5. FONKSİYONLAR

5.1. Fonksiyonlar

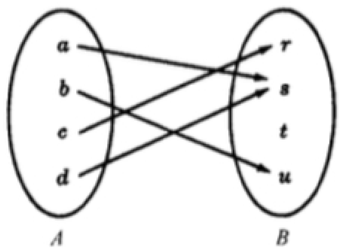
D ve Y boştan farklı iki küme olmak üzere D kümesinin her elemanına Y kümesinden tek bir eleman karşılık getiren kurala D den Y ye bir fonksiyon denir, başka bir deyişle,

"Her $x \in D$ elemanına karşılık tek bir $f(x) \in Y$ elemanı varsa"

f kuralına D den Y ye bir fonksiyon denir ve $f: D \longrightarrow Y$ şeklinde gösterilir. $f(x)$ e, x elemanının f fonksiyonu altındaki görüntüsü yada değeri denir.

D ye f fonksiyonunun tanım kümesi ve tüm x elemanlarına karşılık gelen $f(x)$ değerlerinin kümesine de f fonksiyonunun görüntü yada değer kümesi denir ve $f(D),\ Im(f)$ yada $R(f)$ ile gösterilir. Açıktır ki $f(D) \subseteq Y$ dir.

Örnek:



şeklinde bir f kuralı verilsin. Şekilden anlaşılmaktadır ki f kuralı altında A nın her elemanının B de bir görüntüsü vardır, yani $f(a) = s, f(b) = u, f(c) = r, f(d) = s$ dir. Ayrıca A nın her elemanının B de <u>tek</u> bir görüntüsü vardır. Dolayısıyla f, A dan B ye bir fonksiyondur. f nin tanım kümesi $A = \{a,b,c,d\}$ kümesidir. Görüntü kümesi ise $f(A) = \{r,s,u\}$ dir.

Uyarı: Bu örnekten de anlaşılacağı üzere bir $f: D \longrightarrow Y$ fonksiyonunun görüntü kümesi $f(D)$, Y kümesi olmayabilir, yani Y nin tüm elemanlarını içermek zorunda değildir. Bu örnekte $f(A) \subset B$ dir. Çünkü t hiçbir elemanın görüntüsü olmadığından $t \notin f(A)$ dır.

Bir fonksiyon matematiksel bir formül şeklinde de ifade edilebilir. Örneğin, her reel sayı, bu sayının kareköküne götüren $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon şu şekillerde ifade edilebilir:

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad x \longrightarrow \sqrt{x} \quad yada \quad y = \sqrt{x}$$

İlk gösteriliş "$f(x) = \sqrt{x}$" de x e değişken denir. İkinci gösteriliş "$x \longrightarrow \sqrt{x}$" de "$\longrightarrow$" işareti "gider" anlamındadır, yani "$x \longrightarrow \sqrt{x}$ e gider" şeklinde okunur. Üçüncü gösteriliş "$y = \sqrt{x}$" ise x e bağımsız değişken, y ye bağımlı değişken denir, açıktır ki y, x e değişkenine bağlıdır.

Örnekler:

1. $f(x) = x^2$ kuralını düşünelim. f, bir sayıyı karesine götürmektedir. Her reel sayının f altında bir görüntüsü olduğundan ve bu görüntülerde tek olacağından (her sayının sadece bir karesi vardır) Örneğin, 2 nin f altındaki görüntüsü, yani $f(2) = 2^2 = 4$ tür.

f nin tanım kümesi tüm reel sayıların kümesi $\mathbb{R}$ dir. f nin görüntü kümesi $f(\mathbb{R})$ ise $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ dir. Çünkü, bir reel sayının karesi negatif olamaz, yani ya sıfırdır yada pozitiftir.

2. A boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere A nın her elemanını kendisine götüren fonksiyona A üzerinde birim fonksiyon denir ve I_A şeklinde gösterilir. Başka bir deyişle, birim fonksiyon

her $a \in A$ için $I_A(a) = a$

fonksiyonudur.

3. S, boştan farklı bir A kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun, yani $S \subseteq A$

olsun. S den A ya giden ve S nin her elemanını kendisine götüren fonksiyona S nin A ya gömülme fonksiyonu yada gömme fonksiyonu denir ve $i : S \hookrightarrow A$ ile gösterilir, yani her $x \in S$ için $i(x) = x$ dir.

Bir $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonunun S ye kısıtlanışı $f|_S$ ile gösterilir, yani

her $x \in S$ için $f|_S(x) = f(x)$

dir.

Bir Bağıntı olarak Fonksiyon

Her $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu, $A \times B$ kümesi üzerinde "f nin grafiği" olarak adlandırılan

$f \; nin \; grafiği = \{(a,b): a \in A, b = f(a)\}$

şeklinde bir bağıntı gösterir.

Dolayısıyla bir fonksiyona bağıntı gözüyle bakarsak fonksiyonu şu şekilde de tanımlayabiliriz:

f , A dan B ye bir bağıntı olmak üzere, yani , $A \times B$ nin bir alt kümesi ise

"Her $a \in A$ elemanı için f de tek bir (a,b) sıralı ikilisi varsa"

f ye A dan B ye bir fonksiyon denir ve $f : A \longrightarrow B$ ile gösterilir.

Örnek: $A = \{1,4,6\}$ kümesi üzerinde

$f = \{(1,6),(4,6),(6,1)\}$

bağıntısı verilsin. f, A dan A ya giden bir fonksiyondur. Çünkü A nın her elemanı f deki bir ikilinin ilk girişi olarak yer alır ve her eleman sadece tek bir sıralıda vardır. Burada $f(1) = 6,\ f(4) = 6, f(6) = 1$ dir. Fakat,

$g = \{(1,4),(6,1)\}$

bağıntısı , A dan A ya giden bir fonksiyon değildir. Çünkü, g de $4 \in A$ elemanına karşılık gelen bir sıralı ikili yoktur, yani g altında $4 \in A$ elemanının bir görüntüsü yoktur. Benzer şekilde,

$h = \{(1,6),(4,1),(1,4),(6,1)\}$

bağıntısı da bir fonksiyon değildir. Çünkü, h de $1 \in A$ elemanına karşılık gelen sıralı ikili tek değildir, yani hem $h(1) = 6$ hem de $h(1) = 4$ dır.

$f : A \longrightarrow B$ ve $g : A \longrightarrow B$ iki fonksiyon olmak üzere

her $a \in A$ için $f(a) = g(a)$

ise f ve g fonksiyonlarına eşit fonksiyonlar denir ve $f = g$ ile gösterilir, yani iki fonksiyon aynı grafiğe sahipse bu fonksiyonlar eşittir.

Fonksiyonların Toplam, Çarpım, Fark ve Bölüm İşlemleri

$f : A \longrightarrow B$ ve $g : A \longrightarrow B$ iki fonksiyon olmak üzere her $a \in A$ için

a) İki fonksiyonun toplamı: $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$

b) İki fonksiyonun farkı: $(f + g)(a) = f(a) - g(a)$

c) İki fonksiyonun çarpımı: $(fg)(a) = f(a)g(a)$

d) İki fonksiyonun bölümü: Eğer $g(a) \neq 0$ ise $\left(\boldsymbol{\frac{f}{g}}\right)(a) = \boldsymbol{\frac{f(a)}{g(a)}}$

e) $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere f nin c skaleri ile çarpımı $(cf)(a) = cf(a)$ dır.

5.2. Bileşke Fonksiyon

$f : A \longrightarrow B$ ve $g : B \longrightarrow C$ şeklinde iki fonksiyon olmak üzere, yani f nin görüntü kümesi g nin tanım kümesi olmak üzere A dan C ye f ve g nin bileşkesi denilen ve $g \circ f$ şeklinde gösterilen yeni bir fonksiyon tanımlanır:

$(g \circ f)(a) = g(f(a))$

Yani a nın f altındaki görüntüsü $f(a)$ nın g altındaki görüntüsü $g(f(a))$, a nın $(g \circ f)$ bileşke fonksiyonu altındaki görüntüsüdür.

Herhangi bir $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu için I_A ve I_B sırasıyla A ve B kümeleri üzerindeki birim fonksiyonlar olmak üzere

$f \circ I_A = f$ ve $I_B \circ f = f$

olduğu bileşke fonksiyon tanımından kolaylıkla elde edilir.

Uyarı: $g \circ f$ ve $f \circ g$ bileşke fonksiyonlarının her ikisi de tanımlı olduğunda her zaman $g \circ f = f \circ g$ eşitliği sağlanmaz. Örneğin, $f : \{x,y\} \longrightarrow \{x\}$ ve $g : \{x,y\} \longrightarrow \{y\}$ olsun. Açıktır ki $g \circ f: \{x,y\} \longrightarrow \{y\}$ iken $f \circ g: \{x,y\} \longrightarrow \{x\}$ dir.

Örnek: $f(x) = \sqrt{x}$ ve $g(x) = x + 1$ olmak üzere

a) $g \circ f$

b) $f \circ f$ yi bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ in tanım kümesi ve görüntü kümesi $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ dir. $g(x) = x + 1$ in tanım kümesi ve görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dir. Dolayısıyla her $x \in \mathbb{R}^+$ için

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$

şeklindedir.

b) Dolayısıyla her $x \in \mathbb{R}^+$ için

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$

şeklindedir.

5.3. Birebir, Üzerine ve Terslenebilir Fonksiyonlar

Bir $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu için A nın birbirinden farklı olan her elemanı farklı görüntülere de sahip ise f fonksiyonuna birebir fonksiyon (1-1 şeklinde de yazılır) denir. Başka bir deyişle,

„$f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a'$ „

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna birebir fonksiyon denir.

Bir $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu için B nin her elemanı A nın bir elemanının görüntüsü ise f fonksiyonuna üzerine bir fonksiyon denir. Başka bir deyişle, $f(A) = B$ ise f ye üzerine bir fonksiyon denir.

Bir $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu için

$$f \circ f^{-1} = I_B \; ve \; f^{-1} \circ f = I_A$$

olacak şekilde bir $f^{-1}: B \longrightarrow A$ fonksiyonu varsa f fonksiyonuna terslenebilir bir fonksiyon denir, f^{-1} e f fonksiyonunun tersi denir.

Bir $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu birebir ve üzerine ise f fonksiyonunu terslenebilirdir.

Örnek: $A = \{x,y,z\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{k,l,m,n\}$ olmak üzere $f : A \longrightarrow B,\ f(x) = 8, f(y) = 2, f(z) = 4$ şeklinde tanımlanan fonksiyonunu düşünelim.

Her elemanının görüntüsü farklı olduğundan f birebirdir. Fakat f üzerine değildir çünkü, $f(A) = \{2,4,8\} \neq B$ dir.

$g : B \longrightarrow C \;\; g(2) = k, g(4) = m, g(6) = n, g(8) = l$ şeklinde tanımlanan fonksiyonunu düşünelim.

Her elemanının görüntüsü farklı olduğundan g birebirdir. Ayrıca, $g(B) = \{k,l,m,n\} = C$ olduğundan g üzerinedir. Dolayısıyla g terslenebilir bir fonksiyondur ve $f^{-1}: C \longrightarrow B$ dir.

5.4. Bazı Temel Fonksiyonlar

Tam Kısım ve Mutlak Değer Fonksiyonu

Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için x in ondalık kısmının silinmesiyle elde edilen tamsayıya x in tam kısmı denir ve $INT(x)$ ile gösterilir.

Örnek: $INT(2{,}72) = 2, \quad INT(\sqrt{5}) = 2, \quad INT(-5{,}5) = -5 \quad INT(3) = 3$

x $\in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

sayısına x in mutlak değeri denir (Bölüm 3 te tanımlamıştık.)

Örnek: $|2{,}72| = 2{,}72 \quad |\sqrt{5}| = \sqrt{5}, \quad |-5{,}5| = 5{,}5 \quad |3| = 3$

Eksponansiyel (Üstel) Fonksiyonlar

$a > 0$ ve $a \neq 1$ reel sayısı için

$$f(x) = a^x$$

formundaki fonksiyonlara eksponansiyel fonksiyonlar denir. Tüm eksponansiyel fonksiyonların tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi $(0, +\infty)$ dur. Ekponansiyel fonksiyonlar sıfır değerini almazlar.

Hatırlayalım ki m pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$a^m = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \quad (m\, tane)$$

dir. Ayrıca

$$a^0 = 1 \quad \text{ve} \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

dir.

m ve n iki tamsayı olmak üzere

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

dir.

Örnek: $3^4 = 81, \qquad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}, \qquad 8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 2^2 = 4$

Logaritmik Fonksiyonlar

$a > 0$ ve $a \neq 1$ reel sayısı için

$$f(x) = \log_a x$$

formundaki fonksiyonlara logaritmik fonksiyonlar denir ve x in a tabanındaki logaritması şeklinde okunur.

Logaritmik fonksiyonlar, eksponansiyel fonksiyonların ters fonksiyonlarıdır, yani

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

dir. Logaritmik fonksiyonların tanım kümeleri $(0, +\infty)$ ve görüntü kümeleri $\mathbb{R}$ dir.

$\log_a 1 = 0$ dır. Çünkü $a^0 = 1$ dir.

$\log_a a = 1$ dır. Çünkü $a^1 = a$ dır.

Örnek: $\log_2 16 = 4$ dür. Çünkü $2^4 = 16$ dır.

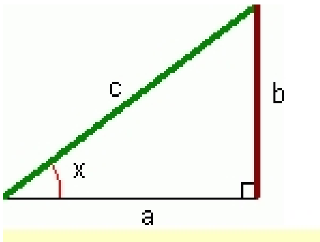
$\log_{10} 1000 = 3$ tür. Çünkü $10^3 = 1000$ dir.

Üç önemli logaritma sınıfı vardır: a=10 tabanına göre logaritma (onluk yada standart logaritma), $a = e$ tabanına göre logaritma (doğal logaritma), $a = 2$ tabanına göre logaritma (ikilik logaritma) dır. Burada $e = 2{,}718281\ldots$ dır.

Bazı farklı kaynaklarda $\log_e x$ yerine $\ln x$ yazılır. Biz de bu derste $\ln x$ notasyonunu kullanacağız.

Temel Trigonometrik Fonksiyonlar

Genel olarak, bir açısı belirli bir dik üçgenin kenarları arasındaki oranlarla tanımlanabilen fonksiyonlar vardır. Bu derste bu fonksiyonlardan altı tanesini göreceğiz:



sinüs fonksiyonu dik üçgende karşı dik kenarın hipotenüse oranıdır.

$$f(x) = sinx = \frac{b}{c}$$

kosinüs fonksiyonu dik üçgende komşu dik kenarın hipotenüse oranıdır.

$$f(x) = cosx = \frac{a}{c}$$

tanjant fonksiyonu dik üçgende karşı dik kenarın komşu dik kenara oranıdır.

$$f(x) = tanx = \frac{b}{a}$$

kotanjant fonksiyonu dik üçgende komşu dik kenarın karşı dik kenara oranıdır.

$$f(x) = cotx = \frac{a}{b}$$

sekant fonksiyonu dik üçgende hipotenüsün komşu dik kenara oranıdır.

$$f(x) = secx = \frac{c}{a}$$

kosekant fonksiyonu dik üçgende hipotenüsün karşı kenara oranıdır.

$$f(x) = cscx = \frac{c}{b}$$

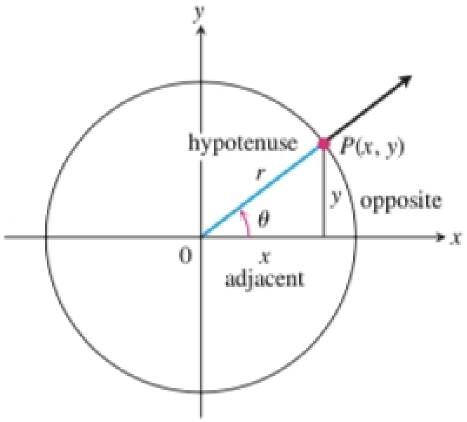
Tanımlardan da anlaşılacağı üzere

$$tanx = \frac{sinx}{cosx} \qquad cotx = \frac{cos}{sinx} = \frac{1}{tanx}$$

$$secx = \frac{1}{cosx} \qquad cscx = \frac{1}{sinx}$$

$$tanx\ .cotx = 1$$

Trigonometrik fonksiyonların bir dik üçgenin yardımıyla tanımlanması yanında bir $x^2 + y^2 = r^2$ şeklinde $(0,0)$ merkezli r yarıçaplı bir çemberin merkezinden herhangi bir açı ile (θ diyelim) çıkan (yani x-ekseniyle θ kadar açı yapan) ve çemberi bir $P(x,y)$ noktasında kesen ışın yardımıyla da tanımlanabilir:



Şekilden de anlaşılacağı gibi

$$sin\theta = \frac{y}{r}, \quad cos\theta = \frac{x}{r}, \quad tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} = \frac{y}{x}$$

$$cot\theta = \frac{1}{tan\theta} = \frac{x}{y}, \quad sec\theta = \frac{1}{cos\theta} = \frac{r}{x}, \quad csc\theta = \frac{1}{sin\theta} = \frac{r}{y}$$

Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının tanım kümeleri $\mathbb{R}$ ve görüntü kümeleri $[-1,1]$ kapalı aralığıdır. Tanımlarından görüldüğü gibi tanjant ve sekant fonksiyonları $x = 0$ yani $cos\theta = 0$ ise tanımlı değildir, yani tanjant ve sekant fonksiyonları $\theta = \pm\, \pi/2,\ \pm\, 3\pi/2,...$ noktalarında tanımlı değildir. Dolayısıyla tanjant ve sekant fonksiyonlarının tanım kümeleri $\mathbb{R}/\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, görüntü kümeleri $\mathbb{R}$ dir.

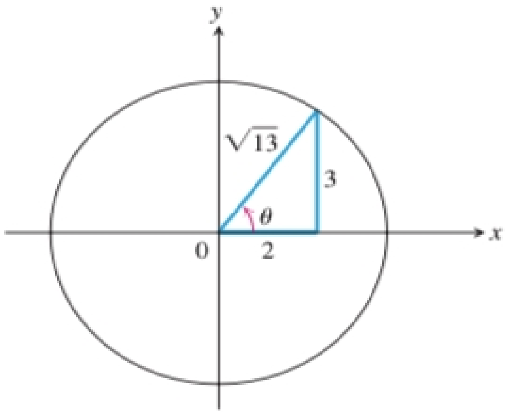
Benzer şekilde, kotanjant ve kosekant fonksiyonları $y = 0$ yani $sin\theta = 0$ ise tanımlı değildir, yani kotanjant ve kosekant fonksiyonları $\theta = \pm\, \pi,\ \pm\, 3\pi,...$ noktalarında tanımlı değildir. Dolayısıyla kotanjant ve kosekant fonksiyonlarının tanım kümeleri $\mathbb{R}/\{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$, görüntü kümeleri $\mathbb{R}$ dir.

Aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi tanımladığımız trigonometrik fonksiyonların bazı özel değerleri vardır:

Fonksiyon	$0\ (0^\circ)$	$\frac{\pi}{12}\ (15^\circ)$	$\frac{\pi}{6}\ (30^\circ)$	$\frac{\pi}{4}\ (45^\circ)$	$\frac{\pi}{3}\ (60^\circ)$	$\frac{5\pi}{12}\ (75^\circ)$	$\frac{\pi}{2}\ (90^\circ)$
sin	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	∞[1]
cot	∞[1]	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2-\sqrt{3}$	0
sec	1	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	∞[1]
csc	∞[1]	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	1

Örnek: $tan\theta = \frac{3}{2}$ ve $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ise $sin\theta, cos\theta, cot\theta, sec\theta, csc\theta$ değerlerini bulunuz.

Tanjant fonksiyonunun tanımından $tan\theta = \frac{3}{2}$ ise aşağıdaki gibi karşı kenarı 3, komşu kenarı 2 birim olan bir dik üçgen oluşturabiliriz.



Buradan dik üçgenlerde Pisagor teoreminden, hipotenüs=$\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$ dür. Dik üçgenin tüm kenar uzunlukları bilindiğine göre tanımlarından

$$sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$cot\theta = \frac{2}{3}, \quad sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad csc\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

bulunur.

Periyodik Fonksiyon

Bir $f(x)$ fonksiyonuna karşılık tanım kümesindeki her x için $f(x+p) = f(x)$ olacak şekilde bir p pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon denir. Bu koşulu sağlayan en küçük p değerine ise f nin periyodu denir.

Örnek: Bir çemberin merkezinden açısı ile çıkan ışının pozisyonu, çemberin merkezinden $\theta + 2\pi$ açısı ile çıktığındaki pozisyon ile aynıdır. Bu yüzden bu iki açı aynı trigonometrik fonksiyon değerlerini gösterir, yani

$$sin(\theta + 2\pi) = sin\theta, \quad cos(\theta + 2\pi) = cos\theta, \quad tan(\theta + 2\pi) = tan\theta$$

$$cot(\theta + 2\pi) = cot\theta, \quad sec(\theta + 2\pi) = sec\theta, \quad csc(\theta + 2\pi) = csc\theta$$

dir. Dolayısıyla altı trigonometrik fonksiyon periyodiktir. Tanjant fonksiyonlarının periyotları π iken diğer dört trigonometrik fonksiyonunun periyodu 2π dir.

Tek ve Çift Fonksiyonlar

Bir $f(x)$ fonksiyonu tanım kümesindeki her x için

$f(-x) = f(x)$ koşulunu sağlıyorsa çift fonksiyon

$f(-x) = -f(x)$ koşulunu sağlıyorsa tek fonksiyon

denir.

Örnek:

$$sin(-x) = -sinx, \quad cos(-x) = cosx, \quad tan(-x) = -tanx$$

$$cot(-x) = -cotx, \quad sec(-x) = secx, \quad csc(-\mathrm{x}) = -cscx$$

olduğundan kosinüs ve sekant fonksiyonları çift, diğer dört trigonometrik fonksiyon tektir.

Bazı Trigonometrik Eşitlikler

Bu eşitliklerin ispatı bu ders kapsamında verilmeyecektir. İspatlarını merak edenler bölüm sonunda verilen referans listesindeki kitaplara bakabilirler.

1. $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

2. $1 + tan^2\theta = sec^2\theta$

3. $1 + cot^2\theta = csc^2\theta$

4. (Toplam Formülleri) $cos(A + B) = cosA\ cosB - sinA\ sinB$

   $sin(A + B) = sinA\ cosB - cosA\ sinB$

5. (Çift Açı Formülleri) $cos(2\theta) = cos^2\theta - sin^2\theta$

   $sin(2\theta) = 2sin\theta\ cos\theta$

6. (Yarım Açı Formülleri) $cos^2\theta = \frac{1 + cos(2\theta)}{2}$

$$sin^2\theta = \frac{1 - cos(2\theta)}{2}$$

5.5. Toplam Sembolü ve Toplamlar

$a_1, a_2, ..., a_n$, n tane sayıyı göstermek üzere $a_1 + a_2 + ... + a_n$ toplamı $\sum_{i=1}^{n} a_i$ şeklinde de gösterilir, yani

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

dir. Burada Σ, toplam sembolüdür.

Örneğin,

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + ... + a_n$$

dir. a_i, a_j gibi notasyonlarda i yada j ye alt indis denir.

Örnekler:

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$

2. $\sum_{j=2}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 54$

3. $\sum_{i=1}^{n} j = 1 + 2 + ... + n$

Son toplam çok kullanılan bir ifadedir ve $n(n+1)/2$ ye eşittir, yani

$$\sum_{i=1}^{n} j = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

dir. Örneğin, 1 den 50 ye kadar olan sayıların toplamı,

$$\sum_{i=1}^{50} j = 1 + 2 + ... + 50 = \frac{50(50+1)}{2} = 1275$$

dir.

5.6. İndisli Kümeler

I boştan farklı bir küme, S ise kümelerin bir topluluğu olsun. I dan S ye giden $f: I \longrightarrow S$ fonksiyonuna indisleyici fonksiyon denir ve

Her $i \in I$ için $f(i) = A_i$

şeklinde tanımlanır. Bu yüzden indisleyici fonksiyon

$$\{A_i : i \in I\} \quad veya \quad \{A_i\}_{i \in I} \quad veya \quad \{A_i\}$$

şeklinde gösterilir. I kümesine indis kümesi, I indis kümesinin elemanlarına ise indis denir. Eğer f fonksiyonu birebir ve üzerine ise, S kümeler topluluğu I tarafından indislenir denir.

Kümelerin indisli sınıfları için keşişim ve birleşim işlemleri şu şekilde tanımlanır:

$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : En\ az\ bir\ i \in I\ için\ x \in A_i\}$ ve
$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : Her\ i \in I\ için\ x \in A_i\}$

I sonlu bir küme olduğunda birleşim ve keşişim işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanır. Eğer I, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ise birleşim ve kesişim işlemlerini şöyle de ifade edebiliriz:

$A_1 \cup A_2 \cup\ A_3 \cup \ldots$ ve $A_1 \cap A_2 \cap\ A_3 \cap \ldots$

Örnek: I, tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ ise her $n \in \mathbb{Z}$ elemanına $\mathbb{R}$ de bir sonsuz aralık karşılık gelir:

$$A_n = \{x : x \leq n\} = (-\infty, n]$$

5.7. Çözümlü Sorular

1. $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}}$ fonksiyonunun tanım ve değer kümelerini bulunuz.

f fonksiyonu bir sayıyı o sayının çarpıma göre tersine götürmektedir. Bu yüzden f, sıfırdan farklı reel sayılar için tanımlıdır, yani f nin tanım kümesi $\mathbb{R}/\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ dur. f nin değer kümesi de sıfırdan farklı tüm reel sayıların terslerinin kümesi olacağından yine sıfırdan farklı reel sayılardır, yani $f(\mathbb{R}/\{0\}) = \mathbb{R}/\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ dur.

2. $f(x) = x + 2$ ve $g(x) = x^2 - 4$ olmak üzere $(f \circ g)(1/2)$ değerini bulunuz.

g ve f nin tanım kümeleri ve görüntü kümeleri $\mathbb{R}$ dir. Dolayısıyla her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 4) = x^2 - 4 + 2 = x^2 - 2$$

şeklindedir. Buradan da

$(f \circ g)(1/2) = (1/2)^2 - 2 = -7/4$

bulunur.

3. $A = \{x,y,z,t\}$, $B = \{2, 4\}$ olmak üzere $f(x) = 2, f(y) = 4, f(z) = 4, f(t) = 2$ şeklinde tanımlanan $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonunun terslenebilir olup olmadığını araştırınız.

f fonksiyonunun terslenebilir olması için birebir ve üzerine olması koşullarını incelemeliyiz.

f birebir değildir çünkü $f(y) = f(z) = 4$ ama $y \neq z$ dir yada $f(x) = f(t) = 2$ ama $x \neq t$ dir. f birebir olmadığı için terslenebilir değildir.

Alıştırma olması açısından f nin üzerine olup olmadığını inceleyelim. $f(A) = \{2,4\} = B$ olduğundan f üzerine bir fonksiyondur.

4. $\log_{10} 0{,}0001 = ?$

$\log_{10} 0{,}0001 = -4$ tür. Çünkü, $10^{-4} = 0{,}0001$ dür.

5. $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun çift fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^2 + 1 = (-x)^2 + 1 = f(-x)$ olduğundan f çift fonksiyondur.

6. $\frac{sinx}{1 + cosx} + \frac{1 + cosx}{sinx} = ?$

İlk olarak payda eşitleyelim:

$$\frac{sinx}{1 + cosx} + \frac{1 + cosx}{sinx} = \frac{sin^2x}{sinx(1 + cosx)} + \frac{(1 + cosx)^2}{sinx(1 + cosx)}$$

$$= \frac{sin^2x + (1 + cosx)^2}{sinx(1 + cosx)} = \frac{sin^2x + 1 + 2cosx + cos^2x}{sinx(1 + cosx)}$$

elde edilir. $sin^2x + cos^2x = 1$ eşitliğinden

$$\frac{sin^2x + 1 + 2cosx + cos^2x}{sinx(1 + cosx)} = \frac{1 + 1 + 2cosx}{sinx(1 + cosx)} = \frac{2 + 2cosx}{sinx(1 + cosx)} = \frac{2(1 + cosx)}{sinx(1 + cosx)}$$

$$= \frac{2}{sinx} = 2cscx$$

bulunur.

7. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $sin\theta = \frac{2x-5}{3}$ ise x hangi aralıktadır?

Biliyoruz ki sinüs fonksiyonunun görüntü kümesi $[-1,1]$ kapalı aralığıdır, yani

$$-1 \leq sin\theta \leq 1$$

dir. $sin\theta = \frac{2x-5}{3}$ olduğundan

$$-1 \leq \frac{2x-5}{3} \leq 1$$

elde edilir. Buradan son eşitsizliğin her iki tarafını 3 ile çarparsak

$$-3 \leq 2x-5 \leq 3$$

elde edilir. Şimdi her iki tarafı 5 ile toplayalım:

$$2 \leq 2x \leq 8$$

Her iki tarafı 2 ile bölersek

$$1 \leq x \leq 4$$

elde edilir, yani $x \in [1,4]$ dür.

Bölüm Özeti

Bu bölümde fonksiyon kavramı ele alınmıştır. İki küme arasındaki her ilişkinin fonksiyon olamayacağı gösterilmiş, bir ilişkinin fonksiyon olması için hangi özellikleri sağlaması gerektiği gösterilmiştir, yani fonksiyon tanımı yapılmıştır. Daha sonra, bir fonksiyon üzerinde bazı özel şartlar konularak birebir ve üzerine fonksiyon tanımlamaları yapılmıştır. Birebir ve üzerine olan fonksiyonlara terslenebilir fonksiyon denildiği ifade edilmiş ve tersinin nasıl bulunacağı gösterilmiştir. İki fonksiyon yardımıyla ne zaman yeni bir fonksiyon üretileceği tartışılmı ve bileşke fonksiyon tanımı verilmiştir. İki fonksiyonun her zaman bileşkesinin alınamayacağına dair örnekler verilmiştir.

Tüm bu tanım ve özelliklerden sonra bazı temel fonksiyon türleri tanımlanmıştır. Bunlar mutlak değer ve ta mdeğer fonksiyonları, üstel ve logaritmik fonksiyonlar, temel trigonometrik fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların tanım ve değer kümeleri verilmiş, önemli özellikleri gösterilmiştir. Temel trigonometrik fonksiyonlarla ilgili kullanışlı birkaç önemli eşitlik de gösterilmiştir.

Ayrıca tek, çift ve periyodik fonksiyon tanımları da verilmiş ve trigonometri fonksiyon örnekleriyle pekiştirilmiştir.

Bölümün sonunda, toplam ve indisli küme notasyonlar verilerek büyük verilerle çalışırken elimizdeki durumun nasıl daha sade ve net ifade edilebileceği de ele alınmıştır.

Kaynakça

1. V.A. Zorich, Mathematical Analysis I, 2 nd edition, Springer, 2015

2. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 6th edition, 2018

3. G.B. Thomas, Calculus, 12th edition, Addison-Wesley

4. B. Musayev, M. Alp, N. Mustafayev, Analiz II, Seçkin Yayıncılık, 2007