8. VEKTÖRLER

8.1. $\mathbb{R}^n$ de vektörler

Bu derste vektörleri aksi belirtilmediği sürece reel sayılar üzerinde çalışacağız, yani bir vektörün girdileri aksi belirtilmediği sürece reel sayılardan oluşacaktır.

Bir örnekle başlayalım:

Bir sınıftaki 9 öğrencinin arasınavdan aldığı puanlar aşağıdaki gibi listelenmiş olsun:

20, 56, 43, 75, 62, 100, 94, 81, 10

Bu listeki değerleri farklı alt indislerle tek bir sembol kullanarak gösterebiliriz, yani

$w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9$

olarak gösterebiliriz. Burada her alt indis, listedeki değerin sırasını gösterir. Örneğin,

w_1 : Listeki birinci elemandır, yani $w_1 = 20$ dir.

w_2 : Listedeki ikinci elemandır, yani $w_2 = 56$ dır.

Bu değerleri almış böyle bir $w = (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_9)$ listesine vektör denir.

Bu örnekten sonra vektör tanımını şu şekilde verebiliriz:

Reel sayıların n-sıralılarının oluşturduğu $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (n tane) kartezyen çarpım kümesini $\mathbb{R}^n$ ile gösterelim. $\mathbb{R}^n$ nin elemanlarına vektör denir, yani

$u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

n- sıralısına vektör denir. u_i, $i = 1,2,\ldots,n$ sayılarının her birine u vektörünün girdileri, koordinatları yada elemanları denir. $\mathbb{R}$ nin elemanlarına da skaler denir.

Eğer tüm girdiler sıfırsa, yani her $i = 1,2,\ldots,n$ için $u_i = 0$ ise u vektörüne sıfır vektör denir.

u ve v iki vektör olmak üzere bu vektörler aynı sayıda girdiye sahip ve birbirlerine karşılık gelen girdiler eşit ise u ve v vektörlerine eşit vektörler denir ve $u = v$ şeklinde gösterilir.

Örnekler:

1.

$$(3, -8), \quad (7,5), \quad (0,0,0), \quad (4,6,8)$$

vektörlerini düşünelim.

$(3,-8), \quad (7,5)$ vektörleri iki girdiden oluşur, yani $\mathbb{R}^2$ ye ait vektörlerdir. $(0,0,0), \quad (4,6,8)$ vektörleri üç girdiden oluşur, yani $\mathbb{R}^3$ e ait vektörlerdir. Ayrıca tüm girdileri sıfır olduğu için $(0,0,0)$ vektörü $\mathbb{R}^3$ te sıfır vektördür.

$$(1,4,5), \quad (1,5,4)$$

vektörleri aynı sayıda girdiden oluşmaktadır, iki vektörün de üç girdisi vardır, yani ikisi de yani $\mathbb{R}^3$ e ait vektörlerdir. Fakat vektörlerin ikinci girdileri eşit olmadığından ($4 \neq$ 5) bu vektörler birbirlerine eşit değildir, yani

$$(1,4,5) \neq (1,5,4)$$

dir.

2. $(x-z, y-1, x+z) = (1,4,5)$ olan x, y, z sayılarını bulunuz.

İki vektörün eşit ise karşılıklı girdileri eşit olmalıdır. Dolayısıyla,

$$x-z=1, \qquad y-1=4, \qquad x+z=5$$

dır. Bu denklem sistemi çözüldüğünde $x=3, \; y=1, \; z=2$ bulunur.

Vektörlerin Sütun Gösterilişi

Şimdiye kadar $\mathbb{R}^n$ uzayındaki bir vektörü yatay olarak gösterdik, yani

$$v = (v_1, v_2, \ldots v_{n-1}, v_n)$$

şeklinde gösterildi. Bu şekilde gösterilen bir vektöre satır vektör denir. Benzer şekilde $\mathbb{R}^n$ deki vektörleri dikey olarak da gösterebiliriz, yani

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir.

Örnek:

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\5\\-6\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1.5\\\frac{2}{3}\\-15\end{bmatrix}$$

vektörleri birer sütun vektörlerdir.

8.2.Vektörlerde Toplam ve Skalerle Çarpım İşlemleri

$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ve $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\mathbb{R}^n$ de iki vektör olmak üzere

u ve v vektörünün toplamı, u ve v nin karşılıklı girdilerinin toplamı şeklinde elde edilir ve $u + v$ şeklinde gösterilir, yani

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

dir.

u vektörünün bir k reel sayısıyla çarpımı, u nun her girdisinin k sayısıyla çarpımı şeklinde elde edilir ve bu skalerle çarpım ku şeklinde gösterilir, yani

$$ku = k(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

dur.

Dikkat edilirse u ve v nin toplamı $u + v$ ile u nun k ile skaler çarpımı ku de $\mathbb{R}^n$ de birer vektördür.

Eğer u ve v nin farklı sayıda girdisi olsaydı bu iki vektörün toplamı tanımlı olmazdı.

Toplam ve skalerle çarpım işlemlerinden yararlanarak iki vektörün farkı ve negatifini de tanımlayabiliriz:

u vektörünün negatifi:

$$-u = (-1)u = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$$

şeklindedir. u ve v nin farkı ise

$$u - v = u + (-v) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots, u_n - v_n)$$

şeklindedir.

$u_1, u_2, \ldots, u_m$, $\mathbb{R}^n$ de m tane vektör ve $k_1, k_2, \ldots, k_m$ de $\mathbb{R}$ de skalerler olmak üzere, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ vektörlerini karşılık gelen $k_1, k_2, \ldots, k_m$ skalerleriyle çarpıp, elde edilen skaler çarpım vektörlerini topladığımızda oluşan

$$v = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_m u_m$$

formundaki v vektörüne $u_1, u_2, \ldots, u_m$ vektörlerinin lineer kombinasyonu denir.

Örnek: a) $u = (2, 4, 6)$ ve $v = (3, -5, 8)$ olsun

$$u + v = (2 + 3, 4 + (-5), 6 + 8) = (5, -1, 14)$$

$$4u = 4(2,4,6) = (4.2, 4.4, 4.6) = (8,16,24)$$

$$-v = (-1)(3, -5, 8) = (-3, 5, -8)$$

$$\begin{aligned} 2u - 5v \\ &= 2(2,4,6) + (-5)(3,-5,8) = (4,8,12) + (-15,25,-40) \\ &= (-11,33,-28) \end{aligned}$$

b) $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$2u - 3v = 2\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Özellikler:

$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ de herhangi u, v, w vektörleri ve $\mathbb{R}$ de herhangi k, k' skalerleri için

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

$u + 0 = u$ (Burada $0 = (0,0,\ldots,0)$ sıfır vektördür.)

$$u + (-u) = 0$$

$$u + v = v + u$$

$$k(u + v) = ku + kv$$

$$(k + k')u = ku + k'u$$

$$(kk')u = k(k'u)$$

$$1u = u$$

$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ de iki u, v vektörü arasında, k sıfırdan farklı bir skaler olmak üzere

$$u = \mathrm{k}v$$

ilişkisi varsa u ya v nin katı denir.

8.3. İç Çarpım

$u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ ve $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$, $\mathbb{R}^n$ de herhangi iki vektör olmak üzere

u ve v nin iç çarpımı $u \cdot v$ ile gösterilir ve

$$u \cdot v = \mathrm{u}_1 \mathrm{v}_1 + \mathrm{u}_2 \mathrm{v}_2 + ... + \mathrm{u}_\mathrm{n} \mathrm{v}_\mathrm{n}$$

şeklinde tanımlanır. Görüldüğü gibi iki vektörün iç çarpımı, vektörlerin birbirlerine karşılık gelen girdilerinin çarpımlarının toplamıdır. İç çarpım bir reel sayıdır.

Eğer iki vektörün iç çarpımı sıfır ise bu iki vektör ortogonaldir, yani birbirlerine diktir:

$u \cdot v = 0$ ise u ve v ortogonaldir (diktir).

Örnek:

a) $u = (-2,1,-1)$, $v = (5,4,3)$ ve $w = (5,4,-6)$ vektörlerini alalım:

u ve v nin iç çarpımı:

$$u \cdot v = (-2).5 + 1.4 + (-1).3 = -9$$

u ve w nun iç çarpımı:

$$u \cdot w = (-2).5 + 1.4 + (-1).(-6) = 0$$

v ve w nun iç çarpımı:

$$v \cdot w = 5.5 + 4.4 + 3.(-6) = 23$$

dür. $u \cdot w = 0$ olduğundan u ve w ortogonaldir.

b) $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$u \cdot v = 3.2 + (-2)(-1) + 1.(-1) = 8$$

dir.

c) $u = (-2,1,-1,4)$, $v = (4,k,4,3)$ olmak üzere u ve v nin ortogonal olduğu k değerini bulunuz.

$$u \cdot v = (-2).4 + 1.k + (-1).4 + 4.3 = k$$

olduğundan u ve v nin ortogonal olması için $u \cdot v = 0$ yani $k = 0$ olmalıdır.

Özellikler:

$\mathbb{R}^n$ de herhangi u,v,w vektörleri ve $\mathbb{R}$ de herhangi bir k skalerleri için

$(u+v)\cdot w = u\cdot w + v\cdot w$

(ku) $\cdot v = \mathrm{k}(u\cdot v)$

$u\cdot v = v\cdot u$

$u\cdot u \geq 0$ dır. $u\cdot u = 0$ ancak ve ancak $u = 0$ durumunda olur.

Vektörlerin toplam, skalerle çarpım ve iç çarpım işlemleriyle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına reel Öklidyen uzay denir.

8.4. Bir Vektörün Uzunluğu (Normu)

$\mathbb{R}^n$ de herhangi bir $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ vektörünün uzunluğu, $||u||$ ile gösterilir ve

$$||u|| = \sqrt{u\cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

şeklinde tanımlanır, yani bir vektörün uzunluğu, vektörün girdilerinin karelerinin toplamının karekökü şeklinde tanımlanır.

İç çarpımın 4. özelliği olan "$u\cdot u \geq 0$ dır. $u\cdot u = 0$ ancak ve ancak $u = 0$ dır." özelliğinden

$||u|| \geq 0$ dır ve $||u|| = 0$ ancak ve ancak $u = 0$ dır.

Eğer $||u|| = 1$, yada denk olarak, $u\cdot u = 1$ ise u ya birim vektör denir. $\mathbb{R}^n$ de sıfırdan farklı herhangi bir v vektörü için

$$\hat{v} = \frac{1}{||v||}v = \frac{v}{||v||}$$

şeklinde tanımlanan $\hat{v}$ vektörüne v vektörünün normalleştirilmiş vektörü denir. Açıktır ki normalleştirilmiş vektörlerin uzunluğu 1 dir, yani birim vektörlerdir.

Örnek:

$u = (1,2,-3,4,-5)$ vektörünün uzunluğunu bulunuz.

$$||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_5^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2 + 4^2 + (-5)^2}$$
$$= \sqrt{45}$$

$u = (1,-3,4,2)$ ve $v = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$ olmak üzere

$$||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{30}$$

$$||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{36}} = 1$$

bulunur. $||v|| = 1$ olduğundan v bir birim vektördür. Fakat $||u|| = \sqrt{30}$ olduğundan u birim vektör değildir. u yi normalize edelim:

$$\hat{u} = \frac{1}{||u||} u = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, -3, 4, 2) = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{3}{\sqrt{30}}, \frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\right)$$

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği: $\mathbb{R}^n$ de herhangi $\mathrm{u,v}$ vektörleri için

$$|\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}| \leq ||\mathrm{u}||\ ||\mathrm{v}||$$

dir.

Üçgen Eşitsizliği: $\mathbb{R}^n$ de herhangi $\mathrm{u,v}$ vektörleri için

$$||\mathrm{u} + \mathrm{v}|| \leq ||\mathrm{u}|| + ||\mathrm{v}||$$

dir.

8.5. Uzaklık, Açı ve İzdüşüm

$u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ ve $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$, $\mathbb{R}^n$ de herhangi iki vektör olmak üzere

u ve v vektörleri arasındaki uzaklık $d(u,v)$ ile gösterilir ve

$$d(u,v) = ||u - v|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + ... + (u_n - v_n)^2}$$

şeklinde tanımlanır.

u ve v vektörleri arasındaki açı θ is

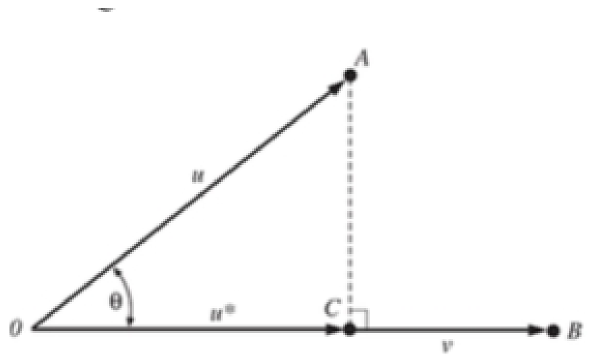
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}}{||\mathrm{u}||||\mathrm{v}||}$$

şeklinde tanımlanır.

u vektörünün, v vektörü üzerine izdüşümü de bir vektördür, $proj(u,v)$ şeklinde gösterilir ve

$$\text{proj}(\text{u,v}) = \frac{\text{u} \cdot \text{v}}{||\text{v}||^2}\text{v} = \frac{\text{u} \cdot \text{v}}{\text{v} \cdot \text{v}}\text{v}$$

şeklinde tanımlanır. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi $u*$ vektörü u vektörünün, v vektörü üzerine izdüşüm vektörüdür.



Örnek: $u = (1, -3,4)$ ve $v = (2,5,6)$ vektörleri arasındaki uzaklığı bulalım.

$$d(u,v) = ||u - v|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}$$

$$= \sqrt{(1-2)^2 + ((-3)-5)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{1+64+4} = \sqrt{69}$$

Şimdi $\text{u} = (1, -3,4)$ ve $\text{v} = (2,5,6)$ vektörleri arasındaki açı θ ise $\cos\theta$ yı bulalım:

$$\cos\theta = \frac{\text{u} \cdot \text{v}}{||\text{u}||\,||\text{v}||}$$

$$\text{u} \cdot \text{v} = \text{u}_1\text{v}_1 + \text{u}_2\text{v}_2 + \text{u}_3\text{v}_3 = 1.2 + (-3).5 + 4.6 = 11$$

$$||\text{u}|| = \sqrt{\text{u}_1^2 + \text{u}_2^2 + \text{u}_3^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{26}$$

$$||\text{v}|| = \sqrt{\text{v}_1^2 + \text{v}_2^2 + \text{v}_3^2} = \sqrt{2^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{65}$$

olduğundan

$$\cos\theta = \frac{\text{u} \cdot \text{v}}{||\text{u}||\,||\text{v}||} = \frac{11}{\sqrt{26}\sqrt{65}}$$

bulunur.

Ayrıca

$$\text{proj}(\text{u,v}) = \frac{\text{u} \cdot \text{v}}{||\text{v}||^2}\text{v} = \frac{11}{65}(2,5,6) = \left(\frac{22}{65}, \frac{55}{65}, \frac{66}{65}\right)$$

bulunur.

8.6. Kompleks Sayılar

$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ kümesine, üzerinde tanımlanan

$$Eşitlik: \quad (a,b) = (c,d) \;\; ancak\ ve\ ancak\ a = c\ ve\ b = d$$

$$Toplam: \quad (a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$

$$Çarpım: \quad (a,b) \cdot (\mathrm{c,d}) = (\mathrm{ac - bd, ad + bc})$$

ile birlikte kompleks sayılar kümesi denir ve $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

Bir $a \in \mathbb{R}$ reel sayısını bir kompleks sayı formunda $(a,0)$ şeklinde gösterebiliriz. Yukarıda tanımladığımız toplam ve çarpım işlemlerini $(a,0)$ formundaki sayılara uyguladığımızda elde edeceğimiz

$$(a,0) + (b,0) = (a + b, 0) \quad ve \quad (a,0) \cdot (\mathrm{b},0) = (\mathrm{ab},0)$$

işlemleri de reel sayıların toplam ve çarpım işlemlerine karşılık gelmektedir. Bu yüzden reel sayıların kümesi $\mathbb{R}$ ye $\mathbb{C}$ kompleks sayıların kümesinin bir alt kümesi gözüyle bakabiliriz, öyle ki $(a,0)$ formundaki elemanlar a ile gösterilir, yani

$$a \leftrightarrow (a,0)$$

dır. $(0,1)$ kompleks sayısı i ile gösterilir ve şu önemli özelliğe sahiptir:

$$i^2 = ii = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = 1 \quad veya \quad i = \sqrt{-1}$$

Buna bağlı olarak herhangi bir $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ şu formda yazılabilir:

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) = a + bi$$

Kompleks sayıların $z = a + bi$ formundaki notasyonunda a ya z nin reel kısmı, a ya z nin sanal kısmı denir ve sırasıyla $a = Rez$ ve $b = Imz$ şeklinde gösterilir.

$z = a + bi, w = c + di$ kompleks sayılarının toplam ve çarpımları yukarıda verdiğimiz işlemlere denk olarak şu şekilde tanımlanır:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di = (a + b) + (c + d)i$$

$$zw = (a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Buradan z nin negatifini

$$-z = -1z$$

şeklinde tanımlarız. $\mathbb{C}$ üzerindeki fark işlemi ise

$$w - z = w + (-z)$$

şeklinde tanımlanır.

Kompleks Eşlenik ve Mutlak Değer (Modül)

Bir $z = a + bi \in \mathbb{C}$ kompleks sayısının eşleniği $\bar{z}$ ile gösterilir ve

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

şeklinde tanımlanır.

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

dir. Buradan z kompleks sayısının reel sayı olması ancak ve ancak $z = \bar{z}$ olması halinde mümkün olduğu görülmektedir.

Bir $z = a + bi \in \mathbb{C}$ kompleks sayısının mutlak değeri $|z|$ ile gösterilir ve

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

şeklinde tanımlanır, yani bir kompleks sayının mutlak değeri eşleniği ile kendisinin çarpımının kareköküdür. Dikkat ediniz ki $|z|$, $\mathbb{R}^2$ de (a,b) vektörünün uzunluğudur.

Sıfırdan farklı bir $z = a + bi \in \mathbb{C}$ kompleks sayısının tersi z^{-1} ile gösterilir ve

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

şeklindedir. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde bölme işlemi ise $z, w \in \mathbb{C}$ ve $z \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{z\bar{z}} = wz^{-1}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek: $z = 3 + 2i$ ve $w = 4 - 5i$ olsun.

$$z + w = (3 + 2i) + (4 - 5i) = (3 + 4) + (2 + (-5))i = 7 - 3i$$

$$zw = (3 + 2i)(4 - 5i) = (3.4 - 2.(-5)) + (2.4 + 3.(-5))i = 22 - 7i$$

$$\bar{z} = \overline{3 + 2i} = 3 - 2i \quad ve \quad \bar{w} = \overline{4 - 5i} = 4 + 5i$$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \quad ve \quad |w| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{3-2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$$

$$\frac{w}{z} = wz^{-1} = (4-5i)\left(\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i\right) = \frac{2}{13} - \frac{23}{13}i$$

8.7. $\mathbb{C}^n$ de vektörler

Kompleks sayıların n-sıralılarının oluşturduğu $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$ $(n$ tane) kartezyen çarpım kümesini $\mathbb{C}^n$ ile gösterelim. Reel durumdaki gibi, $\mathbb{C}^n$ nin elemanlarına vektör denir, yani

$z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$u = [z_1, z_2, \dots, z_n]$$

n- sıralısına $\mathbb{C}^n$ de bir vektör denir. z_i, $i = 1,2,\dots,n$ sayılarının her birine u vektörünün girdileri, koordinatları yada elemanları denir. $\mathbb{C}$ nin elemanlarına da skaler denir.

$\mathbb{C}^n$ de vektörlerin toplam ve skalerle çarpım işlemleri, sırasıyla

$$[z_1, z_2, \dots, z_n] + [w_1, w_2, \dots, w_n] = [z_1 + w_1, z_2 + w_2, \dots, z_n + w_n]$$

ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z[z_1, z_2, \dots, z_n] = [zz_1, zz_2, \dots, zz_n]$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek: $\mathbb{C}^3$ te $u = [2+3i, 4-i, 3]$ ve $v = [3-2i, 5i, 4-6i]$ vektörlerini düşünelim.

$$u + v = [2+3i, 4-i, 3] + [3-2i, 5i, 4-6i] = [5+i, 4+4i, 7-6i]$$

$$(5-2i)u = [(5-2i)(2+3i), (5-2i)(4-i), (5-2i)\,3] = [16 + 11i, 18-13i, 15-6i]$$

bulunur.

8.8. $\mathbb{C}^n$ de iç çarpım

$u = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ve $v = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, $\mathbb{C}^n$de herhangi iki vektör olmak üzere

u ve v nin iç çarpımı $u \cdot v$ ile gösterilir ve

$$u \cdot v = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \dots + z_n\overline{w_n}$$

şeklinde tanımlanır.

$u = [z_1, z_2, ..., z_n]$ vektörünün uzunluğu, $||u||$ ile gösterilir ve

$$||u|| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + ... + z_n \overline{z_n}}$$
$$= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + ... + |z_n|^2}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek: $\mathbb{C}^3$ te $u = [2 + 3i, 4 - i, 3 + 5i]$ ve $v = [3 - 4i, 5i, 4 - 2i]$ vektörlerini düşünelim

$$u \cdot v = (2 + 3i)(\overline{3 - 4i}) + (4 - i)(\overline{5i}) + (3 + 5i)(\overline{4 - 2i})$$

$$= (2 + 3i)(3 + 4i) + (4 - i)(-5i) + (3 + 5i)(4 + 2i)$$

$$= (-6 + 13i) + (-5 - 20i) + (2 + 26i) = -9 + 19i$$

$$u \cdot u = |2 + 3i|^2 + |4 - i|^2 + |3 + 5i|^2 = (4 + 9) + (16 + 1) + (9 + 25) = 64$$

$$||u|| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{64} = 8$$

Vektörlerin toplam, skalerle çarpım ve iç çarpım işlemleriyle birlikte $\mathbb{C}^n$ uzayına kompleks Öklidyen uzay denir. $\mathbb{R}^n$ de geçerli olan $u \cdot v = v \cdot u$ eşitliği $\mathbb{C}^n$ de şu şekilde doğrudur:

$$u \cdot v = \overline{v \cdot u}$$

Schwarz Eşitsizliği ve Üçgen Eşitsizliği ise, $\mathbb{C}^n$ için aynı şekilde de doğrudur.

8.9. Çözümlü Sorular

1. $\mathbb{R}^3$ ün $u = (2, -1, 5)$, $v = (0, -3, 3)$, $w = (0, -2, 6)$ vektörleri için $2u - 3v + 4w = ?$

$$2u - 3v + 4w = 2(2, -1, 5) + (-3)(0, 3, -3) + 4(0, -2, 6)$$

$$= (4, -2, 10) + (0, -9, 9) + (0, -8, 24) = (4, -19, 43)$$

2. $\mathbb{R}^{\mathbf{4}}$ ün $u = (0, 3, -5, 0)$ ve $v = (-3, 6, -4, 2)$ vektörleri için $u \cdot v$ iç çarpımını bulunuz.

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4 = 0.(-3) + 3.6 + (-5).(-4) + 0.2 = 38$$

3. $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ ün $u = (4, -12, -3)$ vektörünün uzunluğunu hesaplayınız.

$$||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{4^2 + (-12)^2 + (-3)^2} = \sqrt{169} = 13$$

4. $\mathbb{R}^4$ ün $v = (2, -4,6,3)$ vektörünü normalleştiriniz.

Bir v vektörünün normali

$$\hat{v} = \frac{1}{||v||} v = \frac{v}{||v||}$$

formundadır. Bu yüzden önce $||\boldsymbol{v}||$ yi bulalım:

$$||\mathrm{v}|| = \sqrt{\mathrm{v}_1^2 + \mathrm{v}_2^2 + \mathrm{v}_3^2 + \mathrm{v}_4^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{65}$$

dir. Şimdi $\boldsymbol{v}$ yi normalleştirebiliriz:

$$\hat{v} = \frac{1}{||v||} v = \frac{1}{\sqrt{65}}(2, -4,6,3) = \left(\frac{2}{\sqrt{65}}, -\frac{4}{\sqrt{65}}, \frac{6}{\sqrt{65}}, \frac{3}{\sqrt{65}}\right)$$

bulunur.

5. $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ ün $\mathrm{u} = (2, -6,0)$ ve $\mathrm{v} = (3,5,7)$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere $\cos\theta$ yı bulunuz.

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}}{||\mathrm{u}||\ ||\mathrm{v}||}$$

dir.

$$\mathrm{u} \cdot v = \mathrm{u}_1 \mathrm{v}_1 + \mathrm{u}_2 \mathrm{v}_2 + \mathrm{u}_3 \mathrm{v}_3 = 2.3 + (-6).5 + 0.7 = 36$$

$$||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 0^2} = \sqrt{40}$$

$$||\mathrm{v}|| = \sqrt{\mathrm{v}_1^2 + \mathrm{v}_2^2 + \mathrm{v}_3^2} = \sqrt{3^2 + 5^2 + 7^2} = \sqrt{83}$$

olduğundan

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}}{||\mathrm{u}||\ ||\mathrm{v}||} = \frac{36}{\sqrt{40}\sqrt{83}}$$

6. $z = 5 + 2i$, $w = 4 - i \in \mathbb{C}$ için zw değerini hesaplayınız.

$$zw = (5 + 2i)(4 - i) = 5.4 + 5.(-i) + (2i).4 + (2i).(-i)$$

$$= 20 - 5i + 8i + 2 = 22 + 3i$$

7. $z = 5 + 2i$ kompleks sayısının $|z|$ mutlak değerini bulunuz.

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(5 + 2i)\overline{(5 + 2i)}} =$$

$\sqrt{(5+2i)(5-2i)} = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$

8. $\mathbb{C}^3$ te $\mathrm{u} = [2+3\mathrm{i}, 4-\mathrm{i}, 3+5\mathrm{i}]$ ve $\mathrm{v} = [3-4\mathrm{i}, 5\mathrm{i}, 4-2\mathrm{i}]$ vektörleri için $u \cdot v$

iç çarpımını bulunuz.

$u \cdot v = \mathrm{z}_1 \overline{\mathrm{w}_1} + \mathrm{z}_2 \overline{\mathrm{w}_2} + \ldots + \mathrm{z}_\mathrm{n} \overline{\mathrm{w}_\mathrm{n}}$

$= (2+3i)\left(\overline{3-4\mathrm{i}}\right) + (4-i)\left(\overline{5\mathrm{i}}\right) + (3+5i)\left(\overline{4-2\mathrm{i}}\right)$

$= (2+3i)(3+4i) + (4-i)(-5i) + (3+5i)(4+2i)$

$= (-6+13\mathrm{i}) + (-5-20\mathrm{i}) + (2+26\mathrm{i}) = -9+19\mathrm{i}$

9. $\mathbb{C}^{\mathbf{2}}$ de $\mathrm{u} = [1+7\mathrm{i}, 2-6\mathrm{i}]$ vektörü için $(3+i)\mathrm{u}$ değerini hesaplayınız.

$(3+i)\mathrm{u} = (3+\mathrm{i})[1+7\mathrm{i}, 2-6\mathrm{i}] = [(3+\mathrm{i})(1+7\mathrm{i}), (3+\mathrm{i})(2-6\mathrm{i})]$

$= [(3+\mathrm{i})(1+7\mathrm{i}), (3+\mathrm{i})(2-6\mathrm{i})] = [-4+21i, 12-16i]$

10. $\frac{2-5i}{5+2i}$ sayısını $\mathrm{a}+\mathrm{bi}$ formunda yazınız.

$$\frac{2-5i}{5+2i} = \frac{(2-5i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \frac{-29i}{29} = -i$$

Bölüm Özeti

Bu bölümde vektörler konusu ele alınmıştır. Vektörler üzerinde topla, skalerle çarpım işlemleri tanımlanmış ve bu işlemlerin özellikleri verilmiştir. Daha sonra vektörler üzerinde tanımlanan iç çarpım işlemi ele alınmıştır. İç çarpım işleminin özellikleri ve bu işlem yardımıyla tanımlanan bir vektörün uzunluğu, iki vektör arası uzaklık, iki vektör arası açı gibi özelliklerin nasıl bulunacağı verilmiştir. Uzunluğu 1 olmayan vektörlerin nasıl normalleştirileceği elde edilmiştir.

Bu özelliklerin tamamı reel vektörler için verildiğinden bölümün sonunda kompleks vektörler konusuna girilmiştir. İlk önce kompleks sayılar ve kompleks sayıların eşleniği ve mutlak değeri kavramları verilmiştir. Bu kavramlar öğrenildikten sonra kompleks vektörler üzerinde iç çarpım işlemi tanımlanmıştır. Bölüm sonunda tüm üniteyle ilgili karışık sorular çözülmüştür.

Kaynakça

1. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Linear Algebra, 6th edition, 2018

2. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 3rd edition, 2007