11. DETERMİNANT

11.1. Determinant

Bir $A = [a_{ij}]$, n-kare matrisin determinantı $det(A)$, $|A|$ yada

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ile gösterilir ve görüldüğü A matrisi ile ilişkili bir fonksiyondur. Skalerlerin $n \times n$ dikdörtgen dizisi şeklinde yazıldığı ve iki çizgi ile çevrelendiği bu form bir matris değildir. Bununla birlikte, bir matrisin girdileri yardımıyla oluşan bu forma n. dereceden determinant denir.

Determinantları, özel determinantlar olan 1.,2., ve 3. dereceden determinantları inceleyerek tanımaya başlayalım.

1. ve 2. Dereceden Determinantlar

Bir $A = [a_{11}]$, 1-kare matrisin determinantı

$$|A| = [a_{11}] = a_{11}$$

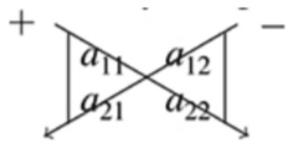
şeklinde tanımlanır.

Bir $A = [a_{ij}]$, 2-kare matrisin determinantı

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

şeklinde tanımlanır.

Görüldüğü gibi 1×1 bir matrisin determinantı, matrisin girdisindeki skalere eşittir. 2×2 matrisin determinantı da yine matrisin girdileri arasındaki bir ilişki ile tanımlıdır. Bu ilişkiyi akılda daha kolay tutmak için şöyle görselleştirebiliriz:



Yani, 2×2 matrisin determinantı, + etiketli ok üzerindeki girdilerin çarpımından, - etiketli ok üzerinde kalan girdilerin çarpımının farkına eşittir.

Örnek: $A = [-18]$ matrisi bir 1×1 matris olduğu için $|A| = |-18| = -18$ dir.

Uyarı: Determinantın $|A|$ gösterimini, mutlak değer işareti ile karıştırmayınız!

$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı $|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4.2 - (-3).5 = 23$ tür.

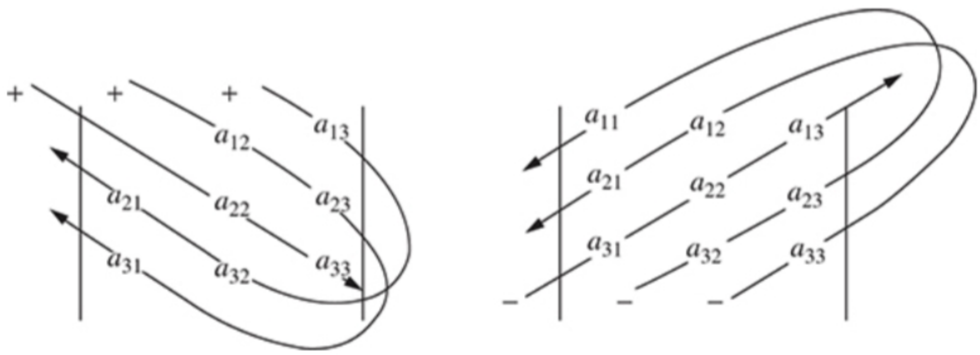
3. Dereceden Determinant

1. yol: Bir $A = [a_{ij}]$, 3-kare matrisin determinantı

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

şeklinde tanımlanır. Görüldüğü gibi determanatta altı adet toplanan terim vardır ve bu terimler verilen matrisin girdilerinden oluşmuştur. Toplanan terimlerin ilk üçünü + işaretiyle etiketli, son üçünü ise – işareti ile etiketli olarak düşünürsek 3. Dereceden determinantı akılda kolay kalması açısından şöyle görselleştirebiliriz:



Bu görselde, + işaretli okların her birinin üzerindeki terimleri çarpıp toplayarak elde edilen toplam ile - işaretli okların her birinin üzerindeki terimleri çarpıp toplayarak elde edilen toplamın farkı 3. Dereceden determinantı verir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı

$$|A| = 2.3.(-2) + 1.0.(-1) + 4.5.(-1) - (-1).3.(-1) - 4.1.(-2) - 5.0.2 = -12 - 20 - 3 + 8 = -27$$

bulunur.

2. yol: Bir $A = [a_{ij}]$, 3-kare matrisin determinantını şu şekilde de yazabiliriz:

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{23} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Determinantı hesaplamak için kullanılan bu formülün 2. Dereceden determinant hesabına dayandığı görülmektedir. Bu formülü akılda tutmak için şöyle görselleştirebiliriz:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Burada determinant formülünde a_{11}, a_{12} ve a_{13} katsayılarının bulunduğu gölgeli sütun ve satırları çıkardığımızda geriye kalan 2×2 matrisler ile ilgili katsayıların çarpımı görselleştirilmiştir.

Örnek:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2-15) - 2(-4+0) + 3(20+0) = -13 + 8 + 60 = 55$$

11.2. Permütasyon

$\{1,2,...,n\}$ kümesinden $\{1,2,...,n\}$ kümesine giden bire-bir ve üzerine bir σ fonksiyonuna permütasyon denir. Başka bir deyişle, $1,2,...,n$ sayılarının kendi içlerinde bir dizilişine permütasyon denir. Bir σ permütasyonu $j_i = \sigma(i)$ olmak üzere

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} \quad \text{yada} \quad \sigma = j_1 j_2 \dots j_n$$

şeklinde gösterilir. Tanımdan da anlaşılacağı üzere, $j_1 j_2 ... j_n$ permütasyonu $1,2,...,n$ sayılarının farklı bir sırada dizilişidir.

Tüm permütasyonların kümesi S_n ile gösterilir ve n elemanlı bir kümenin tüm mümkün permütasyonlarının sayısı $n!$ dir, yani S_n kümesinin eleman sayısı $n!$ dir.

Bir $\sigma \in S_n$ permütasyonu için σ nın ters fonksiyonu σ^{-1} de bir permütasyondur, yani, $\sigma^{-1} \in S_n$ dir.

İki $\sigma, \tau \in S_n$ permütasyonunun bileşke fonksiyonu $\sigma \circ \tau$ da bir permütasyondur, yani $\sigma \circ \tau \in S_n$ dir.

Örnek:

1. Birim fonksiyon $\varepsilon = \sigma \circ \sigma^{-1}$ da bir permütasyondur, yani $\varepsilon \in S_n$ dir. Aslında

$$\varepsilon = 123...n$$

permütasyonudur.

2. $\{1,2\}$ kümesi üzerinde iki tane permütasyon vardır, çünkü 1 ve 2 elemanlarının kendi içlerinde iki farklı dizilişi vardır: 12 ve 21 dir. Gerçekten de $n = 2$ olduğundan S_2 nin $n! = 2! = 2.1 = 2$ tane elemanı vardır.

3. $\{1,2,3\}$ kümesi üzerinde altı tane permütasyon vardır, çünkü $n = 3$ olduğundan S_3 ün $n! = 3! = 3.2.1 = 6$ tane elemanı vardır. Bu permütasyonlar da 1,2 ve 3 elemanlarının kendi içlerindeki farklı dizilişleri olacağından, 123, 132, 213, 231, 312, 321 dir.

Bir Permütasyonun İşareti

$\sigma \in S_n$ herhangi bir permütasyon olsun, $\sigma = j_1 j_2 ... j_n$ diyelim. Bir (i,k) tamsayı ikilisi için $i > k$ ve σ dizilişinde i, k dan önce geliyorsa (i,k) ikilisine σ da bir inversiyon denir. Eğer σ nın inversiyonlarının sayısı çift ise σ ya çift permütasyon, tek ise σ ya tek permütasyon denir. σ nın işareti ise $sgn\sigma$ ile gösterilir ve

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1 & \sigma\ çift\ ise \\ -1 & \sigma\ tek\ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek:

1. $\sigma = 34152 \in S_5$ permütasyonunun işaretini belirleyiniz.

Her k elemanı için k dan büyük ve σ da k dan önce gelen elemanları sayalım:

$k = 1$ için 1 den büyük olan $2,3,4,5$ elemanları vardır. Bu elemanlardan 3 ve 4, σ dizilişinde 1 den önce gelir. O halde $k = 1$ durumunda σ nın iki inversiyonu vardır: $(3,1)$, $(4,1)$.

$k = 2$ için 2 den büyük olan $3,4,5$ elemanları vardır. Bu elemanlardan $3,4$ ve 5, σ dizilişinde 2 den önce gelir. O halde $k = 2$ durumunda σ nın üç inversiyonu vardır: $(3,2)$, $(4,2)$, $(5,2)$.

$k = 3$ için 3 ten büyük olan $4,5$ elemanları vardır. Bu elemanlardan hiçbiri σ dizilişinde 3 ten önce gelmemektedir. O halde $k = 3$ durumunda σ nın inversiyonu yoktur.

$k = 4$ için 4 ten büyük olan 5 elemanı vardır ve 5, σ dizilişinde 4 ten önce gelmemektedir. O halde $k = 4$ durumunda σ nın inversiyonu yoktur.

$k = 5$ için 5 ten büyük eleman olmadığından $k = 5$ durumunda da σ nın inversiyonu yoktur.

O halde σ nın toplam 5 tane inversiyonu vardır, yani σ tek fonksiyondur ve işareti $sgn\sigma = -1$ dir.

2. $\varepsilon = 123...n$ birim permütasyonunda hiç inversiyon olmadığından çift permütasyondur ve $sgn\varepsilon = 1$ dir.

11.3. Herhangi Dereceli Determinantlar

$A = [a_{ij}]$, bir n-kare matris olmak üzere A nın her satırından sadece bir eleman ve her sütunundan sadece bir eleman alınsın. Bu n elemanın çarpımı

$$a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$$

formunda yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir, bu sebeple ilk alt indisler $1,2,...,n$ düzenindedir. İkinci alt indisler ise farklı sütunlardan geleceği için S_n de bir $j_1j_2...j_n$ permütasyonu oluşturur. Dolayısıyla S_n de her bir permütasyon yukarıdaki gibi bir çarpım oluşturur, yani bir n-kare A matrisi için toplam $n!$ tane böyle farklı çarpımı vardır.

$A = [a_{ij}]$, bir n-kare matrisinin yukarıdaki $n!$ tane çarpım teriminin karşılık gelen permütasyonlarının işaretleriyle çarpılıp toplanmasına A matrisinin determinantı denir ve $det(A)$ yada $|A|$ ile gösterilir, yani

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn\sigma)\, a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$$

veya

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn\sigma)\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$$

dir. n-kare matrisin determinantına n. dereceden determinant denir.

Örnek:. Şimdi determinantın genel tanımından bölümün başında verdiğimiz 1., 2. ve 3. dereceden determinant tanımlarını elde edelim.

1. $A = [a_{11}]$, 1-kare matrisin determinantını bulalım. Burada $n = 1$ olduğundan S_1 de sadece bir permütasyon vardır: $\sigma = 1$, yani $\sigma(1) = 1$ dir. Bu permütasyonun hiç inversiyonu olmadığından çift permütasyondur ve $sgn\sigma = 1$ dir. Şimdi determinant tanımında yerine koyalım:

$$|A| = (sgn\sigma)a_{1\sigma(1)} = 1.a_{11} = a_{11}$$

dir.

2. $A = [a_{ij}]$, 2-kare matrisin determinantını bulalım. Burada $n = 2$ olduğundan S_2 de $n! = 2! = 2$ tane permütasyon vardır: 12 ve 21, yani 12 permütasyonunda $\sigma(1) = 1$ ve $\sigma(2) = 2$ dir. 21 permütasyonunda ise $\sigma(1) = 2$ ve $\sigma(2) = 1$ dir. 12 permütasyonun hiç inversiyonu olmadığından çift

permütasyondur ve $sgn(12) = 1$ dir. 21 permütasyonun (2,1) şeklinde bir tane inversiyonu olduğundan tek permütasyondur ve $sgn(21) = -1$ dir. Şimdi determinant tanımında yerine koyalım:

$$|A| = (sgn(12))a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} + (sgn(21))a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} = 1.a_{11}a_{22} + (-1)a_{12}a_{21}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

bulunur.

3. $A = [a_{ij}]$ bir 3-kare matris olsun. Burada $n = 3$ olduğundan S_3 de $n! = 3! = 6$ tane permütasyon vardır: 123, 132, 213, 231, 312, 321. 123 permütasyonunda $\sigma(1) = 1$ ve $\sigma(2) = 2$ ve $\sigma(3) = 3$ tür. 132 permütasyonunda $\sigma(1) = 1$ ve $\sigma(2) = 3$ ve $\sigma(3) = 2$ dir. 213 permütasyonunda $\sigma(1) = 2$ ve $\sigma(2) = 1$ ve $\sigma(3) = 3$ tür. 231 permütasyonunda $\sigma(1) = 2$ ve $\sigma(2) = 3$ ve $\sigma(3) = 1$ dir. 312 permütasyonunda $\sigma(1) = 3$ ve $\sigma(2) = 1$ ve $\sigma(3) = 2$ dir. 321 permütasyonunda $\sigma(1) = 3$ ve $\sigma(2) = 2$ ve $\sigma(3) = 1$ dir. 123, 231, 312 permütasyonları çift ve işaretleri 1 iken 321, 213, 132 permütasyonları tek ve işaretleri (-1) dir. Şimdi determinant tanımında yerine koyalım:

$$|A| = (sgn(123))a_{1\sigma(1)}a_{3\sigma(2)}a_{2\sigma(3)} + (sgn(231))a_{1\sigma(1)}a_{3\sigma(2)}a_{2\sigma(3)}$$

$$+ (sgn(312))a_{1\sigma(1)}a_{3\sigma(2)}a_{2\sigma(3)} + (sgn(321))a_{1\sigma(1)}a_{3\sigma(2)}a_{2\sigma(3)}$$

$$+ (sgn(213))a_{1\sigma(1)}a_{3\sigma(2)}a_{2\sigma(3)} + (sgn(132))a_{1\sigma(1)}a_{3\sigma(2)}a_{2\sigma(3)}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

bulunur.

Matrisin boyutu arttıkça determinantın tanımında toplanacak terim sayısı da artacağından büyük matrislerin determinantını hesaplamak için işimizi kolaylaştıracak hesaplama yöntemleri vardır. Bunu ileriki bölümlerde göreceğiz.

11.4. Determinantın Özellikleri

1. Bir A matrisinin determinantı ile transpozesinin determinantı eşittir, yani

$$|A| = |A^T|$$

dir.

2. A bir kare matris olmak üzere

a) A bir sıfır satır yada sıfır sütuna sahipse $|A| = 0$ dır.

b) A nın iki satırı yada iki sütunu birbirlerinin bir katı ise $|A| = 0$ dır.

c) A üçgensel bir matris ise $|A| =$ diyagonal elemanların çarpımıdır.

3. A bir kare matris olmak üzere, A ya uygulanan elementer satır işlemleri altında elde edilen B matrisinin determinantı şöyledir:

a) A nın herhangi iki satırının yada sütunun yerinin değiştirilmesiyle elde edilen B matrisinin determinantı, A nın determinantının negatifine eşittir, yani

$$|B| = -|A|$$

dır.

b) A nın bir satırının yada sütununun bir k skaleri ile çarparak elde edilen B matrisinin determinantı $|B| = k|A|$ dır.

c) A nın bir satırının (yada sütununun) bir katını başka bir satır (yada sütuna) eklenmesiyle elde edilen B matrisinin determinantı $|B| = |A|$ dır.

4. İki A ve B matrisinin çarpımının determinantı, matrislerin determinantlarının çarpımıdır, yani

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

dir.

5. A bir kare matris olmak üzere aşağıdakiler denktir:

a. A nın terslenebilirdir.

b. $|A| \neq 0$ dır.

c. $AX = 0$ denklemi sadece sıfır çözüme sahiptir.

11.5. Minör ve Kofaktörler

$A = [a_{ij}]$, bir n-kare matris olsun. A nın $i.$ satırı ile $j.$ sütununun silinmesiyle elde edilen $(n-1)$-kare matrisi M_{ij} ile gösterelim. M_{ij} nin determinantı $|M_{ij}|$ ye, A nın a_{ij} girdisinin minörü denir. a_{ij} nin kofaktörü ise A_{ij} ile gösterilir ve

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

şeklinde tanımlanır. Dikkat edilirse M_{ij} bir matris iken A_{ij} kofaktör bir skalerdir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ matrisinin a_{23} ve a_{31} girdilerinin minör ve kofaktörlerini bulunuz.

$a_{23} = 6$ girdilerinin minörünü bulmak için önce A matrisinin 2. satır ve 3. sütununu silelim

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

ve kalan girdilerin oluşturduğu M_{23} matrisini bulalım: $M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$. Bu matrisin determinantı a_{23} ün minörüdür:

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1.8 - 2.7 = 8 - 14 = -6$$

ve a_{23} ün kofaktörü

$$A_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = (-1)(-6) = 6$$

dır.

$a_{31} = 7$ girdilerinin minörünü bulmak için önce A matrisinin 3. satır ve 1. sütununu silelim

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

ve kalan girdilerin oluşturduğu M_{31} matrisini bulalım: $M_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. Bu matrisin determinantı a_{31} ün minörüdür:

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2.6 - 3.5 = 12 - 15 = -3$$

ve a_{31} ün kofaktörü

$$A_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = (1)(-3) = -3$$

dür.

11.6. Laplace Açılımı

$A = [a_{ij}]$ bir n-kare matris olmak üzere A matrisinin determinantı, matrisin herhangi bir satır yada sütunundaki girdilerin kofaktörleriyle çarpımlarının toplamıdır.

Örneğin, $i.$ satıra göre A nın determinantının Laplace açılımı

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

dir.

$j.$ sütuna göre A nın determinantının Laplace açılımı

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

dir.

Tanımdan da görüldüğü gibi, Laplace açılımı, bir matrisin determinantını hesaplamak için kullanılan bir yöntemdir. Daha önce de bahsettiğimiz gibi büyük boyutlu matrislerin determinantlarını, detetrminant tanımından yapmak zordur. Laplace açılımı bu noktada büyük kolaylık sağlar.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 4×4 matrisinin determinantını Laplace açılımıyla hesaplayalım:

1. satıra göre Laplace açılımı yapalım:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

olacaktır. O halde, ilk olarak, formüldeki $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ kofaktörlerini hesaplayalım:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = |M_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -7 & -3 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}| = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = |M_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -5 & -7 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 33$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4}|M_{14}| = -|M_{14}| = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-5) = 5$$

Bu kofaktörleri, determinant formülünde yerine koyalım:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} = 5.(-1) + 4.(-7) + 2.33 + 1.5 = 38$$

bulunur.

11.7. Bir Matrisin Klasik Eşleniği

Bir $A = [a_{ij}]$ n-kare matrisinin klasik eşleniği $adjA$ ile gösterilir ve A nın tüm girdilerinin kofaktörlerinin oluşturduğu matrisin transpozesidir, yani

$$adjA = \left[A_{ij}\right]^T$$

dir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin klasik eşleniğini bulunuz.

İlk olarak her bir girdinin kofaktörünü bulalım:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 17$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = 1$$

Bulunur. Dolayısıyla

$$adjA = adjA = \left[A_{ij}\right]^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 17 \\ 1 & -3 & 7 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -8 & -3 & -1 \\ 17 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Özellik: A bir n-kare matris olmak üzere

$$A(adjA) = (adjA)A = |A|I$$

dir. Burada I birim matristir. Ayrıca eğer $|A| \neq 0$ ise A nın tersi

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\ A)$$

şeklindedir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi terslenebilir midir? Terslenebilir ise tersini bulunuz.

Bir matrisin determinantı sıfırdan farklı ise o matrisin terslenebilir olduğunu biliyoruz.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

olduğundan A matrisi terslenebilirdir. A nın tersi ise

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\ A) = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -8 & -3 & -1 \\ 17 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1/5 & -1/5 & 2/5 \\ 8/5 & 3/5 & 1/5 \\ -17/5 & -7/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

bulunur.

11.8. Lineer Denklem Sistemlerine Uygulamalar, Cramer Kuralı

n denklemli, n bilinmeyenli $AX = B$ lineer denklem sistemini düşünelim. Bölüm 10 dan hatırlayınız ki $A = [a_{ij}]$ katsayılar matrisi (kare matris), $B = [b_i]$ de sabit terimlerin sütun vektörüdür. A_i ise A katsayılar matrisinde $i.$ sütununu B sütun vektörü ile değiştirilmesinden elde edilen matris olsun.

Determinant ile $AX = B$ lineer denklem sisteminin çözümü arasında Cramer kuralı olarak bilinen bir ilişki vardır:

$AX = B$ lineer denklem sisteminin çözümünün olması için ancak ve ancak $|A| \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda, denklemin çözümü

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \dots \quad ,x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

şeklindedir.

Bir lineer denklem sisteminin çözümü için Gauss Eliminasyon yönteminden farklı bir farklı bir yöntem sunan Cramer Kuralının sadece bilinmeyen sayısı ile denklem sayısının eşit olduğu sistemler için kullanılabileceğini unutmayalım.

Örnek:

$$x + y + z = 5$$

$$x - 2y - 3z = -1$$

$$2x + y - z = 3$$

lineer denklem sisteminin çözümünü araştıralım:

İlk olarak katsayılar matrisinin determinantına bakalım:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 6 + 1 + 4 + 3 + 1 = 5$$

$|A| = 5 \neq 0$ olduğundan verilen denklem sisteminin tek bir çözümü vardır. Cramer kuralından bu çözümü bulalım:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{20}{5} = 4$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{15}{5} = 3$$

olduğundan denklem sisteminin çözümü $u = (4, -2, 3)$ tür.

Bölüm Özeti

Bu bölümde determinant kavramı ele alınmıştır. İlk önce 2x2 ve 3x3 matrislerin determinantları hesaplanmış ve bu matrislerin hesabından yola çıkılarak daha büyük dereceli kare matrislerin determinantların hesabı için tanım verilmiştir. Determinantın, matrisin derecesi büyüdükçe tanımı yoluyla hesabının gittikçe zorlaştığı görülmüştür. Bu sebeple, determinant hesabı için Laplace açılımı olarak bildiğimiz bir yöntem verilmiştir. Bu yöntem, matrislerin minör ve kofaktörleri aracılığıyla matrisin determinantının daha düşük dereceli matrislere indirgenerek hesaplanmasına dayanmaktadır. Laplace yöntemi yardımıyla, ünitenin başında verdiğimiz 2x2 ve 3x3 matrislerin determinantları yeniden elde edilmiş ve sonra 4x4 bir matrisin determinantı bu yöntem yardımıyla elde edilmiştir.

Daha sonra determinantın bir uygulaması olarak, bir matrisin terslenebilir olup olmadığı ve terslenebilir ise tersinin nasıl hesaplanacağı ile ilgili bir yöntem verilmiştir. Böylece bu ders boyunca bir matrisin terslenebilir olup olmadığı ve terslenebilir ise tersinin ne olduğu araştırmalarına tanım yoluyla yada elementer satır işlemleri kullanarak incelemenin yanında üçüncü bir yol olarak da determinant yoluyla incelenmesini öğrenmiş oluyoruz

Determinantın başka bir uygulaması olarak, denklem sayısı ve bilinmeyen sayısı eşit olan lineer denklem sistemlerinin çözümünün olup olmadığı varsa çözümünün nasıl bulunacağına dair Cramer kuralı olarak bilinen bir yöntem de verilmiştir.

Kaynakça

1. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 3rd edition, 2007

2. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Linear Algebra, 6th edition, 2018