ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Ю.Я. Белов

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Учебное пособие

Красноярск
СФУ
2008

Содержание

Введение

Учебное пособие предназначено для студентов математических специальностей и написано на основание курсов лекций по уравнениям математической физике и уравнениям в частных производных, читавшихся автором на математическом факультете, факультете математики и информатики Красноярского государственного университета.

Пособие состоит из двух больших частей. Первая часть посвящена вопросам, связанным с классическими решениями начально-краевых задач и рассчитана на один семестр курса. Вторая часть посвящена обобщенным решениям начально-краевых задач. Здесь изучаются краевые задачи для многомерных уравнений математической физики – эллиптических, параболических, гиперболических. Основным методом доказательства разрешимости краевых задач является метод Галеркина, метод основанный на теореме Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Обобщенные решения ищутся в пространствах С.Л. Соболева.

В дополнении сформулированы результаты о существовании, единственности, гладкости решений для более общих краевых задач.

Автор надеется, что данное пособие поможет студентам в первоначальном изучении курсов математической физики, уравнений в частных производных. При написании курса в основном использовались известные учебники и монографии ([5], [7], [11], [14], [17], [19])

1. Классификация уравнений в частных производных

Пусть E_n - n-мерное евклидово пространство, D, G, Ω обозначим области из пространства E_n. Через $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ обозначим точки пространства E_n. Пусть $v(x) = v(x_1, \ldots, x_n)$, $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ E_n - функции, определённые на некоторых областях пространства E_n

Определение. Уравнением в частных производных называется уравнение, в которое входят независимые переменные $x = (x_1, \ldots, x_n)$, неизвестная функция $u(x)$ и ее частные производные. Порядок наибольшей производной, входящей в уравнение, называется порядком уравнения. (Предполагается, что эта производная нетривиальным образом входит в уравнение).

Примеры.

$$u_{x_1} + u_{x_2} + u_{x_1 x_2} = 0, \tag{1.1}$$

$$u^2_{x_1 x_2 x_3} + f(u, u_{x_1}) = 0, \tag{1.2}$$

где (1.1) - уравнение второго порядка, (1.2) - уравнение третьего порядка.

Под уравнениями математической физики понимают дифференциальные уравнения, описывающие те или иные физические процессы. В данном курсе мы изучаем уравнения в частных производных второго порядка.

Определение.Уравнение называется сильно нелинейным, если старшие производные уравнения входят в него нелинейно (коэффициенты перед ними зависят от старших производных уравнения).

Уравнение (1.1) не является сильно нелинейным, уравнение (1.2) является сильно нелинейным также как и уравнение

$$\sin(u_{x_1 x_2 x_3}) + f(\nabla u) = 0.$$

Определение. Нелинейное уравнение, не являющееся сильно нелинейным, называется квазилинейным уравнением.

Определение. Нелинейное уравнение, в котором нелинейным образом входит только неизвестная функция, называется полулинейным.

Например, уравнение

$$u_{x_1} + u_{x_2} = f(u) + \varphi(x),$$

где $f(u)$ - нелинейная функция.

Определение. Уравнение в частных производных, в котором неизвестная функция и все ее частные производные входят линейным образом, называется линейным уравнением.

Линейное уравнение второго порядка имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x). \tag{1.3}$$

Здесь $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$, $f(x)$ заданные в Ω функции.

Линейное уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x). \tag{1.3$'$}$$

называют уравнением, записанным в дивергентном виде.

Рассмотрим матрицу старших коэффициентов

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

уравнения (1.3) ((1.3')). Считаем, что матрица $A(x)$ симметрична в каждой точке $x \in \Omega$.

Зафиксируем $x \in \Omega$. Рассмотрим уравнение

$$|A(x) - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}(x) - \lambda & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) - \lambda & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn-1}(x) & a_{nn}(x) - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{1.4}$$

определяющее собственные значения матрицы $A(x)$. Из алгебры известно, что все собственные числа симметричной матрицы действительные. Мы имеем n действительных решений (учитывая кратность) λ_1, λ_2, $\dots$, λ_n уравнения (1.4). Пусть α - число положительных, β - число отрицательных, γ - число нулевых собственных чисел матрицы $A(x)$.

Определение. Тройка чисел (α, β, γ) называется типом уравнения (1.3) (уравнения (1.3')) в точке x.

Умножим уравнение (1.3) (уравнение (1.3')) на -1. Получим уравнение типа (β, α, γ). Так как все решения полученного уравнения те же, что и у исходного, мы считаем, что (α, β, γ) и (β, α, γ) - один и тот же тип.

Пусть $\alpha + \beta + \gamma = n$. Выделяются следующие типы уравнений:
$(n, 0, 0)$ или $(0, n, 0)$ - эллиптический,
$(n-1, 1, 0)$ $(1, n-1, 0)$ - гиперболический,
$(n-1, 0, 1)$ $(0, n-1, 1)$ - параболический,
$(n-2, 2, 0)$ $(2, n-2, 0)$ - ультрагиперболический,
$(n-2, 0, 2)$ $(0, n-2, 2)$ - ультрапараболический.

Примеры.

1. *Уравнение, описывающее волновые процессы.*

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(t, x, \nabla u, u), \tag{1.5}$$

$\Delta u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $\nabla u(x) = grad\, u(x)$. Уравнение (1.5) называется при $n = 1$ - уравнение колебания струны, при $n = 2$ - уравнение колебания мембраны, при $n = 3$ - уравнение колебания трехмерных тел.

Определим тип уравнения колебания. Матрица $A(x)$ уравнения

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(t, x, \nabla u, u),$$

где $u = u(t, x)$, $t \in E^1$, $x \in E^n$, имеет размерность $n+1 \times n+1$, не зависит от x и имеет вид.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -a^2 \end{pmatrix}.$$

Её собственные числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots, = \lambda_n = \lambda_{n+1} = -a^2$.

Тип уравнения - гиперболический: $(1, n, 0)$.

Замечание. В случае уравнения (1.5) размерность независимых переменных $(t, x_1, \dots, x_n)$ равна $n+1$ и $(n+1, 0, 0)$, $(n, 1, 0)$, $(n, 0, 1)$ ($(0, n+1, 0)$, $(1, n, 0)$, $(0, n, 1)$) типы эллиптический, гиперболический, параболический соответственно.

2. *Уравнение (уравнение теплопроводности, диффузионное уравнение), описывающее распространение тепла, диффузионные процессы.*

$$u_t = a^2 \Delta u + f(t, x, \nabla u, u), \tag{1.6}$$

где $u = u(t, x)$, $t \in E^1$, $x \in E^n$.

Перепишем (1.6) в виде

$$0 \cdot u_{tt} - a^2 \Delta u = -u_t + f(t, x, \nabla u, u),$$

и запишем матрицу $A(x) = A$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -a^2 \end{pmatrix}.$$

Её собственные числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots, = \lambda_n = \lambda_{n+1} = -a^2$. Тип уравнения - параболический: $(0, n-1, 0)$.

3. *Уравнение Пуассона.*

$$\Delta u = f(x), \tag{1.7}$$

где $u = u(x), \quad x \in \Omega \in E_n$.

Если $f(x) = 0$, уравнение (1.7) принимает вид

$$\Delta u = 0. \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) называется уравнением Лапласа.

Запишем матрицу $A(x) = A$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Её собственные числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots, = \lambda_n = 1$. Тип уравнения - эллиптический: $(n, 0, 0)$.

Отметим, что тип рассмотренных выше уравнений, не зависит от точки x, так как матрицы A в этих уравнениях постоянные.

4. *Уравнение Трикоми (уравнение газовой динамики).*

$$x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0.$$

Матрица коэффициентов имеет вид

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы $\lambda_1 = x_2$, $\lambda_2 = 1$. При $x_2 > 0$ тип уравнения эллиптический $(n, 0, 0)$; при $x_2 = 0$ тип уравнения параболический $(n - 1, 0, 1)$; при $x_2 < 0$ тип уравнения гиперболический $(n - 1, 1, 0)$, $n = 2$.

2. Постановки краевых задач

Стационарные уравнения

Рассмотрим дифференциальное операторное выражение

$$L(\cdot) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial (\cdot)}{\partial x_i} + c(\cdot),$$

где a_{ij}, b_i, c - заданные коэффициенты, зависяшие от x, $x \in \Omega$, $\Omega \subset E_n$.

Рассмотрим уравнение

$$L(u) = f. \tag{2.1}$$

Первая краевая задача. Найти функцию $u(x)$, определённую в $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в Ω уравнению (2.1) и на границе $\partial\Omega$ области Ω совпадающую с заданной функцией $\varphi(x)$:

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \qquad x \in \Omega. \tag{2.2}$$

Условие (2.2) называют граничным условием 1-го рода. Задача (2.1), (2.2) - первая краевая задача для уравнения (2.1), описывающего стационарные процессы.

Определение классического решения задачи (2.1), (2.2): Функция $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ называется классическим решением задачи (2.1), (2.2), если в Ω она удовлетворяет уравнению (2.1), а на границе условию (2.2).

Ниже мы будем использовать следующие функциональные пространства.

$C(\overline{\Omega}) = \{$ множество функций f непрерывных на $\overline{\Omega}\}$,

$C(\Omega) = \{$ множество функций f непрерывных на $\Omega\}$,

$C^k(\Omega) = \{$ множество функций f непрерывных на Ω, имеющих в Ω все непрерывные производные по всем своим аргументам до порядка k включительно$\}$, $k > 0$, $k-$ целое, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Вторая краевая задача. Найти функцию $u(x)$, определённую в $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в Ω уравнению (2.1) и на границе $\partial\Omega$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\partial\Omega} = \psi(x). \qquad x \in \Omega. \tag{2.3}$$

Здесь $\dfrac{\partial u}{\partial N} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j} cos(n, x_i)$ - производная по конормали, $\psi(x)$ - заданная на $\partial\Omega$ функция, n - внешная нормаль к границе $\partial\Omega$. Условие (2.3) - граничное условие 2-го рода. Задача (2.1), (2.3) - вторая краевая задача.

Определение классического решения задачи (2.1), (2.3): Функция $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ называется классическим решением задачи (2.1), (2.3), если в Ω она удовлетворяет уравнению (2.1), а на границе $\partial\Omega$ условию (2.3).

Третья краевая задача. Найти функцию $u(x)$, определённую в $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в Ω уравнению (2.1) и на границе $\partial\Omega$ условию

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x)\right)\right|_{\partial\Omega} = \mu(x), \qquad x \in \Omega. \tag{2.4}$$

Здесь $\sigma(x)$, $\mu(x)$ - заданные на $\partial\Omega$ функции, $\sigma(x) > 0$.

Условие (2.4) - граничное условие 3-го рода. Задача (2.1), (2.4) - третья краевая задача.

В случае, когда

$$a_{ij} = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad b_i(x) = c(x) = 0,$$

уравнение (2.1) является уравнением Пуассона

$$\Delta u = f.$$

Первая краевая задача для уравнения Пуассона:

$$\Delta u = f,$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \qquad x \in \partial\Omega.$$

Вторая краевая задача для уравнения Пуассона:

$$\Delta u = f,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = \psi(x), \qquad x \in \partial\Omega.$$

В этом случае $\dfrac{\partial u}{\partial N} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_i} cos(n, x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} cos(n, x_i) = \dfrac{\partial u}{\partial n}$.

Замечание. Можно на различных частях границы задавать различные условия. В таком случае говорят, что поставлена смешанная краевая задача.

Нестационарные уравнения

Введем следующие обозначения: $Q_T = \{(t, x)|0 < t < T, x \in \Omega\}$, где $\Omega \subset E_n$ - ограниченная область, $S_T = (0, T] \times \partial\Omega$ - боковая граница множества Q_T, $\Gamma_T = S_T \cap \overline{\Omega}$, и

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x)\frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i} + c(t, x)u(t, x)$$

- дифференциальный оператор с коэффициентами зависящими от временной переменной t и пространственной переменной $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x \in \Omega$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = L(u) + f(t, x), \qquad (t, x) \in Q_T \tag{2.5}$$

Матрица $\widetilde{A}(t,x)$ старших коэффициентов уравнения (2.5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ 0 & a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Зададим начальные условия

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2.6}$$

и краевые условия

$$u|_{S_T} = \varphi(t,x), \qquad (t,x) \in S_T. \tag{2.7}$$

Первая краевая задача. Кратко первую краевую задачу можно записать как задачу (2.5), (2.6), (2.7) или задачу (2.5) - (2.7). Найти решение задачи (2.5) - (2.7) значит найти функцию $u(t,x)$, определенную в $\overline{Q}_T$, удовлетворяющую в $\overline{Q}_T \backslash \Gamma_T$ уравнению (2.5), при $t = 0$ удовлетворяющую начальному условию (2.6), а на границе S_T условию (2.7).

Определание. Функция $u(t,x) \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ называется классическим решением задачи (2.5) - (2.7), если она удовлетворяет уравнению (2.5) в $\overline{Q}_T \backslash \Gamma_T$, начальному условию (2.6) и граничному условию (2.7).

Вторая краевая задача (задача (2.5), (2.6), (2.8)).

Найти функцию $u(t,x)$, определенную в $\overline{Q}_T$, удовлетворяющую в $Q_T \backslash \Gamma_T$ уравнению (2.5), при $t = 0$ удовлетворяющую начальному условию (2.6), а на границе S_T условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\partial\Omega} = \psi(t,x), \qquad (t,x) \in S_T. \tag{2.8}$$

Здесь $\psi(t,x)$ заданная на S_T функция.

Определание. Функция $u(t,x) \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$ называется классическим решением задачи (2.5), (2.6), (2.8), если она удовлетворяет уравнению (2.5) в $\overline{Q}_T \backslash \Gamma_T$, начальному условию (2.6) и граничному условию (2.8).

Третья краевая задача. Найти функцию $u(t,x)$, определенную в $\overline{Q}_T \backslash \Gamma_T$, удовлетворяющую в Q_T уравнению (2.5), начальному условию (2.6) и условию

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x)u\right)\Bigg|_{(t,x)\in S_T} = \mu(t,x), \qquad (t,x)\in S_T. \tag{2.9}$$

Здесь $\sigma(x)$, $\mu(t,x)$ - заданные на S_T функции.

Определение. Классическим решением третьей краевой задачи (2.5), (2.6), (2.9) называется функция $u(t,x)\in C^2(Q_T)\cap C^1(\overline{Q}_T)$, если она удовлетворяет уравнению (2.5) в $\overline{Q}_T\backslash\Gamma_T$ и условиям (2.6), (2.9).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = L(u) + f(t,x), \tag{2.10}$$

где

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} + c(t,x)u(t,x),$$

или в дивергентном виде

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} + c(t,x)u(t,x).$$

Матрица $\widetilde{A}(t,x)$ старших коэффициентов размерности $(n+1)\times(n+1)$ уравнения (2.10) имеет вид

$$\widetilde{A}(t,x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ 0 & a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы $\widetilde{A}(t,x)$: $\lambda_1 = 1$, λ_2, $\dots$, λ_n, λ_{n+1}, где λ_2, $\dots$, λ_{n+1} - собственные числа матрицы A. В случае, когда $\lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ не равны нулю и положительные (отрицательные), тип уравнения (2.10) есть гиперболический. Отметим, что в уравнениии (2.10) число независимых переменных равно $n+1$.

Первая краевая задача. Найти функцию $u(t,x)$, определенную в $\overline{Q}_T$, удовлетворяющую в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ уравнению (2.10), начальным условиям

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{2.11}$$

$$u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{2.12}$$

и граничному условию (2.7).

Определение. Классическим решением первой краевой задачи (2.10), (2.11), (2.12) (2.7) называется функция $u(t,x) \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющая уравнению (2.10) в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$, начальным условиям (2.11), (2.12) и краевому условию (2.7).

Вторая краевая задача. Найти в функцию $u(t,x)$, определенную в $\overline{Q}_T$, удовлетворяющая в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_t$ уравнению (2.10), начальным условиям (2.11), (2.12) и условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{S_T} = \psi(t,x), \qquad (t,x) \in S_T. \tag{2.13}$$

Определение. Классическим решением второй краевой задачи (2.10), (2.11), (2.12) (2.13) называется функция $u(t,x) \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющую уравнению (2.10) в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$, начальным условиям (2.11), (2.12) и краевому условию (2.13).

Третья краевая задача. Найти в функцию $u(t,x)$,определенную в $\overline{Q}_T$, удовлетворяющую в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ уравнению (2.10), начальным условиям (2.11), (2.12) и условию

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial N} + \alpha u\right)\right|_{S_T} = \Phi(t,x), \qquad (t,x) \in S_T. \tag{2.14}$$

Определение. Классическим решением третьей краевой задачи (2.10), (2.11), (2.12) (2.14) называется функция $u(t,x) \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$, если она удовлетворяет уравнению (2.10) в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$, начальным условиям (2.11), (2.12) и краевому условию (2.14).

Одномерные задачи

В механике сплошных сред одномерными задачами называются задачи, в которых пространственные переменные имеют размерность 1. Ниже мы рассмотрим постановки одномерных задач. При $n = 1$ уравнение Пуассона $-\Delta u = f$ переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение $-u_{\xi\xi} = f(\xi)$.

Уравнение теплопроводности (диффузии) переходит в уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + c(t,x)u + f(t,x), \tag{2.15}$$

уравнение колебания объёмов - в уравнение колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + c(t,x)u + f(t,x). \tag{2.16}$$

Функции $a(t,x)$, $b(t,x)$, $c(t,x)$, $f(t,x)$ определяются внешними условиями и физическими свойствами исследуемого материала. Можно непосредственно вывести указанные уравнения на основании законов сохранения.

Краевые условия для одномерных задач

Пусть $n = 1$.

Рассмотрим интервал $\Omega = (0,l)$. В данном случае $\partial\Omega = (0,0) \cup (0,l)$, $S_T = \{(t,0), 0 < t \le T\} \cup \{(t,l), 0 < t \le T\}$. Начальные условия

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in [0,l], \tag{2.17}$$

граничные условия первого рода

$$u(t,0) = \varphi_1(t), \qquad u(t,l) = \varphi_2(t), \qquad 0 < t \le T. \tag{2.18}$$

Задача (2.15), (2.17), (2.18) - первая краевая задача для одномерного уравнения теплопроводности.

При $n = 1$, имеет место равенство

$$\frac{\partial u}{\partial N} = a^2 u_x cos(n,e),$$

где n - нормаль к S_T, e - единичный вектор, направленный в положительную сторону оси x. На границе S_T имеет место равенство $cos(n,e) = \pm 1$ (знак зависит от направления n). Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{(t,l)} &= a^2\,\frac{\partial u}{\partial x} cos(n,e)\Big|_{(t,l)} = a^2\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(t,l)} = \psi_2(t), \\ \frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{(t,0)} &= a^2\,\frac{\partial u}{\partial x} cos(n,e)\Big|_{(t,0)} = -a^2\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(t,0)} = \psi_1(t). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует, что условие второго рода в одномерном случае имеют вид
$$\frac{\partial u(t,l)}{\partial x} = \xi_2(t), \qquad \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = \xi_1(t), \qquad 0 < t \le T. \tag{2.20}$$
Здесь $\xi_1(t) = -\frac{\psi_1}{a^2(t,l)}$, $\xi_2(t) = \frac{\psi_1}{a^2(t,0)}$. Задача (2.15), (2.17), (2.20) - вторая краевая задача для одномерного уравнения теплопроводности.

В одномерном случае третье краевое условие запишется в виде
$$-\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} + \alpha u(t,0) = \xi_1(t), \qquad \frac{\partial u(t,l)}{\partial x} + \alpha u(t,l) = \xi_2(t), \qquad 0 < t \le T. \tag{2.21}$$
Задача (2.15), (2.17), (2.21) - третья краевая задача для одномерного уравнения теплопроводности.

Краевые задачи для уравнения колебания струны (2.16).

Рассмотрим начальное условие
$$u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in (0,l). \tag{2.22}$$
Задачи:

(2.16), (2.17), (2.22), (2.18) - первая краевая задача,

(2.16), (2.17), (2.22), (2.20) - вторая краевая задача,

(2.16), (2.17), (2.22), (2.21) - третья краевая задача.

Задачу, когда на концах отрезка $[0,l]$ задаются условия разного рода, будем называть смешанной краевой задачей. Например, условие
$$u(t,0) = \varphi(t), \qquad \frac{\partial u(t,l)}{\partial x} = \psi(t), \qquad 0 < t \le T.$$

Корректные задачи по Адамару

Задача называется корректной по Адамару, если выполняются следующие условия:

1) решение задачи существует;

2) решение задачи единственное;

3) решение задачи непрерывно зависит от входных данных.

3. Единственность классического решения краевых задач для уравнения колебания струны

В области $\overline{Q}_T \backslash \Gamma_T = \{(t,x) | 0 < t \leq T, 0 < x < l\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \tag{3.1}$$

начальные условия

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in (0,l), \tag{3.2}$$

$$u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in (0,l), \tag{3.3}$$

и краевые условия

$$u(t,0) = \varphi_1(t), \qquad u(t,l) = \varphi_2(t), \qquad 0 < t < T, \tag{3.4}$$

$$u_x(t,0) = \varphi_1(t), \qquad u_x(t,l) = \varphi_2(t), \qquad 0 < t < T. \tag{3.5}$$

Выше (3.1) - (3.4) - первая краевая задача, (3.1) - (3.3), (3.5) - вторая краевая задача.

Все функции, рассматриваемые в задачах считаем непрерывными на замыкании своих областей определений.

Определение. Классическим решением задачи (3.1) - (3.4) называется функция $u(t,x) \in C^1(\overline{Q}_T) \cap C^2(Q_T)$, удовлетворяющая в Q_T уравнению и условиям (3.2) - (3.4).

Теорема 1. Классическое решение $u(t,x)$ класса $C^2(\overline{Q}_T)$ задачи (3.1) - (3.4) единственно.

Доказательство. Пусть $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ - два решения класса $C^2(\overline{Q}_T)$ задачи (3.1) - (3.4). Рассмотрим функцию $u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$. Ясно, что $u \in C^2(\overline{Q}_T)$ и в силу линейности задачи (3.1) - (3.4) является решением однородной задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{3.1$'$}$$

$$u(0,x) = 0, \tag{3.2$'$}$$

$$u_t(0,x) = 0, \tag{3.3$'$}$$

$$u_(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 0. \tag{3.4$'$}$$

Умножим (3.1') на $u(t,x)$ и проинтегрируем результат по цилиндру $Q_t = \{(\tau,x)|0<\tau<t, x\in(0,l)\}$. Получим равенство

$$\int\limits_{Q_t} u_{tt}u_t\,dxdt = a^2\int\limits_{Q_t} u_{xx}u_t\,dxdt. \tag{3.6}$$

Проинтегрируем по частям левую часть равенства (3.6). Получим

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_t} u_{tt}(\tau,x)u_t(\tau,x)\,dxd\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^l\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t}u_t^2(\tau,x)\,d\tau\,dx = \\ \frac{1}{2}\int\limits_0^l u_t^2(t,x)\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^l u_t^2(0,x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l u_t^2(t,x)\,dx,\end{gathered} \tag{3.7}$$

так как в силу (3.3') второй член в левой части последнего равенства равен нулю. Рассмотрим интеграл в правой части равенства (3.6). Проинтегрируем его по частям.

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_t} u_{xx}u_t\,dxdt = \int\limits_0^t\int\limits_0^l u_{xx}(\tau,x)u_t(\tau,x)\,dx\,d\tau = \\ = \int\limits_0^t (u_x(\tau,x)u_t(\tau,x)|_0^l)\,d\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^l u_x(\tau,x)u_{tx}(\tau,x)\,dx\,d\tau = \\ = -\frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^l u_x^2(\tau,x)dx\right)d\tau = -\frac{1}{2}\int\limits_0^l u_x^2(t,x)\,dx + \\ +\frac{1}{2}\int\limits_0^l u_x^2(0,x)\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^l u_x^2(t,x)\,dx.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Заметим, что второй член левой части последнего равенства равен нулю в силу (3.2'), а первый член правой части второго равенства равен нулю в силу (3.4'). Учитывая (3.7), (3.8), из (3.6) получим равенство

$$\int\limits_0^l u_t^2(t,x)\,dx + a^2 \int\limits_0^l u_x^2(t,x)\,dx = 0, 0 \le t \le T. \tag{3.9}$$

Так как оба интеграла в левой части не отрицательны, то из (3.9) следует, что каждый их интегралов равен нулю, откуда следует равенство нулю их подынтегральных функций:

$$u_t^2 = 0, \qquad u_x^2 = 0 \qquad \forall t \in [0,T],\ x \in [0,l].$$

Из последних соотношений следует, что $u_t = 0$, $u_x = 0$ и функция $u(t,x) = const$ в Q_t, $0 \le t \le T$. Из (3.2') получаем, что $u(t,x) = 0$ в Q_T, т.е. $u_1(t,x) = u_2(t,x)$ в Q_T.

Замечание. Можно доказать единственность решения задачи (3.1) - (3.4) в классе $C^2(Q_T) \cap C^1\overline{Q}_T)$.

Теорема 2. Решение задачи (3.1) - (3.3), (3.5) класса $C^2(\overline{Q}_T)$ единственно.

Доказательство теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1. При доказательстве соотношения (3.8) первый член правой части второго равенства равен нулю в силу условий $u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0$ (см. (3.5)).

4. Метод разделения переменных

1. Уравнение теплопроводности. Первая краевая задача

1.1. Однородное уравнение с однородными граничными условиями

Рассмотрим задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{4.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{4.2}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \tag{4.3}$$

$x \in (0,l), \qquad t \in (0,T]$.

Здесь $u_0(x)$ - заданная функция, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям, которые мы сформулируем ниже.

Вспогательная задача. Найти все нетривиальные (не равные тождественно нулю) решения задачи (4.1), (4.3) вида $T(t)X(x)$.

Подставим выражение $T(t)X(x)$ в (4.1). Получим соотношения

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \lambda > 0 - const. \tag{4.4}$$

Откуда

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{4.5}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{4.6}$$

Так как

$$T(t)X(0) = T(t)X(l) = 0 \qquad \forall t \in [0, T],$$

то необходимо, чтобы $X(0) = X(l) = 0$. В противном случае $T(t) \equiv 0$ в $[0, T]$ и $T(t)X(x)$ - тривиальное решение.

Приходим к задаче

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{4.7}$$

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{4.8}$$

Задача Штурма-Лиувилля. Найти все λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи (4.7), (4.8) и найти эти решения (λ - действительные числа).

Рассмотрим отдельно случаи $\lambda = 0$, $\lambda < 0$, $\lambda > 0$.

Случай $\lambda = 0$. В этом случае задача (4.7), (4.8) имеет вид

$$X'' = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0.$$

Общее решение уравнения дано равенством $X(x) = C_1x + C_2$, откуда $X(0) = C_2 = 0$ и $X(l) = C_1 l = 0$, что дает равенство $C_1 = 0$. Решение тривиальное.

Случай $\lambda < 0$. Характеристический многочлен уравнения (4.7) имеет вид $p^2 + \lambda = 0$. Отсюда $p_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$ и $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ - общее решение уравнения (4.7). Так как

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0, \qquad X(l) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0,$$

то $C_1 = -C_2$, $C_1(e^{\sqrt{-\lambda}l} - e^{-\sqrt{-\lambda}l}) = 0$. В силу строгой монотонности функции e^x величина $e^{\sqrt{-\lambda}l} - e^{-\sqrt{-\lambda}l} \neq 0$. Следовательно, $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Решение задачи (4.7), (4.8) тривиальное.

Случай $\lambda > 0$. Характеристический многочлен для уравнения (4.7) имеет вид $p^2 + \lambda = 0$. Отсюда $p_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$ и общее решение уравнения (4.7) есть $X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$. В силу условий (4.8) $X(0) = C_1 = 0$, $X(l) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$. При $C_2 = 0$ получается тривиальное решение. Следовательно, $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Корни этого уравнения $\sqrt{\lambda}l = \pi k$, $k = 1, 2, \ldots$. Получим, что только при $\lambda = (\frac{\pi k}{l})^2$, $k = 1, 2, \ldots$, существуют нетривиальные решения задачи (4.7), (4.8). Так как каждому $k \geq 1$ соответствует некоторое λ, то обозначать его будем λ_k: $\lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2$, $k \geq 1 \ldots$. Данным λ_k соответствуют решения задачи (4.7), (4.8)

$$X_k(x) = C_k \sin(\frac{\pi k}{l}x), \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{4.9}$$

Других нетривиальных решений задачи Штурма - Лиувилля нет и уравнение (4.5) мы должны рассматривать при $\lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2$:

$$T_k'(t) + \lambda_k a^2 T_k(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения даётся формулой

$$T_k(t) = M_k e^{-\lambda_k a^2 t} = M_k e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 a^2 t}, \qquad k \geq 1. \tag{4.10}$$

Из (4.9), (4.10) следует, что все нетривиальные решения задачи (4.1), (4.3) даются формулой

$$u_k(t, x) = C_k e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 a^2 t} \sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{4.11}$$

Других нетривиальных решений задачи (4.1), (4.3), представленных в виде $T(t)X(x)$, нет.

Рассмотрим ряд

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 a^2 t} \sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{4.12}$$

Покажем, что C_k при соответствующих ограничениях на $u_0(x)$ можно выбрать таким образом, что $u(t, x)$ будет классическим решением задачи (4.1) - (4.3).

Предположим, что ряд (4.12) в $\overline{Q}_T$ сходится равномерно. При $x = 0$ $u(t,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k T_k(t) X_k(0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k T_k(t) \cdot 0 = 0$. Аналогично $u(t,l) = 0$ Следовательно, $u(t,x)$ удовлетворяет краевым условиям (4.3).

Предполагая, что $u_0(x)$ разлагается в ряд по синусам, получим

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{\pi k}{l}x = u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\frac{\pi k}{l}x$$

где

$$\alpha_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u_0(x)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx \tag{4.13}$$

- k - ый коэффициент Фурье по системе $\left\{\sin\frac{\pi k}{l}x\right\}_{k=1}^{\infty}$. Из последних равенств следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{\pi k}{l}x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\frac{\pi k}{l}x.$$

В силу единственности разложения функции в ряд Фурье

$$C_k = \alpha_k, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{4.14}$$

Таким образом,

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 a^2 t} \sin\frac{\pi k}{l}x, \qquad u_k(t,x) = \alpha_k e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 a^2 t} \sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{4.15}$$

где α_k определяются формулами (4.13).

Найдем общий вид производных $\dfrac{\partial^{m+n} u_k}{\partial t^m \partial x^n}$.

$$\frac{\partial}{\partial t}u_k(t,x) = -\alpha_k(\frac{\pi k}{l})^2 a^2 e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 a^2 t} \sin\frac{\pi k}{l}x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}u_k(t,x) = (-1)^n \alpha_k(\frac{\pi k}{l})^{2n} a^{2n} e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 a^2 t} \sin\frac{\pi k}{l}x.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u_k(t,x) = \alpha_k(\frac{\pi k}{l}) e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 a^2 t} \cos\frac{\pi k}{l}x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}u_k(t,x) = \alpha_k(\frac{\pi k}{l})^m e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 a^2 t} \left.(\sin y)^{(m)}\right|_{y=\frac{\pi k}{l}x}.$$

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^n \partial x^m} u_k(t,x) = (-1)^n \alpha_k (\frac{\pi k}{l})^{2n+m} a^{2n} e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 a^2 t} \left.(\sin y)^{(m)}\right|_{y=\frac{\pi k}{l}x}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\left|\frac{\partial^{n+m} u_k(t,x)}{\partial t^n \partial x^m}\right| \leq |\alpha_k| (\frac{\pi k}{l})^{2n+m} a^{2n} e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 a^2 t} \qquad \forall (t,x) \in [0,T]\times[0,l]. \quad (4.16)$$

Так как функция $e{-}x$ монотонно убывающая, то при всех $t \in [t_0, T]$, где $t_0 > 0$, имеет место неравенство $e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 a^2 t} \leq e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 a^2 t_0}$. Из соотношений $|\alpha_k| = \dfrac{2}{l}\left|\int\limits_0^l u_0(x) \sin \frac{\pi k}{l} x\, dx\right| \leq \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l |u_0(x)|\, dx$, предполагая, что $|u_0(x)| \leq M$, получаем неравенство

$$|\alpha_k| \leq 2M, \qquad k \geq 1. \quad (4.17)$$

Из (4.16), (4.17) следует неравенство

$$\left|\frac{\partial^{n+m} u_k(t,x)}{\partial t^n \partial x^m}\right| \leq N k^{2n+m} e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 a^2 t_0} = \chi_k,$$

где постоянная N зависит от a, n, m, l, π и не зависит от k.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^{n+m} u_k(t,x)}{\partial t^n \partial x^m} \text{ мажорируется рядом } \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k. \quad (4.18)$$

По признаку Даламбера, если $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\chi_{k+1}}{\chi_k} = q$ и $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$ с положительными членами $X_k > 0$, $k \geq 1$, сходится. В нашем случае

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{\chi_{k+1}}{\chi_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{N(k+1)^{2n+m} e^{-(\frac{\pi(k+1)}{l})^2 a^2 t_0}}{N k^{2n+m} e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 a^2 t_0}} =$$

$$\lim_{k\to\infty} (1 + \tfrac{1}{k})^{2n+m} e^{-(\frac{\pi}{l})^2 a^2 t_0 (2k+1)} = 0.$$

По признаку Даламбера ряд (4.18) сходится, и на основании теоремы Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\partial^{n+m} u_k(t,x)}{\partial t^n \partial x^m}$ сходится равномерно в $\overline{Q}_T$ (при любых фиксированных m и n). По теореме о дифференцируемости равномерно сходящихся рядов функция $u(t,x)$ имеет непрерывные производные по t, x любого порядка в $\overline{Q}_{[t_0,T]}$, $t_0 > 0$, и

$$\frac{\partial^{n+m} u(t,x)}{\partial t^n \partial x^m} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^{n+m} u_k(t,x)}{\partial t^n \partial x^m}. \quad (4.19)$$

В силу произвольности t_0 функция $u(t,x)$ имеет непрерывные производные любого порядка в $(0,T]\,\times\,[0,l] = Q_{(0,T]}$.

Некоторые сведения из теории рядов Фурье.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi k x}{l} + b_k \sin\frac{\pi k x}{l}. \tag{4.20}$$

Теорема 1. Пусть функция $\varphi(x)$ периодическая с периодом $2l$ и (4.20) её ряд Фурье. Пусть $\varphi(x)$ m раз непрерывно дифференцируема, а $m+1$-ая производная кусочно-непрерывна. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^m(|a_k|+|b_k|) < +\infty$.

Замечание. Если мы раскладываем в ряд по $\sin\frac{\pi k x}{l}$ функцию $\varphi(x)$, заданную только на интервале $(0,l)$, то следует потребовать выполнения условий теоремы на функцию $\Phi(x)$, получающуюся при нечетном продолжении $\varphi(x)$. Для непрерывности $\Phi(x)$ в точках $x=0$ и $x=l$ необходимо, чтобы $\varphi(0)=0$, $\varphi(l)=0$.Непрерывность первой производной $\Phi'(x)$ в точках $x=0$ и $x=l$ при нечетном продолжении получается автоматически.

Легко видеть, что для непрерывности четных производных функции $\Phi(x)$ требуется, чтобы

$$\varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(l) = 0, \qquad k = 0,2,4,\dots,2d \le m.$$

Условие 1. Пусть функция $u_0(x)$ кусочно-дифференцируема на $[0,l]$ и $u_0(0) = u_0(l) = 0$.

Рассмотрим нечетное периодическое продолжение $U(x)$ функции $u_0(x)$. При выполнении условия 1 функция $U(x)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную на$(-\infty,+\infty)$.

Разложим $U(x)$ в ряд Фурье: $u(x) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\frac{\pi k}{l}x$. В данном случае это ряд (4.20), где $a_k = 0$, $b_k = \alpha_k$, $k \ge 1$. Из теоремы 1 при выполнении условия 1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|) < \infty$, $(n=0,\ a_k=0)$, и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \tag{4.21}$$

сходится. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{4.22}$$

мажорируется рядом (4.21) и, следовательно, равномерно в $\overline{Q}_T$ сходится к непрерывной в $\overline{Q}_T$ функции $u(t,x)$. При $t=0$

$$u(0,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(0,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sin\frac{k\pi}{l}x=u_0(x).$$

Функция $u(t,x)$ - бесконечно дифференцируема в $Q_{(0,T]}=(0,T]\times[0,l]$, непрерывна в $\overline{Q}_T$ и удовлетворяет начальному условию (4.2).

По построению функция $u_k(t,x)$ - решение уравнения (4.1). В силу равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\partial^{n+m}u_k(t,x)}{\partial t^n\partial x^m}$ в $\overline{Q}_{[t_0,T]}$, $t_0>0$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}u_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_k=\sum_{k=1}^{\infty}0=0.$$

Таким образом, $u(t,x)\in C(\overline{Q}_T)\cap C^{\infty}(Q_{(t_0,T]})$ - решение задачи (4.1) - (4.3). Доказана

Теорема 2. Пусть $u_0(x)$ удовлетворяет следующим условиям:
1) $u_0(0)=u_0(l)=0$,
2) $u_0(x)$ непрерывна и $u_0'(x)$ кусочно-непрерывна на $[0,l]$.
Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(t,x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k e^{-(\frac{k\pi}{l})^2a^2t}\sin\dfrac{k\pi}{l}x$ является классическим решением задачи (4.1) - (4.3), функция $u(t,x)\in C(\overline{Q}_T)\cap C^{\infty}(Q_{(t_0,T]})$, $t_0>0$.

1.2. Неоднородное уравнение с однородными граничными условиями.

Рассмотрим задачу

$$u_t=a^2u_{xx}+f(t,x),\tag{4.23}$$

$$u(0,x)=u_0(x).\tag{4.24}$$

$$u(t,0)=u(t,l)=0.\tag{4.25}$$

Предположим, что

$$f(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x.\tag{4.26}$$

Здесь $f_k(t)$ - k -ый коэффициент разложения функции $f(t,x)$ по системе $\{\sin\dfrac{k\pi}{l}x\}_{k=1}^{\infty}$. Предположим, что $f(t,x)$ достаточно гладкая функция.

Под достаточностью мы будем подразумевать, что все дальнейшие выкладки будут верны с точки зрения математического анализа, в частности, ряд (4.26) сходится равномерно в $\overline{Q}_T$.

Решение задачи (4.23) - (4.25) ищем в виде

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{4.27}$$

Подставим (4.27) в уравнение (4.21). Получим равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}(C_k'(t) + (\frac{k\pi}{l})^2 a^2 C_k(t) - f_k(t)) \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Из данного равенства и условия (4.24) следует, что

$$C_k'(t) + (\frac{k\pi}{l})^2 a^2 C_k(t) - f_k(t) = 0, \tag{4.28}$$

$$C_k(0) = 0. \tag{4.29}$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что если $f_k(t) \in C^m([0,T])$, то существует единственное решение $C_k(t) \in C^{m+1}([0,T])$ задачи (4.28) (4.29) [17].

Пусть $C_k(t)$ - решение задачи (4.28) (4.29), тогда ряд (4.27) - решение задачи (4.23) (4.26).

Замечание. При достаточно гладких $f(t,x)$ ряд (4.27) ряд равномерно сходится вместе с производными требуемого порядка от членов ряда.

1.3. Общая задача.

Рассмотрим задачу для неоднородного уравнения с неоднородными начальными и граничными условиями

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(t,x), \tag{4.30}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{4.31}$$

$$u(t,0) = \varphi_1(t), \qquad u(t,l) = \varphi_2(t). \tag{4.32}$$

Рассмотрим разность $\underline{w(t,x) = u(t,x) - F(t,x)}$, где $u(t,x)$ - решение задачи (4.30) - (4.32) и $F(t,x) = \varphi_2(t)\frac{x}{l} + \frac{l-x}{l}\varphi_1(t)$. Функция $w(t,x)$ есть решение задачи

$$w_t = a^2 w_{xx} + \Phi(t,x), \tag{4.33}$$

$$w(0,x) = w_0(x) = u_0(x) - F(0,x), \tag{4.34}$$

$$w(t,0) = w(t,l) = 0, \tag{4.35}$$

где $\Phi(t,x) = f(t,x) - F_t(t,x) + a^2 F_{xx}(t,x)$.

Пусть $\underline{v(t,x) = w(t,x) - z(t,x)}$, где $z(t,x)$ - решение однородного уравнения с однородными граничными условиями, при $z(0,x) = w_0(x)$ (решение задачи (4.30) - (4.32) с $u_0(x) = w_0(x)$). Функция $v(t,x)$ - решение задачи (4.33), (4.35) при $v(0,x) = 0$. Эту задачу мы только что решили.

Таким образом, общая задача приведена к решению трех задач:

$$\begin{aligned} &z_t = a^2 z_{xx}, \\ &z(0,x) = w_0, \qquad z(t,0) = z(t,l) = 0. \end{aligned} \tag{α}$$

$$\begin{aligned} &w_t = a^2 w_{xx} + \Phi(t,x), \\ &w(0,x) = w_0 \equiv u_0(x) - F(0,x), \\ &w(t,0) = w(t,l) = 0. \end{aligned} \tag{β}$$

$$\begin{aligned} &v_t = a^2 v_{xx} + \Phi(t,x), \\ &v(0,x) = 0, \qquad v(t,0) = v(t,l) = 0. \end{aligned} \tag{γ}$$

Решение $u(t,x)$ задачи (4.30) - (4.32) дается в виде

$$\underline{u(t,x) = v(t,x) + z(t,x) + F(t,x).} \tag{4.36}$$

2. Уравнение теплопроводности. Вторая краевая задача

2.1. Однородное уравнение. Однородные граничные условия

Рассмотрим задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{4.37}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in [0,l], \tag{4.38}$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0, \qquad t \in [0,T]. \tag{4.39}$$

Вспомогательная задача: Найти все нетривиальные решения задачи (4.37), (4.39), представимые в виде произведения $T(t)X(x)$.

Подставляя это произведение в уравнение (4.37), мы приходим к уравнению

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad (4.40)$$

и задаче Штурма - Лиувилля

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad (4.41)$$

$$X'(0) = X'(l) = 0. \qquad (4.42)$$

Задача Штурма-Лиувилля. Найти все λ, при которых имеются нетривиальные решения задачи (4.41), (4.42), и найти эти решения.

Рассматриваем случаи $\lambda = 0$, $\lambda < 0$, $\lambda > 0$.

Случай $\lambda = 0$. В этом случае задача (4.41), (4.42) имеет вид

$$X'' = 0, \qquad X'(0) = X'(l) = 0.$$

Её общее решение уравнения даётся формулой (4.41): $X(x) = C_1 x + C_2$, откуда и из (4.42) $X'(0) = C_1 = 0$. Таким образом, решение $X(x) \equiv C$.

Случай $\lambda < 0$. Характеристический многочлен для уравнения (4.41) имеет вид $p^2 + \lambda = 0$. Отсюда $p_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$ и $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ - общее решение уравнения (4.41)и $X'(x) = \sqrt{-\lambda}(C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x})$. В силу условия $X'(0) = 0$ имеем $\sqrt{-\lambda}(C_1 - C_2) = 0$, следовательно, $C_1 = C_2$. При $x = l$, учитывая последнее равенство, $\sqrt{-\lambda}C_1(e^{\sqrt{-\lambda}l} - e^{-\sqrt{-\lambda}l}) = 0$. Отсюда следует, что получаем $C_1 = 0$. Так как $C_2 = C_1$, то и $C_2 = 0$. В случае $\lambda < 0$ существует только тривиальное решение.

Случай $\lambda > 0$. В этом случае общее решение уравнения (4.41) есть $X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$ и производная имеет вид $X'(x) = -\sqrt{\lambda}C_1 \cdot \cdot \sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$. При $x = 0$ $X'(0) = C_2\sqrt{\lambda} = 0$. Отсюда $C_2 = 0$. При $x = l$ значение $X'(l) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Так как при $C_1 = 0$ решение задачи (4.41), (4.42) тривиальное, то должно выполняться равенство $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Его корни $\sqrt{\lambda_k}l = \pi k$,$k = 1, 2, \dots$ и $\lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2$. Учитывая, что $\lambda = 0$ есть собственное значение, при котором существует нетривиальное решение задачи (4.41), (4.42), находим, что

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \qquad k = 0, 1, 2, \dots. \qquad (4.43)$$

и все решения задачи (4.41), (4.42) даются соотношениями

$$X_k(x) = C_K \cos \frac{k\pi}{l} x, \qquad k = 0, 1, \dots . \tag{4.44}$$

Решения уравнения (4.40) даются формулой

$$T_k(t) = C_k e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 a^2 t}.$$

Все нетривиальные решения задачи (4.37), (4.39), записанные как $T(t)X(x)$ даются в виде

$$u_k(t,x) = C_k e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 a^2 t} \cos \frac{k\pi}{l} x, \qquad k = 0, 1, \dots . \tag{4.45}$$

Рассмотрим ряд

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 a^2 t} \cos \frac{k\pi}{l} x, \tag{4.46}$$

где $C_k = \alpha_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l u_0(x) \cos \frac{k\pi}{l} x \, dx$.

В данном случае нужно потребовать, чтобы периодическое четное продолжение $U(x)$ функции $u_0(x)$ было непрерывным и кусочно - дифференцируемым. На основании теоремы 1 ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|$ сходится и, следовательно, мажорируемый им ряд (4.46) сходится равномерно в $\overline{Q}_T$ и функция $u(t,x)$ непрерывна в $\overline{Q}_T$. Аналогично случаю первой краевой задачи доказывается, что производные $\dfrac{\partial^{n+m} u}{\partial t^n \partial x^m}$ непрерывны в $\overline{Q}_{(0,T]}$ при любых n, $m \geq 0$.

2.Уравнение колебания струны. Первая краевая задача

Рассмотрим задачу для однородного уравнения с однородными граничными условиями

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{4.47}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u_t(0,x) = u_1(x), \tag{4.48}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0. \tag{4.49}$$

Вспомогательная задача. Найти все нетривиальные решения задачи (4.47), (4.49), представимые в виде произведения $T(t)X(x)$.

Подставляя это произведение в уравнение (4.47), мы приходим к уравнению

$$T"(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{4.50}$$

и задаче Штурма - Лиувилля

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{4.51}$$

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{4.52}$$

Нам известно, что решение задачи Штурма-Лиувилля даётся соотношениями

$$X_k(x) = C_k \sin\frac{\pi k}{l}x, \qquad \lambda k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Подставляя λ_k в (4.50), получаем уравнение

$$T"_k(t) + \lambda_k a^2 T_k(t) = 0,$$

решение которого дается формулой (см. [17])

$$T_k(t) = C_k^1 \cos\frac{\pi k}{l}at + C_k^2 \sin\frac{\pi k}{l}at.$$

Все решения вспомогательной задачи есть

$$u_k(t,x) = (A_k \cos\frac{\pi k}{l}at + B_k \sin\frac{\pi k}{l}at)\sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{4.53}$$

Рассмотрим ряд

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t,x). \tag{4.54}$$

Предполагая равномерную сходимость ряда (4.54) в $\overline{Q}_T$, получаем, что

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k}{l}x = u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{4.55}$$

Последнее равенство в (4.55) следует из предположения разложения $u_0(x)$ в ряд по системе $\left\{\sin\frac{\pi k}{l}x\right\}_{k=1}^{\infty}$. Здесь $A_k = \alpha_k$, где $\alpha_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u_0(x)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx$.

Предполагая равномерную сходимость в $\overline{Q}_T$ дифференцируемого по переменной t ряда (4.54), получим соотношения

$$u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi k}{l} aB_k \sin\frac{\pi k}{l}x = u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{4.56}$$

где $\beta_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u_1(x)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx, \quad B_k = \frac{\beta_k}{\pi k a}l.$

Очевидны следующие неравенства:

$$
\begin{aligned}
&|u_k(t,x)| \le |A_k| + |B_k| \le M(|\alpha_k| + \frac{|\beta_k|}{k}),\\
&\left|\frac{\partial}{\partial x}u_k(t,x)\right| \le M(k|\alpha_k| + |\beta_k|),\\
&\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_k(t,x)\right| \le M(k^2|\alpha_k| + k|\beta_k|),\\
&\left|\frac{\partial}{\partial t}u_k(t,x)\right| \le M(k|\alpha_k| + |\beta_k|),\\
&\left|\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}u_k(t,x)\right| \le M(k^2|\alpha_k| + k|\beta_k|)\\
&\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_k(t,x)\right| \le M(k^2|\alpha_k| + k|\beta_k|).
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

В (4.57) постоянная M не зависит от k.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^2|\alpha_k| + k|\beta_k|), \tag{4.58}$$

где α_k, β_k - k-ые коэффициенты Фурье разложения в ряд по системе $\left\{\sin\frac{\pi k}{l}x\right\}_{k=1}^{\infty}$ функций $u_0(x)$ и $u_1(0)$ соответственно.

На входные данные наложим условия, которые позволяют нам доказать на основании теоремы 1 сходимость ряда (4.58):

I) функция $u_0(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а третья производная кусочно гладкая. Выполняются равенства: $u_0(0) = u_0(l)$, $u_0''(0) = u_0''(l)$.

II) функция $u_0(x)$ непрерывно дифференцируема, а $u_1''(x)$ - кусочно непрерывна на $[0, l]$. Выполняются равенства: $u_1(0) = u_1(l) = 0$.

Так как из сходимости ряда (4.58) следует равномерная сходимость рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^n\partial x^m}u_k(t,x)$, $n+m \le 2$,то все рассуждения, проведённые нами для случая уравнения теплопроводности,законны и выполняются соотношения

$$u(0,x) = u_0, \qquad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad u(t,0) = u(t,l) = 0.$$

Нами доказана

Теорема. При выполнении условий I), II) ряд (4.54) является классическим решение задачи (4.47) - (4.50) класса $C^2(\overline{Q}_T)$.

5. Задача Коши

Уравнение теплопроводности

Рассмотрим в $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \leq t \leq T, x \in E_n\}$ уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u(t,x)) + f(t,x), \tag{5.1}$$

где

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_i x_j}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)u_{x_i} + c(t,x)u$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j > 0, \qquad (t,x) \in [0,T],$$

функции $f(t,x)$, $a_{ij}(t,x)$, $b_i(t,x)$, $c(t,x)$ заданы в $\Pi_{[0,T]}$, с начальными данными

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in E_n. \tag{5.2}$$

Задача Коши (5.1), (5.2): Найти функцию $u(t,x) \in C^{1,2}(\Pi_{(0,T]}) \cap C(\Pi_{[0,T]})$, удовлетворяющую уравнению (5.1) в $\Pi_{(0,T]}$ и совпадающую с заданной функцией $\varphi(x)$ при $t = 0$ (выполняется условие (5.2).

Выше $\Pi_{(0,T]} = (0,T] \times E_n$, $C^{1,2}(G)$ - линейное пространство функций $u(t,x)$ непрерывных на G вместе с производными u_t, u_{x_i}, $u_{x_i x_j}$, $i,j = 1,\ldots,n$.

Уравнение колебания

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L(u(t,x)) + f(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \tag{5.3}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in E_n, \tag{5.4}$$

$$u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in E_n. \tag{5.5}$$

Задача Коши (5.3) - (5.5): Найти функцию $u(t,x) \in C^2(\Pi_{(0,T]}) \cap C^1(\Pi_{[0,T]})$, удовлетворяющую уравнению (5.3) в $\Pi_{[0,T]}$ и условиям (5.4), (5.5).

Задача Коши для уравнения колебания струны. Формула Даламбера

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad (t,x) \in (0,T] \times E_1, \tag{5.6}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in E_1, \tag{5.7}$$

$$u_t(0,x) = u_0(x), \qquad x \in E_1. \tag{5.8}$$

Заменой переменных

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at, \quad u(t,x) = v(\xi,\eta) = v(x+at, x-at) \tag{5.9}$$

уравнение (5.7) приводится к уравнению $v_{\xi\eta} = 0$, общее решение которого $v(\xi,\eta) = f(\xi)+g(\eta)$ и функция $u(t,x) = v(x+at, x-at) = f(x+at)+g(x-at)$ есть общие решение уравнения (5.6).

Найдем функции $f(x+at)$ и $g(x-at)$, пользуясь условиями (5.7), (5.8), при которых функция $u(t,x)$ есть решение задачи (5.6)-(5.8).

Начальные условия дают равенства

$$f(x) + g(x) = u_0(x), \tag{5.10}$$

$$af'(x) - ag'(x) = u_1(x). \tag{5.11}$$

Интегрируя (5.11), получим равенство

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{a}\int\limits_0^x u_1(\xi)\,d\xi + C, \tag{5.12}$$

где C - произвольная постоянная. Складывая соотношения (5.10) и (5.12) и вычитая (5.12) из (5.10), получим соответственно выражения для $f(x)$ и $g(x)$:

$$f(x) = \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x u_1(\xi)\,d\xi + \frac{C}{2}, \tag{5.13}$$

$$g(x) = \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x u_1(\xi)\,d\xi - \frac{C}{2}. \tag{5.14}$$

Из (5.13) и (5.14) находим

$$u(t,x) = f(x+at) + g(x-at) = \frac{u_0(x+at)}{2} +$$

$$\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi + \frac{C}{2} + \frac{u_0(x-at)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at} u_1(\xi)\,d\xi - \frac{C}{2}.$$

Так как $\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at} u_1(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi$, то решение задачи (5.6)-(5.8) представимо в виде.

$$u(t,x) = \frac{u_0(x+at) + u_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi. \tag{5.15}$$

Формула (5.15) - формула Даламбера. Она даёт решение задачи Коши (5.6) - (5.8).

Первая краевая задача на полупрямой

Требуется найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad t > 0, \quad x \in (0, +\infty), \tag{5.16}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad 0 < x < \infty, \tag{5.17}$$

$$u_t(0,x) = u_1(x), \qquad 0 < x < \infty, \tag{5.18}$$

и граничному условию

$$u(t,0) = 0, \qquad t > 0. \tag{5.19}$$

Найдем решение задачи (5.16) - (5.19).

Лемма 1. Пусть функции $v_0(x)$, $v_1(x)$ нечетные функции класса $C^2(E_1)$. Тогда для решения $v(t,x)$ задачи Коши

$$v_{tt} = a^2 v_{xx},$$

$$v(0,x) = v_0(x), \qquad v_t(0,x) = v_1(x),$$

выполняется равенство $v(t,0) = 0, \qquad t > 0.$

Доказательство. Рассмотрим формулу Даламбера при $x = 0$:

$$u(t,0) = \frac{u_0(at) + u_0(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at} u_1(\xi)\, d\xi.$$

Откуда с учетом нечетности функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ получаем, что $u(t,0) = 0$.

Лемма 2. Пусть функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ - четные, тогда

$$u_x(t,0) = 0 \qquad \forall t \geq 0.$$

Доказательство. Продифференцируем по x равенство (5.15). Рассмотрев результат дифференцирования при $x = 0$ и учитывая четность функции $u_1(x)$ и нечетность производной от $u_0(x)$, получаем, что $u_x(t,0) = 0$.

Пусть

$$U_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \geq 0, \\ -u_0(x), & x < 0, \end{cases} \qquad U_1(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \geq 0, \\ -u_1(x), & x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $U(t,x) = \dfrac{U_0(x+at) - U_0(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} U_1(\xi)\, d\xi.$

На основании леммы 1 функция $u(t,x) = U(t,x)$ при $t \geq 0$, $x > 0$, есть решение задачи (5.16) - (5.19).

Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона

Рассмотрим в $\Pi_{[0,T]}$ задачу

$$u_t = u_{xx}, \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{5.20}$$

$$u(0,x)=\varphi(x), \qquad x \in E_1. \tag{5.21}$$

Всюду ниже предполагается, что выполняется условие

$$|\varphi(x)| \leq Me^{\alpha|x|}, \qquad x \in E_1, \qquad M, a - const > 0. \tag{5.22}$$

Условие (5.22) - условие на рост функции $\varphi(x)$ при $x \to \infty$. Функция $\varphi(x)$ растет не быстрее, чем $e^{\alpha|x|}$. Ниже мы докажем, что решение задачи (5.20), (5.21) дается формулой Пуассона [4]

$$u(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{5.23}$$

Лемма 3. При выполнении условия (5.22) интеграл (5.23) сходится при $(t,x) \in \Pi_{(0,+\infty)}$ и

$$|u(t,x)| \leq 2Me^{a^2t}e^{a|x|}. \tag{5.24}$$

Сходимость равномерная по $t,x \in G$, где G - произвольная ограниченная область из $\Pi_{(0,T]}$.

Доказательство леммы 3 следует из соотношений

$$|u(t,x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\dfrac{(\xi-x)^2}{4t}}\varphi(\xi)\,d\xi\right| \leq$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\dfrac{(\xi-x)^2}{4t}}|\varphi(\xi)|\,d\xi \leq \{\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}=\eta\} = \frac{M}{\sqrt{\pi}}e^{a|x|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2+a|\eta|2\sqrt{t}}\,d\eta =$$

(в силу четности подынтегральной функции) =

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}}e^{a|x|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2+a|\eta|2\sqrt{t}-a^2t}e^{a^2t}\,d\eta=\frac{2M}{\sqrt{\pi}}e^{a|x|}e^{a^2t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\eta-a\sqrt{t})^2}\,d\eta<$$

$$<\{\eta-a\sqrt{t}=z,-a\sqrt{t}<z<+\infty\}<\frac{2Me^{a|x|}e^{a^2t}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}\,dz=$$

(из анализа известно, что интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}\,dz=\sqrt{\pi}$) =

$$=2Me^{a|x|}e^{a^2t}.$$

Сходимость равномерная в любой ограниченной области G переменных t,x, принадлежащей $\Pi_{(0,T]}$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. При выполнении условия (5.22) функция $u(t,x)$ имеет производные по t,x любого порядка при $t>0$ и

$$\frac{\partial^{n+m}u(t,x)}{\partial t^m\partial x^n}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^m\partial x^n}\left[e^{-\dfrac{(\xi-x)^2}{4t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\right]\varphi(\xi)\,d\xi. \qquad (5.25)$$

При этом интеграл в правой части (5.25) сходится равномерно в любом прямоугольнике $R_{[t_0,T,r]}=\{(t,x)|0<t_0\le t\le T,|x|<r\}$.

Доказательство. Рассмотрим подынтегральное выражение при $(t,x)\in R_{[t_0,T,r]}$.

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^m\partial x^n}\left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\right]=\left[\sum_{\text{конечная}}\frac{(\xi-x)^{\text{степень}}}{t^{\text{степень}}}\right]e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}=$$

(выражение $\sum\limits_{\text{конечная}}\dfrac{(\xi-x)^{\text{степень}}}{t^{\text{степень}}}$ можно записать как некоторый полином $P(t,x,\xi)$ от неизвестной переменной ξ при фиксированных t, x)= $P(t,x,\xi)e^{-\dfrac{(\xi-x)^2}{4t}}$. Здесь $P(t,x,\xi)$ - многочлен степени k, где k зависит от m, n.

Имеет место неравенство

$$|P(t,x,\xi)| \le C(t_0,T,r)(1+|\xi|^k).$$

Здесь постоянная c зависит лишь от t_0, T, r и не зависит от ξ. Так как $e^{|\xi|} = 1+|\xi|+\dfrac{|\xi|^2}{2!}+\dots+\dfrac{|\xi|^k}{k!}+\dots$ и $(1+|\xi|^k) \le e^{|\xi|}k!$, то $|P(t,x,\xi)| \le Ne^{|\xi|}$, где $N = k!C(t_0,T,r)$, и $|\varphi(\xi)P(t,x,\xi)| \le \widetilde{M} < e^{(a+1)|\xi|}$, $\widetilde{M} = NM$.

В силу леммы 3 интеграл (5.25) сходится. Здесь вместо φ, M, a берутся φP, $\widetilde{M}$, $a+1$. Сходимость равномерная по $(t,x) \in R(t_0,T,r)$. По теореме о дифференцируемости несобственных интегралов [16] функция $u(t,x)$ имеет непрерывные производные $\dfrac{\partial^{n+m}}{\partial t^m \partial x^n}$ и выполняется равенство (5.25).

Лемма 5. Функция $u(t,x)$, заданная соотношением (5.23), является решением уравнения (5.20) при $t>0$, $x \in (-\infty,+\infty)$.

Доказательство. Из (5.25) следует, что

$$u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} \right\} \varphi(\xi)\,d\xi.$$

Прямым вычислением легко проверить, что $\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} = 0$ при $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$. Таким образом, в $\Pi_{(0,T]}$ выполняется $u_t - u_{xx} = 0$ и лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть x^0 - точка непрерывности функции $\varphi(x)$. Тогда
$$\lim_{\substack{t\to+0\\ x\to x^0}} u(t,x) = \varphi(x^0).$$

Доказательство. Так как $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\varphi(x^0)\,d\xi$ = (замена η =

$\frac{\xi - x}{2\sqrt{t}}) = \frac{\varphi(x^0)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\, d\eta = \varphi(x^0)$, то

$$|u(t,x) - \varphi(x^0)| = \left| \tfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} (\varphi(\xi) - \varphi(x^0))\, d\xi \right| \le$$

$$\tfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} |\varphi(\xi) - \varphi(x^0)|\, d\xi = \left(\text{замена}\, \zeta = \frac{\xi - x}{2\sqrt{t}}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} |\varphi(x + 2\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x^0)|\, d\zeta =$$

$$\tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{-N} e^{-\zeta^2} |\varphi(x + 2\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x^0)|\, d\zeta + \int\limits_{N}^{+\infty} e^{-\zeta^2} |\varphi(x + 2\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x^0)|\, d\zeta + \right.$$

$$\left. \int\limits_{-N}^{N} e^{-\zeta^2} |\varphi(x + 2\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x^0)|\, d\zeta \right\} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Подынтегральная функция в I_1 (и в I_2) удовлетворяет тому же условию роста, что и функция $\varphi(x)$. Пусть G - ограниченная область в $\Pi_{(0,T]}$ и $(t, x^0) \in G$. По лемме 3 интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} |\varphi(x + 2\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x^0)|\, d\zeta$ сходится равномерно по t и x в G, в силу чего при выборе достаточно большого N: $I_1 < \frac{\varepsilon}{3}$, $I_2 < \frac{\varepsilon}{3}$ при любых $(t,x) \in G$. Зафиксируем это N. Рассмотрим I_3. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что при всех y таких, что $|x^0 - y| < \delta$, выполняется неравенство

$$|\varphi(y) - \varphi(x^0)| < \frac{\varepsilon}{6N}. \tag{5.26}$$

Последнее имеет место в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x^0.

Пусть $(t,x) \in G = \{(t,x) | 0 < t < t_0, |x - x^0| < \delta\}$ и

$$2\sqrt{t}N + |x - x^0| < \delta. \tag{5.27}$$

Тогда

$$I_3 \le \int\limits_{-N}^{N} |\varphi(x + 2\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x^0)|\, d\zeta \le \int\limits_{-N}^{N} \frac{\varepsilon}{6N}\, d\xi = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Доказано, что при всех (t,x), удовлетворяющих (5.27), выполняется $|u(t,x)-\varphi(x^0)| < \varepsilon$. Лемма 6 доказана.

Из лемм 3-6 следует

Теорема. При условии (5.22) функция $u(t,x)$,заданная равенством (5.23) (интеграл Пуассона) есть решение задачи Коши (5.20), (5.21), $u \in C^{\infty}_{(0,T]}$.

Свойства решения.

Свойство 1. Если $|\varphi(x)| < N$, $x \in E_1$, то $|u(t,x)| < N$, $(t,x) \in \Pi_{(0,+\infty)}$.

Доказательство.

$$|u(t,x)| \le \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} |\varphi(\xi)|\, d\xi \le \frac{N}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\, d\xi =$$

$$= \left(\frac{\xi - x}{2\sqrt{t}} = z \right) = \frac{N}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz = N.$$

Свойство 2. Если $\varphi(x)$ - нечетная функция, то $u(t,0)=0$.

Доказательство. Действительно,

$$u(t,0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi = 0,$$

что следует из нечетности подынтегрального выражения.

Рассмотрим задачу о распространении тепла в полуограниченном стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована:

$$u_t = u_{xx}, \qquad t>0, \quad x>0, \tag{5.28}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x>0, \tag{5.29}$$

$$u(t,0) = 0, \qquad t \ge 0. \tag{5.30}$$

Продолжим функцию $u_0(x)$ нечетно на всю действительную ось, обозначив продолжение $U_0(x)$:

$$U_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \ge 0 \\ -u_0(x), & x < 0. \end{cases}$$

Функция

$$U(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} U_0(\xi)\, d\xi \tag{5.31}$$

есть решение задачи (5.20), (5.21) при $u_o(x) = U_0(x)$. Обозначим через $u(t,x)$ сужение $U(t,x)$ на множество $\Pi_1 = \{(t,x)|t \geq 0, x \geq 0\}$. Так как $U(t,0) = 0$ в силу свойства 2, то $u(t,x)$ есть решение задачи (5.28) - (5.30).

Замечание. Считаем, что функция $U_0(x)$ удовлетворяет условию (5.22).

6. Принцип максимума для уравнений параболического и эллиптического типов

Принцип максимума для уравнения параболического типа

Пусть $T > 0$ – const, $S_T = [0,T] \times \partial\Omega$, $\Gamma_T = S_T \cup \Omega$, $Q_T = (0,T) \times \Omega$. Отметим, что определенную таким образом область Q_T называют *цилиндрической*.

Рассмотрим в Q_T линейное уравнение

$$\mathcal{L}(u) = f, \tag{6.1}$$

где

$$\mathcal{L}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - \frac{\partial u}{\partial t}\ ,$$

причем коэффициенты a_{ij}, b_i, c и правая часть f уравнения (6.1) — вещественные, конечнозначные функции переменных t, x.

Считаем, что всюду ниже $a_{ij}(t,x) = a_{ji}(t,x)$ и выполняется соотношение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j > 0 \quad \forall (t,x) \in \overline{Q}_T \backslash \Gamma_T \tag{6.2}$$

и любых отличных от нуля $\xi \in R^n$.

Отметим, что по определению вследствие условия (6.2) уравнение (6.1) является параболическим в $\overline{Q}_T \backslash \Gamma_T$.

Определение. Функция u называется классическим решением уравнения (6.1) в $\overline{Q}_T$, если ее производные $\partial u/\partial x_i$, $\partial^2 u/(\partial x_i \partial x_j)$, $\partial u/\partial t$, $i,j =$

$\overline{1,n}$, непрерывны в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$, сама функция u непрерывна в $\overline{Q}_T$ и в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ выполняется тождество $L(u(t,x)) = f(t,x)$.

Ниже будем рассматривать только классические решения уравнения (6.1).

Замечание 1. Легко видеть, что замена $u = ve^{\alpha t}$, где $\alpha = \text{const} > 0$, приводит к уравнению для v вида (6.1) с коэффициентом при v, равным $c - \alpha$. Следовательно, если c - ограниченная сверху функция ($c < m$, $m = \text{const} > 0$), то указанной заменой (если взять $\alpha > m$) можно добиться того, что коэффициент при v в уравнении (6.1) станет строго отрицательным.

Теорема 1. Пусть функция u непрерывна в $\overline{Q}_T$, все ее производные, входящие в оператор $\mathcal{L}$, непрерывны в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ и выполняются неравенства

$$L(u(t,x)) \le 0 \quad \text{в } \overline{Q}_T \setminus \Gamma_T, \tag{6.3}$$

$$u(t,x) \ge 0 \quad \text{на } \Gamma_T. \tag{6.4}$$

Пусть коэффициент c оператора L ограничен сверху некоторой постоянной m ($c(t,x) < m \ \forall (t,x) \in \overline{Q}_T$). Тогда

$$u(t,x) \ge 0 \quad \text{в } \overline{Q}_T.$$

Доказательство. Вначале рассмотрим случай, когда $m < 0$ и $c(t,x) < m < 0$ в $\overline{Q}_T$. Предположим, что условия теоремы 1 выполнены, но функция u принимает в $\overline{Q}_T$ отрицательные значения (ниже вследствие этого предположения получим противоречие). Так как u непрерывна в $\overline{Q}_T$, то она достигает в $\overline{Q}_T$ своего минимума, причем отрицательного, в некоторой точке (t^0, x^0). Ясно, что вследствие условия (6.4) точка (t^0, x^0) может лежать либо внутри области Q_T, либо внутри ее верхнего основания $\left\{(t,x)\big|_{t=T, x\in\Omega}\right\}$. Следовательно, в точке (t^0, x^0) выполняются соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \le 0, \quad cu > 0. \tag{6.5}$$

Покажем, что в этой точке выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \ge 0. \tag{6.6}$$

Действительно, линейная замена переменных $y = Kx$ ($y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} k_{ij}x_j$, $i = \overline{1,n}$) приводит к равенству

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(t,y)\frac{\partial^2 v(t,y)}{\partial y_i \partial y_j}\ , \tag{6.7}$$

где матрицы $A = \|a_{ij}\|$, $K = \|k_{ij}\|$, $D = \|d_{ij}\|$ связаны соотношением $D = KAK^*$, $v(t,y) = u(t,K^{-1}y)$, K^* — матрица, сопряженная к матрице K. Легко видеть, что минимум функции v совпадает с минимумом функции u и достигается в точке (t^0, y^0), где $y^0 = Kx^0$. Из линейной алгебры известно, что невырожденное преобразование можно подобрать таким образом, чтобы матрица D была диагональной в точке (t^0,x^0). Кроме того, матрица D — положительно определенная вследствие положительной определенности матрицы A (см. соотношение (6.2)). Значит,

$$\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(t^0,y^0)\frac{\partial^2 v(t^0,y^0)}{\partial y_i \partial y_j} = \sum_{i=1}^{n} d_{ii}(t^0,y^0)\frac{\partial^2 v(t^0,y^0)}{\partial y_i^2} \geq 0, \tag{6.8}$$

так как $d_{ii} > 0$, а $\partial^2 v/\partial y_i^2 \geq 0$ в точке (t^0,x^0). Из соотношений (6.7), (6.8) следует неравенство (6.6). Из определения оператора L и соотношений (6.5), (6.6) в точке (t^0,x^0) получаем неравенство $L(u(t^0,x^0)) > 0$, что противоречит условию (6.3) и доказывает теорему 1 в случае $c(t,x) < 0$. В случае $c(t,x) < m$, $m > 0$ сделаем замену $u(t,x) = v(t,x)e^{mt}$. Функция v неотрицательна на Γ_T, удовлетворяет уравнению (6.1) с отрицательным коэффициентом при v (см. замечание 1) и неположительной правой частью. По доказанному выше $v(t,x) \geq 0$ в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$. Следовательно, и $u(t,x) = v(t,x)e^{mt} \geq 0$ в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$. Теорема 1 доказана.

Далее p, q — неотрицательные постоянные, а c_0 — строго положительная постоянная.

Теорема 2. Пусть функция $u(t,x)$ непрерывна в $\overline{Q}_T$, удовлетворяет в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ уравнению (6.1) и $|u(t,x)|_{\Gamma_T} \leq q$. Пусть f — ограниченная функция, а коэффициент c не положителен:

$$|f(t,x)| \leq p, \quad c(t,x) \leq 0 \quad \forall (t,x) \in \overline{Q}_T.$$

Тогда всюду в $\overline{Q}_T$ выполняется неравенство

$$|u(t,x)| \leq pt + q. \tag{6.9}$$

Доказательство. Функции $w_{\pm}(t,x) = pt + q \pm u(t,x)$ не отрицательны на Γ_T, а в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ вследствие условия $c \leq 0$ удовлетворяют соотношению

$$L(w_{\pm}) = -p + pct + cq \pm L(u) \leq p \pm |f| \leq 0.$$

По теореме 1 функции w_+ и w_- не отрицательны в $\overline{Q}_T$: $(w_{\pm}(t,x) = pt + q \pm u(t,x) \geq 0)$, откуда и следует неравенство (6.9). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть $u(t,x)$ — классическое решение в $\overline{Q}_T$ уравнения (6.1) и выполняются соотношения

$$|f(t,x)| \leq p, \quad c(t,x) \leq -c_0 \quad \text{в } \overline{Q}_T \setminus \Gamma_T, \quad |u(t,x)| \leq q \quad \text{на } \Gamma_T.$$

Тогда всюду в $\overline{Q}_T$

$$|u(t,x)| \leq \max\left\{\frac{p}{c_0}\ , q\right\}. \tag{6.10}$$

Доказательство. Рассмотрим в $\overline{Q}_T$ функции

$$w_{\pm} = \max\{p/c_0, q\} \pm u(t,x).$$

Легко проверить, что $w_{\pm} \geq 0$ на Γ_T, а в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ выполняется неравенство $L(w_{\pm}) \leq 0$. Последнее следует из соотношений

$$\begin{aligned} L(w_{\pm}) = c\max\left\{\tfrac{p}{c_0}\ , q\right\} \pm f \ &\leq \ -c_0 \max\left\{\tfrac{p}{c_0}\ , q\right\} + p \\ &\leq \ -c_0 \tfrac{p}{c_0} + p = 0. \end{aligned}$$

По теореме 1 функции $w_{\pm}(t,x) \geq 0$ в $\overline{Q}_T$, откуда следует (6.10). Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть $u(t,x)$ — классическое решение уравнения $L(u) = 0$, все коэффициенты оператора L ограничены в $\overline{Q}_T$, $c(t,x) \leq 0$ и

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2, \quad \mu = \text{const} > 0$$

для всех $\xi \in R^n$. Пусть в некоторой точке $(t^0, x^0) \in \overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ функция $u(t,x)$ достигает положительного максимума

$$u(t^0, x^0) = \max_{\overline{Q}_T} u(t,x) = M > 0.$$

Тогда $u(t,x) = M$ в каждой точке $(t,x) \in Q_T$, для которой $t < t^0$.

Доказательство теоремы 4, а также теорем 1–3 в случае произвольных областей (не обязательно цилиндрических) см. в [5].

Принцип максимума в неограниченной области и задача Коши

Рассмотрим для уравнения (6.1) задачу Коши: *найти непрерывную в полосе* $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|\ 0 \le t \le T,\ x \in\ R^n\}$ *функцию* u*, удовлетворяющую в* $\Pi_{(0,T]}$ *уравнению (6.1) и при* $t = 0$ *совпадающую с заданной на* R^n *функцией* φ:

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in R^n. \tag{1*}$$

Ниже докажем некоторые результаты (теоремы принципа максимума), позволяющие получить оценку решения задачи Коши вида (6.10). Как и в случае ограниченных областей, методом доказательства является метод вспомогательных функций (функции $w, w_\pm$). При этом накладываются ограничения на рост коэффициентов и допустимый рост решения u при

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \to \infty.$$

Теорема 5. Пусть функция $u(t,x)$ в $\Pi_{[0,T]}$ непрерывна и ограничена снизу:

$$u(t,x) \ge -d, \quad d = \mathrm{const} > 0, \tag{6.2}$$

а в $\Pi_{(0,T]}$ имеет все непрерывные производные, входящие в оператор L, и удовлетворяет неравенству $L \le 0$. Пусть коэффициенты a_{ij}, b_i, c удовлетворяют соотношениям

$$|a_{ij}| < m(|x|^2+1), \quad |b_i(t,x)| < m(|x|^2+1)^{1/2}, \quad c(t,x) < m,$$

$m = \mathrm{const} > 0$. Тогда $u(t,x) \ge 0$ всюду в $\Pi_{[0,T]}$, если $u \ge 0$ при $t = 0$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$w(t,x) = \frac{d}{r_0^2}(|x|^2 + kt)e^{\alpha t} + u(t,x).$$

Покажем, что при надлежащем выборе постоянных k, α величина $L(w)$ будет отрицательной при любых $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$ и любых $r_0>0$ ($r_0=\mathrm{const}$). Запишем выражение для $L(w)$:

$$L(w)=L(u)+\tfrac{d}{r_0^2}e^{\alpha t}\Bigg(2\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+ \\ +2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c|x|^2+kct-k-\alpha|x|^2-k\alpha t\Bigg).$$

Здесь первое слагаемое в правой части есть $L\big((d/r_0^2)(|x|^2+kt)e^{\alpha t}\big)$. Рассмотрим произвольную точку (t,x) полосы $\Pi_{(0,T]}$. Если $|x|\geq 1$, то неравенство

$$L(w)\leq\frac{d}{r_0^2}e^{\alpha t}\{m(4n+1)(|x|^2+1)-\alpha|x|^2+(m-\alpha)kt\}<0$$

выполняется при $\alpha>2m(4n+1)$. Если $|x|<1$, то (при $\alpha>2m(4n+1)$)

$$L(w)\leq(d/r_0^2)e^{\alpha t}\{m(8n+1)-k\}<0$$

при $k>m(8n+1)$. Здесь учитывается, что при $|x|<1$ имеют место неравенства $|\alpha_{ii}|<2m$, $|b_i|<2m$. Таким образом, выбрав $\alpha>2m(4n+1)$ и $k>m(8n+1)$, получим неравенство

$$L(w(t,x))<0,$$

верное при любых r_0 и любых $(t,x)\in\Pi_{(0,T]}$.

Рассмотрим теперь функцию $w(t,x)$ в цилиндре $\Pi_{[0,T]}^{r_0}=\{(t,x)|\ 0\leq t\leq T,\ |x|\leq r_0\}$. Нетрудно проверить, что $w(0,x)\geq u(0,x)\geq 0$ и при $|x|=r_0$ (т.е. на боковой поверхности цилиндра $\Pi_{[0,T]}^{r_0}$) функция $w(t,x)\geq d+u(t,x)\geq 0$. Следовательно, по теореме 1 всюду в $\Pi_{[0,T]}^{r_0}$ имеет место неравенство $w(t,x)\geq 0$.

Любая фиксированная точка (t,x) полосы $\Pi_{[0,T]}^{r_0}$ при всех достаточно больших значениях r_0 (r_0 больше некоторого числа $R=R(t,x)>0$) принадлежит всем цилиндрам $\Pi_{[0,T]}^{r_0}$. В этой точке по доказанному выше при любых значениях $r_0\geq R$

$$w(t,x)=\frac{d}{r_0^2}\ (|x|^2+kt)e^{\alpha t}+u(t,x)\geq 0.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $r_0\to\infty$, получим неравенство $u(t,x)\geq 0$. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Пусть $u(t,x)$ — классическое ограниченное решение задачи Коши (6.1), (1*), коэффициенты a_{ij}, b_i оператора L подчинены условиям теоремы 5 и выполняются соотношения

$$|\varphi(x)| \leq q, \quad x \in R^n, \quad |f(t,x)| \leq p, \quad c(t,x) \leq m, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}.$$

Тогда всюду в $\Pi_{[0,T]}$

$$|u(t,x)| \leq e^{mt}(pt+q). \tag{6.3}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательные функции

$$w_{\pm}(t,x) = e^{mt}(pt+q) \pm u(t,x).$$

По условию теоремы $w_{\pm}(0,x) \geq 0$. Вычисляя $L(w_{\pm})$, получим

$$L(w_{\pm}(t,x)) = e^{mt}[(c-m)(pt+q)-p] \pm f \leq$$

$$\leq -pe^{mt} \pm f \leq -pe^{mt} + p \leq 0 \quad \forall (t,x) \in \Pi_{[0,T]}.$$

По теореме 5 всюду в $\Pi_{[0,T]}$ $w_{\pm} \geq 0$ и, следовательно, имеет место оценка (6.3). Теорема 6 доказана.

Пусть S — фазовое пространство переменных $v_1, \ldots, v_d$ и $\overline{B}(0,R) = \{v \big| \ |v| \leq R\}$ - замкнутый шар в S радиуса R с центром в точке $\theta = (0,\ldots,0)$.

Рассмотрим задачу Коши в $\Pi_{[t_0,T]} = \{(t,x) | \ t_0 \leq t \leq T, \ x \in R^n\}$ для распадающейся системы параболических уравнений

$$L(v) = 0,$$

$$v\Big|_{t=t_0} = v^{t_0}, \quad 0 \leq t_0 < T. \tag{6.4}$$

Здесь $v = v(t,x) = (v_1(t,x),\ldots,v_d(t,x))$, $v^{t_0} = v^{t_0}(x) = (v_1^{t_0}(x),\ldots,v_d^{t_0}(x))$, $L(v) = (L(v_1), \ldots, L(v_d))$ — вектор функции размерности d и $d \geq 1$ — целое.

Отметим, что покомпонентная запись задачи (6.4) имеет вид

$$L(v_j) = 0, \quad v_j\Big|_{t=t_0} = v_j^{t_0}, \quad j = 1,\ldots,d.$$

Имеет место

Теорема 7. Пусть коэффициент $c(t,x)$ оператора $L(\cdot)$ равен тождественно нулю, остальные коэффициенты ограничены в $\Pi_{[t_0,T]}$ и $v(t,x) = (v_1(t,x),\ldots,v_d(t,x))$ есть классическое ограниченное решение задачи (6.4) в $\Pi_{[t_0,T]}$. Тогда $v(t,x) \in \overline{B}(0,R)$ для всех $(t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}$, если $v^{t_0}(x) \in \overline{B}(0,R)$ для всех $x \in R^n$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы 7 неверно. Тогда существует точка $(t^{(1)},x^{(1)}) \in \Pi_{[t_0,T]}$ такая, что $v(t^{(1)},x^{(1)})$ не принадлежит $\overline{B}(0,R)$, следовательно, $|v(t^{(1)},x^{(1)})| > R$. Касательная плоскость к границе шара $\overline{B}(0,R)$ в точке $\overline{v} = Rv(t^{(1)},x^{(1)})/|v(t^{(1)},x^{(1)})|$ задается уравнением $(N,w) = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_d w_d = R$, где α_i, $i = 1,\ldots,d$ — направляющие косинусы единичного вектора $N = v(t^{(1)},x^{(1)})/|v(t^{(1)},x^{(1)})|$. Очевидно, что в точке $v(t^{(1)},x^{(1)})$ фазового пространства S

$$\left(N, v(t^{(1)},x^{(1)})\right) = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j v_j \left(t^{(1)},x^{(1)}\right) > R. \tag{6.5}$$

Так как $v^{t_0}(x) \in \overline{B}(0,R)$ для всех $x \in R^n$, то $(N, v^{t_0}(x)) \le R$ и функция $g^0(x) = \alpha_1 v_1^{t_0}(x) + \ldots + \alpha_d v_d^{t_0}(x) - R \le 0$ для всех $x \in R^n$. Функция $g(t,x) = \sum\limits_{j=1}^{d} \alpha_j v_j(t,x) - R$ является решением в $\Pi_{[t_0,T]}$ уравнения $L(g) = 0$ с начальными данными $g(t_0,x) = g_0(x) \le 0$. Согласно теореме 5 функция $g(t,x) \le 0$ для всех $(t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}$ и, в частности, в точке $(t^{(1)},x^{(1)})$, что противоречит неравенству (6.5). Теорема 7 доказана.

Замечание 2. Теорема 7 остается верной в случае, когда вместо шара $\overline{B}(0,R)$ рассматривается произвольное ограниченное выпуклое множество (см., например, [14], лемма 4.5.1). Данный результат можно трактовать как некоторый геометрический вариант принципа максимума для распадающихся систем уравнений: если решение системы в начальный момент времени находилось в некотором выпуклом множестве фазового пространства при всех значениях пространственных переменных, то оно находится в этом множестве в любой последующий момент времени.

Далее сформулируем и докажем ряд утверждений, которые иллюстрируют приложения принципа максимума.

Утверждение 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $f \equiv 0$. Тогда

$$|u(t,x)| \le \max_{\Gamma_T} |u(t,x)| \qquad \forall (t,x) \in \overline{Q}_T$$

Доказательство. Пусть $M = \max\limits_{\Gamma_T} |u(t,x)|$. Рассмотрим функции $w_\pm = M \pm u(t,x)$, удовлетворяющие соотношениям $w_\pm|_{\Gamma_T} \ge 0$ и $L(w_\pm) = L(M) \pm L(u) = cM \pm 0 \le 0$. Согласно теореме 1 $w_\pm \ge 0$ при всех $(t,x) \in Q_T$. Отсюда следует, что $-M \le u(t,x) \le M \quad \forall (t,x) \in \overline{Q}_T$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $f \equiv c \equiv 0$. Тогда всюду в $\overline{Q}_T$ имеет место равенство

$$\min_{\Gamma_T} u \le u(t,x) \le \max_{\Gamma_T} u.$$

Доказательство. Введем обозначения $M = \max\limits_{\Gamma_T} u$, $m = \min\limits_{\Gamma_T} u$. Легко показать, что для функций $w_+ = u(t,x) - m$, $w_- = M - u(t,x)$ верны условия теоремы 1, согласно которой будет выполняться $w_\pm(t,x) \ge 0 \; \forall \, (t,x) \, \overline{Q}_T$. Откуда и следует справедливость утверждения 2.

Утверждение 3. Пусть в теореме 2 условие $c(t,x) \le 0$ заменено условием $c(t,x) < m$, где $m = \text{const} > 0$. Тогда в $\overline{Q}_T$ справедливо неравенство

$$|u(t,x)| \le e^{mt}(pt + q).$$

Доказательство. Сделаем замену $u(t,x) = e^{mt} v(t,x)$. По замечанию 1 выражение $\widetilde{L}(v)$ имеет коэффициент $\widetilde{c} < 0$ и верно $\widetilde{L}(v) \le 0$. Согласно теореме 2 справедлива оценка $|v(t,x)| \le q + pt$, так как $|v(t,x)|_{\Gamma_T} \le q$, $|\widetilde{f}(t,x)|_{\overline{Q}_T} \le p$. Тогда для $u(t,x)$ имеет место оценка

$$|u(t,x)| \le e^{mt} |v(t,x)| \le e^{mt}(q + pt).$$

Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. (теорема единственности) Первая краевая задача для уравнения (6.1) не может иметь более одного классического решения.

Доказательство. Пусть $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ - два решения первой краевой задачи для уравнения (6.1). Рассмотрим функцию $u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$, которая является решением задачи

$$L(u) = 0, \qquad u|_{\Gamma_T} = 0.$$

Согласно утверждению 3 в $\overline{Q}_T$ справедлива оценка $|u(t,x)| \leq 0$. Следовательно, $u_1(t,x) = u_2(t,x)$ в $\overline{Q}_T$. Утверждение доказано.

Утверждение 5. Решение первой краевой задачи для уравнения (6.1) непрерывно зависит от входных данных.

Доказательство. Пусть функция $u_1(t,x)$ является решением задачи

$$L(u_1) = f_1(t,x), \qquad u_1(0,x) = u_0^1(x), \qquad u_1(t,x)|_{S_T} = \varphi_1(t,x),$$

а функция $u_2(t,x)$ - решение задачи

$$L(u_2) = f_2(t,x), \qquad u_2(0,x) = u_0^2(x), \qquad u(t,x)|_{S_T} = \varphi_2(t,x).$$

Тогда функция $u(t,x) = u_1(t,x) = u_2(t,x)$ удовлетворяет задаче

$$L(u) = f(t,x), \qquad u_(0,x) = u_0(x), \qquad u(t,x)|_{S_T} = \varphi(t,x),$$

где $f(t,x) = f_1(t,x) - f_2(t,x)$, $u_0(x) = u_0^1(x) - u_0^2(x)$, $\varphi(t,x) = \varphi_1(t,x) - \varphi_2(t,x)$. Считаем, что

$$|f(t,x)| + |u_0(x)| + |\varphi(t,x)| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, $|u(t,x)|_{\Gamma_T} \leq \varepsilon$ и $|f(t,x)|_{\overline{Q}_T} \leq \varepsilon$. Согласно утверждению 3 в $\overline{Q}_T$ имеем $|u(t,x)| \leq e^{mt}(\varepsilon + t\varepsilon) \leq e^{mt}\varepsilon(1+T)$. Последнее неравенство гарантирует непрерывную зависимость от входных данных (правой части уравнения, начальной функции и функции, заданной на боковой поверхности) решения первой краевой задачи для уравнения (6.1).

Утверждение 6. Первая краевая задача для уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx} + f$$

может имеет не более одного классического решения.

Доказательство. Пусть $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ - два классических решения решения первой краевой задачи для уравнения Бюргерса. Рассмотрим функцию $u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$, которая является решением задачи

$$u_t + u_1 u_x + u_{2x} u = \mu u_{xx} = 0, \qquad u|_{\Gamma_T} = 0.$$

Так как $u_2(t,x)$ - классическое решение задачи, то $|u_{2x}(t,x)| \leq M$ в $\overline{Q}_T$. Согласно утверждению 3 в $\overline{Q}_T$ справедлива оценка $|u(t,x)| \leq 0$. Следовательно, $u_1(t,x) = u_2(t,x)$ в $\overline{Q}_T$. Утверждение доказано.

Принцип максимума для эллиптического уравнения

Рассмотрим линейный оператор

$$M(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \tag{6.6}$$

с коэффициентами a_{ij}, b_i, c, заданными в области $\Omega \subset E_n$.

По определению оператор M называется эллиптическим (эллиптического типа) в точке $x^0 \in \Omega$, если матрица старших коэффициентов

$$A(x^0) = \begin{pmatrix} a_{11}(x^0) & a_{12}(x^0) & \dots & a_{1n}(x^0) \\ a_{21}(x^0) & a_{22}(x^0) & \dots & a_{2n}(x^0) \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1}(x^0) & a_{n2}(x^0) & \dots & a_{nn}(x^0) \end{pmatrix}$$

положительно определенная, т.е.

$$0 < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\xi_i\xi_j, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in E_n, \quad |\xi| \neq 0.$$

Теорема 8. Пусть M – эллиптический оператор с коэффициентами, непрерывными в области Ω,

$$c(x) < 0 \tag{6.7}$$

и функция $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Тогда

a) если $M(u) \leqslant 0$ в Ω и $u|_{\partial\Omega} \geqslant 0$, то $u \geqslant 0$ в $\overline{\Omega}$;

b) если $M(u) \geqslant 0$ в Ω и $u|_{\partial\Omega} \leqslant 0$, то $u \leqslant 0$ в $\overline{\Omega}$.

Доказательство.

Случай (a). Пусть функция $u(x)$ не удовлетворяет условию $u(x) \geqslant 0$ в $\overline{\Omega}$. Тогда в силу непрерывности u на $\overline{\Omega}$ и условия $u|_{\partial\Omega} \geqslant 0$ она достигает своего отрицательного минимума $m < 0$ в некоторой точке $x^0 \in \Omega$:

$$u(x^0) = m < 0.$$

Рассмотрим цилиндрическую область $Q_T = (0, T) \times \Omega$, $T > 0$, и пусть $S_T = [0, T] \times \partial\Omega$ и $\Gamma_T = S_T \cup \Omega$.

Рассмотрим функцию

$$v(t,x) = u(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

определенную в $\bar{Q}_T$. В силу определения функции $v(t,x)$

$$v(t,x^0) = u(x^0) = m < 0, \quad t \in (0,T),$$

и, следовательно, $v(t,x)$ достигает своего отрицательного минимума в точке $(t,x^0) \in \bar{Q}_T \backslash \Gamma_T$.

Рассмотрим параболический оператор

$$L(v) = M(v) - \frac{\partial v}{\partial t}.$$

В Q_T имеет место неравенство

$$L(v) = M(v) - \frac{\partial v}{\partial t} = M(u) \leqslant 0. \tag{6.8}$$

В точке $(t^0,x^0) \in Q_T$

$$L(v(t^0,x^0)) = M(u(x^0)) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\frac{\partial^2 u(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x^0)\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i} +$$

$$+c(x^0)u(x^0) \geqslant c(x^0)u(x^0) = c(x^0)m > 0, \tag{6.9}$$

что противоречит (6.8). Отметим, что так как в (6.9) точка x^0 является точкой локального минимума, то $\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\frac{\partial^2 u(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} \geqslant 0 \quad \text{(см. доказательство теоремы 1)}$$

и $c(x^0)m > 0$ в силу (6.7). Случай (a) доказан.

Случай (b). Предположим, что неравенство $u(x) \leqslant 0$ в $\overline{\Omega}$ не выполняется. Тогда существует точка $x^0 \in \Omega$, в которой функция $u(x)$ достигает своего положительного максимума:

$$u(x^0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = M > 0.$$

В точке x^0 $M(u(x^0)) \leqslant c(x^0)M < 0$, что противоречит предположению $M(u) \geqslant 0$ в Ω. Теорема 8 доказана.

Следствием теоремы 8 является

Теорема 9. Пусть M – эллиптический оператор с непрерывными коэффициентами в области Ω и $c(x) < 0$ в Ω. Тогда, если функция $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ есть решение уравнения $M(u) = 0$ и $u(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$, то $u(x) = 0$ при $x \in \Omega$.

Замечание 4. Из теоремы 9 следует, что классическое решение первой краевой задачи для уравнения $M(u) = f$ (при условии $c(x) < 0$ в Ω) единственно.

Имеет место [21]

Теорема 10. Пусть M – эллиптический оператор с коэффициентами, непрерывными в области Ω, f непрерывна в $\overline{\Omega}$ и $c(x) \leqslant 0$. Тогда имеет место неравенство

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leqslant \max_{\partial\Omega} |\varphi| + (e^{\lambda d} - 1) \max_{\overline{\Omega}} |f|, \tag{6.10}$$

где d – диаметр области Ω в направлении x_1, постоянная λ удовлетворяет условиям

$$\lambda > 0, \quad a_{11}\lambda^2 + b_1\lambda \geqslant 1 \,\text{в}\, \Omega.$$

Замечание 5. Очевидно, что в (6.10) в качестве постоянной d можно брать диаметр области Ω. Из теоремы 10 следует, что классическое решение первой краевой задачи для уравнения $M(u) = f$ единственно при $c(x) \leqslant 0$.

7. Функциональные пространства

Введем обозначения

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – мультииндекс, $\alpha_i \geq 0$ -целые, $i = \overline{1, n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

Пусть Ω - область в E_n.

Определение. Линейное пространство функций, непрерывных на $\Omega \subset E^n$, обозначают $C(\Omega)$.

Определение. Линейное пространство функций, непрерывных на $\overline{\Omega} \subset E^n$, обозначают $C(\overline{\Omega})$.

В пространстве $C(\overline{\Omega})$ вводится норма

$$||u||_{C(\overline{\Omega})} = \max_{\overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Пространство $C(\overline{\Omega})$ является банаховым пространством.

Определение. Линейное пространство функций, непрерывно дифференцируемых до порядка k включительно на $\Omega \subset E^n$, обозначают $C^k(\Omega)$:

$$C^k(\Omega) = \{f(x)| \quad D^\alpha f(x) \in C(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k\}.$$

Определение. Пространство функций, непрерывно дифференцируемых до порядка k включительно на $\overline{\Omega} \subset E^n$, обозначают $C^k(\overline{\Omega})$:

$$C^k(\overline{\Omega}) = \left\{f(x)| \quad D^\alpha f(x) \in C(\overline{\Omega}) \quad \forall |\alpha| \leq k\right\}.$$

В пространстве $C^k(\overline{\Omega})$ вводится норма

$$||u||_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha f(x)||_{C(\overline{\Omega})}.$$

Пространство $C^k(\overline{\Omega})$ является банаховым пространством.

Определение. Функция $g(x)$ называется финитной, если она обращается в ноль в некоторой невырожденной окрестности границы области Ω. Пространство непрерывных финитных в Ω функций обозначается $\overset{\circ}{C}(\Omega)$. Пространство k раз непрерывно дифференцируемых финитных в Ω функций обозначается $\overset{\circ}{C}{}^k(\Omega)$.

$\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ - пространство финитных бесконечно дифференцируемых в Ω функций.

Определение. Пространство функций, измеримых по Лебегу на множестве $\Omega \subset E^n$ и интегрируемых по Лебегу со степенью p, $p > 1$, обозначают $L_p(\Omega)$:

$$L_p(\Omega) = \{f(x)| \quad f(x)\text{измеримы по Лебегу и} \int\limits_\Omega |f(x)|^p\,dx < \infty\}.$$

В пространстве $L_p(\Omega)$ вводится норма

$$||u||_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Пространство $L_p(\Omega)$ является банаховым пространством.

Имеет место следующая теорема [14], [18].

Теорема. Пространство $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$ всюду плотно в $L_2(\Omega)$.

Определение. Пространство функций, измеримых по Лебегу на множестве $\Omega \subset E^n$ и интегрируемых по Лебегу со степенью p на любом Ω' строго вложенном в Ω, обозначают $L_{p,\text{loc}}(\Omega)$.

Заметим, что $L_p(\Omega) \subset L_{p,\text{loc}}(\Omega)$.

Из анализа известна следующая теорема

Теорема. Пусть функции $f(x)$, $g(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, Ω- ограниченная область в E_n с границей $\partial\Omega$ класса C^1. Тогда имеет место формула интегрирования по частям

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \, dx = \int\limits_{\partial\Omega} f(s)g(s)\cos(n, x_i) \, ds - \int\limits_{\Omega} g(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \, dx, \qquad (7.1)$$

где $n = n(s)$ - внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке s.

В случае, когда f (или g) $\in \overset{\circ}{C}{}^1(\Omega)$, то $f|_{\partial\Omega} \equiv 0$ и формула (7.1) принимает вид

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \, dx = -\int\limits_{\Omega} g(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \, dx. \qquad (7.2)$$

Рассмотрим функцию $f(x) \in C^k(\Omega)$ и функцию $g(x) \in \overset{\circ}{C}{}^k(\Omega)$. Применяя формулу (7.2) интегрирования по частям, получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\frac{\partial^m g(x)}{\partial x_i^m} \, dx = (-1)^m \int\limits_{\Omega} g(x)\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_i^m} \, dx, \quad m \le k_0. \qquad (7.3)$$

8. Обобщенные производные (по С.Л. Соболеву) и их свойства

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$ - мультииндекс, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Определение. Функция $f^\alpha \in L_{2,loc}(\Omega)$ называется α - обобщенной производной в области Ω функции $f \in L_{2,loc}(\Omega)$, если равенство

$$\int\limits_\Omega f(x) D^\alpha g(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega f^\alpha(x) g(x)\, dx$$

выполняется при любом $g(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|}$.

Свойства обобщенных производных.

Свойство 1. Если α - обобщенная производная функции $f \in L_{2,loc}(\Omega)$ существует, то она единственна.

Замечание 1. Считаем, что если $f(x) \in \overset{\circ}{C}{}^k(\widetilde{\Omega})$, $\widetilde{\Omega} \Subset \Omega$, то $f \in \overset{\circ}{C}{}^k(\overline{\Omega})$ и на $\overline{\Omega} \backslash \widetilde{\Omega}$ функция $f = 0$.

Замечание 2. Если $f \in \overset{\circ}{C}{}^1(\widetilde{\Omega})$, $\widetilde{\Omega} \Subset \Omega$, $g \in L_2(\Omega)$, то $\int\limits_\Omega fg\, dx = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} fg\, dx$.

Действительно, продолжая нулем функцию f на $\overline{\Omega} \backslash \widetilde{\Omega}$ получаем функцию равную нулю на $\Omega \backslash \widetilde{\Omega}$ и определенную на Ω. Отсюда функция fg определена на Ω и равна нулю на $\Omega \backslash \widetilde{\Omega}$. Следовательно, по свойствам интеграла Лебега

$$\int\limits_\Omega fg\, dx = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} fg\, dx + \int\limits_{\Omega \backslash \widetilde{\Omega}} fg\, dx = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} fg\, dx,$$

так как $\int\limits_{\Omega \backslash \widetilde{\Omega}} fg\, dx = 0$.

Замечание 3. Пусть H - гильбертово пространство и элемент $h \in H$ ортогонален всюду плотному в H множеству M. Тогда $h = 0$.

Этот факт - хорошо известная теорема функционального анализа.

Доказательство свойства 1 (единственность).

Рассмотрим $f \in L_{2,loc}(\Omega)$. Пусть существуют $f_1^\alpha(x)$, $f_2^\alpha(x)$ - две α - обобщенные производные функции $f(x)$. Имееют место тождества

$$\int\limits_\Omega f D^\alpha g\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega f_1^\alpha g\, dx \qquad \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|}(\Omega),$$

$$\int\limits_{\Omega} f D^{\alpha} g\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} f_2^{\alpha} g\, dx \qquad \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|}(\Omega).$$

Вычтем второе тождество из первого. Получим, что

$$\int\limits_{\Omega} (f_1^{\alpha} - f_2^{\alpha}) g\, dx = 0 \qquad \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|}(\Omega). \tag{8.1}$$

Так как f_1^{α}, $f_2^{\alpha} \in L_{2,loc}(\Omega)$, то $f_1^{\alpha} - f_2^{\alpha} \in L_{2,loc}(\Omega)$. Рассмотрим произвольное $\widetilde{\Omega} \Subset \Omega$ и $g \in \overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|}(\widetilde{\Omega})$. В силу замечаний 1,3 из (8.1) следует равенство

$$0 = (f_1^{\alpha} - f_2^{\alpha}, g)_{L_2(\widetilde{\Omega})} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} (f_1^{\alpha} - f_2^{\alpha}) g\, dx \quad \forall\, g \in \overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|}(\widetilde{\Omega}).$$

Так как $\overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|}(\widetilde{\Omega})$ всюду плотно в $L_2(\widetilde{\Omega})$, то по замечанию 3 почти всюду в $\widetilde{\Omega}$ выполнено $f_1^{\alpha} - f_2^{\alpha} = 0$. В силу произвольного выбора множества $\widetilde{\Omega}$ разность $f_1^{\alpha} - f_2^{\alpha} = 0$ почти всюду в Ω: $f_1^{\alpha} = f_2^{\alpha}$ почти всюду в Ω.

Свойство 2. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную классическую производную $D^{\alpha} f$ в Ω, то $f(x)$ имеет α - обобщенную производную f^{α} и $f^{\alpha} = D^{\alpha} f$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $g \in \overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|}(\Omega)$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Интеграл

$$\int\limits_{\Omega} f(x) D^{|\alpha|} g(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} f(x) \frac{\partial^{|\alpha|} g(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\, dx$$

существует в силу замечания 2. Интегрируя по частям α_1 раз по переменной

x_1, получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} f(x) D^{|\alpha|} g(x)\, dx = (-1)^{\alpha_1} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^{\alpha_1} f}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2+\dots+\alpha_n} g}{\partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\, dx =$$

(интегрируем по частям по переменной x_2)

$$= (-1)^{\alpha_1+\alpha_2} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \frac{\partial^{\alpha_3+\dots+\alpha_n} g}{\partial x_3^{\alpha_3} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\, dx =$$

(интегрируем по частям по x_3 по x_4 и, наконец, по x_n)

$$(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} g\, dx.$$

Получаем равенство

$$\int\limits_{\Omega} f(x) D^{|\alpha|} g(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} D^{\alpha} f g\, dx,$$

верное при любом фиксированном $g \in \overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|}(\Omega)$. По определению α - обобщенной производной функция $D^{\alpha} f$ есть α - обобщенная производная.

Замечание 4. Мы показали, что множество функций, имеющих α - обобщенные производные, не пусто. Например, функции класса $C^k(\Omega)$ имеют α - обобщенные производные для всех α таких, что $|\alpha| \leq k$. Функции класса $C^{\infty}(\Omega)$ имеют обобщенные производные при любом мультеиндексе α равные $D^{\alpha} f$.

Зафиксируем мультеиндекс $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. $D^{\alpha} f$ означает, что производная по x_1 берется α_1 раз, по x_2 - α_2 раз и т.д. Из анализа известно, что если соответствующие классические смешанные производные некоторого порядка m непрерывны, то эти производные не зависят от порядка дифференцирования.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае обобщенных производных.

Свойство 3. α - обобщенная производная зависит от мультеиндекса α и не зависит от порядка дифференцирования по пространственным переменным.

Доказательство. Пусть

$$f_1^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad f_2^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_2^{\alpha_2} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} -$$

две производные соответствующие одному α и вычисленные разными способами. Это значит, что

$$\int\limits_\Omega f \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega f_1^\alpha g\, dx \qquad \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|}(\Omega),$$

$$\int\limits_\Omega f \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x_2^{\alpha_2} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega f_2^\alpha g\, dx \qquad \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|}(\Omega),$$

и, так как левые части этих равенств равны, то

$$\int\limits_\Omega (f_1^\alpha - f_2^\alpha) g\, dx = 0 \qquad \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|}(\Omega).$$

Повторяя далее рассуждения, приведенные при доказательстве свойства 1, получим, что $f_1^\alpha = f_2^\alpha$ почти всюду в Ω.

Свойство 4. Пусть даны функции $f_i(x)$ класса $L_{2,loc}(\Omega)$, f_i^α - их соответственно α - обобщенные производные, C_i - постоянные, $i = 1, \dots k$. Тогда функция $f = \sum\limits_{i=1}^{k} C_i f_i$ имеет α- обобщенную производную f^α и $f^\alpha = \sum\limits_{i=1}^{k} C_i f_i^\alpha$.

Свойство 4 -линейность операции обобщенного дифференцирования.

Свойство 5. Пусть функция $f(x)$ имеет $\alpha =$ обобщенную производную $D^\alpha = \varphi$, а функция $\varphi(x)$ имеет β - обобщенную производную $D^\beta \varphi = \psi$. Тогда функция $f(x)$ имеет $\alpha + \beta$ - обобщенную производную $D^{\alpha+\beta} f = \psi$.

Доказательство. Пусть $g \in \overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|+|\beta|}(\Omega)$. Тогда $\int\limits_\Omega f D^{\alpha+\beta} g\, dx =$

$= \int\limits_\Omega f D^\alpha (D^\beta g)\, dx =$ (так как $D^\beta g \in \overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|}(\Omega)$ и f имеет обобщенную производную $D^\alpha f = \varphi$) $= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega \varphi D^\beta g\, dx =$ (так как φ имеет обобщенную производную $D^\beta\varphi = \psi) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\int\limits_\Omega \psi g\,dx = (-1)^{|\alpha+\beta|}\int\limits_\Omega \psi g\,dx.$

Пример 1. Пусть $f(x) = |x|$ и $\Omega = (-1;2) \subset E_1$. Найти обобщенную производную функции $f(x)$ по x.

Решение. Для любой функции $g \in \overset{\circ}{C}{}^1((-1;2))$ выполняются соотношения $\int\limits_{-1}^{2} |x|g'\,dx = -\int\limits_{-1}^{0} xg'\,dx + \int\limits_{0}^{2} xg'\,dx = -xg(x)|_{-1}^{0} + \int\limits_{-1}^{0} g\,dx + xg(x)|_0^2$ $-\int\limits_0^2 g\,dx =$ (первый и третий члены равны нулю) $= -\left(-\int\limits_{-1}^{0} g\,dx + \int\limits_0^2 g\,dx\right)$ $= -\int\limits_{-1}^{2} signxg\,dx.$

Таким образом, обобщенная производная

$$f' = signx = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 2. \end{cases}$$

Для обобщенных производных применяются те же обозначения, что и для классических производных.

Например,

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D^\alpha f(x) \qquad \text{при } \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n),$$

$$D_x^\alpha f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}, \qquad f_{x_1x_2}, \qquad \text{при } \alpha = (1,1,0,\ldots,0),$$

$$f_{x_ix_j} \qquad \text{при}\, \alpha = \ (0,\ldots,0,\ \overset{i}{1},\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \overset{j}{1},\ 0,\ldots,0)$$

Пример 2. Пусть $f(x) = |x_1|$, $x \in \Omega = \{x||x| < 1\}$, $\Omega_+ = \{x|\,|x| < 1, x_1 > 0\}$, $\Omega_- = \{x|\,|x| < 1, x_1 < 0\}$. Доказать, что $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = signx_1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, $i = 2,3,\ldots,n$.

Доказательство. $\int\limits_\Omega fg'_{x_1}\,dx = \int\limits_\Omega |x_1|g'_{x_1}\,dx = \int\limits_{\Omega_+} x_1g'_{x_1}\,dx - \int\limits_{\Omega_-} x_1g'_{x_1}\,dx$ $=$

$= \int\limits_{\partial\Omega_+} x_1 g(x)\cos nx_1\, ds - \int\limits_{\Omega_+} g\, dx - \int\limits_{\partial\Omega_-} x_1 g(x)\cos nx_1\, ds + \int\limits_{\Omega_-} g\, dx =$ (интегралы по поверхностям $\partial\Omega_-$, $\partial\Omega_+$ равны нулю) $= -\int\limits_{\Omega} sign x_1 g(x)\, dx\ \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^1(\Omega)$. Следовательно, $\dfrac{\partial|x_1|}{\partial x_1} = sign x_1$.

Далее, $\int\limits_{\Omega} f g_{x_j}\, dx = \int\limits_{\Omega} |x_1| g_{x_j}\, dx = \int\limits_{\Omega} \dfrac{\partial}{\partial x_j}|x_1| g(x)\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} |x_1| g(x)\cos nx_j\, ds = 0 = -\int\limits_{\Omega} o\cdot g\, dx\ \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^1(\Omega)$. По определению обобщенной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = 0$, $j = 2, 3, \ldots, n$.

Пример 3. Пусть $f(x) = sign x_1$, $x \in \Omega$. Доказать, что производная f'_{x_1} не существует, а производные $f'_{x_i} = 0$, $j = 2, 3, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть $j > 1$. $\int\limits_{\Omega} sign x_1 g_{x_j}\, dx = \int\limits_{\Omega} \dfrac{\partial}{\partial x_j}(sign x_1 g(x))\, dx$ $= \int\limits_{\Omega} \dfrac{\partial}{\partial x_j} sign x_1 g(x)\cos(nx_j)\, ds = 0 = \int\limits_{\Omega} 0\cdot g(x)\, dx$. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(sign x_1) = 0, \qquad j = 2, \ldots, n.$$

Докажем,что производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ не существует. Через D обозначим сечение шара Ω плоскостью $x_1 = 0$. Предположим, что существует обобщенная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \varphi(x)$, $\varphi(x) \in L_{2,loc}(\Omega)$. Из этого предположения следует, что

$$\int\limits_{\Omega} sign x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} dx = (-1)\int\limits_{\Omega} \varphi(x) g(x)\, dx \qquad \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^1(\Omega). \tag{8.2}$$

Замечание 5. Вспомним, что имеет место вложение $\overset{\circ}{C}{}^1(\Omega_\pm) \subset \overset{\circ}{C}{}^1(\Omega)$. Пусть $g(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1(\Omega_+)$. Из (8.2) имеем

$$\int\limits_{\Omega} sign x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} dx = \int\limits_{\Omega_+} sign x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} dx = \int\limits_{\partial\Omega_+} g(s)\cos(n, x_1)\, ds = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega_+} \varphi(x) g(x)\, dx = 0 \qquad \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^1 (\Omega_+). \tag{8.3}$$

Аналогично доказывается, что

$$\int\limits_{\Omega_-} \varphi(x) g(x)\, dx = 0 \qquad \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^1 (\Omega_-). \tag{8.4}$$

Из (8.3), (8.4) следует, что

$$(\varphi, g)_{L_2(\Omega_+)} = 0 \qquad \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^1 (\Omega_+),$$

$$(\varphi, g)_{L_2(\Omega_-)} = 0 \qquad \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^1 (\Omega_-).$$

Так как пространства $\overset{\circ}{C}{}^1 (\Omega_+)$, $\overset{\circ}{C}{}^1 (\Omega_-)$ плотны соответсвенно в $L_2(\Omega_+)$, $L_2(\Omega_-)$ то (см. замечание 3) $\varphi = 0$ почти всюду в Ω_+ и в Ω_- и, следовательно, в Ω (лебегова мера D равна нулю). Из (8.2) и равенства нулю функции $\varphi(x)$ почти всюду в Ω

$$\int\limits_{\Omega} sign x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}\, dx = 0 \qquad \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^1 (\Omega).$$

Отсюда

$$0 = \int\limits_{\Omega} sign x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}\, dx = \int\limits_{\Omega_+} \frac{\partial g}{\partial x_1}\, dx - \int\limits_{\Omega_-} \frac{\partial g}{\partial x_1}\, dx = \int\limits_{\partial\Omega_+} g(s) \cos(n, x_1)\, ds -$$

$$- \int\limits_{\partial\Omega_-} g(s) \cos(n, x_1)\, ds = - \int\limits_{D} g(s)\, ds - \int\limits_{D} g(s)\, ds = -2 \int\limits_{D} g(s)\, ds \quad \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^1 (\Omega).$$

В силу произвольного выбора функции $g \in \overset{\circ}{C}{}^1 (\Omega)$ мы получили противоречие.

9. Пространства Соболева $H^l(\Omega)$

Пусть $l \geq 1$ - целое.

Определение. $H^l(\Omega)$ - линейное пространство функций, имеющих все обобщенные производные до порядка l включительно, суммируемые с квадратом.

Данное определение кратко можно записать так:

$$H^l(\Omega) = \{u | D^\alpha u \in L_2(\Omega) \ \forall \alpha, |\alpha| \leq l\}. \tag{9.1}$$

Скалярное произведение в $H^l(\Omega)$ задаётся соотношением

$$(f, g)_{H^l(\Omega)} = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha| \leq l} D^\alpha f D^\alpha g \, dx. \tag{9.2}$$

В частности скалярное произведение в $H^1(\Omega)$ есть

$$\begin{aligned} (f, g)_{H^1(\Omega)} &= \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{1} D^\alpha f D^\alpha g \, dx = \\ &= \int\limits_\Omega \left(fg + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx = \int\limits_\Omega (fg + \nabla f \nabla g) \, dx. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Норма в $H^l(\Omega)$ есть

$$\|f\|_{H^l(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha| \leq l} (D^\alpha f)^2 \, dx \right)^{1/2}. \tag{9.4}$$

Теорема 1. $H^l(\Omega)$ - гильбертово пространство.

Доказательство. Нетрудно доказать, что (9.2) есть скалярное произведение. Докажем, что пространство $H^l(\Omega)$ полное по норме (9.4), порожденной скалярным произведением (9.2). Последнее означает, что всякая фундаментальная по норме (9.4) последовательность $\{u_m\}_{m=1}^\infty \in H^l(\Omega)$ сходится по этой норме к некоторому элементу $u \in H^l(\Omega)$.

Пусть $\{u_m\}_{m=1}^\infty \in H^l(\Omega)$ и $\forall \varepsilon > 0$ существует N такое, что

$\|u_k - u_s\|_{H^l(\Omega)} < \varepsilon \;\forall\, k, s > N.$

$$\|u_k - u_s\|^2_{H^l(\Omega)} = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\le l} (D^\alpha(u_k - u_s))^2\,dx = \sum_{|\alpha|\le l} \int\limits_\Omega (D^\alpha(u_k - u_s))^2\,dx =$$

$$\sum_{|\alpha|\le l} \int\limits_\Omega (D^\alpha u_k - D^\alpha u_s))^2\,dx = \sum_{|\alpha|\le l} \|D^\alpha u_k - D^\alpha u_s\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{9.5}$$

Вспомним, что

$$(f,g)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega fg\,dx, \qquad \|f\|_{L_2(\Omega)} = \big(f^2\,dx\big)^{1/2}$$

Из (9.5) следует, что $\|D^\alpha u_k - D^\alpha u_s\|^2_{L_2(\Omega)} < \varepsilon \;\; \forall\, k, s > N$, при всех α таких, что $|\alpha| \le l$. Следовательно, последовательность

$$\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty \text{ является фундаментальной в } L_2(\Omega)\,\forall\,\alpha\;\; |\alpha| \le l. \tag{9.6}$$

В частности, последовательность $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ также фундаментальна в $L_2(\Omega)$. Из (9.6) следует, что в силу полноты пространства $L_2(\Omega)$ существует элемент $u^\alpha \in L_2(\Omega)$ такой, что

$$\|D^\alpha u_m - u^\alpha\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{9.7}$$

В частности, существует элемент $u \in L_2(\Omega)$ такой, что

$$\|u_m - u\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{9.8}$$

Так как из сильной сходимости следует слабая сходимость, то $(\varphi, u_m)_{L_2(\Omega)} \to (\varphi, u)_{L_2(\Omega)}$, $m \to \infty \;\forall\,\varphi \in L_2(\Omega)$. Аналогично для любого α, $\alpha \le l$, $(\varphi, D^\alpha u_m)_{L_2(\Omega)} \to (\varphi, u^\alpha)_{L_2(\Omega)}$, $m \to \infty \;\forall\,\varphi \in L_2(\Omega)$.

Покажем, что u^α есть α - обобщенная производная функции u. Пусть $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. По определению

$$\int\limits_\Omega u_m D^\alpha g\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega g D^\alpha u_m\,dx \qquad \forall\,\alpha\,:\,|\alpha| \le l. \tag{9.9}$$

Перейдем в (9.9) к пределу при $m \to \infty$. Получим

$$\int\limits_\Omega u D^\alpha g\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega g u^\alpha\,dx \qquad \forall\,g \in \overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|}(\Omega)\,|\alpha| \le l. \tag{9.10}$$

Из (9.10) следует, что функция u имеет все обобщенные производные $D^\alpha u$ до порядка l включительно и $D^\alpha u = u^\alpha$, $|\alpha| \le l$.

Мы доказали, что $u \in H^l(\Omega)$.

10. След функций из $H^1(\Omega)$

Пусть Ω - область в пространстве E_n, $l \subset \Omega$ - фиксированная гладкая гиперповерхность размерности $n-1$ и $f(x)$ - функция, заданная в каждой точке $x \in \Omega$. Мы можем рассматривать функцию $f(x)$ только в точках $x \in l$ и, таким образом, можем получить функцию $F(x)$, заданную только на l: $D(F) = l$, $F(x) = f(x)$, $x \in l$. Будем называть$F(x)$ сужением $f(x)$ на l.

Если функция $f(x)$ определена почти всюду на Ω, то она определяется неоднозначно на l (или вообще неопределена), так как l имеет n-мерную меру Лебега равную нулю.

При постановке краевых задач требуется задавать значения неизвестных функций, их производных на некоторых $(n-1)$-мерных фиксированных гиперповерхностях, в частности, на границе области, в которой требуется найти решение (граничные условия, начальные данные). Если мы ищем решение в классах Соболева, то функции принадлежащие этим классам, вообще говоря, определены почти всюду на $\overline{\Omega}$ и так как $\partial\Omega$ имеет n-мерную меру Лебега равную нулю, то на $\partial\Omega$ они могут определяться неоднозначно.

Встаёт задача, что понимать под значением функций класса $H^k(\Omega)$, $k \ge 1$, на l. Эта задача решается введением понятия следа функции u класса $H^1(\Omega)$ на $l \in \overline{\Omega}$. В частности, в качестве l можно рассматривать границу $\partial\Omega$ (или её некоторые части) области Ω.

Определение. Следом $f|_l$ функции $f \in C(\overline{Q})$ на $(n-1)$-мерной поверхности l назовём функцию, определённую на l и почти всюду на l совпадающую с f в смысле $(n-1)$ - мерной меры, в частности, сужение F функции $f \in C(\overline{\Omega})$ на l и любая п.в. (в смысле $(n-1)$-мерной меры Лебега) на l совпадающая с F функция является следом функции f на l.

Введем понятие следа функции класса $H^k(\Omega)$ на l. Так как $H^k(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ при $k \geq 1$, то понятие следа достаточно ввести при $k = 1$.

Пусть l - гиперповерхность класса C^1, лежащая в $\overline{\Omega}$. Можно доказать [14] (гл.III, §5), что для произвольной функции $u(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ имеет место неравенство

$$\|u|_l\|_{L_2(l)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}. \tag{10.1}$$

В (10.1) $\|u|_l\|_{L_2(l)}$ есть норма в $L_2(l)$ следа функции $u \in C^1(\overline{\Omega})$ на l, постоянная C не зависит от u, а зависит лишь от области Ω и гиперповерхности l.

Рассмотрим $u \in H^1(\Omega)$. Из теоремы 1 следует существование последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, $u_k \in C^1(\overline{\Omega})$, такой что,

$$\|u - u_k\|_{H^1(\Omega)} \to 0, \qquad k \to \infty. \tag{10.2}$$

Так как $u_m - u_p \in C^1(\overline{\Omega})$, то в силу (10.1)

$$\|u_m|_l - u_p|_l\|_{L_2(l)} \leq C\|u_m - u_p\|_{H^1(\Omega)}. \tag{10.3}$$

Из (10.2), (10.3) следует, что

$$\|u_m|_l - u_p|_l\|_{L_2(l)} \to 0, \qquad m, p \to \infty. \tag{10.4}$$

Из (10.4) следует, что последовательность следов $\{u_k|_l\}_{k=1}^{\infty}$ функций u_k на гиперповерхности l фундаментальна в $L_2(l)$, и в силу полноты пространства $L_2(l)$ существует функция $u_l \in L_2(l)$, такая что

$$u_k|_l \to u_l \ \text{сильно в}\, L_2(l)\, \text{при}\, m \to \infty. \tag{10.5}$$

Переходя в (10.3) к пределу при $p \to \infty$, получим неравенство

$$\|u_m - u_l\|_{L_2(l)} \leq C\|u_m - u\|_{H^1(\Omega)}. \tag{10.6}$$

Определение. Функцию $u_l \in L_2(l)$ будем называть следом функции $u \in H^1(\Omega)$ на поверхности l и обозначается через $u|_l$.

Замечание. Обозначение $u|_l$ подчеркивает, что мы имеем дело не с сужением функции u на l, а именно со следом функции $u \in H^1(\Omega)$ на гиперплоскости l.

Покажем, что след $u|_l$ функции $u \in H^1(\Omega)$ определяется однозначно: его определение не зависит от выбора сходящейся к u в $H^1(\Omega)$ последовательности $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, $u_m \in C^1(\overline{\Omega})$. Действительно, пусть $\{\widetilde{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ - другая последовательность в $C^1(\overline{\Omega})$, сходящаяся сильно в $H^1(\Omega)$ к u:

$$\|\widetilde{u}_m - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0, \qquad m \to \infty, \tag{10.7}$$

и $\widetilde{u}_l$ - след функции u, определяемый по последовательности $\{\widetilde{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$. Тогда в силу (10.3), (10.6)

$$\|u_l - \widetilde{u}_l\|_{L_2(l)} \leq \|u_l - u_m\|_{L_2(l)} + \|u_m - \widetilde{u}_m\|_{L_2(l)} + \|\widetilde{u}_m - \widetilde{u}_l\|_{L_2(l)} \leq$$

$$\leq C(\|u - u_m\|_{H^1(\Omega)} + \|u_m - \widetilde{u}_m\|_{H^1(\Omega)} + \|\widetilde{u}_m - u\|_{H^1(\Omega)}).$$

Так как в силу (10.2), (10.7) правая часть последнего неравенства при $m \to \infty$ стремится к нулю, то $\|u_l - \widetilde{u}_l\|_{L_2(l)} = 0$. Отсюда следует, что $u_l = \widetilde{u}_l$.

Так как в силу (10.1)

$$\|u_k|_l\|_{L_2(l)} \leq C\|u_k\|_{H^1(\Omega)},$$

то переходя в последнем неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим в силу (10.2), (10.5) неравенство

$$\|u|_l\|_{L_2(l)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}, \qquad u \in H^1(\Omega). \tag{10.8}$$

Доказана следующая

Теорема 1. Пусть $(n-1)$ -мерная поверхность l класса C^1 принадлежит $\overline{\Omega}$ и $\partial\Omega \in C^1$. Тогда любая функция $u \in H^1(\Omega)$ имеет след $u|_l \in L_2(l)$ и выполняется неравенство (10.8).

Замечание. Выше при доказательстве теоремы 1 мы предполагали, что $\partial\Omega \in C^1$, что связано с доказательством неравенства (10.1) для функций класса $C^1(\overline{\Omega})$. Если $l \Subset \Omega$, условие принадлежности $\partial\Omega$ классу C^1 можно опустить в этом случае имеет место

Теорема 2. Пусть $(n-1)$ -мерная поверхность l класса C^1 принадлежит $\widetilde{\Omega}$, $\widetilde{\Omega} \Subset \Omega$. Тогда любая функция $u \in H^1(\Omega)$ имеет след $u|_l \in L_2(l)$ и выполняется неравенство (10.8).

11. Формула интегрирования по частям для функций класса $H^1(\Omega)$

Пусть Ω - ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^1$ и $f(x), g(x)$ - функции класса $C^1(\overline{\Omega})$. Из Анализа известна формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} f g \cos(nx_i) d\gamma - \int\limits_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx. \tag{11.1}$$

Рассмотрим функции $f(x), g(x) \in H^1(\Omega)$. Тогда (по теореме 1) существуют Последовательности $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{g_m\}_{m=1}^{\infty} \in C^1(\overline{\Omega})$ такие, что при $m \to \infty$

$$f_m \to f, \qquad g_m \to g \qquad \text{сильно в}\, H^1(\Omega). \tag{11.2}$$

Из (11.2) следует (см. неравенство (10.8))

$$f_m|_S \to f|_S, \qquad g_m|_S \to g|_S \qquad \text{в }\ L_2(\partial\Omega). \tag{11.3}$$

Функции $f_m(x), g_m(x)$ как функции класса $C^1(\overline{\Omega})$ удовлетворяют соотношениям

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} g_m\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} f_m g_m \cos(nx_i) d\gamma - \int\limits_{\Omega} f_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i}\, dx. \tag{11.4}$$

Докажем, что

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} g_m\, dx \to \int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g\, dx \tag{11.5}$$

при $m \to \infty$. Запишем соотношння

$$\left| \int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g\, dx - \int\limits_{\Omega} g_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\, dx \right| \le \int\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |g - g_m| dx$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial f_m}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |g_m| dx \le (\text{ по неравенству Коши-Буняковского}) \le$$

$$\left(\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Omega}(g-g_m)^2\,dx\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}-\frac{\partial f_m}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Omega}(g_m)^2 dx\right)^{1/2}\leq$$

$$\|f\|_{H^1(\Omega)}\cdot\|g-g_m\|_{H^1(\Omega)}+\|g_m\|_{H^1(\Omega)}\|f-f_m\|_{H^1(\Omega)}.$$

Так как множество $\{\|g_m\|_{H^1(\Omega)}\}$ ограничено, то правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $m\to 0$ и, следовательно, выполняется соотношение (11.5).

Покажем, что при $m\to 0$

$$\int\limits_{\partial\Omega} f_m g_m\cos(\overline{n},x_i)\,d\gamma\to\int\limits_{\partial\Omega} f|_{\partial\Omega}g|_{\partial\Omega}\cos(\overline{n},x_i)\,d\gamma. \qquad (11.6)$$

Это следует из соотношений

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega} f|_{\partial\Omega}g|_{\partial\Omega}\cos(\overline{n},x_i)\,d\gamma-\int\limits_{\partial\Omega} f_m g_m\cos(\overline{n},x_i)\,d\gamma\right|\leq$$

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left|f|_{\partial\Omega}g|_{\partial\Omega}-f_m|_{\partial\Omega}g_m|_{\partial\Omega}\right|\,d\gamma\leq\int\limits_{\partial\Omega}|f_{\partial\Omega}|\left|g|_{\partial\Omega}-g_m|_{\partial\Omega}\right|\,d\gamma+$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega}|g_m|_{\partial\Omega}|\left|f|_{\partial\Omega}-f_m|_{\partial\Omega}\right|\,d\gamma\leq$$

$$\leq(\text{ неравенство Коши-Буняковского })\leq$$

$$\leq\left(\int\limits_{\partial\Omega}\left(f|_{\partial\Omega}\right)^2\,d\gamma\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\partial\Omega}\left(g|_{\partial\Omega}-g_m\right)^2\,d\gamma\right)^{1/2}+$$

$$\left(\int\limits_{\partial\Omega} \left(f|_{\partial\Omega} - f_m|_{\partial\Omega}\right)^2\, d\gamma\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\partial\Omega} \left(g_m\right)^2\, d\gamma\right)^{1/2} =$$

$$= \|f|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)}\|g|_{\partial\Omega} - g_m|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)} + \|g_m|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)}\|f_m|_{\partial\Omega} - f|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)} \le$$

$$\le C\{\|f\|_{H^1(\Omega)}\|g - g_m\|_{H^1(\Omega)} + \|g_m\|_{H^1(\Omega)}|f_m - f\|_{H^1(\Omega)}\} \le$$

$$C_1(\|g - g_m\|_{H^1(\Omega)} + |f_m - f\|_{H^1(\Omega)}). \tag{11.7}$$

В силу (11.2) правая часть (11.7) стремится к нулю при $m \to \infty$. Следовательно, имеет место соотношение (11.6).

Доказательство того факта, что

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial g_m}{\partial x_i} f_m\, dx \to \int\limits_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x_i} f\, dx \tag{11.8}$$

при $m \to \infty$. аналогично доказательству соотношения (11.5).

Из (11.5), (11.6), (11.8) следует, что формула (11.1) верна для функций $f, g \in H^1(\Omega)$. В этом случае ее можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} f|_{\partial\Omega} \cdot g|_{\partial\Omega} \cos(nx_i) d\gamma - \int\limits_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx. \tag{11.9}$$

Замечание. В случае, когда $f \in H^1(\Omega)$, $g \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ (или $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$) из (11.1) следует равенство

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g\, dx = -\int\limits_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx. \tag{11.10}$$

12. Первая краевая задача для эллиптического уравнения. Теорема существования и единственности

Пусть $\Omega \subset E_n$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^1$.

Первая краевая задача

Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a(x)u = f(x) \tag{12.1}$$

и краевые условия

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{12.2}$$

Относительно коэффициентов уравнения (12.1) предположим, что

$$0 < k_0 \le k(x) \le K, \tag{12.3}$$

$$0 \le a(x) \le A, \tag{12.4}$$

функции $k(x)$, $a(x)$ измеримы по Лебегу в Ω, k_0, K, A - постоянные,

$$f(x) \in L_2(\Omega). \tag{12.5}$$

Определение. Функция $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ называется обобщенным решением класса $H^1(\Omega)$ задачи (12.1), (12.2), если

$$(u,v) \equiv \int\limits_{\Omega} k(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int\limits_{\Omega} auv\,dx = \int\limits_{\Omega} fv\,dx \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{12.6}$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (12.3) - (12.5). Тогда задача (12.1), (12.2) имеет единственное решение в классе $H^1(\Omega)$.

Доказательство. В силу (12.3), (12.4) билинейная форма $((u,v))$ есть скалярное произведение в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, порождающее норму $\|u\|_1 = ((u,u))^{1/2}$ эквивалентную исходной в $H^1(\Omega)$ норме $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega}(u^2 + |\nabla u|^2)\,dx\right)^{1/2}$. Наше доказательство основано на теореме Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

Теорема (Рисс). Линейный непрерывный функционал F в гильбертовом пространстве H представим в виде $F(w) = (w,z)\,\forall w \in H$, где $z \in H$. При этом элемент z определяется единственным образом и $\|F\| = \|z\|$.

Рассмотрим функционал

$$F(v) = \int_\Omega f v\, dx. \tag{12.7}$$

Здесь $f(x) \in L_2(\Omega)$, $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Ясно, что $F(v)$ определен при любых $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Очевидна линейность функционала F. Докажем его непрерывность. Справедливы соотношения

$$|F(u)| = \left| \int\limits_\Omega f u\, dx \right| \leq (\text{ неравенство Шварца }) \leq$$

$$\|f\| \cdot \|u\| \leq \|f\| \cdot \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq$$

$$\leq \text{ (в силу эквивалентности норм } \|\cdot\|_{H^1(\Omega)} \text{ и } \|\cdot\|_1) \leq C\|f\| \cdot \|u\|_1.$$

Отметим, что мы рассматриваем $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ с нормой $\|\cdot\|_1$ и скалярным произведением $((\cdot,\cdot))_1$. Доказано неравенство

$$|F(u)| \leq C\|f\| \cdot \|u\|_1.$$

Откуда $\|F\| \leq C\|f\|$. Функционал F ограничен, следовательно, он непрерывен, и по теореме Рисса существует единственный элемент $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ такой, что $F(v) = ((u,v))$ $\forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ или

$$\int\limits_\Omega k(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int\limits_\Omega a u v\, dx = \int\limits_\Omega f v\, dx \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega).$$

Теорема 1 доказана.

Вторая краевая задача

Пусть на $\partial\Omega$ задано второе краевое условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{12.8}$$

Рассмотрим в области Ω вторую краевую задачу (12.1), (12.8). Считаем, что коэффициент $k(x)$ удовлетворяет условию (12.3), функция $f(x)$ - условию (12.5). Относительно $a(x)$ предположим, что

$$0 < a_0 \le a(x) \le A, \qquad a_0 - const. \tag{12.9}$$

Рассмотрим краевую задачу (12.1), (12.8) при условиях (12.3), (12.5), (12.9).

Определение. Элемент класса $H^1(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи (12.1), (12.8) в классе $H^1(\Omega)$, если соотношения (12.6) выполняются при всех $v(x) \in H^1(\Omega)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (12.3), (12.5), (12.9), тогда задача (12.1), (12.8) имеет единственное решение в классе $H^1(\Omega)$.

Доказательство. В силу (12.3), (12.9) билинейная форма $((u, v))$ в (12.6) порождает на $H^1(\Omega)$ скалярное произведение $((u, v))$ эквивалентное исходному скалярному произведению $(u, v)_{H^1(\Omega)}$ в $H^1(\Omega)$. Функционал $F(v) = \int\limits_{\Omega} fv\,dx$ - линейный и ограниченный на $H^1(\Omega)$ (ограниченность следует из соотношений $|F(v)| \le \|f\| \cdot \|v\| \le C\|f\| \cdot \|v\|_1$, $\|v\|_1 = ((v, v))^{1/2}$. Далее применяем теорему Рисса.

13. Метод Галеркина для эллиптического уравнения

Рассмотрим в пространстве $H^1(\Omega)$ счетную систему элементов

$$w_1(x), w_2(x), \ldots, w_m(x), \ldots. \tag{13.1}$$

Определение. Система (13.1) называется базисом в $H^1(\Omega)$, если выполняются следующие условия:

1) любая конечная система элементов этой системы линейно независима;

2) каждый элемент $u(x) \in H^1(\Omega)$ с любой наперед заданной точностью может быть приближен в норме $H^1(\Omega)$ линейной комбинацией элементов из (13.1).

Замечание. Второе условие означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon, u)$ и постоянные $C_1, C_2, \dots, C_N$ такие, что

$$\|u - \sum_{i=1}^{N} C_i w_i\|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon.$$

Первая краевая задача

Рассмотрим задачу (12.1), (12.2) при выполнении условий (12.3) - (12.5).

13.1. Построение галеркинских приближений

Элемент

$$u^m(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i w_i(x) \tag{13.2}$$

называется n-ым галеркинским приближением решения задачи (12.1), (12.2) в классе $H^1(\Omega)$, если постоянные $c_i, i = 1, \dots, m$, удовлетворяют соотношениям

$$((u^m, w_j)) = (f, w_j), \qquad j = 1, \dots, m. \tag{13.3}$$

Напомним, что $(f, w_j) = \int\limits_\Omega f w_j \, dx$ - скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $((u, v)) = \int\limits_\Omega \left(k \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + auv \right) dx$ - скалярное произведение в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ эквивалентное исходному скалярному произведению

$((u, v))_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \left(uv + \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i} v_{x_j} \right) dx$ в $H^1(\Omega)$ (и в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$).

Покажем, что (13.3) есть система линейных алгебраических уравнений размерности n. Действительно, в случае когда базис (13.1) ортонормирован по норме $\| \cdot \|_1 = ((\cdot, \cdot))$

$$((u^m, w_j)) = \sum_{i=1}^{m} ((c_i w_i, w_j)) = \sum_{i=1}^{m} c_i ((w_i, w_j)) = c_j.$$

В случае неортонормированной системы (13.1)

$$((u^m, w_j)) = ((\sum_{i=1}^{m} c_i w_i, w_j)) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} c_i, \quad \alpha_{ij} = (w_i, w_j),$$

и мы имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} c_i = f_j, \qquad j = 1, \dots, m, \tag{13.4}$$

где $f_j = (f_i, w_j)$.

Докажем, что при любом фиксированном $n \geq 1$ система (13.4) имеет единственное решение.

Из алгебры известна [9]

Теорема 1. Неоднородная система $Ac = b$ линейных алгебраических уравнений однозначно разрешима при любом b тогда и только тогда, когда однородная система $Ac = 0$ имеет лишь нулевое решение.

В теореме, сформулированной выше, мы рассматриваем систему n линейных уравнений с n неизвестными. A - числовая матрица размерности $n \times n$, b - заданный, c - искомый векторы размерности n.

Рассмотрим систему (13.4) при $f_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, и пусть $c = (c_1, \dots, c_n)$ - её решение:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} c_i = 0, \qquad j = 1, \dots, m. \tag{13.5}$$

Из (13.5) имеем соотношения

$$\sum_{i=1}^{m} c_i((w_i, w_j)) = ((\sum_{i=1}^{m} c_i w_i, w_j)) = ((v^m, w_j)), j = 1, \dots m.$$

Умножая последние соотношения на c_j и суммируя результат умножения по j от 1 до m, получим равенство $((v^m, v^m)) = 0$. Отсюда $\|v^m\|_1 = 0$ и $v^m = 0$, то есть $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i w_i = 0$. Так как элементы базиса $w_1, \dots, w_m$ линейно независимы, то $c_i = 0$, $i = 1, \dots, m$. На основании теоремы 1 заключаем, что система (13.4) имеет единственное решение при любых m и любых $f_1, \dots, f_m$.

Ниже через $c^m = (c_1^m, \dots, c_m^m)$ будем обозначать решение системы (13.4).

13.2. Априорная оценка

Ниже мы оценим всю совокупность галеркинских приближений. Пусть u^m - m-е галеркинское приближение. Умножая (13.3) на c_j^m и суммируя результаты по $j = 1, \dots, m$, получим соотношение

$$((u^m, u^m)) = (f, u^m).$$

Так как

$$|(f,u^m)| \le \|f\| \cdot \|u^m\| \le \|f\| \cdot \|u^m\|_{H^1(\Omega)} \le$$

$$\le (\text{в силу эквивалентности норм } \|\cdot\|_1 \text{ и } \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}) \le$$

$$\le C\|f\| \cdot \|u^m\|_1.$$

Отсюда

$$\|u^m\|_1^2 \le C\|f\| \cdot \|u^m\|_1. \tag{13.6}$$

Если $\|u^m\|_1 \ne 0$, то после деления (13.6) на $\|u^m\|_1$, получим

$$\|u^m\|_1 \le C\|f\|. \tag{13.7}$$

Если $u = 0$, то, очевидно, (13.7) имеет место. Из (13.7) следует, что множество галеркинских прилижений $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ ограничено в $H^1(\Omega)$.

Определение. Множество $M \subset H$ называется слабо компактным в H, если существует последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M$ такая, что $x_k \to x \in H$ при $k \to \infty$ слабо в H.

Определение. Последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \to x \in H$ слабо, если

$$\lim_{k\to\infty} T(x_k) = T(x) \qquad \forall T \in H^*.$$

Здесь H^* - пространство линейных непрерывных функционалов над H (H^* - сопряженное к H пространство).

Имеет место [14]

Теорема 2(о слабой компактности). Всякое ограниченное бесконечное множество M в гильбертовом пространстве H слабо компактно.

Так как $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ - гильбертово пространство, то по теореме о слабой компактности существует подпоследовательность $\{u^{m_k}\}$ последовательности $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$, которая слабо сходится к $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$: $u^{m_k} \overset{\text{слабо}}{\longrightarrow} u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. По теореме Рисса $((u,w)) = T(u)$ есть линейный непрерывный функционал по u и любом фиксированном w. Следовательно, при $m_k \to \infty$

$$((u^{m_k}, w)) \to ((u,w)) \qquad \forall w \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{13.8}$$

Покажем, что $u(x)$ - обобщенное решение задачи (12.1), (12.2).

Ясно, что $u(x)$ удовлетворяет условию (12.2), так как $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и, следовательно, $u|_{\partial\Omega} = 0$. Здесь $u|_{\partial\Omega}$ - след $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ на $\partial\Omega$.

Из (13.3) следует, что при фиксированном k

$$((u^{m_j}, w_k)) = (f, w_k) \qquad \forall m_j \geq k.$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$ получим, что

$$((u, w_k)) = (f, w_k) \qquad \forall k \geq 1. \tag{13.9}$$

Пусть $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ - произвольный элемент. Так как $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ - базис, то существует последовательность $\{v^m\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что $v^m = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j^m w_j$ и

$$v^m \to v \qquad \text{сильно в } \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{13.10}$$

Умножим (13.9) на c_k^m и просуммируем результат по k от 1 до m. Получим соотношение

$$((u, v^m)) = (f, v^m),$$

переходя в котором к пределу при $m \to \infty$, получим соотношение

$$((u, v)) = (f, v) \qquad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{13.11}$$

Следовательно, $u(x)$ - решение задачи (12.1), (12.2) класса $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Докажем единственность решения задачи (12.1), (12.2) класса $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$ - два решения задачи (12.1), (12.2) класса $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Функция $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$((u, v)) = 0 \qquad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega).$$

При $u = v$ получим, что $((u, u)) = \|u\|_1^2 = 0$. Отсюда следует, что $u = 0$ и $u_1 = u_2$ почти всюду в Ω.

Докажем, что $u^m \to u$ сильно в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \|u - u^n\|_1 = 0$.

Пусть S_k - подпространство, натянутое на первые k $(k \geq 1)$ элементов базиса (13.1). Имеют место соотношения

$$((u^m, w)) = (f, w) \qquad \forall\, w \in S_k, \quad k \leq m, \tag{13.12}$$

$$((u, w))_1 = (f, w) \qquad \forall w \in \overset{\circ}{H}{}^1 (\Omega). \tag{13.13}$$

Пусть $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ - последовательность элементов из $\overset{\circ}{H}{}^1$ (Ω) такая, что $v_m \in S_m$ и

$$\lim_{m\to\infty} \|u - v_m\|_1 = 0. \tag{13.14}$$

Отметим, что существование такой последовательности $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ следует из второго свойства базиса (13.1).

Вычитая из соотношения (13.13) соотношение (13.12) и взяв в полученном соотношении $w = v_m - u^m$, получим равенство

$$((u - u^m, v_n - u^m)) = 0. \tag{13.15}$$

Преобразуем равенство (13.15):

$$0 = ((u - u^m, v_m - u^m)) = ((u - u^m, u - u^m)) + ((u - u^m, v_m - u)).$$

Отсюда

$$\|u - u^m\|_1^2 = ((u - u^m, u - u^m)) \leq \|u - u^m\|_1 \cdot \|u - v_m\|_1. \tag{13.16}$$

Так как $\|u - u^m\|_1 \leq \|u\|_1 + \|u^m\|_1 \leq C \;\; \forall m \geq 1$ и выполняется соотношение (13.14), то из (13.16) следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \|u - u^m\|_1 = 0.$$

Нами доказана

Теорема 2. Пусть выполняются условия (12.3) - (12.5). Тогда последовательность галеркинских приближений $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к элементу $u \in \overset{\circ}{H}{}^1$ (Ω) сильно в $H^1(\Omega)$, элемент u есть решение задачи (12.1), (12.2) класса $H^1(\Omega)$. Решение задачи (12.1), (12.2) в классе $H^1(\Omega)$ единственно.

Вторая краевая задача

Рассмотрим уравнение (12.1) с краевыми условиями

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{13.17}$$

В (13.17) $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u(\xi)}{\partial x_i} \cos(n, x_i)$ - производная по нормали n (внешняя) к $\partial\Omega$ в точке $\xi \in \partial\Omega$.

Считаем, что выполняются условия (12.3), (12.5), (12.9) и $\partial\Omega \in C^1$.

Определение. Элемент $u \in H^1(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи (12.1), (13.17) класса $H^1(\Omega)$, если соотношения

$$\int\limits_{\Omega} (k\nabla u \nabla v + auv)\, dx = \int\limits_{\Omega} fv\, dx \tag{13.18}$$

выполняются для любого $v \in H^1(\Omega)$.

Обозначим через $((u, v))$ левую часть в (13.18). Тогда тождество (13.18) примет вид

$$((u, v)) = (f, v) \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{13.19}$$

В силу (12.3), (12.9) норма $\|u\|_1 = ((u, u))^{1/2}$ эквивалентна исходной норме $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} (u^2 + |\nabla u|^2)\, dx\right)^{1/2}$ в $H^1(\Omega)$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (12.3), (12.5), (12.9). Тогда последовательность галеркинских приближений $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к элементу $u \in H^1(\Omega)$ сильно в $H^1(\Omega)$, элемент u есть решение задачи 12.1), (13.17) класса $H^1(\Omega)$. Решение задачи (12.1), (13.17) в классе $H^1(\Omega)$ единственно.

Доказательство теоремы 3 в основном повторяет доказательство теоремы 2 и состоит из слудующих этапов:

1. Построение галеркинских приближений. Пусть $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ - базис в $H^1(\Omega)$ и $u^m(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j^m w_j$ - n-ое галеркинское приближение, если постоянные c_j^m, $j = 1, \ldots m$, являются решением системы

$$((u^m, w_j)) = (f, w_j), \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{13.20}$$

Доказывается, что система (13.20) имеет решение при любых $f \in L_2(\Omega)$.

2. Ограниченность $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ в $H^1(\Omega)$. Аналогично первой краевой задачи доказвается, что

$$\|u^m\|_1 \leq C.$$

3. Доказательство существования решения задачи (12.1), (13.17) класса $H^1(\Omega)$.

4. Единственность решения задачи (12.1), (13.17) класса $H^1(\Omega)$.

5. Сильная сходимость u^m к u в норме $H^1(\Omega)$.

Замечание. Третью краевую задачу можно решать методом Галеркина аналогично решению первой (второй) краевой задаче. Здесь соответственным образом выбирается скалярное произведение эквивалентное исходному скалярному произведению в $H^1(\Omega)$.

14. Проблема минимума квадратичного функционала и краевые задачи

Рассмотрим пространство $H^1(\Omega)$ и подпространство $\hat{H}(\Omega)$ пространства $H^1(\Omega)$. Пусть $((\cdot,\cdot))$, $\|\cdot\|_1$ - скалярное произведение и норма в $\hat{H}(\Omega)$. Предположим, что норма $\|\cdot\|_1$ эквивалентна исходной норме в пространстве $H^1(\Omega)$: $\|u\|_1 \sim \|u\|_{H^1(\Omega)}$. Рассмотрим функционал на $\hat{H}$

$$\Phi(u) = \|u\|_1^2 + 2(f,u). \tag{14.1}$$

В (14.1) функция $f(x) \in L_2(\Omega)$, $u(x) \in \hat{H}$, $(f,u) = (f,u)_{L_2(\Omega)}$ - скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $\Phi(u)$ - квадратичный функционал, определенный на $\hat{H}$.

Докажем, что множество значений этого функционала ограничено снизу. Из соотношений

$$\Phi(u) > \|u\|_1^2 - 2\|f\|\|u\| \geq \|u\|_1^2 - 2C\|f\|\|u\|_1 =$$

$$(\|u\|_1^2 - c\|f\|)^2 - C^2\|f\|^2 \geq -C^2\|f\|^2$$

следует, что

$$\Phi(u) \geq -C^2\|f\|^2 \qquad \forall u \in \hat{H}. \tag{14.2}$$

Из (14.2) следует существование точной нижней грани множества значений функционала $\Phi(u)$ на $\hat{H}$.

$$d = \inf_{u \in \hat{H}} \Phi(u). \tag{14.3}$$

Определение. Элемент $u \in \hat{H}$ называется элементом, реализующим минимум функционала $\Phi(u)$ на $\hat{H}$, если $\Phi(u) = d$.

Определение. Последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется последовательностью минимизирующей функционал $\Phi(u)$ на $\hat{H}$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi(u_k) = d$.

Замечание 1. Из определения минимизирующей последовательности, вообще говоря, не следует, что сама последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ является сходящейся к d при $k \to \infty$.

Теорема 1. Для любого $\hat{H} \subset H^1(\Omega)$ существует в $\hat{H}$ единственный элемент $u \in \hat{H}$ реализующий минимум функционала Φ в $\hat{H}$. Любая минимизирующая последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к u сильно в $\hat{H}$.

Доказательство. Из определения точной нижней грани числового множества следует существование минимизирующей последовательности. Пусть $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ - произвольная минимизирующая последовательность. Докажем, что существует $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u$ и u - элемент, реализующий минимум функционала Φ: $\Phi(u) = d$.

Так как $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ - минимизирующая в $\hat{H}$ последовательность и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi(u_k) = d$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\widetilde{n} = \widetilde{n}(\varepsilon)$ такое, что

$$d \le \Phi(u_k) < d + \varepsilon \qquad \forall k > \widetilde{n}. \tag{14.4}$$

Имеют место соотношения

$$\left\|\frac{u_k \pm u_m}{2}\right\|_1^2 = \left(\left(\frac{u_k \pm u_m}{2}, \frac{u_k \pm u_m}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}(\|u_k\|_1^2 + \|u_m\|_1^2) \pm \frac{1}{2}((u_k, u_m)),$$

$$\left\|\frac{u_k + u_m}{2}\right\|_1^2 + \left\|\frac{u_k - u_m}{2}\right\|_1^2 = \frac{1}{2}(\|u_k\|_1^2 + \|u_m\|_1^2).$$

Используя представление (14.1) функционала $\Phi(u)$ и соотношение (14.4), получим $\forall k, m > \widetilde{n}$

$$\left\|\frac{u_k - u_m}{2}\right\|_1^2 = \frac{1}{2}(\|u_k\|_1^2 + \|u_m\|_1^2) - \left\|\frac{u_k + u_m}{2}\right\|_1^2 =$$

$$\frac{1}{2}(\Phi(u_k) - 2(f, u_k) + \Phi(u_m) - 2(f, u_m)) - \Phi(\tfrac{u_k+u_m}{2}) + 2(f, \tfrac{u_k+u_m}{2}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\Phi(u_k) + \Phi(u_m)) - \Phi(\tfrac{u_k+u_m}{2}) \leq \frac{1}{2} \cdot 2(d + \varepsilon) - d = \varepsilon.$$

Доказали, что последовательность $\left\{\frac{u_k}{2}\right\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна и, следовательно, последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ также фундаментальна. Так как $\hat{H}$ - полное пространство, то существует элемент $u \in \hat{H}$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u$ в $\hat{H}$.

Покажем, что u есть элемент, реализующий минимум функционала Φ на $\hat{H}$.

Замечание 2. Из анализа известно, что если $\lim\limits_{m\to\infty} v_m = v$ в B (B - банахово пространство), то $\lim\limits_{m\to\infty} \|v_m\|_B = \|v\|_B$. Из сильной сходимости v_m к v в H следует слабая сходимость v_m к v.

В силу замечания 2

$$\|u_m\|_1^2 \to \|u\|_1^2 \qquad \text{при } m \to \infty. \tag{14.5}$$

Ясно, что $u_m \to u$ в $L_2(\Omega)$ слабо:

$$(f, u_m) \to (f, u), \qquad m \to \infty. \tag{14.6}$$

В силу (14.5), (14.6)

$$\Phi(u_m) = \|u_m\|_1^2 + 2(f, u_m) \quad \to \quad \Phi(u) = \|u\|_1^2 + 2(f, u), \quad m \to \infty.$$

С другой стороны $\Phi(u_m) \to d$, $m \to \infty$. В силу единственности предела числовой последовательности имеет место равенство $\Phi(u) = d$.

Докажем, что элемент, реализующий минимум функционала $\Phi(u)$ единственный.

Пусть v, w - два элемента, реализующие минимум функционала $\Phi(u)$: $\Phi(v) = \Phi(w) = d$ и $v \neq w$. Рассмотрим последовательность $v, w, v, w, \ldots$.

Данная последовательность минимизирует функционал Φ на $\hat{H}$. По доказанному выше она должна сходится к элементу, реализующему минимум функционала, а по построению она расходится. Следовательно, $v = w = u$. Теорема 1 доказана.

Далее мы получим необходимое условие минимума функционала. Пусть $\hat{H} \subset H^1(\Omega)$ и w - произвольный элемент из $\hat{H}$, u - элемент, реализующий минимум функционала Φ на $\hat{H}$. Рассмотрим элемент $u + tw$, где t -действительная переменная, и рассмотрим функцию

$$F(t) = \Phi(u + tw) = ((u + tw, u + tw)) + 2(f, u + tw) =$$

$$\|u\|_1^2 + t^2\|w\|_1^2 + 2t((u, w)) + 2(f, u) + 2t(f, w) =$$

$$\Phi(u) + 2t[((u, w)) + (f, w)] + t^2\|w\|_1^2].$$

Функция $F(t)$ принимает минимальное значение при $t = 0$, так как

$$F(0) = \Phi(u) \leq F(t) \quad \forall t \in E_1.$$

Следовательно, $F'(t)|_{t=0} = 0$. Отсюда $0 = 2[((u, w)) + (f, w)]$ и

$$((u, w)) + (f, w) = 0 \qquad \forall w \in \hat{H}. \tag{14.7}$$

Соотношение (14.7) - **необходимое условие**, которому удовлетворяет элемент, реализующий минимум функционала Φ на $\hat{H}$.

Связь элемента, реализующего минимум функционала Φ на $\hat{H}$, с решением краевой задачи для эллиптического уравнения.

Рассмотрим краевую задачу

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a(x)u = -f(x), \tag{14.8}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{14.9}$$

Относительно коэффициентов уравнения (14.8) предположим, что

$$0 < k_0 \leq k(x) \leq K, \qquad \leq a(x) \leq A, \tag{14.10}$$

$$f(x) \in L_2(\Omega). \tag{14.11}$$

Положим $\hat{H} = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ со скалярным произведением

$$((u,v)) = \int\limits_{\Omega} (k(x)\nabla u \nabla v + auv)\, dx, \tag{14.12}$$

порождающим в силу (14.10) норму, эквивалентную исходной норме в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Рассмотрим функционал

$$\Phi(u) = \|u\|_1^2 + 2(f,u) = \int\limits_{\Omega} (k(x)|\nabla u|^2 + au^2)\, dx + 2\int\limits_{\Omega} fu\, dx.$$

Пусть u - элемент, реализующий минимум функционала Φ на $\hat{H} = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Необходимое условие, которому удовлетворяет u:

$$\int\limits_{\Omega} (k(x)\nabla u \nabla w + auw)\, dx + \int\limits_{\Omega} fw\, dx = 0 \quad \forall w\ \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \tag{14.13}$$

то есть u - обобщенное решение класса $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ задачи (14.8), (14.9) (см. определение обобщенного решения первой краевой задачи (12.6)).

Рассмотрим краевое условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \tag{14.14}$$

и задачу 14.8), (14.14). Предположим выполнение условий (14.10) и

$$0 < a_0 \le a(x) \le A. \tag{14.15}$$

Рассмотрим $\hat{H} = H^1(\Omega)$ и скалярное произведение

$$((u,v)) = \int\limits_{\Omega} (k(x)\nabla u \nabla v + auv)\, dx,$$

эквивалентное в силу (14.10), (14.15) исходному скалярному произведению в $H^1(\Omega)$.

Элемент u, реализующий минимум функционала $\Phi(u)$ на $H^1(\Omega)$, есть обощенное решение задачи (14.8), (14.14) в классе $H^1(\Omega)$ (в силу (14.7)).

Доказаны:

Теорема 2. Пусть $\hat{H} = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и выполняются условия (14.10), (14.11). Тогда элемент u, реализующий минимум функционала $\Phi(u)$ на $\hat{H}$ со скалярным произведением (14.12) есть обобщенное решение задачи (14.8), (14.9).

Теорема 3. Пусть $\hat{H} = H^1(\Omega)$ и выполняются условия (14.10), (14.15). Тогда элемент u, реализующий минимум функционала $\Phi(u)$ на $\hat{H}$ есть обобщенное решение задачи (14.8), (14.14) в классе $H^1(\Omega)$.

15. Метод Ритца

Мы рассмотрим метод Ритца - конструктивный метод нахождения элементов, реализующих минимум функционала

$$\Phi(u) = \|u\|_1^2 + 2(f, u) \tag{15.1}$$

на подпространстве $\hat{H}$ пространства $H^1(\Omega)$. В (15.1)функция $f \in L_2(\Omega)$, (f, u) - скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $\|u\|_1 = ((u, u))^{1/2}$ - норма в $\hat{H}$, порожденная скалярным произведением $((\cdot, \cdot))$ и эквивалентная исходной норме в $H^1(\Omega)$.

Пусть $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ - базис в $\hat{H}$ и $X_k = \{u|\, u = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i w_i\}$, k - мерное пространство, натянутое на первые k элементов базиса $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$. Ясно, что $X_k \subset X_{k+1}$. Так как $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ - базис в $\hat{H}$, то $X_k \subset H'$ и функционал Φ определен на X_k. По теореме 1 п.14. существует элемент $v_k \in X_k$, реализующий минимум функционала $\Phi(u)$ на X_k. Ясно, что

$$\Phi(v_k) \le \Phi(u) \qquad \forall u \in X_k.$$

Запишем необходимое условие, которому удовлетворяет элемент, реализующий минимум функционала на X_k: $((v_k, v)) + (f, v) = 0 \;\; \forall v \in X_k$, в частности,

$$((v_k, w_j)) + (f, w_j) = 0, \qquad j = 1, \ldots, k. \tag{15.2}$$

Так как $v_k \in X_k$, то $v_k = \sum_{i=1}^{k} c_i w_i$, тогда (15.2) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{k} c_i((w_i, w_j)) + (f, w_j) = 0, \qquad j = 1, \ldots, k. \tag{15.3}$$

Однозначная разрешимость системы (15.3) доказана нами в п.13, см. уравнение (13.4). Следовательно, $v_k = \sum_{i=1}^{k} c_i w_i$ определяется единственным образом.

Определение. Последовательность

$$v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots . \tag{15.4}$$

называют последовательностью Ритца.

Покажем, что последовательность Ритца - минимизирующая последовательность функционала Φ на $\hat{H}$. Так как v_k - элемент, реализующий минимум функционала Φ на X_k, и имеет место следующая схема

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1 & \subset & X_2 \subset & \ldots & \subset & X_k & \subset & \ldots & \subset \hat{H} \\ \downarrow & & \downarrow & \ldots & & \downarrow & & \ldots & \downarrow \\ v_1 & & v_2 & \ldots & & v_k & & \ldots & u, \end{array}$$

то имеют место соотношения

$$\Phi(v_1) \geq \Phi(v_2) \geq \cdots \geq \Phi(v_k) \geq \cdots \geq d = \Phi(u). \tag{15.5}$$

Соотношения (15.5) имеют место в силу свойства точной нижней грани числового множества: если E и G - два ограниченных снизу числовых множества и $E \subseteq G$, то $\inf E \geq \inf G$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем число $N = N(\varepsilon)$ и элемент $v^\varepsilon \in X_N$ ($v^\varepsilon = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} c_i^{(\varepsilon)} w_i$) такой, что

$$\|u - v^\varepsilon\|_1 < \varepsilon. \tag{15.6}$$

Имеют место следующие соотношения

$$\Phi(v^\varepsilon) = \Phi(u + v^\varepsilon - u) = ((u + (v^\varepsilon - u), u + (v^\varepsilon - u))) + 2(f, u + (v^\varepsilon - u)) =$$

$$\|u\|_1^2 + \|v^\varepsilon - u\|_1^2 + 2((u, v^\varepsilon - u)) + 2(f, u) + 2(f, v^\varepsilon - u) =$$

$$= \Phi(u) + \Phi(v^\varepsilon - u) + 2((u, v^\varepsilon - u)) \leq$$

$$d + \Phi(v^\varepsilon - u) + 2((u, v^\varepsilon - u)) \leq$$

$$d + \|v^\varepsilon - u\|_1^2 + 2\|f\| \cdot \|v^\varepsilon - u\| + 2\|u\|_1 \cdot \|v^\varepsilon - u\|_1 \leq$$

$$\leq d + \|v^\varepsilon - u\|_1^2 + 2\|f\| \cdot \|v^\varepsilon - u\| + 2\|u\|_1 \cdot \|v^\varepsilon - u\|_1 \leq$$

$$\leq (\text{ в силу (15.6) и эквивалентности норм в } \hat{H} \text{ и } H^1(\Omega)\,) \leq$$

$$\leq d + \varepsilon^2 + \varepsilon(2C\|f\| + 2\|u\|_1) \leq d + C_1\varepsilon. \qquad (15.7)$$

Здесь $C_1 = 1 + 2C\|f\| + 2\|u\|_1$.

Через $v_{N(\varepsilon)}$ обозначим элемент, реализующий минимум функционала на X_{N_ε}. В силу (15.7)

$$\Phi(v_{N(\varepsilon)}) \leq \Phi(v^\varepsilon) \leq d + C_1\varepsilon. \qquad (15.8)$$

Из (15.5), (15.8) следует оценка

$$d \leq \Phi(v_k) \leq \Phi(v_{N(\varepsilon)}) \leq d + C_1\varepsilon \qquad \forall k \geq N(\varepsilon).$$

Отсюда

$$|d - \Phi(v_k)| < C_1\varepsilon \qquad \forall k \geq N(\varepsilon).$$

Доказано, что

$$\lim_{k\to\infty} \Phi(v_k) = d$$

и, следовательно, последовательность Ритца $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ минимизирующая.

Доказанное выше сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть $\hat{H}$ - подпространство пространства $H^1(\Omega)$. Пусть в $\hat{H}$ введено скалярное произведение $((\cdot,\cdot))$, порождающее норму $\|u\|_1 =$

$((u,u))^{1/2}$ эквивалентную норме $\|u\| = \left(\int\limits_\Omega (u^2 + |\nabla u|^2)\,dx\right)^{1/2}$ и $\{w_i\}_{i=1}^\infty$ - базис в $\hat{H}$. Тогда существует (единственная) последовательность Ритца функционала $\Phi(u)$ на $\hat{H}$ по базису $\{w_i\}_{i=1}^\infty$. Эта последовательность является минимизирующей для функционала $\Phi(u)$ на $\hat{H}$.

Из теоремы 1 п.14 и теоремы 1 следует

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 последовательность Ритца для функционала $\Phi(u)$, построенная по базису $\{w_i\}_{i=1}^\infty$, сходится к элементу $u \in \hat{H}$, реализующему минимум на $\hat{H}$ функционала $\Phi(u)$, сильно в $H^1(\Omega)$.

16. Параболическое уравнение

Пусть Ω - ограниченная область в E_n, $\partial\Omega \in C^1$, $S_T = (0,T] \times \partial\Omega$, $\Gamma_T = S_T \cup \Omega \cup \partial\Omega$, $Q_T = (0,T) \times \Omega$.

Первая начально-краевая задача

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + f(x), \tag{16.1}$$

$$u|_{S_T} = 0, \tag{16.2}$$

$$u|_{t=0} = 0. \tag{16.3}$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

$$\begin{gathered}\text{функция } k(x) \text{ измерима по Лебегу на } \Omega \text{ и}\\ 0 < k_0 \le k(x) \le K, \qquad x \in \Omega,\end{gathered} \tag{16.4}$$

$$f \in L_2(\Omega). \tag{16.5}$$

Определим пространства $H^1(Q_T)$, $\overset{\circ}{H}{}^1_{S_T}(Q_T)$.

$H^1(Q_T) \overset{def}{\equiv} \{u | u, u_t, u_{x_i} \in L_2(Q_T), i = 1, \ldots, n\}$.

$\overset{\circ}{H}{}^1_{S_T}(Q_T) \overset{def}{\equiv} \{$замыкание в норме $H^1(Q_T)$ функций класса $C^\infty(Q_T)$ равных нулю вблизи гиперповерхности $S_T\}$.

Определение. Функция $u \in \overset{\circ}{H}{}^1{}_{S_T}(Q_T)$ называется обобщенным решением задачи (16.1) - (16.3) класса $H^1(Q_T)$, если выполняются условие (16.3) и

$$\int\limits_{Q_T} u_t v\,dxdt + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_T} k \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dxdt = \int\limits_{Q_T} f v\,dxdt \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1{}_{S_T}(Q_T). \tag{16.6}$$

Для доказательства однозначной разрешимости задачи (16.1) - (16.3) воспользуемся методом Галеркина. Так же как и в случае эллиптических уравнений мы должны построить галеркинские приближения, получить априорные оценки, перейти к пределу, доказать, что предел есть решение задачи, доказать единственность этого решения.

Пусть $\{w_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ - базис в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ ортонормированный в $L_2(\Omega)$.

Галеркинские приближения

Определение. Функция $u^m(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k^{(m)}(t) w_k(x)$ называется m-ым галеркинским приближением решения задачи (16.1) - (16.3), если $c_k^{(m)}(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции на $[0,T]$ ($c_k^{(m)}(t) \in C^1[0,T]$) и являются решением следующей задачи:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u^m(t,x)}{\partial t} w_j(x)\,dx + \int\limits_{\Omega} k \nabla u^m(t,x) \nabla w_j(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} f(x) w_j(x)\,dx, \tag{16.7}$$

$$c_j^{(m)}(0) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{16.8}$$

Задача (16.7), (16.8) есть задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Действительно,

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial c_i^{(m)}(t)}{\partial t} w_i(x) w_j(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial c_i^{(m)}(t)}{\partial t} \int\limits_{\Omega} w_i(x) w_j(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial c_i^{(m)}(t)}{\partial t} \delta_{ij} = \frac{\partial c_j^{(m)}(t)}{\partial t},$$

$$\int\limits_{\Omega} f(x) w_j(x)\,dx = f_j,$$

$$\int\limits_\Omega k\nabla u^m(t,x)\nabla w_j(x)\,dx =$$
$$= \sum_{i=1}^m c_i^{(m)}(t)\int\limits_\Omega k\sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i(x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial w_j(x)}{\partial x_i}\,dx = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}c_i^{(m)}(t).$$

(здесь $\alpha_{ji} = \int\limits_\Omega k\sum\limits_{m=1}^n \frac{\partial w_i(x)}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial w_j(x)}{\partial x_m}\,dx$), и мы имеем

$$\frac{c_j^{(m)}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}c_i^{(m)}(t) = f_j, \qquad j = 1,\ldots,m. \tag{16.9}$$

Из теории обыкновенных дифференциальных [17] уравнений следует, что задача (16.9), (16.8) имеет единственное решение класса $C^1[0,T]$ ($c_j^{(m)}(t) \in C^1[0,T], j = 1,\ldots m$).

Априорные оценки

Умножим (16.7) на $c_j^{(m)}(t)$ и просуммируем результат по j от 1 до m. Получим равенство

$$\int\limits_\Omega u_t^m u^m\,dx + \int\limits_\Omega k\nabla u^m\nabla u^m\,dx = \int\limits_\Omega fu^m\,dx.$$

Пусть $((w,v)) = \int\limits_\Omega k\nabla u^m\nabla u^m\,dx$ скалярное произведение в $\overset{\circ}{H}{}^1$ (Ω) (в силу (16.4)) с нормой $\|u\|_1 = ((u,u))^{1/2}$ эквивалентной норме $\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}$. Имеют место соотношения

$$(u_t^{(m)}(t), u^{(m)}(t)) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u^{(m)}(t), u^{(m)}(t)) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u^{(m)}(t)\|^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^m\left(c_k^{(m)}(t)\right)^2;$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u^{(m)}(t)\|^2 + \|u^{(m)}(t)\|_1^2 = (f, u^{(m)}(t)).$$

Проинтегрируем последнее соотношение по интервалу $(0,t)$:

$$\frac{1}{2}\|u^{(m)}(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|u^{(m)}(0)\|^2 + \int\limits_0^t \|u^{(m)}(\tau)\|_1^2\,d\tau = \int\limits_0^t (f, u^{(m}(\tau))\,d\tau.$$

Вследствие равенства $u^{(m)}(0)$ нулю

$$\|u^{(m)}(t)\|^2 + 2\int\limits_0^t \|u^{(m)}(\tau)\|_1^2\, d\tau = 2\int\limits_0^t (f, u^{(m}(\tau))\, d\tau \leq$$

$$\leq \text{ (неравенство Шварца) } \leq$$

$$2\int\limits_0^t \|f\|\|u^{(m)}(\tau)\|\, d\tau \leq 2C\int\limits_0^t \|f\|\|u^{(m)}(\tau)\|_1\, d\tau \leq$$

$$\leq \text{ (неравенство Коши с } \varepsilon : \forall a, b\ |ab| \leq \tfrac{1}{2}(\varepsilon a^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}b^2)\,\forall\varepsilon > 0) \leq$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon}\int\limits_0^t \|f\|^2\, d\tau + C\varepsilon\int\limits_0^t \|u^{(m)}(\tau)\|_1^2\, d\tau.$$

Положив $\varepsilon = \frac{1}{C}$, получим неравенство

$$\|u^{(m)}(t)\|^2 + \int\limits_0^t \|u^{(m)}(\tau)\|_1^2\, d\tau \leq C^2\int\limits_0^t \|f\|^2\, d\tau. \tag{16.10}$$

Положив в (16.10) $t = T$ и отбросив первый неотрицательный член в левой части последнего неравенства, приходим к неравенству

$$\begin{aligned}\int\limits_0^T \|u^{(m)}(\tau)\|_1^2\, d\tau &= \int\limits_0^T\int\limits_\Omega k(x)|\nabla u^{(m)}(t,x)|^2\, dxdt = \\ &= \int\limits_{Q_T} k\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_i}\right)^2 dxdt \leq C_1,\end{aligned} \tag{16.11}$$

где $C_1 = C^2\|f\|^2 T$.

Отбрасывая второй член в левой части неравенства(16.10) и интегрируя полученное неравенство по t от 0 до T, получим, что

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left(u^{(m)}(t,x)\right)^2 dxdt = \|u^{(m)}\|_{L_2(Q_T)}^2 \leq C_1 T. \tag{16.12}$$

Неравенства (16.11), (16.12) дают равномерную по m оценку в $L_2(Q_T)$ функций $u^{(m)}$, $u_{x_i}^{(m)}$, $i = 1, \ldots, n$.

Оценим совокупность $\left\{u_t^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$. Умножим (16.7) на $(c_j^{(m)}(t))'$ и результат просуммируем по j от 1 до m. Получим равенство

$$\|u_t^{(m)}(t)\|^2 + ((u^{(m)}(t), u_t^{(m)}(t))) = (f, u_t^{(m)}(t)),$$

интегрируя которое по отрезку $[0,t]$, получим равенство

$$\int\limits_0^t \|u_t^{(m)}(\tau)\|^2\,d\tau + \int\limits_0^t ((u^{(m)}(\tau), u_t^{(m)}(\tau)))\,d\tau = \int\limits_0^t (f, u_t^{(m)}(\tau))\,d\tau,$$

Так как $((u^{(m)}(\tau), u_t^{(m)}(\tau))) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}((u^{(m)}(\tau), u^{(m)}(\tau)))$, то интегируя второй член левой части последнего неравенства и учитывая, что $u^{(m)}(0) = 0$, получим неравенство

$$\int\limits_0^t \|u_t^{(m)}(\tau)\|^2\,d\tau + \frac{1}{2}\|u^{(m)}(t)\|_1^2 \le (\text{ неравенство}$$

$$\text{Коши с } \varepsilon) \le \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|f\|^2\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u^{(m)}(\tau)\|^2\,d\tau.$$

Отсюда, выбрасывая второй член (неотрицательный) в левой части неравенства, получим, что

$$\int\limits_0^t \|u_t^{(m)}(\tau)\|^2\,d\tau \le \int\limits_0^T \|f(t)\|^2\,dt = \|f\|^2_{L_2(Q_T)}, \qquad t \in [0,T],$$

и при $t = T$

$$\|u_t^{(m)}\|^2_{L_2(Q_T)} = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega (u_t^{(m)})^2\,dxdt \le \|f\|^2_{L_2(Q_T)}. \tag{16.13}$$

Замечание. Так как $f = f(x)$, то $\|f\|^2_{L_2(Q_T)} = T\|f\|^2_{L_2(\Omega)}$.

Из (16.11) - (16.13) следует оценка

$$\|u^{(m)}\|_{H^1(Q_T)} \le C, \quad m \ge 1, \tag{16.14}$$

где постоянная C не зависит от $m \ge 1$.

Предельный переход.

Пространство $H^1(Q_T)$ - сепарабельное рефлексивное пространство [14]. По теореме о слабой компактности ограниченного в гильбертовом пространстве множества существует подпоследовательность $\{u^{(m_k)}(t,x)\}$ последовательности $\{u^{(m)}(t,x)\}$ такая, что при $m_k \to \infty$

$$u^{(m_k)} \to u \in \overset{\circ}{H}{}^1{}_{S_T}(Q_T) \quad \text{слабо в} \quad \overset{\circ}{H}{}^1{}_{S_T}(Q_T). \tag{16.15}$$

Рассмотрим в $\overset{\circ}{H}{}^1{}_{S_T}(Q_T)$ скалярное произведение

$$((u,v))_1 = \int\limits_{Q_T} (uv + k\nabla u \nabla v + u_t v_t)\, dxdt.$$

По теореме Рисса при $m_k \to \infty$

$$((u^{m_k}), v))_1 \to ((u,v))_1 \qquad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1{}_{S_T}(Q_T)). \tag{16.16}$$

Покажем, что u есть решение задачи (16.1), (16.2).

Замечание 1. Множество линейных комбинаций $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(m)}(t) w_k(x)$ плотно в $\overset{\circ}{H}{}^1{}_{S_T}(Q_T)$, где $\alpha_k^{(m)}(t) \in C^1[0,T]$.

Замечание 2. Пусть $u^{(m)}$ - m-ое галеркинское приближение. Тогда соотношение

$$(u_t^{(m)}(t), v^k(t)) + ((u^{(m)}(t), v^k(t)))_1 = (f, v^k(t))$$

выполняется при любых $v^k(t,x) = \sum\limits_{j}^{k} \alpha_j^{(k)}(t) w_j(x)$, $k \le m$, где $\alpha_j^{(k)}(t) \in C^1[0,T]$.

Пусть $v^p(t,x) = \sum\limits_{j}^{p} \alpha_j^{(p)}(t) w_j(x)$. Положим в (16.7) вместо $u^{(m)}$ функцию $u^{(m_k)}$, считая при этом, что $j \le m_k$. Пусть $p \le m_k$. Умножим полученное соотношение на $\alpha_j^{(p)}(t)$, просуммируем результат умножения по j от 1 до p и проинтегрируем результат по отрезку $[0,T]$. Получим равенство

$$\int\limits_0^T \Big\{ (u_t^{(m_k)}(t), v^p(t)) + ((u^{(m_k)}(t), v^p(t))) \Big\}\, dt = \int\limits_0^T (f, v^p(t))\, dt.$$

Переходя к пределу при $m_k \to \infty$ в последнем равенстве, получим

$$\int_0^T \{(u_t(t), v^p(t)) + ((u(t), v^p(t)))\}\, dt = \int_0^T (f, v^p(t))\, dt. \tag{16.17}$$

Отметим, что (16.17) имеет место при любом $p \geq 1$. Пусть $v \in \overset{\circ}{H}{}^1{}_{S_T}(Q_T)$ и последовательность $\{v^p\}$ такая, что

$$v^p \to v \quad \text{сильно в} \quad \overset{\circ}{H}{}^1{}_{S_T}(Q_T). \tag{16.18}$$

Нетрудно показать, что переходя к пределу при $p \to \infty$ в (16.17), получим, что

$$\int_{Q_T} u_t v\, dxdt + \int_{Q_T} k \nabla u \nabla v\, dxdt = \int_{Q_T} f v\, dxdt \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1{}_{S_T}(Q_T). \tag{16.19}$$

Действительно,

$$I_1^p = \left| \int_0^T (u_t(t), v(t))\, dt - \int_0^T \int_\Omega u_t v^p\, dxdt \right| = \left| \int_0^T \Big(\int_\Omega u_t(t,x) v(t,x)\, dx\Big)\, dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^T \int_\Omega u_t(t,x) v^p(t,x)\, dxdt \right| = \left| \int_0^T (u_t(t), v(t))\, dt - \int_0^T (u_t(t), v^p(t))\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^T (u_t(t), v(t) - v^p(t))\, dt \right| \leq (\text{ неравенство Шварца }) \leq$$

$$\leq \int_0^T \|u_t(t)\| \cdot \|v(t) - v^p(t)\|\, dt \leq$$

$$\leq \left(\int_0^T \|u_t(t)\|^2\, dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^T \|v(t) - v^p(t)\|^2\, dt \right)^{1/2} =$$

$$= \|u_t\|_{L_2(Q_T)} \cdot \|v - v^p\|_{L_2(Q_T)} \leq C \|u_t\|_{L_2(Q_T)} \cdot \|v - v^p\|_{\overset{\circ}{H}{}^1{}_{S_T}(Q_T)}.$$

В силу (16.17)

$$I_1^p \to 0, \qquad p \to \infty. \tag{16.20}$$

$$I_2^p = \left| \int_0^T ((u(t), v^p(t)))\, dt - \int_{Q_T} k\nabla u \cdot \nabla v \, dxdt \right|$$

$$= \left| \int_0^T ((u(t), v^p(t)))\, dt - \int_0^T ((u(t), v(t)))\, dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_0^T ((u(t), v^p(t) - v(t)))\, dt \right| \leq C\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1{}_{S_T}(Q_T)} \|v^p - v\|_{\overset{\circ}{H}{}^1{}_{S_T}(Q_T)}.$$

В силу (16.17)

$$I_2^p \to 0, \qquad p \to \infty. \tag{16.21}$$

$$I_3^p = \left| \int_0^T (f, v^p(t))\, dt - \int_{Q_T} f(x)v(t,x)\, dxdt \right| = \left| \int_{Q_T} f(x)(v^p(t,x) - v(t,x))\, dxdt \right| =$$

$$= \left| (f, v^p - v)_{L_2(Q_T)} \right| \leq \|f\|_{L_2(Q_T)} \cdot \|v^p - v\|_{L_2(Q_T)}.$$

В силу (16.17)

$$I_3^p \to 0, \qquad p \to \infty. \tag{16.22}$$

Из (16.20) - (16.22) следует выполнение соотношений (16.19). Докажем выполнение условия $u|_{t=0} = 0$ (равенство (16.3)).

Пусть $\varphi(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1 (\Omega)$ - произвольный фиксированный элемент, функция $\alpha(t) \in C^1[0,T]$ и удовлетворяет условиям: $\alpha(t) = 0$ при $t \in [T-\delta, T]$ и $\alpha(0) = 1$.

Положим $\psi(t,x)=\alpha(t)\varphi(x)$ и рассмотрим интеграл

$$I^{m_k}\equiv\int\limits_{Q_T}\frac{\partial u^{(m_k)}}{\partial t}(t,x)\psi(t,x)\,dxdt=\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u^{(m_k)}}{\partial t}(t,x)\alpha(t)\varphi(x)\,dxdt=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left\{\int\limits_0^T\frac{\partial u^{(m_k)}}{\partial t}(t,x)\alpha(t)\,dt\right\}\varphi(x)\,dx=\int\limits_{\Omega}\varphi(x)\left[u^{(m_k)}(t,x)\alpha(t)\right]\Big|_0^T dx-$$

$$-\int\limits_{Q_T}u^{(m_k)}(t,x)\alpha'(t)\varphi(x)\,dxdt=-\int\limits_{Q_T}u^{(m_k)}(t,x)\alpha'(t)\varphi(x)\,dxdt. \tag{16.23}$$

По формуле интегрирования по частям (см.(11.9))

$$\int\limits_{Q}\frac{\partial u}{\partial t}\psi\,dxdt=-\int\limits_{\Omega}u(0,x)\varphi(x)\,dx-\int\limits_{Q_T}u(t,x)\varphi(x)\alpha'(t)\,dxdt. \tag{16.24}$$

Перейдём в (16.23) к пределу при $k\to\infty$. Получим равенство

$$\int\limits_{Q}\frac{\partial u}{\partial t}\psi\,dxdt=-\int\limits_{Q_T}u\alpha'\varphi\,dxdt. \tag{16.25}$$

Из (16.24), (16.25) следует, что

$$\int\limits_{\Omega}u(0,x)\varphi(x)\,dx=0. \tag{16.26}$$

Так как $\varphi(x)$ - произвольный элемент из $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ всюду плотно в $L_2(\Omega)$, то из (16.26) следует, что $u(0,x)$ как элемент $L_2(\Omega)$ отогонален всюду плотному множеству в $L_2(\Omega)$, и

$$u(0,x)=0 \qquad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{16.27}$$

Из соотношений (16.19), (16.27) следует, что $u(t,x)$- обобщенное решение задачи (16.1)-(16.3).

Единственность решения.

Пусть $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ - два решения задачи (16.1)-(16.3) в классе $H^1(Q_T)$. Тогда функция $u(t,x)=u_1(t,x)-u_2(t,x)$ - решение однородного уравнения

(16.1) с однородными начальными и краевыми условиями, удовлетворяющее неравенству (см. вывод неравенства (16.10))

$$\|u(t)\|^2 + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega k|\nabla u|\,dxd\tau \leq 0 \qquad \text{для почти всех} \quad t \in [0, T].$$

Отсюда следует, что $\|u(t)\|^2 = 0$ почти всюду в $[0, T]$ и $u(t, x) = 0$ почти всюду в Q_T.

Доказана

Теорема 1. Пусть выполняются условия (16.4), (16.5). Тогда существует единственное решение $u(t, x) \ \in \overset{\circ}{H}{}^1{}_{S_T} \ (Q_T)$ задачи (16.1)-(16.3) класса $H^1(Q_T)$.

17. Краевые задачи для гиперболического уравнения

Пусть Ω - некоторая ограниченная область n-мерного пространства E_n. $Q_T = \{0 < t < T, x \in \Omega\}$, S_T - боковая поверхность цилиндра Q_T, Ω_τ - сечение $\{t = \tau, x \in \Omega\}$ цилиндра Q_T плоскостью $t = \tau$; $\Omega_T = \{t = T, x \in \Omega\}$ - верхнее основание цилиндра Q_T, $\Omega_0 = \{t = 0, x \in \Omega\}$ - его нижнее основание.

В цилиндре Q_T рассмотрим гиперболическое уравнение

$$u_{tt} - div(k(x)\,\nabla\, u) + a(x)u = f(t, x). \tag{17.1}$$

Полагаем

$$k(x) \in C(\overline{\Omega}), a(x) \in C(\overline{\Omega}), k \geq k_0 > 0,\; k_0 - const,\; a(x) \geq 0. \tag{17.1$'$}$$

Зададим начальные

$$u|_{t=0} = \varphi, \tag{17.2}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi, \tag{17.3}$$

и граничные условия

$$u|_{\Gamma_T} = \chi. \tag{17.4}$$

Задача (17.1) - (17.4) - первая краевая задача.

В случае краевых условий

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\bigg|_{S_T} = \chi, \tag{17.5}$$

где σ - некоторая заданная на S_T функция, задача (17.1) - (17.3), (17.5) называется третьей смешанной задачей (начально-краевой задачей) для гиперболического уравнения (17.1).

Если $\sigma \equiv 0$ на S_T, то третья смешанная задача называется второй смешанной задачей.

Определение. Функция $u \in H^1(Q_T)$ называется обобщенным решением в Q_T первой смешанной задачи (17.1) - (17.4) класса $H^1(Q_T)$, если она удовлетворяет начальному условию (17.2), граничному условию (17.4) (в смысле следов) и тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (k\nabla u \nabla v + auv - u_t v_t)\, dxdt = \int\limits_{\Omega_0} \psi v\, dx + \int\limits_{Q_T} fv\, dxdt \tag{17.6}$$

при всех $v \in H^1(Q_T)$, для которых выполнены условия (17.4) и условие

$$v|_{t=T} = 0.$$

Утверждение. Пусть функция $u \in H^1(Q_T)$. Тогда функция

$$w(t,x) = \begin{cases} \int\limits_t^\tau u(\theta, x)\, d\theta, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau \le t \le T \end{cases} \tag{17.7}$$

принадлежит классу $H^1(Q_T)$ и функции

$$w_t = \begin{cases} -u, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T \end{cases} \tag{17.8}$$

и

$$w_{x_i} = \begin{cases} \int\limits_t^\tau u_{x_i}(\theta, x)\, d\theta, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T \end{cases} \tag{17.9}$$

являются обобщенными производными функции w по t и x_i соответственно.

Доказательство. Ясно, что функции w, w_t, w_{x_i}, заданные соответственно соотношениями (17.7) - (17.9) принадлежат пространству $L_2(Q_T)$.

Пусть $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ - последовательность функций класса $C^{\infty}(Q_T)$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - u\|_{H^1(Q_T)} = 0, \tag{17.10}$$

и

$$w^k(t,x) = \begin{cases} \int\limits_t^{\tau} u^k(\theta, x)\, d\theta, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T. \end{cases}$$

Для любой функции $g \in \overset{\circ}{C}{}^1(Q_T)$

$$\int\limits_{Q_T} w^k(t,x) g_t(t,x)\, dxdt = \int\limits_{Q_\tau} w^k(t,x) g_t(t,x)\, dxdt = \int\limits_{\Omega} (w^k(t,x)g(t,x))|_{t=0}^{t=\tau}\, dx -$$

$$- \int\limits_{Q_\tau} w_t^k(t,x) g(t,x)\, dxdt = \int\limits_{\Omega} w^k(\tau,x) g(\tau,x)\, dx - \int\limits_{\Omega} w^k(0,x) g(0,x)\, dx -$$

$$- \int\limits_{Q_\tau} w_t^k(t,x) g(t,x)\, dxdt = - \int\limits_{Q_\tau} -u^k(t,x) g(t,x)\, dxdt = - \int\limits_{Q_T} w_t^k(t,x) g(t,x)\, dxdt,$$

где $w_t^k = \begin{cases} -u^k, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T \end{cases}.$

Выше мы использовали соотношения $g(0,x) = 0$ и $w^k(\tau, x) = 0$.

Получили равенства

$$\int\limits_{Q_T} w^k(t,x) g_t(t,x)\, dxdt = - \int\limits_{Q_T} w_t^k(t,x) g(t,x)\, dxdt, \tag{17.11}$$

верные для всех $g \in \overset{\circ}{C}{}^1(Q_T)$. По определению обобщенной производной функция $w_t^k = \begin{cases} -u^k, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T \end{cases}$ является обобщенной производной функции w^k.

Имеют место соотношения

$$w^k - w = \int\limits_t^{\tau} \{u^k(\theta, x) - u(0,x)\}\, d\tau, \qquad 0 < t < \tau,$$

$$\int\limits_{Q_T} (w^k - w)^2\,dxdt = \int\limits_{Q_T} \left(\int\limits_t^\tau |u^k(\theta, x) - u(\theta, x)|\,d\tau \right)^2 dxdt \leq$$

$$\leq \int\limits_{Q_T} T \int\limits_0^T |u^k(\theta, x) - u(\theta, x)|^2\,d\theta dxdt = T^2 \int\limits_{Q_T} |u^k(\theta, x) - u(\theta, x)|^2\,dxdt =$$

$$= T^2 \|u^k - u\|^2_{L_2(Q_T)}.$$

Из последних соотношений следует, что

$$\|w^k - w\|_{L_2(Q_T)} \leq T\|u^k - u\|_{L_2(Q_T)} \leq T\|u^k - u\|_{H^1(Q_T)}. \tag{17.12}$$

Из (17.12) и (17.10) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \|w^k - w\|_{L_2(Q_T)} = 0. \tag{17.13}$$

Из равенства $w_t^k - w_t = \begin{cases} -u^k + u, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T \end{cases}$

получаем, что

$$\int\limits_{Q_T} (w_t^k - w_t)^2\,dxdt \leq \int\limits_{Q_T} (u - u^k)^2\,dxdt,$$

$$\|w_t^k - w_t\|_{L_2(Q_T)} \leq \|u^k - u\|_{L_2(Q_T)} \leq \|u^k - u\|_{H^1(Q_T)}. \tag{17.14}$$

Переходя в (17.11) к пределу при $k \to \infty$ в силу (17.10) (17.13) (17.14) получим равенство

$$\int\limits_{Q_T} w g_t\,dxdt = -\int\limits_{Q_T} w_t g\,dxdt \qquad \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^1(Q_T),$$

то есть функция $w_t = \begin{cases} -u, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T \end{cases}$ есть обобщенная производная функции $w(t, x)$ по переменной t в Q_T.

Имеют место соотношения (w^k имеет обобщенную производную $w_{x_i}^k$ по x_i класса $L_2(Q_T)$)

$$\int\limits_{Q_T} w^k g_{x_i}\,dxdt = -\int\limits_{Q_T} w_{x_i}^k g\,dxdt \qquad \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^1(Q_T). \tag{17.15}$$

Действительно,

$$\int\limits_{Q_T} w^k g_{x_i}\,dxdt = \int\limits_{Q_\tau} w^k g_{x_i}\,dxdt = \int\limits_0^\tau \left(\int\limits_\Omega \int\limits_t^\tau u^k(\theta,x)d\theta g_{x_i}(t,x)\,dx \right) dt =$$

$$\int\limits_0^\tau \left(\int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_t^\tau u^k(\theta,x)d\theta g(t,x)\,ds \right) dt - \int\limits_0^\tau \left(\int\limits_\Omega \int\limits_t^\tau u^k_{x_i}(\theta,x)d\theta g(t,x)\,dx \right) dt =$$

$$-\int\limits_{Q_\tau} \int\limits_t^\tau u^k_{x_i}(\theta,x)\,d\theta g(t,x)\,dx = -\int\limits_{Q_T} w^k_{x_i}(t,x)g(t,x)\,dxdt.$$

Имеют место соотношения

$$\|w^k_{x_i} - w_{x_i}\|_{L_2(Q_T)} = \left(\int\limits_{Q_T} \left\{ \int\limits_t^\tau w^k_{x_i}(\theta,x)\,d\theta - \int\limits_t^\tau w_{x_i}(\theta,x)\,d\theta \right\}^2 dtdx \right)^{1/2} =$$

$$\left(\int\limits_{Q_T} \left\{ \int\limits_t^\tau (u^k_{x_i}(\theta,x) - u_{x_i}(\theta,x))d\theta \right\}^2 dtdx \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{Q_T} \left\{ \int\limits_0^T |u^k_{x_i}(\theta,x) - u_{x_i}(\theta,x)|d\theta \right\}^2 dtdx \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{Q_T} T \int\limits_0^T |u^k_{x_i}(\theta,x) - u_{x_i}(\theta,x)|^2 d\theta \right)^{1/2} =$$

$$= T \int\limits_{Q_T} (u^k_{x_i}(\theta,x) - u_{x_i}(\theta,x))^2\,d\theta dx = T\|u^k_{x_i} - u_{x_i}\|_{L_2(Q_T)} \tag{17.16}$$

и в силу (17.10) из (17.16) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \|w^k_{x_i} - w_{x_i}\|_{L_2(Q_T)} = 0. \tag{17.17}$$

В силу (17.13), (17.17) получим, переходя к пределу при $k \to \infty$ в (17.15), соотношение

$$\int\limits_{Q_T} w g_{x_i}\,dxdt = -\int\limits_{Q_T} w_{x_i} g\,dxdt \qquad \forall g \in \overset{\circ}{C}{}^1 (Q_T), \tag{17.18}$$

то есть функция $w_{x_i} \in L_2(Q_T)$ есть обобщенная производная функции w по x_i. Утверждение доказано.

Ясно, что если $u|_{S_T} = 0$, то и

$$w|_{S_T} = 0. \tag{17.19}$$

Теорема 1(единственности). При выполнении условий (17.1') задача (17.1) - (17.4) не может иметь более одного обобщенного решения класса $H^1(Q_T)$.

Доказательство. Пусть u - обобщенное решение класса $H^1(Q_T)$ задачи (17.1) - (17.4) при $f = 0$ в Q_T, $\chi = 0$ на S_T, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ на Ω. Покажем, что $u = 0$ п.в. в Q_T.

Возьмем произвольное $\tau \in (0, T)$ и рассмотрим функцию

$$v(t,x) = \begin{cases} \int\limits_t^\tau u(\theta, x)\, d\theta, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T. \end{cases}$$

Функция v имеет в Q_T обобщенные производные

$$v_t(t,x) = \begin{cases} -u, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T, \end{cases}$$

и

$$v_{x_i}(t,x) = \begin{cases} \int\limits_t^\tau u_{x_i}(x, \theta)\, d\theta, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T. \end{cases}$$

Следовательно, $v(t,x) \in H^1(Q_T)$. При этом $v|_{S_T} = 0$ и в случае, когда u - обобщенное решение первой смешанной задачи $v|_{\Gamma_T} = 0$.

Подставим функцию v в тождество (17.6). Так как $v_t = -u$, то получим равенство

$$\int\limits_{Q_T} (k \nabla u \int\limits_T^\tau \nabla u\, d\theta - a v v_t + u_t u)\, dx dt = 0.$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\int\limits_{Q_\tau} k(x)\nabla u(t,x)\int\limits_t^\tau \nabla u(\theta,x)\,d\theta dt dx =$$

$$= \int\limits_\Omega k(x)\int\limits_0^\tau \nabla u(t,x)\left(\int\limits_t^\tau \nabla u(\theta,x)\,d\theta\right) dt dx =$$

$$= \int\limits_\Omega k(x)\int\limits_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\tau^t \nabla u(\theta,x)\,d\theta\left(-\int\limits_\tau^t \nabla u(\theta,x)\,d\theta\right) dt dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega k(x)\int\limits_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_\tau^t \nabla u(\theta,x)\,d\theta\right)^2 dt dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega k(x)\left(\int\limits_\tau^t \nabla u(\theta,x)\,d\theta\right)^2\Bigg|_{t=0}^{t=\tau} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega k(x)\left(\int\limits_0^\tau \nabla u(\theta,x)\,d\theta\right)^2 dx. \tag{17.20}$$

Так как

$$-\int\limits_{Q_\tau} avv_t\,dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega av^2(0,x)\,dx \tag{17.21}$$

и

$$\int\limits_{Q_\tau} uu_t\,dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2(\tau,x)\,dx, \tag{17.22}$$

то в силу (17.20) - (17.22) из (17.20) получим равенство

$$\int\limits_\Omega k(x)\left(\int\limits_0^\tau \nabla u(\theta,x)\,d\theta\right)^2 dx + \int\limits_\Omega av^2(0,x)\,dx + \int\limits_\Omega u^2(\tau,x)\,dx = 0. \tag{17.23}$$

Так как все члены левой части равенства (17.23) неотрицательны в силу условий $k(x) > 0$, $a \geq 0$ и их сумма равна нулю, то нулю равен и каждый член этой суммы, в частности

$$\int\limits_{\Omega} u^2(\tau,x)\,dx = 0.$$

В силу последнего равенства, верного при любом $\tau \in (0,T)$

$$\|u\|^2_{L_2(Q_T)} = \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} u^2(\tau,x)\,dxdt = 0.$$

Отсюда $u(t,x) = 0$ почти всюду в Q_T.

Нами доказана теорема единственности обобщенного решения задачи (17.1) - (17.4) в классе $H^1(Q_T)$.

Существование обобщенного решения класса $H^1(Q_T)$.

Рассмотрим однородное граничное условие

$$u|_{\Gamma_T} = 0. \tag{17.24}$$

Ниже нами будет доказана теорема

Теорема 2. Пусть выполняются условия (17.1') и $f(t,x) \in C(\overline{Q}_T)$. Тогда задача (17.1) - (17.3), (17.24) имеет обобщенное решение u в классе $H^1(Q_T)$.

Доказательство. Доказательство проведем методом Галеркина. Пусть $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ - базис в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, ортонормированный в пространстве $L_2(\Omega)$:

$$(w_i,w_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \tag{17.25}$$

Здесь, как обычно, $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Через $u^m(t,x)$ обозначим m - ое галеркинское приближение

$$u^m(t,x) = \sum_{j=1}^{m} c_j^m(t) w_j(x) \tag{17.26}$$

решения u задачи (17.1) - (17.3), (17.24) по базису $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$, где коэффициенты $c_j^m(t)$ находятся как решения задачи

$$\left(\frac{\partial^2 u^m(t)}{\partial t^2}, w_j\right) + \int\limits_\Omega \{k\nabla u^m(t)\nabla w_j + a u^m(t) w_j\}\, dx = (f(t), w), \quad (17.27)$$

$$c_j^m(0) - \alpha_j^n, \qquad \frac{d}{dt}c_j^m(0) = (\psi, w_j), \qquad j = 1, \ldots, m. \quad (17.28)$$

Постоянные α_j^m в (17.28) берутся такие, что

$$\varphi^m(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j^m(t) w_j(x) \longrightarrow \varphi(x), \quad m \to \infty, \qquad (17.29)$$

в норме пространства $H^1(\Omega)$.

Система (17.27) есть система m обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с m независимыми переменными. Покажем это.

В силу (17.25)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 u^m(t)}{\partial t^2}, w_j\right) &= \left(\sum_{i=1}^m \frac{d^2 c_i^m(t) w_i(x)}{dt^2}, w_j\right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{d^2}{dt^2} c_i^m(t)(w_i, w_j) = \frac{d^2 c_j^m(t)}{dt^2}.\end{aligned} \qquad (17.30)$$

Пусть $d_{ij} = \int\limits_\Omega \{k\nabla w_i \nabla w_j + a w_i w_j\}\, dx$. Имеют место следующие соотношения

$$\int\limits_\Omega \left\{k\sum_{i=1}^m c_i^m(t)\nabla w_i \nabla w_j + a\sum_{i=1}^m c_i^m(t) w_i w_j\right\} dx = \sum_{i=1}^m d_{ij} c_i^m(t), \quad (17.31)$$

$$f_j(t) = (f(t), w_j), \qquad j = 1, \ldots, m. \qquad (17.32)$$

Из (17.30) - (17.32) следует, что соотношения (17.27) есть система уравнений

$$\frac{d^2 c_j^m(t)}{dt^2} + \sum_{i=1}^m d_{ij} c_i^n(t) = f_j(t), \qquad j = 1, \ldots, m. \qquad (17.33)$$

с постоянными коэффициентами d_{ij} и непрерывными на $[0, T]$ правыми частями $f_j(t)$.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений [17] следует, что решение $c^m(t) = (c_1^m(t), \dots c_m^m(t))$ задачи (17.33), (17.28) существует и единственно в классе $C^2([0,T])$ ($c_j^m(t) \in C^2[0,T]$, $j = 1, \dots m$) при любом $m \geq 1$.

Докажем ограниченность множества $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ в норме пространства $H^1(Q_T)$. Пусть $c^m(t)$ - решение задачи (17.33), (17.29). Умножим (17.28) на функцию $e^{-\theta t}\dfrac{d}{dt}c_j^m(t)$, где $\theta = const > 0$ будет выбрана нами ниже, и просуммируем результат умножения по j от 1 до m.

Получим равенство

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u^m(t), \frac{\partial}{\partial t}u^m(t)\right)e^{-\theta t} + \int\limits_{\Omega} k\nabla u^m(t) e^{-\theta t}\frac{\partial}{\partial t}\nabla u^m(t)\,dx$$
$$\int\limits_{\Omega} a u^m(t) e^{-\theta t}\frac{\partial}{\partial t}u^m(t)\,dx = e^{-\theta t}\left(f(t), \frac{\partial}{\partial t}u^m(t)\right). \tag{17.34}$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\int\limits_0^\tau (u_{tt}^m(t), e^{-\theta t}u_t^m(t))\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}((u_t^m(t,x))^2 e^{-\theta t})\,dxdt +$$

$$\frac{\theta}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^\tau (u_t^m(t,x))^2 e^{-\theta t}\,dtdx = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left.(u_t^m(t,x))^2 e^{-\theta t}\right|_{t=0}^{\tau} dx +$$
$$\frac{\theta}{2}\int\limits_{Q_\tau}(u_t^m(t,x))^2 e^{-\theta t}\,dxdt, \tag{17.35}$$

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega} k(x)\left(\nabla u^m(t,x), \frac{\partial}{\partial t}\nabla u^m(t,x)\right)e^{-\theta t}\,dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} k(x)\int\limits_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}\left(|\nabla u^m(t,x)|^2 e^{-\theta t}\right)dtdx +$$
$$+\frac{\theta}{2}\int\limits_{\Omega} k(x)\int\limits_0^\tau |\nabla u^m(t,x)|^2 e^{-\theta t}\,dtdx, \tag{17.36}$$

$$\left|\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega a(x)u^m(t,x)e^{-\theta t}u_t^m(t,x)\,dxdt\right| \le$$

$$\le (\text{ неравенство Коши с } \varepsilon = \frac{1}{A}) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \int\limits_0^\tau \left(u_t^m(t,x)\right)^2 e^{-\theta t}\,dtdx + \frac{A^2}{2}\int\limits_{Q_\tau}(u^m(t,x))^2 e^{-\theta t}\,dxdt, \qquad (17.37)$$

$$\left|\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega e^{-\theta t} f(t,x)u_t^m(t,x)\,dxdt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t} f^2(t,x)\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t}(u_t^m(t,x))^2 dxdt. \qquad (17.38)$$

Проинтегрируем (17.34) по t на интервале $[0,\tau]$. Из полученного при интегрировании равенства в силу соотношений (17.35) - (17.38) получим неравенство

$$\int\limits_\Omega e^{-\theta\tau}(u_t^m(t,x)^2\,dx + \theta\int\limits_{Q_\tau}(u_t^m(t,x))^2 e^{-\theta t}\,dxdt +$$

$$\int\limits_\Omega k(x)|\nabla u^m(\tau,x)|^2 e^{-\theta\tau}dx + \theta\int\limits_{Q_\tau} k(x)|\nabla u^m(t,x)|^2 e^{-\theta t}\,dxdt \le$$

$$\int\limits_{Q_\tau}(u^m(t,x))^2 e^{-\theta t}\,dxdt + 2\int\limits_{Q_\tau}(u_t^m(t,x))^2 e^{-\theta t}\,dxdt + \qquad (17.39)$$

$$\int\limits_{Q_\tau} f^2(t,x)e^{-\theta t}\,dxdt + \int\limits_\Omega (u_t^m(0,x))^2\,dx + \int\limits_\Omega k(x)|\nabla u^m(0,x)|^2\,dx.$$

В силу (17.24)

$$\int\limits_{Q_\tau} k(x)|\nabla u^m(t,x)|^2 e^{-\theta t} dxdt \geq k_0 \int\limits_{Q_\tau} |\nabla u^m(t,x)|^2 e^{-\theta t} dxdt =$$

$$= k_0 \int\limits_0^\tau e^{-\theta t} \int\limits_\Omega |\nabla u^m(t,x)|^2 dxdt \geq k_0 C_1 \int\limits_0^\tau e^{-\theta t} \|u^m(t)\|^2_{H^1(\Omega)} dt =$$

$$= k_0 C_1 \int\limits_0^\tau e^{-\theta t} \int\limits_\Omega \{(u^m(t,x))^2 + |\nabla u^m(t,x)|^2\} dxdt = \tag{17.40}$$

$$= k_0 C_1 \int\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t} (u^m(t,x))^2 dxdt + k_0 C_1 \int\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t} |\nabla u^m(t,x)|^2\, dxdt.$$

Выше C_1 - константа эквивалентности норм $\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{1/2}$ и $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega (u^2 + |\nabla u|^2)\, dx\right)^{1/2}$.

Из соотношений (17.25), (17.28), (17.29) следует, что

$$\int\limits_\Omega (u_t^m(t,x))^2\, dx = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} c_j^m(0)\right)^2 = \sum_{j=1}^n (\psi, w_j)^2 \leq \|\psi\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{17.41}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega k(x)|\nabla u^m(0,x)|^2\, dx \ &\leq\ K \int\limits_\Omega |\nabla \varphi^m|^2\, dx = K\|\varphi^m\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \leq \\ &\leq\ K C_2^2 \|\varphi^m\|^2_{H^1(\Omega)} \leq K_1. \end{aligned} \tag{17.42}$$

В (17.42) C_2 - константа эквивалентности норм $\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)}$ и $\|u\|_{H^1(\Omega)}$, $K = \max\limits_{\overline{\Omega}} k(x)$. Последовательность $\|\varphi^n\|_{H^1(\Omega)}$ ограничена вследствие сходимости φ^n к φ в норме $H^1(\Omega)$.

Напомним, что констант эквивалентности две: C_1 и C_2 $(0 < C_1 < C_2)$, такие постоянные, что выполняются неравенства

$$C_1\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \leq C_2\|u\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega).$$

Вследствие (17.40) - (17.42) из (17.39) получим неравенство

$$\int\limits_{\Omega} e^{-\theta\tau}(u_t^m(\tau,x))^2\,dx + (\theta-2)\int\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t}(u_t^m(t,x))^2\,dxdt +$$

$$+k_0\int\limits_{\Omega} |\nabla u^m(\tau,x)|^2 e^{-\theta\tau}\,dx + (\theta k_0 C_1^2 - A^2)\int\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t}(u^m(t,x))^2\,dxdt +$$

$$+\theta k_0 C_1^2\int\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t}|\nabla u^m(t,x)|^2\,dxdt \le \|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|\psi\|^2_{L_2(\Omega)} + K_1 = K_2 \quad (17.43)$$

Возьмем в (17.40) θ такое, что

$$\min\{\theta-2, \theta k_0 C_1^2 - A^2\} \ge 1. \qquad (17.44)$$

При таком θ выполняется неравенство

$$e^{-\theta T}\int\limits_{Q_T}\{u^m(t,x))^2 + (u_t^m(t,x))^2 + |\nabla u^m(\tau,x)|\}\,dxdt \le K_2,$$

откуда

$$\|u^m\|_{H^1(Q_T)} \le K_3, \qquad m \ge 1, \qquad (17.45)$$

где $K_3 = (K_2 e^{\theta T})^{1/2}$.

Мы доказали ограниченность множества галеркинских приближений в $H^1(Q_T)$.

В силу 17.45) и теоремы о слабой компактности ограниченного множества в рефлексивном банаховом пространстве существует подпоследовательность $\{u^m\}$ (обозначение не меняем) последовательности галеркинских приближений слабо сходящаяся в $H^1(Q_T)$ к некоторому элементу $u \in H^1(Q_T)$:

$$u^m \longrightarrow u \qquad \text{слабо в} \qquad H^1(Q_T), \quad m\to\infty. \qquad (17.46)$$

Докажем, что $u(t,x)$ является обобщенным решением задачи (17.1) - (17.3), (17.24).

Рассмотрим произвольную функцию $g(x) \in L_2(\Omega)$ и функцию $\sigma(t)$ класса $C^1[0,T]$, удовлетворяющую условиям: $\sigma(0)=1$, $\sigma(T)=0$.

Имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_\tau} u_t^m \sigma g\,dxdt &= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_t^m(t,x)\sigma(t)g(x)\,dxdt = -(u^m(0),g)- \\ &- \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u^m(t,x)\sigma'(t)g(x)\,dxdt,\end{aligned} \tag{17.47}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_\tau} u_t \sigma g\,dxdt &= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_t(t,x)\sigma(t)g(x)\,dxdt = -(u(0),g)- \\ &- \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u(t,x)\sigma'(t)g(x)\,dxdt.\end{aligned} \tag{17.48}$$

При $n \to \infty$ из (17.47)(17.29)(17.46) получим равенство

$$\int\limits_{Q_T} u_t(t,x)g(x)\sigma(t)\,dxdt = -(\varphi,g) - \int\limits_{Q_T} u(t,x)g(x)\sigma(t)\,dxdt. \tag{17.49}$$

Из (17.48), (17.49)

$$(\varphi,g) = (u(0),g) \qquad \forall g \in L_2(\Omega).$$

Следовательно, $u(0) = \varphi$ п.в. в Ω.

Докажем, что u удовлетворяет соотношениям (17.6). Умножим (17.19) на $\alpha_j'(t)$, ($\alpha_j^n \in C^1[0,T]$, $\alpha_j^n = 0$ при $t = T$), просуммируем результат умножения по j от 1 до m и проинтегрируем по t на отрезке $[0,T]$. После интегрирования по частям в первом члене (переносим производную по t на функцию

$$\chi(t,x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j^m(t)w_j) \tag{17.50}$$

получим тождество

$$\int\limits_{Q_T}(-u_t^m\chi_t + k\nabla u^m\cdot\nabla\chi + au^m\chi)dxdt - \\ - \int\limits_{\Omega} u_t^m\chi|_{t=0}dx = \int\limits_{Q_T} f\chi\,dxdt. \tag{17.51}$$

Нетрудно показать, что последнее тождество выполняется для всех функций из множества M^m, состоящего из всех элементов вида (17.50).

Переходя в (17.51) к пределу при $m\to infty$ и фиксированном m, получим в силу (17.20) соотношение

$$\int\limits_{Q_T}(-u_t\chi_t + k\nabla u\cdot\nabla\chi + au\chi)dxdt - \\ - \int\limits_{\Omega}\psi\chi|_{t=0}dx = \int\limits_{Q_T} f\chi\,dxdt, \tag{17.52}$$

верное для любого $\chi \in M^k$ и, следовательно, для любого $\chi \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M^k = M$. Так как множество M всюду плотно в $\hat{H}_0^1(Q_T)$, то соотношение (17.52) имеет место для любых $\chi \in \hat{H}_0^1(Q_T)$ (см. (17.6)).

Таким образом, мы доказали, что функция u является обобщенным решеним класса $H^1(Q_T)$ задачи (17.1) - (17.3), (17.24).

Выше мы доказали, что существует подпоследовательность последовательности галеркинских приближений слабо в $H^1(Q_T)$ сходящаяся к решению u задачи (17.1) - (17.3), (17.24). Докажем, что и последовательность галеркинских приближений $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к u слабо в $H^1(Q_T)$. Предположим, что последовательность $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ не сходится к u слабо. Тогда существует некоторая подпоследовательность $\{u^\gamma\}$ последовательности $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ слабо сходящаяся к некоторой функции $\widetilde{u} \in \hat{H}_0^1(Q_T)$ и не равная u:

$$\widetilde{u} \neq u \quad \text{в норме пространства} \quad L_2(Q_T). \tag{17.53}$$

Так же, как и в случае функции u, доказывается, что $\widetilde{u}$ - решение задачи

(17.1) - (17.3), (17.24) класса $H^1(Q_T)$. В силу теоремы единственности $\widetilde{u} = u$ почти всюду в Q_T, что противоречит (17.53). Доказана

Теорема 1. Пусть выполняются условия (17.1'). Тогда существует единственное решение $u \in \hat{H}_0^1(Q_T)$ задачи (17.1) - (17.3), (17.24). Последовательность галеркинских приближений $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к u слабо в $H^1(Q_T)$.

Обобщенное решение класса $H^2(Q_T)$

Выше мы доказали однозначную разрешимость задачи (17.1) - (17.4) в классе $H^1(Q_T)$. Докажем, что при более гладких входных данных полученное обобщенное решение имеет производные u_{tt}, u_{tx_i}, принадлежащие классу $L_2(Q_T)$.

Предположим, что входные данные удовлетворяют следующим условиям:

$$k \in C^1(\overline{\Omega}), \quad k \geq k_0 > 0, \quad a \in C(\overline{\Omega}), \tag{17.54}$$

$$f, f_t \in C(\overline{\Omega}), \tag{17.55}$$

$$\varphi \in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \qquad \psi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{17.56}$$

Имеет место теорема

Теорема 2. пусть выполняются условия (17.54) - (17.56). Тогда обобщенное решение u класса $H^1(Q_T)$ задачи (17.1) - (17.3), (17.24) имеет производные u_{tt}, u_{tx_i}, $i = 1, \ldots, n$, из $L_2(Q_T)$. Последовательность галеркинских приближений $\{u^m\}_{m=1}^{\infty} \longrightarrow u$ слабо в $H^1(Q_T)$, $u_{tt}^m \longrightarrow u_{tt}$, $u_{tx_i}^m \longrightarrow u_{tx_i}$ слабо в $L_2(Q_T)$.

Доказательство. Возьмём базис $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ из элементов $w_j \in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, ортонормированный в $L_2(\Omega)$. Разложим функции φ, ψ по этому базису:

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j w_j(x), \qquad \psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j w_j(x). \tag{17.57}$$

В силу (17.56) при $m \to 0$

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j w_j \to \varphi \text{ в } H^2(\Omega), \qquad \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j \to \psi \text{ в } H^1(\Omega). \tag{17.58}$$

Функции $c_j^m(t)$ галеркинских приближений $u^m(t,x)$ по базису $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ находим как решение системы уравнений (17.19) с начальными данными

$$c_j^m(0) = \alpha_j, \qquad \frac{c_j^m(0)}{dt} = \beta_j, \qquad j = 1, \dots, m. \tag{17.59}$$

Так как (см. (17.58), (17.59))

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j w_j = \sum_{j=1}^{m} c_j^m(0) w_j(x) = u^m(0),$$

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j^m(0)}{dt} w_j(x) = u_t^m(0)$$

и $u^m(0) \to \varphi$ сильно в $H^2(\Omega)$, $u_t^m(0) \to \psi$ сильно в $H^1(\Omega)$ при $m \to \infty$, то существует постоянная B такая, что при всех m

$$\|\Delta u^m(0)\| + \|\nabla u^m(0)\| + \|\nabla u_t^m(0)\| + \|u_t^m(0)\| \le B. \tag{17.60}$$

В (17.58) $\|\nabla u^m(0)\| = \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u^m(0,x)}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}$

Так как выполняются условия (17.55), то $f_j \in C^1[0,T]$ и $c_j^m(t) \in C^3[0,T]$, $j = 1, \dots, m$.

Продифференцируем (17.19) по t, умножим результат дифференцирования на $\dfrac{d^2 c_j^m(t)}{dt^2}$ и просуммируем полученные равенства по j от 1 до m. Получим равенство

$$(u_{ttt}^m(t), u_{tt}^m(t)) + \int\limits_{\Omega} [k \nabla u_t^m(t,x) \cdot \nabla u_{tt}^m(t,x) + a u_t^m(t,x) u_{tt}^m(t,x)] dx = (f_t(t), u_{tt}^m(t)). \tag{17.61}$$

Имеют место следующие соотношения:

$$(u_{ttt}^m(t), u_{tt}^m(t)) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_{tt}^m(t)\|^2,$$

$$\int\limits_{\Omega} k(x) \nabla u_t^m(t,x) \cdot \nabla u_{tt}^m(t,x) dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\Omega} k(x) |\nabla u_t(t,x)|^2 \, dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} a u_t^m(t,x) u_{tt}^m(t,x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\Omega} a(x) (u_t^m(t,x))^2 \, dx. \tag{17.62}$$

Интегрируя (17.61) на отрезке $[0,t]$ и учитывая соотношения (17.62), (17.54), (17.55) получим неравенства

$$\|u_{tt}^m(t)\|^2, +k_0\int\limits_\Omega k(x)|\nabla u_t(t,x)|^2\,dx \le \|u_{tt}^m(0)\|^2 +$$
$$+\int\limits_\Omega k(x)|\nabla u_t(0,x)|^2\,dx + \int\limits_\Omega |a(x)|(u_t^m(t,x))^2\,dx +$$
$$+\int\limits_\Omega |a(x)|(u_t^m(0,x))^2\,dx + 2\iint\limits_{Q_t} f_t(\theta,x)u_{tt}^m(\theta,x)\,dxd\theta \le$$
$$\le \|u_{tt}^m(0)\|^2 + K\|\nabla u_t^m(0)\|^2 + A\|u_t^m(t)\|^2 + A\|u_t^m(0)\|^2 +$$
$$+2\|f_t\|_{L_2(Q_T)}\cdot\|u_{tt}^m\|_{L_2(Q_T)} \le \|u_{tt}^m(0)\|^2 + K\|\nabla u_t^m(0)\|^2 +$$
$$+A\|u_t^m(t)\|^2 + A\|u_t^m(0)\|^2 + \varepsilon\|u_{tt}^m\|^2_{L_2(Q_T)} + \frac{1}{\varepsilon}\|f_t\|^2_{L_2(Q_T)}. \qquad (17.63)$$

В (17.63) постоянные K, A, определяются равенствами

$$K = \max_{\overline{\Omega}} k(x); \qquad A = \max_{\overline{\Omega}} |a(x)|.$$

Докажем ограниченность множества $\{\|u_{tt}^m(0)\|\}_{m=1}^\infty$. Для этого умножим (17.19) на $\dfrac{d^2}{dt^2}c_j^m(t)$, просуммируем полученные равенства по j от 1 до m и полученное соотношение рассмотрим при $t=0$. Получим равенство

$$\|u_{tt}^m(0)\|^2 + \int\limits_\Omega k(x)\nabla u^m(0,x)\cdot\nabla u_{tt}^m(0,x)dx+$$

$$+\int\limits_\Omega a(x)u^m(0,x)u_{tt}^m(0,x)\,dx = (f(0),u_{tt}^m(0)).$$

Проинтегрируем по частям второй член левой части равенства. Получим соотношения

$$\|u^m_{tt}(0)\|^2 = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n k_{x_i}(x)\frac{\partial u^m}{\partial x_i}(0,x)u^m_{tt}(0,x)\,dx +$$

$$+\int\limits_\Omega k(x)\Delta u^m(0,x)u^m_{tt}(0,x)\,dx +$$

$$(f(0),u^m_{tt}(0)) \le C_1\{\|\nabla u^m(0)\|\cdot\|u^m_{tt}(0)\| + \|\Delta u^m(0)\|\cdot\|u^m_{tt}(0)\|\} +$$

$$+\|f(0)\|\cdot\|u^m_{tt}(0)\| \le \frac{\varepsilon}{2}\|u^m_{tt}(0)\|^2 + \frac{C_1}{2\varepsilon}(\|\nabla u^m(0)\| + \|\Delta u^m(0)\|)^2 +$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\|u^m_{tt}(0)\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|f(0\|^2 \le \varepsilon\|u^m_{tt}(0)\|^2 + C(\varepsilon). \quad (17.64)$$

В (17.64) постоянная $C(\varepsilon)$ не зависит от m.

Из (17.64) при фиксированном ε, $0<\varepsilon<1$, получаем оценку

$$\|u^m_{tt}(0)\|^2 \le \frac{C(\varepsilon)}{1-\varepsilon} = C_1(\varepsilon). \qquad (17.65)$$

Проинтегрируем (17.63) по t от 0 до T.

Учитывая (17.60), (17.65) получим неравенство

$$\int\limits_0^T \|u^m_{tt}(t)\|^2 dt + \iint |\nabla u^m_t(t,x)|\,dx \le C_2(\varepsilon).$$

Откуда следует, что

$$\|u^m_{tt}\|_{L_2(Q_T)} + \|u^m_{tx_i}\|_{L_2(Q_T)} \le C_3, \qquad i=1,\dots,n, \qquad (17.66)$$

где постоянная C_3 не зависит от m.

Оценка (17.66) наряду с оценкой ограниченности последовательности галеркинских приближений $\{u^m\}_{m=1}^\infty$ в $H^1(Q_T)$ гарантирует существование подпоследовательности $\{u^\gamma\}$ последовательности $\{u^m\}_{m=1}^\infty$ такой, что

$$u^\gamma \to u \qquad \text{слабо в} \quad H^1(Q_T),$$

$$u^\gamma_{tt} \to u_{tt}, \quad u^\gamma_{tx_i} \to u_{tx_i} \qquad \text{слабо в} \quad L_2(Q_T), \quad i=1,\dots,n.$$

Таким образом, $u(t,x)$ - обобщенное решение задачи (17.1) - (17.4), удовлетворяющее условиям

$$u \in \hat{H}^1_0(Q_T), \qquad u_{tt} \in L_2(Q_T), \qquad u_{tx_i} \in L_2(Q_T), \quad i=1,\dots,n.$$

В силу единственности обобщенного решения задачи (17.1) - (17.4) в классе $H^1(Q_T)$ и вся последовательность $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к u при $m \to \infty$:

$$u^m \to u \qquad \text{слабо в} \quad H^1(Q_T),$$

$$u_{tt}^m \to u_{tt}, \quad u_{tx_i}^m \to u_{tx_i} \qquad \text{слабо в} \quad L_2(Q_T), \quad i = 1, \dots, n.$$

Теорема 2 доказана.

18. Некоторые обобщения

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)u_{x_i}(t,x) + c(t,x)u(t,x) = f(t,x), \tag{18.1}$$

частным случаем которого является рассмотренное ранее уравнение (17.1).

Предположим выполнение следующих условий:

$$a_{ij}(t,x) = a_{ji}(t,x), \qquad \nu|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2, \tag{18.2}$$

$$\nu > 0, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in E_n, \qquad (t,x) \in Q_T;$$

$$\max_{\overline{Q}_T}\left|\frac{\partial}{\partial t}a_{ij}\right| + \max_{\overline{Q}_T}\left|\frac{\partial b}{\partial x_i}\right| + \max_{\overline{Q}_T}|b_i| + \max_{\overline{Q}_T}|c| \le d. \tag{18.3}$$

Определение. Обобщенным решением класса $H^1(Q_T)$ задачи (18.1), (17.2) - (17.4) называется функция $u \in H_0^1(Q_T)$ равная $\varphi(x)$ при $t = 0$ и удовлетворяющая тождеству

$$\iint\limits_{Q_T} [-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i}^{m} b_i u_{x_i} v + cvu]\, dxdt -$$
$$- \int\limits_{\Omega} \psi(x)v(0,x)\, dx = \iint\limits_{Q_T} fvdxdt, \tag{18.4}$$

верному при любых $v \in \hat{H}_0^1(Q_T)$.

Имеет место следующая теорема [10]

Теорема 1. Пусть выполняются соотношения (18.2), (18.3). Тогда задача (18.1), (17.2), (17.3), (17.22) имеет единственное обобщенное решение в классе $H^1(Q_T)$.

О повышении гладкости обобщенных решений краевых задач для гиперболических уравнений см. в [10], [14].

Список литературы

[1] Андреев В.К., Белов Ю.Я., Лазарева В.Н., Шипина Т.Н. *Уравнения математической физики (Учебное пособие).*- Красноярск: Краснояр. гос.ун-т. 2005.

[2] Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* - М.: Государственное издательство физико-математической литературы. 1961.

[3] Белов Ю.Я., Кантор С.А. *Метод слабой аппроксимации* -Красноярск: КГУ.- 1999.

[4] Годунов С.К. *Уравнения математической физики* - М. : Наука.1979.

[5] Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. *Линейные уравнения второго порядка параболического типа//* Успехи. мат.наук. 1962. Т.17. N 3. - С.3-146.

[6] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ* – Спб.: Невский диалект, БХВ-Петербург. 2004.

[7] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. *Основные дифференциальные уравнения математической физики*, Физматгиз, 1962.

[8] Кудрявцев Л.Д.*Курс математического анализа: В 3т.* -М.: Дрофа. 2003-2004.

[9] Курош А.Г. *Курс высшей математики.* - М.:Лань. Физматкнига. 2008.

[10] Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики* - М.: Наука. 1988.

[11] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.*- М.: Наука. 1967.

[12] Лионс Ж.-Л.*Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* - Едиториал УРРС, 2002.

[13] Люстерник Л.А. Соболев В.И. *Краткий курс функционального анализа.* – М.: Высшая школа, 1982.

[14] Михайлов В.П. *Лекции по уравнениям математической физики* – М.: Физматлит. 2001.

[15] Михлин С.Г. *Курс математической физики.* – Санкт-Петербург: Лань. 2002.

[16] Никольский С.М. *Курс математического анализа. Т.2.* – М.:Наука. 1991.

[17] Понтрягин Л.С.*Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука. 1982.

[18] Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Новосибирск: СО АН СССР. 1962.

[19] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* - М.: МГУ. 2004.

[20] Треногин В.А. *Функциональный анализ.* - М.: ФИЗМАТЛИТ 2007.

[21] Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа.* - М.: Мир. 1968.