1 Билет

1. Смежные классы. Нормальная подгруппа. Фактор группа.

Левым смежным классом группы G по множеству H называют множество вида

$$aH = \{a \cdot x | \ \ x \in H\} \leq G$$

Правый смежным классом группы G по множеству H называют множество вида

$$Ha = \{x \cdot a | \ \ x \in H\} \leq G$$

$\geq$ - означает число подмножеств имеют согласованную структуру с объединением.

Подгруппа H группы G называется нормальной если $\forall h \in H \quad \forall g \in G \quad ghg^{-1} \in H$

Эквивалентное определение: Множества левых и правых смежных классов N в G совпадают.

Пусть G — группа, и H — её нормальная подгруппа , то есть для любого элемента $a \in G$ его правый и левый классы смежности совпадают $aH = Ha$ Тогда на классах смежности H в G можно ввести умножение $(aH)(bH) = abH$ Легко проверить что это умножение не зависит от выбора элементов в классах смежности, то есть если $aH = a'H \quad bH = b'H \quad abH = a'b'H$. Оно определяет структуру группы на множестве классов смежности, а полученная группа называется *факторгруппой* G по H.

Факторгруппа обозначается G/H.

Нейтральным элементом в этой группе $e \cdot H = H$

Обратный $(gH)^{-1} = g^{-1}H$

Ассоциативность следует из ассоциативности умножения из G

2. Характеристика поля. Теорема о характеристике поля.

Определенное **минимальное** натуральное число k - называется *характеристикой поля*, если $\forall a \in P \quad a \neq 0 \quad \exists k \quad ka = 0$.

Если такого k не существует, то говорят, что характеристика равна нулю.

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ -имеют нулевую характеристику.

Теорема: Если поле имеет нулевую характеристику, то оно бесконечно и содержит в качестве под-поля, поле рациональных чисел.

Теорема: Если поле конечно, то его характеристика обязательно ненулевая.

Теорема: Если характеристика не нулевая, то она является простым числом

Доказательство: Пусть **P** - поле, **k** - его характеристика. $ke = 0$ **e** - нейтральный элемент по умножению. Пусть **k** не простое то есть $k = sr$, тогда $(s \cdot r)e = (e + e + e...) \cdot (e + e + e...)$

Так как в поле нет делителя нуля, то *se = 0 или re = 0*

Допустим *se = 0*. Если s не простое, то продолжим эту же процедуру.

Мы доберемся до простого числа.

3. Проверить является ли отображение $\phi(\vec{x}) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_1 - 2x_3)$ линейным. Если да, то найти его матрицу в стандартном базисе над полем $GF(17)$.

$$\phi(\vec{x}+\vec{y}) = ((x_1+y_1)-(x_2+y_2),(x_2+y_2)-(x_3+y_3),(x_1+y_1-2(x_3+y_3)) =$$

$$= ((y_1-y_2)+(x_1-x_2),(x_2-x_3)+(y_2-y_3),(x_2-2x_3)+(y_1-y_3))$$

$$\phi(\lambda\vec{x}) = (\lambda x_1 - \lambda x_2, \lambda x_2 - \lambda x_3, \lambda x_1 - \lambda 2x_3)$$

$$\lambda\phi(\vec{x}) = (\lambda(x_1-x_2),\lambda(x_2-x_3),\lambda(x_1-2x_3)) =$$

$$= (\lambda x_1 - \lambda x_2, \lambda x_2 - \lambda x_3, \lambda x_1 - \lambda 2x_3) = \phi(\lambda\vec{x})$$

Отображение линейно.

2 Билет

1. Линейное отображение. Матрица линейного отображения. Связь координат вектора прообраза и вектора образа.

Линейным отображением называют L_k и M_k - векторы пространства над полем P улидотворяющие условиям

$f : L_k \to M_k \quad x, y \in L_k \quad \alpha \in K$

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Матрица линейного отображения.

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ базис F

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ базис E

$$\left\{\begin{array}{ll} f_1 & = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n \\ f_2 & = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n \\ \cdots & \cdots \\ f_n & = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \end{array}\right. = A$$

A *матрица перехода* к новому базису.

$A : F \to E$

$x_F \in F \quad x_E \in E \quad x_F = A^{-1}x_E$

Если элементу x соответствует y, то y называется образом элемента x, а x - прообразом элемента y.(это на всякий случай не надо писать в билет)

2. Простое поле. Простое поле $GF(p)$.

Поле, не имеющее подполей, отличных от него самого, называется *простым.*

Теорема: поле характеристики p содержит Z_p, поле вычетов по модулю p.

Так как любое Z_p имеет характеристику p и такак оно конечно то имеет содержит в себе только себя по теореме выше. (рассуждения я сам придумал)

3. Задача. Найти корни $\sqrt[8]{1}$ в поле комплексных чисел.

Воспользуемся **формулой Демуавра**
$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{\rho}(cos\psi + isin\psi)$
$\psi = \frac{\varphi+2\pi k}{n} \quad k = 0, 1, 2...n-1$

При нахождении $\sqrt[n]{1}$ формула примет такой вид
$\sqrt[n]{1} = cos(\frac{2\pi k}{n}) + isin(\frac{2\pi k}{n})$
$\sqrt[8]{1} = cos(\frac{2\pi k}{8}) + isin(\frac{2\pi k}{8})$

При $k = 0 \Rightarrow Z_0 = 1$

При $k = 1 \Rightarrow Z_1 = cos(\frac{\pi}{4}) + isin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

При $k = 2 \Rightarrow Z_2 = cos(\frac{\pi}{2}) + isin(\frac{\pi}{2}) = i$

При $k = 3 \Rightarrow Z_3 = cos(\frac{3\pi}{4}) + isin(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

При $k = 4 \Rightarrow Z_4 = cos(\pi) + isin(\pi) = -1$

При $k = 5 \Rightarrow Z_5 = cos(\frac{5\pi}{4}) + isin(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

При $k = 6 \Rightarrow Z_6 = cos(\frac{3\pi}{2}) + isin(\frac{3\pi}{2}) = -i$

При $k = 7 \Rightarrow Z_7 = cos(\frac{7\pi}{4}) + isin(\frac{7\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

(Проверка: при $k = 8 \Rightarrow Z_8 = Z_0$)

3 Билет

1. Замена Базиса. Матрица перехода. Формула замены координат.

Линейным отображением называют L_k и M_k - векторы пространства над полем P улидотворяющие условиям
$f : L_k \to M_k \quad x, y \in L_k \quad \alpha \in K$
$f(x + y) = f(x) + f(y)$
$f(\alpha x) = \alpha f(x)$
Матрица линейного отображения.
$f_1, f_2, \ldots, f_n$ базис F

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ базис E

$$\left\{\begin{array}{ll} f_1 & = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n \\ f_2 & = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n \\ \ldots & \ldots \\ f_n & = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \end{array}\right. = A$$

A *матрица перехода* к новому базису.

$A : F \to E$

$x_F \in F \quad x_E \in E \quad x_F = A^{-1}x_E$

2. Простое поле характеристики 0.

Теорема: Поле характеристики 0 содержит Q, поле рациональных чисел.

Q поле характеристики 0 значи содержит в себе поле Q по теореме выше, значит поле Q простое. (рассуждения я сам придумал)

3. Задача. Построить поле разложения многочлена $x^2 + x + 1$ над полем $GF(2)$

Z_2 - поле разложения многочлена $x^2 + x + 1$ над полем $GF(2)$.

4 Билет

1. Изменение координат вектора и матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису.

Линейным отображением называют L_k и M_k - векторы пространства над полем P улидотворяющие условиям

$f : L_k \to M_k \quad x, y \in L_k \quad \alpha \in K$

$f(x + y) = f(x) + f(y)$

$f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Матрица линейного отображения.

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ базис F

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ базис E

$$\left\{\begin{array}{ll} f_1 & = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n \\ f_2 & = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n \\ \ldots & \ldots \\ f_n & = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \end{array}\right. = A$$

A *матрица перехода* к новому базису.

$A : F \to E$

$x_F \in F \quad x_E \in E \quad x_F = A^{-1}x_E$

2. Теорема о характеристике конечного поля.

Теорема: если поле конечное, то его характеристика обязательно ненулевая. Доказательство: Пусть $\boldsymbol{e}$ - нейтральный элемент по умножению.

Расмотрим последовательность $\{e, \mathit{2}e...ne\}$. Так как поле конечно, то в последовательности встречаются одинаковые элементы.
$ne = me$
$(m-n)e = \mathit{0}$ и характеристика не нулевая.

3. Задача. Вычислить определитель

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

- a, b, c - порождающие кольца многочленов $Z[a, b, c]$

5 Билет

1. Теорема Галуа о существовании поля характеристики p для любого простого числа p.

Теорема Галуа: Для любого простого числа **p** существует поле с характеристикой **p** $GF(p) = \{0, 1, \ldots, p\}$

Доказательство: Так как оно не коммутативное кольцо с едицей, то для того, чтобы стало полем - нужно проверить наличие обратных по умножению.
$0 < a < p$
НОД (a,p) = 1
и из алгоритма Евклида:
$\exists u, v \in \mathbb{R}$
$ua + vp = 1$
$ua = 1 - pv$
Остаток от деления *ua на p = 1*
$u \cdot a = \mathit{1} \in Z_p$
u - обратный по умножению к a
Таким образом Z_p - поле или GF(p) - поле Галуа

2. Алгоритм нахождени собственных векторов.

$A - \lambda E$ называется *характеристической матрицей для* A, ее определитель $\Delta_A(\lambda) = |A - \lambda E|$ называется характерестическим многочленом A

$(A - \lambda) \cdot x = 0$ Вектор x называется *собственным вектором матрицы* A. Чило λ называется *собственным значением мытрицы* A.

1. Разложим определитель $|A - \lambda E|$

2. Найти все различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ характерестического уравнения $\Delta_A(\lambda) = 0$

3. Найти фундоментальную систему $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}$ решение однородной системы уравнений $(A - \lambda_1 E) \cdot x = 0$

4. Записать линейно независимые собственные вкторы матрицы A, отвечающие собственному значению λ_1

$$s_1 = C_1\varphi_1 \quad s_2 = C_2\varphi_2 \quad \ldots \quad s_{n-r} = C_{n-r}\varphi_{n-r}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ отличные от нуля произвольные постоянные. Совокупность всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_1 образуют ненулевые столбцы вида $s = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \ldots + C_{n-r}\varphi_{n-r}$

Повторить пункты 3,4 для остальных собственных значений $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$

3. Найти произведение перестановок $\sigma\pi\sigma, \pi^2\sigma$, где $\pi = (1,3,5)(2,6); \sigma = (1,2)(3,4,6)$.

$$\sigma\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (136524)$$

$$\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi^2\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (154632)$$

6 Билет

1. Расширение поля. Поле как векторное пространство над своим подполем.

F называется *подполем* P, если $F \subset P$ оно само является полем при тех же операциях сложения и умножения, которые заданы в поле P. Тогда P называется надполем или расширением поля F.

Размерность пространства $dim_F P = |P : F|$ называется *степенью расширения поля*. Если степень *бесконечна*, то размерность *бесконечномерна* $F \subset P \subset K$ Если есть цепочка (последовательность) расширений, то она называется *башней расширений*

Пусть F - это поле. Веткорное(или линейное) пространство над полем F - это множество V (его элементы называются векторами), на котором определена бинарная операция + сложение векторов. Пусть F подполе K. Тогда K можно рассматривать как векторное пространство над полем F относительно операции сложения элементов поля K и умножения элемента поля K на скаляр из F, понимаемого как обычное умножение элементов поля K.

Так, поле $\mathbb{R}$ действительных чисел можно рассматривать, как векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, а поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел - как векторное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Поле P - является векторным пространством над полем F

Доказательство: Пусть $a, b \in P \quad \alpha, \beta \in F$
Нужно 4 аксиомы коммутативности группы, и 4 аксиомы действия, но так как P - поле, то они выполнены.
Аксиомы действия:
$\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$ - Дистрибутивность
$(\alpha\beta)a = \alpha a + \beta a$ - Дистрибутивность
$(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ - Ассоциотивность умножения
$1\alpha = a$ - Нейтральный элемент

2. Корневой вектор. Подпространство корневых векторов.

Корневым вектором линейного преобразования A для данного собственного значения $\lambda \in K$ называется такой ненулевой вектор $x \in L$, что для некоторого натурального числа m $(A - \lambda \cdot E)^m x = 0$ Если m является наименьшим из таких натуральных чисел (то есть $A - \lambda \cdot E)^{m-1} x \neq 0$, то m называется высотой корневого вектора x.

Корневым подпространством линейного преобразования A для данного собственного числа $\lambda \in K$ называется множество всех корневых векторов $x \in L$, соответствующих данному собственному числу (дополненное нулевым вектором). Обозначим его V_λ. По определению,

$$V_\lambda = \bigcup_{m=1}^{\infty} \ker(A - \lambda \cdot E)^m = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_{m,\lambda}$$

3. С каким знаком в разложение определителя входит произведение $a_{12}a_{25}a_{36}a_{43}a_{51}a_{64}$.

Определим четность перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$(256314) = (156324) = (126354) = (123654) = (123456)$
Количество транспозиций - 4 $\Rightarrow$ перестановка четная.

Ответ: со знаком плюс.

7 Билет

1. Степень расширения поля. Теорема о башне полей.

Размерность пространства $dim_F P = |P : F|$ называется *степенью расширения поля.* Если степень *бесконечна*, то размерность *бесконечномерна* $F \subset P \subset K$ Если есть цепочка (последовательность) расширений, то она называется *башней расширений*

Теорем: Пусть $F \subset P \subset K$ - башня конечных расширений, тогда размерность $|K : F| = |K : P| \cdot |P : F|$

$|K:P| = n \quad (a_1, a_2 ... a_n)$
$|P:F| = m \quad (b_1, b_2 ... b_m)$
по определению размерности, поле **K** над полем **P** имеет базис из $a_1, a_2 ... a_n$ (из n элементов), а поле **P** над полем **F** базис $b_1, b_2 ... b_m$ (из m элементов).
Чтобы доказать теорему, необходимо проверить: $a_i b_j \quad i = 1 \ldots n \quad j = 1 \ldots m$ являются ли базисом **K** под **F** и проверить:
1) *Они пораждают множество*
2) *Они линейно не зависимы*
по определению базиса:
$C \in K$
$\alpha_1 a_1 + ... \alpha_n a_n$
$\alpha_i \in P$
А элемент из P можно выразить через $b_1, b_2 ... b_m$ с коэффициентом из F
В итоге C выразится через $a_i b_j$ с коэффициентом из F

Докажем линейную независимость
Пусть напротив они линейно зависимы:

$$\sum_{ij} \gamma_{ij} \quad ij \in F \quad a_i b_j = 0$$

Запишем эту сумму как линейную комбинацию элементов a_i с коэффициентами из b *и* γ

$$\sum a_i \left(\sum \gamma_{ij} b_j \right) = 0$$

Так как a_i - линейно независима, то

$$\sum \gamma_{ij} b_j = 0$$

Но так как b_i тоже линейно не зависима, то $\gamma_{ij} = 0$

2. Характеристический многочлен линейного отображения и его независимость от базиса.

Характеристическим многочленом оператора φ называется многочлен $\chi_\varphi(t) = \det(tE - A_\varphi)$.

Теорема: Характеристический многочлен линейного оператора φ не зависит от выбора базиса, в котором представлена его матрица.

3. Найти собственные значения и собственные вектора матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

над C.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)-(1-\lambda) = (\lambda^2-1)(1-\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)(1-\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$-(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -1$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \in R \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3
-1	0	1

Собственный вектор $x_1 = (-1, 0, 1)$

$$\lambda_2 = -1 \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 \in R \\ x_3 \in R \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3
1	0	1

Собственный вектор $x_2 = (1, 0, 1)$

8 Билет

1. Двусторонний идеал. Фактор кольцо. Проверка корректности определения.

2. Вид матрицы линейного отображения в базисе из собственных векторов.

3. Задача. Найти собственные значения и вектора матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

над C.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 20 = 6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 5\lambda - 14$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 14 = 56 + 25$$

$$\lambda_1 = \frac{5+9}{2} = 7 \quad \lambda_2 = \frac{5-9}{2} = -2$$

$$\lambda_1 = 7 \quad \begin{pmatrix} 3-7 & 4 \\ 5 & 2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 \in R \end{cases}$$

x_1	x_2
1	1

Собственный вектор $x_1 = (1, 1)$

$$\lambda_2 = -2 \quad \begin{pmatrix} 3-2 & 4 \\ 5 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как число переменных 2 и ранг мтарицы равен 2, то СЛУ имеет одно решение.

Собственный вектор $x_2 = (0, 0)$

9 Билет

1. Поле разложения. Теорема о существовании поля разложения.

Поле разложения многочлена p над полем K — наименьшее расширение поля, над которым p разлагается в произведение линейных множителей.

2. Подпространство собственных векторов, отвечающих данному собственному значению.

3. Задача. Найти характеристический многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 & 3 \\ 4 & (5-\lambda) & 6 \\ 7 & 8 & (9-\lambda) \end{vmatrix}$$

$(1-\lambda)(5-\lambda)(9-\lambda) + 84 + 96 - 21(5-\lambda) - 48(1-\lambda) - 8(9-\lambda) =$
$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 18\lambda$

10 Билет

1. Алгебраически замкнутое поле. Определение поля комплексных чисел.

P - *Алгебраически замкнуто*, если любой многочлен с коэффициентами в этом поле, имеет хотя бы один корень в этом поле.

Алгебраическое расширение поля действительных чисел $\mathbb{R}$ с помощью элемента i, являющегосся корнем многочлена T^2+1, называется полем комплексных чисел. Поле комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$.

Комплексным числом называется выражение вида $x+yi$, где x и y действительные числа, i символ, называемый мнимой единицей. Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа $z = x+yi$ и обозначаются $x = (x+yi) = Rez \quad y = Im(x+yi) = Imz$

2. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих разным собственным значениям.

3. С каким знаком в разложение определителя входит произведение $b_{12}b_{25}b_{36}b_{47}b_{51}b_{64}b_{73}$.

Определим четность перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 7 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$(2567143) = (1567243) = (1267543) = (1237546) = (1234576) = (1234567)$
Количество транспозиций - 5 $\Rightarrow$ перестановка нечётная.

Ответ: со знаком минус.

11 билет

1. Основная теорема о детерминанте как сумме n! слагаемых.

2. Матрица перехода. Координаты вектора и матрица линейного отображения в новом базисе.

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ базис F

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ базис E

$$\left\{\begin{array}{ll} f_1 & = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n \\ f_2 & = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n \\ \cdots & \cdots \\ f_n & = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \end{array}\right. = A$$

A *матрица перехода* к новому базису.

$A : F \to E$

$x_F \in F \quad x_E \in E \quad x_F = A^{-1}x_E$

3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2} = (-1)^3 \cdot \frac{4^3 \cdot 5}{2} = -160$$

12 билет

1. Алгебраическое дополнение элемента. Основное свойство алгебраических дополнений.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

где M_{ij} — дополнительный минор, определитель матрицы, получающейся из исходной матрицы A путем вычёркивания i -й строки и j -го столбца.

Сумма произведений элементов строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения к элементам другой строки (столбца) равна нулю.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{ij} = 0 \quad (i \neq k)$$

Сумма произведений элементов строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения к элементам этой строки (столбца) равна определителю матрицы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = |A|$$

Сумма произведений элементов "произвольной"строки на алгебраические дополнения к элементам i-той строки определителя равна определителю, в котором вместо i-той строки записана "произвольная"строка.

2. Матрица линейного отображения. Связь координат образа и прообраза при линейном отображении.

3. Написать таблицу умножения поля $GF(7)$.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

13 билет

1. Группа перестановок. Табличная запись перестановок и разложение на независимые циклы.

2. Теорема о том, что ненулевая характеристика поля простое число.

Теорема: *Если характеристика не нулевая, то она является простым числом*

Доказательство: Пусть - поле, k - его характеристика. $ke = 0 \quad e$ - нейтральный элемент по умножению. Пусть k не простое то есть $k = sr$, тогда $(s \cdot r)e = (e + e + e ...) \cdot (e + e + e ...)$

Так как в поле нет делителя нуля, то $se = 0 re = 0$
Допустим $se = 0$. Если s не простое, то продолжим эту же процедуру.
По основной теореме - мы доберемся до простого числа.

3. Найти характеристический многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ i & i & i \\ 2 & 3 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1+i & 1-i \\ i & i-\lambda & i \\ 2 & 3 & 1-i-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(i-\lambda)(1-i-\lambda) + 2i(1+i) + 3i(1-i) -$$

$$-2(1-i)(i-\lambda) - i(1+i)(1-i-\lambda) - 3i(1-\lambda) =$$

$$= (i - \lambda - \lambda i + \lambda^2)(1-i-\lambda) + 2i - 2 + 3i + 3 - 2i + 2\lambda - 2 - 2\lambda i$$

$$-i(1 - i - \lambda + i + 1 - \lambda i) - 3i + 3\lambda i =$$

$$= i - \lambda - \lambda i + \lambda^2 + 1 + \lambda i - \lambda - \lambda^2 i - \lambda i + \lambda^2 + \lambda^2 i - \lambda^3 - 1 - \lambda i + 2\lambda - 2i - \lambda + \lambda i$$

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + (1 - \lambda + \lambda - \lambda^2 - \lambda + \lambda^2 - \lambda - 2 + \lambda)i =$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + (-1-\lambda)i = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - (1+\lambda)i$$

14 билет

1. Четность перестановки через беспорядки и через разложение на транспозиции.

2. Определение линейного отображения. Сумма и суперпозиция линейных отображений.

Линейным отображением называют L_k и M_k - векторы пространства над полем P улидотворяющие условиям

$f : L_k \to M_k \quad x, y \in L_k \quad \alpha \in K$
$f(x+y) = f(x) + f(y)$
$f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Матрица суперпозии отображений равна произведению матриц отображений

Матрица суммы линейных отображений равна сумме их матриц

3. Найти собственные значения и собственные вектора матрицы над C

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & i \\ -i & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2-\lambda) - (-i^2) = \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$D = 4 + 4 = 8$$

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$$

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} \quad \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & i \\ -i & 2-1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & i \\ -i & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & i \\ -i - \frac{(-1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & i \\ \frac{1+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{i} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & i \\ \frac{1-1}{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{2} \quad \begin{pmatrix} -(1-\sqrt{2}) & i \\ -i & 2-1+\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-\sqrt{2}) & i \\ -i & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -(1-\sqrt{2}) & i \\ -i + \frac{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-\sqrt{2}) & i \\ \frac{1+(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{i} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -(1-\sqrt{2}) & i \\ \frac{1-1}{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15 билет

1. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Геометрический смысл сложения и умножения комплексных чисел.

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$z_1, z_2 \in C \quad z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
$z_1 \cdot z_2 = a_1 b_1 - a_2 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

`http://function-x.ru/complex_numbers2.html`

2. Определитель Вандермонда.

$$\Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\ldots(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \prod_{n\geq j>i\geq 1}(x_j - x_i) = \prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n}(x_j - x_i)$$

3. Найти произведение перестановок $\sigma\pi^2$, $\pi\sigma\pi\sigma$ где $\pi = (1,3,4)(2,5); \sigma = (1,2)(3,4)$

$$\pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi\sigma\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi\sigma\pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(45)$$

$$\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (3)(5)(124)$$

16 билет

1. Полярная система координат. Связь алгебраической и тригонометрической формы записи комплексного числа.

Полярной системой координат задает луч который называют нулевым или полярной осью с началом в точке O, называемая началом координат или полюсом. Любая точка на плоскости определяется двумя полярными координатами: радиальной и угловой. Радиальная координата соответствует расстоянию от точки до начала координат и может принимать значение $(-\infty, +\infty)$ Угловая координата, называется полярным углом и равна углу, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для того, чтобы попасть в эту точку, и принимает значени $[0, 2\pi]$

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

2. Формула циркулянта.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

3. Найти матрицу перехода от базиса (1,2); (2,3) к базису (0,1); (1,1).

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

17 билет

1. Возведение в степень и извлечение корней в поле C. Формула Муавра.

$$z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin\varphi) \quad n \in Z$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\sqrt[n]{(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right)$$

2. Замена базиса. Матрица линейного отображения в новом базисе.
$f_1, f_2, \ldots, f_n$ базис F
$e_1, e_2, \ldots, e_n$ базис E

$$\begin{cases} f_1 & = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n \\ f_2 & = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n \\ \ldots & \ldots \\ f_n & = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \end{cases} = A$$

A *матрица перехода* к новому базису.
$A : F \to E$
$x_F \in F \quad x_E \in E \quad x_F = A^{-1}x_E$

3. Найти матрицу перехода от базиса (1,20); (2,30) к базису (0,10); (10,0).

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 20 & 0 & 10 \\ 2 & 30 & 10 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 20 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & 10 & -20 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 20 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 20 & -30 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

18 билет

1. Понятие гомоморфизма. Гомоморфизм групп. Нормальная подгруппа.

Понятме гомоморфизма это отображение алгебраической системы A сохраняющей основные операции и основные отношения.

Гомоморфизм групп. $(G_1, *)$ $(G_2, \bullet)$ гуппы, h функция $h : G_1 \to G_2$ $\forall a, b \in G_1 \quad h(a * b) = h(a) \bullet h(b)$

Нормальная подгруппа. $\forall g \in G \quad \forall h \in H \quad ghg^{-1} \in H$

Ядро гомоморфизма. $ker(h) = \{u \in G : \quad h(u) = e_H\}$

Образ h. $im(h) = h(G) = \{h(a) : a \in G\}$

2. Разложение определителя по i-й строке и i-му столбцу.

Разложим определитель по строке, зафиксируем j от 1 до n

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot A_{ji}$$

где A_{ij} минор элемента a_{ij} матрицы A

Разложим определитель по столбцу, зафиксируем j от 1 до n

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

где A_{ji} минор элемента a_{ji} матрицы A

3. Найти все неприводимые многочлены степени 3 над полем $GF(3)$.

19 билет

1. Корни n-й степени из 1 в поле C. Их геометрический смысл.

$w \in C \quad w^n = 1$ называется корнем n-ой степени из еденицы.

Теорема: существует n различных корней n-ой степени из еденицы и все они получаются

$$w_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + \sin\frac{2\pi k}{n} \quad k = 0, 1 \ldots n-1$$

Точки на комплексной плоскости изображающие корни n-ой степени из еденицы являются вершинами привильного n угольника вписаного в окружность с еденичным радиусом и с центром в начале координат, причем одна из вершин находится в точке $(0, 1)$

2. Правило Крамера.

Матрица $A_{n\times n} \quad |A| \neq 0$ то система совместна и имеет единственное решение $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ где $\Delta = |A|$, а $\Delta_i = |A_i|$. A_i получили заменив i столбец на столбец свободных членов.

3. Проверить является ли отображение $\varphi(\vec{x}) = (x_1 - x_3, x_2 + 2x_3, x_1 - 20x_3)$ линейным. Если да, то найти его матрицу в стандартном базисе над полем $GF(7)$.

$$\varphi(\vec{x}+\vec{y}) = ((x_1+y_1)-(x_3+y_3), (x_2+y_2)+2(x_3+y_3), (x_1+y_1)-20(x_3+y_3)) =$$

$$= ((y_1-y_3)+(x_1-x_3), (y_2+2y_3)+(x_2+2x_3), (y_1-20y_3)+(x_1-20x_3)) = \varphi(\vec{x})+\varphi(\vec{y})$$

$$\varphi(\lambda\vec{x}) = (\lambda x_1 - \lambda x_3, \lambda x_2 + \lambda 2x_3, \lambda x_1 - 20\lambda x_3)$$

$$\lambda\varphi(\vec{x}) = (\lambda(x_1 - x_3), \lambda(x_2 + 2x_3), \lambda(x_1 - 20x_3)) =$$

$$= (\lambda x_1 - \lambda x_3, \lambda x_2 + \lambda 2x_3, \lambda x_1 - 20\lambda x_3) = \varphi(\lambda\vec{x})$$

20 билет

1. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Мономы, степени, старшие члены. Лексикографический порядок.

Кольцо многочленов от нескольких переменных

$$X^n = \prod_{i=1}^{n} X_i^{\varphi_i} \qquad \sum_{i=1} p_i X^i$$

Каждое слагаемое называется *мономом*

$max\{\varphi_k, \dots \varphi_n\} = c$ называется *старшей степенью* при этом $max\{p_1, \dots, p_n\} = d$ называют *старшим коэффицентом*.

Способ упорядочения, который принят в словарях - называется лексикографическим.

Допустим на множестве мономов мы ввели линейное упорядочение:

Первое условие - самый большой моном в смысле этого упорядочения - старший моном.

Второе условие - упорядочение должно быть таким, чтобы количество меньших или старших было конечно.

Третье условие - Сначала мономы сравниваются по общей степени, а когда она совпадает, то сравниваем по лексико-графически.

2. Явная формула обратной матрицы через алгебраические дополнения.

1) $|A| \neq 0$ то матрица имеет обратную, тоисть $A \cdot A^{-1} = E$

2) Составим матрицу алгебраических дополнений от каждого элемента матрицы A. $A^*_{n \times n} = (a^*_{ij}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, n$

3) $A^{*T} = swap(a^*_{ij}, a^*_{ji}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, n$

4) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{*T}$

3. Найти алгебраическое дополнение элемента 5 для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - 3 \cdot 7 = -12$$

21 билет

1. Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Теорема Виета.

Могочлен $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не изменяется при всех перестановках входящих в него перменных называют *симетричным многочленом*.

Примеры:

$xy^2 + xy^2 = yx^2 + y^2x$

$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^p$

Теорема Виета.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ корни многочлена и $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

$$\begin{cases} \frac{a_1}{a_0} & = (x_1 + x_2 + \ldots x_n) \\ \frac{a_2}{a_0} & = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots x_{n-1}x_n \\ \frac{a_3}{a_0} & = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots x_{n-2}x_{n-1}x_n) \\ \frac{a_{n-1}}{a_0} & = (-1)^{n-1}(x_1x_2\ldots x_{n-1} + x_1x_2\ldots x_{n-2}x_n + \ldots + x_2x_3\ldots x_n) \\ \frac{a_n}{a_0} & = (-1)^n x_1x_2\ldots x_n \end{cases}$$

2. Теорема об определителе произведения матриц.

Определитель двух квадратных матриц равен произведению определителей сомножетелей, тоисть $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

3. Найти алгебраическое дополнение элемента 9 для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3$$