sau locul de transfer, caracteristicile amplitudine-pulsație și fază-pulsație, caracteristica reală de frecvență și imaginară de frecvență.

2.4.2 Caracteristica amplitudine-fază (locul de transfer)

Cea mai importantă caracteristică de frecvență pentru un sistem automat, din care se pot obține celelalte caracteristici, este *caracteristica amplitudine-fază* sau *locul geometric de transfer*, reprezentată în planul complex.

Pentru un element (respectiv sistem) oarecare, a cărui comportare este descrisă de o ecuație diferențială de forma:

$$\begin{aligned} c_0 \frac{d^p y}{dt^p} + c_1 \frac{d^{p-1} y}{dt^{p-1}} + \dots + c_{p-1} \frac{dy}{dt} + c_p y = \\ = d_0 \frac{d^v u}{dt^v} + d_1 \frac{d^{v-1} u}{dt^{v-1}} + \dots + d_{v-1} \frac{du}{dt} + d_v u, \end{aligned} \quad (2.407)$$

aplicarea transformării Laplace, în condiții inițiale nule, conduce la:

$$(c_0 s^p + c_1 s^{p-1} + \dots + c_{p-1} s + c_p) Y(s) = (d_0 s^v + d_1 s^{v-1} + \dots + d_{v-1} s + d_v) U(s), \quad (2.408)$$

respectiv, la o funcție de transfer:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{d_0 s^v + d_1 s^{v-1} + \dots + d_{v-1} s + d_v}{c_0 s^p + c_1 s^{p-1} + \dots + c_{p-1} s + c_p}. \quad (2.409)$$

Caracteristica amplitudine-fază se obține, pe cale analitică, înlocuind în funcția de transfer a elementului (sistemului):

$$s = j\omega \quad (2.410)$$

și dând pulsației ω valori între zero și infinit; pentru fiecare valoare a pulsației ω se va obține un vector complex $G(j\omega)$, al cărui vârf determină un punct pe planul complex în dreptul căruia se notează valoarea respectivă ω . Locul geometric al tuturor punctelor obținute în acest mod pentru valori ω între zero și infinit, reprezintă caracteristica amplitudine-fază gradată în valori ale pulsațiilor (v. fig. 2.46 – de fapt ramura pozitivă a acestei caracteristici; pentru valori ω între minus infinit și zero se obține ramura negativă a caracteristicii, simetrică față de cea pozitivă, axa de simetrie fiind axa reală). Deci, locul de transfer sau caracteristica amplitudine-fază reprezintă hodograful vectorului complex $G(j\omega)$ în planul complex pentru valori ale lui ω , $-\infty < \omega < +\infty$.

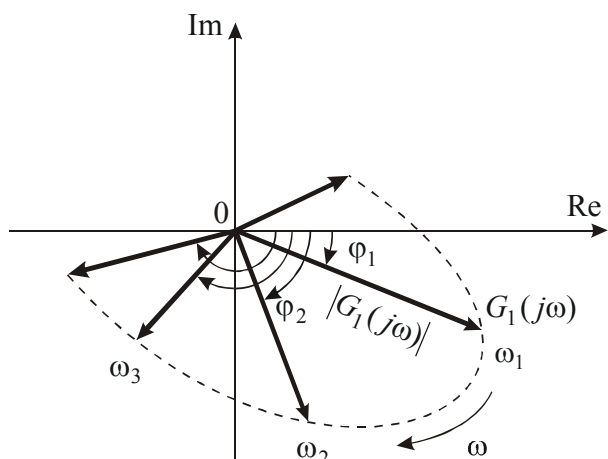


Fig. 2.46 Reprezentarea în planul complex a vectorului $G(j\omega)$.

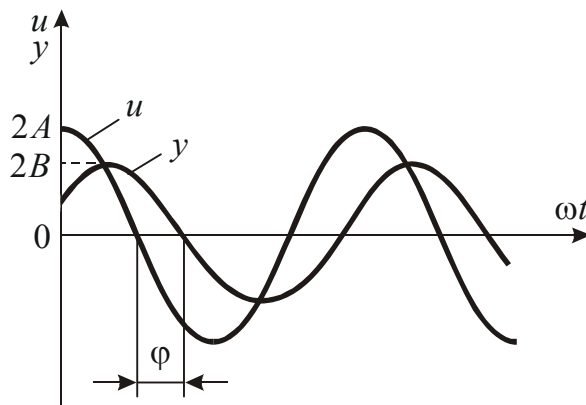


Fig. 2.47 Răspunsul unui sistem la intrarea căruia se aplică un semnal cosinusoidal.

Răspunsul în frecvență fiind o funcție de variabilă complexă, se poate exprima în funcție de modul, defazaj, partea reală și imaginară:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = |G(j\omega)|[\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)] = \\ &= \text{Re}[G(j\omega)] + j \text{Im}[G(j\omega)]. \end{aligned} \quad (2.411)$$

Pentru trasarea experimentală, prin puncte, a ramurii pozitive, la intrarea unui element (sistem) se aplică un semnal sinusoidal, sau cosinusoidal, de amplitudine constantă și de o anumită pulsație, de exemplu (v. fig. 2.47):

$$u = 2A \cos \omega t = 2A \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = Ae^{j\omega t} + Ae^{-j\omega t}, \quad (2.412)$$

unde $2A$ este amplitudinea și ω este pulsația.

În regim staționar, deci după anularea componentei tranzitorii răspunsul va fi de asemenea o cosinusoidă de aceeași pulsație ω , dar de altă amplitudine și defazată față de semnalul de intrare cu un unghi φ :

$$y = 2B \cos(\omega t + \varphi) = 2B \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} = Be^{j(\omega t + \varphi)} + Be^{-j(\omega t + \varphi)}, \quad (2.413)$$

unde $2B$ este amplitudinea răspunsului y .

Din relațiile (2.412) și (2.413) se constată că semnalele u și y pot fi considerate ca suma a două componente; elementul (sistemul) fiind liniar, deci aplicându-se principiul suprapunerii efectelor, este indicat să se studieze acțiunea fiecărei componente în parte, întrucât prin aceasta calculele sunt mai simplificate.

Notând:

$$u_1 = Ae^{j\omega t}, \quad u_2 = Ae^{-j\omega t}, \quad (2.414, 2.415)$$

$$y_1 = Be^{j(\omega t + \varphi)} = Be^{j\omega t} e^{j\varphi}, \quad y_2 = Be^{-j(\omega t + \varphi)} = Be^{-j\omega t} e^{-j\varphi}, \quad (2.416, 2.417)$$

se consideră componenta u_1 aplicată la intrare și componenta y_1 ca răspuns la ieșire.

Pentru a introduce aceste componente și derivatele lor în expresia (2.407) se determină aceste derivate:

$$\begin{aligned}
 \frac{du_1}{dt} &= (j\omega) A e^{j\omega t}, \\
 &\vdots \\
 \frac{d^v u_1}{dt^v} &= (j\omega)^v A e^{j\omega t}, \\
 \frac{dy_1}{dt} &= B e^{j\varphi} (j\omega) e^{j\omega t}, \\
 &\vdots \\
 \frac{d^p y_1}{dt^p} &= B e^{j\varphi} (j\omega)^p e^{j\omega t}.
 \end{aligned} \tag{2.418}$$

Înlocuind expresiile (2.418) în relația (2.407) și ordonând termenii se obține:

$$\begin{aligned}
 B e^{j\varphi} e^{j\omega t} [c_0 (j\omega)^p + c_1 (j\omega)^{p-1} + \dots + c_{p-1} (j\omega) + c_p] = \\
 = A e^{j\omega t} [d_0 (j\omega)^v + d_1 (j\omega)^{v-1} + \dots + d_{v-1} (j\omega) + d_v],
 \end{aligned} \tag{2.419}$$

respectiv, având în vedere și relația (2.409):

$$\frac{B}{A} e^{j\varphi} = \frac{d_0 (j\omega)^v + d_1 (j\omega)^{v-1} + \dots + d_{v-1} (j\omega) + d_v}{c_0 (j\omega)^p + c_1 (j\omega)^{p-1} + \dots + c_{p-1} (j\omega) + c_p} = G(j\omega). \tag{2.420}$$

Expresia (2.420) arată că vectorul complex $G(j\omega)$ are ca modul raportul amplitudinilor semnalelor de ieșire și intrare, iar ca argument defazajul acestor semnale, pentru diferite pulsații ω , modulul și argumentul vectorului complex $G(j\omega)$ se vor modifica, modulul și argumentul fiind deci funcții de pulsație ω :

$$\begin{aligned}
 |G(j\omega)| &= \frac{B}{A} = f_1(\omega), \\
 \arg G(j\omega) &= \varphi = f_2(\omega).
 \end{aligned} \tag{2.421}$$

Ridicarea experimentală, prin puncte, a ramurii pozitive a caracteristicii amplitudine-fază $G(j\omega)$ se face deci modificând succesiv pulsația ω a semnalului aplicat u (de preferință menținând valoarea amplitudinii $2A$) și măsurând, după stabilirea regimului staționar, amplitudinea $2B$ a semnalului de ieșire, precum și defazajul φ între semnale; se construiește apoi, pentru fiecare valoare ω , vectorul complex de modul $2B/2A$ și de argument φ , punctele definite de vârfurile acestor vectori complecși (când ω variază de la zero la infinit) reprezentând în planul complex ramura pozitivă a caracteristicii amplitudine-fază.

Dacă în ecuația diferențială (2.407) sunt introduse semnalele u_2 , y_2 (din relațiile (2.415) și (2.417)) și derivatele lor, se obține ramura negativă a caracteristicii amplitudine-fază, pentru ω variind între minus infinit și zero. Evident, ramura negativă nu poate fi

trasată experimental; ea poate fi construită analitic, prin puncte, introducând valori negative ale pulsației ω în expresia (2.420).

În practică, trasarea ramurii negative se face luând simetrica ramurii pozitive în raport cu axa reală; această simetrie rezultă imediat punând în evidență partea reală și partea imaginară a vectorului complex $G(j\omega)$ (v. relația (2.411)):

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = |G(j\omega)|[\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)] = \\ &= \operatorname{Re} G(j\omega) + j \operatorname{Im} G(j\omega) = \mu(\omega) + j\nu(\omega), \end{aligned} \quad (2.422)$$

având în vedere că:

$$\mu(-\omega) = \mu(\omega), \quad (2.423)$$

și:

$$\nu(-\omega) = -\nu(\omega).$$

Pentru elementele frecvent întâlnite în automatică, pot fi ușor reprezentate caracteristicile amplitudine-fază (locurile de transfer); aceste caracteristici se găsesc în numeroase lucrări din literatura de specialitate [7,15,16,31]. Pentru a ilustra modul de trasare a locului de transfer se consideră câteva elemente tip.

a) Elementul proporțional

Funcția de transfer a elementului proporțional este dată de relația:

$$G(s) = K.$$

Se înlocuiește $s = j\omega$ și se obține:

$$G(j\omega) = K, \quad |G(j\omega)| = K, \quad \varphi(\omega) = 0. \quad (2.424)$$

Elementul proporțional nu introduce defazaj; locul de transfer este un segment de dreaptă (v. fig. 2.48,a).

b) Elementul integrator

Elementul integrator are funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{K}{s}.$$

Înlocuind pe $s = j\omega$, se obține:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}, \quad |G(j\omega)| = \frac{K}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}. \quad (2.425)$$

Pentru $\omega = 0$, $\omega = 1$, $\omega = \infty$, se obține:

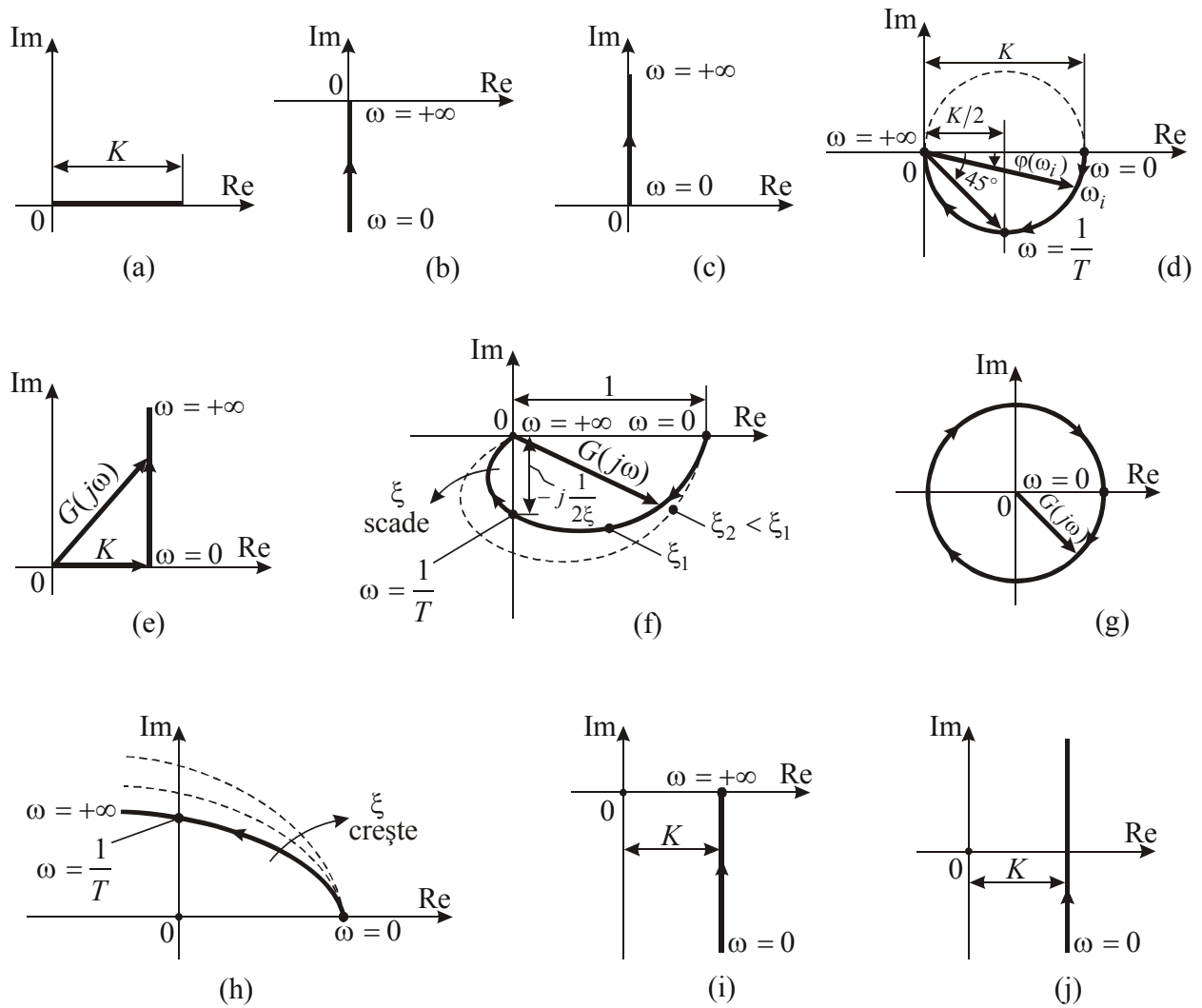


Fig.2.48 Caracteristicile amplitudine-fază pentru câteva elemente frecvență întâlnite în automatică: elementul proporțional (a); elementul integrator (b); elementul derivativ (c); elementul de întârziere de ordinul întâi (d); elementul de anticipare de ordinul întâi (e); elementul de întârziere de ordinul doi (f); elementul cu timp mort (g); elementul de anticipare de ordinul doi (h); elementul proporțional-integral (i); elementul proporțional-integral-derivativ (j).

$$G(j0) = |G(j0)|e^{j\varphi(0)} = \frac{K}{0}e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\infty, \quad (2.426)$$

$$G(j1) = |G(j1)|e^{j\varphi(1)} = Ke^{-j\frac{\pi}{2}} = -jK, \quad (2.427)$$

$$G(j\infty) = |G(j\infty)|e^{j\varphi(\infty)} = \frac{K}{\infty}e^{-j\frac{\pi}{2}} = 0. \quad (2.428)$$

În figura 2.48,b se prezintă locul de transfer pentru elementul integrator.

c) Elementul derivativ

Funcție de transfer a acestui element este dată de relația:

$$G(s) = Ks.$$

Înlocuind pe $s = j\omega$, se obține:

$$G(j\omega) = j\omega K, \quad |G(j\omega)| = \omega K, \quad \varphi(\omega) = \arctg(\omega) = \frac{\pi}{2}. \quad (2.429)$$

Pentru $\omega = 0$, $\omega = 1$, $\omega = \infty$, se obține:

$$G(j0) = |G(j0)|e^{j\varphi(0)} = |0K|e^{j\frac{\pi}{2}} = 0, \quad (2.430)$$

$$G(j1) = |G(j1)|e^{j\varphi(1)} = Ke^{j\frac{\pi}{2}} = jK, \quad (2.431)$$

$$G(j\infty) = |G(j\infty)|e^{j\varphi(\infty)} = |\infty K|e^{j\frac{\pi}{2}} = +j\infty. \quad (2.432)$$

În figura 2.48,c se prezintă locul de transfer pentru elementul derivativ.

d) Elementul de întârziere de ordinul I

Elementul de întârziere de ordinul I are funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}.$$

Se înlocuiește $s = j\omega$ și se scrie $G(j\omega)$ în formă polară:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega T + 1}, \quad |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg(-\omega T), \quad (2.433)$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} e^{j\arctg(-\omega T)}. \quad (2.434)$$

Pentru $\omega = 0$, $\omega = 1/T$ și $\omega = \infty$, se obține:

$$G(j0) = |G(j0)|e^{j\varphi(0)} = Ke^{j0} = K, \quad (2.435)$$

$$G\left(j\frac{1}{T}\right) = \left|G\left(j\frac{1}{T}\right)\right|e^{j\varphi\left(\frac{1}{T}\right)} = \frac{K}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{K}{2}(1 - j), \quad (2.436)$$

$$G(j\infty) = |G(j\infty)|e^{j\varphi(\infty)} = 0e^{-j\frac{\pi}{2}} = 0. \quad (2.437)$$

În figura 2.48,d se prezintă locul de transfer pentru un element de întârziere de ordinul I. Pentru frecvențe $-\infty \leq \omega < 0$, locul de transfer este imaginea în oglindă, în raport cu axa reală, a locului pentru frecvențe pozitive (v. fig. 2.48,d).

e) Elementul de anticipare de ordinul I

Funcția de transfer a acestui element este dată de relația:

$$G(s) = K(1 + sT).$$

Se înlocuiește $s = j\omega$ și se scrie $G(j\omega)$ în forma polară:

$$G(j\omega) = K(1 + j\omega T), |G(j\omega)| = K\sqrt{1 + \omega^2 T^2}, \varphi(\omega) = \arctg(\omega T). \quad (2.438)$$

Pentru $\omega = 0$ și $\omega = \infty$, se obține:

$$G(j0) = |G(j0)|e^{j\varphi(0)} = Ke^{j0} = K, \quad (2.439)$$

$$G(j\infty) = |G(j\infty)|e^{j\varphi(\infty)} = \infty e^{j\frac{\pi}{2}} = \infty. \quad (2.440)$$

Pentru elementul de anticipare de ordinul întâi locul de transfer are forma din figura 2.48,e.

f) Elementul de întârziere de ordinul II

Pentru acest element forma locului de transfer este dată în figura 2.48,f. Pentru trasarea acestui loc de transfer se pornește de la funcția de transfer a elementului:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

din care se obține expresia vectorului $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + \omega_n^2 + 2j\omega\xi\omega_n}, \quad (2.441)$$

sau:

$$G(j\omega) = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} - j \frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}. \quad (2.442)$$

Modulul acestui vector este:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \quad (2.443)$$

iar argumentul este:

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}. \quad (2.444)$$

În continuare, pentru diverse valori ale pulsației ω , se obțin expresiile corespunzătoare ale vectorului complex $G(j\omega)$ al cărui vârf parcurge locul de transfer (v. fig. 2.48, f).

În figura 2.48 mai sunt reprezentate și locurile de transfer ale următoarelor elemente: elementul cu timp mort (g), elementul de anticipare de ordinul doi (h), elementul proporțional-integral (i), elementul proporțional-integral-derivativ (j).

De asemenea în tabelul 2.6 sunt prezentate răspunsurile în frecvență pentru câteva elemente uzuale.

O deosebită importanță pentru analiza sistemelor automate prezintă *caracteristica amplitudine-fază a sistemului deschis*, (presupus cu reacție principală directă, ca în figura 2.39,b, în caz contrar folosindu-se metoda de echivalare din figura 2.40), obținută din funcția de transfer definită de (2.336):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{K(s)}{D(s)} = \frac{K_a}{s^\alpha} \frac{Q_m(s)}{P_n(s)} = \frac{K_a}{s^\alpha} \frac{q_0 s^m + q_1 s^{m-1} + \dots + q_{m-1} s + 1}{p_0 s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_{n-1} s + 1},$$

prin înlocuirea (2.410) rezultând:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{K_a}{(j\omega)^\alpha} \frac{Q_m(j\omega)}{P_n(j\omega)} = \\ &= \frac{K_a}{(j\omega)^\alpha} \frac{q_0 (j\omega)^m + q_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + q_{m-1} (j\omega) + 1}{p_0 (j\omega)^n + p_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + p_{n-1} (j\omega) + 1}. \end{aligned} \quad (2.445)$$

Trasarea acestei caracteristici permite, în conformitate cu criteriul lui Nyquist (v. §2.4.7), să se aprecieze imediat stabilitatea și gradul de stabilitate al sistemului. Aspectul caracteristicii depinde de valoarea α și de diferența $n - m$ dintre gradele polinoamelor $P_n(j\omega)$ și $Q_m(j\omega)$, respectiv dintre gradele polinoamelor $P_n(s)$ și $Q_m(s)$ din expresia (2.336).

Pentru trasarea locului de transfer se determină mai întâi asimptotele acestuia la frecvențe care tind spre zero și spre infinit. Pentru a se calcula asimptotele locului de transfer se va calcula limita expresiei (2.445) pentru $\omega \rightarrow 0$ și pentru $\omega \rightarrow \infty$.

Astfel, dacă sistemele sunt de tipul zero ($\alpha = 0$), deci:

$$G(j\omega) = K_a \frac{Q_m(j\omega)}{P_n(j\omega)}, \quad (2.446)$$

pentru $\omega = 0$ rezultă:

$$G(j0) = K_a, \quad (2.447)$$

având în vedere relațiile (2.337) și (2.338).

Pentru sistemele cu $\alpha = 0$, caracteristica amplitudine-fază începe de pe axa reală (v. fig. 2.49,a), în sensul că punctul corespunzător pulsației $\omega = 0$ se găsește pe axa reală.

Dacă $\alpha = 1$ (sistemele sunt de tipul unu), deci dacă:

$$G(j\omega) = \frac{K_a Q_m(j\omega)}{j\omega P_n(j\omega)}, \quad (2.448)$$

atunci la $\omega \rightarrow 0$ rezultă:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K_a}{j} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K_a}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad (2.449)$$

având în vedere relațiile (2.337), (2.338) și faptul că $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$.

Din expresia (2.449) rezultă că la $\omega \rightarrow 0$ modulul vectorului complex $G(j\omega)$ tinde către infinit, iar argumentul său tinde către $-\pi/2$, ca în figura 2.49,b.

În mod analog, pentru $\alpha = 2$ sau $\alpha = 3$ caracteristicile $G(j\omega)$ au în zona $\omega \rightarrow 0$ aspectele prezentate în figurile 2.49,c și 2.49,d; când $\omega \rightarrow 0$ argumentul vectorului complex $G(j\omega)$ tinde deci către valoarea:

$$-\frac{\pi}{2}\alpha. \quad (2.450)$$

Pentru diferite valori ale lui α , rezultatul trecerii la limită în expresia (2.445) pentru $\omega \rightarrow 0$, este prezentat în tabelul 2.7.

Pentru a calcula limita expresiei (2.445) pentru $\omega \rightarrow \infty$ se poate face observația că intervin în acest calcul numai termenii de cel mai mare grad din polinoamele $Q_m(j\omega)$ și $P_n(j\omega)$. Din această cauză expresia (2.445) poate fi pusă și sub forma:

$$G(j\omega) = \frac{K'_a Q'_m(j\omega)}{(j\omega)^\theta P'_n(j\omega)}, \quad (2.451)$$

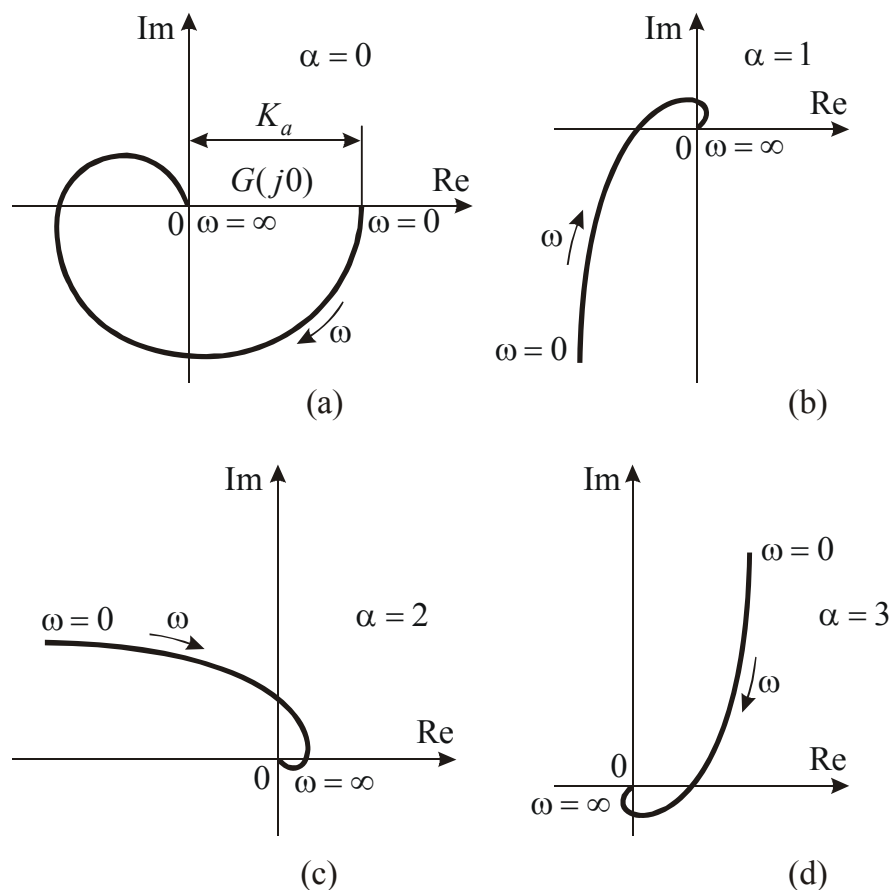
unde $\theta = \alpha + n - m$; $Q'_m(j\omega)$ și $P'_n(j\omega)$ sunt polinoamele obținute prin împărțirea cu $q_0(j\omega)^m$ și $p_0(j\omega)^n$ a polinoamelor $Q_m(j\omega)$ și $P_n(j\omega)$, iar:

$$K'_a = \frac{K_a q_0}{p_0}.$$

Pentru diferitele valori ale lui θ , rezultatul trecerii la limită în expresia (2.451), pentru $\omega \rightarrow \infty$, este prezentat în tabelul 2.7. De observat că pentru $\omega \rightarrow \infty$ modulul vectorului $G(j\omega)$ tinde spre zero dat fiind că sistemul are $m < n$ (sistem fizic realizabil):

$$|G(j\omega)| \rightarrow 0, \quad (2.452)$$

deci toate caracteristicile amplitudine-fază ale sistemelor în stare deschisă se termină în origine, având aspectele din figura 2.49. De asemenea rezultă că argumentul vectorului complex $G(j\omega)$ va tinde către:


 Fig.2.49 Caracteristicile amplitudine-fază pentru câteva tipuri de sisteme: $\alpha = 0$ (a); $\alpha = 1$ (b); $\alpha = 2$ (c); $\alpha = 3$ (d).

$$-\frac{\pi}{2}\theta = -\frac{\pi}{2}(\alpha + n - m). \quad (2.453)$$

Forma locului de transfer la limită se prezintă și în figurile 2.50,a și 2.50,b. Se poate observa faptul că în funcție de valoarea lui θ se poate determina numărul de intersecții ale locului de transfer cu axele planului complex. De exemplu, pentru $\alpha = 0$, intersecția axei reale negative are loc numai dacă diferența $n - m > 2$.

Tab.2.7 Rezultatul trecerii la limită în expresia (2.445) pentru diferite tipuri de sisteme.

Tipul sistemului	$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K_a}{(j\omega)^\alpha} \frac{Q_m(j\omega)}{P_n(j\omega)}$	$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K'_a}{(j\omega)^\theta} \frac{Q'_m(j\omega)}{P'_n(j\omega)}$
Tip zero $\alpha = 0$ $\theta = 0$	$K_a e^{j0}$	$K'_a e^{j0}$
Tip 1 $\alpha = 1$ $\theta = 1$	$\infty e^{-j\frac{\pi}{2}}; (-j\infty)$	$0 e^{-j\frac{\pi}{2}}$
Tip 2 $\alpha = 2$ $\theta = 2$	$\infty e^{-j\pi}; (-\infty)$	$0 e^{-j\pi}$
Tip 3 $\alpha = 3$ $\theta = 3$	$\infty e^{-j\frac{3\pi}{2}}; (+j\infty)$	$0 e^{-j\frac{3\pi}{2}}$