Оглавление

1. Группоиды, их виды и примеры

Пусть G – непустое множество. Правила, по которым любой упорядоченной паре элементов a,b из множества G ставится в соответствии однозначно-определенный для этой пары элемент c из G,называется **бинарной операцией на множестве G.** Удобно бинарную операцию обозначать знаками *, · , ^{0}, +, ·,.. , тогда $a*b=c$, $a\circ b=c$, $a+b=c$, $a\cdot b=c$ и т.д.

Если операцию обозначают «+», то имеет место аддитивная терминология. А если «·», то мультипликативная терминология, Соответственно, эти операции называются сложением и умножением элементов в G.

Опр.1: Множество G, на котором задана бинарная операция «*», называют **группоидом** и обозначают **<G,*>.**

Обычно вместо «группоид <G,*>» говорят «Группоид G» по умолчанию понимая, о какой операции идет речь.

Аддитивный группоид - это тот, у которого операция названа «сложением» («+»), а **мультипликативный группоид** – «умножением» («·»).

Опр.2: Группоид <G,*> называется **полугруппой**, если операция «*» ассоциативна, т.е. $(a*b)*c=a*(b*c)\ \ \forall a,b,c\in G$

Опр.3: Группоид <G,*> называется **моноидом,** если операция «*» ассоциативна и G обладает нейтральным элементом, т.е. таким элементом e, что: $a*e=e*a=a$ $\forall a\in G$.

Замечание: В моноиде существует только один нейтральный элемент.

Опр.4: Группоид <G,*> называется **группой**, если операция «*» ассоциативна, в G есть нейтральный элемент и каждый элемент из G обладает нейтрализующим (обратным) элементом, т.е.: $\forall a\in G\ \exists\ a^{-1}\in G$: $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$, где e – нейтрализующий элемент.

Замечание: Оказывается, если нейтрализующий элемент для какого-то элемента моноида существует, то он только один

В теории группоидов принята след.терминология, согласно таблице:

Общая терминология	Аддитивная терминология	Мультипликативная терминология
Бинарная операция	Сложение	Умножение
*	+	·
Нейтральный элемент	Нулевой элемент	Единичный элемент
e	0	1
Нейтрализующий для a	Противоположный к a	Обратный к a
Обозначения нет	$-a$	a^{-1}

Группоид <G,*> называется **коммутативным**, если операция «*» коммутативна, т.е. $a*b=b*a\ \ \forall a,b\in G$

Примеры: 1) $\langle\mathbb{N},+\rangle$ - коммутативная полугруппа; 2) $\langle\mathbb{N},\bullet\rangle$ - коммутативный моноид; 3) $\langle\mathbb{Z},+\rangle$ - Абелева группа (коммутативная группа); 4) $\langle M_{2x2}(R),\cdot\rangle$

моноид (некоммутативный, к некоторым матрица найдется обратный, а к некоторым нет). 5)<R,•> - коммутативный моноид. 6)<R,+ >-абелева группа.

2. Кольца, их виды, примеры

Пусть k-непустое множество, на котором заданы 2 бинарные операции: сложение «+» и умножение «·».

K называют *кольцом*, если эти операции удовлетворяют 6 свойствам (аксиомам кольца):

1) $a + b=b + a \quad \forall\ a, b \in K$ (коммут.)
2) $(a + b)+c =a +(b + c)\ \forall\ a, b,c \in K$ (ассоц.)
3) $\exists\ 0 \in k: a + 0 = a\ \forall\ a \in K$
4) $\forall\ a \in k,\ \exists\ (- a) \in K: a +(- a) = 0$
5) $a (b + c) = ab + ac\ \forall\ a, b, c \in K$ Дистрибутивность
6) $(a + b) c =ac +bc\ \forall\ a, b, c \in K$

Заметим, что < К, + > - **абелева группа.**

Виды колец определяются в зависимости от свойств операции «·» (умножения)

Кольцо К называется:

1) Ассоциативным кольцом, если операция умножения ассоциативна;
2) Коммутативным кольцом, если операция умножения коммутативна;
3) Кольцо с единицей, если в К найдется единичный элемент по умножения
4) Кольцом без делителей нуля, если в К не менее 2-х элементов и из того, что произведение двух элементов =0 следует, что хотя бы один из них =0
5) Областью целостности (областью), если К является коммутативным., ассоциативным кольцом с единицей , без делителей нуля.
6) Телом, если в k не менее двух элементов и К является ассоциативным кольцом с единицей, в котором для ∀ ≠Ø (ненулевого элемента) найдется обратный по умножению
7) Полем, если является коммутативным телом.

ПРИМЕР:

1) < Z, +, · > -область целостности
2) < Q, +, ·> и <R, +, ·> - поля
3) $<M_{2*2}(R), +, \cdot>$ - ассоциативное кольцо с единицей. Это кольцо имеет делитель нуля.

Делители нуля – это два элемента кольца a, b, если при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ имеем $a * b = 0$

$$\begin{cases} a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{R^3}$ –множество геометрических векторов $<\overrightarrow{R^3}$, +, x > - это кольцо не ассоц., не коммут., в нем нет единицы, есть делители нуля. $<\vec{R}^3,+,\ddot{x}>$ - не ассоциативное, некоммутативное, в нем нет единиц, но есть делители 0. (векторное произведение ненулевых компланарных векторов равно $\vec{0}$

3 или 21Векторные пространства над произвольными полями, свойства и примеры

P – множество действительных чисел, в котором выполняются арифметические операции над числами (+, -, *, / на не нуль).

Эти операции удовлетворяют свойствам:

1. a + b = b + a
2. (a + b) + c = a +(b + c)
3. a + 0 = a
4. a + (- a)= 0
5. a (b + c) = ab +ac
6. ab = ba
7. (ab) c = a (bc)
8. a * 1= a
9. при a ≠ 0, a * a^{-1} = 1

Эти свойства (1-9) характеризирует понятие как *поле*. Можно заметить, что Q $\left\{\frac{m}{n}, m \in Z,\ n \in N\right\}$ тоже удовлетворяет этим свойствам, поэтому коротко говорят « дано поле P », «дано поле Q в рациональных числах».

Пусть V – не пустое множество и P – поле действительных чисел. Для удобства V называют векторным.

V – векторное пространство над произвольным полем P, если на нём определены две операции:

1)сложение векторов ($\forall a, b \in V$ единственным образом определена сумма $a + b \in V$).

2) умножение вектора на число ($\forall \alpha \in P, \forall a \in V$ единственным образом определено произведение $\alpha \cdot a \in V$), удовлетворяющие8-ми свойствам (аксиомы векторного пространства):

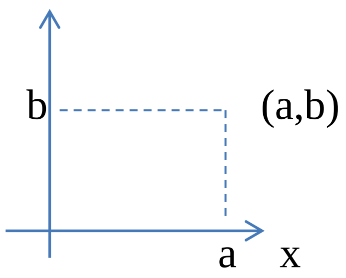
1. $U + V = V + U : \forall U, V \in V$ - коммутативность;
2. $(U + V) + W = U + (V + W) : \forall U, V, W \in V$ - ассоциативность;
3. $\exists \vec{0} \in V : V + \bar{0} = V$
4. $\forall V \in V, \exists (-V) \in V : V + (-V) = 0$ - противоположенный элемент.
5. $(\alpha\beta)V = \alpha(\beta V) : \forall \alpha, \beta \in P, \forall V \in V$ - ассоциативность.
6. $(\alpha + \beta)V = \alpha V + \beta V : \forall \alpha, \beta \in P, \forall V \in V$ - дистрибутивность;
7. $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V : \forall \alpha \in P, \forall U, V \in V$ - дистрибутивность;
8. $1 \cdot V = V : \forall V \in V$ Итак V называют **векторным пространством над полем P**, если над полем определены две операции: сложение векторов и умножение векторов и удовлетворяющих 1-8 свойствам.

Примеры векторных пространств: P^n – множество строк длины n с действительными компонентами, относительно операций сложения строк и умножения строк на число, является векторным пространством над полем P.

Иногда удобно рассматривать также множество P^n_k – колонок, относительно операций колонок и умножения их на число, называется векторным пространством над полем P.

4. Построение поля комплексных чисел

В плоскости введем прямоугольную (декартову) систему координат (координатную плоскость)



Мы можем отождествлять точки с парами действительных чисел.

$C \stackrel{def}{=} |R^2=\{(a, b)|\ a,b\in \boldsymbol{R}\}$

На множестве C определяем две бинарные операции по правилам (сложение, умножение).

1. **Сложение:** $(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b_1})+(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b_2})=(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2};\boldsymbol{b_1}+\boldsymbol{b_2})$
2. **Умножение:** $(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b_1})*(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b_2})=(\boldsymbol{a_1}\boldsymbol{a_2}-\boldsymbol{b_1}\boldsymbol{b_2};\boldsymbol{a_1}\boldsymbol{b_2}+\boldsymbol{a_2}\boldsymbol{b_1})$

$\forall \boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b_2}\in \boldsymbol{R}$

Оказывается относительно этих двух бинарных операций C – **поле**, то есть эти операции удовлетворяют девяти аксиомам поля.

Роль нулевого элемента по сложению играет **(0;0)**; роль противоположного для **(a,b)** играет **(-a,-b)**,

роль единичного играет **(1,0)**, роль обратного к **(a,b)≠(0,0)** играет элемент $\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a^2+b^2}};\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a^2+b^2}}\right)$.

1. **(a;b)*(1;0)=(a*1-b*0; a*0+b*1)=(a;b)**
2. **(1;0) * (a;b) =(a*1-b*0; b*1+a*0)=(a;b)**

Такие пары называют комплексными числами, а C полем комплексных чисел.

5. Алгебраическая форма записи комплексного числа. Комплексная плоскость.

Рассмотрим поле C и 2 элемента поля $(a_1 ; 0)$ и $(a_2 ; 0)$

Сложим эти элементы $(a_1 ; 0) + (a_2 ; 0) = (a_1 + a_2 ; 0)$

Умножим $(a_1 ; 0) * (a_2 ; 0) = (a_1 * a_2; 0)$

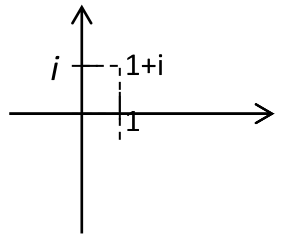
Пара, у которых вторая компонента ноль при сложении и умножении дают такие же пары. Это даёт возможность отождествить пару вида $(a;0)$ с действительным числом a, т.е. записать $(a;0) \equiv a$, $\forall a \in R$. После такого отождествления всякое действительное число превращается также в комплексное число и множество R окажется подмножеством множества C, причем все действительные числа будут располагаться на Ox. Введём ещё одно отождествление $(0;1) \equiv i$. i – мнимая единица (комплексное число), а связано это со свойством : $i^2 \equiv (0;1)*(0;1) = (-1;0) \equiv -1$, т.е.

$$i^2 = -1$$

Далее замечаем, что $(a;b)=(a;0)+(0;b)=(a;0)+(b;0)*(0;1)\equiv a+b*i$

Таким образом, мы приходим к записи $(a;b)\equiv a+b*i$. Эта запись и называется алгебраической формой комплексного числа (a;b). Здесь $a, b \in R$. Если комплексное число $z=a+b*i$, то а называют действительной (вещественной) частью числа z, и обозначают $Re\ z$. А число b называют мнимой частью числа z и обозначают $Im\ z$.

Введём понятие комплексная плоскость. Рисуем две взаимно перпендикулярные прямые с общим началом отсчета и одинаковыми по длине единичными отрезками.



Горизонтальная ось называется действительной (вещественной) осью, а вертикальная – мнимой. На действительной оси расположены все те комплексные числа, которые являются действительными числами, а на мнимой оси расположены числа вида $0+b*i$ – $b*i$ $(b\in R)$, которые при $b\neq 0$ называются чистомнимыми.

6. Сопряжение комплексных чисел, свойства

Для числа $z = a+b*i$ $(a, b \in R)$ число $\bar{z} = a-b*i$ называют сопряженным. Ясно, что для (1+i) – (1-i). Ясно, что сопряженные числа симметричны относительно действительной оси и имеют место **свойства**:

1) $z \in R \leftrightarrow z = \bar{z}$
2) $\bar{\bar{z}} = z$

   $\forall z \in C$

   Выполняются и другие свойства комплексных чисел
3) $\overline{z1 + z2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
4) $\overline{z1 - z2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
5) $\overline{z1 * z2} = \bar{z}_1 * \bar{z}_2$
6) $\overline{z1/z2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$ $(z_2 \neq 0)$

   $\forall z, z_2 \in C$

Замечание. Над комплексными числами в алгебраической форме можно действовать как над буквенно-числовыми выражениями (с буквой *i*), учитывая, что $i^2 = -1$.

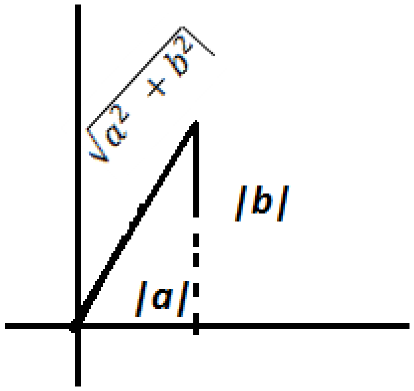
Пример:

1) (2+3i)+(1-i)=3+2i
2) (2+3i)-(1-i)=1+4i
3) (2+3i)*(1-i)=2+i+3=5+i
4) $\frac{2+3i}{1-i} = \frac{2+3i}{1-i} * \frac{1+i}{1+i} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

   Кстати, можно заметить ещё свойства, связанные с сопряженными числами:
7) $z+\bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$
8) $z*\bar{z} = a^2+b^2$, где $z=a+b*i$
9) $(a+b*i)*(a-b*i) = a^2-(b*i)^2 = a^2-b^2*i^2 = a^2+b^2$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа, примеры представления комплексных чисел в такой форме (геометрический и аналитический способы).

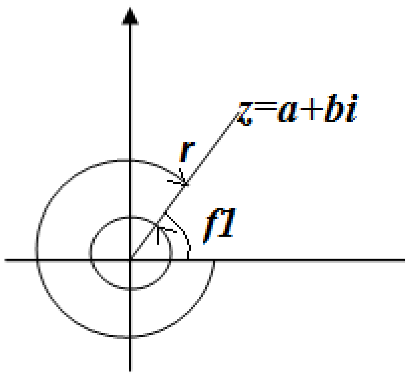
Пусть в комплексной плоскости дано ненулевое число z=a+bi(a,b$\in R$)



Расстояние от точки z до начала отсчета называется <u>модулем числа z</u>, обозначается как $|z|$, таким образом $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

z=a+bi, $|z| \stackrel{\text{def}}{=}$ r (r>0),

Каждый из этих углов φ называют аргументом числа z, а тот из аргументов, который лежит в промежутке (-π,π] называют главным аргументом числа z,обозначают главный аргумент argz, все аргументы обоз-ют Argz.



argz=$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_1 + 2\pi k, k \in Z$

Оказывается, a=rcosφ b=rsinφ для любого аргумента φ числа z,из этих аргументов следует, что число z=a+bi= rcosφ+ rsin$\varphi * i$, т.е.

z=r (cosφ + isinφ) такая запись комплексного числа z наз-ся - **тригонометрической формой записью комплексного числа.**

В тригонометрической форме можно записать только ненулевое число z.

8. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра. Примеры.

Оказывается, числа, записанные в тригонометрической форме, удобно умножать и делить. Пусть даны 2 числа

$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$

$z_1* z_2 = r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)* r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1*r_2*(\cos\varphi_1*\cos\varphi_2-\sin\varphi_1*\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1*\cos\varphi_2+\sin\varphi_2*\cos\varphi_1)= r_1*r_2*((\cos\varphi_1*\cos\varphi_2-\sin\varphi_1*\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1*\cos\varphi_2+\sin\varphi_2*\cos\varphi_1))= r_1* r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

Таким образом вывели формулу

$z_1* z_2 = r_1* r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$,

Аналогично доказывается, что

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}*(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

Таким образом, при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме надо перемножать их модули и складывать аргументы, при делении - разделить их модули и вычесть аргументы.

Формула Муавра

Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ненулевое комплексное число, записанное в тригонометрической форме и $m\in Z$. Тогда имеет место формула

$Z^m=r^m(\cos(m\varphi)+i\sin(m\varphi))$- её и называют формулой Муавра.

По определению считается, что если $m=0$, $z\neq0$, то $z^\circ=1$

$z^\circ=r^\circ(\cos0+i\sin0)=1$

$m=-n$, $n\in N$

$z^m=z^{-n}=(\frac{1}{z})^n=(\frac{1(\cos0+i\sin0)}{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)})^n=\frac{1}{r}(\cos(0-\varphi)+i\sin(0-\varphi))=r^{-1}(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))^n=$

$= r^{-n}\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi))=r^m(m\varphi)+i\sin(m\varphi)$

посчитать

$(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{\sqrt{3}-i})^{2013}=$

$\mathbf{r=\sqrt{a^2+b^2}}$

$\mathbf{a=r\cos\varphi}$

$\mathbf{b=r\sin\varphi}$

1)$r=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=2$ $\quad$ $\text{Cos}\varphi=\frac{a}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{n}{4}$ $\quad$ $\text{Sin}\varphi=\frac{a}{r}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{n}{4}$

$\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i=2(\cos\left(-\frac{n}{4}\right)+i\sin(-\frac{n}{4})$ $\quad$ $\sqrt{3}-i=2(\cos\left(-\frac{n}{6}\right)+i\sin(-\frac{n}{6})$ тогда

$Z=\frac{2\cos\left(-\frac{n}{4}\right)+i\sin(-\frac{n}{4})}{2\cos\left(-\frac{n}{6}\right)+i\sin(-\frac{n}{6})}$

$Z^{2013}=1^{2013}(\cos(-\frac{2013n}{12})+i\sin(-\frac{2013n}{12}))=1$

9.Извлечение корней из комплексных чисел. Примеры.

Пусть дано $n \in N$ и $z \in C$

Комплексное число $v \in$ C такое, что v^n=z называется корнем n-степени из числа Z.

Ясно, что про Z=0 $\forall$ n корнеv n-степени из нуля является одно число нуль. Поэтому будем рассматривать число, когда Z≠0.

Поставим z в тригонометрической форме $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$

Оказывается, что все корни n-степени из такого числа z имеют вид $\sqrt[n]{r}(cos\frac{\varphi+2\Pi k}{n} + isin\frac{\varphi+2\Pi k}{n})$, где $k \in Z.$

Действительно, возведя по формуле Муавра такое выражение в n-степени мы получим: $r(\cos(\varphi + 2\pi k) + isin(\varphi + 2\pi k) = r(cos\varphi + isin\varphi) = z$

Оказывается, для перечисления всех корней n-степени числа z достаточно, чтобы k принимало значения k=0,1,2,…,n-1.

Так как при других значениях k, мы начнём получать такие же корни.

Ясно, что при этих указанных значениях k получаются различные корни.

Таким образом, мы показали, что при Z≠0 существует ровно n различных корней n-степени из числа Z.

Обозначение $\sqrt[n]{/\,Z}$ – (не школьный корень)

$\sqrt[n]{/\,Z} = \left\{\sqrt[n]{r}(cos\frac{\varphi+2\Pi k}{n} + isin\frac{\varphi+2\Pi k}{n}\right) | k = 0,1, \dots, n-1\}$

где $Z = r(cos\varphi + isin\varphi)$-тригонометрическая форма записи числа Z≠0.

<u>Замечание</u>: 1) У всех корней n-степени из числа Z один и тот же модуль, равный числу $\sqrt[n]{r}$. Поэтому они все лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале отчёта комплексной плоскости.

2) При k=0,1,…,n-1 находим аргументы корней n-степени из числа Z:

При $k = 0\,, \frac{\varphi}{n}$;

При $k = 1, \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$;

При $k = 2, \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} * 2$

При $k = (m-1), \quad \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} * (n-1)$

То есть каждый аргумент получатся в результате прибавления одного и того же угла $\frac{2\pi}{n}$.

Это означает, что корни n-степени из числа Z лежат в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность из замечания 1.

При n=1 имеется одна точка на окружности при n=2, 2 диаметральные точки, при n>=3 вершины правильного n-угольника.

10. Многочлены и связанные с ними простейшие понятия. Функциональный и алгебраический взгляд на понятие многочлена.

Пусть P – поле действительных либо комплексных чисел.
P=R или P=C

Функция f(x) вида $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ ($a_n \neq 0$ и $a_n,\ldots, a_1, a_0 \in P$) – называется **многочленом n-ной степени**. Степень многочлена f(x) равна n
deg f(x)=n

Числа $a_n,\ldots, a_1, a_0$ – коэффициенты многочлена. При этом a_n – старший, а a_0 – свободный коэффициенты.

Допускается, что $n \in N_0 = \{0, 1, 2,\ldots\} = N \cup \{0\}$.

При n=0 многочлен примет вид $f(x)=a_0$, где $a_0 \neq 0$, т.е. мы также рассматриваем многочлены нулевой степени, которые представляются ненулевыми числами из поля P.

Многочлен, который представляют числом нуль называют нулевым многочленом и полагают, что его степень = $-\infty$, т.е. $\deg 0=-\infty$.

Замечание. Существует кроме функционального еще и алгебраический взгляд на понятие «многочлен».
Рассматривая над полем R или над C эти взгляды не различаются, но при рассмотрении над другими полями понятия «функциональный многочлен» и «алгебраический многочлен» могут отличаться.

Например:

Рассмотрим x^2+1 и $x+1$ над полем P = {0, 1}, где

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

С точки зрения алгебры это 2 различных многочлена $f(x)= x^2+1$ и $g(x)= x+1$.

X ∈ P	0	1
f(x)	1	0
g(x)	1	0

Функции одинаковые (табличные)

Как функции эти алгебраические многочлены одинаковые.

11. Кольцо многочленов. Степень суммы и произведения многочленов.

Множество всех многочленов с коэффициентами из поля P (P=R или P=C), включая нулевой многочлен, обозначают P[x].

Многочлены складывают и умножают подобно тому, как складывают и умножают обычные буквенные выражения. При этом раскрывают скобки и приводят подобные.

Ясно, что такие операции сложения и умножения являются коммутативными и ассоциативными. Нулевой многочлен (0) играет роль нулевого элемента по сложению, а единичный многочлен (1) играет роль единичного элемента по умножению многочленов.

Многочлен, у которого коэффициенты противоположны коэффициентам данного многочлена, играет роль противоположного элемента к данному элементу (многочлену) по сложению.

Законы дистрибутивности автоматически вытекают из разрешения раскрывать скобки и приводить подобные.

Таким образом, множество многочленов P[x] относительно операций сложения и умножения многочленов является **коммутативным ассоциативным кольцом с единицей**.

Заметим, что при умножении многочленов старший коэффициент их произведения равен произведению их старших коэффициентов. А также степень произведения многочленов равна сумме их степеней.

При сложении многочленов их степень не может увеличиваться, но зато может уменьшиться.

Например: $f(x)=x^{2013}+1$, $g(x)= x^{2012}+2$, $h(x)=-x^{2013}+2012$

$deg\ (f+g)=2013$

$deg\ (f+h)=0$

Эти рассуждения можно собрать в теорему.

Теорема. Пусть f(x), g(x) $\in$ P[x], тогда

1) $\deg(f(x)\cdot g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)$;
2) $\deg(f(x)+g(x))\leq\max\{\deg f(x);\deg g(x)\}$.

Замечание. Обращаем внимание, что теорема сформулирована для любых многочленов f(x) и g(x), включая и нулевой многочлен в наше рассмотрение.

Заметим, что из этой теоремы о степенях следует, что произведение ненулевых многочленов тоже будет ненулевым многочленом. Это означает, что P[x] – **коммутативное ассоциативное кольцо с единицей** без делителей нуля, т.е. P[x] – **область целостности**.

12. Эквивалентные формулировки теоремы Безу.

<u>1-ая формулировка:</u>

Пусть f(x) – ненулевой многочлен из P [x] и a Є P. Тогда существует и притом только единственный многочлен h(x) Є P [x], для которого имеем $f(x) = (x-a)\cdot h(x) + f(a)$

Число a Є P называется *корнем многочлена* f(x) Є P[x],если f(a)=0.

<u>2-ая формулировка:</u>

Пусть f(x) – ненулевой многочлен из P [x] и a Є P – его корень. Тогда существует и притом единственный многочлен h(x) Є P [x], для которого имеем $f(x) = (x-a)\cdot h(x)$.

A: f(x) Є P[x], f(x)≠0, a Є P,тогда
  ∃! h(x) Є P[x]:f(x)=(x-a)·h(x)+f(a)
B: f(x) Є P[x], f(x)≠0, a Є P – корень f(x), тогда
  ∃! h(x) Є P[x]:f(x)=(x-a)·h(x)

Равносильность этих двух формулировок означает, что из истинности A следует истинность B и наоборот, из истинности B следует истинность A.

Докажем, что если A истина, то B тоже:
Согласно A если условие B выполняется, то

$\exists!\ h(x) \in P[x]: f(x)=(x-a)\cdot h(x)+\underset{\underset{0}{\parallel}}{f(a)}$, т.е. f(x)=(x-a)·h(x)

Предположим, что B истина для любого многочлена f(x) и его корня a.
Условие A - f(x) Є P[x], f(x)≠0, a Є P
Рассмотрим новый многочлен $\tilde{f}(x) = f(x) - f(a)$.

$\tilde{f}(a) = f(a) - f(a) = 0$.

Т.е. a – корень $\tilde{f}(x)$, высказывание B выполняется для любого многочлена, значит выполняется для многочлена $\tilde{f}(x)$

Вывод:
∃! h(x) Є P[x]: $\tilde{f}(x)$=(x-a)·h(x), т.е.
f(x)-f(a)=(x-a)·h(x)
f(x)=(x-a)·h(x)+f(a).

13. Понятие о кратности корня многочлена с иллюстрацией на примере.

Определение:

Пусть x_0 – корень многочлена $f(x)\_(x_0 \in P_n, f(x) \in P_{[x]})$. Натуральное число k называется ***кратностью корня x_0,*** если $f(x)$ представим в виде: $f(x)=(x-x_0)^k - g(x),$ где $g(x) \in P[x]$ и $g(x_0) \neq 0.$

Алгоритм, показывающий существование k:

1. По теореме Безу существует многочлен $f_1(x) \in P_{[x]}$, для которого $f(x)=(x-x_0)\cdot f_1(x)$, если x_0 не является корнем многочлена $f_1(x)$, то процесс завершается, иначе…
2. по теореме Безу существует многочлен $f_2(x) \in P_{[x]}$, для которого $f_1(x)=(x-x_0)\cdot f_2(x),$ отсюда получаем $f(x)=(x-x_0)^2\cdot f_2(x),$ если x_0 не является корнем многочлена $f_2(x),$то процесс завершён.

Иначе : На каждом шаге степень многочлена f(x) увеличивается на 1.

Процесс закончен!

Значит на каком-то шаге ***к***, мы найдём такой многочлен $f_k(x)$, что $f(x)=(x-x_0)^k\cdot f_k(x),$причём $f_k(x_0)\neq 0,$ теперь полагаем $f_k(x)=g(x)$ и приходим к определению кратности многочлена.

Замечание:

Этот алгоритм показывает, что для любого корня многочлена можно найти его кратность. Независимо метода нахождения кратности данного корня, будет получаться одно и то же число.

Пример нахождения кратности корня

14. Схема Горнера и её применение.

В первой формулировке Безу $f(x) \in P[x]$ и число $a \in P$ существует и притом только единственный многочлен $h(x) \in P[x]$, для которого $f(x) = (x-a)h(x) + f(a)$.

Оказывается нахождение многочлена $h(x)$ и $f(a)$ удобно осуществлять по алгоритму *«Схема Горнера»*.

Схема Горнера:

Заполняется некая таблица:

$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$

$a_n \neq 0, n \in N$

$a \in P$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_1	a_0
a	a_n || def b_{n-1}	$ab_{n-1}+a_{n-1}$ || def b_{n-2}	$ab_{n+2}+a_{n-2}$ || def b_{n-3}		ab_1+a_1 || def b_0	a_0b_0+a || def f(a)

Применение схемы Горнера.

1. Выяснение является ли данное число корнем данного многочлена, если является, то определяем его кратности.

<u>Пример:</u>

$(x-2)^3(x^2+1)=(x^3-6x^2+12x-8)(x^2+1)$

$f(x)=x^5-6x^4+13x^3-14x^2+12x-8$

($x_0=2$ (корень кратности 3)).

2. Разложение данного многочлена по степени данного бинома.

<u>Пример:</u> разложить многочлен.

$f(x)=x^4-3x^2+x-2$ по степени бинома (x+1).

	1	0	-3	1	-2
-1	1	-1	-2	3	**-5**
-1	1	-2	0	**3**	
-1	1	-3	**3**		
-1	1	**-4**			
-1	**1**				

Ответ: $f(x)=(x+1)^4-4(x+1)^3+3(x+1)^2+3(x+1)-5$.

15. Отыскание рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами. Пример.

Теорема.

Если $\frac{p}{q}$ $(p \in Z, q \in N\ , \frac{p}{q} - \textit{несократимая дробь})$ – корень многочлена с целыми коэффициентами вида $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, (n \in N, a_n \neq 0)$, то $a \vdots p$ и $a_n \vdots q$. (делится нацело на p и q).

Доказательство. Т.к. $\frac{p}{q}$ – корень $f(x)$, то имеем $a_n \frac{p^n}{q^n} + \ a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$. Умножаем обе части равенства на q^n. Получаем: $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$.

Замечаем: каждая из первых n слагаемых делится на p, а значит $a_0 q^n \vdots p$, но дробь $\frac{p}{q}$ – несократимая, а значит, $a_0 \vdots p$.

Свойство: Если произведение чисел $\{mn \vdots k, \textit{то}\ (\textit{НОД}\ (n,k) = 1) => m \vdots k$. Аналогично замечаем, что каждое слагаемое, начиная со второго, делится на q. Это значит, что $a_n p^n \vdots q, \textit{т.к.} \frac{p^n}{q}$ – несократимая $=> a^n \vdots q$.

Теорема доказана.

Эта теорема дает возможность за конечное число шагов находить (если оно есть) рациональные корни любого многочлена с целыми коэффициентами.

Пример. Основная задача. Дан многочлен с целыми коэффициентами. Выяснить, имеет ли он рациональные корни и если имеет, то определить кратность каждого из них.

(x+2)(2x-3)²(x²+x+1)=(x+2)(4x²-12x+9)(x²+x+1)-(4x²-12x+9)(x³+3x²+3x+2)=4x⁵+12x⁴-12x⁴-15x³-x²+3x+18.

f(x)=4x⁵- 15x³-x²+3x+18

$p \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 18\}$—*целые делители свободного коэффициента*

$a \in \{1; 2; 4\}$—*натуральные делители старшего неизвестного*

$\frac{p}{q} \in \left\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 18; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{9}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{3}{4}; \pm \frac{9}{4}\right\}$—*несократимые дроби*

Замечание. Из теоремы следует, что если многочлен *f(x)* имеет рациональные корни, то они обязательно содержатся в этом конечном наборе чисел.

	4	0	-15	-1	3	18
1	4	4	-11	-12	-9	9 $\neq 0$
-1	4	-4	-11	10	-7	$\neq 0$
2	4	8	1	1	5	$\neq 0$
-2	4	-8	1	-3	9	0 «2»- корень
3	4	4	13	36	$\neq 0$	
-3	4	-20	61	-126	$\neq 0$	
9	4	28	253		$\neq 0$	
-9	4	-44	397		$\neq 0$	
1/2	4	-6	-2	-4	$\neq 0$	
-1/2	4	-10	6	-6	$\neq 0$	
3/2	4	4	-2	-6	0	
3/2	4	4	4	0		
1/4	4	4	5	$\neq 0$		
-1/4	4	4	3	$\neq 0$		

Если в результате вычисления в строке получается нецелое число, то обязательно справа $\neq 0$

Вывод. X=-2 – корень кратности 1, x=3/2 – корень кратности 2. Других рациональных корней нет.

Замечание: из таблицы также следует, что

$f(x) = (x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(4x^2+4x+4) = (x+2)(2x-3)^2(x^2+x+1)$ – это ответ.

16. Формулировка основной теоремы алгебры. Решение квадратных уравнений над полем комплексных чисел. Примеры.

Пусть f(x)- многочлен с комплексными коэффициентами, имеющими степень $n \geq 1$, тогда многочлен f(x) представим в виде (*):

(*) $\mathrm{f(x)} = \mathrm{a} * (\mathrm{x} - \mathrm{x}_1)^{k1} \dots (x - x_s)^{ks}$, где а, x1...xs $\in$C (числа комплексные)

k1...ks-натуральные, причем k1...ks=n, $a \neq 0$, x1...xs-попарно различны, при этом представление многочлена f(x) в виде (*)-единственно с точностью до порядка следования сомножителей.

Замечание:

1. (по Гауссу) всякий многочлен натуральной степени с комплексными коэффициентами имеет хотя бы 1 комплексный корень.
   Указание: оказывается, используя теоремы Безу и другие не сложные утверждения можно показать, что эта формулировка равносильна предыдущей.
2. Всякий многочлен n-ной степени (n$\in$N) с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней (если каждый корень считать столько раз, какова его кратность)
   Пояснение:
   $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ подсчитать кратность. Итого 3 корня(1,1,2)
   Следствие из основной теоремы следует следующая теорема:
   Пусть f(x)-многочлен с действительными коэффициентами, имеющий степень $n \geq 1$, тогда f(x)- представим в виде (**)

(**) $f(x) = a(x - x_1)^{l1} \dots (x - x_s)^{ls} * (x^2 + p_1 x + q_1)^{m1} \dots (x^2 + p_t x + q_t)^{mt}$*, где*

$a, x_1 \dots x_s, p_1 q_1 \dots p_t q_t \in IR$ (вещественные числа)

$l_1 \dots l_s, m \dots m_t \in N$ (натуральные числа)

$l_1 . + .. + l_s + 2m_1 + \dots 2m_t = n$

$a \neq 0$, x1...xs- попарно различные числа

$(p_1, q_1) \dots (p_t, q_t)$-попарно различные пары чисел

$p_1^2 - 4q_1 \dots p_t^2 - 4q_t < 0$

При этом представление f(x) в виде (**) единственно с точностью до порядка следования сомножителей.

ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ!!!! Всякий многочлен представим в виде произведения биномов и квадратных трехчленов с отрицательными коэффициентами.

ПРИМЕР.

$$x^2-(4-i)x+5+i=0$$
$$D=-5-12i$$
$$x_{1,2}=\frac{(4-i)\pm\sqrt{-5-12i}}{2}$$
$$-5-12i=(x+yi)^2$$
$$-5-12i=x^2+2xyi+y^2i^2$$
$$-5-12i=x^2+2xyi-y^2$$
$$\begin{cases}x^2-y^2=-5\\2xy=-12\end{cases}$$
$$\begin{cases}x^2-y^2=-5\\x=\dfrac{-6}{y}\end{cases}$$
$$\frac{36}{y^2}-y^2=-5$$
$$36-y^4+5y^2=0$$
$$y^2=t$$
$$t^2-5t-36=0$$
$$D=169=13^2$$
$$t_1=-4\textit{отбрасываем}$$
$$t_2=9$$
$$y^2=9$$
$$y=\pm3$$
$$y=3\to x=-2\to(-2+3i)$$
$$y=-3\to x=2\to(2-3i)$$
$$x_1=\frac{4-i-2+3i}{2}=i+1\to \textit{ответ}$$
$$x_2=\frac{4-i-(-2+3i)}{2}=-2i+3\to \textit{ответ}$$

17. Деление с остатком в кольце многочленов. Пример.

Пусть f(x) и g(x) — многочлен с коэффициентом из поля P, причём g(x) — ненулевой многочлен. Тогда существует такие многочлены g(x) и r(x) с коэффициентов из поля P, что f(x)=g(x)*q(x)+r(x) и deg r(x)<g(x). Причём для данных многочленов f(x) и g(x) многочлены g(x) и r(x) определяются единственным образом. Существование многочлена q(x) и r(x) следует из так называемого алгоритма «деление уголком».

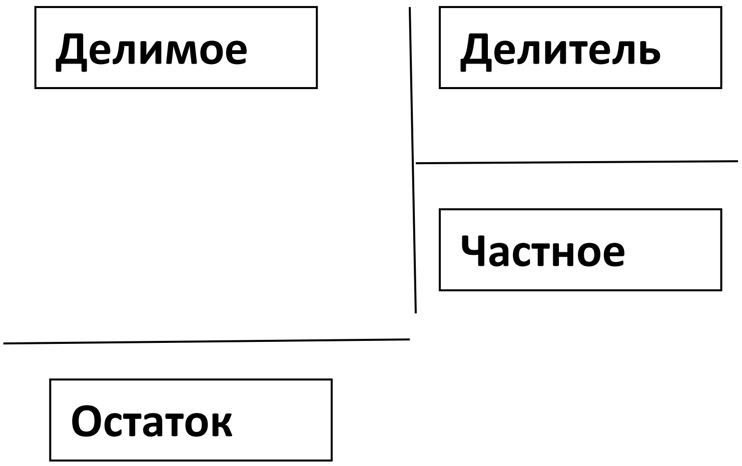
Проиллюстрируем алгоритм на конкретном примере:

$f(x)=3x^3-x^2+x-2$

$g(x)=2x^2-x+1$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3-x^2+x-2 & 2x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^3-3/2x^2+3/2x} & \quad 3/2x-1/4 \qquad \mathbf{q(x)} \\
\quad 1/2x^2-1/2x-2 & \\
\quad \underline{1/2x^2-1/4x+1/4} & \\
\qquad\qquad -1/4x-9/4 \quad \mathbf{r(x)} &
\end{array}
$$

Многочлены q(x) и r(x) из формулы теоремы называют соответственно частным и остатком, при делении f(x) на g(x).



18.Делимостьмногочленов. Некоторые свойства.

Введём понятие «делится»:

Если многочлен f(x) при делении на g(x) имеет нулевой остаток, то говорят, что f(x) делится на g(x) без остатка или ещё короче f(x) делится на g(x). При этом пишут f(x)⋮g(x) (f(x) – ненулевой многочлен).

Свойства делимости:

1. $\begin{cases} f(x)\vdots h(x) \\ g(x)\vdots h(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)+g(x)\vdots h(x) \\ f(x)-g(x)\vdots h(x) \\ f(x)\cdot g(x)\vdots h(x) \end{cases}$

2. $\begin{cases} f(x)\vdots g(x) \\ g(x)\vdots h(x) \end{cases} \Rightarrow f(x)\vdots h(x)$

3. $\begin{cases} f(x)\vdots h(x) \\ h(x)\vdots f(x) \end{cases} \Rightarrow \exists c \in R\{0\}: f(x) = c\cdot h(x)$

Многочлены, отличающиеся на множители, равные нулевому числу, называются **ассоциативными.**

19. НОД и НОК многочленов, сведение вопроса их нахождения к вопросу нахождения НОД двух многочленов.

Пусть даны совокупность многочленов $f(x),..., f_k(x)$, среди которых хотя бы один многочлен ненулевой. Многочлен наибольшей возможной степени, на который делится каждый многочлен этой совокупности называется **НОД**-ом этих многочленов.

Известно, что у одной и той же совокупности многочленов бесконечно много различных НОД, но зато все они попарно ассоциированы, т.е. существует такой НОД, при умножении которого на ненулевое число мы можем получить любой другой НОД.

НОД, у которого старший коэффициент =1 называют **приведенным НОД** многочленов $f(x),..., f_k(x)$ и обычно обозначают $(f(x),..., f_k(x))$.

Оказывается, что НОД в совокупности многочленов всегда делится на любой другой общий делитель этой совокупности.

Теперь введем понятие НОК совокупности многочленов

Пусть дана совокупность ненулевых многочленов $f(x),..., f_k(x)$ НОК этих многочленов – это многочлен наименьшей возможной степени, который делится на каждый многочлен совокупности.

Любые 2 НОК одной и той же совокупности многочленов ассоциированы. НОК со старшим коэффициентом=1 называют приведенным и обозначают $[f(x),..., f_k(x)]$

Для двух многочленов $f_1(x)$ и $f_2(x)$, которые оба являются ненулевыми выполняется равенство : $f_1(x)\ f_2(x)$=c$[f_1(x)\ f_2(x)](f_1(x); f_2(x))$ для любого ненулевого числа

Это равенство позволяет, зная НОД двух многочленов, сразу же находить их НОК

НОД нескольких мн-ов можно находить так:

1) Записываем эти многочлены

2) Находим НОД 1-го и 2-го,зачеркиваем 1-й и 2-й многочлены и вместо них записываем полученный НОД

3) Если в нашей записи только 1-н многочлен, то он и есть искомый НОД данной совокупности многочленов

Иначе возвращаемся к шагу 2

1) f_1, f_2, f_3, f_4

2) $g_1 = (f_1, f_2)$ и g_1, f_3, f_4

3) $g_2 = (g_1, f_3)$ и g_2, f_4

4) $g_3 = (g_2, f_4)$

Этот алгоритм основан на равенстве $(f_1, f_2, f_3, f_4)=(((f_1, f_2)\ f_3)\ f_4)$.

Аналогичная формула имеет место и для НОК (вместо круглых скобок ставим квадратные) и поэтому может быть использован подобный алгоритм.

Учитывая эти 2 алгоритма, приходим к выводу, что нахождение НОД или НОК любого количества многочленов можно свести к нахождению только НОД и только двух многочленов (много раз).

$$[f_1, f_2, f_3] = [[f_1, f_2]\, f_3] = \left[\frac{f_1 f_2}{(f_1 f_2)}, f_3\right] = \frac{\dfrac{f_1 f_2 f_3}{(f_1, f_2)}}{\left(\dfrac{f_1 f_2}{(f_1 f_2)}, f_3\right)} = \frac{f_1 f_2 f_3}{(f_1, f_2)\left(\dfrac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}, f_3\right)}$$

Главная идея. Нахождение НОК и НОД любого кол-ва можно свести к нахождению двух многочленов.

20. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух многочленов. Пример

Пусть даны два многочлена f(x) и g(x) над одним и тем же полем P, причем g(x)≠0. Далее будем использовать несколько раз теорему «о делимости с остатком».

Шаг 1. Делим f(x) на g(x). Найдем такие $q_1(x), r_1(x) \in P(x)$, что $f(x) = g(x)q_1(x) + f_1(x)$ и deg $r_1(x)$< deg g(x). Если $r_1(x)$ - нулевой многочлен, то процесс завершен. Иначе

Шаг 2. Делим g(x) на $r_1(x)$. Найдем такие $q_2(x), r_2(x) \in P(x)$, что $g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x)$ и deg $r_2(x)$<deg $r_1(x)$. Если $r_2(x)$ - нулевой многочлен, то процесс завершен. Иначе

Шаг 3. Делим $r_1(x)$ на $r_2(x)$. Найдем такие $q_3(x), r_3(x) \in P(x)$, что $r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x)$ и deg $r_3(x)$<deg $r_2(x)$. Если $r_3(x)$ - нулевой многочлен, то процесс завершен. Иначе

Т.к. на каждом шаге мы получаем в остатке многочлен меньшей степени, чем на предыдущем, то процесс конечен. Процесс остановится, когда в остатке получен нулевой многочлен. Допустим, что это произойдет на шаге n+1, т.е. окажется, что n+1 – нулевой многочлен, опишем последние два шага

Шаг n. Делим $r_{n-2}(x)$ на $r_{n-1}(x)$. Найдем такие $q_n(x), r_n(x) \in P(x)$, что $r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)q_n(x) + r_n(x)$ и deg $r_n(x)$<deg $r_{n-1}(x)$. Если $r_n(x)$ - нулевой многочлен, то процесс завершен. Иначе

Шаг n+1. Делим $r_{n-1}(x)$ на $r_n(x)$. Найдем $q_{n+1}(x) \in P(x)$ и т.к. шаг последний, остаток будет нулевым,

т.е. $r_{n-1}(x) = r_n(x)q_{n+1}(x)$

Этот процесс называют **алгоритмом Евклида**

Замечание.

Лемма. Если для каких-то 4-ёх многочленов $a(x), b(x), c(x)$ и d(x), где b(x)≠0 выполняется равенство $a(x) = b(x)c(x) + d(x)$, то НОД(a(x),b(x)) также является НОД(c(x),d(x))

Используя эту лемму, мы можем заметить, что у следующих пар многочленов : f(x) и g(x) ; g(x) и $r_1(x)$; $r_1(x)$ и $r_2(x)$; $r_2(x)$ и $r_3(x)$; … ; $r_{n-2}(x)$ и $r_{n-1}(x)$; $r_{n-1}(x)$ и $r_n(x)$; $r_n(x)$ и 0. НОД-ы совпадают, но НОД последней пары будет, например $r_n(x)$. Таким образом, НОД f(x) и g(x)= $r_n(x)$

Мы показали, что последний ненулевой остаток, встречающийся в алгоритме Евклида для многочленов f(x) и g(x) и является НОД(f(x),g(x))

22. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Свойства

Пусть v – векторное пространство над полем R. Сис-ма векторов$V_1..V_k$ из V называется **<u>ЛЗ</u>**, если найдутся такие не все равные 0 числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ из R, что $\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_k v_k=0$.
Сис-му векторов называют ЛНЗ, если она не является линейно зависимой.
Если для вектора w и вектора $V_1,...,V_k$ из v найдутся такие числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ из R, что $w=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_k v_k$, то говорят:
- вектор w является линейной комбинацией векторов $v_1,\ldots,v_k$.
- вектор w линейно выражается через векторы $v_1,\ldots,v_k$.
- вектор w является линейной комбинацией вектором $v_1,\ldots,v_k$ с коэффициентами $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$.

T1(Критерий ЛНЗ):
Сис-ма векторов $v_1,\ldots,v_k$ (k-натуральное число) пространства v над полем R является ЛНЗ тогда и только тогда, когда для любого набора чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ из R равенство $\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_k v_k=0$ с необходимостью влечет равенства $\alpha_1=\ldots=\alpha_k=0$.

T2(Критерий ЛЗ):
Сис-ма векторов $v_1,\ldots,v_k$ (k-натур.;k>=2) является ЛЗ тогда и только тогда, когда в ней найдется вектор, являющийся линейной комбинацией каких-то других ее векторов.
Замечание:
В этом критерии число векторов k>=2, однако понятия ЛЗ и ЛНЗ систем распространяются и на случай, когда k=1, т.е. когда сис-ма состоит только из 1 вектора.
Оказывается сис-ма, состоящая из 1 вектора является ЛЗ тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой, а значит сис-ма, состоящая из 1 вектора является ЛНЗ тогда и только тогда, когда этот вектор ненулевой.

<u>Свойства ЛЗ и ЛНЗ систем векторов:</u>

1. Если система векторов содержит нулевой вектор- то она ЛЗ
2. Если система векторов содержит 2 равных вектора, то она ЛЗ
3. Если система векторов содержит 2 пропорциональных вектора, (если 1 умножить на число, то получишь другой вектор), то она ЛЗ
4. Если какой-то вектор системы является линейной комбинацией других ее векторов, то она ЛЗ
5. Если $U_1\ldots U_m$-ЛНЗ, но $U_1\ldots U_m$ из U- ЛЗ, то U- является линейной комбинацией векторов $U_1\ldots U_m$, т.е. обязательно найдутся такие числа, что $V=\alpha_1 U_1+\ldots+\alpha_m U_m$

23. Подпространство векторного пространства. Линейная оболочка.

Пусть V – векторное пространство над полем R и U – непустое подмножество множества V. U называется подпространством пространства V, если выполняется условие:

$$\boxed{\alpha u_1 + \beta u_2 \in U, \ \forall\, \alpha\beta \in R \text{ и } \forall u_1, u_2 \in U}$$

Пример. Рассмотрим качества V

$R^2 = \{(\alpha_1\, \alpha_2) \mid \alpha_1\, \alpha_2 \in R\}$

1) $U = \{(1;0)\} \neq 0$. Будет ли U подпространством?
   Пусть $u_1=u_2 = (1;0)$ $\alpha=2$ $\beta=0$, тогда
   $\alpha*u_1+\beta*u_2 = 2\,(1;0) + 0\,(1;0)= (2;0) \notin U \Rightarrow$ U не является подпространством пространства R^2.
2) $U = \{0;0\}$ $U=\{\overline{0}\}$
   $\forall \alpha\beta \in R$ $\forall u_1u_2 \in U$, т.е. при $u_1=u_2=(0;0)$

имеем $\alpha*u_1+\beta*u_2=0$

В этом случае U является подпространством пространства R^2.

Замечание. И вообще в любом пространстве V над полем R подмножество $\{0\}$ всегда является подпространством пространства V.

Такое подпространство – нулевое.

А если окажется, что $V=\{0\}$, то и само V называется нулевым пространством.

3) Доказать, что $U=\{(\gamma;0) \mid \gamma \in R\}$ R^2

Рассмотрим систему векторов $v_1\ldots v_k$ ($k\in N$) пространства V над полем R.

Множество векторов вида $\{\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_k v_k \mid \alpha_1\ldots\alpha_k \in R\}$

Т.е. множество всевозможных линейных комбинаций векторов $v_1\ldots v_k$ называют линейной оболочкой, натянутой на векторы $v_1\ldots v_k$ (или линейной оболочкой на векторах $v_1\ldots v_k$ или ещё подпространством пространства V, порождённым векторами $v_1\ldots v_k$).

Такая линейная оболочка обозначается

$$L\,(v_1\ldots v_k) \text{ или } \langle v_1\ldots v_k\rangle$$

Теорема. Пусть V – линейное (векторное) пространство над полем R и $v_1\ldots v_k$ ($k \in N$) – системы векторов из V, тогда $L\ (v_1\ldots v_k)$ является подпространством пространства V.

24. База системы векторов, ранг. Базис пространства (подпространства), размерность.

Введем понятие **«Максимальная ЛНЗ подсистема векторов»** или то же самое **«База системы векторов»**

Пусть дана система векторов $v_1,..,v_k$, если в ней найдется подсистема $v_{i1},..,v_{ir}$ $(1\le i1< i2..< ir \le k)$, что выполняются два условия:

- $v_{i1},..,v_{ir}$ -ЛНЗ;
- $v_{i1},..,v_{ir},v_i$ -ЛЗ ($\forall\, i\in\{1,..,k\}$), то

эту подсистему и называют ***базой*** данной системы векторов v1,..,v k.

Согласно свойству 5 ,всякий вектор системы является линейным выражением векторов базы.

Теорема

Любые две базы одной и той же системы векторов состоят из одного и того же числа векторов.

Замечание:

1. Если система состоит только из нулевых векторов, то она не имеет базы.
2. Если система векторов имеет хотя бы один ненулевой вектор, то она имеет какую-либо базу и любые две базы имеют поровну векторов. Это чисто векторов в базе называют ***рангом*** системы векторов. А для определенности считают, что ранг системы, состоящей из нулевых векторов, равен нулю.

Базис пространства (подпространства).

Пусть V – векторное пространство над полем R, если найдется такая система векторов: $f_1,.. f_n$, $n \in N$, что выполняются следующие условия:

1) $f_1,.. f_n$ - *ЛНЗ*
2) $f_1,.. f_n, v$, при любом $v \in V$

то эту систему называют ***базисом пространства V***.

Замечание 1: Из условий 1 и 2 по свойству (5) п.2 следует, что ***базис*** – это такая линейно независимая система векторов, через которую линейно выражается любой вектор пространства *V*.

Замечание 2: Если *V* является нулевым пространством ($V = \{\overline{0}\}$), то оно базисов НЕ имеет.

Оказывается, любые 2 базиса (если они есть) одного пространства имеют поровну векторов. Число векторов в базисе пространства *V* называется ***размерностью пространства V*** и обозначается *dim V*. Для определенности при $V = \{\overline{0}\}$ полагают, что $dim\ V = 0$.

Оказывается, если *U* – подпространство пространства *V* над полем R, то *U*, относительно операций сложение векторов и умножение вектора на число, удовлетворяет свойствам (1-8) векторного пространства.

Это означает, что подпространство само является пространством, а поэтому имеет смысл говорить о базисе и размерности подпространства *U*.

25. Евклидово пространство.

Пусть дано векторное пространство E над полем R. На множестве векторов E, кроме двух операций сложения векторов и умножения векторов на действительные числа, вводится третья операция, называемая ***скалярным произведением векторов.*** Для любых векторов $U,V \in E,$ определяем однозначно определённое комплексное число (U,V), причём должны выполняться 4 свойства:

1. $(V,U)=(U,V)\forall_{U,V} \in E-$ коммутативность;
2. $(U+V,W)=(U,W)+(V,W)\forall_{U,V,W} \in E-$аддитивность по левой компоненте;
3. $(\alpha U,V)=\alpha(U,V)\forall_{U,V} \in E,\forall_{\alpha} \in R-$однородность по левой компоненте;
4. $(U,U)\geq 0,\forall_{U} \in E,$ причём $(U,U)=0 \Leftrightarrow U=\vec{0}-$эрмитовость;

Замечание:

Свойств 1-4 обычно называют ***характерными свойствами скалярного произведения***, т.е. операции произведения векторов, в результате которых, получаются действительные числа, причём эта операция удовлетворяет свойствам 1-4 и называется *скалярным произведением векторов.*

На одном и том же E существует бесконечно много способов задания операции скалярного произведения. Векторное пространство E над полем R, на котором задана операция скалярного произведения.

26. Унитарное пространство, пространство C^n.

Пусть дано векторное пространство U над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. На U определена операция скалярного произведения векторов.

Любой паре U,V∈U ставится в соответствие однозначно определенное комплексное число, обозначаемое (U,V) и называемое скалярным произведением векторов U и V. Причем, выполняются 4 свойства:

1) (U,V) = $\overline{(V,U)}$, ∀ U,V ∈U, (не коммутативно умножение в U);
2) (U+V,W) = (U,W)+(V,W), ∀u,v,w $\in U$;
3) (α,U,V)= α(U,V) ∀α$\in C, \forall u, v \in U$;
4) (U,U)≥ 0, $\forall u \in U,$ *причем* $(U, U) = 0 <=> U = \overline{0}$

Определение.

Векторное пространство U над полем C, на котором определена операция скалярного произведения векторов, удовлетворяющая свойствам 1-4 называется ***унитарным пространством.***

<u>Пример:</u> рассмотрим множество строк унитарного пространства.

C^n =$\{(\alpha_{1,}, \dots, \alpha_n)|\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}\}$. Сложение строк и умножение строк на комплексные числа осуществляется также, как и в обычном арифметическом пространстве строк. А скалярное произведение двух произвольных строк $U = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $V = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in C^n$ осуществляют по правилу: $(U, V) = \alpha_1 * \overline{\beta_1} + \alpha_2 * \overline{\beta_2} + \dots + \alpha_n * \overline{\beta_n}$ – унитарное пространставо.

27.1. Свойства операций скалярного произведения в Евклидовых пространствах

E – евклидово пространство(над полем R)

Аксиоматические свойства скалярного произедения (Определяющие)

1) (u,v)= $(v,u)\ \ \forall u,v\in E$ - **коммутативность**

2) (u+v,w)=(u,w)+(v,u) $\forall u,v,w\in E$ - **аддитивность по левой компоненте**

3) (αu,v)=α(u,v) $\forall u,v\in E\ \forall\alpha\in R$ - **однородность по левой компоненте**

4) (u,v)$\geq$0 $\forall u\in E$, причем (u,v)=0 $\Leftrightarrow u=\bar{0}$

Определяющие свойства 2 и 3 можно заменить на одно свойство:

$(\alpha u+\beta v,w)=\alpha(u,v)+\beta(v,w)\quad\forall u,v,w\in E\ \ \forall\alpha,\beta\in R$ - **линейность по левой компоненте**

Оказывается свойство линейности по левой компоненте может быть записано и в более общем виде:

$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i;v\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(u_i;v)\quad\forall\alpha_1,...,\alpha_n\in R\quad\forall u_1,...,u_n,v\in E$ - **обобщенное свойство линейности по левой компоненте**

Сформулируем несколько свойств для правой компоненты:

1) (u;v+w)=(u,v)+(u,w) $\forall u,v,w\in E$ - **аддитивность по правой компоненте**

2) (u,αv)=α(u,v) $\forall u,v\in E\ \forall\alpha\in R$ - **однородность по правой компоненте**

3) $(u;\alpha v+\beta w)=\alpha(u,v)+\beta(u,w)\qquad\forall\alpha,\beta\in R\quad\forall u,v,w\in E$ - **линейность по правой компоненте**

4) $\left(u;\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(u;v_i)\quad\forall\alpha_1,...,\alpha_n\in R\quad\forall u,v_1,...,v_n\in E$ **-обобщённое свойство по правой компоненте.**

Имеются и другие очевидные свойства

5) $(\bar{0};u)=(u;\bar{0})=0\quad\forall u\in E$

Докажем свойства аддитивности и однородности по правой компоненте:

1) $(u,v+w)\overset{1)}{=}(v+w;u)\overset{2)}{=}(v,u)+(w;u)\overset{1)}{=}(u,v)+(u;w)$ ■

2) $(u,\alpha v)\overset{1)}{=}(\alpha v;u)\overset{2)}{=}\alpha(v,u)\overset{1)}{=}\alpha(u,v)$ ■

27.2. Свойства операций скалярного произведения в Унитарных пространствах

Рассмотрим Унитарное пространство
U (над полем C)

1) (u,v)= $(u,v)=\overline{(v,u)}\quad \forall u,v\in U$ - **коммутативность**

2) (u+v,w)=(u,w)+(v,u) $\forall u,v,w\in U$ **- аддитивность по левой компоненте**

3) (αu,v)=α(u,v) $\forall u,v\in U\ \forall\alpha\in R$ **- однородность по левой компоненте**

4) (u,v)$\geq$0 $\forall u\in U$, причем (u,v)=0 $\Leftrightarrow u=\bar{0}$

Как и в случае Евклидова пространства определяющие свойства 2 и 3 равносильны одному свойству линейности по левой компоненте. Также в Унитарном пространстве выполняется и свойство обобщенной линейности по левой компоненте . В свойствах, связанных с правой компонентой имеются как совпадения, так и различия с Евклидовым пространством

Свойства для правой компоненты:

1) (u;v+w)=(u,v)+(u,w) $\forall u,v,w\in U$ **- аддитивность по правой компоненте**

2) (u,αv)= $\bar{\alpha}$ (u,v) $\forall u,v\in U\ \forall\alpha\in C$ **- неоднородность по правой компоненте**

3) $(u;\alpha v+\beta w)=\bar{\alpha}(u,v)+\bar{\beta}(u,w)\qquad \forall\alpha,\beta\in C\quad \forall u,v,w\in U$ **- полулинейность по правой компоненте**

4) $\left(u;\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i(u;v_i)\quad \forall\alpha_1,...,\alpha_n\in C\quad \forall u,v_1,...,v_n\in U$

5) $(\bar{0};u)=(u;\bar{0})=0\quad \forall u\in U$

Заключение. Обычно термин «обобщенная линейность» не используется, говорят просто «линейность». Самое общее свойство линейности по обеим компонентам в Евклидовом пространстве записывается в виде:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i;\sum_{j=1}^{m}\beta_j v_j\right)=\sum_{1\leq i,j\leq n}\alpha_i\beta_j(u_i;v_j)\quad \forall\alpha_1,...,\alpha_n,\beta_1,...,\beta_m\in R\quad \forall u_1,..,u_n,v_1,...,v_m\in E$$

Это свойство часто называют просто **«линейностью скалярного произведения векторов в Евклидовом пространстве»** (по обеим компонентам)

Имеет место аналогичное свойство и в Унитарном пространстве:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i;\sum_{j=1}^{m}\beta_j v_j\right)=\sum_{1\leq i,j\leq n}\alpha_i\bar{\beta}_j(u_i;v_j)\ \forall\alpha_1,...,\alpha_n,\beta_1,...,\beta_m\in C\quad \forall u_1,..,u_n,v_1,...,v_m\in U$$

Обычно это свойство называют **«полулинейностью скалярного произведения векторов в Унитарном пространстве»** (линейность по левой компоненте и наполовину линейность по правой компоненте)

28. Неравенство Коши – Буняковского (Шварца).

<u>Теорема:</u>

Для любых векторов u и v Евклидового пространства выполняется неравенство:

$$\mathbf{(u;v)^2 \le (u;u)\cdot(v;v)}$$

<u>Замечание:</u>

Это неравенство и называется *неравенством Коши – Буняковского.*

<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим уравнение

$(u;u)\,x^2+2(u;v)x+(v;v)=0.$

Если бы $(u;u)=0$,т.е. $u=\bar{0}$, то $(u;v)=(\bar{0};v)=0$ и доказываемое неравенство превратится в $0^2 \le 0\ (v;u)$ т.е. в истинное неравенство и в этом случае, доказывать нечего. Поэтому будем считать, что$(u;u)\neq 0$ по 4-му свойству скалярного произведения $(u;v) > 0$ и наше уравнение является квадратным уравнением.

Рассмотрим следующее

Замечаем, что для любого действительного числа по 4-ой аксиоме:

$(xu+v;\ xu+v) \ge 0\ \forall\, x \in R$

Используя свойство линейности по обеим компонентам, левая часть неравенства принимает вид:

$x^2(u;u)+x(u;v)+x(v;u)+(v;v)=(u;u)x^2+2(u;v)x+(v;v).$

Мы доказали, что для любого действительного числа x выполняется неравенство $(u;u)x^2+2(u;v)x+(v;v) \ge 0.$

Это значит, наше исходное уравнение имеет либо один корень (дискриминант = 0) или вообще нет корней (Д<0) с учетом того, что ветви параболы направлены вверх. Т.о. мы приходим к условию, что дискриминант этого квадратного уравнения ≤ 0, т.е.

$(2\,(u;v))^2- 4(u;u)\cdot(v;v) \le 0,$

$(u;v)^2 \le (u;u)(v;v)$

(что и требовалось доказать).

Оказывается, в унитарном пространстве имеет место неравенство почти такого же вида:

$|(u;v)|^2=(u;u)(v;v)\ \ \forall\ u,v \in U.$

Это неравенство называется *неравенством Шварца для унитарных пространств*.

29. Длина векторов и углы между ними в евклидовых и унитарных пространствах. Пример.

Пусть V- евклидовое или унитарное пространство, Для любого v∈V по 4 аксиомам скалярного произведения (v,v)- действительное неотрицательное число, а значит, мы можем рассмотреть арифметический квадратный корень вида: $\sqrt{(v,v)}$. Это число действительное и неотрицательное, это число и есть – длина вектора v и обозначается $|v|$, т.е. $|v| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(v,v)}$где $\forall v \in V$

Длина вектора удовлетворяет характерным свойствам длин геометрических векторов:

1). $|v| \geq 0 \ \ \forall v \in V$ (неотрицательность)

2).$|\alpha v| = |\alpha| * |v| \ \forall v \in V, \forall \alpha \in P$

3). $|u + v| = |u| + |v| \ \forall u, v \in V$

Неравенство Коши-Буняковского для Евклидова пространства и неравенства Шварца в унитарном пространстве используют понятия «длина вектора» могут быть записаны в виде:

$|(u,v)| \leq |u| * |v| \ \ \forall u, v \in V$

Если u и v – оба ненулевые векторы, т.е. $|v| = \sqrt{(v,v)} > 0$ и$|u| = \sqrt{(u,u)} > 0$, то неравенства могут быть переписаны в виде:

$\frac{|(u,v)|}{|u|*|v|} \leq 1$ или в виде двойного нерав-ва $-1 \leq \frac{|(u,v)|}{|u|*|v|} \leq 1$

В связи с этими соображениями, в Евклидовом пространстве Е для любых ненулевых векторов u и v определяем «угол φ» между векторами u и v по формуле: $\varphi = arccos\frac{(u,v)}{|u|*|v|}$

А в унитарном пространстве определяют понятие уголφ между ненулевыми векторами u и v по формуле:

$$\varphi = arccos\frac{|(u,v)|}{|u| * |v|}$$

Из этих определений ясно, что в евклидовом пространстве углы между векторами могут быть от 0^0 до 180^0, а в унитарном от 0^0 до 90^0.

<u>Пример:</u> В евклидовом пространстве R^4 найти угол между векторами w_1 и w_2, если $w_1 = (3;0;0;-4), w_2 = (1;0;-2;2)$.

$\varphi = arccos\frac{(u,v)}{|u|*|v|}$, (u;v)=(3+0+0-8)=-5

|u|=$\sqrt{25} = 5$, |v|=$\sqrt{9}$=3

Cosφ=$\frac{-5}{15}$=-$\frac{1}{3}$

φ=*Arccos* (-$\frac{1}{3}$)

30. Ортогональные системы векторов. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта

Если в конечной системе векторов любые 2 вектора ортогональны, то ее называют ортогональной. Систему, состоящую только из 1 вектора часто считают тоже ортогональной

Если в ортогональной системе векторов длины всех векторов =1, то ее называют ортонормированной системой векторов

Говорят, что если в результате некоторого процесса из системы векторов $a_1,...,a_n$ некоторого пространства получена ортогональная система векторов $b_1,...,b_m$, такая что линейная оболочка $z(a_1,...,a_n) = z(b_1,...,b_m)$, сам этот процесс ортогонализации

Существует много способов ортогонализации системы векторов. Один из них – процесс Грамма-Шмидта

Дано $a_1,...,a_m$

Шаг 1. Положим $b_1 = a_1$

Шаг 2. Положим $b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1$

Шаг m. Положим $b_m = a_m - \frac{(a_m, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - ... - \frac{(a_m, b_{m-1})}{(b_{m-1}, b_{m-1})} b_{m-1}$

Оказывается, что векторы $b_1,...,b_m$ образуют ортогональную систему и линейная оболочка = $z(b_1,...,b_m) = z(a_1,...,a_m)$

Замечание 1. Если в ортогональной системе векторов все векторы ненулевые, то мы опять получим ортогональную систему векторов

Замечание 2. Если в ортогональной системе векторов все векторы ненулевые, то она ЛНЗ

Замечание 3. Если в ортогональной системе векторов, на которую натянута линейная оболочка, отбросить ненулевые векторы, то получим базис(даже ортогональный базис) этой оболочки

Замечание 4. Говорят, что вектор $\frac{1}{|u|} u$ получен в результате нормирования ненулевого вектора и ясно, что длина этого вектора=1 $\left| \frac{1}{|u|} u \right| = 1$

В связи с этим и предыдущими замечаниями мы можем указать алгоритм нахождения ортонормированного базиса линейной. оболочки, натянутого на данную систему векторов $(a_1,...,a_n)$. **Вот этот алгоритм:**

1) Ортогонизуем систему векторов по Г-Ш

2) Отбрасываем в полученной системе ненулевые векторы

3) Оставшиеся ненулевые векторы нормируем

В результате получим ортонормированный базис этой линейной оболочки

31. Ортонормированный базис Евклидово и Унитарного пространства. Скалярное произведение векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе

Пусть V – Евклидово или Унитарное пространство и $u_1,...,u_n$ $(n \in N)$ какой-то его базис. Применяя процесс Г-Ш к системе векторов $u_1,...,u_n$ мы получим ортогональную систему векторов, что выполняется данное равенство $z(v_1,...,v_n)=z(u_1,...,u_n)=V$. Откуда следует, что $v_1,...,v_n$ - это тоже базис пространства V, но только ортогональный. Нормируя все его векторы, т.е. полагая $f_1=\frac{1}{|v_1|}v_1,..., f_n=\frac{1}{|v_n|}v_n$, мы найдем ортонормированный базис $f_1,..., f_n$ прост-ва V.

Эти рассуждения показывают, что всякое ненулевое конечно мерное Евклидово и Унитарного пространства обладают ортонормированным базисом.

По определению ортонормированного базиса $f_1,..., f_n$ должны выполняться следующие неравенства.

$(f_1,f_1)=1,(f_1,f_2)=0,...,(f_1,f_n)=0$

$(f_2,f_1)=0,(f_2,f_2)=1,...,(f_2,f_n)=0$

\- -

$(f_n,f_1)=0,(f_n,f_2)=0,...,(f_n,f_n)=1$

короче $(f_i,f_j)=\begin{cases}1, \text{если } i=j\\ 0, \text{если } i\neq j\end{cases}$ $\forall i,j \in \{1,...,n\}$ (*)

Мы доказали, что в ортонормированном базисе $f_1,..., f_n$ Евклидова или Унитарного пространства выполняются равенства (*).

Теперь пусть в пространстве V заданы своими координатными столбцами в этом базисе 2 вектора $[x]_f=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ ...\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ и $[y]_f=\begin{pmatrix}\beta_1\\ ...\\ \beta_n\end{pmatrix}$. Используя равенство (*) выведем формулу для нахождения скалярного произведения векторов (x;y) этих векторов.

1) V=E – Евклидово пространство.

$$(x;y)=(\alpha_1 f_1+...+\alpha_n f_n;\beta_1 f_1+...+\beta_n f_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i;\sum_{j=1}^{n}\beta_j f_j\right)=\sum_{1\le i,j\le n}\alpha_i\beta_j(f_i,f_j)\overset{(*)}{=}\sum_{1\le k,k\le n}\alpha_k\beta_k(f_k,f_k)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k$$

Мы пришли к формуле:

$$(x;y)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k$$

Рассмотрим второй случай

2) V=U – Унитарное пространство. В Унитарном пространстве свойства линейности по обеим компонентам не выполняются, выполняются свойство полуторалинейности, из которого следует, что

$$(x;y)=\sum_{1\le i,j\le n}\alpha_i\overline{\beta}_j(f_i,f_j)\overset{(*)}{=}\sum_{1\le k,k\le n}\alpha_k\overline{\beta}_k(f_k,f_k)=\sum_{1\le k\le n}^{n}\alpha_k\beta_k=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overline{\beta_k}$$

Мы вывели формулу : $(x;y)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overline{\beta_k}$

Операции скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе полностью совпадают с операциями скалярного произведения в пространствах R^n или C^n, если на векторы этих пространств смотреть как на коэффициенты строки. Это говорит о том, что любое конечно мерное или Евклидово или Унитарное пространство по своим внутренним свойствам(изоморфно) какому-то пространству строк

32. Нахождение длин векторов и углов между ними в Евклидовом(E) и Унитарном(U) пространствах по их координатам в ортонормированном базисе.

1. Рассматриваем Евклидово пространство E с ортонормированным базисом $f_1,\dots,f_n (n \in N)$. Пусть $[x]_f = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, [y]_f = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

1.1. $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k$

$$|x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \alpha_k} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {\alpha_k}^2}$$

1.2. $|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2}$

Если $x, y \neq \bar{0}$, то $\cos \widehat{xy} = \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|}$, тогда

1.3. $\widehat{x, y} = arccos \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {\alpha_k}^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {\beta_k}^2}}$

2. Рассматривается Унитарное пространство U с ортонормированным базисом $f_1,\dots,f_n (n \in N)$. Пусть $[x]_f = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, [y]_f = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

2.1. $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta_k}$

$$|x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \bar{\alpha}_k} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2}$$

2.2. $|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2}$

2.3. Если $x, y \neq \bar{0}$, то $\cos \widehat{xy} = \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|}$, тогда

$$\widehat{x, y} = arccos \frac{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k \bar{\beta}_k|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^2}}$$