12. OLASILIK

12.1. Örnek Uzay ve Olaylar

Verilen bir deneyin tüm mümkün sonuçlarının kümesi S ye örnek uzay denir. S nin bir elemanına, yani belirli bir sonuca örnek nokta denir.

Bir sonuçlar kümesi A ya, yani örnek uzay S nin bir alt kümesi olan A ya ise olay denir. Tek bir $a \in S$ örnek noktasından oluşan $\{a\}$ kümesine temel olay denir. Ayrıca örnek uzay S nin kendisi ve boş küme $\emptyset$ de S nin alt kümeleri olduklarından birer olaydırlar. Boş küme $\emptyset$, çoğu zaman imkansız olay olarak adlandırılır.

Örnek: ANKARA kelimesinin harflerini inceleyelim. Örnek uzay S, ANKARA kelimesindeki tüm mümkün harflerin kümesidir, yani

$$S = \{A,N,K,A,R,A\}$$

dır. Bu kelimede A harfinin olma olayı A olsun, o halde

$$A = \{A,A,A\}$$

3 elemanlıdır. K harfinin olma olayı B olsun, o halde

$$B = \{K\}$$

1 elemanlıdır, yani B temel olaydır.

Eğer gerçekleşen olaylar içinde yer alan sonuçlardan biri meydana geliyorsa, bundan bir olayın meydana geldiği anlaşılır.

Bir olay aslında bir küme olduğundan küme işlemlerini kullanarak yeni olaylar oluşturabiliriz:

A ve B iki olay olmak üzere,

a) A nın veya B nin yada her ikisinin meydana gelmesi ancak ve ancak $A \cup B$ nin bir olay olmasıdır.

b) Hem A nın hem B nin meydana gelmesi ancak ve ancak $A \cap B$ nin bir olay olmasıdır.

c) A nın tümleyeni A^C nin bir olay olması ancak ve ancak A nın meydana gelmemesidir.

A ve B olayları ayrık ise yani, $A \cap B = \emptyset$ ise bu olaylara ayrık olaylar denir. Başka bir deyişle, A ve B nin ayrık iki olay olması ancak ve ancak aynı anda meydana gelmemeleri ile mümkündür. Eğer üç veya daha fazla olaydan herhangi ikisi ayrık ise bu olaylar da ayrıktır.

Örnek:

a) **Deney**: Bir bozuk parayı 3 kez atalım ve yazı (Y) ve tura (T) gelmesi sıralarını gözlemleyelim.

Örnek uzay S nin 8 elemanı vardır:

$$S = \{YYY, YYT, YTY, YTT, TYY, TYT, TTY, TTT\}$$

A olayı arka arkaya iki veya daha fazla yazı görünen sonuçların olayı olsun, yani,

$$A = \{YYY, YYT, TYY\}$$

dır ve 3 elemanlıdır. B olayı ise tüm atışların aynı olduğu olay olsun, yani

$$\mathrm{B} = \{\mathrm{YYY}, \mathrm{TTT}\}$$

dır ve 2elemanlıdır.

Dolayısıyla $A \cap B = \{YYY\}$ olduğundan bir temel olaydır.

Arka arkaya beş tane yazı gelmesi olayı ise boş küme $\emptyset$ dir, yani imkansız olaydır.

b) **Deney**: Bir zar atalım ve üst yüzeye gelen noktaların sayısını gözlemleyelim:

Örnek uzay S nin 6 elemanı vardır:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

A olayı, çift sayıların gelmesi olayı olsun, yani,

$$A = \{2, 4, 6\}$$

dır ve 3 elemanlıdır. B olayı, tek sayıların gelmesi olayı olsun, yani,

$$B = \{1, 3, 5\}$$

dır ve 3 elemanlıdır. C olayı, asal sayıların gelmesi olayı olsun, yani,

$$C = \{2, 3, 5\}$$

dır ve 3 elemanlıdır.

Dolayısıyla, $A \cup C$, zar atıldığında çift sayı yada asal sayı gelme olayıdır, yani

$$A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

dir. $B \cap C$, zar atıldığında tek asal gelen sayıların olayıdır, yani,

$$B \cap C = \{3, 5\}$$

dir. C^C, zar atıldığında asal sayı gelmemesi olayıdır, yani,

$$C^C = \{1,4,6\}$$

dır. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan bu iki olay ayrık olaylardır, diğer bir deyişle, bir zar atıldığında aynı anda hem tek hem çift sayı gelemez.

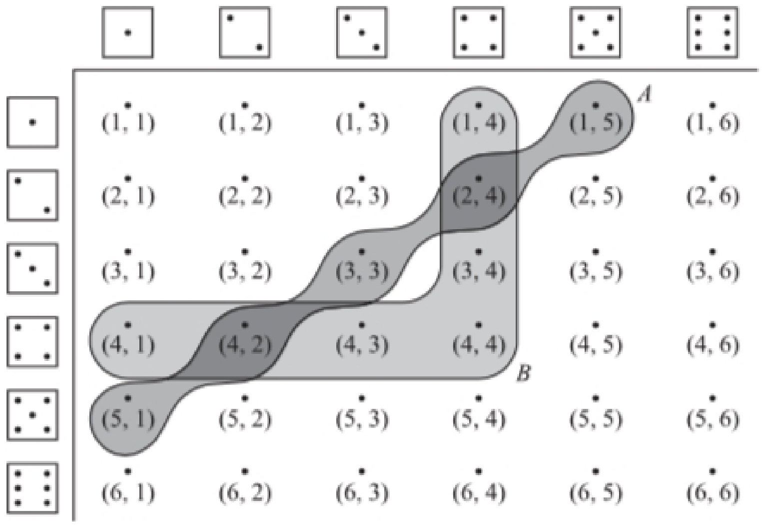
c) **Deney:** Bir bozuk parayı tura gelene kadar atalım ve tura gelene kadar kaç kez attığımızı sayalım.

Bu deneyin örnek uzayı $S = \{1,2,3,\dots\}$ dır ve S nin eleman sayısı doğal sayılar olduğundan sonsuz elemanlıdır.

Bu örnekte görüldüğü gibi bir örnek uzay sozsuz elemanlı olabilir. Fakat bu derste biz aksini belirtmediğimiz sürece tüm örnek uzaylarını sonlu elemanlı olarak alacağız.

d) **Deney**: Hilesiz iki zarı aynı anda atalım ve üst yüzeylere gelen sayıları gözlemleyelim:

Her bir zarda 6 sayı vardır: 1,2,3,4,5,6. Dolayısıyla iki zar attığımızda örnek uzay S, 1 den 6 ya kadar olan sayıların oluşturduğu tüm mümkün ikililerden oluşacaktır ve eleman sayısı $n(S) = 6.6 = 36$ olacaktır. Bu elemanlar aşağıda bir tablo halinde gösterilmiştir:



A olayı, iki zar atıldığında gelen sayıların toplamının 6 olması olsun, yani yukarıdaki tablodan bakacak olursak,

$$A = \{(1,5), (2,4), (3,3),(4,2),(5,1)\}$$

dir. B olayı, iki zar atıldığında gelen sayılardan en büyüğünün 4 olması olsun, yani

$$B = \{(1,4), (2,4), (3,4),(4,4),(4,3), (4,2),(4,1)\}$$

dir. $A \cap B$ olayı, toplamları altı olan ve gelen sayılardan en büyüğünün 4 olmasıdır, yani

$$A \cap B = \{(2,4),(4,2)\}$$

Tablodaki gölgeli kısımlar ise $A \cup B$ olayını göstermektedir.

12.2. Sonlu Olasılık Uzayları

Bir deney sonlu bir örnek uzaya sahip olsun, yani örnek uzayı $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ olarak düşünelim. Her $a_i \in S$ noktasının

i. Her p_i sayısı negatif olmayan bir reel sayıdır, yani $p_i \geq 0$ dır.

ii. Tüm p_i lerin toplamı 1 dir, yani $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ dir.

koşullarını sağlayan ve a_i elemanlarının olasılıkları olarak adlandırılan reel p_i sayılarının atanmasıyla elde edilen kümeye sonlu olasılık uzayı veya olasılık modeli denir.

Bir a_i sonucunun olma olasılığı $P(a_i) = p_i$ olarak gösterilir. Bir A olayının olma olasılığı ise $P(A)$ ile gösterilir ve A nın elemanlarının olasılıklarının toplamına eşittir. Eğer $A = \{a_i\}$ gibi temel olay ise notasyon kolaylığı açısından, $P(\{a_i\})$ yerine $P(a_i)$ gösterimi kullanılacaktır.

Örnek: **Deney:** Üç bozuk para bir kez atılsın ve yazı gelme sayısı gözlemlensin.

Örnek uzay $S = \{0,1,2,3\}$ tür. S nin her bir elemanına karşılık gelen aşağıdaki atamalar bir olasılık uzayı tanımlar:

$$P(0) = \frac{1}{8}, \quad P(1) = \frac{3}{8}, \quad P(2) = \frac{3}{8}, \quad P(3) = \frac{1}{8}$$

Görüldüğü gibi tüm olasılıklar pozitiftir ve toplamları 1 eşittir.

A olayı, üç bozuk para atıldığında en az birinin yazı gelmesi olsun, yani

$$A = \{1,2,3\}$$

olur. B olayı, üç bozuk para atıldığında ya hepsinin yazı gelmesi yada hepsinin tura gelmesi olsun, yani

$$A = \{0, 3\}$$

olur.

Tanımdan dolayı, A olayının olma olasılığı

$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

ve B olayının olma olasılığı

$$P(B) = P(0) + P(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

dir.

12.3. Eş Olasılıklı Uzaylar

Bir örnek uzayın bazı elemanları eşit olasılıklarla meydana gelebilir. Eşit olasılıklara sahip elemanların oluşturduğu sonlu olasılık uzayına eş olasılık uzayı denir. Eğer bir S eş olasılıklı uzayı n elemana sahipse, her bir elemanının gerçekleşme olasılıkları eşit olacağından, her elemanının olasılığı $1/n$ dir. Eğer bir A olayı r eleman içeriyorsa A olayının gerçekleşme olasılığı $P(A) = r.(1/n) = r/n$ dir. Diğer bir deyişle, bir A olayının eleman sayısı $n(A)$ ile gösterilmek üzere,

$$P(A) = \frac{A\ nın\ eleman\ sayısı}{S\ nin\ eleman\ sayısı} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

dır. Bu formül sadece eş olasılıklı uzaylar durumunda kullanılır, genel durumda kullanılmaz.

Ayrıca, "rastgele" ifadesi de sadece eş olasılıklı uzaylar için kullanılacaktır ve "S kümesinden rastgele bir eleman seç" ifadesi, S deki her elemanın eşit seçilme olasılığına sahip olduğu anlamına gelecektir.

Örnek: Hilesiz iki zarı aynı anda atalım. S örnek uzayının 36 elemanı olacaktır ve her eleman eşit olasılıklıdır ve olasılıkları 1/36 dır. Dolayısıyla elimizde bir eş olasılık uzayı vardır. A olayı, iki zar atıldığında gelen sayıların toplamının 6 olması olsun, yani

$$A = \{(1,5), (2,4), (3,3),(4,2),(5,1)\}$$

dir. B olayı, iki zar atıldığında gelen sayılardan en büyüğünün 4 olması olsun, yani

$$B = \{(1,4), (2,4), (3,4),(4,4),(4,3), (4,2),(4,1)\}$$

dir. $A \cap B$ olayı, toplamları altı olan ve gelen sayılardan en büyüğünün 4 olmasıdır, yani

$$A \cap B = \{(2,4),(4,2)\}$$

dir. Şimdi A olayının olma olasılığını hesaplayalım:

$$P(A) = \frac{A\ nın\ eleman\ sayısı}{S\ nin\ eleman\ sayısı} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

B olayının olma olasılığını hesaplayalım:

$$P(B) = \frac{B \text{ nın eleman sayısı}}{S \text{ nin eleman sayısı}} = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{36}$$

$A \cap B$ olayının olma olasılığını hesaplayalım:

$$P(A \cap B) = \frac{A \cap B \text{ nın eleman sayısı}}{S \text{ nin eleman sayısı}} = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

12.4. Sonlu Olasılık Uzayları Üzerine Özellikler

1. Sonlu bir S olasılık uzayındaki tüm olayların sınıfı üzerinde tanımlı P olasılık fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

[P1] Her A olayı için $0 \leq P(A) \leq 1$

[P2] $P(S) = 1$

[P3] A ve B ayrık olaylar ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2. A herhangi bir olay olmak üzere $P(A^C) = 1 - P(A)$ dir.

Bu özellik, bir E olayının olma olasılığı p ise olmama olasılığının $1 - p$ olduğunu gösterir.

3. Herhangi A ve B iki olayı ve $\emptyset$ boş küme için

i. $P(\emptyset) = 0$

ii. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

iii. $A \subseteq B$ ise $P(A) \leq P(B)$

dir.

[P3] özelliği iki ayrık olayın birleşiminin olasılığının nasıl bulunacağına dair bir formül verirken herhangi iki olayın birleşiminin olasılığını nasıl buluruz sorusu doğal olarak akla gelmektedir. Aşağıdaki Toplam Prensibi olarak bilinen özellik bunun cevabını bize verir:

4. **(Toplam Prensibi)** A ve B herhangi iki olay olmak üzere

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

dir.

Örnek: Bir yazılım firmasında 30 kişi IT bölümünde, 20 kişi Satış bölümünde, 10 kişi her iki bölümde çalışmak üzere toplam 100 kişi arasından rastgele bir çalışan seçiliyor. Bu çalışanın iki bölümden birinde çalışma olasılığı nedir?

Olasılık uzayı S nin eleman sayısı $n(S) = 100$ dür. A olayı IT bölümünde çalışanlar olsun, B olayı da Satış bölümünde çalışanlar olsun. Bu durumda $n(A) = 30$ ve $n(B) = 20$ dir. Her iki bölümde de çalışanların olayı $A \cap B$ dir ve $n(A \cap B) = 10$ dur.

Bizden rastgele seçilen bir çalışanın iki bölümden birinde çalışma olasılığını bulmamızı istemesi aslında $P(A \cup B)$yi bulmak demektir.

Toplam Prensibi'nden

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

olduğunu biliyoruz. O halde,

$$P(A) = \frac{A \text{ nın eleman sayısı}}{S \text{ nin eleman sayısı}} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

$$P(B) = \frac{B \text{ nın eleman sayısı}}{S \text{ nin eleman sayısı}} = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{A \cap B \text{ nın eleman sayısı}}{S \text{ nin eleman sayısı}} = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

olduğundan

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

bulunur.

12.5. Şartlı Olasılık

Bir S örnek uzayında bir E olayı alalım. E olayı gerçekleşirken bir başka A olayının da gerçekleşmesi olasılığına A nın koşullu olasılığı denir, $P(A|E)$ şeklinde gösterilir ve

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

şeklinde hesaplanır.

Eğer S eş olasılıklı uzay ise

$$P(A \cap E) = \frac{n(A \cap E)}{n(S)} \quad ve \quad P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

olacağından

$$P(A|E)=\frac{n(A\cap E)}{n(E)}$$

olur.

Örnek: Bir çift hilesiz zar atılıyor. Örnek uzay $S\ nin$, 36 tane ikiliden oluştuğunu ünitenin başında göstermiştik. Dolayısıyla herhangi bir elemanın gelme olasılığı 1/36 dır. İki zar atıldığında gelen sayıların toplamı 6 ise bu sayılarsan birinin 2 olma olasılığı nedir?

$$E=\{Zarların\ toplamı\ 6\ olması\}\ ve\ A=\{En\ az\ bir\ zarın\ 2\ gelmesi\}$$

olayları olmak üzere soruda bize $P(A|E)$ şartlı olasılığını sormaktadır. Örnek uzayımız S eş olasılıklı uzay olduğundan

$$P(A|E)=\frac{n(A\cap E)}{n(E)}$$

dir. Her olayın elemanlarını ayrı ayrı yazarsak,

$$E=\{Zarların\ toplamı\ 6\ olması\}=\{(1,5),\ (2,4),\ (3,3),(4,2),(5,1)\}$$

olacağından $n(E)=5$ tir.

$A\cap E$ olayı ise, gelen zarların toplamı 6 iken en birinin 2 gelmesi olduğu için aslında E olayının elemanlarının içinden en az bir girişi 2 olan ikililerin olayı demektir, yani

$$A\cap E=\{(2,4),(4,2)\}$$

olacağından $n(A\cap E)=2$ dir. Buradan,

$$P(A|E)=\frac{n(A\cap E)}{n(E)}=\frac{2}{5}$$

bulunur.

Şartlı Olasılık için Çarpım Teoremi:

Bir S örnek uzayında A ve B iki olay ve $P(A)>0$ olsun. Şartlı olasılık tanımından

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

dır. Bu eşitliği şöyle de yazabiliriz:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$

Bu çarpım formülü, A ve B olaylarının her ikisi de aynı anda gerçekleşti olayın olasılığını verir. Bu formülü daha fazla $A_1, A_2,...,A_m$ olayları için de genişletebiliriz:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m) = P(A_1)P(A_2|A_1)...P(A_m|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{m-1})$$

olur.

Örnek: Bir kasada 4 ü bozuk olmak üzere toplam 12 ampul bulunmaktadır. Kasadan arka arkaya rastgele çekilen üç ampulün üçünün de bozuk olmama olasılığını bulalım.

12 ampulden 8 i bozuk olmadığından ilk çekilen ampulün bozuk olmama olasılığı 8/12 dir. İkinci ampulü çekmek için artık kutuda 11 ampul kalmış ve bunların 7 si bozuk değildir. Bu yüzden ikinci çekilen ampulün bozuk olmama olasılığı 7/11 dir. Üçüncü ampulü çekmek için artık kutuda 10 ampul kalmış ve 6 sı bozuk değildir. Bu yüzden üçüncü çekilen ampulün bozuk olmama olasılığı 6/10 dur. Çarpım teoreminden, çekilen üç ampulün üçünün de bozuk olmama olasılığı,

$$p = \frac{8}{12} . \frac{7}{11} . \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

bulunur.

12.6. Bağımsız Olaylar

Bir S olasılık uzayında A ve B iki olay olmak üzere, bu olaylardan birinin gerçekleşmesi diğerinin gerçekleşmesini etkilemiyorsa bu iki olaya bağımsız olaylar denir. Başka bir deyişle, $P(B|A)$ ile $P(B)$ eşit ise, B olayı A olayından bağımsızdır denir. Dolayısıyla, Çarpım Teoremi $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ dan

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

elde edilir. Bu eşitliği kullanarak, bağımsız olayları şöyle de tanımlarız:

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ise A ve B olaylarına bağımsız olay, aksi takdirde bağımlı olay denir.

Bağımsızlık aslında bir simetrik bağıntıdır, yani,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad eşitliği \quad P(A|B) = P(A) \quad ve \quad P(B|A) = P(B)$$

dir.

Örnek: Bir bozuk parayı 3 kez atalım. Oluşan eş olasılıklı uzay

$$S = \{YYY, YYT, YTY, YTT, TYY, TYT, TTY, TTT\}$$

dir. Aşağıdaki olayları ele alalım:

$$A = \{İlk\ atışta\ yazı\ gelmesi\} = \{YYY, YYT, YTY, YTT\}$$

$B = \{\dot{I}kinci\ atışta\ yazı\ gelmesi\} = \{YYY, YYT, TYY, TYT\}$

$$C = \{Üç\ atışta\ arka\ arkaya\ tam\ iki\ tane\ yazı\ gelmesi\} = \{YYT, TYY\}$$

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

dür. Bu olayların bağımsız olup olmadıklarını inceleyelim.

$A \cap B = \{YYY, YYT\}$ olduğundan

$$P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$

dir, yani A ve B bağımsız olaylardır.

$A \cap C = \{YYT\}$ olduğundan

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} = P(A)P(C)$$

dir, yani A ve C bağımsız olaylardır.

$B \cap C = \{YYT, TYY\}$ olduğundan

$$P(B \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(B)P(C)$$

dir, yani B ve C bağımlı olaylardır.

12.7. Rastgele Değişkenler

S bir deneyin örnek uzayı olmak üzere, deneyin sonucunun, yani örnek uzayın elemanlarının sayı olması gerekmez. Şimdiye kadar gördüğümüz örneklerdeki gibi, bir bozuk parayı attığımızda sonuçlar yazı ve tura iken, bir çift zarı attığımızda sonuçlar doğal sayı ikilileridir. Fakat genellikle bir deneyin sonucuna bir sayı atamak isteriz. Örneğin, yazı tura atmada 1 e yazı, 0 a tura atamak uygun olabilir yada bir çift zar atarken, sonuca gelen iki sayının toplamını atamak isteyebiliriz. Böyle bir sayısal değer atamasına rastgele değişken denir. Daha net bir tanımı aşağıdaki gibi verebiliriz:

Bir S örnek uzayında her bir sonuca karşılık bir sayısal değer atanması kuralı olan X e rastgele değişken denir. Başka bir deyişle, reel değerli bir X rastgele değişkeni bir deneyin sonuçlarını reel sayılar ile eşleştiren aşağıdaki gibi herhangi bir fonksiyondur:

$$X: S \longrightarrow \mathbb{R}, \quad s \longrightarrow X(s)$$

X in değer kümesi, yani X rastgele değişkeni tarafından atanan sayıların kümesine değer uzayı denir ve R_X şeklinde gösterilir.

Sonsuz bir örnek uzayda S den $\mathbb{R}$ ye giden herhangi bir fonksiyon bir rastgele değişken olarak düşünülemez ama sonlu örnek uzaylarda S den $\mathbb{R}$ ye giden herhangi bir fonksiyon bir rastgele değişkendir.

Örnek: Bir çift zar atılsın. Biliyoruz ki S örnek uzayı, a ve b, 1 den 6 ya kadar olan sayılar olmak üzere 36 tane (a,b) ikilisinden oluşur.

X, zarları attıktan sonra gelen sayıların toplamı olarak atasın. Bu durumda X, değer uzayı

$$R_X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

olan bir rastgele değişkendir.

Y, zarları attıktan sonra gelen sayıların en büyüğü olarak atasın. Bu durumda Y, değer uzayı

$$R_Y = \{1,2,3,4,5,6\}$$

olan bir rastgele değişkendir.

Rastgele Değişkenlerin Toplam ve Çarpımı ve Bir Notasyon

X ve Y, aynı S örnek uzayı üzerinde iki rastgele değişken olsun.

İki rastgele değişkenin toplamı,

$$(X+Y)(s) = X(s) + Y(s), \quad s \in S$$

şeklinde,

İki rastgele değişkenin çarpımı,

$$(XY)(s) = X(s)Y(s), \quad s \in S$$

şeklinde ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, rastgele değişken X in k skaleri ile çarpımı

$$(kX)(s) = kX(s), \quad s \in S$$

şeklinde tanımlanır.

Daha genel olarak, herhangi bir polinom yada üstel fonksiyon $h(x,y,...,z)$ için, S üzerinde bir fonksiyon olarak $h(X,Y,...,Z)$ yi

$$[h(X,Y,...,Z)](s) = h[X(s), Y(s),..., Z(s)]$$

şeklinde tanımlarız.

Açıktır ki toplam, çarpım, skalerle çarpım ve $h(X,Y,...,Z)$ de birer rastgele değişkendir.

Kısa bir notasyon olarak, bir X rastgele değişkeninin bir "a" elemanına dönüşme olasılığını $P(X=a)$ ile göstereceğiz. Benzer şekilde, bir X rastgele değişkeninin bir "[a,b]" aralığına dönüşme olasılığını $P(a \leq X \leq b)$ şeklinde göstereceğiz, yani $s \in S$ olmak üzere

$$P(X=a) \equiv P(\{s : X(s)=a\})$$

ve

$$P(a \leq X \leq b) \equiv P(s{:}a \leq X(s) \leq b)$$

dir.

Benzer tanımlar, $P(X \leq a),\ P(X=a, Y=b),\ P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d\ )$ gibi notasyonları için de yapılabilir.

12.8. Bir Rastgele Değişkenin Olasılık Dağılımı

X, bir S sonlu örnek uzayı üzerinde $R_X = \{x_1, x_2,...,x_t\}$ değer uzaylı bir rastgele değişken olsun. X, rastgele değişkeni yardımıyla, R_X değer uzayındaki x_k noktalarını p_k olasılıklarına dönüştüren

$$f(x_k) = p_k = P(X=x_k) = \ S\ nin\ görüntüsü\ x_k\ olan\ noktalarının\ olasılıklarının\ toplamı$$

şeklinde bir f fonksiyonu tanımlayabiliriz. Bu f fonksiyonu ile oluşan

$$(x_1,f(x_1)),\ (x_2,f(x_2)),...,\ (x_k,f(x_k))$$

sıralı ikililerin kümesine X rastgele değişkenin dağılımı denir ve genellikle

x sonuçları	x_1	x_2	...	x_t
f(x) olasılıkları	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_t)$

şeklinde bir tablo ile verilir. Dağılım fonksiyonu iki şu iki özelliği sağlar:

i. $f(x_k) \geq 0$

ii. $\sum_k f(x_k) = 1$

Farklı kaynaklarda, X in dağılımı, $[x,f(x)]$ notasyonu yerine $[x_k,p_k]$ notasyonu kullanılır.

Eğer S bir eş olasılıklı uzay ve f, S üzerindeki bir $R_X = \{x_1, x_2,...,x_t\}$ değer uzaylı X rastgele değişkeninin dağılımı ise

$$p_i = f(x_i) = \frac{S\ nin\ görüntüsü\ x_i\ olan\ elemanlarının\ sayısı}{S\ nin\ elemanlarının\ sayısı}$$

olarak bulunur.

Örnek: Bir çift zar atılsın. Biliyoruz ki S örnek uzayı, a ve b, 1 den 6 ya kadar olan sayılar olmak üzere 36 tane (a,b) ikilisinden oluşur, yani $n(S) = 36$ dır.

X rastgele değişkeni, zarları attıktan sonra gelen (a,b) ikilisini sayıların toplamına, yani $a + b$ ye götürsün. Bu durumda değer uzayı

$$R_X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

dir. Şimdi X in f dağılımını bulalım: S eş olasılıklı uzay olduğundan R_X değer uzayındaki her x_k noktası için

$$f(x_i) = \frac{S\ nin\ görüntüsü\ x_i\ olan\ elemanlarının\ sayısı}{S\ nin\ elemanlarının\ sayısı}$$

şeklinde olacağını belirtmiştik. O halde

$2 \in R_X$ için

$$f(2) = \frac{S\ nin\ görüntüsü\ 2\ olan\ elemanlarının\ sayısı}{S\ nin\ elemanlarının\ sayısı} = \frac{1}{36}$$

dir. Çünkü S nin görüntüsü 2 olan sadece bir elemanı vardır: (1,1).

$3 \in R_X$ için

$$f(3) = \frac{S\ nin\ görüntüsü\ 3\ olan\ elemanlarının\ sayısı}{S\ nin\ elemanlarının\ sayısı} = \frac{2}{36}$$

dir. Çünkü S nin görüntüsü 3 olan iki elemanı vardır: (1,2) ve (2,1).

$4 \in R_X$ için

$$f(4) = \frac{S\ nin\ görüntüsü\ 4\ olan\ elemanlarının\ sayısı}{S\ nin\ elemanlarının\ sayısı} = \frac{3}{36}$$

dir. Çünkü S nin görüntüsü 4 olan iki elemanı vardır: (1,3), (2,2) ve (3,1).

Bu şekilde devam edersek,

$$f(5) = 4/36, \qquad f(6) = 5/36, \qquad \dots \quad , f(12) = 1/36$$

bulunur ve böylece X rastgele değişkeninin dağılımı

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

şeklindedir.

12.9. Bir Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri

X bir $S = \{s_1, s_2,\ldots,s_m\}$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı bir rastgele değişken olsun. X rastgele değişkenin beklenen değeri μ yada $E(X)$ ile gösterilir ve

$$\mu = E(X) = X(s_1)P(s_1) + X(s_2)P(s_2) + \ldots + X(s_m)P(s_m)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} X(s_k)P(s_k)$$

şeklinde tanımlanır.

Öte yandan, $R_X = \{x_1, x_2,\ldots,x_t\}$ değer uzaylı bir X rastgele değişkeninin dağılımı f ise, X in beklenen değeri

$$\mu = E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots + x_t f(x_t) = \sum_{k=1}^{t} x_k f(x_k)$$

dır. X in dağılımı, $[x,f(x)]$ notasyonu yerine $[x_k,p_k]$ notasyonu kullanırsa,

$$\mu = E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_t p_t = \sum_{k=1}^{t} x_k p_k$$

dir.

Örnek: Bir bozuk para 6 kez atılıyor. Açıktır ki S örnek uzayı eş olasılıklı uzaydır ve eleman sayısı $n(S) = 64$ tür.

X rastgele değişkeni, 6 kez atılan bozuk paranın yazı gelme sayısı olsun. Bu durumda değer uzayı

$$R_X = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

olur. X rastgele değişkeninin dağılımı hesaplandığında aşağıdaki tablo elde edilir:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64

Örneğin,

$1 \in R_X$ için

$$f(1) = \frac{S \text{ nin görüntüsü } 1 \text{ olan elemanlarının sayısı}}{S \text{ nin elemanlarının sayısı}} = \frac{6}{64}$$

tür. Çünkü S nin görüntüsü 1 olan 6 elemanı vardır: YTTTTT, TYTTTT, TTYTTT, TTTYTT, TTTTYT, TTTTTY

Şimdi X rastgele değişkeninin beklenen değeri

$$\mu = E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_6p_6 = 0.\frac{1}{64} + 1.\frac{6}{64} + 2.\frac{15}{64} + 3.\frac{20}{64} + 4.\frac{15}{64} + 5.\frac{6}{64} + 6.\frac{1}{64} = 3$$

bulunur.

12.10. Bir Rastgele Değişkenin Varyansı ve Standart Sapması

$R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ değer uzaylı bir X rastgele değişkeninin dağılımı f, beklenen değeri μ ise X in varyansı $Var(X)$ ile gösterilir ve

$$Var(X) = (x_1 - \mu)^2 f(x_1) + (x_2 - \mu)^2 f(x_2) + \dots + (x_t - \mu)^2 f(x_t) = \sum_{k=1}^{t} (x_k - \mu)^2 f(x_k) = E((X-\mu)^2)$$

şeklinde tanımlanır.

dır. X in dağılımı, $[x, f(x)]$ notasyonu yerine $[x_k, p_k]$ notasyonu kullanırsa,

$$Var(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \dots + (x_t - \mu)^2 p_t = \sum_{k=1}^{t} (x_k - \mu)^2 p_k = E((X-\mu)^2)$$

dir.

X in standart sapması ise σ_X veya daha basit olarak σ ile gösterilir ve varyansının kareköküdür, yani

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan, varyansın

$$Var(X) = \sigma_X{}^2$$

olduğu da elde edilir.

Aşağıdaki formül varyansı hesaplamak için varyansın yukarıdaki tanımından daha kullanışlıdır:

$$Var(X) = x_1{}^2 f(x_1) + x_2{}^2 f(x_2) + \dots + x_t{}^2 f(x_t) - \mu^2$$
$$= \left[\sum_{k=1}^{t} x_k{}^2 f(x_k)\right] - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

yada

$$Var(X) = x_1{}^2 p_1 + x_2{}^2 p_2 + \dots + x_t{}^2 p_t - \mu^2 = \left[\sum_{k=1}^{t} x_k{}^2 p_k\right] - \mu^2$$
$$= E(X^2) - \mu^2$$

Örnek: Önceki örnekten bir bozuk parayı 6 kez attığımızda, 6 kez atılan bozuk paranın yazı gelme sayısı olan X rastgele değişkeninin değer uzayının

$$R_X = \{0,1,2,3,4,5,6\},$$

dağılımının

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64

ve beklenen değerinin $\mu = 3$ olduğunu biliyoruz. Şimdi X in varyansını standart sapmasını bulalım:

$$Var(X) = (x_1 - \mu)^2 f(x_1) + (x_2 - \mu)^2 f(x_2) + \dots + (x_6 - \mu)^2 f(x_6)$$

$$= (0 - 3)^2 \frac{1}{64} + (1 - 3)^2 \frac{6}{64} + (2 - 3)^2 \frac{15}{64} + (3 - 3)^2 \frac{20}{64} + (4 - 3)^2 \frac{15}{64} + (5 - 3)^2 \frac{6}{64} + (6 - 3)^2 \frac{1}{64} = 1,5$$

bulunur. Diğer formülle de hesaplayalım:

$$Var(X) = x_1{}^2 f(x_1) + x_2{}^2 f(x_2) + \dots + x_t{}^2 f(x_t) - \mu^2$$

$$= 0^2.\frac{1}{64} + 1^2.\frac{6}{64} + 2^2.\frac{15}{64} + 3^2.\frac{20}{64} + 4^2.\frac{15}{64} + 5^2.\frac{6}{64} + 6^2.\frac{1}{64} - 3^2 = 1,5$$

bulunur. Standart sapma ise

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1,5} \approx 1,225$$

bulunur.

Chebyshev Eşitsizliği: X, μ beklenen değere ve σ standart sapmaya sahip bir rastgele değişken olsun. Herhangi bir k doğal sayısı için, X in $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ aralığında olan bir değerinin olasılığı en az $1 - \frac{1}{k^2}$ dir, yani

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

dir.

Örnek: X, $\mu = 75$ beklenen değere ve $\sigma = 5$ standart sapmaya sahip bir rastgele değişken olsun. $k = 2$ için Chebyshev Eşitsizliğini gerçekleyin ve yorumlayın.

$\mu - k\sigma = 75 - 2.5 = 65$ ve $\mu + k\sigma = 75 + 2.5 = 85$

olduğundan, X in 65 ile 85 arasında olan değerinin olasılığı en az $1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$ tür, yani

$$P(75 \leq X \leq 85) \geq \frac{3}{4}$$

tür.

Bölüm Özeti

Bu bölümde olasılık konusunun temelleri ele alındı. İlk önce örnek uzay ve olay kavramları verildi. Herhangi iki olayın birleşim, kesişim işlemlerinin de bir olay olduğu gösterildi. Çok sayıda deney örneğinde de bu kavramlar işlendi. Daha sonra sonlu olasılık uzayları üzerinde bir deney sonucunun gerçekleşme olasılığı kavramı verildi. Sonlu olasılık uzayı eş olasılıklı olduğunda olasılıkların nasıl hesaplanacağı görüldü. Ayrıca, olasılıkları bilinen olayların birleşim ve kesişim olaylarının olasılıklarının nasıl hesaplanacağı, bir olayın gerçekleşmeme olasılığının nasıl hesaplanacağı, iki olay birbirinden bağımsız ise olayların kesişimlerinin olasılıklarının nasıl değişeceğine dair de formüller verildi. Bir olayın gerçekleşmesi başka bir olayın gerçekleşmesine bağlı olduğunda olasılık kavramının şartlı olarak gerçekleşeceğine ve bu şartlı olasılık hesabının nasıl yapılacağı da gösterildi.

Bu bölümde son olarak, sonlu örnek uzaylar üzerinde rastgele değişken, rastgele değişkenlerin dağılımları, beklenen değer, varyans ve standart sapma gibi kavramlar verilmiş ve örneklerle pekiştirilmiştir.

Kaynakça

1. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 3rd edition, 2007