10. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

10.1. Lineer Denklemler ve Çözümleri

$x_1, x_2,...,x_n$ bilinmeyenler ve $a_1, a_2,...,a_n, b$ reel yada kompleks sabitler olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b \qquad (10.1)$$

formundaki denklemlere lineer denklemler denir. Lineer denklemlerin bu formdaki gösterilişine standart form denir. a_k sabitlerine x_k bilinmeyenlerinin katsayıları, b sabitine ise denklemin sabit terimi denir.

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ denklemini sağlayan $x_1, x_2,...,x_n$ bilinmeyenlerinin değerlerinin oluşturduğu bir sıralı denklemin bir çözümüdür, yani eğer $x_1 = k_1, x_2 = k_2,...,x_n = k_n$ değerleri (10.1) denkleminde yerine konulduğunda b ye eşit oluyorsa, bu değerlerin oluşturduğu sıralı

$$u = (k_1, k_2,...,k_n)$$

denklemin bir çözümüdür. Bu durumda "u, denklemi sağlar" denir.

Örnek: $x - 3y + 2z = 6$ denklemi x,y,z bilinmeyenli bir lineer denklemdir. x in katsayısı 1, y nin katsayısı -3 ve z nin katsayısı 2 dir. Denklemin sabit terimi 6 dır.

$x = 5, y = 1$ ve $z = 2$ değerleri denklemde yerine konulduğunda,

$$x - 3y + 2z = 5 - 3.1 + 2.2 = 6$$

olduğundan $u = (5,1,2)$, $x - 3y + 2z = 6$ denkleminin bir çözümüdür. Diğer taraftan $u = (2,1,3)$, denklemin bir çözümü değildir, çünkü

$$x - 3y + 2z = 2 - 3.1 + 2.3 = 5 \neq 6$$

dır.

Tüm katsayıları sıfır olan bir lineer denkleme, yani

$$0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b$$

formundaki lineer denkleme dejenere denklem denir. Dejenere denklemlerin çözümünün olup olmaması sadece b sabit terimine bağlıdır. Eğer $b \neq 0$ ise denklemin çözümü yoktur. $b = 0$ ise herhangi bir $u = (k_1, k_2,...,k_n)$ sıralısı denklem için bir çözümdür.

10.2. Lineer Denklem Sistemleri

Aynı bilinmeyenlerden oluşan ki veya daha fazla lineer denklemin oluşturduğu sisteme lineer denklem sistemi denir. n tane bilinmeyeni, $x_1, x_2,...,x_n$ diyelim, olan m tane lineer denklemin, $L_1, L_2,...,L_m$ diyelim, oluşturduğu bir lineer denklem sistemi

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\qquad (10.2)
$$

formundadır. Lineer denklem sistemlerinin bu formda gösterilişine standart form denir. Burada a_{ij} ve b_i ler sabitlerdir. a_{ij} sayısına, L_i denkleminde x_j bilinmeyeninin katsayısı, b_i sayısına ise L_i denkleminin sabit terimi denir. (10.2) lineer denklem sistemi $m \times n$ sistem şeklinde okunur.

Eğer $m = n$ ise, yani denklem sayısı m ile bilinmeyen sayısı n eşit ise, bu denklem sistemine kare sistem denir.

Eğer (10.2) lineer denklem sisteminin tüm sabit terimleri $b_1,b_2,...,b_m$ sıfırsa, yani $b_1 = 0,b_2 = 0,...,b_m = 0$ ise bu denklem sistemine homojen lineer denklem sistemi denir. Sıfırdan farklı en az bir sabit terimi olan lineer denklem sistemlerine ise homojen olmayan lineer denklem sistemi denir.

(10.2) lineer denklem sistemlerinin tümünü sağlayan $x_1, x_2,...,x_n$ bilinmeyenlerinin değerlerinin oluşturduğu u sıralısına sistemin bir çözümü denir. Lineer denklem sisteminin tüm çözümlerinin kümesine de sistemin çözüm kümesi yada genel çözümü denir.

Bu derste, aksi belirtilmediği sürece bir lineer denklem sisteminin tüm katsayıları ve sabit terimleri reel sayılar olarak alınacaktır.

Örnek:

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 3$$

lineer denklem sisteminde 3 denklem 4 bilinmeyen olduğu için bu denklem sistemi bir 3×4 sistemdir.

$$u = (- 8, 6,1,1)$$

lineer denklem sisteminin bir çözümüdür. Gerçekten de, u nun değerlerini lineer denklem sisteminde yerine koyduğumuzda

$$-8 + 6 + 4.1 + 3.1 = -8 + 6 + 4 + 3 = 5$$

$$2.(- 8) + 3.6 + 1 - 2.1 = 1$$

$$-8 + 2.6 - 5.1 + 4.1 = 3$$

tüm lineer denklemleri sağladığını görürürüz.

$$v = (- 10, 5,1,2)$$

ise lineer denklem sisteminin bir çözümü değildir. Çünkü, denklem sistemindeki birinci ve üçüncü denklemleri sağlarken, ikinci denklemi sağlamaz, yani ikinci denklem için bir çözüm değildir, gerçekten de

$$2.(- 10) + 3.5 + 1 - 2.2 = -8 \neq 1$$

dir.

Eğer (10.2) lineer denklem sistemi bir veya daha fazla çözüme sahipse bu sisteme tutarlı denir. Eğer sistemin hiç çözümü yoksa bu sisteme tutarsız denir.

Herhangi bir lineer denklem sistemi ya tek çözüme sahiptir, ya çözümü yoktur yada sonsuz çözüme sahiptir.

Bundan sonraki amacımız lineer denklem sistemlerinin çözümlerini araştırmak olacaktır.

İlk olarak, bir lineer denklem sisteminde bir dejenere denklem varsa, bu dejenere denklemin sabit terimi b olsun, eğer $b \neq 0$ ise sistemin çözümü yoktur. $b = 0$ ise sistemden bu dejenere denklemi çıkarmak sistemin çözüm kümesini değiştirmez.

10.3. Genişletilmiş Katsayılar ve Katsayılar Matrisi

m denklem ve n bilinmeyenli (10.2) lineer denklem sistemini düşünelim. Bu sistem ile ilgili iki matris vardır:

Birincisi sistemin katsayılarından ve sabit terimlerinden oluşan genişletilmiş katsayılar matrisidir ve

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

formundadır.

İkincisi ise sadece sistemin katsayılarından oluşan katsayılar matrisidir ve

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

formundadır.

Örnek:

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 3$

lineer denklem sisteminin genişletilmiş katsayılar matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ve katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

dür.

Açıktır ki, bir lineer denklem sistemi genişletilmiş katsayılar matrisi aracılığıyla tamamen tanımlanabilir. Gerçekten de, genişletilmiş katsayılar matrisinin her satırı bir lineer denkleme karşılık gelir ve son sütun dışındaki her sütun bilinmeyenlerin katsayılarına karşılık gelirken, son sütun denklem sisteminin sabit terimlerine karşılık gelmektedir.

10.4. Lineer Denklem Sistemlerinin Matrisler Yardımıyla Gösterilişi

m denklemli n bilinmeyenli bir

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (10.2)$$

lineer denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

yada

$$AX = B$$

formundaki bir matris denklemine denktir. Burada $A = [a_{ij}]$ katsayılar matrisi, $X = [x_j]$, bilinmeyenlerin sütun vektörü, $B = [b_i]$ ise sabit terimlerin sütun vektörüdür.

Bir lineer denklem sisteminin bir matris denklemine denk olması, çözüm kümelerinin aynı olması anlamındadır.

Örnek:

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 3$$

lineer denklem sistemi ile

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

matris denklemi denktir.

Lineer denklem sistemlerinin matris denklemi şeklinde gösterilişini, lineer denklem sistemlerinin çözümünü bulmak için kullanılan Gauss Eliminasyon Yönteminde kullanacağız. Bu yöntemde lineer denklem sisteminin kendisi yerine genişletilmiş katsayılar matrisi ile çalışılır. Genişletilmiş katsayılar matrisi üzerinde elementer işlemler diyeceğimiz bazı işlemler uygulanarak eşelon matris diyeceğimiz matris formları elde edilir. Şimdi bu kavramları tanıyalım:

10.5. Elementer Satır İşlemleri ve Satır Eşdeğer Sistemler

Satırları sırasıyla $R_1, R_2,...,R_m$ ile gösterilen bir $A = [a_{ij}]$ matrisi alalım. Bu matrisin R_i. satırındaki sıfırdan farklı ilk girdisine "öncü sıfırdan farklı girdi" denir. Matrisin bir satırı sadece sıfır girdilerden oluşuyorsa bu satıra da sıfır satır dendiğini hatırlayalım. Dolayısıyla sıfır satırların öncü sıfırdan farklı girdisi yoktur.

A matrisi üzerinde aşağıdaki üç işlem tanımlansın.

[E1] Matristeki satırlardan ikisinin yerini değiştirmek: $R_i \; ve \; R_j$ satırlarının yer değiştirmesi işlemi

$$R_i \longleftrightarrow R_j$$

şeklinde gösterilir.

[E2] Matristeki satırlardan birinin yerine o satırın sıfırdan farklı bir skalerle çarpılmış formunu yazmak: R_i satırı yerine $k \neq 0$ olmak üzere kR_i satırını yazma işlemi

$$kR_i \longrightarrow R_i$$

şeklinde gösterilir.

[E3] Matristeki satırlardan birinin yerine bu satır ile sıfırdan farklı bir skalerle çarpılmış başka bir satırın toplamını yazmak: R_j satırı yerine $k \neq 0$ olmak üzere $kR_i + R_j$ satırını yazma işlemi

$$kR_i + R_j \longrightarrow R_j$$

şeklinde gösterilir.

Yukarıdaki üç işleme elementer satır işlemleri denir.

A ve B iki matris olmak üzere, B matrisi A matrisine elementer satır işlemleri uygulanarak elde ediliyorsa A ve B matrislerine satır eşdeğer matrisler denir ve $A \sim B$ ile gösterilir.

Elementer işlemler, ileride bir lineer denklem sisteminin çözümünü bulmak için kullanacağımız Gauss Eliminasyon Yönteminde, lineer denklem sistemine denk olan ve çözümleri daha kolay elde edilen bir lineer denklem sistemi bulmak için kullanılacaktır. Bulunacak olan bu sistemler üçgensel yada eşelon formda denklem sistemleri olarak bilinir.

10.6. Eşelon Matrisler

Bir A matrisi aşağıdaki koşulları sağlasın:

1. A nın sıfır satırı varsa bu satırlar matrisin son satırlarında yer alır.

2. Bir satırın öncü sıfırdan farklı girdisi, önceki satırın öncü sıfırdan farklı girdisinin sağında yer alır.

Bu koşulları sağlayan A matrisine eşelon matris denir.

Eşelon matrisin her satırındaki öncü sıfırdan farklı girdilerine eşelon matrisin pivotları denir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini düşünelim. A matrisinin sıfır satırı vardır ve matrisin son satırıdır. Birinci satırın öncü sıfırdan farklı girdisi $a_{12} = 2$ dir, yani 2. sütundadır.

İkinci satırın öncü sıfırdan farklı girdisi $a_{24} = 3$ tür, yani 4. sütundadır ve bir önceki satır olan birinci satırın öncü sıfırdan farklı girdisi $a_{12} = 2$ nin sağında yer alır.

Üçüncü satırın öncü sıfırdan farklı girdisi $a_{36} = 5$ tir, yani 6. sütundadır ve bir önceki satır olan ikinci satırın öncü sıfırdan farklı girdisi $a_{24} = 3$ ün sağında yer alır.

Dördüncü satırın öncü sıfırdan farklı girdisi $a_{47} = 8$ dir, yani 7. sütundadır ve bir önceki satır olan üçüncü satırın öncü sıfırdan farklı girdisi $a_{36} = 5$ in sağında yer alır.

Görüldüğü gibi A matrisi bir eşelon matristir ve pivotları da $2, 3, 5, 8$ dir. Pivotlar, matrisin üzerinde çember içine alınarak gösterilmiştir.

Bir eşelon matrisin

1. Tüm pivotları 1

2. Her pivot bulunduğu sütunun sıfırdan farklı tek girdisi

ise bu eşelon matrise satır indirgenmiş eşelon matris denir.

Eşelon matris ile satır indirgenmiş eşelon matris arasındaki esas farki eşelon matriste pivotların altındaki girdiler sıfır olmalıdır, satır indirgenmiş eşelon matriste ise tüm pivotlar 1 olmalı ve pivotların hem altındaki hem üstündeki girdiler sıfır olmalıdır.

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

matrislerini düşünelim. Bu matrisler eşelon formdadır. Gerçekten de, sıfırdan farklı satırlarındaki öncü sıfırdan farklı girdiler, bir önceki satırların öncü sıfırdan farklı girdilerinin sağında yer alır. Bu matrislerin pivot elemanları da çember içine alınarak gösterilmiştir. Bu eşelon matrislerden birinci ve dördüncü matrisler satır indirgenmiş eşelon matrisler değildir, çünkü pivotları 1 den farklıdır. İkinci matrisin pivotları 1 dir fakat pivotların bulunduğu sütunlardaki sıfırdan farklı tek girdi pivotlar değildir. Örneğin, $a_{23} = 1$ pivotunun bulunduğu sütunda, pivot dışında sıfırdan farklı olan $a_{13} = 3$ girdisi de vardır. Bu sebeple ikinci matris de satır indirgenmiş eşelon matris değildir. Üçüncü matriste ise tüm pivotlar 1ve pivotların bulunduğu sütunda pivotlar dışında sıfırdan farklı başla bir girdi yoktur. Bu yüzden üçüncü matris satır indirgenmiş eşelon matristir.

10.7. Gauss Eliminasyon Yöntemi

Herhangi bir A matrisinin satır eşdeğer olduğu tek bir satır indirgenmiş eşelon matris vardır. A matrisinin eşelon formundaki pivotlarının sayısına A matrisinin rankı denir ve $rank(A)$ ile gösterilir.

Bir matrisin eşelon formuna yada satır indirgenmiş eşelon formuna elementer satır işlemleri kullanılarak elde edilebilir. Bu elde etme yöntemine Gauss Eliminasyon Yöntemi denir. Gauss Eliminasyon yöntemini bir algoritma ile açıklayabiliriz:

$A = [a_{ij}]$ herhangi bir matris olsun.

Algoritma-1 (İleri Eliminasyon): $A = [a_{ij}]$ matrisini, satır elementer işlemler kullanılarak eşelon formuna dönüştürmek için izlenen adımlar dizisidir.

Adım 1: Sıfırdan farklı girdisi olan ilk sütunu bul. Eğer böyle bir sütun yoksa çık, çünkü

A matrisi bir sıfır matristir. Varsa, sıfırdan farklı girdisi olan ilk sütun j_1. sütun olsun.

a) j_1. sütunda sıfırdan farklı ilk girdi a_{1j_1} olsun, yani $a_{1j_1} \neq 0$ olsun. Eğer j_1. sütunda sıfırdan farklı ilk girdi a_{1j_1} değil ise, birinci satırı j_1. Sütunun sıfırdan farklı girdiye sahip olan bir satır ile yer değiştir, yani $[E_1]$ elementer işlemini uygulayarak $a_{1j_1} \neq 0$ elde et.

b) $a_{1j_1} \neq 0$ olduğu için a_{1j_1} i, altındaki tüm girdileri sıfır yapmak için birinci satırın pivotu olarak kullan, yani $i > 1$ için

i. $m = -\, a_{ij_1}/a_{1j_1}$ i bul.

ii. R_i. satırı $mR_1 + R_i$ ile değiştir, yani R_i. satıra $[E_3]$ elementer satır işlemini uygula.

Adım 2: Adım 1 i, elde edilen son alt matrisin ilk satır dışındaki tüm satırları için uygula. Son alt matrisin sıfırdan farklı girdisi olan ilk sütunu j_2. sütun olsun. Adım 2 nin sonunda $a_{2j_2} \neq 0$ olsun.

Adım 3: Bu işleme, sadece sıfır satıra sahip alt matris elde edilinceye kadar devam et.

Son eşelon matris formunda sıfırdan farklı satır sayısı r olsun. Dolayısıyla bu ileri eliminasyon algoritmasının sonunda $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$ olmak üzere r tane pivot vardır.

1.b)i. adımındaki

$$m = -\frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}} = -\frac{silinecek\ girdi}{pivot}$$

sayısına çarpan denir.

Algoritma-2 (Geri Eliminasyon) $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$ pivot girdilerine sahip herhangi bir A $= [a_{ij}]$ eşelon matrisini, satır elementer işlemler kullanılarak, satır indirgenmiş eşelon formuna dönüştürmek için izlenen adımlar dizisidir.

Adım 1:

a) Sıfırdan farklı son satır R_r yi $(1/a_{rj_r})$ ile çarp, yani $[E_2]$ elementer satır işlemini uygula. Böylece a_{rj_r} pivotu 1 olacak, yani $a_{rj_r} = 1$ yap.

b) $a_{rj_r} = 1$ pivotunu, pivot üstündeki tüm girdileri sıfır yapmak için kullan, yani $i = r-1, r-2, \ldots 2, 1$ için

i. $m = -\, a_{ij_r}$ i bul.

ii. R_i. satırı $mR_r + R_i$ ile değiştir, yani R_i. satıra $[E_3]$ elementer satır işlemini uygula.

Adım 2- Adım $r-1$: Adım 1 i $R_{r-1}, R_{r-2}, \ldots, R_2$ satırları için uygula.

Adım r: İlk satır R_1 i $(1/a_{1j_1})$ ile çarp, yani $[E_2]$ elementer satır işlemini uygula. Böylece a_{1j_1} pivotu 1 olacak, yani $a_{rj_r} = 1$ yap.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & -6 & 9 & 13 \end{bmatrix}.$$

matrisinin eşelon ve satır indirgenmiş eşelon formunu bulunuz.

İlk olarak 1. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı $a_{11} = 1$ i pivot olarak düşünelim. A matrisinin eşelon formunda pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından ilk adım olarak $a_{11} = 1$ pivotunun altındaki $a_{21} = 2$ ve $a_{31} = 3$ girdilerini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

İkinci satır R_2 yerine $-2R_1 + R_2$ ile üçüncü satır R_3 yerine $-3R_1 + R_3$ ile değiştirelim, yani bu satırlara [E_3] elementer satır işlemini uygulayalım:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Şimdi bu son matris üzerinden devam edelim. 2. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı $a_{23} = 2$ yi pivot olarak düşünelim. Pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından benzer şekilde olarak $a_{23} = 2$ pivotunun altındaki $a_{33} = 3$ girdisini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

Üçüncü satır R_3 yerine $(-3/2)R_2 + R_3$ ile değiştirelim, yani [E_3] elementer satır işlemini uygulayalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Son matrise baktığımızda eşelon formda ulaştığı görülür. Dolayısıyla A matrisinin eşelon formu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisidir ve pivotları $a_{11} = 1$, $a_{23} = 2$ ve $a_{35} = -2$ dir, yani $rank(A) = 3$ tür.

Şimdi bu eşelon formundan devam ederek A matrisinin satır indirgenmiş eşelon formunu bulalım. Bunun için pivotları 1 yapmalıyız ve pivotların bulunduğu sütundaki pivot dışında tüm girdileri sıfır yapmalıyız. Üçüncü satırdan başlayalım. İlk olarak $a_{35} = -2$ pivotunu 1 yapmak için R_3 yerine $(-1/2)R_3$ yazalım, yani [E_2] elementer satır işlemini uygulayalım:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Şimdi $a_{35} = 1$ pivotunun üstündeki $a_{25} = 6$ ve $a_{15} = 2$ girdilerini sıfır yapalım. Bunun için

R_2 yerine $-6R_3 + R_2$ ile birinci satır R_1 yerine $-2R_3 + R_1$ ile değiştirelim, yani bu satırlara [E_3] elementer satır işlemini uygulayalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Üçüncü pivot için istenenler elde edildiğine göre şimdi ikinci pivota geçelim. İkinci pivot $a_{23} = 2$ yi 1 yapalım. Bunun için yukarıda son matriste R_2 yerine $(1/2)R_3$ yazalım, yani $[E_2]$ elementer satır işlemini uygulayalım:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Şimdi $a_{23} = 1$ pivotunun üstündeki $a_{13} = -3$ girdisini sıfır yapalım. Bunun için

birinci satır R_1 yerine $3R_2 + R_1$ ile değiştirelim, yani bu satırlara [E_3] elementer satır işlemini uygulayalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu son matrise baktığımızda tüm pivotlar 1 ve pivotların bulunduğu sütunda pivot dışında başla sıfırdan farklı girdi yoktur. Dolayısıyla, bu matris satır indirgenmiş eşelon formdadır, yani A matrisinin satır indirgenmiş eşelon formu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dur.

10.8. Lineer Denklem Sistemlerinin Matris Çözümü

m denklemli n bilinmeyenli bir

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\qquad (10.2)
$$

lineer denklem sisteminin matris formu olan

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

yada

$$AX = B$$

denklemini düşünelim. Hatırlayalım ki, burada $A = [a_{ij}]$ katsayılar matrisi, $X = [x_j]$, bilinmeyenlerin sütun vektörü, $B = [b_i]$ ise sabit terimlerin sütun vektörüdür.

Lineer denklem sistemlerinin çözüm yollarından biri, denklemlerin kendileriyle çalışmak yerine sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi $M = [A{:}B]$ ile çalışmaktır. M matrisini Gauss Eliminasyon Yöntemi yardımıyla eşelon formuna indirgediğimizde, lineer denklem sisteminin bir çözüme sahip olup olmayacağını ve çözümlerinin ne olacağını bulabiliriz.

1. M genişletilmiş katsayılar matrisine uyguladığımız herhangi bir elementer satır işlemi, lineer denklem sistemine uygulanan işleme denktir.

2. Lineer denklem sisteminin çözümünün olması ancak ve ancak M genişletilmiş katsayılar matrisin eşelon formunda $b \neq 0$ olmak üzere $(0,0,...0,b)$ formunda bir satır olmaması ile mümkündür.

3. Lineer denklem sisteminde $rank(A) = rank(M) = n$ (bilinmeyen sayısı) ise denklem tek çözüme sahiptir.

M katsayılar matrisin eşelon formunda her sütunda pivotlar olmak zorunda değildir. Eğer eşelon formda, sistemin bilinmeyenlerinin katsayılarının oluşturduğu tüm sütunlarda pivot varsa, yani pivot sayısı bilinmeyen sayısına eşit ise sistemin tek çözümü vardır. Eğer eşelon formda sistemin pivota sahip olmayan bilinmeyenlerinin katsayılarının oluşturduğu sıfırdan farklı bir sütun var ise, yani bilinmeyen sayısı pivot sayısından büyük ise sistemin çözümü serbest değişkenlere (pivot olmayan sütuna karşılık gelen bilinmeyenlere) bağlıdır, dolayısıyla sistemin sonsuz çözümü vardır.

Bunu bir örnekle daha iyi anlayabiliriz:

Örnek:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5$$

$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3$

$3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 1$

sisteminin çözümünü araştıralım:

Sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

yi satır eşelon formuna indirgeyelim:

İlk olarak 1. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı $a_{11} = 1$ i pivot olarak düşünelim. M matrisinin eşelon formunda pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından ilk adım olarak $a_{11} = 1$ pivotunun altındaki $a_{21} = 2$ ve $a_{31} = 3$ girdilerini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

İkinci satır R_2 yerine $-2R_1 + R_2$ ile üçüncü satır R_3 yerine $-3R_1 + R_3$ ile değişterelim, yani bu satırlara $[E_3]$ elementer satır işlemini uygulayalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{bmatrix}$$

Şimdi bu son matris üzerinden devam edelim. 2. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı $a_{23} = 1$ i pivot olarak düşünelim. Pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından benzer şekilde olarak $a_{23} = 1$ pivotunun altındaki $a_{33} = 2$ girdisini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

Üçüncü satır R_3 yerine $-2R_2 + R_3$ ile değiştirelim, yani $[E_3]$ elementer satır işlemini uygulayalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Son matrise baktığımızda eşelon forma ulaştığı görülür. Dolayısıyla M matrisinin eşelon formu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisidir ve pivotları $a_{11} = 1$, $a_{23} = 2$ dir ve x_1 ve x_3 pivot değişkenlerdir. Pivot olmayan diğer bilinmeyenler x_2 ve x_4 ise serbest değişkenlerdir. Dolayısıyla sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır.

Eşelon formdan elde edilen çözümler şöyledir:

1. satırdan elde edilen $x_1 + x_2 - 10x_4 = -9$ eşitliğinden $x_1 = -x_2 + 10x_4 - 9$ ve

2. satırdan elde edilen $x_3 - 7x_4 = -7$ eşitliğinden $x_3 = 7x_4 - 7$ bulunur.

Dolayısıyla sistemin çözüm kümesi = $\{(-x_2 + 10x_4 - 9, x_2, 7x_4 - 7, x_4) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$

Örnek:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4$$

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3$$

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 5$$

sisteminin çözümünü araştıralım:

Sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

yi satır eşelon formuna indirgeyelim:

İlk olarak 1. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı $a_{11} = 1$ i pivot olarak düşünelim. M matrisinin eşelon formunda pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından ilk adım olarak $a_{11} = 1$ pivotunun altındaki $a_{21} = 2$ ve $a_{31} = 5$ girdilerini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

İkinci satır R_2 yerine $-2R_1 + R_2$ ile üçüncü satır R_3 yerine $-5R_1 + R_3$ ile değiştirelim, yani bu satırlara $[E_3]$ elementer satır işlemini uygulayalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & -15 \end{bmatrix}$$

Şimdi bu son matris üzerinden devam edelim. 2. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı $a_{22} = 1$ i pivot olarak düşünelim. Pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından benzer şekilde olarak $a_{22} = 1$ pivotunun altındaki $a_{32} = 2$ girdisini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

Üçüncü satır R_3 yerine $-2R_2 + R_3$ ile değiştirelim, yani $[E_3]$ elementer satır işlemini uygulayalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Son matrise baktığımızda eşelon forma ulaştığı görülür. Dolayısıyla M matrisinin eşelon formu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

matrisidir. Bu matrisin son satırından $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -5$ dejenere denklemi elde edildiğinden verilen lineer denklem sisteminin çözümü yoktur.

Örnek:

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$

$2x_1 + 5x_2 - x_3 = -4$

$3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5$

lineer denklem sisteminin çözümünü araştıralım.

Sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

yi satır eşelon formuna indirgeyelim:

İlk olarak 1. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı $a_{11} = 1$ i pivot olarak düşünelim. M matrisinin eşelon formunda pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından ilk adım olarak $a_{11} = 1$ pivotunun altındaki $a_{21} = 2$ ve $a_{31} = 3$ girdilerini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

İkinci satır R_2 yerine $-2R_1 + R_2$ ile üçüncü satır R_3 yerine $-3R_1 + R_3$ ile değiştirelim, yani bu satırlara $[E_3]$ elementer satır işlemini uygulayalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & -8 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Şimdi bu son matris üzerinden devam edelim. 2. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı $a_{22} = 1$ i pivot olarak düşünelim. Pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından benzer şekilde olarak $a_{22} = 1$ pivotunun altındaki $a_{32} = -8$ girdisini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

Üçüncü satır R_3 yerine $8R_2 + R_3$ ile değiştirelim, yani $[E_3]$ elementer satır işlemini uygulayalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & -8 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -28 & -84 \end{bmatrix}$$

Son matrise baktığımızda eşelon forma ulaştığı görülür. Dolayısıyla M matrisinin eşelon formu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -28 & -84 \end{bmatrix}$$

matrisidir ve pivotları $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ ve $a_{33} = -28$ dir. Görüldüğü gibi x_1, x_2 ve x_3 bilinmeyenleri pivot değişkenlerdir. Pivot olmayan bilinmeyen yoktur, yani bilinemeyen sayısı pivot sayısına eşittir. Dolayısıyla sistemin tek bir çözümü vardır.

Eşelon formdan elde edilen bu çözüm şöyledir:

3. satırdan elde edilen $-28x_3 = -84$ eşitliğinden $x_3 = 3$ ve

2. satırdan elde edilen $x_2 - 3x_3 = -10$ eşitliğinden $x_2 = 3x_3 - 10 = 3.3 - 10 = -1$

1. satırdan elde edilen $x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$ eşitliğinden $x_1 = -2x_2 - x_3 + 3 = (-2)(-1) - 3 + 3 = 2$ bulunur.

Dolayısıyla sistemin çözüm kümesi = $\{(2, -1,3)\}$ tür.

10.9. Bir Kare Matrisin Tersini Bulmak için Bir Yöntem

Bir A n-kare matrisin terslenebilir olması ancak ve ancak A matrisinin I birim matrise satır eşdeğer olmasıdır.

Terslenebilir bir matrisin tersini bulmak için elementer satır işlemlerini kullanacağımız bir yöntem vardır. Bu yöntemi aşağıdaki algoritmayla verebiliriz:

A herhangi n-kare matris olsun.

Algoritma-3:

Adım 1: $M = [A,I]$, $n \times 2n$ matrisini oluştur, yani M matrisinin sol tarafı A matrisi, sağ tarafı I birim matrisidir.

Adım 2: M yi satır indirgenmiş eşelon forma indirge.

Satır indirgenmiş eşelon forma indirgenirken M nin A tarafındaki satırlar sıfır satır olursa A nın tersi yoktur.

Adım 3: M yi

$$M \sim [I,B]$$

satır indirgenmiş eşelon formuna indirge, yani M nin sol tarafında A yerine I olacaktır.

Adım 4: $A^{-1} = B$ dir, yani M nin satır indirgenmiş eşelon formunda sağ tarafındaki matristir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin terslenebilir olup olmadığını araştırınız. Terslenebilir ise tersini bulunuz.

İlk önce $M = [A,I]$ matrisini oluşturalım:

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

M nin $[I,B]$ formunda satır indirgenmiş eşelon formunu bulalım:

İlk olarak 1. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı $a_{11} = 1$ i pivot olarak düşünelim. M matrisinin eşelon formunda pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından ilk adım olarak $a_{11} = 1$ pivotunun altındaki $a_{21} = 2$ ve $a_{31} = 4$ girdilerini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

İkinci satır R_2 yerine $-2R_1 + R_2$ ile üçüncü satır R_3 yerine $-4R_1 + R_3$ ile değiştirelim, yani bu satırlara $[E_3]$ elementer satır işlemini uygulayalım:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Şimdi bu son matris üzerinden devam edelim. 2. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı $a_{22} = -1$ i pivot olarak düşünelim. Pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından benzer şekilde olarak $a_{22} = -1$ pivotunun altındaki $a_{32} = 1$ girdisini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

Üçüncü satır R_3 yerine $R_2 + R_3$ ile değiştirelim, yani $[E_3]$ elementer satır işlemini uygulayalım:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Son matris M matrisinin eşelon formudur. Satır indirgenmiş eşelon forma getirmek için $a_{33} = -1$ pivotunun üstündeki girdileri $a_{23} = -1$ ve $a_{13} = 2$ girdilerini sıfır yapalım:

R_2 yerine $R_3 + R_2$ ile birinci satır R_1 yerine $2R_3 + R_1$ ile değiştirelim, yani bu satırlara E_3 elementer satır işlemini uygulayalım ve bu işlemlerden sonra da R_3 satırını (-1) ile çarparak $a_{33} = 1$ yapalım, yani $[E_2]$ elementer satır işlemini uygulayalım:

$$M \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Son olarak R_2 satırını (-1) ile çarparak $a_{22} = 1$ yapalım, yani $[E_2]$ elementer satır işlemini uygulayalım:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Şimdi

$M \sim [I, B]$

formunda olduğundan A matrisi terslenebilirdir ve

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Bölüm Özeti

Bu bölümde lineer denklem sistemleri ele alınmıştır. Bir lineer denklem sisteminin kanonik ve matris formunda nasıl gösterildiği verilmiştir. Daha sonra lineer denklem sistemini çözmek için kullanılacak olan Gauss Eliminasyon Yöntemi için gerekli olan kavramlar gösterilmiştir. Bunlar; katsayılar matrisi, genişletilmiş katsayılar matrisi, temel elementer satır işlemleri, bir matrisin eşelon formu olmuştur. Bu kavramlar verildikten sonra ve özellikleri incelendikten sonra Gauss Eliminasyon Yöntemi algoritmalar halinde verilerek bir lineer denklem sisteminin çözümünün olup olmayacağı, varsa nasıl olacağı durumları ele alınmıştır.

Son olarak, bir kare matrise temel elementer satır işlemleri uygulayarak o matrisin terslenenilir olup olmayacağı, terslebilir ise tersinin ne olacağı konusunda bir yöntem de verilmiştir. Böylece bir matrisin terslenebilirliği ve tersi için tanımı dışında bir başka yöntem daha öğrenilmiştir.

Kaynakça

1. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 3rd edition, 2007

2. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Linear Algebra, 6th edition, 2018