2. KÜMELER

2.1. Küme Kavramı

On dokuzuncu yüzyılın sonları yirminci yüzyılın başlarından beri matematiğin en evrensel dili kümeler teorisi olmuştur. Hatta, matematiği tanımının kümeler üzerindeki farklı yapıları (ilişkileri) inceleyen bilim olarak belirtildiği bile bilinmektedir (bkz. Bourbaki, N. The architecture of mathematics in: N. Bourbaki, Elements of the history of mathematics, Springer, New York, 1994). Kümeler teorisinin yaratıcısı Alman matematikçi G. Cantor (1845-1918) ise küme kavramını "Bir kümeyi, sezgimizin veya düşüncemizin belirli, mükemmel bir şekilde ayırt edilebilir nesnelerinin tutarlı bir bütün halinde bir araya gelmesi olarak görüyoruz." şeklinde tanımlamaktadır. Cantor'un açıklaması elbette bir tanım olarak düşünülemez, çünkü bir küme kendisinden daha karmaşık olabilecek (ve her halükarda daha önce tanımlanmamış) kavramlara hitap eder. Bu tanımlamanın amacı, kavramı diğer kavramlarla ilişkilendirerek açıklamaktır. Cantorian (veya genel olarak "naif" olarak adlandırılan) kümeler teorisinin temel varsayımları aşağıdaki ifadelere indirgenir:

1. Bir küme, ayırt edilebilir herhangi nesnelerden oluşabilir.

2. Bir küme, onu oluşturan nesnelerin koleksiyonu tarafından belirlenir.

3. Herhangi bir özellik, o özelliğe sahip nesnelerin kümesini tanımlar.

x bir nesne, P bir özellik olsun ve $P(x)$, x'in P özelliğine sahip olduğunu göstersin. P özelliğine sahip nesnelerin sınıfı $\{x{:}P(x)\}$ şeklinde gösterilir. Bir kümeyi veya sınıfı oluşturan nesnelere ise o kümenin veya sınıfın elemanları denir.

$x_1,\dots,x_n$ elemanlarından oluşan küme $\{x_1,\dots,x_n\}$ şeklinde gösterilir. Naif kümeler teorisinde "sınıf", "aile" ve "topluluk" kelimeleri "küme" ile eşanlamlı olarak kullanılır. Örneğin,

-"Ben" kelimesindeki "a" harflerinin kümesi
- Onluk sistemdeki rakamların topluluğu
- Fasülyeler ailesi
- Dünya üzerindeki kum tanelerinin kümesi
- Kümelerin ailesi
- Tüm kümelerin kümesi

Bir kümenin tanımındaki olası belirlilik derecesindeki çeşitlilik, bir kümenin o kadar basit ve zararsız bir kavram olmadığını düşündürür. Bununla birlikte, tüm kümelerin kümesi kavramı basitçe çelişkilidir. Gerçekten de, bir M kümesi için $P(M)$, M nin kendisini bir eleman olarak içermediği anlamına gelsin. Şimdi P özelliğine sahip kümelerin sınıfı $K=\{M{:}P(M)\}$ yı düşünelim. K bir küme ise, ya $P(K)$ yada $(P(K))'$ doğrudur. Fakat P(K) doğru olamaz. Çünkü, K bir eleman olarak kendisini, yani K'yı içerir. O zaman, $(P(K))'$ doğrudur. Fakat bu da K nın eleman olarak K yı içerdiği anlamına gelir ve K nın kendilerini eleman olarak içermeyen kümeler sınıfı olarak tanımlanmasıyla çelişir. Sonuç olarak, K bir küme değildir. Bu, İngiliz Matematikçi B. Russel(1872-1970)'ın naif kümeler kavramının yol açtığı paradokslarından biridir.

Modern matematiksel mantıkta bir küme kavramı ayrıntılı bir analize tabi tutulmuştur (yukarıda gördüğümüz gibi iyi bir nedenle). Ancak biz bu analize girmeyeceğiz. Yalnızca, mevcut aksiyomatik kümeler teorisinde bir kümenin, belirli bir özellik topluluğuna sahip matematiksel bir nesne olarak tanımlandığını bilmemiz bu ders için yeterli olacaktır. Bu özelliklerin açıklaması bir aksiyom sistemi oluşturur. Aksiyomatik kümeler teorisinin özü, verilen kümelerden yeni kümelerin oluşturulabileceği kuralların varsayılmasıdır. Genel olarak, mevcut aksiyom sistemlerinden herhangi biri, bir yandan naif teorinin bilinen çelişkilerini ortadan kaldıracak ve diğer yandan matematiğin farklı alanlarında ortaya çıkan belirli kümelerle çalışma özgürlüğü sağlayacak şekildedir ve hepsi, matematiksel analizde kelimenin en geniş anlamıyla anlaşılır.

Şimdilik küme kavramına değinmekle yetindikten sonra, yaygın olarak kullanılan küme-teoritik ilişkilerin ve işlemlerin tanımına geçelim.

Kümeleri göstermek için $A,B,X,Y,\dots$ gibi büyük harfler, kümelerin elemanlarını göstermek için ise $a,b,x,y,\dots$ gibi küçük harfler kullanılır. $a \in S$, a nın S kümesinin elemanı olduğunu gösterir. $a,b \in S$ ise hem a hem de b nin S kümesinin elemanları olduğunu gösterir. Burada $\in$ sembolü, "elemanıdır" anlamındadır. $\notin$ sembolü ise "elemanı değildir" anlamındadır.

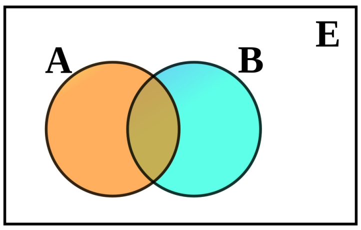
Bir kümeyi göstermek için farklı yollar vardır. Birincisi, kümenin elemanlarını virgülle ayırarak ve parantez içinde listelemektir. İkinci yol ise, kümenin elemanlarını karakterize eden özellikleri belirtmektir. Örneğin,

$$A = \{1,3,5,7,9\} \text{ ve } B = \{x : x \text{ bir çift tamsayı ve } x > 0\}$$

Burada A, elemanları 1,3,5,7,9 rakamlarından oluşan bir küme, B ise pozitif çift tamsayılardan oluşan bir kümedir. B kümesinin içindeki ":" işareti "öyle ki" anlamındadır.

Bir diğer gösteriliş ise Venn şeması gösterilişidir. Venn şeması, kümenin elemanlarını kapalı bir eğri içine yazılarak gösterilmesidir. Bu derste genellikle evrensel kümeleri bir dikdörtgen ile, diğer kümeleri de dikdörtgenin içindeki bir çemberler ile göstereceğiz.

Örneğin,



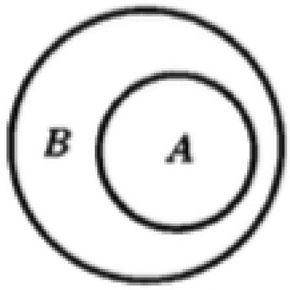
Bu şemadan iki farklı A ve B kümesinin A ya ait B ye ait olmayan elemanların bölgesi turuncu, B ye ait A ya ait olmayan elemanların bölgesi yeşil, her ikisine de ait elemanların bölgesi sari ile gösterilmiştir.

Alt Küme

Bir A kümesinin her elemanı aynı zamanda bir B kümesinin elemanı ise, yani $a \in A$ için $a \in B$ ise A kümesine B kümesinin alt kümesi denir ve

$$A \subseteq B \text{ yada } B \supseteq A$$

şeklinde gösterilir. A kümesinin B kümesinin alt kümesi olması, "A kümesi B tarafından içerilir" yada "B kümesi A kümesini içerir" şeklinde de ifade edilebilir.



İki küme birbirlerini içeriyorsa, başka bir deyişle bu iki küme aynı elemanlara sahip iseler bu iki küme birbirine eşittir denir, yani

$A = B$ olması için gerek ve yeter koşul $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olmasıdır.

A kümesi B kümesinin alt kümesi değilse, yani A nın B ye ait olmayan en az bir elemanı varsa bu durum $A \nsubseteq B$ şeklinde gösterilir.

Eğer $A \subseteq B$ ve $A \neq B$ ise A ya B nin esas alt kümesi denir ve $A \subset B$ ile gösterilir.

Örnek:

$A = \{2,4,6,8,10\}$, $B = \{0,1,2,3,4\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}: x \text{ çift tamsayı}\}$ kümeleri verilsin.

A nın her elemanı çift tamsayı olduğundan $A \subseteq C$ dir. Öte yandan B nin $1,3$ elemanları A ya ait olmadığından $B \nsubseteq A$ dır. Benzer şekilde A nın $6,8,10$ elemanları B ye ait olmadığından $A \nsubseteq B$ dır.
A,B ve C herhangi üç küme olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur:

4. $A \subseteq A$

5. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise $A = B$ dir.

6. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$ dir.

Evrensel Küme, Boş Küme

Kümeler teorisinde, tüm kümelerin sabit ve geniş bir kümeye ait olduğu kabul edilir. Bu kümeye evrensel küme denir ve E ile gösterilir. E bir evrensel küme ve P bir özellik olmak üzere E nin bir elemanı P özelliğini sağlamayabilir. Örneğin,

$$S = \{x : x \text{ bir tamsayı ve } x^2 = 5\}$$

kümesinin hiç elemanı yoktur. Elemanı olmayan kümelere boş küme denir ve $\emptyset$ ile gösterilir.
Boş küme tektir, yani iki A ve B kümesi boş küme ise $A = B$ dir.
Boş küme diğer kümelerin alt kümesidir. Bu yüzden her A kümesi için

$$\emptyset \subseteq A \subseteq E$$

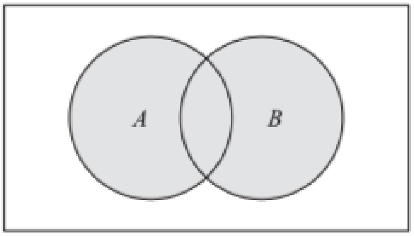
kapsamaları doğrudur.

2.2. Küme İşlemleri

A ve B iki küme olsun. A nın ve B nin tüm elemanlarının oluşturduğu kümeye A ve B kümesinin birleşim kümesi denir ve $A \cup B$ ile gösterilir, yani

$$A \cup B = \{x{:}x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

dir.

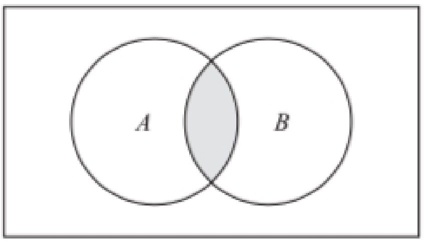


Gölgeli alan $A \cup B$ dir.

Hem A ya hem B ye ait elemanların oluşturduğu kümeye A ile B nin kesişim kümesi denir ve $A \cap B$ ile gösterilir, yani

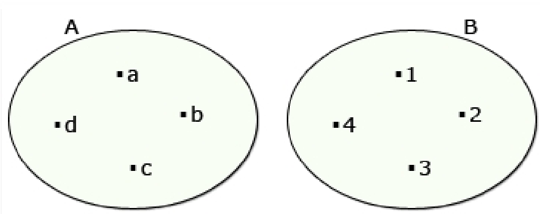
$$A \cap B = \{x{:}x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

dir.



Gölgeli alan $A \cap B$ dir.

A ve B kümelerinin ortak elemanı yok ise, yada buna denk olarak, iki kümenin kesişimi tanımından $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B ye ayrık kümeler denir.



Buradaki A ve B kümelerinin ortak elemanı olmadığından ayrık kümelerdir.

Eğer

$S = A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$

ise S ye A ve B nin ayrık birleşimi denir.

Örnek: $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{c,d,e,f,g\}$ **ve** $C = \{b,h,k,l,m\}$ **üç küme olmak üzere**

$A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g\}, \quad A \cap B = \{c,d\}$

$A \cup C = \{a,b,c,d,h,k,l,m\}, \quad A \cap C = \{b\}$

$B \cup C = \{b,c,d,e,f,g,h,k,l,m\}, \quad B \cap C = \emptyset$

B ve C ayrık kümelerdir.

A ve B iki küme olmak üzere

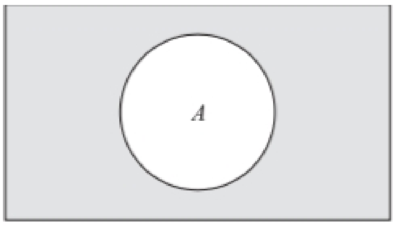
1. $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$

2. $A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$

E bir evrensel küme olmak üzere bir A kümesinin tümleyeni, E ye ait fakat A ya ait olmayan elemanların kümesidir ve A^C ile gösterilir, yani

$A^C = \{$x: $x \in E$ ve $x \notin A\}$

dır.

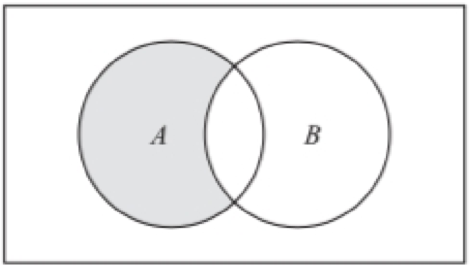


Gölgeli alan A^C dir.

A ve B iki küme olmak üzere, A ya ait fakat B ye ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye B nin A ya göre tümleyeni yada A nın B farkı denir ve $A \setminus B$ ile gösterilir, yani

$A \setminus B = \{x{:}X \in A$ ve $x \notin B\}$

dir.

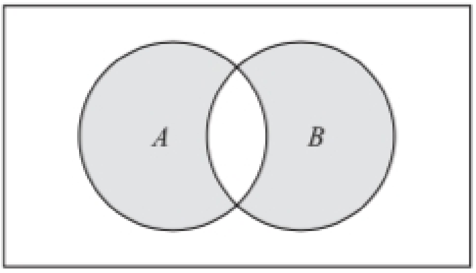


Gölgeli alan $A \setminus B$ dir.

A ve B kümelerinden birine ait olan fakat aynı anda hem A ya hem B ye ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye ise A ve B nin simetrik farkı denir ve $A \oplus B$ ile gösterilir, yani

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ veya $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

dır.



Gölgeli alan $A \oplus B$ dir.

Örnek: $E = \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ **evrensel küme,** $A = \{5,6,7,8\}$, $B = \{7,8,9,10\}$ **ve** $C = \{1,3,5,7,9,...\}$ **olsun.**

$A^C = \{1,2,3,4,9,10,11,...\}$, $B^C = \{1,2,3,4,5,6,11,12,13...\}$ $C^C = \{2,4,6,8,...\}$

$A \setminus B = \{5,6\}$ $A \setminus C = \{6,8\}$ $B \setminus C = \{8,10\}$

$B \setminus A = \{9,10\}$ $C \setminus A = \{1,3,9,11,...\}$ $C \setminus B = \{1,3,5,11,13,...\}$

$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{5,6,9,10\}$ $B \oplus C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = \{1,3,5,8,10,11,13,...\}$

$A \oplus C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A) = \{1,3,6,8,9,11,...\}$

<u>Küme İşlemlerinin Bazı Özellikleri:</u>

1. $A \cup A = A$ ve $A \cap A = A$

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ve $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. $A \cup B = B \cup A$ ve $A \cap B = B \cap A$

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ve $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. $A \cup \emptyset = A$ ve $A \cap E = A$

6. $A \cup E = E$ ve $A \cap \emptyset = \emptyset$

7. $(A^C)^C = A$

8. $A \cup A^C = E$ ve $A \cap A^C = \emptyset$

9. $E^C = \emptyset$ ve $\emptyset^C = E$

10. (DeMorgan Kuralları) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

2.3. Sonlu Kümeler ve Eleman Sayıları

Bir A kümesi boş bir küme ise yada m pozitif bir tamsayı olmak üzere tam m tane elemanı varsa A kümesine sonlu küme denir. Aksi takdirde, A ya sonsuz küme denir.
Bir A kümesinin eleman sayısı $n(A)$ ile gösterilir.

Örnek:

1. A kümesi Türk alfabesinin harflerinden oluşan bir küme olsun. Türk alfabesinde 29 harf olduğundan A sonlu bir kümedir ve $n(A) = 29$ dur.

2. $B = \{x{:}x \text{ bir tamsayı ve } 0 \leq x < 6\}$ kümesinin elemanları 0,1,2,3,4,5 rakamlarından oluşmaktadır. Dolayısıyla B sonlu bir kümedir ve $n(B) = 6$ dır.

3. Boş kümenin elemanı olmadığından $n(\emptyset) = 0$ dır.

<u>Özellikler:</u>

1. A ve B sonlu ve ayrık iki küme ise $A \cup B$ de sonludur ve

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

dir.

2. A ve B sonlu iki küme ise

$$n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$$

dir.

3. A ve B sonlu iki küme ise $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümeleri de sonludur ve

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

dir.

Örnek*:* Bölümümüzün Matematik dersini 30 öğrenci, Türk Dili dersini 18 öğrenci ve her iki dersi de 6 öğrenci alıyorsa

1. Sadece Matematik dersini alan öğrencilerinin sayısını bulalım.

Matematik dersini alan öğrencilerin kümesi A, Türk Dili dersini alan öğrencilerin kümesi B olsun. Soruda verilenlere göre $n(A) = 30$, $n(B) = 18$, $n(A \cap B) = 6$ dır. O halde Türk dili dersini almayan Matematik öğrencilerinin kümesi $A \setminus B$ olacağından bu kümenin eleman sayısı

$$n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B) = 30 - 6 = 24$$

dür.

2. Sadece Türk dili dersini alan öğrenci sayısını bulalım. Sadece Türk dili dersini alan öğrencilerin kümesi $B \setminus A$ olacağından

$$n(B \setminus A) = n(B) - n(A \cap B) = 18 - 6 = 12$$

dür.

3. Matematik veya Türk dili yada her ikisini alan öğrenci sayısını bulalım. Matematik veya Türk dili yada her ikisini alan öğrencilerin kümesi $A \cup B$ dir. Dolayısıyla

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 30 + 18 - 6 = 42$$

bulunur.

4. Tek bir dersi alan öğrenci sayısını bulalım: Tek bir dersi alan öğrencilerin kümesi $A \bigoplus B$ dir. Dolayısıyla, ilk iki şıktan

$$n(A \bigoplus B) = n((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = n((A \setminus B)) + n((B \setminus A)) = 24 + 12 = 36$$

bulunur.

2.4. Çözümlü Sorular

1. $\{a,b,c\}$, $\{z,b,z,a\}$, $\{b,a,b,c\}$,$\{b,c,a,b\}$ kümelerinden hangileri birbirlerine eşittir?

Verilen tüm kümeler birbirlerine eşittir. Çünkü elemanlarının sırası ve tekrarlı olması o kümeyi değiştirmez**.**

2. $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere aşağıdaki kümelerin elemanlarını yazınız.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} : 2 < \text{x} < 7\}$

A kümesi, elemanları 2 ile 7 arasında olan doğal sayılardan oluşur, yani

$A = \{3,4,5,6\}$ dır.

b) $B = \{x \in \mathbb{N} : \text{x tek ve x} < 9\}$

B kümesi, elemanları 9 dan küçük tek doğal sayılardan oluşur, yani

$B = \{1,3,5,7\}$ dir.

c) $C = \{x \in \mathbb{N} : \text{x} + 5 = 3\}$

$\text{x} + 5 = 3$ denklemini sağlayan bir doğal sayı olmadığından $C = \emptyset$, boş kümedir.

3. $A = \{5,6,7,8\}$ olmak üzere

a) A kümesinin $B = \{x \in \mathbb{N} : \text{x tek}\}$ kümesinin bir alt kümesi olmadığını gösteriniz.

$6,8 \in A$ elemanları tek doğal sayılar olmadığı için B kümesine ait değildir, yani $6,8 \notin B$ dir. Bu yüzden $A \nsubseteq B$ dir.

b) A kümesinin $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ kümesinin bir öz alt kümesi olduğunu gösteriniz.

A nın her elemanı C kümesine ait olduğundan $A \subseteq C$ dir. Öte yandan, $\mathbf{1} \in \boldsymbol{C}$ fakat $\mathbf{1} \notin A$ olduğundan A, C kümesinin bir öz alt kümesidir.

4. $B \setminus A = B \cap A^C$ olduğunu gösteriniz.

Bu eşitlikten, kümelerde fark işleminin keşişim ve tümleyen işlemleri cinsinden yazılabileceğini görürüz.

İki kümenin eşitliği tanımından, $B \setminus A = B \cap A^C$ olduğunu göstermek için

$(B \setminus A) \subseteq (B \cap A)^C$ ve $(B \cap A^C) \subseteq (\ B \setminus A)$ olduğunu göstermeliyiz.

$(x \in B \setminus A) \Leftrightarrow (x \in B, x \notin A) \Leftrightarrow (x \in B, x \in A^C) \Leftrightarrow\ x \in (B \cap A^C)$

önermesinin "$\Longrightarrow$" tarafı $B \setminus A \subseteq B \cap A^C$ olduğunu, $\Longleftarrow$ tarafı $B \cap A^C \subseteq B \setminus A$ olduğunu gösterir. Buradan $B \setminus A = B \cap A^C$ elde edilir.

5. 140 kişilik Bilgisayar Programlama bölümünde Algoritma dersini alan öğrencilerin sayısı 60, Web Tasarımı dersini alan öğrencilerin sayısı 45, her iki dersi birden alan öğrencilerin sayısı 20 dir.

a) Algoritma ve Web Tasarımı derslerinden en az birini alan öğrenci sayısı kaçtır?

b) Algoritma ve Web Tasarımı derslerinden tam bir tane alan öğrenci sayısı kaçtır?

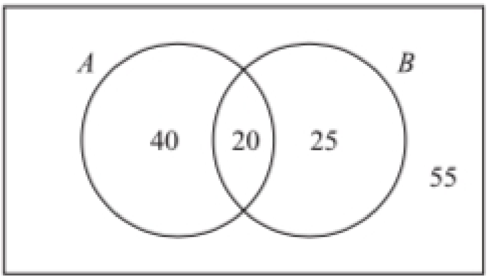
c) Her iki dersi de almayan öğrenci sayısı kaçtır?

A, Algoritma dersini alan öğrencilerin kümesi

B Web Tasarımı dersini alan öğrencilerin kümesi olmak üzere

$$n(A) = 60, \qquad n(B) = 45, \qquad n(A \cap \mathrm{B}) = 20$$

dir. Venn şeması ile gösterecek olursak



a) Algoritma ve Web Tasarımı derslerinden en az birini alan öğrencilerin kümesi $A \cup B$ dir. Venn şemasından

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 60 + 45 - 20 = 85$$

bulunur.

b) Algoritma ve Web Tasarımı derslerinden tam bir tane alan öğrencilerin kümesi $A \oplus B$ dir. Venn şemasından

$$n(A \oplus B) = n((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = n((A \setminus B)) + n((B \setminus A)) = 40 + 25 = 65$$

bulunur.

c) Her iki dersi de almayan öğrencilerin kümesi $(A \cup B)^C$ dir.

$$n((A \cup B)^C) = n(E \setminus (A \cup B)) = n(E) - n(A \cup B) = 140 - 85 = 55$$

bulunur.

Bölüm Özeti

Bu bölümde küme kavramı ele alınmıştır. Elimizdeki bir topluluğun küme olması için hangi özellikleri taşıması gerektiği açıklanmıştır. Altı küme kavramı ile bir kümesinin elemanlarının başla bir kümeye de ait olabileceği gösterilirken, ayrık küme kavramıyla ortak elemanı olmayan kümelerin de var olabileceği belirtilmiştir. Aynı elemanlara sahip kümelerin de eşit küme olarak tanımlandığı gösterilmiştir.

Daha sonra, kümeleri ifade edebilmek için liste ve Venn şeması gibi uygun gösterimler verilmiş ve incelenmiştir. Kesişim, birleşim, tümleyen, fark, direkt toplam gibi küme işlemleri tanımlanmış, özellikleri gösterilmiştir. Bu işlemlerin birbirleriyle olan ilişkileri gösteren eşitlikler verilmiştir. Küme işlemlerinin Venn şeması ve liste ile nasıl gösterildiği de ele alınmıştır.

Bunlar dışında, kümelerin eleman sayılarının nasıl hesaplanacağı konusu da ele alınmıştır. Örneğin, sonlu elemana sahip iki kümenin birleşiminin oluşturduğu kümenin eleman sayısının hesaplanması için bir kural verilmiştir.

Kaynakça

1. V.A. Zorich, Mathematical Analysis I, 2nd edition, Springer, 2015

2. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 3rd edition, 2007