4. BAĞINTI

4.1. Kartezyen Çarpım

a ve b elemanlarının, ilk elemanın a, ikinci eleman olarak b olacak şekilde gösterilişine a ve b nin sıralı ikilisi denir ve (a,b) ile gösterilir. Bununla birlikte,

$$(a,b) = (c,d)$$

olması için gerek ve yeter koşul $a = c$ ve $b = d$ olmasıdır. Bu sebeple, eğer $a \neq b$ ise $(a,b) \neq (b,a)$ dır.

Uyarı: (a,b) gösterilişi, a,b gösterilişi ile karıştırılmamalıdır. (a,b) a ve b nin sıralı ikilisini ifade ederken, a,b, elemanları a ve b olan bir kümeyi ifade eder ve kümelerde elemanların sırasının önemi yoktur, yani $\{a,b\} = \{b,a\}$ dır.

A ve B herhangi iki küme olsun. $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere tüm (a,b) sıralı ikililerinin kümesine A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı denir ve $A \times B$ ile gösterilir. Dolayısıyla,

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

dir.

Herhangi sonlu A ve B kümesi için $A \times B$ kartezyen çarpımının eleman sayısı

$$n(A \times B) = n(A)n(B)$$

dir.

Örnek: $A = \{2,4,6\}$ ve $B = \{x,y\}$ olsun.

$$A \times B = \{(2,x),(2,y),(4,x),(4,y),(6,x),(6,y)\}$$

dir. Görüldüğü gibi $n(A \times B) = 6 = 3 \cdot 2 = n(A)n(B)$ dir.

$$B \times A = \{(x,2),(x,4),(x,6),(y,2),(y,4),(y,6)\}$$

$$A \times A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$$

dır.

Bu örnekte görüldüğü gibi $A \times B \neq B \times A$ dır, yani kartezyen çarpımda sıranın önemi vardır.

4.2. Bağıntı

A ve B iki küme olmak üzere $A \times B$ kartezyen çarpımının bir alt kümesine A dan B ye bir bağıntı denir.

R, A dan B ye bir bağıntı olsun. Dolayısıyla R, ilk elemanı A dan, ikinci elemanı B den gelen sıralı ikililerin bir kümesidir, yani her $a \in A$ ve $b \in B$ çifti için aşağıdakilerden biri mutlaka doğrudur:

1. $(a,b) \in R$; bu durumda a, b ye R-bağıntılıdır denir.

2. $(a,b) \notin R$; bu durumda a, b ye R-bağıntılı değildir denir.

Eğer R, A dan A ya giden bir bağıntı ise, yani $A^2 = A \times A$ nın bir alt kümesi ise, R ye A üzerinde bir bağıntı denir.

Bir R bağıntısına sıralı ikililerin ilk elemanlarının oluşturduğu kümeye R bağıntısının tanım kümesi, ikinci elemanlarının oluşturduğu kümeye ise R bağıntısının değer kümesi denir.

Örnekler:

1. $A = \{a,b,c\}$, $B = \{2,4,6\}$ olmak üzere $R = \{(a,2),(a,6),(c,2)\}$ olsun. R, A dan B ye giden bir bağıntıdır. Çünkü, R, $A \times B$ kartezyen çarpımının bir alt kümesidir. R nin tanım kümesi, yani R ye ait olan sıralı ikililerin ilk elemanlarının kümesi, {a,c} dir. R nin değer kümesi, yani R ye ait olan sıralı ikililerin ikinci elemanlarının kümesi, {2,6} dır.

2. Herhangi bir kümeler topluluğu üzerindeki $\subseteq$ kapsama işlemi bir bağıntıdır, yani $R = \{(A,B) : A \subseteq B\}$ dir.

3. $R = \{(m,n) : m \text{ böler } n\}$, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde bir bağıntıdır. Burada m böler n, $n = mk$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ olması anlamındadır ve $m|n$ şeklinde gösterilir. Örneğin, $5|30$ ama $4\nmid 30$ dir.

4. A herhangi bir küme olmak üzere $A \times A$ ve $\emptyset$ de $A \times A$ nın birer alt kümesi olduğundan A üzerinde birer bağıntıdırlar. $A \times A$ bağıntısına evrensel bağıntı, $\emptyset$ bağıntısına boş bağıntı denir.

4.3. Bağıntı Türleri

Yansımalı Bağıntı: Bir A kümesi üzerindeki bir R bağıntısı

"her $a \in A$ için $(a,a) \in R$ "

koşulunu sağlıyorsa R bağıntısına yansımalı bağıntı denir. Eğer $(a,a) \notin R$ olacak şekilde en az bir $a \in A$ var ise R bağıntısına yansımalı olmayan bağıntı denir.

Örnek: $A = \{1,3,5,7\}$ kümesi üzerinde verilen
$R_1 = \{(1,1),(1,3),(3,5),(1,5),(7,7)\}$
$R_2 = \{(1,1),(1,3),(3,3),(5,5),(7,7)\}$
$R_3 = \{(1,3),(3,1)\}$

$R_4 = \emptyset$, boş bağıntı
$R_5 = A \times A$, evrensel bağıntı
bağıntılarının yansımalı olup olmadıklarını inceleyelim.
A kümesi $1,3,5,7$ elemanlarından oluştuğu için bir bağıntının yansımalı olması için tanımı gereği $(1,1),(3,3),(5,5),(7,7)$ ikililerini içermelidir. Bu yüzden sadece R_2 ve $R_5 = A \times A$ bağıntıları yansımalıdır. R_1 bağıntısı $(3,3)$ ve $(5,5)$ ikililerini içermediği için, R_3 ve R_4 bağıntıları $(1,1),(3,3),(5,5),(7,7)$ ikililerini içermediği için yansımalı olmayan bağıntılardır.

Simetrik Bağıntı: Bir A kümesi üzerindeki bir R bağıntısı

" $a,b \in A$ olmak üzere $(a,b) \in R$ ise $(b,a) \in R$ "

koşulunu sağlıyorsa R bağıntısına simetrik bağıntı denir. Eğer $(a,b) \in R$ fakat $(b,a) \notin R$ olacak şekilde en az bir $a,b \in A$ var ise R bağıntısına simetrik olmayan bağıntı denir.

Örnek: $A = \{1,3,5,7\}$ kümesi üzerinde verilen
$R_1 = \{(1,1),(1,3),(3,5),(1,5),(7,7)\}$
$R_2 = \{(1,1),(3,7),(3,1),(7,3),(7,7)\}$ bağıntılarından R_1 bağıntısı simetrik olmayan bağıntıdır. Çünkü, $(1,3) \in R_1$ iken $(3,1) \notin R_1$ dir. Benzer şekilde, $(1,5) \in R_1$ iken $(5,1) \notin R_1$ dir. R_2 bağıntısı simetriktir. Çünkü, $(3,7) \in R_2$ iken $(7,3) \in R_2$ dir.

Anti-simetrik Bağıntı: Bir A kümesi üzerindeki bir R bağıntısı

" $a,b \in A$ olmak üzere $(a,b) \in R$ ve $(b,a) \in R$ ise $a = b$ "

koşulunu sağlıyorsa R bağıntısına anti-simetrik bağıntı denir. Eğer $(a,b),(b,a) \in R$ olacak şekilde <u>birbirlerinden farklı</u> $a,b \in A$ var ise R bağıntısına anti-simetrik olmayan bağıntı denir.

Örnek: $A = \{1,3,5,7\}$ kümesi üzerinde verilen $R = \{(1,1),(3,7),(3,1),(7,3),(7,7)\}$ bağıntısı anti-simetrik değildir. Çünkü, $(3,7),(7,3) \in R$ fakat $3 \neq 7$ dir.

Geçişmeli Bağıntı: Bir A kümesi üzerindeki bir R bağıntısı

" $a,b,c \in A$ olmak üzere $(a,b) \in R$ ve $(b,c) \in R$ ise $(a,c) \in R$ "

koşulunu sağlıyorsa R bağıntısına geçişmeli bağıntı denir. Eğer $(a,b),(b,c) \in R$ fakat $(a,c) \notin R$ olacak şekilde $a,b,c \in A$ var ise R bağıntısına geçişmeli olmayan bağıntı denir.

Örnek: $A = \{1,3,5,7\}$ kümesi üzerinde verilen $R_1 = \{(1,1),(1,3),(3,7),(3,1),(7,3),(7,7)\}$ bağıntısı geçişmeli bağıntıdır. Çünkü, $(1,3),(3,1) \in R_1$ ve $(1,1) \in R_1$ dir.
Fakat, $R_2 = (1,1),(1,3),(3,5),(7,7)$ bağıntısı geçişmeli değildir. Çünkü, $(1,3),(3,5) \in R_2$ ama $(1,5) \notin R_2$ dir.

4.4. Denklik Bağıntısı ve Parçalanış

Boştan farklı bir A kümesi üzerinde yansımalı, simetrik ve geçişmeli bir R bağıntısı varsa bu R bağıntısına, A üzerinde bir denklik bağıntısı denir. Başka bir deyişle, A kümesi üzerinde

1. Her $a \in A$ için $(a,a) \in R$

2. $a,b \in A$ olmak üzere $(a,b) \in R$ ise $(b,a) \in R$

3. $a,b,c \in A$ olmak üzere $(a,b) \in R$ ve $(b,c) \in R$ ise $(a,c) \in R$

koşulları sağlanıyorsa R ye A üzerinde bir denklik bağıntısı denir.
Örnek:

1. m pozitif bir tamsayı olmak üzere iki a,b tamsayısı için $m|a-b$ ise, yani "m böler $a-b$" ise a ve b modülo m eşleşik (kongrü) denir ve

$$a \equiv b(mod m)$$

şeklinde gösterilir. Örneğin, $m = 3$ modülüne göre

$$12 \equiv 0(mod 3) \text{ ve } 25 \equiv 1(mod 3)$$

dir. Çünkü 3 böler $12-0$ ve 3 böler $25-1$ dir.
Modülo m e göre eşleşik bağıntısı, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

2. Bir kümeler topluluğu üzerindeki $\subseteq$ kapsama bağıntısı denklik bağıntısı değildir. Çünkü bu bağıntı simetrik değildir, yani $A \subseteq B$ kapsaması her zaman $B \subseteq A$ kapsamasını göstermez.

R, boştan farklı bir A kümesi üzerinde denklik sınıfı olsun. Her $a \in A$ ya karşılık gelen R-bağlantılı elemanların kümesine A da a nın denklik sınıfı denir ve $[a]$ ile gösterilir, yani

$$[a] = \{x:(a,x) \in R\}$$

dir. Herhangi bir $b \in [a]$ ya da $[a]$ denklik sınıfının temsilcisi denir.
A nın tüm elemanlarının bir R denklik bağınıtsı altındaki denklik sınıflarının oluşturduğu topluluğa A nın R bağıntısına göre parçalanışı denir ve A/R ile gösterilir, yani

$$A/R = \{[a]:a \in A\}$$

dır.

Örnek: $A = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Çünkü yansımalı, simetrik ve geçişmelidir (Kontrol ediniz.). Dolayısıyla A nın elemanlarının denklik sınıfları şu şekildedir:

$$[a] = \{a,b\}, \quad [b] = \{a,b\}, \ [c] = \{c\}$$

Burada $[a] = [b]$ olduğu görülmektedir ve $A/R = \{[1],[3]\}$, A nın bir parçalanışıdır.

4.5. Kısmi Sıralama Bağıntısı

Boştan farklı bir A kümesi üzerinde yansımalı, anti-simetrik ve geçişmeli bir R bağıntısı varsa bu R bağıntısına, A üzerinde kısmi sıralama bağıntısı denir.

Örnek:

1. Bir kümeler topluluğu üzerindeki $\subseteq$ kapsama bağıntısı kısmi sıralama bağıntısıdır. Çünkü, kapsamanın tanımından

– Herhangi bir A kümesi için $A \subseteq A$

_ $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise $A = B$

_ $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$

özelliklerinin sağlandığı açıktır.

2. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde "$a,b \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a|b$" bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Çünkü,

– Herhangi bir $a \in \mathbb{N}$ için $a|a$ dır. Çünkü, her $a \in \mathbb{N}$ elemanı $a = a.1$ şeklinde yazılır.

_ $a|b$ ve $b|a$ ise $a = b$ dir. Çünkü, $a|b$ ise $b = ak$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. $b|a$ ise $a = bt$ olacak şekilde $t \in \mathbb{N}$ vardır. $b = ak$ ve $a = bt$ eşitliklerinden $b = ak = (bt)k = b(tk)$, yani $tk = 1$ elde edilir. $t,k \in \mathbb{N}$ ve $tk = 1$ ise $t = k = 1$ dir. Buradan da $a = b$ elde edilir.

_ $a|b$ ve $b|c$ ise $a|c$ dir. Çünkü, $a|b$ ise $b = ak$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. $b|c$ ise $c = bt$ olacak şekilde $t \in \mathbb{N}$ vardır. Bu iki eşitlikten $c = bt = (ak)t$=a(kt) elde edilir. Burada $k,t \in \mathbb{N}$ ise $kt \in \mathbb{N}$ olacağından $a|c$ dir.

Fakat $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde $a|b$ bağıntısı kısmi sıralama bağıntısı değildir. Çünkü, anti-simetrik özelliği sağlanmaz. Örneğin; $1|-1$, $-1|1$ fakat $-1 \neq 1$ dir.

4.6. Çözümlü Sorular

1. $A = \{p,r,s\}$ ve $B = \{2,4,6\}$ olmak üzere $A \times B$ kümesinin elemanlarını bulunuz.
$n(A \times B) = ?$

İlk olarak, $n(A \times B) = n(A)n(B) = 3 \cdot 3 = 9$ dir. $A \times B = \{(a,b): a \in A \text{ ve } b \in B\}$ olduğundan

$A \times B = \{(\text{p},2),(\text{p},4),(\text{p},6),(\text{r},2),(\text{r},4),(\text{r},6),(\text{s},2),(\text{s},4),\ (\text{s},6)\}$ bulunur.

2. $(5x, x - y) = (10,3)$ eşitliğini sağlayan x,y sayılarını bulunuz.

İki sıralı ikilinin eşit olması için gerek ve yeter koşul birinci elemanların birbirine eşit ve ikinci elemanların birbirine eşit olmadısıdır. Dolayısıyla,

$5x = 10$ ve $x - y = 3$

olmalıdır. Burada $x = 2$ ve $y = -1$ bulunur.

3. $A = \{x,y,z,t\}$, $B = \{1,2,3\}$ olmak üzere

$R = \{(x,1),(x,3),(z,2),(t,1),(t,3)\}$

bağıntısının tanım ve değer kümelerini bulunuz.

R nin tanım kümesi, R ye ait sıralı ikililerin ilk elemanlarının oluşturduğu kümedir, yani $\{x,z,t\}$ dir. R nin değer kümesi ise R ye ait sıralı ikililerin ikinci elemanlarının oluşturduğu kümedir, yani $\{1,2,3\}$ dür.

4. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerindeki

$R = \{(x,y): x + 3y = 12\}$

bağıntısının tanım ve değer kümelerini bulunuz.

Önce R nin elemanlarını bulalım. $x+3y=12$ eşitliğini sağlayan tüm $x,y\ \in \mathbb{N}$ sayı çiftleri $x=9,y$ =1, yani $(x,y)=(9,1)\in R$, $x=6,y=2$, yani $(x,y)=(6,2)\in R$, $x=3,y=3$, yani $(x,y)=(3,3)\in R$ bulunur. Buradan

$$R=\{(9,1),(6,2),(3,3)\}$$

elde edilir. Dolayısıyla R nin tanım kümesi $\{9,6,3\}$ ve değer kümesi $\{1,2,3\}$ dür.

5. x,y,z birbirlerinden farklı elemanlar olmak üzere $A=\{x,y,z\}$ kümesi üzerinde tanımlı

$$R_1=\{(x,x),(x,y),(x,z),(z,z)\}$$

$$R_2=\{(x,x),(x,y),(y,x),(y,y),(z,z)\}$$

$$R_3=\{(x,x),(x,y),(y,y),(y,z)\}$$

$\emptyset$: boş bağıntı

$A\times A$: evrensel bağıntı

bağıntılarının (a) yansımalı (b) simetrik (c) geçişmeli (d) anti-simetrik olup olmadığını inceleyiniz. Hangileri denklik bağıntısıdır?

(a) Verilen bir R bağıntısının yansımalı olup olmadığını bulabilmek için $x,y,z\ \in A$ için $(x,x),(y,y),(z,z)\ \in R$ olması koşulunu sağlayıp sağlamadığına bakmalıyız.

R_1 bağıntısı yansımalı değildir, çünkü $y\in A$ ama $(y,y)\notin R_1$ dir.

R_2 bağınıtısı yansımalıdır. Çünkü, $x,y,z\ \in A$ için $(x,x),(y,y),(z,z)\ \in R_2$ dir.

R_3 bağıntısı yansımalı değildir. Çünkü, $z\in A$ ama $(z,z)\notin R_3$ dür.

$\emptyset$ boş bağıntısı yansımalı değildir. Çünkü, $x,y,z\ \in A$ için $(x,x),(y,y),(z,z)\ \notin \emptyset$ dir.

$A\times A$ evrensel bağıntısı yansımalıdır. Çünkü $x,y,z\ \in A$ için $(x,x),(y,y),(z,z)\ \in A\times A$ dir.

(b) Verilen bir R bağıntısının simetrik olup olmadığını bulabilmek için $(a,b)\in R$ ise $(b,a)\in R$ olması koşulunu sağlayıp sağlamadığına bakmalıyız.

R_1 bağıntısı simetrik değildir. Çünkü, $(x,y)\in R_1$ ama $(y,x)\notin R_1$ dir. Benzer şekilde $(x,z)\in R_1$ ama $(z,x)\notin R_1$ dir.

R_2 bağıntısı simetriktir. Çünkü, $(x,y)\in\ R_2$ ise $(y,x)\in\ R_2$ dir.

R_3 bağıntısı simetrik değildir. Çünkü, $(x,y) \in R_3$ ama $(y,x) \notin R_3$ dir. Benzer şekilde $(y,z) \in R_3$ ama $(z,y) \notin R_3$ dir.

$\emptyset$ boş bağıntısı simetriktir. Çünkü koşulu bozacak bir ikilisi yoktur.

$A \times A$ evrensel bağıntısı simetriktir. Çünkü tüm sıralı ikilileri içerir.

(c) Verilen bir R bağıntısının geçişmeli olup olmadığını bulabilmek için $(a,b) \in R$ ve $(b,c) \in R$ ise $(a,c) \in R$ olması koşulunu sağlayıp sağlamadığına bakmalıyız.

R_1 bağıntısı geçişmelidir. Çünkü, (x,x), $(x,y) \in R_1$ ve $(x,y) \in R_1$ dir ($a = x, b = y, c = y$). Benzer şekilde (x,x), $(x,z) \in R_1$ ve $(x,z) \in R_1$ dir.

R_2 bağıntısı geçişmelidir. Çünkü, (x,x), $(x,y) \in R_2$ ve $(x,y) \in R_2$ dir. Benzer şekilde, (x,y), $(y,x) \in R_2$ ve $(x,x) \in R_2$ dir. Benzer şekilde, (x,y), $(y,y) \in R_2$ ve $(x,y) \in R_2$ dir.

R_3 bağıntısı geçişmeli değildir. Çünkü, $(x,y),(y,z) \in R_3$ ama $(x,z) \notin R_3$ tür.

$\emptyset$ boş bağıntısı geçişmelidir. Çünkü koşulu bozacak bir ikilisi yoktur.

$A \times A$ evrensel bağıntısı geçişmelidir. Çünkü tüm sıralı ikilileri içerir.

(d) Verilen bir R bağıntısının anti-simetrik olup olmadığını bulabilmek için (a,b), $(b,a) \in R$ ise $a = b$ olması koşulunu sağlayıp sağlamadığına bakmalıyız.

R_1 bağıntısı anti-simetriktir. Çünkü koşulu bozacak bir ikilisi yoktur.

R_2 bağıntısı anti-simetrik değildir. Çünkü (x,y), $(y,x) \in R_2$ ama $x \neq y$ dir.

R_3 bağıntısı anti-simetriktir. Çünkü koşulu bozacak bir ikilisi yoktur.

$\emptyset$ bağıntısı anti-simetriktir. Çünkü koşulu bozacak bir ikilisi yoktur.

$A \times A$ evrensel bağıntısı anti-simetriktir. Çünkü tüm sıralı ikilileri içerir.

R_2 bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişmeli bir bağıntı olduğundan denklik bağıntısıdır.

6. A sıfırdan farklı tamsayıların kümesi ve $A \times A$ üzerinde

„$ad = bc$ olduğunda $(a,b) \approx (c,d)$”

şeklinde tanımlı “ $\approx$ ” bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Gösteriniz.

Bu bağıntının $A \times A$ üzerinde denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansımalı, simetrik ve geçişmeli olduğunu gösterelim:

(a) Her $(a,b) \in A \times A$ için $(a,b) \approx (a,b)$ dir. Çünkü, her $a,b \in A$ için $ab = ba$ dır, yani " $\approx$ " bağıntısı yansımalıdır.

(b) $(a,b) \approx (c,d)$ ise $(c,d) \approx (a,b)$ dir. Çünkü, $(a,b) \approx (c,d)$ ise $ad = bc$ dir. Bu eşitlikten $cb = da$ elde edilir, yani $(c,d) \approx (a,b)$ dir. " $\approx$ " bağıntısı simetriktir.

(c) $(a,b) \approx (c,d)$ ve $(c,d) \approx (e,f)$ ise $(a,b) \approx (e,f)$ dir. Çünkü, $(a,b) \approx (c,d)$ ise $ad = bc$ dir. $$(c,d) \approx (e,f)$ ise $cf = de$ dir. Bu iki eşitlikten $(ad)(cf) = (bc)(de)$ elde edilir. $c \neq 0,\ d \neq 0$ olduğundan son eşitliğin her iki tarafını c ve d ye bölersek $af = be$ elde edilir, yani $(a,b) \approx (e,f)$ dir. " $\approx$ " bağıntısı geçişmelidir.

Bu üç özellik sağlandığından " $\approx$ "bağıntısı $A \times A$ üzerinde denklik bağıntısıdır.

7. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde

$$R = \{(a,b) \colon b = a^r, r \ \ pozitif\ bir\ tamsay\text{ı}\}$$

şeklinde tanımlanan R bağıntısı kısmi sıralama bağıntısıdır. Gösteriniz.

Bu bağıntının $\mathbb{Z}$ üzerinde kısmi sıralama bağıntısı olduğunu göstermek için yansımalı, anti-simetrik ve geçişmeli olduğunu gösterelim:

(a) Her $a \in \mathbb{Z}$ için $(a,a) \in R$ dir. Çünkü, $a = a^1$ dir, yani R bağıntısı yansımalıdır.

(b) $(a,b), (b,a) \in R$ ise $a = b$ dir. Çünkü, $(a,b) \in R$ ise $b = a^r$ olacak şekilde r pozitif tamsayısı vardır. $(b,a) \in R$ ise $a = b^k$ olacak şekilde k pozitif tamsayısı vardır. Bu iki eşitlikten $b = a^r = (b^k)^r = b^{kr}$ elde edilir. $b = b^{kr}$ olduğundan $kr = 1$ dir. k ve r pozitif tamsayılar olduklarından $kr = 1$ eşitliği sadece $k = r = 1$ için sağlanır. Dolayısıyla $a = b$ dir, yani R bağınıtısı anti-simetriktir.

(c) $(a,b) \in R$ ve $(b,c) \in R$ ise $(a,c) \in R$ dir. Çünkü, $(a,b) \in R$ ise $b = a^r$ olacak şekilde r pozitif tamsayısı vardır. $(b,c) \in R$ ise $c = b^k$ olacak şekilde k pozitif tamsayısı vardır. Bu iki eşitlikten $c = b^k = (a^r)^k = a^{rk}$ elde edilir. Burada rk bir pozitif tamsayı olduğundan $(a,c) \in R$ elde edilir, yani R bağıntısı geçişmelidir.

Bu üç özellik sağlandığından R bağıntısı $\mathbb{Z}$ üzerinde kısmi sıralama bağıntısıdır.

Bölüm Özeti

Bu bölümde bağıntı kavramının tanımı verilmiş, günlük yaşantımızdan örneklerle bağıntı kavramı pekiştirilmiştir. Daha sonra yansıma, simetri, anti-simetrik, geçişme gibi bağıntı türleri tanımlanmıştır. Çok sayıda örnekle bu bağıntı türleri arasında ilişkiler gösterilmiştir. Bu bağıntı türlerinden yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlayan bir bağıntı olan denklik bağıntısı tanımlanmış, üzerinde denklik bağıntısı tanımlı bir kümenin denklik sınıflarına ayrılması verilmiştir. Yine çok sayıda örnekle bir küme üzerinde tanımlanan denklik bağıntısı yardımıyla kümenin denklik sınıfları elde edilmiştir. Başka bir özel bağıntı türü olarak, yansımai anti-simetri ve geçişme özelliklerini sağlayan kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmış ve örneklerle pekiştirilmiştir.

Kaynakça

1. V.A. Zorich, Mathematical Analysis I, 2nd edition, Springer, 2015

2. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 3rd edition, 2007