6. LİMİT

6.1. Bir Fonksiyonun Limiti

İlk olarak bir fonksiyonun limiti için kesin ve en doğru tanımı vermeden önce limitin ne olduğu hakkında fikir sahibi olmamızı sağlayacak ve sezgisel olarak limite nasıl yaklaşacağımızı anlatacak bir tanımdan başlayalım.

Bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında tanımlı olması gerekmeyen ama x_0 noktasının civarında tanımlı olan f fonksiyonunu ele alalım. Burada f nin x_0 noktasının civarında tanımlı olması, ne kadar küçük seçilirse seçilsin pozitif bir ε sayısı için $(x_0 - \ \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ açık aralığında tanımlı olması anlamındadır.

x_0 a yeterince yakın tüm x değerleri için $f(x)$ değerleri de aynı L sayısına yaklaşıyorsa, “x, x_0 a yaklaşırken $f(x)$ in limiti L dir” denir ve

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

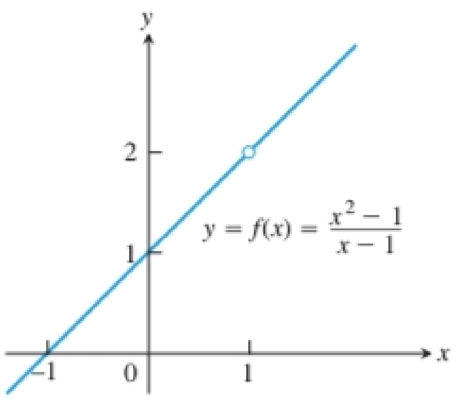
Örnekler:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında nasıl bir davranış gösterir?

f fonksiyonu $x = 1$ noktasında tanımlı değildir. $x \neq 1$ için

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = x + 1$$

olur ve f nin grafiği, $y = x + 1$ doğrusunun $x = 1$ için $y = 2$ olacağından $(1,2)$ noktasının çıkarılmış hali olacaktır.



O halde, buradan $x = 1$ noktasında f fonksiyonu tanımlı olmadığı halde x, 1 e yaklaşırken f fonksiyonunun alaağı değerlerin de 2 ye yaklaşacağını tahmin edebiliriz. Gerçekten de 1 noktasının civarında değerler alıp bu değerlerin f fonksiyonu altındaki görüntülerine bakalım:

$x = 0{,}9$ için $f(x) = 1{,}9$

$x = 1{,}1$ için $f(x) = 2{,}1$

$x = 0{,}99$ için $f(x) = 1{,}99$

$x = 1{,}01$ için $f(x) = 2{,}01$

$x = 0{,}999$ için $f(x) = 1{,}999$

$x = 1{,}001$ için $f(x) = 2{,}001$

olduğu görülür, yani x in 1 in civarında aldığı değerlerin görüntüleri de 2 ye yaklaşmaktadır. Dolayısıyla " x, 1 e yaklaşırlen $f(x)$ in limiti 2 dir ve

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{yada} \quad \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

şeklinde yazılır.

Bu örnekte görüldüğü gibi bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için o noktada tanımlı olması gerekmez. Bu örnekte f fonksiyonu $x = 1$ noktasında tanımlı değildir ama $\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = 2$ dir, yani limiti vardır.

2. $f(x) = x$ birim fonksiyonunun her $x_0 \in \mathbb{R}$ için limiti x_0 dir, yani

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} x = x_0$$

dir.

3. Sabit bir $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = k$ sabit fonksiyonunun her $x_0 \in \mathbb{R}$ için limiti k dir, yani

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} k = k$$

6.2. Limit Kuralları

L, M, c ve k reel sayılar ve

$$\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{x \longrightarrow c} g(x) = M$$

olmak üzere

1. (Toplam Kuralı) İki fonksiyonun toplamının limiti, limitlerin toplamıdır, yani

$$\lim_{x\longrightarrow c}(f(x)+g(x))=L+M$$

2. (Fark Kuralı) İki fonksiyonun farkının limiti, limitlerin farkıdır, yani

$$\lim_{x\longrightarrow c}(f(x)-g(x))=L-M$$

3. (Çarpım Kuralı) İki fonksiyonun çarpımının limiti, limitlerin çarpımıdır, yani

$$\lim_{x\longrightarrow c}(f(x)\cdot g(x))=L\cdot M$$

4. (Skalerle Çarpım Kuralı) Bir fonksiyonun bir skalerle çarpımının limiti, fonksiyonun limitinin o skalerle çarpımıdır, yani

$$\lim_{x\longrightarrow c}(k\cdot f(x))=k\cdot L$$

5. (Bölüm Kuralı) İki fonksiyonun bölümünün limiti, eğer paydadaki fonksiyonun limiti sıfırdan farklı ise, limitlerin bölümüdür, yani

$$\lim_{x\longrightarrow c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M},\ \ M\neq 0$$

6. (Kuvvet Kuralı) Bir fonksiyonun rasyonel kuvvetinin limiti, eğer fonksiyonun limitinin o rasyonel kuvveti bir reel sayı ise, limitinin o rasyonel kuvvetidir, yani r ve s ortak çarpanları olmayan tamsayılar ve $s\neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{x\longrightarrow c}(f(x))^{r/s}=L^{r/s},\ \ L^{r/s}\in\mathbb{R}$$

Örnek: $\lim_{x\longrightarrow c}(x^4+2x-5)\ =?$

$$\lim_{x\longrightarrow c}(x^4+2x-5)\ =\lim_{x\longrightarrow c}x^4+\lim_{x\longrightarrow c}2x-\lim_{x\longrightarrow c}5\quad (Toplam\ ve\ Fark\ kurallarından)$$

$$=c^4+2c-5\ \ (Skalerle\ çarpım\ ve\ çarpım\ kurallarından)$$

İlerleyen kısımlarda çözülecek çok sayıda limit sorusunda bu kurallardan yararlanılacağından limit kurallarıyla çok sayıda çözmüş olacağız.

Polinomların Limiti

Bir polinomun limiti yerine koyma yöntemiyle bulunur, yani

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

bir polinom olmak üzere x, c ye giderken $P(x)$ in limiti $P(c)$ dir.

$$\lim_{x\longrightarrow c}P(x)=P(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+a_0$$

dir.

Örnek: Yukarıdaki örneği ele alalım:

$\lim\limits_{x \to c} (x^4 + 2x - 5)$ limiti $P(x) = x^4 + 2x - 5$ polinomu için $P(c) = c^4 + 2c - 5$

dir.

Rasyonel Fonksiyonların Limiti

Rasyonel fonksiyonların limiti, paydadaki fonksiyonun c noktasındaki değeri sıfırdan farklı ise yerine koyma yöntemiyle bulunur, yani

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom ve $Q(c) \neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

dir.

Örnek: $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{x^4 + 2x - 5}{2x - 5} = ?$

$Q(x) = 2x - 5$ olmak üzere $Q(1/2) = -4 \neq 0$ dır. Dolayısıyla,

$$\lim_{x \to 1/2} \frac{x^4 + 2x - 5}{2x - 5} = \frac{(1/2)^4 + 2(1/2) - 5}{2(1/2) - 5} = \frac{-63/64}{-4} = \frac{63}{256}$$

bulunur.

Rasyonel fonksiyonların limiti, paydadaki fonksiyonun c noktasındaki değeri sıfır ise rasyonel fonksiyonun limiti için birkaç farklı yol izlenebilir. Bu yollar rasyonel fonksiyonun, paydasının c noktasında sıfır olmayacak şekilde yeniden düzenlenmesine dayanır.

1. (Ortak çarpanı yok etmek)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x} = ?$$

Bu örnekte rasyonel fonksiyonun limiti bulurken kullandığımız yerine koyma yöntemini uygulayamayız, çünkü payda $x = 2$ noktasında sıfırdır. Ayrıca payın da $x = 2$ noktasında sıfır olduğunu görüyoruz. Buradan hem payda hem paydada $x - 2$ çarpanının ortak olduğunu söyleyebiliriz. Gerçekten de

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x} = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)}$$

dir, burada fonksiyonu $x - 2$ ile sadeleştirdiğimizde

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x} = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)} = \frac{x-1}{x}$$

bulunur. Dolayısıyla, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$

bulunur.

2. (Ortak Çarpan yaratmak)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+81} - 9}{x^2} = ?$$

Bu örnekte de rasyonel fonksiyonun limiti bulurken kullandığımız yerine koyma yöntemini uygulayamayız, çünkü payda $x = 0$ noktasında sıfırdır. Ayrıca bir önceki örnekte olduğu gibi pay ve paydanın ortak çarpanı da yoktur. Dolayısıyla ortak bir çarpan yaratmak için hem payı hem paydayı $\sqrt{x^2+81} - 9$ in eşleniği olan $\sqrt{x^2+81} + 9$ (köklü ifadeden sonraki işareti değiştirerek elde edilir) ile çarpalım.

$$\frac{\sqrt{x^2+81} - 9}{x^2} = \frac{(\sqrt{x^2+81} - 9)(\sqrt{x^2+81} + 9)}{x^2(\sqrt{x^2+81} + 9)}$$

$$= \frac{x^2+81 - 81}{x^2(\sqrt{x^2+81} + 9)} = \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+81} + 9)}$$

bulunur. Son ifadede x^2 ortak çarpandır, yani hem payda hem paydada bulunur. Önceki örnekteki gibi bu ifadede de x^2 yi sadeleştirelim.

$$\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+81} + 81)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+81} + 9}$$

bulunur, yani

$$\frac{\sqrt{x^2+81} - 9}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+81} + 9}, \quad x \neq 0$$

dır. Dolayısıyla,

$$\frac{\sqrt{x^2+81} - 9}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+81} + 9} = \frac{1}{\sqrt{81} + 9} = \frac{1}{18}$$

elde edilir.

6.3. Sıkıştırma Teoremi

f, g, h, $x = c$ de zorunlu olmamak kaydıyla c yi içeren bir açık aralığın tüm x noktalarında $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ koşulunu sağlasın.

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

ise $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dir.

Örnek: $\lim_{x \to 0} x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

Sinüs fonksiyonunun tanımından, her $x \in \mathbb{R}/\{0\}$ için

$$-1 \leq sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

dir. Buradan

$$-x^2 \le x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$$

elde edilir. Öte yandan $\lim_{x\to 0}(-x^2) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$ dır (polinom tipli fonksiyonlar). Sıkıştırma Teoremi'nden $\lim_{x\to 0} x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ bulunur.

6.4. Sağdan ve Soldan Limit

x_0 a yeterince yakın tüm x değerleri için $f(x)$ değerleri de aynı L sayısına yaklaşıyorsa, "x, x_0 a yaklaşırlen $f(x)$ in limiti L dir" denir ve

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir demiştik. Burada x değerleri x_0 dan küçük ve büyük değerler aldığında $f(x)$ değerleri de aynı L sayısına yaklaşmaktadır, yani iki taraflı limit vardır.

Bununla birlikte, bir x_0 noktasında iki taraflı limiti olmayan fakat tek taraflı limiti olan f fonksiyonları da vardır, yani "x, x_0 a tek bir taraftan yaklaşırken $f(x)$ in limiti L dir" denir.

"x, x_0 a sağdan yaklaşırsa (yani $x > x_0$) limite sağdan limit, soldan yaklaşırsa (yani $x < x_0$) limite soldan limit denir. Daha açık bir şekilde ifade edecek olursak,

$x_0 < b$ olmak üzere f fonksiyonu (x_0, b) aralığı üzerinde tanımlı ve x bu aralıktan x_0 ye yaklaşırken $f(x)$ değerleri herhangi bir yönde bir L sayısına yaklaşıyorsa f, x_0

noktasında L sağdan limite sahiptir denir ve

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

$x \longrightarrow x_0^+$ gösterilişi, x in değerlerinin sadece x_0 dan büyük değerler olduğunu göstermektedir.

Benzer şekilde, $a < x_0$ olmak üzere f fonksiyonu (a, x_0) aralığı üzerinde tanımlı ve x bu aralıktan x_0 ye yaklaşırken $f(x)$ değerleri herhangi bir yönde bir M sayısına yaklaşıyorsa f, x_0 noktasında M soldan limite sahiptir denir ve

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = M$$

şeklinde gösterilir. $x \longrightarrow x_0^-$ gösterilişi, x in değerlerinin sadece x_0 dan küçük değerler olduğunu göstermektedir.

Örnek: $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = ?$ ve $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = ?$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|}$ sağdan limiti için 0 dan büyük x değerleri ile 0 a yaklaşacağımız için

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$$

olacaktır. Bu sebeple,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1$$

dir. Benzer şekilde, $\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|}$ soldan limiti için 0 dan küçük x değerleri ile 0 a yaklaşacağımız için

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$$

olacaktır. Bu sebeple,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

dir.

Dikkat ediniz ki, bu örnekten de anlaşılacağı üzere her zaman $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

olmak zorunda değildir. Fakat eşit olduğu durumlar bize bir sonuç verir:

"x, x_0 a yaklaşırken f fonksiyonunun limitinin olması içn gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun x_0 noktasında sağdan ve soldan limitlerinin var ve birbirlerine eşit olmasıdır, yan**i**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad ve \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

olmasıdır."

Örnek: Üstteki örnekte $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|}$ ve $\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|}$ sağdan ve soldan limitleri var fakat birbirlerinden farklı olduğundan $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$ limiti yoktur, yani $f(x) = \frac{x}{|x|}$ fonksiyonu 0 noktasında limite sahip değildir.

Örnek: $\lim_{\theta \to 0} \frac{sin\theta}{\theta} = 1$ limitini kullanarak $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ ve $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{2x} = 2$ olduğunu gösteriniz.

$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ olduğunu gösterelim:

$cos x = 1 - 2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ yarım açı formulünden,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - 2sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

elde edilir. $\theta = x/2$ dönüşümü yapalım. $x \longrightarrow 0$ iken $\theta = x/2 \longrightarrow 0$ dir. Buradan

$$\lim_{x \to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{\theta \to 0} \frac{-2\sin\theta}{2\theta} \sin\theta = \lim_{\theta \to 0} \frac{-\sin\theta}{\theta} \sin\theta$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{-\sin\theta}{\theta} \lim_{\theta \to 0} \sin\theta = -(1).(0) = 0$$

bulunur, yani

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

dır.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{2x} = 2$ olduğunu göstermek için $\frac{\sin 4x}{2x}$ fonksiyonunu $\frac{\sin\theta}{\theta}$ orijinal formunda yazmaya çalışalım, yani paydada $2x$ değil $4x$ değerine ihtiyacımız vardır. Paydada $4x$ değerini elde etmemiz için $\frac{\sin 4x}{2x}$ fonksiyonunda payı ve paydayı 2 ile çarpalım:

$$\frac{\sin 4x}{2x} = \frac{2\sin 4x}{2.2x} = \frac{2\sin 4x}{4x}$$

olur. Böylece,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin 4x}{4x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x}$$

limitine dönüşür. $\theta = 4x$ dönüşümü yapalım. $x \longrightarrow 0$ iken $\theta = 4x \longrightarrow 0$ dir. Buradan

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin 4x}{4x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 2.1 = 2$$

bulunur.

Bölüm Özeti

Bu bölümde bir fonksiyonun limiti kavramı ele alınmıştır. Önce bir örnekle limit kavramına bir yaklaşım yapılmıştır ve daha sonra bu yaklaşım ışığında bir fonksiyonun limitinin tanımı verilmiştir. Fonksiyonların toplam, çarpım, fark, bölme işlemleri altında limitlerin nasıl davranışlar gösterdiği incelenmiştir. Bir polinomun limiti hesaplanmış, bundan yaralanarak bir rasyonel fonksiyonun limiti ele alınmıştır. Rasyonel fonksiyonların limitlerinin hesaplanması için çeşitli yöntemler gösterilmiştir. Fonksiyonlar konusunda ele aldığımız bazı özel fonksiyonların limitleri ile ilgili çeşitli sorular çözülmüştür. Son olarak, sağdan ve soldan limit kavramları ele alınarak, bir fonksiyonunun limitinin var olmasının sağdan ve soldan limitlerinin varlığıyla ilişkisi verilerek çok sayıda örnekle pekiştirilmiştir.

Kaynakça

1. V.A. Zorich, Mathematical Analysis I, 2 nd edition, Springer, 2015

2. G.B. Thomas, Calculus, 12th edition, Addison-Wesley

3. B. Musayev, M. Alp, N. Mustafayev, Analiz II, Seçkin Yayıncılık, 2007