Оглавление

1. Государственная итоговая аттестация по математике среднего общего образования (ЕГЭ-11): Нормативно-правовые документы, демоверсии

ЕГЭ – централизованно проводимый в Российской Федерации экзамен в средних учебных заведениях – школах, лицеях и гимназиях, форма проведения ГИА по образовательным программам среднего общего образования. *Служит одновременно выпускным экзаменом из школы и вступительным экзаменом в вузы*. При проведении экзамена на всей территории России применяются однотипные задания и единые методы оценки качества выполнения работ. После сдачи экзамена всем участникам выдаются свидетельства о результатах ЕГЭ, где указаны полученные баллы по предметам. <u>С 2009 года ЕГЭ является единственной формой выпускных экзаменов в школе и основной формой вступительных экзаменов в вузы</u>, при этом есть возможность повторной сдачи ЕГЭ в последующие годы. <u>Впервые эксперимент по введению ЕГЭ был проведён в 2001</u>. Организацию проведения ЕГЭ осуществляет Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки совместно с органами исполнительной власти субъектов Российской Федерации, осуществляющими управление в сфере образования.

Нововведения В ЕГЭ по математике 2011-2014: были включены <u>задачи по разделу «Вероятность и статистика» и задания по курсу геометрии</u>. **Нововведения в ЕГЭ-2015 года**: <u>Разделение ЕГЭ по математике на базовый и профильный уровни</u>. **Нововведения в ЕГЭ-2016 года** Математика: <u>в профильном уровне из первой части исключены два задания: задание практико-ориентированной направленности базового уровня сложности и задание по стереометрии повышенного уровня сложности</u>. Максимальный первичный балл уменьшился с 34 до 32 баллов.

Сейчас **Структура КИМ ЕГЭ** Экзаменационная работа состоит из двух частей, которые различаются по содержанию, сложности и числу заданий: – часть 1 содержит **8 заданий** (задания 1–8) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби; – часть 2 содержит **4 задания** (задания 9–12) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби и **7 заданий** (задания 13–19) с развернутым ответом (полная запись решения с обоснованием выполненных действий). **Задания части 1 направлены на проверку освоения базовых умений и практических навыков применения математических знаний в повседневных ситуациях. Посредством заданий части 2 осуществляется проверка освоения математики на профильном уровне, необходимом для применения математики в профессиональной деятельности и на творческом уровне**. По уровню сложности задания распределяются следующим образом: задания 1–8 имеют базовый уровень; задания 9-17 – повышенный уровень; задания 18 и 19 относятся к высокому уровню сложности. Задания части 1 предназначены для определения математических компетентностей выпускников образовательных организаций, реализующих программы среднего (полного) общего образования на базовом уровне. Задания 13–19 с развернутым ответом, в числе которых 5 заданий повышенного и 2 задания высокого уровней сложности, предназначены для более точной дифференциации абитуриентов вузов.

2. Роль и место математического образования в современном обществе

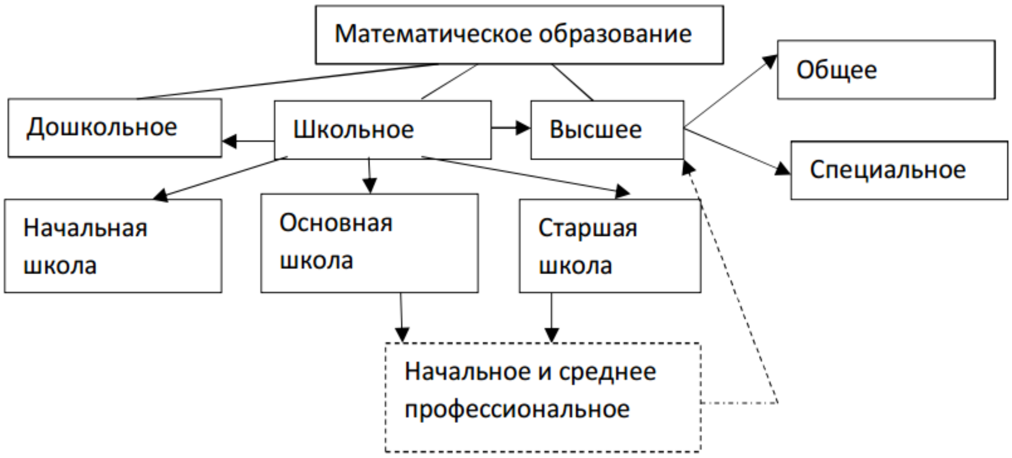
Математика изучает не предметы реального мира, а количественные отношения и пространственные формы, им свойственные. В связи с этим выделяется абстрактность объектов, которые изучает математика. Эта абстрактность порождает два свойства математических знаний: **универсальность** и **формально-логическую выводимость**. **Процесс усвоения математических знаний**, которые представлены как хорошо организованная система взаимосвязанных между собой элементов, **формирует системность и структурность мышления**. Процесс решения математических задач требует постоянного проведения анализа, сравнения и синтеза информации. **Работа с математическими понятиями раскрывает процессы обобщения и классификации**. Изучение геометрических объектов позволяет развивать пространственные представления и воображение. Доказательство теорем раскрывает процесс построения аргументации для проведения доказательных рассуждений. Выделенные выше операции и свойства мышления обусловливают обязательность включения математики в содержание общего и профессионального образования *как инструментов развития интеллектуальной сферы обучающегося*. Само обучение математике и другим дисциплинам должно быть построено так, чтобы демонстрировать возможность универсальности применения приобретенных знаний. Проверка знаний и умений по математике является обязательным в России. **Проверяются следующие математические умения на ЕГЭ**:

1. Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни (Б, П)
2. Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами (Б, П)
3. Уметь строить и исследовать простейшие математические модели (Б, П, В)
4. Уметь решать уравнения и неравенства (Б, П, В)
5. Уметь выполнять действия с функциями (Б, П)
6. Уметь выполнять вычисления и преобразования (П)

3. Основные тенденции развития математического образования в России. Математическое образование в системе непрерывного образования

Главные тенденции оказывающие, наибольшее влияние на содержание и организацию обучения матем.: *гуманизацию, гуманитаризацию и технологизацию математического образования*. **Гуманизация** проявляется в установлении приоритетов при организации процесса обучения мат. Эти приоритеты связаны с ориентацией на личность учащегося, на развитие её интеллектуального потенциала и познавательных возможностей. Особое внимание при обучении матем. сегодня уделяется дифференциации (уровневой и профильной) и индивидуализации обучения – она предполагает учет более ярких особенностей отдельных детей (либо математически одаренных, либо имеющих ярко выраженные психологические особенности**).** **Гуманитаризация** мат. обр. состоит в выделении в содержании обучения матем. элементов, обращенных к человеку и обществу, таких, как использование математических знаний в повседневной деятельности человека, матем. открытия как отклик на потребности общества. Это выделение тех аспектов в мат. знаниях, которые традиционно относятся к гуманитарным наукам – история развития мат., судьбы людей, внесших вклад в мат. науку, проблемы формирования и использования мат. языка, использование матем.

закономерностей при создании произведений искусства. Под **технологизацией** матем. обр. понимают осмысление процесса обучения мат. как регламентированной смены четко описанных этапов, имеющих высокую степень результативности, а также разработку четко описанных приемов обучения, обладающих высокой степенью результативности в массовом масштабе. Эта тенденция проявляется в связи с массовым характером организации обучения в рамках классно-урочной системы с большим количеством участников процесса обучения и необходимостью получать положительный результат обучения. В современной России система математического образования является частью системы непрерывного образования.



4. Основные линии курса алгебры и начал анализа и их реализация в действующих учебниках

В курсе алгебры и начал анализа выделяют следующие **содержательно-методические линии**:

– **линия числа** (систематизация сведений о действительных числах, комплексные числа);

– **линия функций** (тригонометрические, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая, степенная функция, понятие обратной функции, общие свойства функций и схема исследования функций с помощью производной);

– **линия преобразований** (тригонометрические выражения и тождества, степени, логарифмы);

– **линия уравнений и неравенств** (тригонометрические, показательные, логарифмические уравнения и неравенства, иррациональные уравнения, системы уравнений и неравенств, иррациональные неравенства, уравнения и неравенства с параметром);

– **линия элементов анализа** (понятие производной, техника дифференцирования, приложения производной к исследованию функций, геометрический смысл производной, первообразная, понятие предела последовательности и функции, теоремы о пределах, определенный интеграл, простейшие дифференциальные уравнения);

– **вероятностно-статистическая линия** (основные понятия теории вероятностей);

– **событие, вероятность, случайная величина**, операции и свойства операций над событиями, основные теоремы теории вероятностей, закон распределения и функции распределения случайной величины, основные характеристики случайных величин).

Общие закономерности:

1. Более высокий уровень абстракции и логической организации изучаемого материала.

2. Происходит переход изучения на уровень методов (методы дифференциального исчисления, векторный и координатный методы);

3. Происходит знакомство учащихся с фундаментальными понятиями математики (действительное число, предел последовательности, производная функции, определенный интеграл и др.)

4. Завершаются основные линии школьного курса математики, что позволяет систематизировать, обобщить знания учеников. При этом появляются и новые линии

5. Средствами математики обеспечивается процесс формирования естественнонаучной картины мира, происходит усиление прикладной направленности школьного курса математики, математический аппарат широко используется в смежных дисциплинах.

6. Содержание ориентировано на подготовку к государственной аттестации, продолжение математического образования на различных уровнях в высшей школе, что, в частности, предполагает организацию активной самостоятельной познавательной деятельности при изучении старшеклассниками содержания

5. Общая характеристики курса геометрии в 10-11 классах

Одним из условий успешного усвоения учащимися систематизации курса геометрии является у них **наличие хорошо развитых пространственных представлений**, поэтому задача дальнейшего их развития у учащихся в процессе изучения геометрии является одной из первостепенных. Наиболее эффективным средством для развития пространственных представлений у учащихся является использование наглядности в учебном процессе: примеры из окружающей действительности, модели геометрических фигур из картона и проволоки, специально изготовленные рисунки на плакатах, в компьютерных презентациях, построенные модели. Большая роль в развитии пространственных представлений отводится устным задачам, в том числе задачам на моделях, задачам на готовых чертежах.

При этом важно иметь определенную систему устных задач, предназначенных для использования при введении новых понятий и закреплении уже известных, при изучении свойств понятий. Важно умело использовать наглядные и технические средства обучения, разумно сочетать их с рассказом учителя, с самостоятельной работой. В процессе преподавания курса геометрии необходимо постоянно заботиться о развитии интереса учащихся к изучаемой теории, постоянно обращаться к историческому материалу, к производственным и занимательным задачам, аргументированно мотивировать изучении программных вопросов.

Основное содержание стереометрии в 10—11 классах.

1. Параллельность прямых и плоскостей.

2. Перпендикулярность прямых и плоскостей

3. Многогранники

4. Векторы в пространстве.

5. Метод координат в пространстве. Движения.

6. Цилиндр. Конус. Шар.

7. Объемы тел.

6. Дидактические принципы методики обучения решению математических задач с экономическим содержанием

Специфические особенности задач с экономическим содержанием заключаются в применяемых методах решения: **элементарные алгебраические и геометрические методы по отысканию экстремумов, методы классического анализа для отыскания оптимальных значений величин**. Для решения задач математического программирования разработаны свои специфические методы. Задачи, в которых исследуются случайные процессы, решаются стохастическими методами. Конфликтные ситуации исследуются игровыми методами.

Если обратиться к ведущим принципам обучения с указанной точки зрения, то *принцип развивающего обучения регулирует соотношение овладения содержанием изучаемого и развития*. Этот принцип в обучении решению задач с эконом. сод. нацеливает эконом. понятия для придания им математической формы, при этом развитие заключается в увеличении области знаний.

Принцип систематичности нацеливает на достижение единства части и целого, элемента и структуры в овладении содержанием. Так приращение функции применяется для формирования понятия производной, эластичности.

Принцип наглядности регулирует отношение и взаимосвязь конкретно-образных и абстрактно-логических элементов в познании. Он позволяет переходить от конкретных экономических показателей к абстрактным.

Принцип прочности знаний формирует взаимосвязь и взаимодействие восприятия и осмысления, без чего не может быть решение математических задач, а также запоминание необходимых для этого экономических процессов.

Принцип научности соотносит явление и сущность, объяснение и прогноз, интерпретацию и преобразование действительности. Без интерпретации не может быть достигнуто понимание математической сути экономических понятий.

Принцип положительной мотивации и благоприятного эмоционального фона устанавливает соотношение потребности и долга, рационального и эмоционального.

В дидактике рассматриваются принципы, двойственность которых в их наименовании: связи теории с практикой, сочетания педагогического управления с развитием самостоятельности обучаемых, единства учебной и научно-исследовательской деятельности (в ВУЗе), сочетания коллективной работы с индивидуальным подходом. Указанные принципы лежат в основе методики обучения решению математических задач с экономическим содержанием. **В системе должен быть центральный системообразующий принцип – принцип развивающего и воспитывающего обучения, он тесно связан с принципом социокультурной и природной сообразности обучения**, для профессионального образования связан с принципом фундаментальности и профессиональной направленности. Поскольку тема исследования предусматривает обучение, как математике, так и экономике, принципы обучения составляют систему. Принцип соответствия математической теории экономическим понятиям направлен на обучение решению задач с экономическим содержанием методом математического моделирования. Принцип взаимосвязанного изучения математики и экономики позволяет использовать математические понятия в экономике и одновременно экономическими понятиями интерпретировать математическую теорию. Здесь обучение осуществляется на основе сетевых моделей или сетевых графиков. Графики следует составлять по изучению отдельных вопросов, учебных тем и учебных дисциплин математики и экономики. Сетевое моделирование должно выполняться по хронологическому критерию. Применение сетевых моделей в планировании обучения является новизной.

7. Экономические функции

Для расчета финансовых операций по кредитам, ссудам, займам существуют экономические функции, которые имеют определенный синтаксис с заложенными в них основными понятиями, представленными на схеме:

Временное значение денег, то есть вычисления, производимые над денежными суммами, могут производиться в прошлом, настоящем или будущем.

Приведенная стоимость – это основная (капитальная) сумма. В финансовой математике её называют дисконтированной стоимостью. Дисконтирование – процесс нахождения текущей оценки в будущем денежных потоков. Например, если берется ссуда размером X рублей на приобретение чего-либо, то X рублей – это приведенная стоимость ссуды; или, например, если осуществляется банковский вклад размером Y рублей, то Y рублей – это капитал, или приведенная стоимость вложенных денег. Приведенная стоимость может быть как положительной, так и отрицательной.

Будущая стоимость состоит из приведенной стоимости и начисленным по ней процентам. Будущая стоимость (я – заемщик или я - кредитор) может быть как положительной, так и отрицательной.

Взнос – это платеж, выплачиваемый каждый период. Может быть либо капитал, либо капитал и начисленные на него проценты.

Процентная ставка - часть основной суммы (в процентах), начисляемая за фиксированный период (как правило, год).

Период – промежуток времени, по истечении которого выплачиваются проценты. Может составлять год, квартал, месяц, день.

Срок – промежуток времени, на который делают вклады или берут ссуду. А в финансово-кредитной сфере под *процентом* понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг (кредит) в любой его форме. Также в выше указанных понятиях заложено понятие «сложный процент». Вычисление будущей стоимости происходит по схеме сложных процентов.

8. Обучение учащихся решению экономических задач на проценты в рамках ЕГЭ

Математические задачи встречаются в различных отраслях человеческих знаний. Особую актуальность имеют задачи, связанные с процентами. Поэтому задачи данной тематики присутствуют в различных разделах ЕГЭ. Анализ заданий вариантов ЕГЭ с 2010г. показывает обязательное наличие таких задач в группе В, а с 2015г. и в группе задач повышенного уровня.

К текстовым задачам на проценты относятся задачи, в которых речь идет о вкладах в банк под тем или иным процентом, о прибыли, о выполнении плана, об изменении цены на товар, т. е. в большей части экономические задачи. Анализ данной темы в современных учебниках показывает, что большинство авторов, при введении понятия процента и решении типовых задач, опирается на действия с обыкновенными дробями. После изучения десятичных дробей и операций над ними приступают к решению перевода процентов в десятичную дробь. Тема разворачивается по спирали, и при каждом переходе учащиеся возвращаются к процентам на новом уровне, и их знания пополняются и добавляются новые типы задач и приемы решения. **Трудности** при рассмотрении данной темы состоят в том, что на начальном этапе ученику необходимо выполнять операцию перевода процентов в десятичные дроби. Так как учащиеся до изучения данной темы не имеют представления о понятии процентов, им трудно опереться на жизненные ситуации. Особую трудность учащиеся испытывают при решении задач на нахождение части от числа и числа по величине его части. Если при изучении дробей одно арифметическое действие всегда соответствовало одной операции (сложение, вычитание, умножение, деление), то теперь при рассмотрении таких задач, одно арифметическое действие выполняется с помощью двух операций (при умножении и делении на дробь). При рассмотрении задачи на смеси и сплавы и экономические задачи, которые являются задачами повышенной сложности, у учащихся также могут возникнуть затруднения из-за низкой математической культуры. В виду этих сложностей целесообразно дать характеристику встречающихся задач на проценты и дать методические рекомендации для изучения данного курса. Характеристика задач, встречающихся при подготовке ЕГЭ, может быть отражена следующей таблицей.

Нахождение процентов данного числа.
$\frac{x\% \cdot a}{100\ \%}$
Нахождение числа по его процентам.
$\frac{100\ \% \cdot b}{x\%}$
Нахождение процентного отношения чисел.
$\frac{a}{b} \cdot 100\ \%$
Задачи на сложные проценты.
$a \cdot (1 - \frac{x\%}{100\ \%})$ $a \cdot (1 + \frac{x\%}{100\ \%})$
Задачи на концентрацию, смеси и сплавы.
Составление уравнений, метод пропорции.

Проведенный анализ учебников и вариантов ЕГЭ позволяет выделить основные этапы работы по введению понятия «Процент». Первый этап работы отводится повторению сведений об обыкновенных дробях и трех основных задач на дроби. Второй этап сводится к формированию умения решать простые задачи на проценты. При решении задач на проценты необходимо не только развивать вычислительные навыки учащихся, но и формировать у учащихся умение выполнять прикидку или оценку результата вычислений. Третий этап основывается на формировании умения решать сложные задачи на проценты. Четвертый этап знакомит нас со статистическими задачами, в которых встречаются проценты. При решении задач на процентное содержание растворов, сплавов и смесей невозможно обойтись без алгебраических знаний, с помощью которых можно установить зависимость между величинами, составляя уравнение или систему уравнений для решения задачи. Если имеется необходимость производить аналогичные, одинаковые вычисления для различных исходных сумм и процентных ставок при решении задач на процентный рост, можно составить формулу и проводить необходимые расчеты с помощью вычислений, а не рассуждений.

9. Методика обучения решению задач с параметром. Линейные уравнения и системы линейных уравнений

Пусть дано уравнение kx = b. Это уравнение – краткая запись бесконечного множества уравнений с одной переменной. При решении таких уравнений могут быть случаи:

1. Пусть k – любое действительное число не равное нулю и b – любое число из R, тогда x = b/k.
2. Пусть k = 0 и b ≠ 0, исходное уравнение примет вид 0 · x = b. Очевидно, что у такого уравнения решений нет.
3. Пусть k и b числа, равные нулю, тогда имеем равенство 0 · x = 0. Его решение – любое действительное число.

Решение: 1. Определить «контрольные» значения параметра.

2. Решить исходное уравнение относительно x, при тех значениях параметра, которые были определены в первом пункте.

3. Решить исходное уравнение относительно x, при значениях параметра, отличающихся от выбранных в первом пункте. 4. Записать ответ можно в следующем виде:

Ответ:

1) при … (значения параметра), уравнение имеет корни …;

2) при … (значения параметра), в уравнении корней нет.

Рассмотрим решение систем линейных уравнений, содержащих параметр. Геометрическая интерпретация решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными выяснит, как расположены две прямые на плоскости, двух линейных уравнений с тремя неизвестными – как расположены плоскости. Системы линейных уравнений с параметром решаются теми же основными методами, что и обычные системы уравнений: метод подстановки, метод сложения уравнений и графический метод. Знание графической интерпретации линейных систем позволяет легко ответить на вопрос о количестве корней и их существовании.

Пример. Найти все значения для параметра a, при которых система уравнений не имеет решений.

$$\begin{cases} x + (\boldsymbol{a^2} - \mathbf{3})y = a \\ x + y = \mathbf{2} \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим несколько способов решения данного задания.

1 способ. Используем свойство: система не имеет решений, если отношение коэффициентов перед x равно отношению коэффициентов перед y, но не равно отношению свободных членов ($a/a_1 = b/b_1 \neq c/c_1$). Тогда имеем: $1/1 = (a^2 - 3)/1 \neq a/2$

или систему:

$$\begin{cases} a^2 - 3 = 1 \\ a \neq 2 \end{cases}$$

Из первого уравнения $a^2 = 4$, поэтому с учетом условия, что $a \neq 2$, получаем ответ.

Ответ: a = -2.

2 способ. Решаем методом подстановки.

$$\begin{cases} 2 - y + (a^2 - 3)y = a \\ x = 2 - y \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a^2 - 3)y - y = a - 2 \\ x = 2 - y \end{cases}$$

После вынесения в первом уравнении общего множителя y за скобки, получим

$$\begin{cases} (a^2 - 4)y = a - 2 \\ x = 2 - y \end{cases}$$

Система не имеет решений, если первое уравнение не будет иметь решений, то есть

$$\begin{cases} a^2 - 4 = 0 \\ a - 2 \neq 0 \end{cases}$$

Очевидно, что $a = \pm 2$, но с учетом второго условия в ответ идет только ответ с минусом. Ответ: a = -2.

10. Методика обучения решению задач с параметром. Исследование квадратного трехчлена с помощью дискриминанта

Квадратный трехчлен – $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Дискриминант $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет 2 корня. Если $D = 0$, то 1 корень (два совпадающих решения), при $D < 0$ – не имеет действительных корней. Корни квадратного уравнения находятся по формуле: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Сформулируем несколько утверждений, касающихся неравенств вида $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0, f(x) < 0, f(x) \leq 0$, где $f(x)$ – квадратный трехчлен. Считаем, что $a > 0$ (ветви параболы направлены вверх), в противном случае всегда можно умножить обе части неравенства на (-1). Пусть $f(x) = x^2 + px + q$, тогда:

Теорема 1. Неравенство $x^2 + px + q > 0$ выполнено при всех значениях переменной $x \in R$ тогда и только тогда, когда $D < 0$.

Теорема 2. Неравенство $x^2 + px + q \geq 0$ выполнено при всех значениях переменной $x \in R$ тогда и только тогда, когда $D \leq 0$.

Теорема 3. Неравенство $x^2 + px + q < 0$ имеет решение тогда и только тогда, когда $D > 0$.

Теорема 4. Неравенство $x^2 + px + q \le 0$ имеет решение тогда и только тогда, когда $D \ge 0$.

Теоремы 1-4 проиллюстрированы на рисунках 1-4 соответственно.

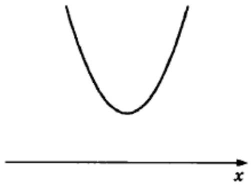


Рис. 1

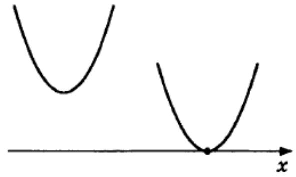


Рис. 2

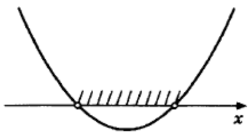


Рис. 3

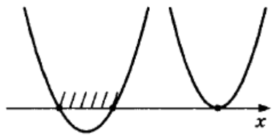


Рис. 4

Пример. При каких значениях параметра a уравнение $(3a-1)x^2 + 2az + 3a - 2 = 0$ имеет два различных корня?

Решение: если $3a - 1 = 0, a = \frac{1}{3}$ уравнение принимает вид $\frac{2}{3}x - 1 = 0$ и имеет **единственное** решение $x = \frac{3}{2}$. Следовательно, $a = \frac{1}{3}$ не является решением задачи. Пусть $a \ne \frac{1}{3}$. Тогда необходимо и достаточно, чтобы дискриминант был положительным.

Т.е.: $\frac{D}{4} = a^2 - (3a-1)(3a-2) > 0 \leftrightarrow 8a^2 - 9a + 2 < 0 \leftrightarrow a \in (\frac{9-\sqrt{17}}{16}; \frac{9+\sqrt{17}}{16})$. Так как по условию $a \ne \frac{1}{3}$, то окончательное решение $a \in \left(\frac{9-\sqrt{17}}{16}; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{9+\sqrt{17}}{16}\right)$.

11. Методика обучения решению задач с параметром. Теорема Виета

При исследовании квадратного трехчлена, а также знаков его корней большую роль играет теорема Виета. Сформулируем эту теорему, а также обратную к ней.

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, а $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Обратная к теореме Виета. Если квадратное уравнение имеет корни x_1 и x_2 и известно, что $x_1 + x_2 = p$, а $x_1 x_2 = q$, то это уравнение может быть записано как $x^2 - px + q = 0$.

Пример. Найти минимальное значение произведения xy, где x и y удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} x + y = 3a - 1 \\ x^2 + y^2 = 4a^2 - 2a + 2 \end{cases}$$

Решение: Данная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x+y=3a-1, \\ x^2+y^2=4a^2-2a+2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3a-1, \\ (x+y)^2-2xy=4a^2-2a+2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3a-1, \\ (3a-1)^2-2xy=4a^2-2a+2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3a-1, \\ xy=\frac{5}{2}a^2-2a-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Согласно теореме, обратной теореме Виета, числа x и y являются корнями квадратного уравнения

$$t^2-(3a-1)t+\frac{5}{2}a^2-2a-\frac{1}{2}=0.$$

Существование корней данного уравнения равносильно выполнению неравенства $D \ge 0$:

$$(3a-1)^2-\left(10a^2-8a-2\right)\ge 0 \Leftrightarrow a^2-2a-3\le 0 \Leftrightarrow -1\le a\le 3.$$

Так как $xy=\frac{5}{2}a^2-2a-\frac{1}{2}$, то

$$\min_{-1\le a\le 3}\left(\frac{5}{2}a^2-2a-\frac{1}{2}\right)=\min_{-1\le a\le 3}\left(\frac{5}{2}\left(a-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{9}{10}\right)=\left(\text{при } a=\frac{2}{5}\right)=-\frac{9}{10}.$$

Ответ: $-\frac{9}{10}$.

12. Методика обучения решению задач с параметром. Расположение корней квадратного трехчлена

Пусть $f(x)=x^2+px+q$, тогда координаты вершины параболы $(x_0;y_0)$ находятся по формулам $x_0=-\frac{p}{2}, y_0=f(x_0)$.

Теорема 1. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два корня (возможно, совпадающих), и оба корня больше некоторого числа a тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия (D – дискриминант, x_0 - абсцисса вершины параболы):

$$\begin{cases} D\ge 0 \\ x_1>a \\ x_2>a \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} D\ge 0 \\ x_0>a \\ f(a)>0 \end{cases}.$$

Теорема 2. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два корня (возможно, совпадающих), и оба корня меньше некоторого числа a тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия (D – дискриминант, x_0 - абсцисса вершины параболы):

$$\begin{cases} D\ge 0 \\ x_1<a \\ x_2<a \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} D\ge 0 \\ x_0<a \\ f(a)>0 \end{cases}.$$

Теорема 3. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два различных корня, и число a расположено строго между его корнями тогда и только тогда, когда $f(a)<0$.

Теоремы 1-3 проиллюстрированы на рисунках 1-3 соответственно.

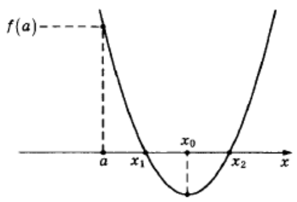


Рис. 1

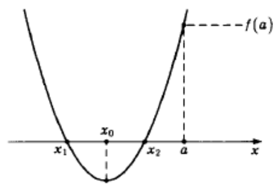


Рис. 2

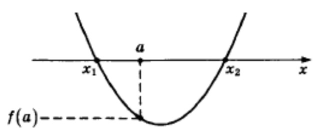


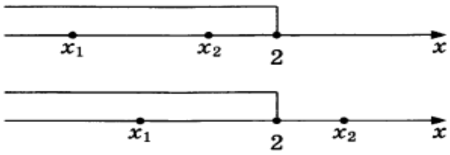
Рис. 3

Пример. Найдите все значения a, для каждого из которых система неравенств (1) выполняется хотя бы при одном значении x:

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \quad (1)$$

Решение: решение первого неравенства, если оно существует, есть отрезок $[x_1; x_2]$ (возможно, вырожденный в точку), где $x_{1,2}$ - корни квадратного уравнения

$x^2 - 12x + a = 0$. Значит, условие задачи может быть сформулировано следующим образом: «Найти все значения параметра, при каждом из которых корни квадратного уравнения $x^2 - 12x + a = 0$ существуют и хотя бы один из этих корней меньше либо равен 2».



Эти условия равносильны следующему неравенству:

$x_1 = 6 - \sqrt{36 - a} \leq 2 \leftrightarrow \sqrt{36 - a} \geq 4 \leftrightarrow 36 - a \geq 16 \leftrightarrow a \leq 20.$

Ответ: $(-\infty; 20]$.

13. Методика обучения решению задач с параметром

Задачи, содержащие параметры являются своего рода критерием усвоения учебного материала. Задачи с параметрами играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры, но их решение вызывает значительные затруднения. Это связано с тем, что каждая *задача с параметрами представляет собой целый класс обычных задач, для каждой из которых должно быть получено решение*. Опыт показывает, что учащиеся, владеющие методами решения задач с параметром, успешно справляются и с другими задачами. На протяжении ряда лет многие вузы включают уравнение (неравенство) с параметром в задания вступительных экзаменов (олимпиад). Но до сих пор задача с параметром остается самой "неудобной" для абитуриентов. Более того, в последние годы задачи с параметром регулярно встречаются в вариантах ГИА и ЕГЭ. И здесь далеко не все школьники приступают к решению этих заданий, и еще меньшее число – выполняют решение верно. В школьном курсе алгебры и начал анализа такие задачи рассматриваются, но в виде отдельной темы они не выделены, поэтому у учителей чаще всего нет возможности уделить им должного внимания.

Итак, **параметр – это фиксированное число, но неизвестное (может принимать различные значения), при этом необходимо уделить внимание записи ответа** (соответствия вывода и требования задачи). Параметры обозначаются первыми буквами латинского алфавита: a, b, c, d, …, k, l, m, n, а неизвестные – буквами x, y, z. Параметр – величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой. С использованием параметров проводятся исследования многих систем и процессов реальной жизни. В частности, в физике в качестве параметров могут выступать температура, время и др. В математике параметры вводятся для обозначения некоторой совокупности объектов.

Как начинать решать такие задачи? Прежде всего, надо сделать то, что делается при решении любого уравнения или неравенства – привести заданное уравнение (неравенство) к более простому виду, если это возможно: разложить рациональное выражение на множители, разложить тригонометрический многочлен на множители, избавиться от модулей, логарифмов, и т. д.. затем необходимо внимательно еще раз прочитать задание.

При решении задач, содержащих параметр, встречаются задачи, которые условно можно разделить **на два большие класса**. В первый класс можно отнести задачи, в которых надо решить неравенство или уравнение при всех возможных значениях параметра. Ко второму классу отнесем задания, в которых надо найти не все возможные решения, а лишь те из них, которые удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Наиболее понятный для школьников способ решения таких задач состоит в том, что *сначала находят все решения, а затем отбирают те, которые удовлетворяют дополнительным условиям*. Но это удается не всегда. Встречаются большое количество задач, в которых найти все множество решений невозможно, да нас об этом и не просят. Поэтому приходится искать способ решить поставленную задачу, не имея в распоряжении всего множества решений данного уравнения или неравенства, например, поискать свойства входящих в уравнение функций, которые позволят судить о существовании некоторого множества решений.

При решении задач с параметрами иногда удобно, а иногда просто необходимо, строить графики. В настоящее время на едином государственном экзамене встречаются четыре вида таких заданий с параметром: Уравнения с параметром, Неравенства с параметром, Функции, зависящие от параметра, Системы с параметром.

14. Общая характеристика изучения стереометрии в 10-11 классах

Одним из условий успешного усвоения учащимися систематического курса геометрии является ***наличие у них хорошо развитых пространственных представлений*** *– это первостепенная задача*. Эффективным средством для развития пространственных представлений у учащихся является использование наглядности в учебном процессе: примеры из окружающей действительности, модели геометрических фигур из картона и проволоки, специально изготовленные рисунки на плакатах, в GeoGebra и других компьютерных программах. Важно организовать с учащимися работу по изготовлению моделей плоских и пространственных фигур из картона и проволоки, нитяных моделей, для чего в начале года следует составить перечень таких моделей. Большая роль в развитии пространственных представлений отводится устным задачам, в том числе задачам на моделях, задачам на готовых чертежах. Важно иметь определенную систему устных задач, предназначенных для использования при введении новых понятий и закреплении уже известных, при изучении свойств понятий. Большое место в процессе изложения курса стеореометрии должно быть отведено выполнению чертежей на доске и в тетрадях с использованием различных цветов. Следует шире использовать технические средства обучения, сенсорную интерактивную доску, разумно сочетать их с рассказом учителя, с самостоятельной работой учащихся. Следует уделять внимание развитию логического мышления учащихся, постоянно вырабатывать у них необходимость обосновывать высказываемые положения, начиная такую работу прямо с начала изучения курса геометрии после введения первых аксиом. При отыскании пути обоснования высказываемых положений следует шире опираться на интуицию учащихся. Необходимо систематически практиковать самостоятельное изучение теории на уроке и дома с последующим выступлением учащихся у доски, на каждом уроке проводить самостоятельные работы по решению задач.

15. Координатно-векторный метод в школьном курсе стереометрии

Координатный метод решения задач – очень популярный и эффективный метод в геометрии и не только. Однако его формальное применение может значительно затруднить решение даже самой простой задачи. Общий уровень геометрической (особенно стереометрической) подготовки выпускников по-прежнему остается достаточно низким. Координатный метод решения задач на сегодняшний день самый мощный и при правильном подходе позволяет решить фактически все виды математических, физических, астрономических и технических задач. Кроме того, координатный метод в рамках школьной программы используется достаточно ограниченно и неполно. Координатно-векторный метод имеет преимущества перед другими, что не требует сложных построений в проекциях. По той простой причине, что этот метод заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат, а затем – исчислении образующихся векторов (их длин и углов между ними), то есть одно без другого не работает. Этот метод – довольно мощный (то есть ему поддаются даже самые «непробиваемые» казалось, бы задачи). Все те соотношения, которые при решении традиционным методом даются с большим трудом (через привлечение большого количества вспомогательных теорем), здесь получаются как бы сами собой, в ходе вычислений. Весь этот подход, развитый до своего логического завершения, в высшей математике получает название аналитической геометрии. Единственный его, пожалуй, недостаток – это требуемый нередко большой объем вычислений. Координатно-векторный метод представлен практически во всех учебниках. Применение метода координат даёт нам возможность для решения следующих задач:

1) Нахождение расстояния d между двумя точками $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$, заданными своими координатами: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
2) Нахождение координат $C(x,y,z)$ середины отрезка AB, где $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$: $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$, $z = \frac{z_1+z_2}{2}$
3) Нахождение угла между векторами, заданными своими координатами: $\cos\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$, где $\bar{a}(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{b}(x_2,y_2,z_2)$
4) Нахождение угла между прямой l и плоскостью α: $sin\,\phi = \frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$, где $\bar{n}(x_1,y_1,z_1)$ – вектор нормали к плоскости α, $\bar{p}(x_2,y_2,z_2)$ – направляющий вектор прямой l.
5) Нахождение угла между плоскостями путем составления уравнения плоскости Ax+By+Cz+D=0, и определение угла между нормалями к плоскостям. Нормаль n при этом имеет координаты: $\bar{n}(A, B, C)$: $\cos\angle(\alpha, \beta) = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
6) Нахождение расстояния между произвольной точкой $M(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости Ax+By+Cz+D=0: $d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$