3. REEL SAYILAR

3.1. Reel Sayılar Kümesinin Tanımı

Aşağıdaki şartları sağlayan $\mathbb{R}$ kümesine reel sayılar kümesi ve elemanlarına da reel sayılar denir:

I. (TOPLAM) $+:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dönüşümü, yani $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y):x,y\in\mathbb{R}\}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine

$$(x,y)\to x+y$$

şeklinde tanımlanan toplam işlemi aşağıdaki koşulları sağlar:

1. Her $x\in\mathbb{R}$ elemanı için

$$x+0=0+x=x$$

olacak şekilde $0\in\mathbb{R}$ (sıfır eleman) vardır.

2. Her $x\in\mathbb{R}$ elemanına karşılık

$$x+(-x)=(-x)+x=0$$

olacak şekilde $-x\in\mathbb{R}$ (x in negatifi yada toplama göre tersi) vardır.

3. Her $x,y,z\in\mathbb{R}$ için

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

dir.

4. Her $x,y\in\mathbb{R}$ için

$$x+y=y+x$$

dir.

II. (ÇARPIM) $\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dönüşümü, yani $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y):x,y\in\mathbb{R}\}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine

$$(x,y)\to x\cdot y$$

şeklinde tanımlanan çarpım işlemi aşağıdaki koşulları sağlar:

5. Her $x\in\mathbb{R}$ elemanı için

$$x\cdot 1=1\cdot x=x$$

olacak şekilde sıfırdan farklı $1 \in \mathbb{R}$ (birim eleman) vardır.

6. Sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}$ elemanına karşılık

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$$

olacak şekilde $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (x in tersi yada çarpıma göre tersi) vardır.

7. Her $x,y,z \in \mathbb{R}$ için

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

dir.

8. Her $x,y \in \mathbb{R}$ için

$$x \cdot y = y \cdot x$$

dir.

III. (TOPLAM VE ÇARPIM ARASINDA İLİŞKİ) Her $x,y,z \in \mathbb{R}$ için

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

dir.

IV. (SIRALAMA) $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin elemanları arasında " $\leq$ " bağıntısı vardır, yani $x,y \in \mathbb{R}$ için $x \leq y$ olup olmadığı tanımlanabilir. " $\leq$ " bağıntısı aşağıdaki şartları sağlar:

a) Her $x \in \mathbb{R}$ elemanı için $x \leq x$

b) $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$

c) $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$

d) Her $x,y \in \mathbb{R}$ elamanları için $(x \leq y) \vee (y \leq x)$

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde bu " $\leq$ " bağıntısına eşitsizlik denir.

V. (TOPLAM VE SIRALAMA ARASINDA İLİŞKİ) Her $x,y,z \in \mathbb{R}$ için

$$(x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$$

VI. (ÇARPIM VE SIRALAMA ARASINDA İLİŞKİ) Her $x,y \in \mathbb{R}$ için

$$(0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq x \cdot y)$$

VII. (TAMLIK) X ve Y, $\mathbb{R}$ nin boştan farklı ve her $x \in X$ ve her $y \in Y$ elemanları için $x \leq y$ eşitsizliğini sağlayan iki alt kümesi ise her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için

$$x \leq c \leq y$$

olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ vardır.

Toplam işleminin sonuçları:

1. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde tek bir sıfır eleman vardır.

2. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin her elemanı tek bir negatife (toplama göre terse) sahiptir.

3. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde $a,b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathrm{a} + \mathrm{x} = \mathrm{b}$$

denklemi

$$\mathrm{x} = \mathrm{b} + (-\mathrm{a})$$

şeklinde tek bir çözüme sahiptir.

Çarpım işleminin sonuçları:

1. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde tek bir birim eleman vardır.

2. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin sıfırdan farklı her elemanı tek bir terse (çarpıma göre terse) sahiptir.

3. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde $a,b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$\mathrm{a} \cdot x = \mathrm{b}$$

denklemi

$$\mathrm{x} = \mathrm{b} \cdot a^{-1}$$

şeklinde tek bir çözüme sahiptir.

Toplam ve çarpım arasındaki ilişkinin sonuçları:

1. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

2. $x,y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(x \cdot y = 0) \Longrightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$$

3. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$-x = (-1) \cdot x$$

4. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(-1) \cdot (-x) = x$$

5. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(-x) \cdot (-x) = x \cdot x$$

<u>Sıralamanın sonuçları:</u>

1. Her $x,y \in \mathbb{R}$ elemanları aşağıdaki durumlardan sadece bir tanesine sahiptir:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

2. Her $x,y,z \in \mathbb{R}$ için

$$(x < y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x < z)$$

$$(x \leq y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$$

<u>Toplam ve çarpım işlemleri ile sıralama arasındaki ilişkinin sonuçları:</u>

1. Her $x,y,z,t \in \mathbb{R}$ için

$$(x < y) \Rightarrow (x + z) < (y + z)$$

$$(0 < x) \Rightarrow (-x < 0)$$

$$(x \leq y) \wedge (z \leq t) \Rightarrow (x + z \leq y + t)$$

$$(x < y) \wedge (z < t) \Rightarrow (x + z < y + t)$$

2. Her $x,y,z \in \mathbb{R}$ için

$$(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 < x \cdot y)$$

$$(x < 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow (0 < x \cdot y)$$

$$(x < 0) \wedge (0 < y) \Rightarrow (x \cdot y < 0)$$

$$(x < y) \wedge (0 < z) \Rightarrow (x \cdot z < y \cdot z)$$

$$(x < y) \wedge (z < 0) \Rightarrow (y \cdot z < x \cdot z)$$

3. $0 < 1$ dir.

4. Sıfırdan farklı her $x,y \in \mathbb{R}$ için

$(0 < x) \Longrightarrow (0 < x^{-1})$

$(0 < x) \wedge (x < y) \Longrightarrow (0 < y^{-1}) \wedge (y^{-1} < x^{-1})$

Sıfırdan büyük reel sayılara pozitif sayılar denir ve $\mathbb{R}^{+}$ ile gösterilir. Sıfırdan küçük reel sayılara negatif sayılar denir ve $\mathbb{R}^{-}$ ile gösterilir, yani

$\mathbb{R}^{+} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$\mathbb{R}^{-} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

dır.

Toplam ve çarpım işlemleri ile sıralama arasındaki ilişkinin sonuçlarından 0< olduğundan in pozitif sayı olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca, yine aynı sonuçlardan pozitif iki reel sayının çarpımının pozitif, negatif iki reel sayının çarpımının yine pozitif, bir pozitif ve bir negatif reel sayının çarpımının negatif ve sıfırdan farklı pozitif bir reel sayının tersinin de pozitif olduğunu da görürüz.

Şimdi reel sayıların en önemli sınıflarını ve bu sınıflarda reel sayılar üzerinde tanımlı işlemlerin hesaplamalarını görelim.

3.1. Doğal Sayılar ve Matematiksel Tümevarım Prensibi

$1, 1+1, (1+1)+1, \ldots$ formundaki reel sayılar sırasıyla $1, 2, 3, \ldots$ ile gösterilir ve bu formda oluşmuş reel sayılara doğal sayılar denir ve doğal sayıların kümesi $\mathbb{N}$ ile gösterilir, yani

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots,n,n+1,\ldots\}$

dir ve $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ dir.

Doğal sayıların bu tanımı, doğal sayılara aşina olan ve kullanan biri için, örneğin onluk hesaplama sisteminde, anlamlı olacaktır. Fakat bu tanımlamayı anlamlandıran asıl nokta Matematiksel Tümevarım Prensibi'dir.

<u>Matematiksel Tümevarım Prensibi:</u>

E, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin

i. $1 \in E$

ii. Her $x \in E$ için $x + 1 \in E$

koşullarını sağlayan bir alt kümesi ise $\mathrm{E} = \mathbb{N}$ dir.

Bu prensip kullanılarak, bundan sonra doğal sayılar ile ilgili sürekli olarak kullanacağımız birkaç özellik verilebilir:

Örnek: İki doğal sayının toplamı ve çarpımı da bir doğal sayıdır.

Bu özelliği kanıtlayalım:

$m,n \in \mathbb{N}$ olsun. İlk olarak, $(m+n) \in \mathbb{N}$ olduğunu gösterelim:

$$\mathrm{E} = \{n \in \mathbb{N} : Her\ m \in \mathbb{N}\ için\ (m+n) \in \mathbb{N}\}$$

kümesini alalım. Dikkat ediniz ki bu küme herhangi bir doğal sayı ile toplandığında bir doğal sayı oluşturan elemanların kümesidir. Bu kümenin $\mathbb{N}$ ye eşit olduğunu gösterirsek tüm doğal sayıların toplamlarının doğal sayı olduğunu göstermiş oluruz. $E = \mathbb{N}$ olduğunu Matematiksel Tümevarım Prensibinden gösterelim:

i. $1 \in E$ dir. Çünkü doğal sayıların tanımından her $m \in \mathbb{N}$ için $m \in \mathbb{N}$ ise $m+1 \in \mathbb{N}$ dir.

ii. $n \in E$ alalım. $(n+1) \in E$ olduğunu gösterelim. $n \in E$ ise $her\ m \in \mathbb{N}\ için\ (m+n) \in \mathbb{N}$ dir. Doğal sayıların tanımından $(m+n) \in \mathbb{N}$ ise $(m+n)+1 \in \mathbb{N}$ dir. Reel sayıların özelliklerinden $(n+1)+m = (m+n)+1$ olduğundan $(n+1)+m \in \mathbb{N}$ elde edilir. Bu da $(n+1) \in E$ olduğunu gösterir.

kümesi Matematiksel Tümevarım Prensibinin iki şartını da sağladığından $E = \mathbb{N}$

dir.

$(m \cdot n) \in \mathbb{N}$ olduğunu Çözümlü Sorular kısmında yapacağız.

3.2. Rasyonel ve İrrasyonel Sayılar

Tamsayılar

Doğal sayıların kümesi $\mathbb{N}$, doğal sayıların negatiflerinin (toplama göre terslerinin) kümesi ve sıfırın birleşimlerinin kümesine tamsayılar kümesi denir ve $\mathbb{Z}$ ile gösterilir, yani

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -(n+1), -n, \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$$

dir.

Özellik: İki tamsayının toplamı ve çarpımı da bir tamsayıdır.

İki $m,n \in \mathbb{Z}$ için $m = n \cdot k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ varsa $m,\ n$ ye bölünür yada $m,\ n$ nin bir katıdır yada n,m nin bir bölenidir denir.

Bir $p \in \mathbb{N}, p \neq 1$ doğal sayısının den ve kendisinden başka böleni yoksa asal sayı denir.

Aritmetiğin Temel Teoremi: Her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı

$$\mathrm{n} = \mathrm{p}_1 \cdot \mathrm{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathrm{p}_\mathrm{k}$$

olacak şekilde $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots, \mathrm{p}_\mathrm{k}$ asal sayıların çarpımı şeklinde yazılır ve bu yazılış çarpanların sırası göz ardı edildiğinde tek türlüdür.

ve -1 den başka ortak böleni olmayan $m,n \in \mathbb{Z}$ tamsayılarına aralarında asal sayılar denir.

Rasyonel Sayılar

$m,n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m \cdot n^{-1}$ formundaki sayılara rasyonel sayılar denir. Rasyonel sayıların kümesi $\mathbb{Q}$ ile gösterilir.

Her (m,n) tamsayı ikilisi $n \neq 0$ ise bir $q = m \cdot n^{-1}$ rasyonel sayısı üretir.

$q = m \cdot n^{-1}$ sayısı, $\frac{m}{n}$ şeklinde gösterilen m ve n nin bölümü şeklinde de yazılır ve bu gösterilişe kesir denir.

İrrasyonel Sayılar

Rasyonel olmayan reel sayılara irrasyonel sayılar denir. İrrasyonel sayıların kümesi $\mathbb{I}$

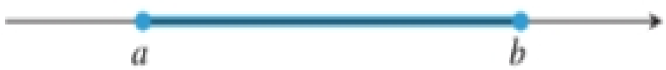
ile gösterilir, yani $\mathbb{I} = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ dir.

Örnek: $\sqrt{2}$, $\pi, \sqrt[3]{5}, \log 3$ irrasyonel sayıdır**.**

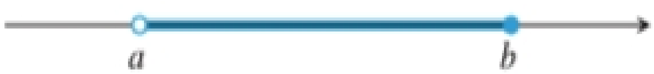
Aralıklar: $\mathbb{R}$ nin, elemanları herhangi iki sayı arasında kalan ve en az iki sayı içeren alt kümelerine aralık denir ve şöyle gösterilirler:

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$: ab açık aralığı

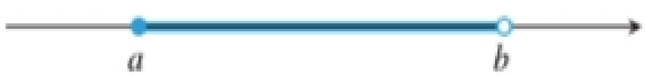
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$: ab kapalı aralığı



$(a,b] = x \in \mathbb{R}: a < x \leq b$: b yi içeren ab yarı-açık aralığı

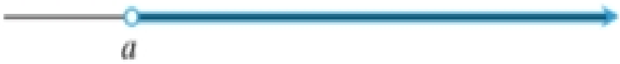


$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$: a yı içeren ab yarı-açık aralığı



$b-a$ ya bir ab aralığının uzunluğu denir ve bir I aralığının uzunluğu $|I|$ ile gösterilir.

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: a<x\}$ açık aralık



$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\}$ kapalı aralık

$(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}: x<b\}$ açık aralık

$(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}: x\leq b\}$ kapalı aralık

$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ hem açık hem kapalı aralık

aralıklarına da sınırsız ya da sonsuz aralıklar denir.

Örnekler:

a) $2x+1<x+2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

$$2x+1<x+2 \quad \textit{Her iki tarafa 1 ekleyelim}$$

$$2x<x+1 \qquad \textit{Her iki taraftan x çıkaralım}$$

$$x<1$$

elde edilir. Dolayısıyla çözüm kümesi $(-\infty,1)$ açık aralığıdır.

b) $-\frac{x}{5}<3x-1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

$$-\frac{x}{5}<3x-1 \quad \textit{Her iki tarafı 5 ile çarpalım}$$

$$-x<15x-15 \quad \textit{Her iki tarafı x ile toplayalım}$$

$0 < 16x - 15 \quad Her\ iki\ taraf\text{ı}\ 15\ \ ile\ toplayal\text{ı}m$

$15 < 16x \quad Her\ iki\ taraf\text{ı}\ 16\ ile\ bölelim$

$\frac{15}{16} < x$

elde edilir. Dolayısıyla çözüm kümesi $\left(\frac{15}{16}, +\infty\right)$ açık aralığıdır.

3.3. Mutlak Değer

$\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

sayısına in mutlak değeri denir.

Örnek: $3 > 0$ pozitif bir sayı olduğundan $|3| = 3$, $|0| = 0$

$-5 < 0$ negatif bir sayı olduğundan $|-5| = -(-5) = 5$

Geometrik olarak in mutlak değeri reel sayılar doğrusu üzerinde ile arasındaki uzaklıktır. Uzaklıklar daima ya pozitif yada sıfır olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için $|x| \geq 0$ dır yada $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dır.

Ayrıca reel sayı doğrusu üzerinde herhangi ve y sayısı arasındaki uzaklık $|x - y|$ dir.

Özellikler:

1. $|-x| = |x|$

2. $|xy| = |x||y|$

3. $y \neq 0\ olmak\ \text{üzere}\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

4. (Üçgen Eşitsizliği) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Uyarı: $|-x| = -|x|$ eşitliği her zaman doğru değildir. Örneğin $|-5| = 5$ iken $-|5| = -5$ dir.

Mutlak Değer ve Aralıklar

$a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

1. $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ yada $x = -a$

2. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

Yani, in a uzaklığının bir pozitif sayısından küçük olmasının anlamı, in $-a$ ile arasında olmasıdır.

3. $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ yada $x < -a$

4. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

5. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ yada $x \leq -a$

Örnekler:

1. $|3x - 2| = 5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Mutlak değerin “ $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ yada $x = -a$” özelliğinden

$|3x - 2| = 5$ ise $3x - 2 = 5$ yada $3x - 2 = -5$ dir.

$3x - 2 = 5$ ise $3x = 7$ ve buradan $x = \frac{7}{3}$ bulunur.

$3x - 2 = -5$ ise $3x = -3$ ve buradan $x = -1$ bulunur.

Dolayısıyla $|3x - 2| = 5$ denkleminin çözüm kümesi $\left\{-1, \frac{7}{3}\right\}$ dür.

2. $\left|4 + \frac{1}{x}\right| < 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Mutlak değerin “$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$” özelliğinden $\left|4 + \frac{1}{x}\right| < 2$ ise

$-2 < 4 + \frac{1}{x} < 2$ dir.

Eşitsizliğin her tarafından 4 çıkaralım.

$$-6 < \frac{1}{x} < -2$$

Her iki tarafının tersini alalım.

$$-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{6}$$

bulunur, yani $\left|4 + \frac{1}{x}\right| < 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$ dır.

3.4. Tam Değer

$\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ sayısından küçük yada eşit olan en büyük tamsayıya x in tam değeri denir ve $[\![x]\!]$ ile gösterilir.

Örnek: $[\![2,5]\!] = 2$ dir. Çünkü $2,5$ sayısından küçük olan en büyük tamsayı 2 dir.

$[\![-2,8]\!] = -3$ dür. Çünkü -$2,8$ sayısından küçük olan en büyük tamsayı -3 dür

$[\![1]\!] = 1$ dir. Çünkü bir tamsayıdır ve tam değeri kendisidir.

Özellikler:

1. Her $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ için

$\mathrm{x} = [\![x]\!] + k$

olacak şekilde $\mathrm{k} \in [0,1)$ vardır.

Bir başka deyişle,

$[\![x]\!] = a$ ise $a \leq x < a + 1$ dir.

2. Her $\mathrm{x,y} \in \mathbb{R}$ için

$[\![x + y]\!] \geq [\![x]\!] + [\![y]\!]$

dir.

3. $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere her $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ için

$[\![x + m]\!] = [\![x]\!] + m$

dir.

$a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

4. $[\![x]\!] > a$ ise $x \geq a + 1$ dir.

5. $[\![x]\!] \geq a$ ise $x \geq a$ dir.

6. $[\![x]\!] < a$ ise $x < a$ dir.

7. $[\![x]\!] \leq a$ ise $x < a + 1$ dir.

Örnekler:

1. $[\![x - 4]\!] = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Tam değerin "$[\![x]\!] = a$ ise $a \leq x < a + 1$" özelliğinden

$[\![x - 4]\!] = 2$ ise $2 \leq x - 4 < 3$ tür.

$2 \leq x - 4 < 3$ *Her iki tarafa* 4 *ekleyelim*

$6 \leq x < 9$

elde edilir, yani $[\![x - 4]\!] = 2$ denkleminin çözüm kümesi $[6,9)$ dur.

2. $[\![x - 4]\!] > 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Tam değerin "$[\![x]\!] > a$ ise $x \geq a + 1$" özelliğinden

$[\![x - 4]\!] > 2$ ise $x - 4 \geq 3$, yani $x \geq 7$ elde edilir. Dolayısıyla $[\![x - 4]\!] > 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $[a, +\infty)$ aralığıdır.

3.5. Çözümlü Sorular

1. İki doğal sayının çarpımı da bir doğal sayı olduğunu Matematiksel Tümevarım Prensibini kullanarak gösteriniz.

$m,n \in \mathbb{N}$ olsun. $(m \cdot n) \in \mathbb{N}$ olduğunu gösterelim:

$\mathrm{E} = \{n \in \mathbb{N} : Her\ m \in \mathbb{N}\ için\ (m \cdot n) \in \mathbb{N}\}$

kümesini alalım. Dikkat ediniz ki bu küme herhangi bir doğal sayı ile çarpıldığında bir doğal sayı oluşturan elemanların kümesidir. Bu kümenin $\mathbb{N}$ ye eşit olduğunu gösterirsek tüm doğal sayıların çarpımlarının doğal sayı olduğunu göstermiş oluruz. $E = \mathbb{N}$ olduğunu Matematiksel Tümevarım Prensibinden gösterelim:

i. $1 \in E$ dir. Çünkü birim elemanın tanımında her $m \in \mathbb{N}$ için $m \in \mathbb{N}$ ise $m \cdot 1 \in \mathbb{N}$ dir.

ii. $n \in E$ alalım. $(n + 1) \in E$ olduğunu gösterelim. $n \in E$ ise $her\ m \in \mathbb{N}\ için\ (m \cdot n) \in \mathbb{N}$ dir. Toplam ve çarpım arasındaki ilişkiden $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m \cdot 1 = m \cdot n + m$ dir. $m,m \cdot n \in \mathbb{N}$ olduğundan ve iki doğal sayının toplamının da bir doğal sayı olduğundan (Örnek olarak yukarıda göstermiştik), $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m \in \mathbb{N}$ elde edilir. Bu da $(n + 1) \in E$ olduğunu gösterir.

kümesi Matematiksel Tümevarım Prensibinin iki şartını da sağladığından $E = \mathbb{N}$

dir.

2. $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \neq 1) \Longrightarrow ((n - 1) \in \mathbb{N})$ olduğunu Matematiksel Tümevarım Prensibini kullanarak gösteriniz.

$$\mathrm{E} = \{n-1 \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \neq 1\}$$

kümesinin $\mathbb{N}$ ye eşit olduğunu gösterirsek soruda isteneni elde etmiş oluruz. $E = \mathbb{N}$ olduğunu göstermek için Matematiksel Tümevarım Prensibini kullanalım.

i. $1 \in E$ dir. Çünkü $2 = 1 + 1 \in \mathbb{N}$ ve $1 = 2 - 1$ formundadır.

ii. $m \in E$ alalım. O halde $m = n - 1$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $m + 1 = (n-1) + 1 = (n+1) - 1$ olacağından ve $n + 1 \in \mathbb{N}$ olduğundan $(m+1) \in E$ dir.

kümesi Matematiksel Tümevarım Prensibinin iki şartını da sağladığından $E = \mathbb{N}$

dir.

3. $\frac{4}{x+1} \geq 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

$\frac{4}{x+1} \geq 3$ eşitsizliği sadece $x > -1$ için tanımlıdır. Çünkü $x = -1$ için kesir tanımsız olur ve $x < -1$ için kesir negatif olur. Dolayısıyla $x + 1 > 0$ olmalıdır. Eşitsizliğin her iki tarafını $x + 1$ ile çarpalım.

$$4 \geq 3(x+1) = 3x + 3 \quad \textit{Her iki taraftan } 3 \text{ çıkaralım}$$

$$1 \geq 3x \qquad \textit{Her iki tarafı } 3 \textit{ ile bölelim}$$

$$\frac{1}{3} \geq x$$

bulunur. Dolayısıyla çözüm kümesi $-1 < x \leq \frac{1}{3}$, yani $\left(-1, \frac{1}{3}\right]$ yarı-açık aralığıdır.

4. $|5x - 2| \geq 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Mutlak değerin "$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ yada $x \leq -a$" özelliğinden

$5x - 2 \geq 1$ yada $5x - 2 \leq -1$ dir.

$5x - 2 \geq 1$ ise

$$5x - 2 \geq 1 \quad \textit{Her iki tarafa } 2 \textit{ ekleyelim}$$

$$5x \geq 3 \quad \textit{Her iki tarafı } 5 \textit{ ile bölelim}$$

$$x \geq \frac{3}{5}$$

elde edilir.

$5x-2 \leq -1$ ise

$5x-2 \leq -1 \quad Her\ iki\ tarafa\ 2\ ekleyelim$

$5x \leq 1 \quad Her\ iki\ taraf\text{ı}\ 5\ \ ile\ b\ddot{o}lelim$

$$x \leq \frac{1}{5}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $|5x-2| \geq 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5}, +\infty\right)$ dur.

5. $\frac{4}{5}(x-3) < \frac{1}{7}(x-5)$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

$$\frac{4}{5}(x-3) < \frac{1}{7}(x-5) \quad Her\ iki\ taraf\text{ı}\ 35\ ile\ \text{ç}arpal\text{ı}m$$

$$28(x-3) < 5(x-5) \quad \text{Ç}arp\text{ı}m\text{ı}n\ toplam\ \ddot{u}zerine\ da\breve{g}\text{ı}l\text{ı}m\ \ddot{o}zelli\breve{g}inden$$

$28x-84 < 5x-25$ elde edilir. Buradan

$$28x-5x < 84-25$$

$$23x < 59$$

$$x < \frac{59}{23}$$

bulunur. Dolayısıyla . $\frac{4}{5}(x-3) < \frac{1}{7}(x-5)$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\left(-\infty, \frac{59}{23}\right)$ elde edilir.

6. $4x - [\![x]\!] = 5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$[\![x]\!] = a$ ise $a \leq x < a+1$ dır.

$a \leq x < a+1 \quad Her\ iki\ taraf\text{ı}\ 4\ ile\ \text{ç}arpal\text{ı}m$

$4a \leq 4x < 4a+4 \quad Her\ iki\ taraftan\ [\![x]\!]\ \text{ç}\text{ı}karal\text{ı}m$

$$4a - [\![x]\!] \leq 4x - [\![x]\!] < 4a+4-[\![x]\!], \quad [\![x]\!] = a\ oldu\breve{g}undan$$

$4a - a \leq 4x - [\![x]\!] < 4a + 4 - a$

$3a \leq 4x - [\![x]\!] < 3a + 4,\ \ 4x - [\![x]\!] = 5$ olduğundan $3\mathrm{a} \leq 5 < 3\mathrm{a} + 4$

bulunur, yani $3\mathrm{a} \leq 5$ ve $5 < 3\mathrm{a} + 4$ dir. $3\mathrm{a} \leq 5$ ise $\mathrm{a} \leq \frac{5}{3}$ *ve* $5 < 3a + 4$ ise $1 < 3a$ ve buradan $\frac{1}{3} < a$ bulunur. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{3} < a \leq \frac{5}{3}$$

elde edilir. $a = [\![x]\!]$ bir tamsayı değeri olacağından yukarıdaki eşitsizlikten $a = 1$ dir.

$a \leq x < a + 1$ olduğundan $a = 1$ için $1 \leq x < 2$ dir. Dolayısıyla denklemin çözüm kümesi $[1,2)$ yarı-açık aralığıdır.

7. $[\![2x - 2]\!] \leq 12$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Tam değerin "$[\![x]\!] \leq a$ ise $x < a + 1$" özelliğinden

$[\![2x - 2]\!] \leq 12$ ise $2x - 2 < 13$ elde edilir, yani $2x < 15$ ve $x < \frac{15}{2}$ dir. Dolayısıyla eşitsizliğin çözüm kümesi $\left(-\infty, \frac{15}{2}\right)$ yarı-açık aralığıdır.

Bölüm Özeti

Bu bölümde reel sayılar ele alınmıştır. Reel sayılar kümesinin tanımı verilmiştir. Bu tanımda yer alan toplam, çarpım ve sıralama işlemlerinin birbirleriyle olan ilişkileri incelenmiştir. Daha sonra reel sayılar kümesinin bazı özel alt kümeleri verilmiştir. Bunlardan biri olan doğal sayılar kümesi tanımlanmış ve Matematiksel Tümevarım Prensibi verilmiştir. Doğal sayıların temel özellikleri Matematiksel Tümevarım Prensibi yardımıyla gösterilmiştir. Diğer önemli alt kümeler olan tamsayılar, rasyonel ve irrasyonel sayılarda tanımlanmış ve birbirleriyle olan ilişkiler verilmiştir.

Bu temel tanımlamalardan sonra sıralama bağıntısının bir özelliği olarak aralık kavramı verilmiştir. Açık, kapalı, yarı-açık aralık türleri tanımlanmıştır.

Bu ünitede reel sayıların iki temel fonksiyonu da tanımlanmıştır: Mutlak değer ve tam değer fonksiyonları. Bu fonksiyonların tanım ve özellikleri verildikten sonra, elimizdeki bir eşitlik ve eşitsizliğin çözüm kümeleri bu fonksiyonların özellikleri yardımıyla nasıl elde edilir konusuyla ilgilenilmiş ve çok sayıda örnek çözülmüştür.

Kaynakça

1. V.A. Zorich, Mathematical Analysis I, 2nd edition, Springer, 2015

2. G.B. Thomas, Calculus, 12th edition, Addison-Wesley