Лабораторная по многомерной статистике

Дмитрий Пасько

Table of Contents

Описание

Для выполнения работы использовался язык **R** версии 3.6.1. Необходимые пакеты скачиваются командой

```
install.packages(c("readxl", "dplyr", "ggplot2", "ggpubr", "corrplot", "psych",
    "MASS", "tree", "randomForest", "TeachingDemos", "mice", "corrgram",
"magrittr",
    "plotly", "factoextra"))
```

и подключаются

```
library(readxl)  #чтение из excel
library(dplyr)  #современные средства программирования, включая функциональное
library(ggplot2)  #красивые удобные графики
library(ggpubr)  #группировка изображений
library(corrplot)  #картинка для корреляционной матрицы
library(psych)  #факторный анализ
library(MASS)  #линейный дискриминантный анализ
library(tree)  #визуализация деревьев
library(randomForest)  #случайные леса
library(TeachingDemos)  #пиктограммы
library(mice)  #обработка отсутствующих значений
library(corrgram)  #коррелограммы
library(magrittr)  #конвеерный оператор
```

```
library(plotly)  #интерактивная графика
library(factoextra)  #графика по главным компонентам
```

Также использовался номер варианта

```
nv = 7  #номер варианта
```

Дополнительная информация: сайт по статистике в R, огромная статья по построению моделей в R, статья по кластерному, факторному и дискриминантному анализу в R, курс по анализу данных в R, курс по основам R как языка программирования, курс по статистике в R, перечень основых функций языка, математические операции в R, книги по R на моём GitHub, набор ссылок, отличный сайт по R.

Многомерный анализ

Задание 1

Подготовим данные:

```
datacrude = data.frame(read_excel("Таблица 1.xlsx"))  #считывание таблицы
data = datacrude[5:nrow(datacrude), -1]  #удаление лишних строк и столбцов
data = data[-nv, ]  #удаление строки в соответствии с номером варианта
colnames(data) = c("Country", "Doctors", "Deaths", "GDP", "Costs")
#переименование столбцов (для лаконичности)
data[, 1] = factor(data[, 1])  #первая переменная из количественной
преобразуется в номенативную
row.names(data) = as.character(1:nrow(data))  #наблюдения нумеруются

data %>% tbl_df()  #таблица старого образца переводится в более удобный и
выводится
```

```
## # A tibble: 19 x 5
##    Country      Doctors         Deaths          GDP           Costs
##    <fct>        <chr>           <chr>           <chr>         <chr>
##  1 Россия       44.5            84.98           20.399999999~ 3.2
##  2 Австралия    32.5            30.58           71.400000000~ 8.5
##  3 Австрия      33.9            38.42           78.7          9.1999999999~
##  4 Азербайджан  38.79999999999~ 60.34           12.1          3.3
##  5 Армения      34.4            60.22           10.9          3.2
##  6 Беларусь     43.6            60.79           20.399999999~ 5.4
##  7 Болгария     36.4            70.56999999999~ 17.3          5.4
##  8 Великобрита~ 17.89999999999~ 34.51           69.7          7.1
##  9 Венгрия      32.1            64.73           24.5          6
## 10 Германия     38.1            36.63000000000~ 76.2          8.6
## 11 Греция       41.5            32.84000000000~ 44.4          5.7
## 12 Грузия       55              62.64           11.3          3.5
## 13 Дания        36.70000000000~ 34.07           79.2          6.7
## 14 Ирландия     15.8            39.27000000000~ 57            6.7
## 15 Испания      40.9            28.46           54.8          7.3
## 16 Италия       49.4            30.27           72.099999999~ 8.5
## 17 Казахстан    38.1            69.04000000000~ 13.4          3.3
```

```
## 18 Канада       27.6            25.42           79.900000000~ 10.199999999~
## 19 Киргизия     33.20000000000~ 53.13           11.2          3.4
```

```
data[, 2:5] = apply(data[, 2:5], 2, function(x) scale(as.numeric(x)))  #mym
переменные из текста преобразуются в числа и стандартизируются
```

Полученная таблица (**стандартизованные данные**):

```
data %>% tbl_df()
```

```
## # A tibble: 19 x 5
##    Country         Doctors Deaths     GDP   Costs
##    <fct>             <dbl>  <dbl>   <dbl>   <dbl>
##  1 Россия          0.869    2.06  -0.807  -1.25
##  2 Австралия      -0.408   -0.992  0.981   1.06
##  3 Австрия        -0.259   -0.552  1.24    1.37
##  4 Азербайджан     0.262    0.678 -1.10   -1.20
##  5 Армения        -0.206    0.671 -1.14   -1.25
##  6 Беларусь        0.773    0.703 -0.807  -0.289
##  7 Болгария        0.00672  1.25  -0.915  -0.289
##  8 Великобритания -1.96    -0.771  0.921   0.451
##  9 Венгрия        -0.451    0.924 -0.663  -0.0275
## 10 Германия        0.188   -0.653  1.15    1.10
## 11 Греция          0.550   -0.865  0.0345 -0.158
## 12 Грузия          1.99     0.807 -1.13   -1.12
## 13 Дания           0.0387  -0.796  1.25    0.277
## 14 Ирландия       -2.19    -0.504  0.476   0.277
## 15 Испания         0.486   -1.11   0.399   0.538
## 16 Италия          1.39    -1.01   1.01    1.06
## 17 Казахстан       0.188    1.17  -1.05   -1.20
## 18 Канада         -0.930   -1.28   1.28    1.80
## 19 Киргизия       -0.334    0.273 -1.13   -1.16
```

Средние и стандартные отклонения:

```
means = apply(data[, -1], 1, mean)
sds = apply(data[, -1], 1, sd)
data_frame(countries = data[, 1], means, sds)
```

```
## # A tibble: 19 x 3
##    countries        means   sds
##    <fct>            <dbl> <dbl>
##  1 Россия          0.219  1.53
##  2 Австралия       0.160  1.02
##  3 Австрия         0.448  0.994
##  4 Азербайджан    -0.340  0.952
##  5 Армения        -0.480  0.899
##  6 Беларусь        0.0952 0.772
##  7 Болгария        0.0137 0.911
##  8 Великобритания -0.340  1.30
##  9 Венгрия        -0.0543 0.704
## 10 Германия        0.447  0.857
## 11 Греция         -0.110  0.586
## 12 Грузия          0.138  1.53
```

```
## 13 Дания           0.193  0.844
## 14 Ирландия       -0.484  1.21
## 15 Испания         0.0780 0.795
## 16 Италия          0.612  1.09
## 17 Казахстан      -0.225  1.12
## 18 Канада          0.217  1.55
## 19 Киргизия       -0.587  0.689
```

Для решения задачи создается **матрица (евклидовых) расстояний**

```
(d = dist(data[, 2:5], method = "euclidean"))  #матрица расстояний
```

```
##            1         2         3         4         5         6         7
## 2  4.4120797
## 3  4.3697012 0.6115859
## 4  1.5382991 3.5610208 3.7186612
## 5  1.7880599 3.5531815 3.7371442 0.4723246
## 6  1.6638732 3.0472614 3.0908033 1.0870717 1.4099074
## 7  1.5250963 3.2594515 3.2699370 1.1240009 1.1617940 0.9488992
## 8  4.6803367 1.6849098 1.9707704 3.7231844 3.5064730 3.6321676 3.4486947
## 9  2.1305565 2.7495920 2.7866134 1.4625949 1.3551118 1.2791960 0.6699219
## 10 4.1441528 0.7076818 0.5346512 3.4849263 3.5594776 2.8188389 3.1403530
## 11 3.2486216 1.8206319 2.1256680 2.1992479 2.3440153 1.7984619 2.3867169
## 12 1.7145100 4.2598610 4.3159864 1.7317365 2.2010009 1.5063236 2.2014486
## 13 3.9266511 0.9626679 1.1543992 3.1534712 3.2038842 2.7121034 3.0370283
## 14 4.4585820 2.0655695 2.3403208 3.4726012 3.1990304 3.4902301 3.1859046
## 15 3.8527282 1.1937521 1.5010755 2.9190773 3.0342823 2.3476421 2.8678297
## 16 4.2780349 1.7992641 1.7544006 3.6966667 3.9110938 2.9014521 3.5410103
## 17 1.1516395 3.7772898 3.8710270 0.4959369 0.6400378 1.2052633 0.9456070
## 18 5.2950469 0.9960504 1.0830876 4.4639940 4.4123030 3.9438542 4.0589639
## 19 2.1800493 3.3145362 3.5576672 0.7224496 0.4269473 1.5073417 1.3700879
##            8         9        10        11        12        13        14
## 2
## 3
## 4
## 5
## 6
## 7
## 8
## 9  2.8106515
## 10 2.2618696 2.7310492
## 11 2.7345527 2.1695599 1.7354273
## 12 4.9733098 2.7118614 3.9329969 2.6691311
## 13 2.0363879 2.6398079 0.8589113 1.3939745 3.7375233
## 14 0.5914261 2.5381635 2.6064969 2.8282744 4.8619004 2.3749627
## 15 2.5278567 2.5431818 1.0871038 0.8260148 3.3153464 1.0481624 2.7533921
## 16 3.4174312 3.3313885 1.2636674 1.7764577 3.5961051 1.5965054 3.7338925
## 17 3.8739706 1.4137608 3.6706682 2.5551808 1.8380458 3.3737126 3.5987458
## 18 1.8095780 3.4938982 1.4651779 2.7833382 5.2109929 1.8695011 2.2686056
## 19 3.2468663 1.3911303 3.3826377 2.1055139 2.3815860 3.0044314 2.9454487
##           15        16        17        18
## 2
## 3
```

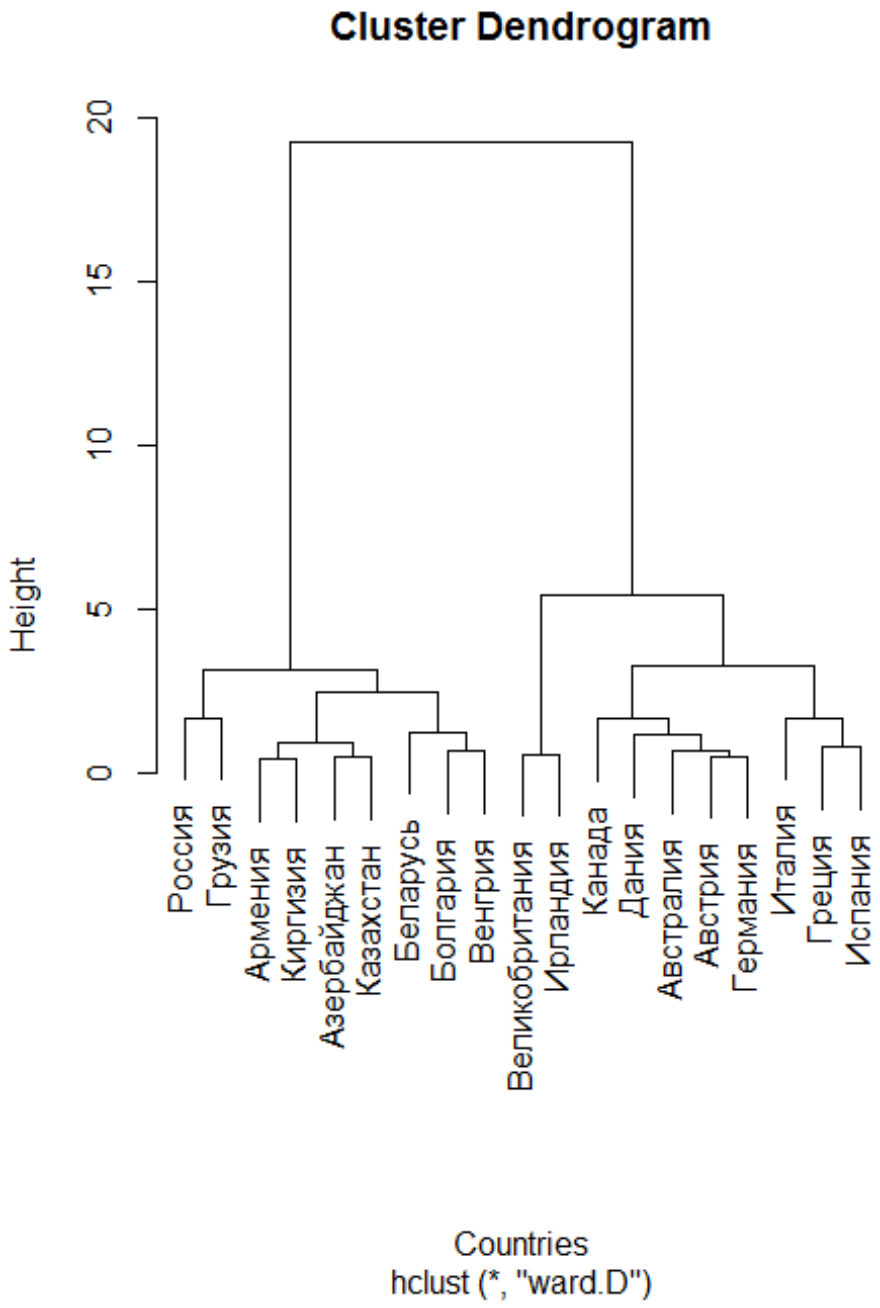
```
## 4
## 5
## 6
## 7
## 8
## 9
## 10
## 11
## 12
## 13
## 14
## 15
## 16 1.2122349
## 17 3.2265303 3.9414781
## 18 2.0977766 2.4660759 4.6574785
## 19 2.7937204 3.7553911 1.0377559 4.1630214
```

которая используется функцией кластеризации по *методу ближайшего соседа* с расстоянием Варда между кластерами:

```
fit <- hclust(d, method = "ward.D")
```

Дендрограмма полученной кластеризации:

```
plot(fit, labels = data$Country, xlab = "Countries")
```



сумма внутригрупповых расстояний по мере объединения кластеров:

```
plot(fit$height, xlab = "step", ylab = "dist", type = "b", col = "blue", lwd =
1,
    main = "Расстояния при объединении кластеров")
```

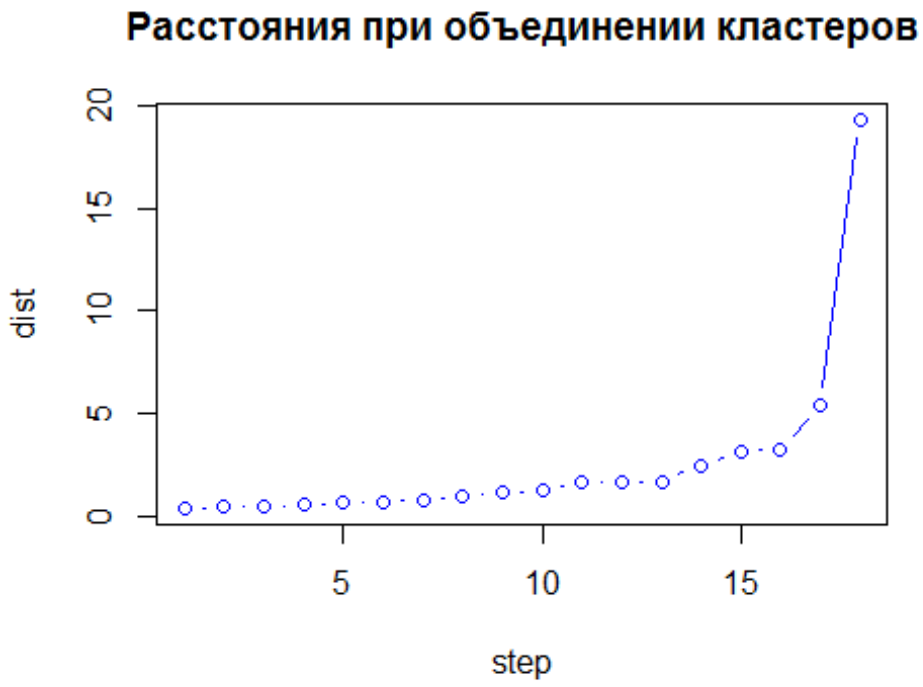


Схема объединения по шагам:

```
mat = fit$merge
resu = list()
countries = as.character(data$Country)
for (i in 1:nrow(mat)) {

    if (mat[i, 1] < 0) {
        a = countries[-mat[i, 1]]
    } else {
        a = as.character(resu[[mat[i, 1]]])
    }

    if (mat[i, 2] < 0) {
        b = countries[-mat[i, 2]]
    } else {
        b = as.character(resu[[mat[i, 2]]])
    }

    resu[[i]] = c(a, b)
}
names(resu) = paste("Шаг", 1:nrow(mat), "расстояние", fit$height)
print(resu)
```

```
## $`Шаг 1 расстояние 0.426947302377`
## [1] "Армения"  "Киргизия"
##
## $`Шаг 2 расстояние 0.495936862326806`
## [1] "Азербайджан" "Казахстан"
```

```
##
## $`Шаг 3 расстояние 0.534651158339984`
## [1] "Австрия"  "Германия"
##
## $`Шаг 4 расстояние 0.59142613070119`
## [1] "Великобритания" "Ирландия"
##
## $`Шаг 5 расстояние 0.669921900930876`
## [1] "Болгария" "Венгрия"
##
## $`Шаг 6 расстояние 0.701294749091246`
## [1] "Австралия" "Австрия"   "Германия"
##
## $`Шаг 7 расстояние 0.826014818116822`
## [1] "Греция"  "Испания"
##
## $`Шаг 8 расстояние 0.974841826914247`
## [1] "Армения"     "Киргизия"    "Азербайджан" "Казахстан"
##
## $`Шаг 9 расстояние 1.17900272101096`
## [1] "Дания"     "Австралия" "Австрия"   "Германия"
##
## $`Шаг 10 расстояние 1.26208946988791`
## [1] "Беларусь" "Болгария" "Венгрия"
##
## $`Шаг 11 расстояние 1.68253703237057`
## [1] "Канада"    "Дания"     "Австралия" "Австрия"   "Германия"
##
## $`Шаг 12 расстояние 1.71451000628185`
## [1] "Россия" "Грузия"
##
## $`Шаг 13 расстояние 1.71712349824102`
## [1] "Италия"  "Греция"  "Испания"
##
## $`Шаг 14 расстояние 2.49230286327314`
## [1] "Армения"     "Киргизия"    "Азербайджан" "Казахстан"   "Беларусь"
## [6] "Болгария"    "Венгрия"
##
## $`Шаг 15 расстояние 3.16150026414533`
## [1] "Россия"      "Грузия"      "Армения"     "Киргизия"    "Азербайджан"
## [6] "Казахстан"   "Беларусь"    "Болгария"    "Венгрия"
##
## $`Шаг 16 расстояние 3.29068732365053`
## [1] "Канада"    "Дания"     "Австралия" "Австрия"   "Германия"  "Италия"
## [7] "Греция"    "Испания"
##
## $`Шаг 17 расстояние 5.42357100170829`
##  [1] "Великобритания" "Ирландия"       "Канада"         "Дания"
##  [5] "Австралия"      "Австрия"        "Германия"       "Италия"
##  [9] "Греция"         "Испания"
##
## $`Шаг 18 расстояние 19.2875906745862`
```

```
##  [1] "Россия"          "Грузия"          "Армения"         "Киргизия"
##  [5] "Азербайджан"     "Казахстан"       "Беларусь"        "Болгария"
##  [9] "Венгрия"         "Великобритания" "Ирландия"        "Канада"
## [13] "Дания"           "Австралия"       "Австрия"         "Германия"
## [17] "Италия"          "Греция"          "Испания"
```

Задание 2

Попробуем узнать, сколько кластеров будет достаточно. Для этого рассчитаем **суммы внутригрупповых расстояний**, когда число кластеров равно 1, 2, ... 8, и изобразим их на графике:

```
it = 1:8
sums = sapply(it, function(k) kmeans(data[, 2:5], k)$tot.withinss)
plot(it, sums, type = "b", col = "red", main = "Суммы внутригрупповых расстояний
при разном числе кластеров")
```

По принципу *метода каменистой осыпи* делаем вывод, что исходный набор данных естественно делится на 2 или 3 кластера. Напишем функцию, которая строит модель для заданного числа кластеров, проводит анализ этой модели и строит некоторые графики:

```
# функция, проводящая некоторый анализ и строящая графики для заданного
# числа кластеров
getimage = function(k) {

    fit = kmeans(data[, 2:5], k)  #строится модель
    cat("Основная информация: \n")
    print(fit)
```

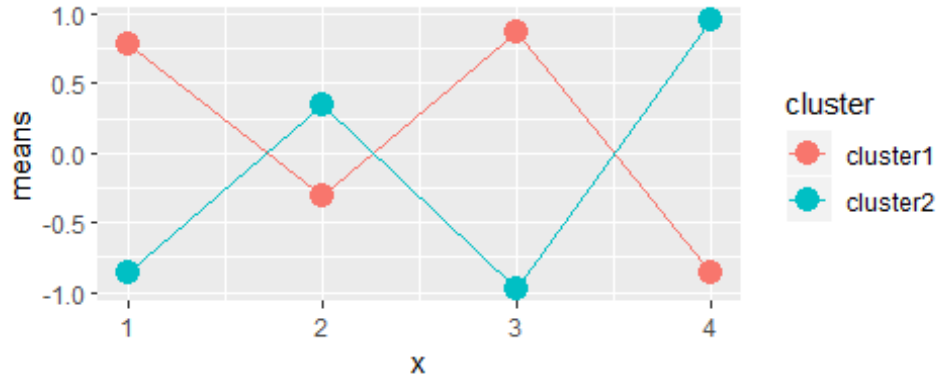
```r
    # cat('Внутригрупповые суммы:',fit$withinss,'\n')#внутригрупповые суммы
    # cat('Общая сумма:', fit$betweenss,'\n')
    cat("Матрица расстояний:\n")
    print(dist(fit$centers))  #матрица расстояний
    cat("Центры:\n")
    print(fit$centers)


    # Добавляем кластер к фрейму данных
    library(dplyr)
    newdata = as_data_frame(data) %>% mutate(cluster = factor(fit$cluster))

    # агрегирование данных по группам
    means = newdata[, 2:6] %>% group_by(cluster) %>% summarise(meanCosts =
mean(Costs),
        sdCosts = sd(Costs), meanDoctors = mean(Doctors), sdDoctors =
sd(Doctors),
        meanGDP = mean(GDP), sdGDP = sd(GDP), meanDeaths = mean(Deaths),
sdDeaths = sd(Deaths))
    print(means)


    means = means[, c(1, 2, 4, 6, 8)]  #берётся сабсет только из значений для
средних

    lbs = c("cluster1", "cluster2", "cluster3", "cluster4", "cluster5")

    library(ggplot2)
    library(ggpubr)

    # здесь создаётся таблица со средними по каждой переменной и каждому классу
    # в том виде, в каком удобней рисовать
    tmpdata = data.frame(x = 1:4, means = as.numeric(means[1, 2:5]), cluster =
rep(lbs[1],
        4))
    for (i in 2:k) {
        tmpdata = rbind(tmpdata, data.frame(x = 1:4, means = as.numeric(means[i,
            2:5]), cluster = rep(lbs[i], 4)))
    }
    tmpdata$cluster = factor(tmpdata$cluster)


    ppp = ggplot(tmpdata, aes(x = x, y = means, col = cluster)) + geom_line() +
        geom_point(size = 4)


    pl1 = ggplot(newdata, aes(x = Doctors, y = Deaths, col = cluster)) +
geom_point(size = 3) +
        theme_bw()
```

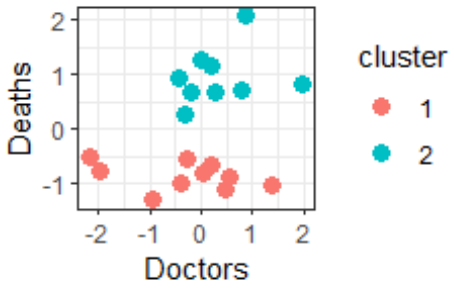
```
    pl2 = ggplot(newdata, aes(x = GDP, y = Costs, col = cluster)) +
geom_point(size = 3) +
        theme_bw()

    pl3 = ggplot(newdata, aes(x = GDP, y = Deaths, col = cluster)) +
geom_point(size = 3) +
        theme_bw()
    pl4 = ggplot(newdata, aes(x = GDP, y = Doctors, col = cluster)) +
geom_point(size = 3) +
        theme_bw()

    costs = ggplot(newdata, aes(x = cluster, y = Costs)) + geom_boxplot() +
        theme_bw()
    deaths = ggplot(newdata, aes(x = cluster, y = Deaths)) + geom_boxplot() +
        theme_bw()
    doctors = ggplot(newdata, aes(x = cluster, y = Doctors)) + geom_boxplot() +
        theme_bw()
    gdp = ggplot(newdata, aes(x = cluster, y = GDP)) + geom_boxplot() +
theme_bw()

    p1 <- ggarrange(pl1, pl2, pl3, pl4, ncol = 2, nrow = 2)
    p2 <- ggarrange(costs, deaths, doctors, gdp, ncol = 2, nrow = 2)
    ggarrange(ppp, p1, p2, ncol = 1, nrow = 3, heights = c(1.3, 2, 3))
}
getimage2 = function(k) {
    fit = kmeans(data[, 2:5], k)  #строится модель

    # Добавляем кластер к фрейму данных
    library(dplyr)
    newdata = as_data_frame(data) %>% mutate(cluster = factor(fit$cluster))
    cat("Дисперсионный анализ для каждой переменной,", k, "кластеров \n")
    cat("Затраты: \n")
    print(summary(aov(Costs ~ cluster, newdata)))
    cat("Смерти: \n")
    print(summary(aov(Deaths ~ cluster, newdata)))
    cat("Врачи: \n")
    print(summary(aov(Doctors ~ cluster, newdata)))
    cat("ВВП: \n")
    print(summary(aov(GDP ~ cluster, newdata)))

    # рисуются кластеры через главные компоненты library(cluster)
    # print(clusplot(newdata, newdata$cluster, color=TRUE, shade=TRUE, labels=2,
    # lines=0))
    library(factoextra)
    print(fviz_cluster(fit, data[, -1], ellipse.type = "norm"))
}
```

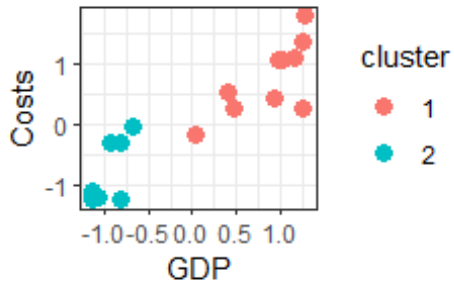
Используем эту функцию для **двух** кластеров:

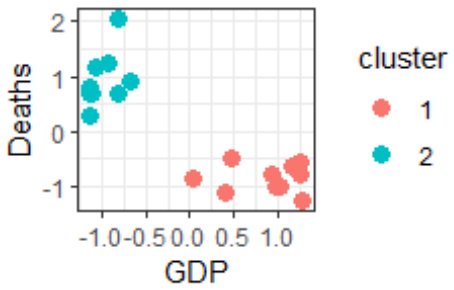
```
getimage(2)
```

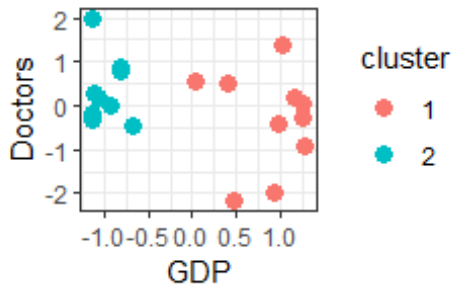
```
## Основная информация:
## K-means clustering with 2 clusters of sizes 10, 9
##
## Cluster means:
##      Doctors     Deaths        GDP      Costs
## 1 -0.3094347 -0.8535616  0.8736311  0.7776878
## 2  0.3438163  0.9484018 -0.9707013 -0.8640976
##
## Clustering vector:
##  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
##  2  1  1  2  2  2  2  1  2  1  1  2  1  1  1  1  2  1  2
##
## Within cluster sum of squares by cluster:
## [1] 16.671286  9.045834
##  (between_SS / total_SS =  64.3 %)
##
## Available components:
##
## [1] "cluster"      "centers"      "totss"        "withinss"
## [5] "tot.withinss" "betweenss"    "size"         "iter"
## [9] "ifault"
## Матрица расстояний:
##          1
## 2 3.125833
## Центры:
##      Doctors     Deaths        GDP      Costs
## 1 -0.3094347 -0.8535616  0.8736311  0.7776878
## 2  0.3438163  0.9484018 -0.9707013 -0.8640976
## # A tibble: 2 x 9
##   cluster meanCosts sdCosts meanDoctors sdDoctors meanGDP sdGDP meanDeaths
##   <fct>       <dbl>   <dbl>       <dbl>     <dbl>   <dbl> <dbl>      <dbl>
## 1 1           0.778   0.596      -0.309     1.12    0.874 0.426     -0.854
## 2 2          -0.864   0.504       0.344     0.766  -0.971 0.177      0.948
## # ... with 1 more variable: sdDeaths <dbl>
```

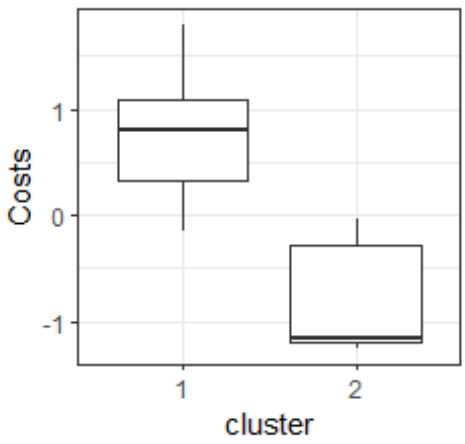

means
x
cluster
cluster1
cluster2

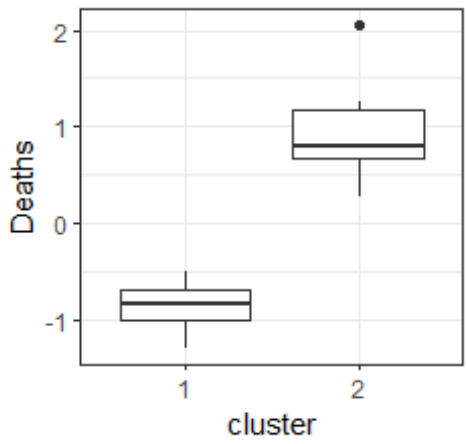

Deaths
Doctors
cluster
1
2

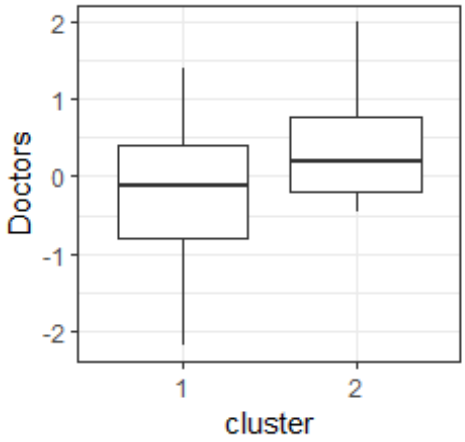

Costs
GDP
cluster
1
2

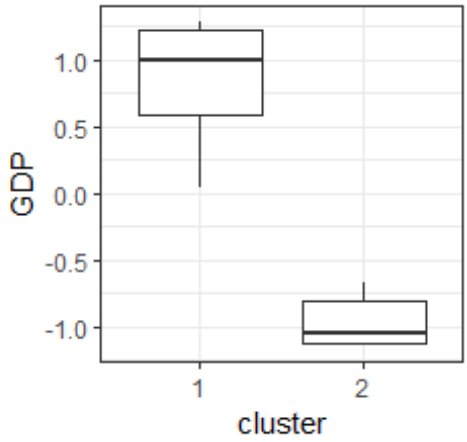

Deaths
GDP
cluster
1
2


Doctors
GDP
cluster
1
2


Costs
cluster


Deaths
cluster

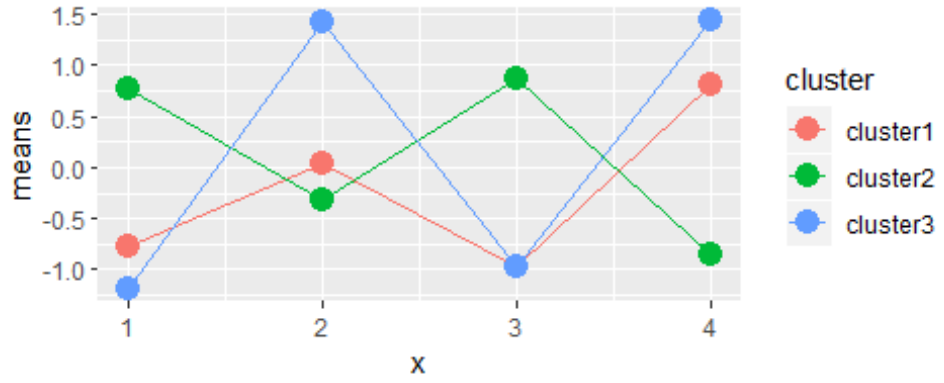

Doctors
cluster

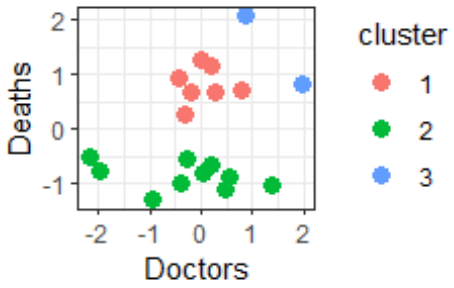

GDP
cluster

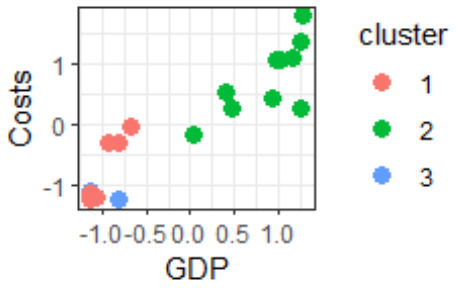
Видно, что исходные наблюдения хорошо разделяются на две группы. Если использовать **три** кластера, такое разделение будет уже сомнительным:

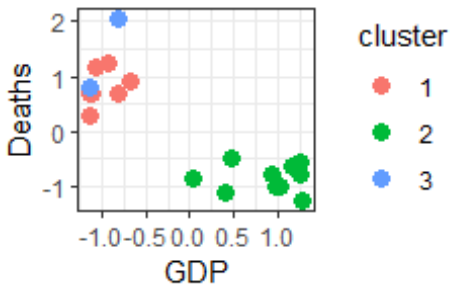
```
getimage(3)
```

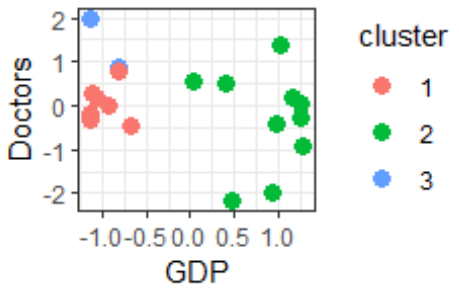
```
## Основная информация:
## K-means clustering with 3 clusters of sizes 7, 10, 2
##
## Cluster means:
##       Doctors     Deaths        GDP      Costs
## 1  0.03409616  0.8097220 -0.9719809 -0.7735973
## 2 -0.30943467 -0.8535616  0.8736311  0.7776878
## 3  1.42783680  1.4337810 -0.9662225 -1.1808485
##
## Clustering vector:
##  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
##  3  2  2  1  1  1  1  2  1  2  2  3  2  2  2  2  1  2  1
##
## Within cluster sum of squares by cluster:
## [1]  3.690518 16.671286  1.469772
##  (between_SS / total_SS =  69.7 %)
##
## Available components:
##
## [1] "cluster"      "centers"      "totss"        "withinss"
## [5] "tot.withinss" "betweenss"    "size"         "iter"
## [9] "ifault"
## Матрица расстояний:
##          1        2
## 2 2.949118
## 3 1.580459 3.933316
## Центры:
##       Doctors     Deaths        GDP      Costs
## 1  0.03409616  0.8097220 -0.9719809 -0.7735973
## 2 -0.30943467 -0.8535616  0.8736311  0.7776878
## 3  1.42783680  1.4337810 -0.9662225 -1.1808485
## # A tibble: 3 x 9
##   cluster meanCosts sdCosts meanDoctors sdDoctors meanGDP sdGDP meanDeaths
##   <fct>       <dbl>   <dbl>       <dbl>     <dbl>   <dbl> <dbl>      <dbl>
## 1 1          -0.774  0.543       0.0341     0.419  -0.972 0.183      0.810
## 2 2           0.778  0.596      -0.309      1.12    0.874 0.426     -0.854
## 3 3          -1.18   0.0923      1.43       0.790  -0.966 0.226      1.43
## # ... with 1 more variable: sdDeaths <dbl>
```

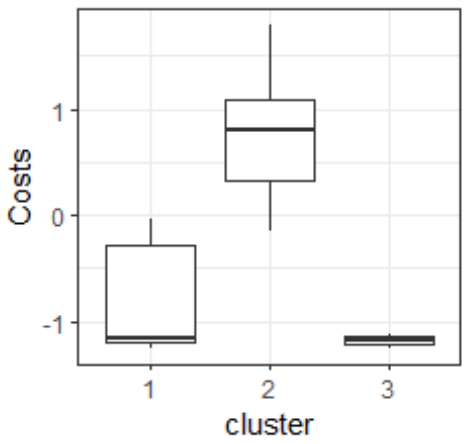

means
x
cluster
cluster1
cluster2
cluster3

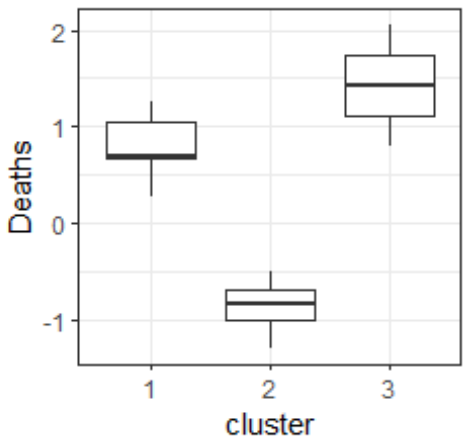

Deaths
Doctors
cluster
1
2
3

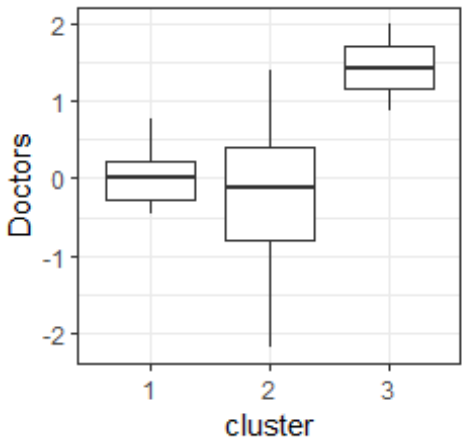

Costs
GDP
cluster
1
2
3

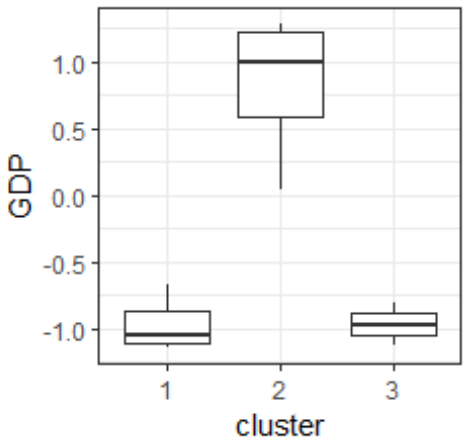

Deaths
GDP
cluster
1
2
3


Doctors
GDP
cluster
1
2
3


Costs
cluster

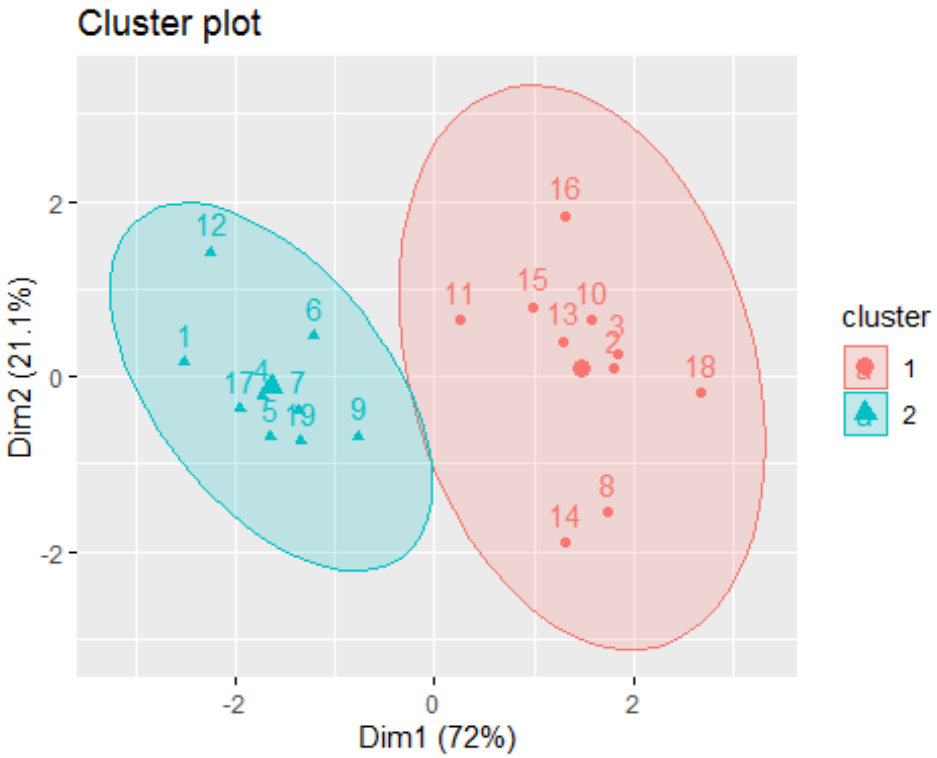

Deaths
cluster


Doctors
cluster

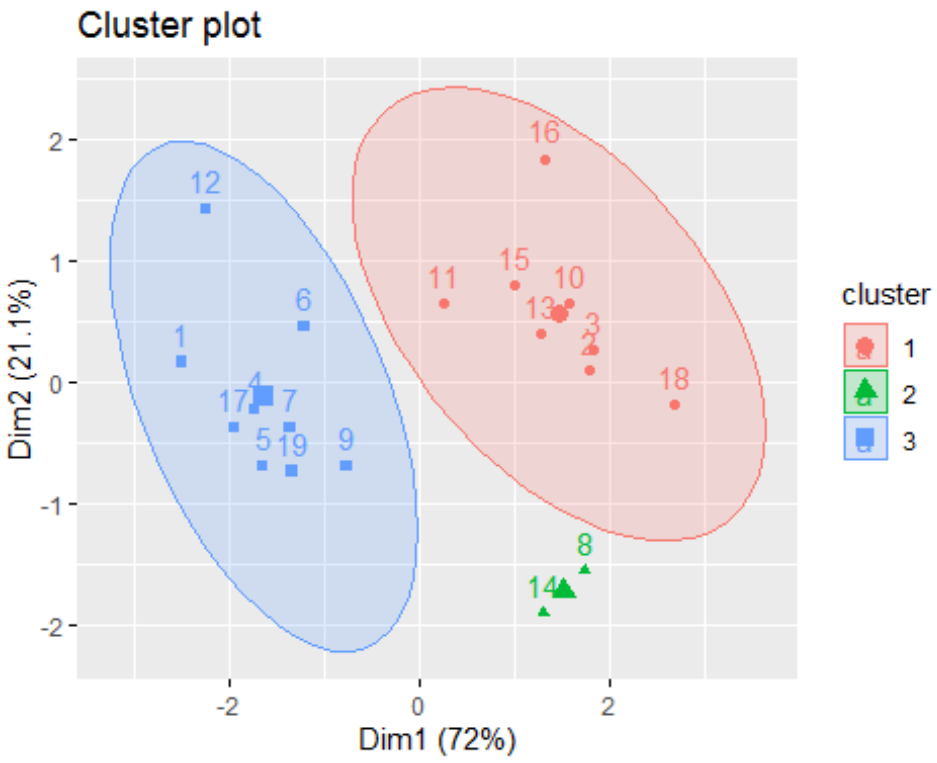

GDP
cluster

Теперь попробуем визуально оценить качество кластеризации через *главные компоненты* (дополнительно делается *дисперсионный анализ* по каждой переменной):

```
for (i in 2:5) getimage2(i)

## Дисперсионный анализ для каждой переменной, 2 кластеров
## Затраты:
##             Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## cluster      1 12.768  12.768   41.49 6.09e-06 ***
## Residuals   17  5.232   0.308
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## Смерти:
##             Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## cluster      1 15.381  15.381   99.83 1.57e-08 ***
## Residuals   17  2.619   0.154
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## Врачи:
##             Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
## cluster      1  2.021  2.0214   2.151  0.161
## Residuals   17 15.979  0.9399
## ВВП:
##             Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## cluster      1 16.113  16.113   145.1 9.48e-10 ***
## Residuals   17  1.887   0.111
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

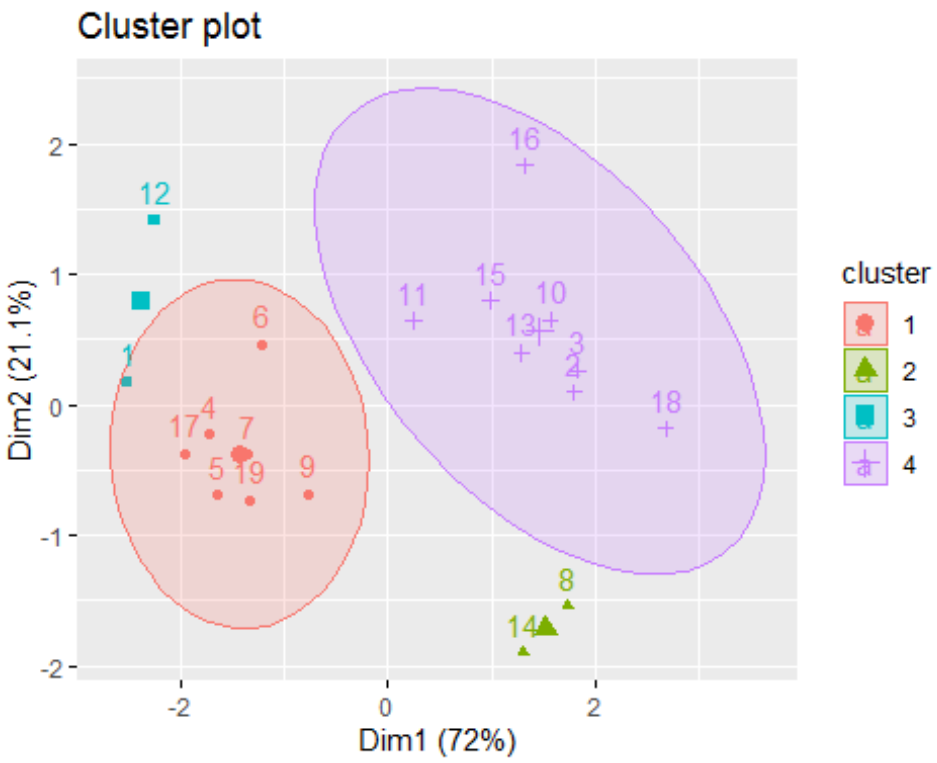


```
## Дисперсионный анализ для каждой переменной, 3 кластеров
## Затраты:
##             Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## cluster      2 13.195   6.598   21.97 2.58e-05 ***
## Residuals   16  4.805   0.300
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## Смерти:
##             Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
## cluster      2 15.497   7.749   49.53 1.4e-07 ***
## Residuals   16  2.503   0.156
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## Врачи:
##             Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
## cluster      2  9.809   4.904    9.58 0.00184 **
## Residuals   16  8.191   0.512
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## ВВП:
##             Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## cluster      2 16.189   8.095   71.52 1.05e-08 ***
## Residuals   16  1.811   0.113
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```



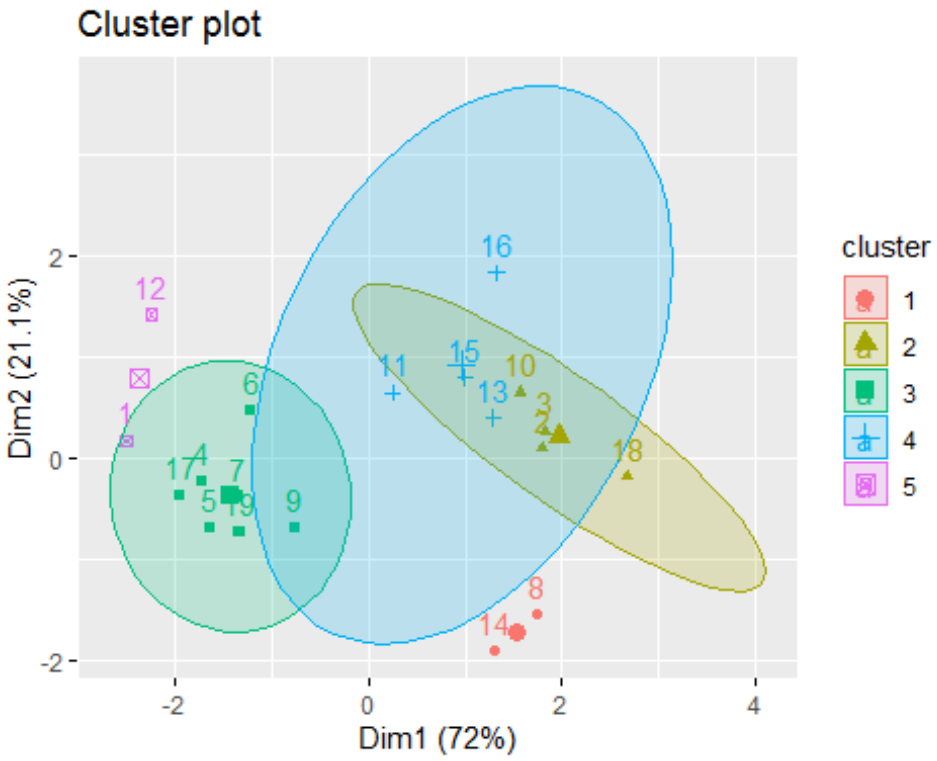

```
## Дисперсионный анализ для каждой переменной, 4 кластеров
## Затраты:
##             Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
```

```
## cluster      3 13.453   4.484   14.79 9.42e-05 ***
## Residuals   15  4.547   0.303
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## Смерти:
##             Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## cluster      3 16.103   5.368   42.44 1.45e-07 ***
## Residuals   15  1.897   0.126
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## Врачи:
##             Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## cluster      3 12.831   4.277   12.41 0.000242 ***
## Residuals   15  5.169   0.345
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## ВВП:
##             Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## cluster      3 16.189   5.396    44.7 1.02e-07 ***
## Residuals   15  1.811   0.121
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```




```
## Дисперсионный анализ для каждой переменной, 5 кластеров
## Затраты:
##             Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## cluster      4 15.085   3.771   18.11 2.01e-05 ***
## Residuals   14  2.915   0.208
## ---
```

```
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## Смерти:
##             Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## cluster      4 16.114   4.029   29.91 1.01e-06 ***
## Residuals   14  1.886   0.135
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## Врачи:
##             Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
## cluster      4 14.707   3.677   15.63 4.6e-05 ***
## Residuals   14  3.293   0.235
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## ВВП:
##             Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
## cluster      4 16.666   4.166   43.71 9.2e-08 ***
## Residuals   14  1.334   0.095
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```



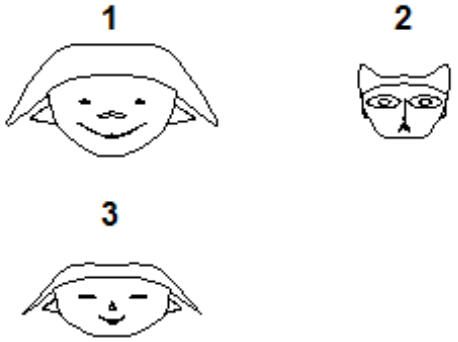
Ещё один способ оценивать качество разбиения на группы — **лица Чернова**. Идея состоит в том, чтобы для каждой группы найти какую-то характеристику каждой переменной (например, среднее), а затем на основе вектора таких характеристик постоить лица каждой группы: *чем лица более похожи, тем группы более близки*. Сделаем так **для двух кластеров**:

```
# функция делает анализ dataset по методу k-means с k кластерами, затем
# добавляет результаты к датасету
getbykmeans = function(dataset, k) {
```

```
    fit = kmeans(dataset, k)  #строится модель
    # Добавляем кластер к фрейму данных
    library(dplyr)
    newdata = as_data_frame(dataset) %>% mutate(cluster = factor(fit$cluster))
}
# функция считает средние и рисует лица
getfaces = function(k) {
    # создаем матрицу средних
    means = getbykmeans(data[, 2:5], k) %>% group_by(cluster) %>%
summarise_all(funs(mean))

    library(TeachingDemos)
    faces(means[, 2:5])  #рисуем лица
}
getfaces(2)
```

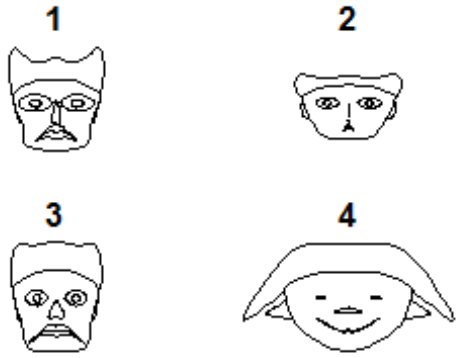
Видно, что лица сильно различаются. **Для трёх кластеров**

```
getfaces(3)
```



два лица уже похожи. **Для четырёх кластеров** имеется две пары очень похожих лиц (то есть данные разбиваются на два кластера, а дальнейшее разбиение уже излишнее – происходит поиск различий там, где их нет):

```
getfaces(4)
```



Отсюда **вывод**: достаточно было использовать только два кластера.

Задание 3

Загрузим **данные**:

```
datacrude = data.frame(read_excel("Приложение 1.xlsx"))
data = datacrude[, -c(1)]
data = data[, -c(1, 2, 16, 17)]
data %>% tbl_df()
```

```
## # A tibble: 53 x 13
##       Y3    X4    X5    X6     X7    X8    X9   X10    X11   X12    X13
##    <dbl> <dbl> <dbl> <dbl>  <dbl> <dbl> <dbl> <dbl>  <dbl> <dbl>  <dbl>
##  1 13.3   0.89  0.34  1.73 31      0.28  0.89  0.14 1.12e5 166.  9.89e3
##  2 10.2   0.93  0.33  0.99  0.15   0.25  1.8   0.3  3.76e4 186.  2.21e4
##  3 13.7   1.33  0.17  1.73  0.14   0.47  1.53  0.31 4.52e4 220.  1.08e4
##  4 12.8   0.68  0.32  0.47  0.18   1.53  0.6   0.18 7.67e4 169.  1.03e4
##  5 10.6   0.89  0.36  1.73  0.31   0.21  1.39  0.37 7.36e3  39.9 5.53e4
##  6  9.12  1.53  0.33  1.33  0.17   0.13  1.24  0.19 8.45e4  40.4 4.53e4
##  7 26.0   1.12  0.15  0.97  0.26   0.38  1.77  0.41 1.14e5 103.  1.27e4
##  8 23.4   0.99  0.32  1.82  0.290  0.38  0.09  0.36 7.80e3  37.0 5.76e4
##  9 14.7   1.65  0.31  0.68  0.26   0.2   0.52  0.41 8.45e4  45.9 1.18e5
## 10 10.0   0.56  0.15  1.8   0.28   0.35  0.8   2.06 3.59e4  40.1 6.44e4
## # ... with 43 more rows, and 2 more variables: X14 <dbl>, X15 <dbl>
```

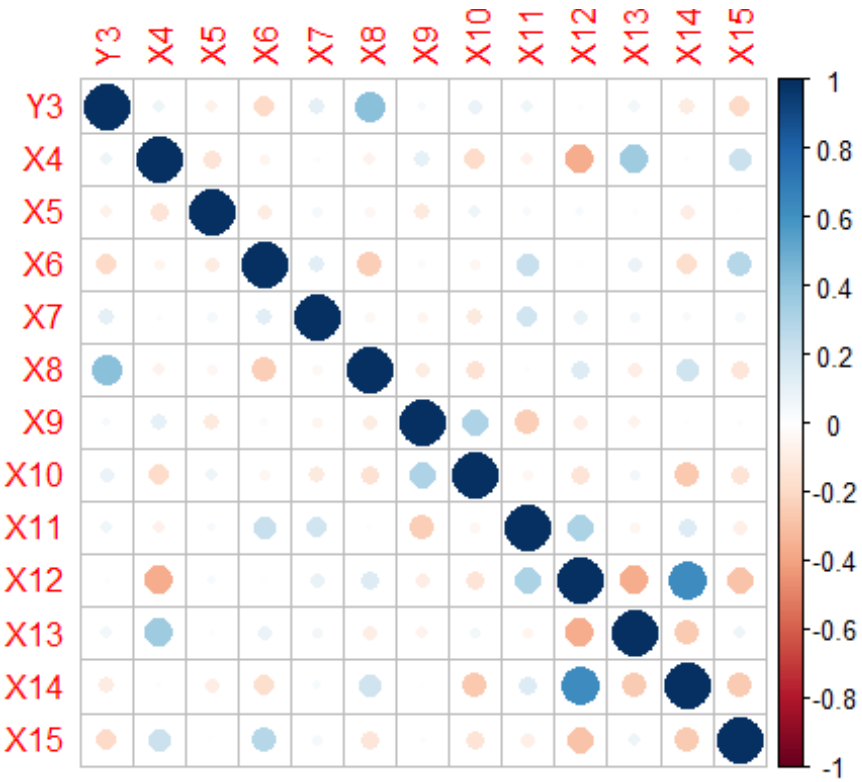
Визуализация корреляционной матрицы заданного набора переменных:

```
library(corrplot)
(matr = cor(data))
```

```
##              Y3          X4           X5          X6          X7
## Y3   1.00000000  0.07650448 -0.072024390 -0.19034971  0.11487125
## X4   0.07650448  1.00000000 -0.143222378 -0.05165605  0.02087309
## X5  -0.07202439 -0.14322238  1.000000000 -0.10105745  0.04470227
## X6  -0.19034971 -0.05165605 -0.101057451  1.00000000  0.12261894
## X7   0.11487125  0.02087309  0.044702272  0.12261894  1.00000000
## X8   0.41247593 -0.06787551 -0.041525168 -0.24074470 -0.03683463
## X9   0.03646200  0.10789499 -0.113522027  0.02500297 -0.05390234
## X10  0.08137700 -0.18976437  0.070132267 -0.04524674 -0.11608259
## X11  0.06540456 -0.07079232  0.033116213  0.22954802  0.19025176
## X12  0.01947580 -0.36101268  0.032584704 -0.00409325  0.09312382
## X13  0.05655101  0.35261229  0.017754637  0.08272441  0.05377388
## X14 -0.10504111 -0.01039568 -0.090105051 -0.17096373  0.03176305
## X15 -0.19945635  0.21542253  0.008607521  0.28241807  0.04977926
##              X8           X9          X10         X11         X12
## Y3   0.41247593  0.0364619968  0.08137700  0.06540456  0.01947580
## X4  -0.06787551  0.1078949930 -0.18976437 -0.07079232 -0.36101268
## X5  -0.04152517 -0.1135220265  0.07013227  0.03311621  0.03258470
## X6  -0.24074470  0.0250029745 -0.04524674  0.22954802 -0.00409325
## X7  -0.03683463 -0.0539023369 -0.11608259  0.19025176  0.09312382
## X8   1.00000000 -0.1007706318 -0.15649952 -0.01102561  0.14129715
## X9  -0.10077063  1.0000000000  0.30517775 -0.24507910 -0.09717025
```

```
## X10 -0.15649952  0.3051777477  1.00000000 -0.04511818 -0.14281619
## X11 -0.01102561 -0.2450790952 -0.04511818  1.00000000  0.31083103
## X12  0.14129715 -0.0971702535 -0.14281619  0.31083103  1.00000000
## X13 -0.09511029 -0.0677385171  0.05003536 -0.05178378 -0.36987532
## X14  0.20164538 -0.0005369078 -0.26948437  0.14258917  0.62254065
## X15 -0.13295559 -0.0159931107 -0.14937007 -0.08199636 -0.28801774
##             X13           X14          X15
## Y3   0.05655101 -0.1050411148 -0.199456352
## X4   0.35261229 -0.0103956837  0.215422531
## X5   0.01775464 -0.0901050514  0.008607521
## X6   0.08272441 -0.1709637327  0.282418070
## X7   0.05377388  0.0317630498  0.049779257
## X8  -0.09511029  0.2016453817 -0.132955585
## X9  -0.06773852 -0.0005369078 -0.015993111
## X10  0.05003536 -0.2694843746 -0.149370073
## X11 -0.05178378  0.1425891667 -0.081996358
## X12 -0.36987532  0.6225406492 -0.288017745
## X13  1.00000000 -0.2539722434  0.073307149
## X14 -0.25397224  1.0000000000 -0.254812455
## X15  0.07330715 -0.2548124551  1.000000000
```

```
corrplot(matr)
```



В наборе данных в целом нет значительных корреляций, поэтому сжать его до трёх-четырёх главных компонент без сильной потери информации не получится.

Результаты аналаза методом главных компонент без вращения:

```
library(psych)
principal(data, nfactors = 10, rotate = "none")  #Создание модели
```

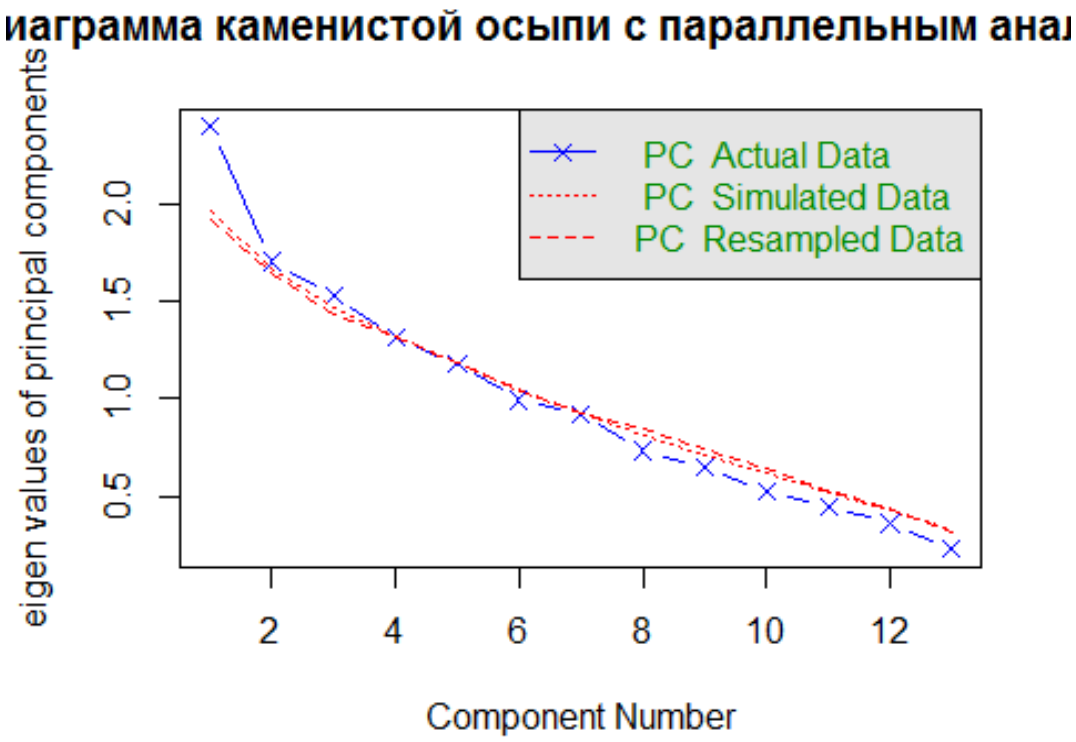
```
## Principal Components Analysis
## Call: principal(r = data, nfactors = 10, rotate = "none")
## Standardized loadings (pattern matrix) based upon correlation matrix
##       PC1   PC2   PC3   PC4   PC5   PC6   PC7   PC8   PC9  PC10   h2
## Y3   0.14 -0.53  0.41  0.45  0.28 -0.21  0.07  0.11 -0.07 -0.19 0.86
## X4  -0.44 -0.05  0.58 -0.31  0.16  0.35  0.01  0.27 -0.22 -0.07 0.91
## X5   0.02  0.06 -0.21  0.40 -0.59  0.29  0.40  0.39  0.12 -0.16 1.00
## X6  -0.23  0.65 -0.12  0.11  0.37 -0.29 -0.11  0.14  0.37 -0.21 0.94
## X7   0.08  0.32  0.28  0.37  0.31  0.18  0.60 -0.41 -0.01  0.12 0.99
## X8   0.41 -0.44  0.45  0.08 -0.09 -0.41  0.06  0.19  0.27  0.19 0.89
## X9  -0.21 -0.34 -0.36 -0.29  0.56  0.09  0.36  0.26  0.12 -0.12 0.92
## X10 -0.22 -0.38 -0.60  0.37  0.25  0.11 -0.09  0.10 -0.07  0.39 0.94
## X11  0.35  0.46  0.12  0.45  0.25  0.10 -0.28  0.33 -0.32  0.05 0.92
## X12  0.84  0.20 -0.12 -0.04  0.12  0.09  0.03  0.09  0.14  0.05 0.81
## X13 -0.53 -0.03  0.37  0.23  0.01  0.41 -0.27 -0.01  0.46  0.18 0.95
## X14  0.72  0.08  0.12 -0.44  0.10  0.31  0.04  0.12  0.12  0.18 0.90
## X15 -0.49  0.42  0.14 -0.19 -0.11 -0.39  0.31  0.26 -0.10  0.35 0.94
##         u2 com
## Y3  0.1365 4.6
## X4  0.0928 4.5
## X5  0.0047 4.8
## X6  0.0614 3.8
## X7  0.0138 4.9
## X8  0.1133 5.6
## X9  0.0784 5.3
## X10 0.0627 4.4
## X11 0.0797 6.3
## X12 0.1866 1.3
## X13 0.0467 5.1
## X14 0.0967 2.6
## X15 0.0598 6.1
##
##                        PC1  PC2  PC3  PC4  PC5  PC6  PC7  PC8  PC9 PC10
## SS loadings           2.40 1.71 1.54 1.32 1.18 0.99 0.92 0.73 0.65 0.53
## Proportion Var        0.18 0.13 0.12 0.10 0.09 0.08 0.07 0.06 0.05 0.04
## Cumulative Var        0.18 0.32 0.43 0.54 0.63 0.70 0.77 0.83 0.88 0.92
## Proportion Explained  0.20 0.14 0.13 0.11 0.10 0.08 0.08 0.06 0.05 0.04
## Cumulative Proportion 0.20 0.34 0.47 0.58 0.68 0.76 0.84 0.90 0.96 1.00
##
## Mean item complexity =  4.6
## Test of the hypothesis that 10 components are sufficient.
##
## The root mean square of the residuals (RMSR) is  0.04
##  with the empirical chi square  14.34  with prob <  NA
##
## Fit based upon off diagonal values = 0.94
```

Здесь *сперва выведена матрица корреляций*, затем **SS loadings** — это собственные значения каждой компоненты, **Proportion Var** — доля дисперсий, объясняемых каждой компонентой, **Cumulative Var** — кумулятивная доля (первая компонента объясняет 18%, первые две вместе — 32%, первые три — 43% и т. д.), дальше то же самое, только в

пропорции. *По принципу Кайзера* следует выделить только 5 компонент, хотя, судя по объяснённым дисперсиям, и восьми может быть недостаточно.

Построим **диаграмму каменистой осыпи**:

```
fa.parallel(data, fa = "pc", show.legend = T, main = "Диаграмма каменистой осыпи
с параллельным анализом")
```



Здесь, как и ожидалось, не наблюдается резкого убывания собственных значений, поэтому нельзя сказать, сколько конкретно главных компонент следовало бы выделить. Возмём 6 факторов и **проведём анализ с вращением осей**:

```
# варимакс с нормализацией
(vm = principal(apply(data, 2, scale), nfactors = 9, rotate = "varimax"))

## Principal Components Analysis
## Call: principal(r = apply(data, 2, scale), nfactors = 9, rotate = "varimax")
## Standardized loadings (pattern matrix) based upon correlation matrix
##       RC1   RC6   RC3   RC5   RC2   RC4   RC9   RC7   RC8   h2    u2 com
## Y3  -0.17  0.80  0.04  0.15 -0.22  0.21  0.05  0.18 -0.09 0.83 0.174 1.6
## X4  -0.06 -0.01  0.91  0.04 -0.05  0.02  0.24  0.01 -0.11 0.90 0.098 1.2
## X5  -0.02 -0.04 -0.08 -0.02 -0.06  0.03  0.03  0.03  0.98 0.97 0.031 1.0
## X6  -0.03 -0.17 -0.16  0.07  0.86  0.22  0.18  0.08 -0.14 0.90 0.105 1.5
## X7   0.04  0.02  0.01 -0.05  0.06  0.08  0.03  0.98  0.03 0.97 0.027 1.0
## X8   0.21  0.86 -0.05 -0.17 -0.02 -0.15 -0.04 -0.12  0.03 0.85 0.151 1.3
## X9   0.09  0.00  0.17  0.89  0.11 -0.25 -0.08  0.01 -0.07 0.91 0.092 1.3
## X10 -0.36 -0.07 -0.33  0.66 -0.20  0.18  0.08 -0.13  0.08 0.78 0.217 2.7
## X11  0.16  0.02  0.00 -0.12  0.12  0.92 -0.03  0.08  0.03 0.92 0.083 1.2
```

```
## X12  0.77  0.07 -0.33 -0.03  0.00  0.25 -0.19  0.07  0.05 0.81 0.189 1.8
## X13 -0.22  0.00  0.22 -0.04  0.06 -0.04  0.90  0.03  0.05 0.92 0.078 1.3
## X14  0.91  0.00  0.10 -0.04 -0.14  0.02 -0.09 -0.01 -0.05 0.87 0.130 1.1
## X15 -0.33 -0.09  0.42 -0.14  0.62 -0.14 -0.28  0.02  0.15 0.82 0.183 3.4
##
##                        RC1  RC6  RC3  RC5  RC2  RC4  RC9  RC7  RC8
## SS loadings           1.82 1.43 1.34 1.32 1.27 1.15 1.04 1.04 1.04
## Proportion Var        0.14 0.11 0.10 0.10 0.10 0.09 0.08 0.08 0.08
## Cumulative Var        0.14 0.25 0.35 0.45 0.55 0.64 0.72 0.80 0.88
## Proportion Explained  0.16 0.12 0.12 0.12 0.11 0.10 0.09 0.09 0.09
## Cumulative Proportion 0.16 0.28 0.40 0.52 0.63 0.73 0.82 0.91 1.00
##
## Mean item complexity =  1.6
## Test of the hypothesis that 9 components are sufficient.
##
## The root mean square of the residuals (RMSR) is  0.05
##  with the empirical chi square  22.63  with prob <  NA
##
## Fit based upon off diagonal values = 0.91
```

По результатам анализа видно, что **первая компонента сильно коррелирует с переменной X14** (фондовооруженность труда), **шестая — с Y3** (рентабельность) **и X8** (премии и вознаграждения на одного работника), **третья — с X4** (трудоемкость единицы продукции), **пятая — с X9** (удельный вес потерь от брака), **вторая — с X6** (удельный вес покупных изделий), **четвёртая — с X11** (среднегодовая численность ППП), **девятая — с X13** (среднегодовой фонд заработной платы), **седьмая — с X7** (коэффициент сменности оборудования), **восьмая — с X5** (удельный вес рабочих в составе ППП).

Также можно увидеть **матрицу весовых коэффициентов**:

```
round(unclass(vm$weights), 2)  #делается округление до второго знака, чтобы не занимала много места
```

```
##       RC1   RC6   RC3   RC5   RC2   RC4   RC9   RC7   RC8
## Y3  -0.17  0.56  0.06  0.14 -0.07  0.21 -0.04  0.13 -0.05
## X4   0.06 -0.03  0.74  0.09 -0.13  0.20  0.04 -0.05  0.00
## X5   0.06  0.03  0.05  0.07  0.03  0.01  0.06 -0.01  0.97
## X6   0.10  0.06 -0.23  0.12  0.75  0.06  0.27 -0.04 -0.09
## X7  -0.02 -0.04 -0.04  0.00 -0.06 -0.11 -0.02  0.98 -0.01
## X8   0.11  0.66 -0.07 -0.08  0.24 -0.19  0.06 -0.16  0.10
## X9   0.21  0.07  0.18  0.73  0.20 -0.17 -0.06  0.05  0.06
## X10 -0.20 -0.04 -0.19  0.46 -0.15  0.24  0.03 -0.10  0.06
## X11 -0.02  0.00  0.19  0.01  0.01  0.87 -0.10 -0.10  0.04
## X12  0.42  0.03 -0.14  0.07  0.10  0.09  0.02  0.02  0.07
## X13  0.11  0.03 -0.03 -0.03  0.09 -0.09  0.92 -0.02  0.07
## X14  0.57 -0.06  0.17  0.07 -0.02 -0.06  0.09 -0.04  0.03
## X15 -0.16  0.08  0.32 -0.06  0.46 -0.06 -0.41 -0.03  0.20
```

а *корреляционная матрица для главных компонент показывает их ортогональность*:

```
cor(vm$scores)
```

```
##                RC1           RC6           RC3           RC5           RC2
## RC1  1.000000e+00 -3.322039e-16 -4.017081e-16 -3.311111e-16 -1.097364e-15
## RC6 -3.322039e-16  1.000000e+00 -2.487410e-18  1.359047e-16 -1.150972e-15
## RC3 -4.017081e-16 -2.487410e-18  1.000000e+00  1.002791e-15  3.791133e-16
## RC5 -3.311111e-16  1.359047e-16  1.002791e-15  1.000000e+00  9.920320e-16
## RC2 -1.097364e-15 -1.150972e-15  3.791133e-16  9.920320e-16  1.000000e+00
## RC4  5.985266e-17 -1.692169e-16 -7.181786e-16 -4.718224e-16 -5.426067e-17
## RC9 -4.962092e-17 -6.727412e-16 -9.481877e-16 -8.728078e-16 -1.537039e-15
## RC7 -3.786863e-17  1.421368e-16 -1.223310e-15  2.718788e-16  1.030068e-15
## RC8 -9.141297e-16 -2.122034e-16  5.827222e-17 -7.918898e-16 -1.165864e-15
##                RC4           RC9           RC7           RC8
## RC1  5.985266e-17 -4.962092e-17 -3.786863e-17 -9.141297e-16
## RC6 -1.692169e-16 -6.727412e-16  1.421368e-16 -2.122034e-16
## RC3 -7.181786e-16 -9.481877e-16 -1.223310e-15  5.827222e-17
## RC5 -4.718224e-16 -8.728078e-16  2.718788e-16 -7.918898e-16
## RC2 -5.426067e-17 -1.537039e-15  1.030068e-15 -1.165864e-15
## RC4  1.000000e+00 -4.851502e-16 -6.944523e-16  1.718727e-15
## RC9 -4.851502e-16  1.000000e+00 -9.417104e-16  1.491393e-16
## RC7 -6.944523e-16 -9.417104e-16  1.000000e+00 -8.266536e-16
## RC8  1.718727e-15  1.491393e-16 -8.266536e-16  1.000000e+00
```

Задание 4

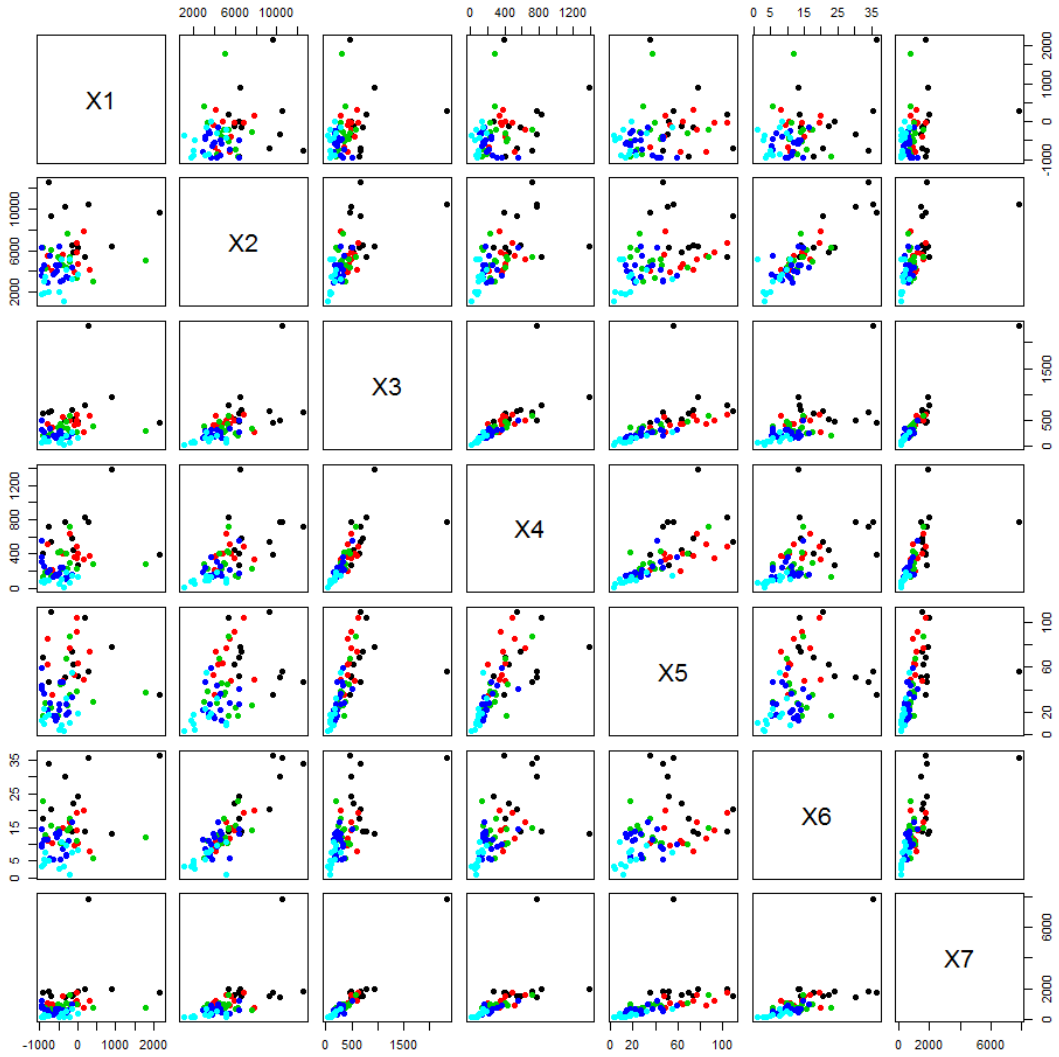
Загрузим **данные**:

```
data = data.frame(read_excel("Приложение 2.xlsx"))
data$CLASS = factor(data$CLASS)
data %>% tbl_df()
```

```
## # A tibble: 65 x 8
##       X1    X2    X3    X4    X5    X6    X7 CLASS
##    <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <fct>
##  1 2174   9658   466   386    35  36.4  1756 1
##  2  274  10477  2321   767    56  35.6  7884 1
##  3 -146   6567   713   581    74  13.8  1501 1
##  4 -338  10282   499   764    51  30.2  1466 1
##  5 -716   9316   677   533   109  20.5  1486 1
##  6  893.  6425   944  1390    78  13.2  1936 1
##  7  191   5367   786   819   104  13.7  2011 1
##  8    0   6342   486   261    52  24.1  1841 1
##  9 -107   5868   531   450    63  22.3  1608 1
## 10 -903   6330   636   401    69  17.6  1768 1
## # ... with 55 more rows
```

Визуализация:

```
pairs(data[, 1:7], col = data$CLASS, pch = 16)
```



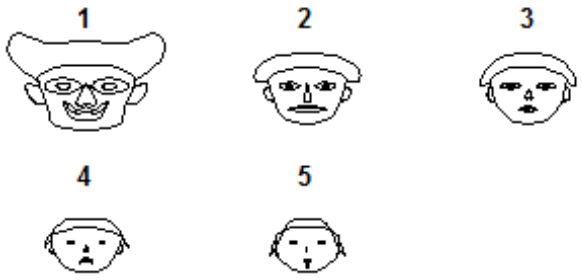
Напишем несколько вспомогательных функций:

```
library(MASS)
# лица Чернова
showfaces = function() {
    newdata = as_data_frame(data) %>% group_by(CLASS) %>%
summarise_all(funs(mean))
    print(faces(newdata[, 2:8]))  #рисуем лица
}
# визуализация кластеров через главные компоненты
showimage = function() {
    library(factoextra)
    print(fviz_cluster(list(data = data[, 1:7], cluster = data[, 8]),
ellipse.type = "norm"))
}

# матрицы, обратные матрицам ковариации для каждого класса
covinv = function(df) {
    res = list()
```

```
    for (i in 1:length(levels(df$CLASS))) res[[i]] = tryCatch({
        df[df$CLASS == i, 1:7] %>% as.matrix() %>% cov() %>% solve
    }, error = function(r) NA)
    # res[[i]]=df[df$CLASS==i,1:7] %>% as.matrix() %>% cov() %>% solve
    res
}

# расстояния Махаланобиса от элемента до каждого из классов
distance = function(means, covs, elem) {
    res = c()
    for (i in 1:nrow(means)) {
        vec = (means[i, ] - elem)
        res[i] = (vec %*% covs[[i]]) %*% vec
    }

    return(sqrt(res))
}

# поиск номера элемента в датафрейме
find.number = function(df, elem) {
    sm = 0
    i = 0
    len = length(elem)
    while (sm != len) {
        i = i + 1
        v = ifelse(df[i, ] == elem, T, F)
        sm = sum(v)
    }
    return(i)
}
```

Лица Чернова показывают, что в двух случаях между парами групп сильной разницы нет:

```
showfaces()
```



Проведём обучение через *линейный дискриминантный анализ*:

```
ldadat <- lda(CLASS ~ ., data, method = "moment")
```

Результаты обучения:

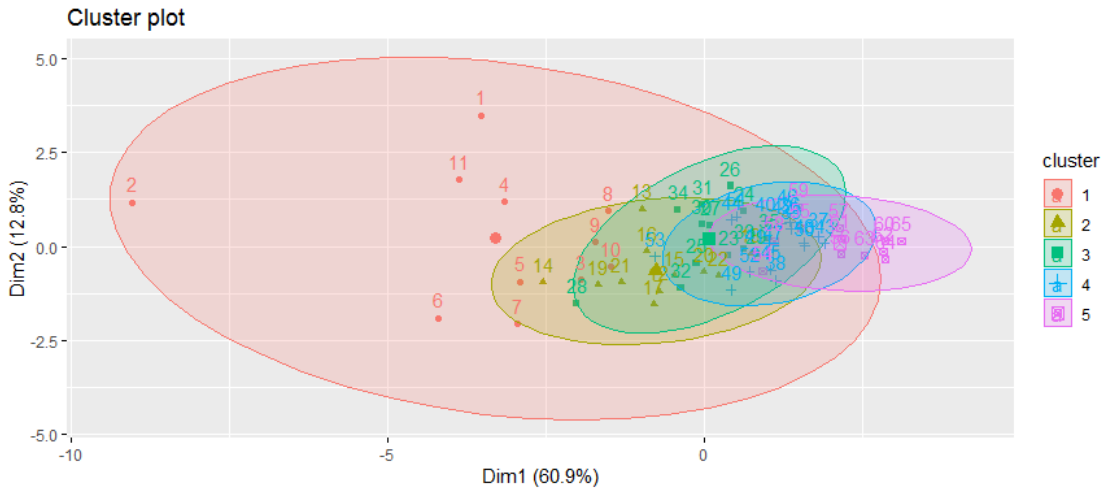
```
# Функция вывода результатов классификации
Out_CTab <- function(model, group) {
    cat("Таблица неточностей \"Факт/Прогноз\" по обучающей выборке: \n")
    classified <- predict(model)$class
    t1 <- table(group, classified)
    print(t1)
    # Точность классификации и расстояние Махалонобиса
    Err_S <- mean(group != classified)
    mahDist <- dist(model$means %*% model$scaling)
    cat("Точность классификации:", 1 - Err_S[1], "\n")
    cat("Расстояния Махалонобиса:\n")
    print(mahDist)

    # Таблица 'Факт/Прогноз' и ошибка при скользящем контроле
    t2 <- table(group, LDA.cv <- update(model, CV = T)$class)
    Err_CV <- mean(group != LDA.cv)
    cat("Ошибка при скользящем контроле:", Err_CV[1], "\n")
    Err_S.MahD <- c(Err_S, mahDist)
    Err_CV.N <- c(Err_CV, length(group))
    cbind(t1, Err_S.MahD, t2, Err_CV.N)

    cat("Результаты многомерного дисперсионного анализа: \n")
    ldam <- manova(as.matrix(data[, 1:7]) ~ data$CLASS)
```

```
    print(summary(ldam, test = "Wilks"))
}
Out_CTab(ldadat, data$CLASS)

## Таблица неточностей "Факт/Прогноз" по обучающей выборке:
##      classified
## group  1  2  3  4  5
##     1  9  2  0  0  0
##     2  0  8  2  1  0
##     3  0  2  7  4  0
##     4  0  0  2 15  1
##     5  0  0  0  3  9
## Точность классификации: 0.7384615
## Расстояния Махалонобиса:
##          1        2        3        4
## 2 3.016556
## 3 3.680769 1.726019
## 4 4.766641 2.584622 1.213160
## 5 6.461644 4.081787 2.854497 1.855913
## Ошибка при скользящем контроле: 0.4615385
## Результаты многомерного дисперсионного анализа:
##            Df   Wilks approx F num Df den Df    Pr(>F)
## data$CLASS  4 0.12674   5.4173     28 196.12 2.994e-13 ***
## Residuals  60
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Точность классификации достаточно низкая (74%), вдобавок *лямбда Уилкса* (**0.126**) сильно отличается от нуля. Откорректируем классификацию, чтобы добиться стопроцентной точности:

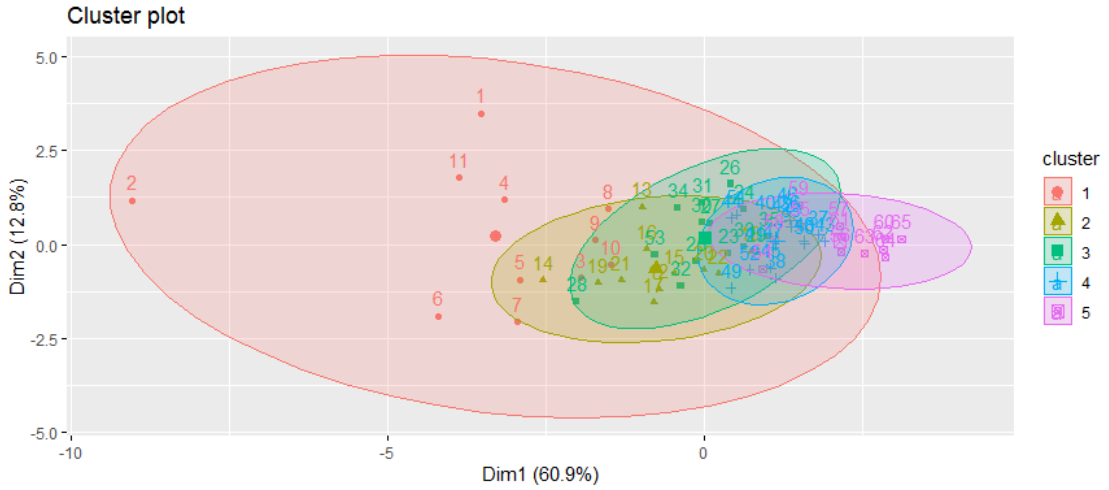
```
acc = 0  #точность
repeat {
    showimage()

    ldadat <- lda(CLASS ~ ., data, method = "moment")
    means = ldadat$means
    cov.mat = covinv(data)

    # для всех неправильно найденных найти расстояния до кластеров, отнесённых
    # экспертами
    prclass = predict(ldadat, data[, 1:7])$class
    st = data[data$CLASS != prclass, ]
    acc = 1 - nrow(st)/nrow(data)
    cat("Точность классификации:", acc, "\n")
    if (near(acc, 1))
        break

    if (nrow(st) == 1) {
        number.of.max.distance = 1
    } else {
        distances = c()
```

```
        for (i in 1:nrow(st)) {
            cls = as.numeric(st[i, 8])
            vec = (means[cls, ] - as.numeric(st[i, 1:7]))
            if (is.na(cov.mat[[cls]])) {
                distances[i] = NA
            } else {
                distances[i] = (vec %*% cov.mat[[cls]]) %*% vec
            }
        }
        distances = sqrt(distances)
        # номер элемента (в таблице неверно отнесённых) с максимальным
расстоянием
        # для своего кластера
        number.of.max.distance = which.max(distances)
    }

    tt = st[number.of.max.distance, ]  #сам элемент
    cat("Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием (",
max(distances,
        na.rm = T), ")\n")
    # номер того же элемента, но в исходном фрейме
    number.of.max.distance.new = find.number(data, tt)
    print(data[number.of.max.distance.new, ])
    # сделать замену на кластер с минимальным расстоянием
    data[number.of.max.distance.new, 8] = predict(ldadat, tt[, 1:7])$class
#levels(data$CLASS)[which.min(distance(ldadat$means,cov.mat,as.numeric(tt[,-
8])))]
    cat("Заменяется на\n")
    print(data[number.of.max.distance.new, ])
}
```

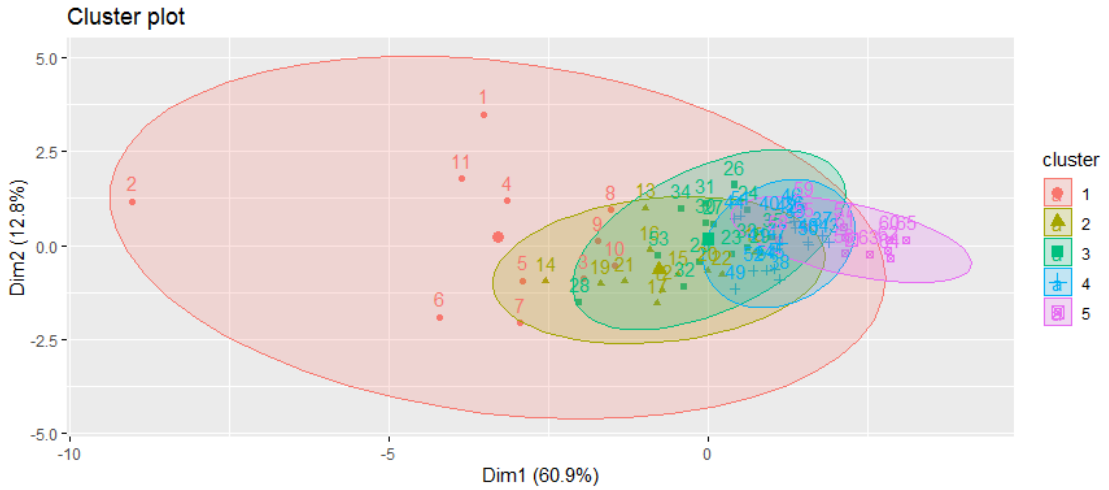



```
## Точность классификации: 0.7384615
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 3.93429 )
##      X1   X2  X3  X4 X5   X6   X7 CLASS
## 53 -934 6322 510 548 41 14.7 1187     4
## Заменяется на
```

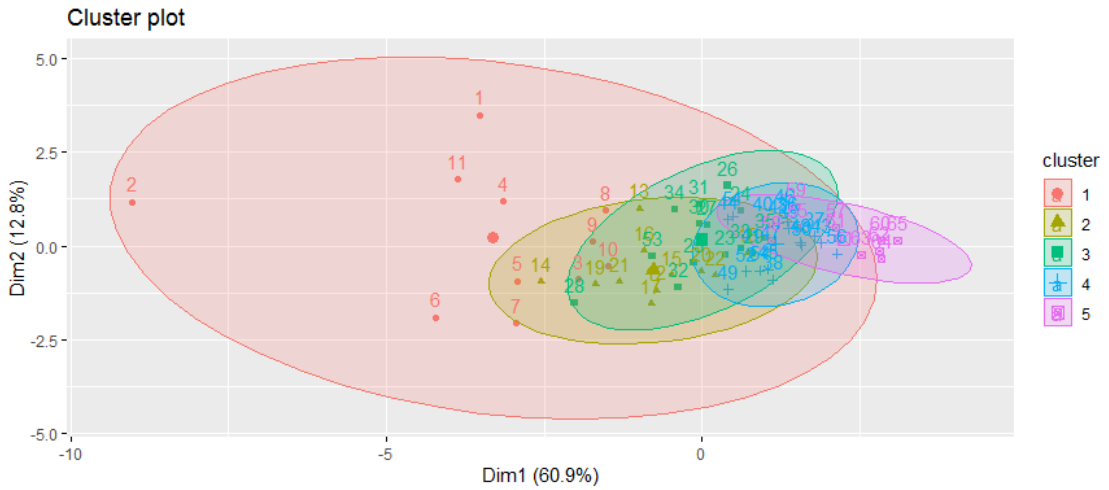
```
##       X1   X2  X3  X4 X5   X6   X7 CLASS
## 53 -934 6322 510 548 41 14.7 1187     3
```



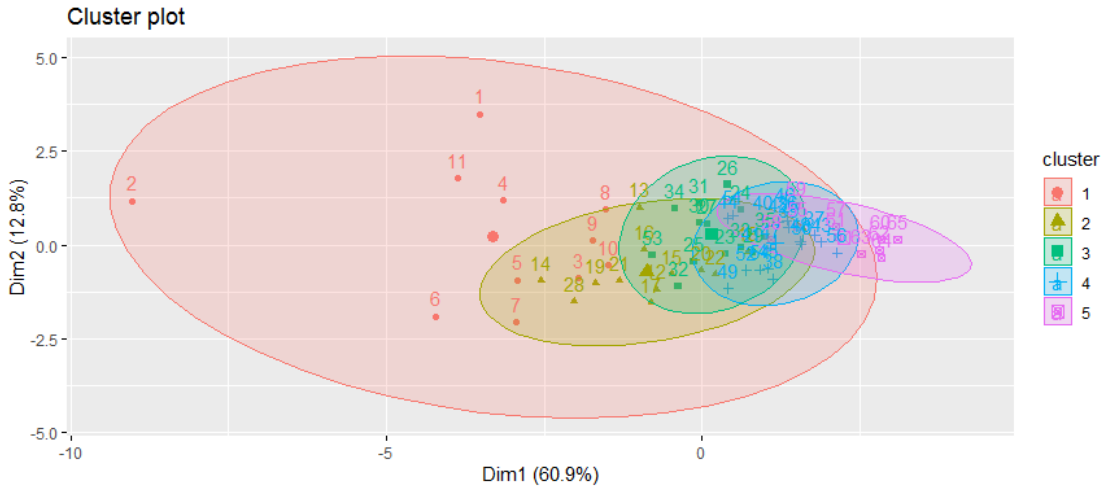

```
## Точность классификации: 0.7846154
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 3.016765 )
##        X1   X2  X3  X4 X5  X6  X7 CLASS
## 54 -161.6 3196 288 149 55 7.6 684     5
## Заменяется на
##        X1   X2  X3  X4 X5  X6  X7 CLASS
## 54 -161.6 3196 288 149 55 7.6 684     4
```



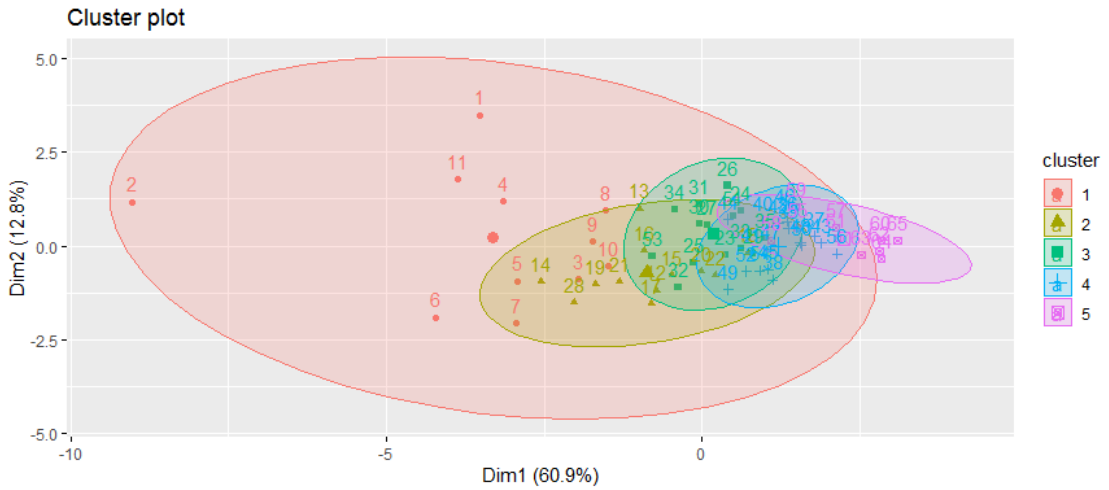

```
## Точность классификации: 0.7846154
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.970361 )
##       X1   X2  X3 X4 X5  X6  X7 CLASS
## 56 -879 3058 169 86 23 5.6 307     5
## Заменяется на
##       X1   X2  X3 X4 X5  X6  X7 CLASS
## 56 -879 3058 169 86 23 5.6 307     4
```



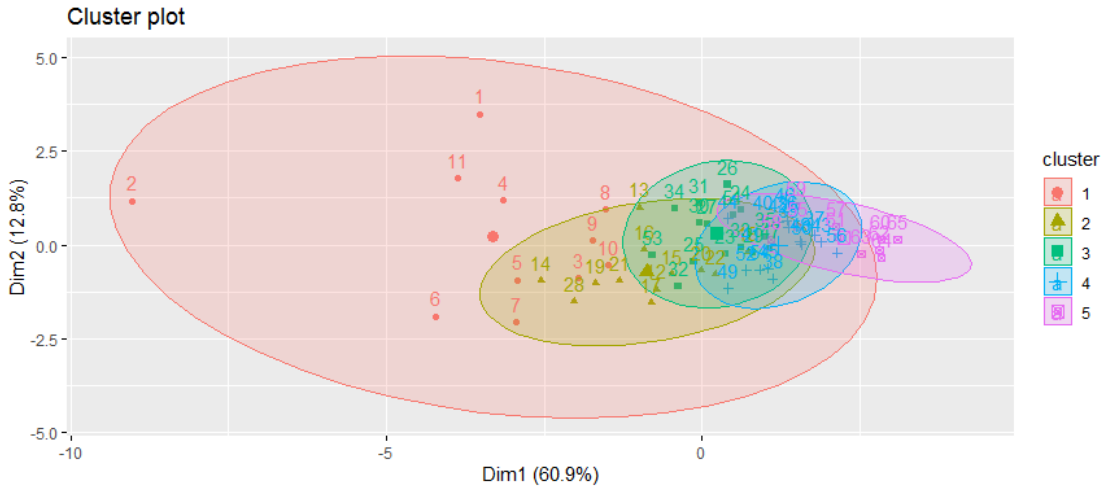

```
## Точность классификации: 0.8
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.904711 )
##      X1   X2  X3  X4 X5   X6     X7 CLASS
## 28 -205 5357 583 716 87 14.8 1606.6     3
## Заменяется на
##      X1   X2  X3  X4 X5   X6     X7 CLASS
## 28 -205 5357 583 716 87 14.8 1606.6     2
```



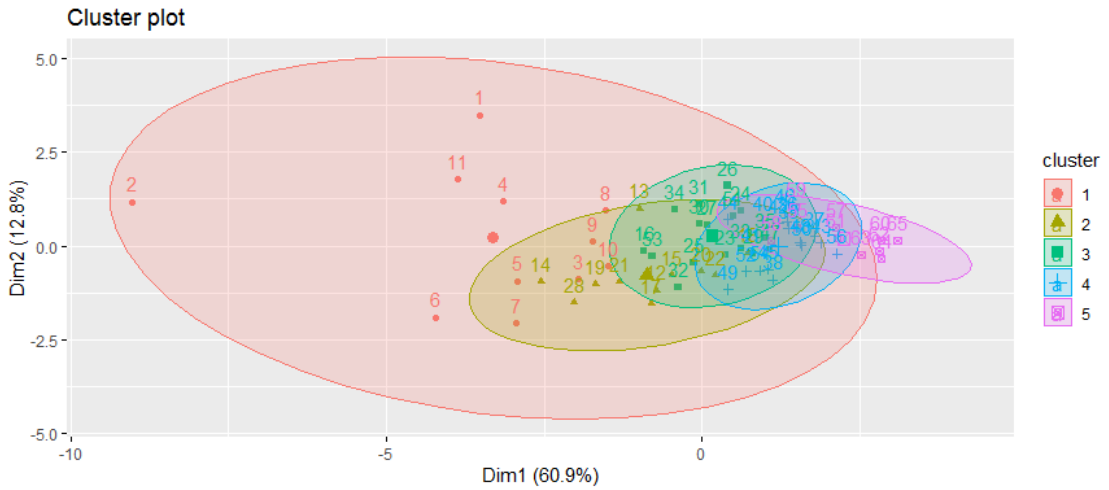

```
## Точность классификации: 0.8153846
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 3.172017 )
##      X1   X2  X3  X4 X5   X6  X7 CLASS
## 51 -500 6368 288 169 27 13.3 601     4
## Заменяется на
##      X1   X2  X3  X4 X5   X6  X7 CLASS
## 51 -500 6368 288 169 27 13.3 601     3
```



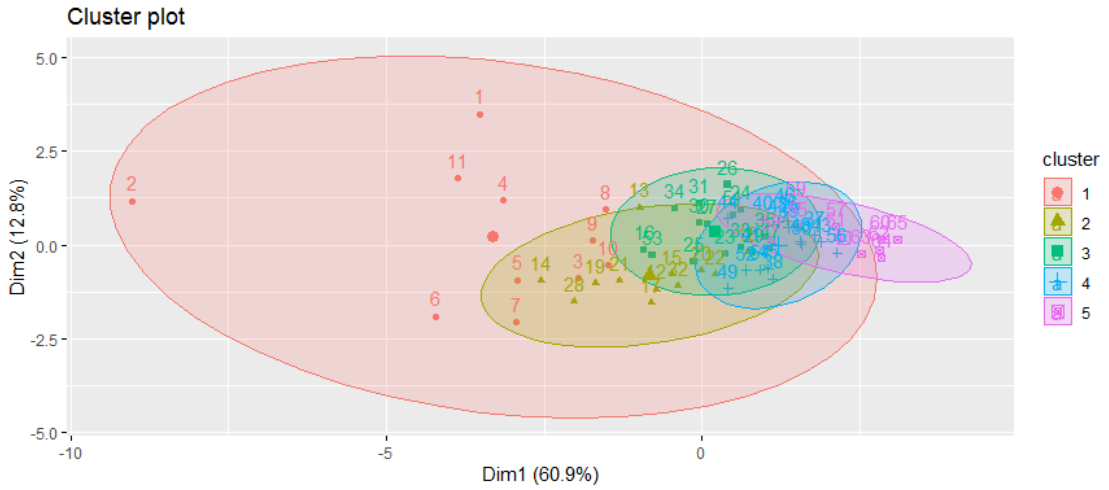

```
## Точность классификации: 0.8153846
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 3.208787 )
##        X1   X2  X3  X4 X5  X6  X7 CLASS
## 47 -728.3 5448 348 215 28 5.7 367     4
## Заменяется на
##        X1   X2  X3  X4 X5  X6  X7 CLASS
## 47 -728.3 5448 348 215 28 5.7 367     3
```



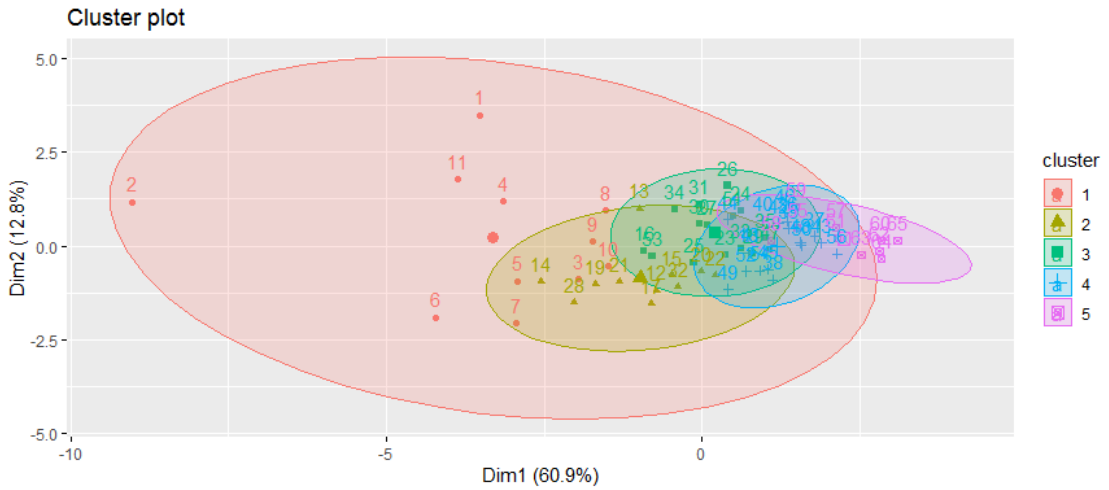

```
## Точность классификации: 0.8153846
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.955268 )
##      X1   X2  X3  X4 X5   X6   X7 CLASS
## 16 -380 5564 565 400 48 14.9 1517     2
## Заменяется на
##      X1   X2  X3  X4 X5   X6   X7 CLASS
## 16 -380 5564 565 400 48 14.9 1517     3
```



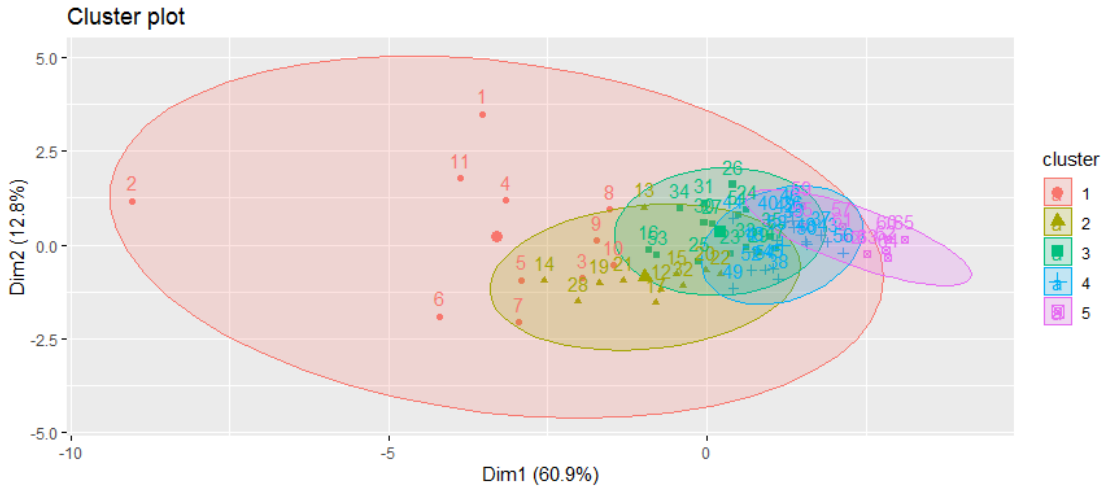

```
## Точность классификации: 0.8461538
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.838619 )
##      X1   X2  X3  X4 X5  X6   X7 CLASS
## 32 -314 4394 471 396 68 9.9 1065     3
## Заменяется на
##      X1   X2  X3  X4 X5  X6   X7 CLASS
## 32 -314 4394 471 396 68 9.9 1065     2
```



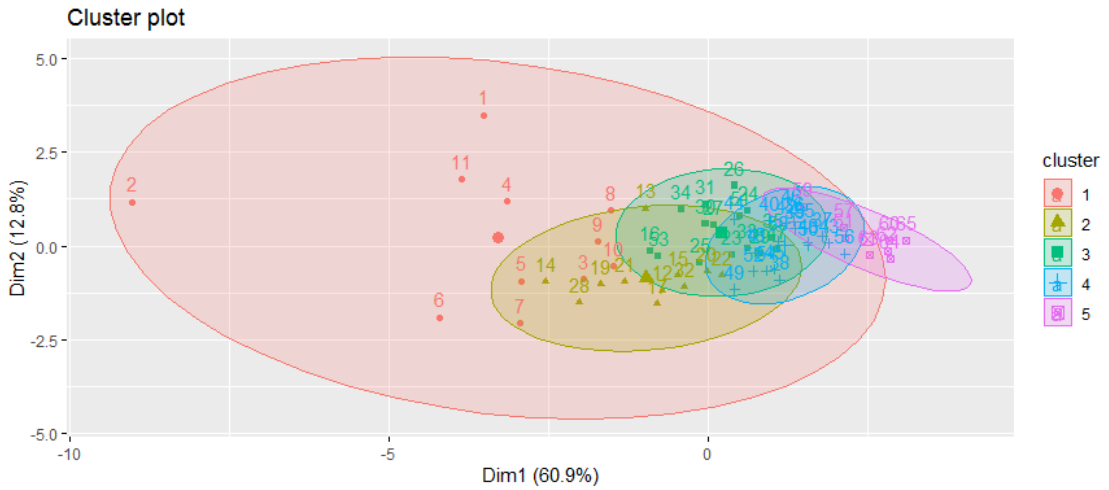

```
## Точность классификации: 0.8461538
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.488618 )
##        X1   X2  X3  X4 X5   X6  X7 CLASS
## 18 -666.8 3988 364 213 35 10.3 943     2
## Заменяется на
##        X1   X2  X3  X4 X5   X6  X7 CLASS
## 18 -666.8 3988 364 213 35 10.3 943     4
```



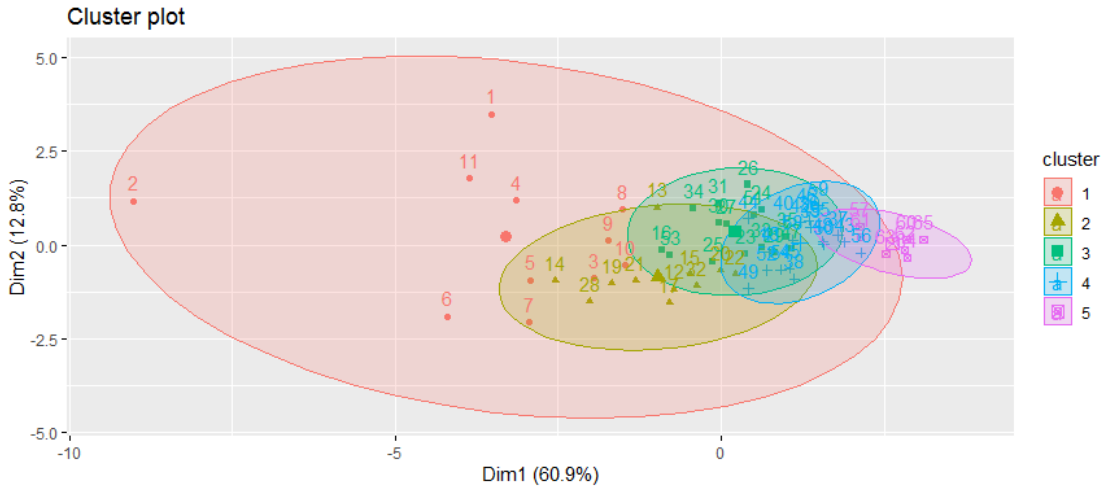

```
## Точность классификации: 0.8615385
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.434652 )
##        X1   X2  X3  X4 X5  X6  X7 CLASS
## 58 -310.7 4166 207 183 32 9.8 487     5
## Заменяется на
##        X1   X2  X3  X4 X5  X6  X7 CLASS
## 58 -310.7 4166 207 183 32 9.8 487     4
```



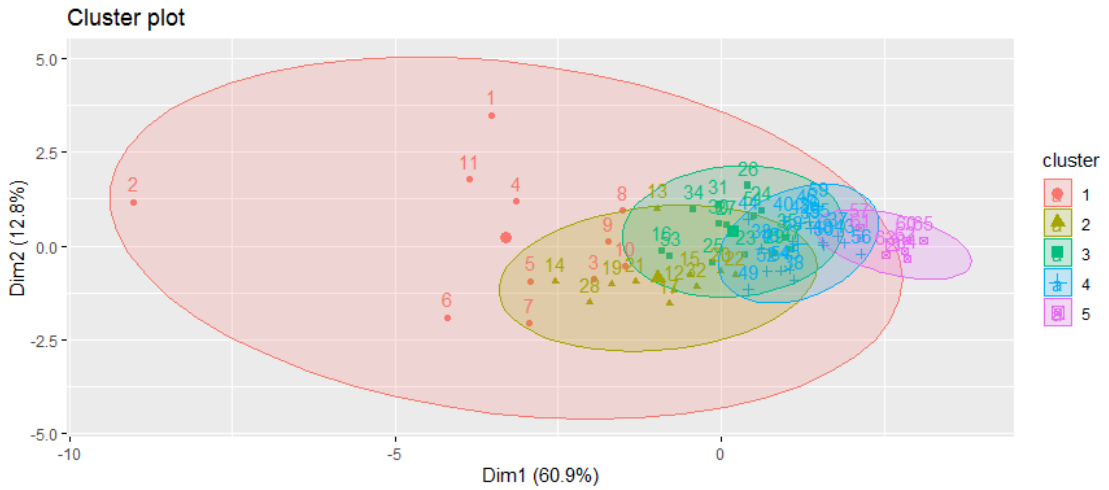

```
## Точность классификации: 0.8769231
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.629277 )
##    X1   X2  X3  X4 X5  X6  X7 CLASS
## 55 -4 3666 168 131 19 8.3 382     5
## Заменяется на
##    X1   X2  X3  X4 X5  X6  X7 CLASS
## 55 -4 3666 168 131 19 8.3 382     4
```



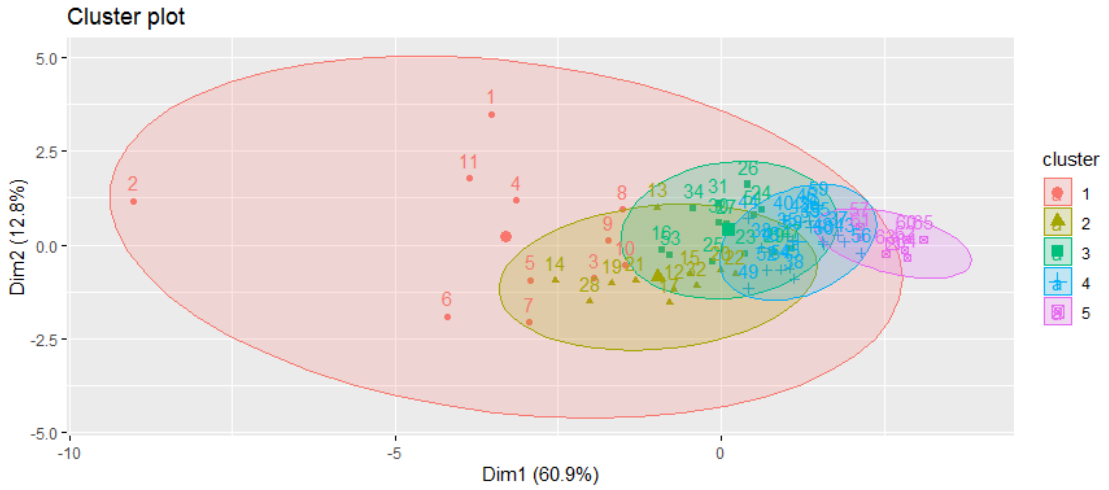

```
## Точность классификации: 0.8769231
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.474874 )
##      X1   X2  X3 X4 X5   X6  X7 CLASS
## 59 -437 5168 151 96  8 10.7 359     5
## Заменяется на
##      X1   X2  X3 X4 X5   X6  X7 CLASS
## 59 -437 5168 151 96  8 10.7 359     4
```



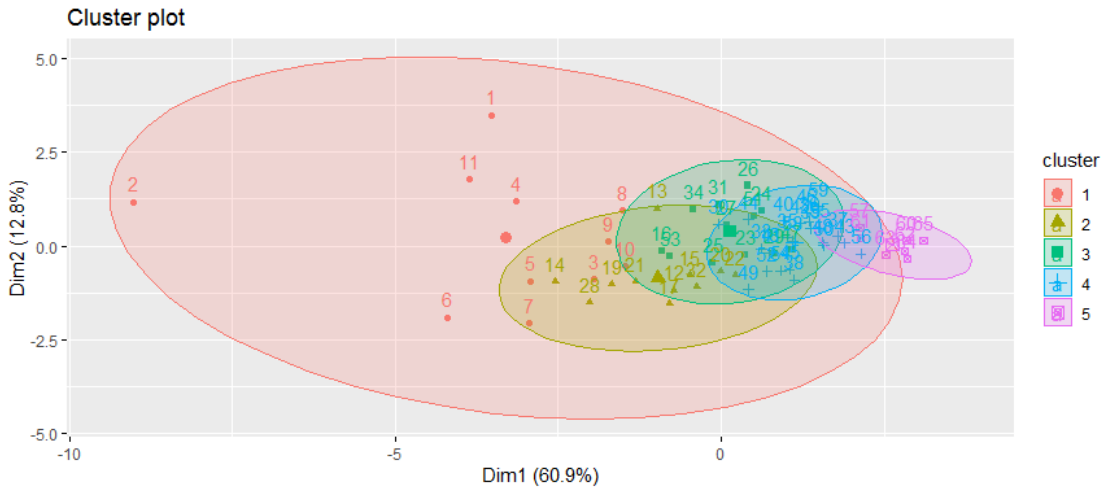

```
## Точность классификации: 0.8923077
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.333742 )
##     X1   X2  X3  X4 X5   X6  X7 CLASS
## 33 -27 3312 284 229 39 11.1 948     3
## Заменяется на
##     X1   X2  X3  X4 X5   X6  X7 CLASS
## 33 -27 3312 284 229 39 11.1 948     4
```



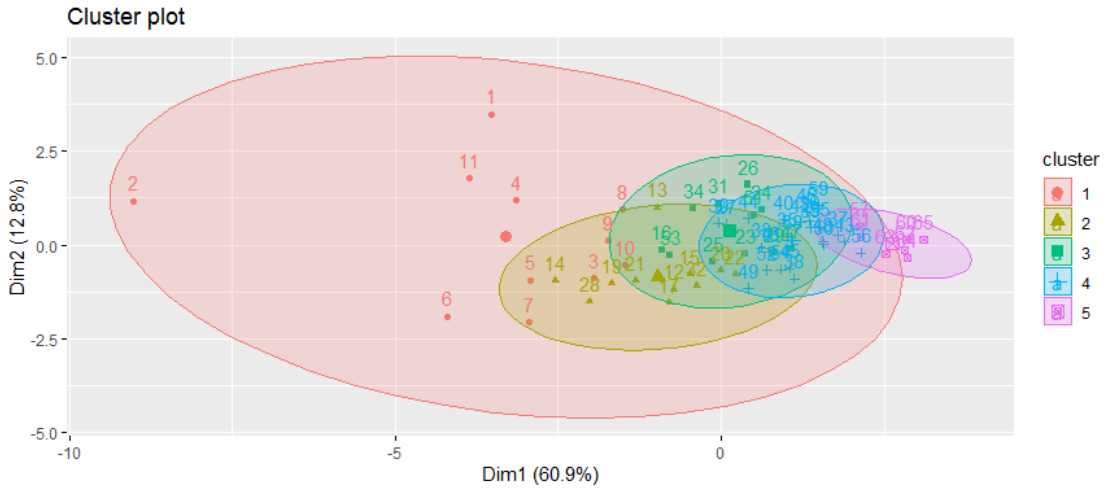

```
## Точность классификации: 0.8923077
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.664493 )
##      X1   X2  X3  X4 X5   X6  X7 CLASS
## 35 -842 4247 233 189 28 12.8 757     3
## Заменяется на
##      X1   X2  X3  X4 X5   X6  X7 CLASS
## 35 -842 4247 233 189 28 12.8 757     4
```



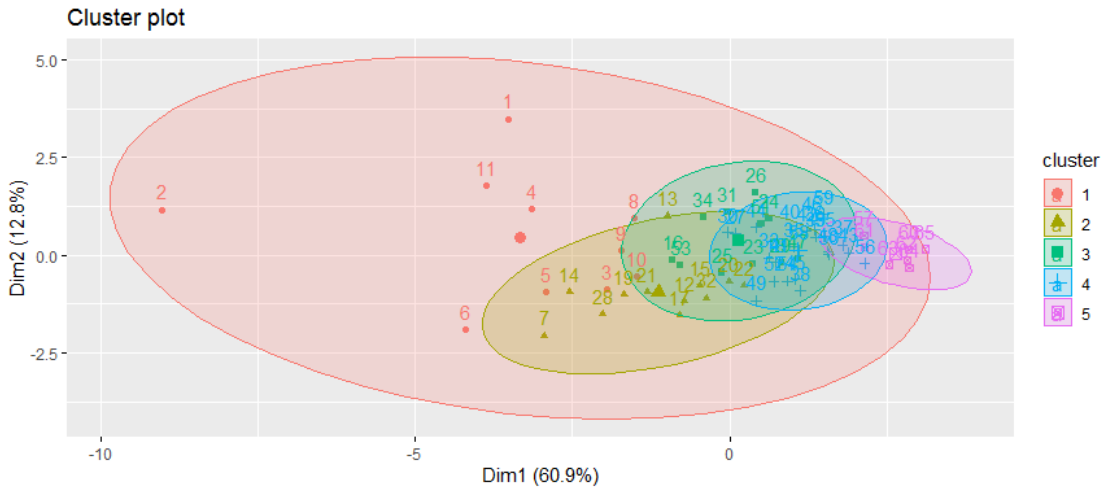

```
## Точность классификации: 0.9076923
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.489248 )
##      X1   X2  X3  X4 X5   X6   X7 CLASS
## 30 -205 4924 284 292 35 17.5 1010     3
## Заменяется на
##      X1   X2  X3  X4 X5   X6   X7 CLASS
## 30 -205 4924 284 292 35 17.5 1010     4
```



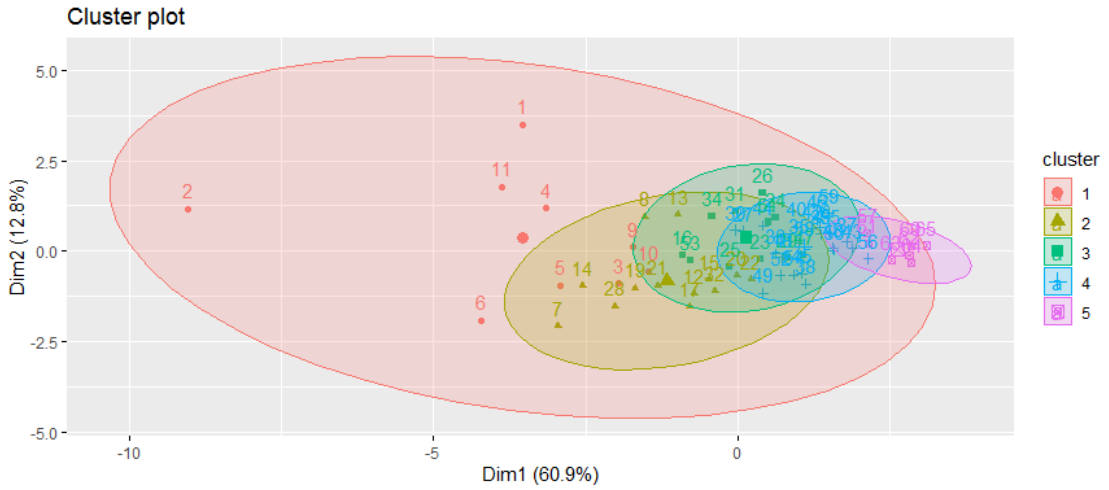

```
## Точность классификации: 0.9076923
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.894696 )
##      X1   X2  X3  X4 X5   X6  X7 CLASS
## 27 -514 5340 364 411 17 14.4 984     3
## Заменяется на
##      X1   X2  X3  X4 X5   X6  X7 CLASS
## 27 -514 5340 364 411 17 14.4 984     4
```



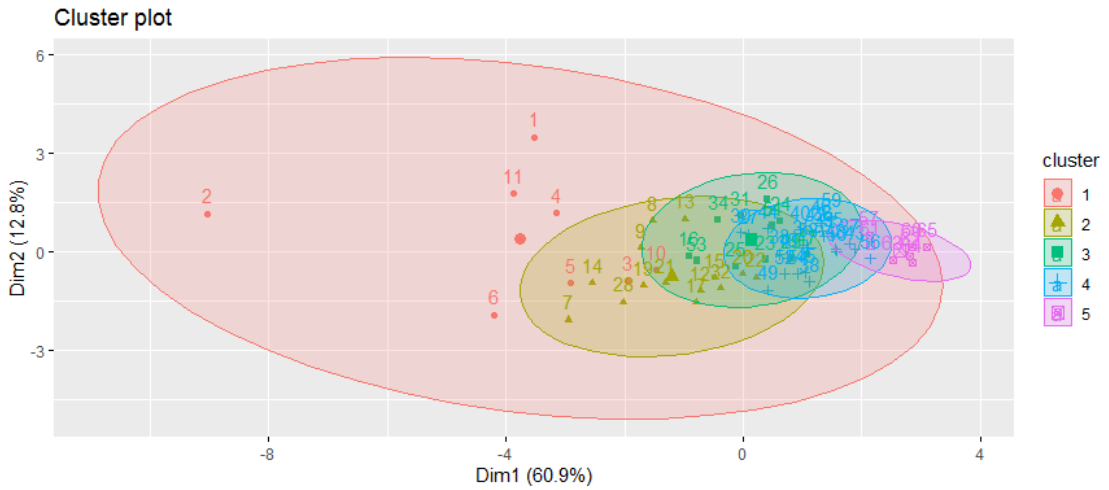

```
## Точность классификации: 0.9230769
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.275641 )
##    X1   X2  X3  X4  X5   X6   X7 CLASS
## 7 191 5367 786 819 104 13.7 2011     1
## Заменяется на
##    X1   X2  X3  X4  X5   X6   X7 CLASS
## 7 191 5367 786 819 104 13.7 2011     2
```



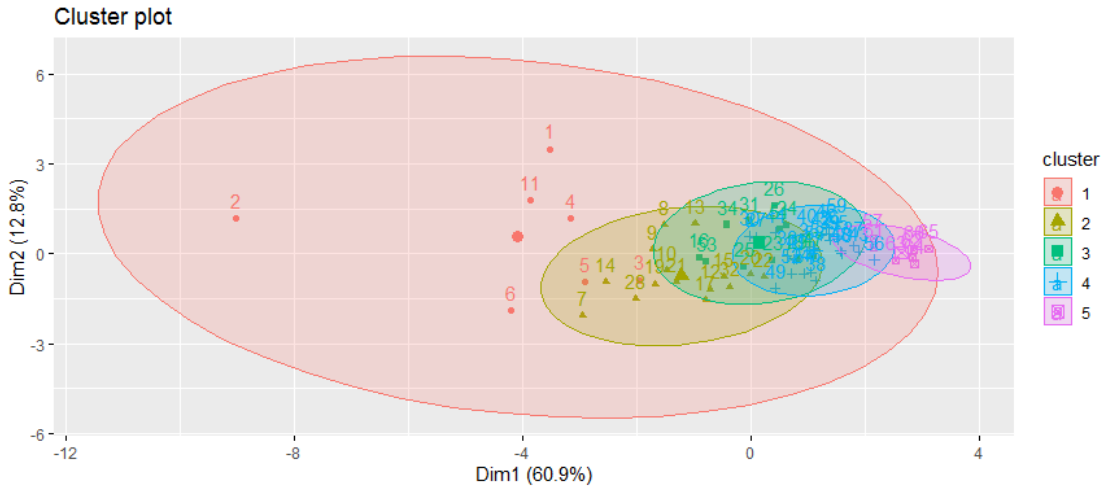

```
## Точность классификации: 0.9384615
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.203112 )
##   X1   X2  X3  X4 X5   X6   X7 CLASS
## 8  0 6342 486 261 52 24.1 1841     1
## Заменяется на
##   X1   X2  X3  X4 X5   X6   X7 CLASS
## 8  0 6342 486 261 52 24.1 1841     2
```



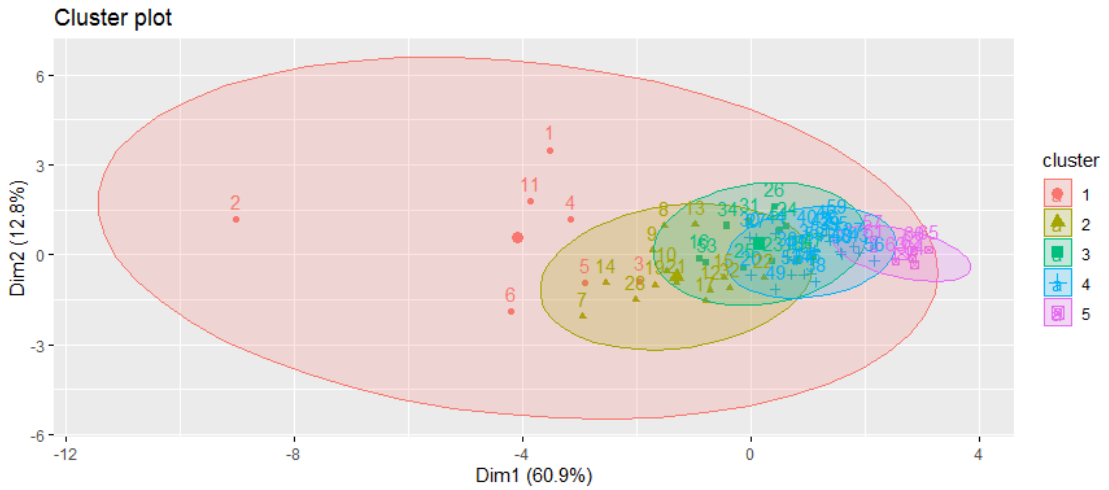

```
## Точность классификации: 0.9384615
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.607064 )
##     X1   X2  X3  X4 X5   X6   X7 CLASS
## 9 -107 5868 531 450 63 22.3 1608     1
## Заменяется на
##     X1   X2  X3  X4 X5   X6   X7 CLASS
## 9 -107 5868 531 450 63 22.3 1608     2
```



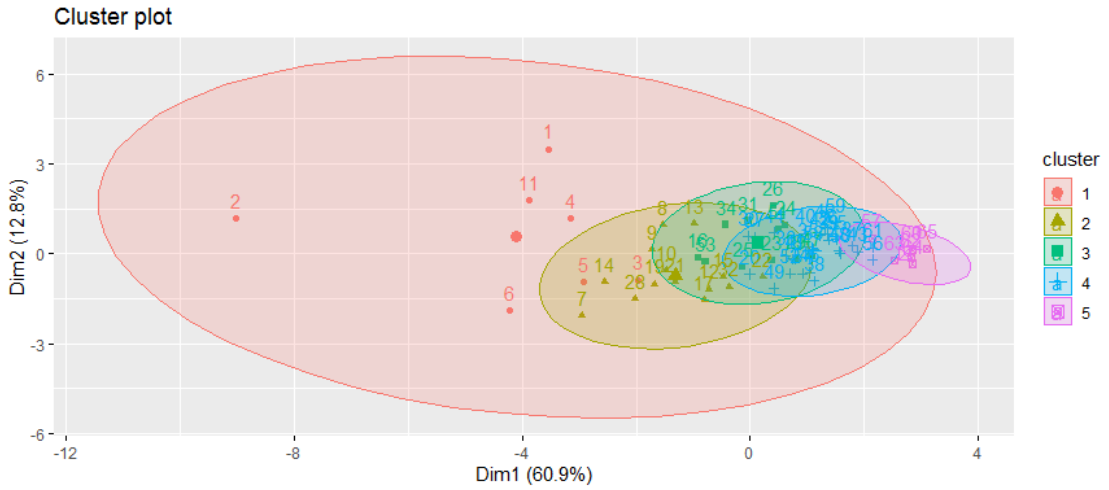

```
## Точность классификации: 0.9538462
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.474874 )
##      X1   X2  X3  X4 X5   X6   X7 CLASS
## 10 -903 6330 636 401 69 17.6 1768     1
## Заменяется на
##      X1   X2  X3  X4 X5   X6   X7 CLASS
## 10 -903 6330 636 401 69 17.6 1768     2
```




```
## Точность классификации: 0.9692308
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.046161 )
##     X1   X2  X3  X4 X5  X6   X7 CLASS
## 20 -94 3900 420 359 53 9.6 1034     2
## Заменяется на
##     X1   X2  X3  X4 X5  X6   X7 CLASS
## 20 -94 3900 420 359 53 9.6 1034     4
```




```
## Точность классификации: 0.9846154
## Неправильно отнесённый элемент с максимальным расстоянием ( 2.046161 )
##      X1   X2  X3 X4 X5  X6  X7 CLASS
## 61 -855 3483 109 90 16 7.6 237     5
## Заменяется на
##      X1   X2  X3 X4 X5  X6  X7 CLASS
## 61 -855 3483 109 90 16 7.6 237     4
```




```
## Точность классификации: 1
```

Результаты для полученной модели:

```
Out_CTab(ldadat, data$CLASS)

## Таблица неточностей "Факт/Прогноз" по обучающей выборке:
##       classified
## group  1  2  3  4  5
##     1  7  0  0  0  0
##     2  0 14  0  0  0
##     3  0  0 11  0  0
##     4  0  0  0 27  0
##     5  0  0  0  0  6
## Точность классификации: 1
```

```
## Расстояния Махалонобиса:
##          1         2         3         4
## 2  5.759607
## 3  6.472220  3.248266
## 4  9.288359  4.618247  3.208171
## 5 12.795436  8.147295  6.595490  3.709843
## Ошибка при скользящем контроле: 0.1384615
## Результаты многомерного дисперсионного анализа:
##            Df    Wilks approx F num Df den Df    Pr(>F)
## data$CLASS  4 0.028593   11.768     28 196.12 < 2.2e-16 ***
## Residuals  60
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
cat("Групповые средние:\n")
```

```
## Групповые средние:
```

```
ldadat$means
```

```
##          X1       X2        X3       X4       X5        X6        X7
## 1  196.5429 9328.286 898.42857 733.4286 64.28571 26.228571 2547.8571
## 2 -192.2286 5567.000 521.35714 452.2143 75.00000 15.278571 1384.9000
## 3 -282.0909 5587.273 364.06364 276.5455 33.46364 12.709091  807.7273
## 4 -490.5296 3906.000 241.04815 195.7037 29.53333 10.362963  641.8630
## 5 -609.3667 2318.500  79.66667  55.2000  9.70000  3.283333  163.9333
```

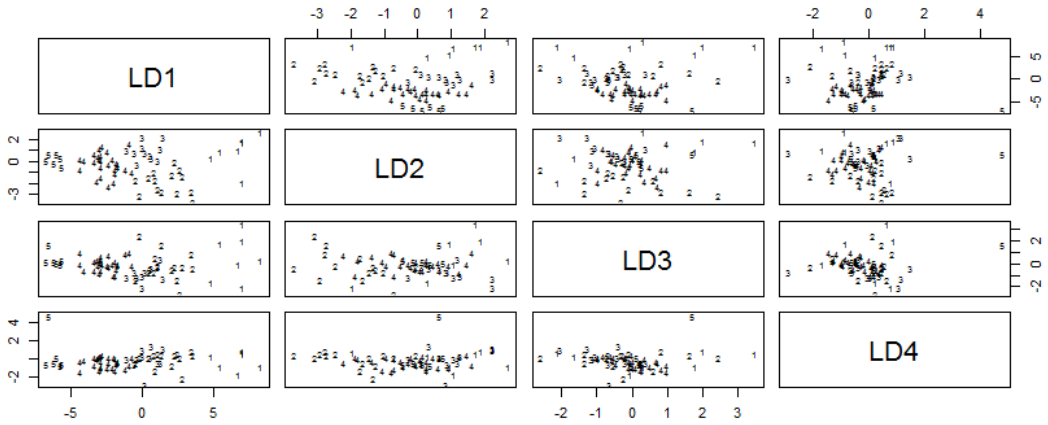
```
cat("Матрица дискриминантных функций:\n")
```

```
## Матрица дискриминантных функций:
```

```
ldadat$scaling
```

```
##              LD1           LD2           LD3           LD4
## X1  6.998429e-04  0.0001441873 -0.0001311974  0.0006733219
## X2  4.517007e-05  0.0001983877  0.0003278794  0.0011001502
## X3  2.380552e-02  0.0120910472 -0.0190093691 -0.0105312748
## X4 -1.112724e-03  0.0005167446  0.0069277131  0.0008733516
## X5  1.961759e-02 -0.0737548966 -0.0115067161  0.0135728516
## X6  3.719980e-01  0.0382745899 -0.1952122703 -0.4280703443
## X7 -6.905738e-03 -0.0033063245  0.0058332004  0.0034695279
```

```
plot(ldadat)
```



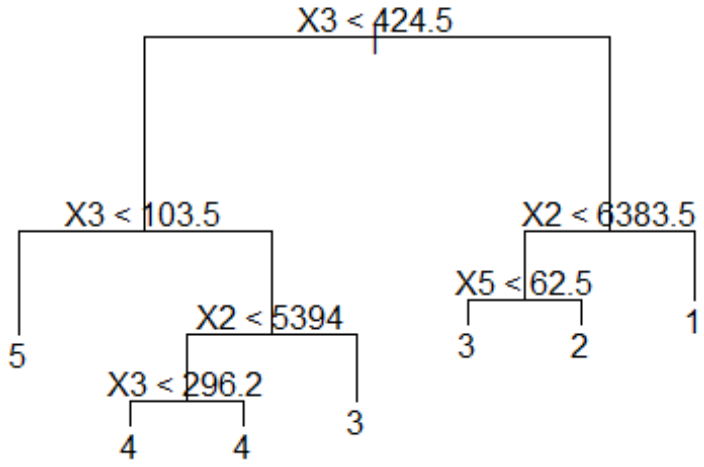

```
rf = lda(CLASS ~ ., data, method = "moment")  #фиксируется модель для следующего задания
```

Исправленная модель:

```
data %>% tbl_df()

## # A tibble: 65 x 8
##       X1    X2    X3    X4    X5    X6    X7 CLASS
##    <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <fct>
##  1 2174   9658   466   386    35  36.4  1756 1
##  2  274  10477  2321   767    56  35.6  7884 1
##  3 -146   6567   713   581    74  13.8  1501 1
##  4 -338  10282   499   764    51  30.2  1466 1
##  5 -716   9316   677   533   109  20.5  1486 1
##  6  893.  6425   944  1390    78  13.2  1936 1
##  7  191   5367   786   819   104  13.7  2011 2
##  8    0   6342   486   261    52  24.1  1841 2
##  9 -107   5868   531   450    63  22.3  1608 2
## 10 -903   6330   636   401    69  17.6  1768 2
## # ... with 55 more rows
```

Ошибка нулевая, все данные отнесены правильно. *Правило, по которому наблюдение относится в ту или иную группу* примерно сделующее (если попробовать иерархический анализ):

```
library(tree)
datatree <- tree(data[, 8] ~ ., data[, -8])
plot(datatree)
text(datatree)
```



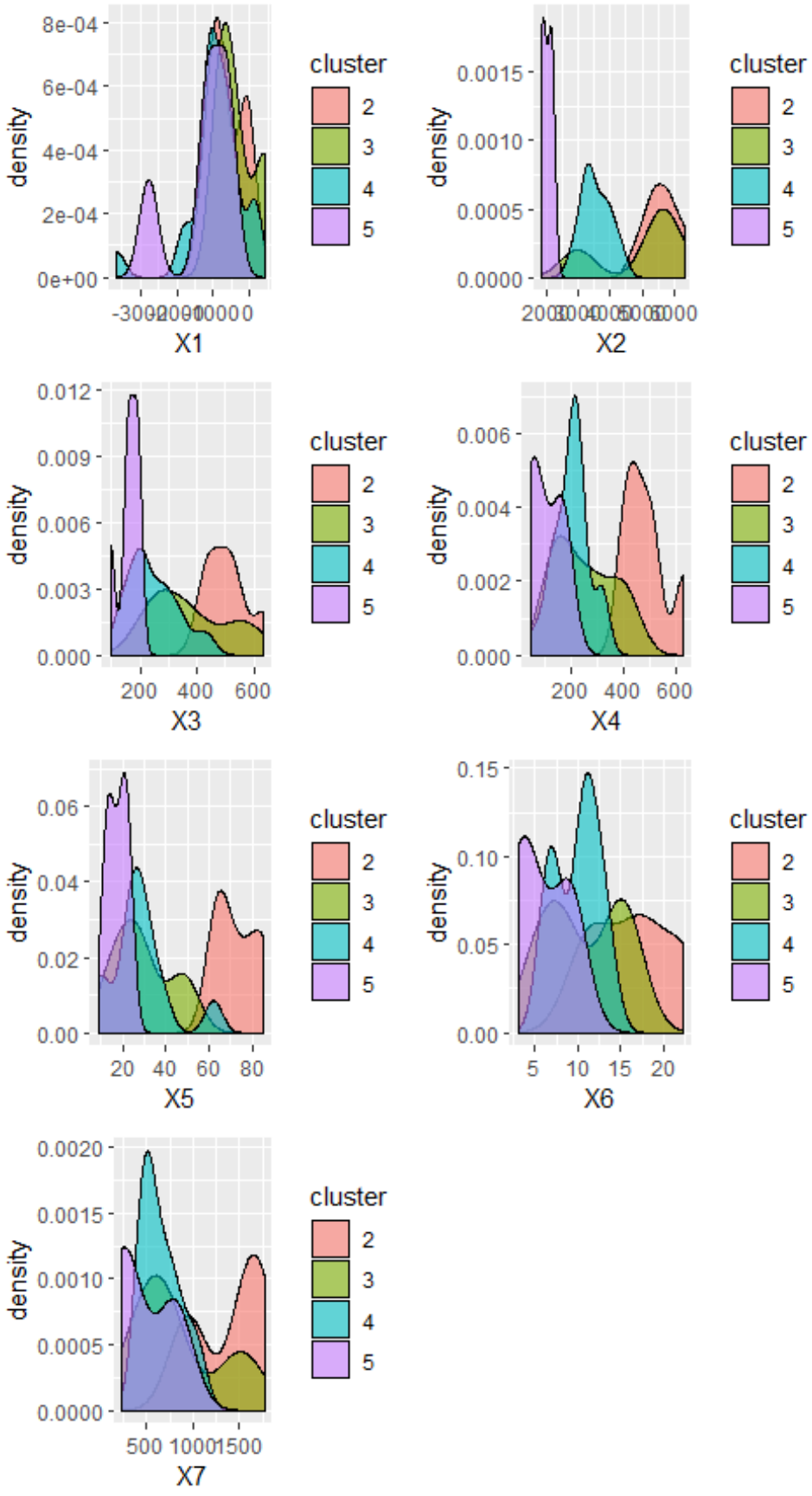
Задание 5

Считаем тестовые данные и проведём их классификацию по уже построенной модели:

```
data2 = data.frame(read_excel("Приложение 3.xlsx"))
data2 = apply(data2, 2, as.numeric) %>% as_data_frame()
data2 = data2[31:80, ]

cluster = predict(rf, data2)$class
data2 = data.frame(cbind(data2, cluster))
data2$cluster = factor(data2$cluster)

data2 %>% tbl_df()

## # A tibble: 50 x 8
##        X1    X2    X3    X4    X5    X6    X7 cluster
##     <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <fct>
##  1 -1080   3130  213    236  33    11.8   807 4
##  2   403.  2969  382    274  29     5.7   728 3
##  3   139   3264  340    316  28     6.8   711 4
##  4  -444   3920  139    120   9    13.1   464 4
##  5  -833   5563  271    148  15.7   8.7   426 3
##  6  -380   5564  565    400  48    14.9  1517 3
##  7  -790   5470  432    509  85    11.8   935 2
##  8 -1205   3698  188.   156  21.6  10     507 4
##  9  -751   3448  278    206  25     7.4   596 4
## 10  -107   5868  531    450  63    22.3  1608 2
## # ... with 40 more rows
```

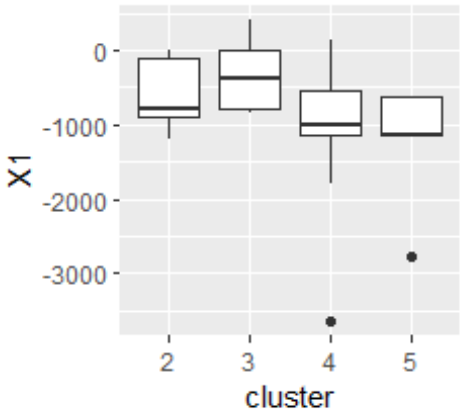
Построим **диаграммы ядерной плотности** для распределения каждой переменной X1-X7 по отнесенным группам, чтобы убедиться в правильности классификации:

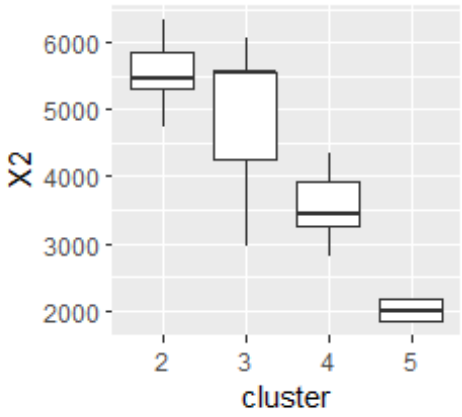
```
library(ggplot2)
library(ggpubr)

ggarrange(ggplot(data2, aes(x = X1, fill = cluster)) + geom_density(alpha =
0.6),
    ggplot(data2, aes(x = X2, fill = cluster)) + geom_density(alpha = 0.6),
    ggplot(data2, aes(x = X3, fill = cluster)) + geom_density(alpha = 0.6),
    ggplot(data2, aes(x = X4, fill = cluster)) + geom_density(alpha = 0.6),
    ggplot(data2, aes(x = X5, fill = cluster)) + geom_density(alpha = 0.6),
    ggplot(data2, aes(x = X6, fill = cluster)) + geom_density(alpha = 0.6),
    ggplot(data2, aes(x = X7, fill = cluster)) + geom_density(alpha = 0.6),
    ncol = 2, nrow = 4)
```

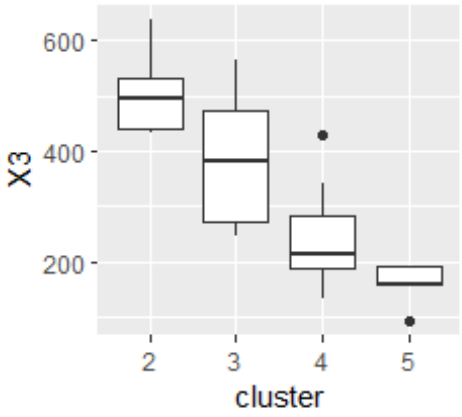


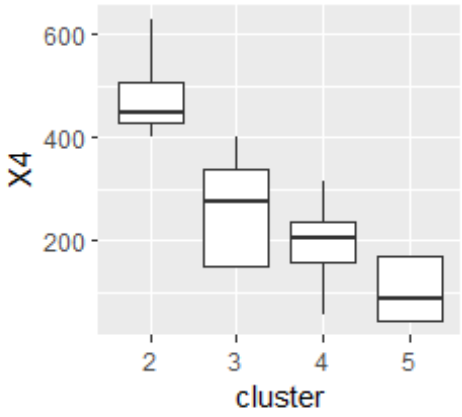
Другой вариант — **ящики с усами**:

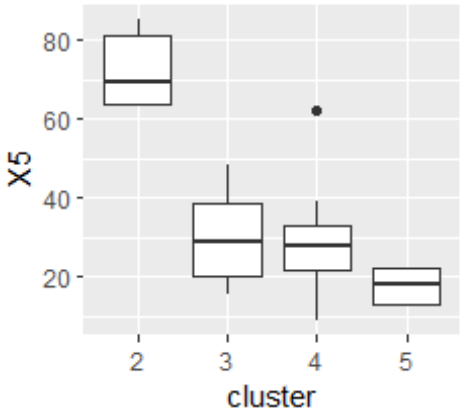
```r
ggarrange(ggplot(data2, aes(x = cluster, y = X1)) + geom_boxplot(),
ggplot(data2,
    aes(x = cluster, y = X2)) + geom_boxplot(), ggplot(data2, aes(x = cluster,
    y = X3)) + geom_boxplot(), ggplot(data2, aes(x = cluster, y = X4)) +
geom_boxplot(),
    ggplot(data2, aes(x = cluster, y = X5)) + geom_boxplot(), ggplot(data2,
        aes(x = cluster, y = X6)) + geom_boxplot(), ggplot(data2, aes(x =
cluster,
        y = X7)) + geom_boxplot(), ncol = 2, nrow = 4)
```

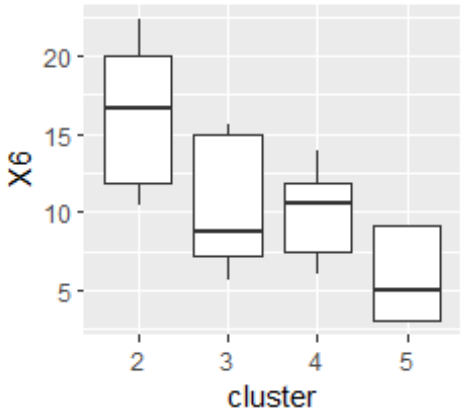


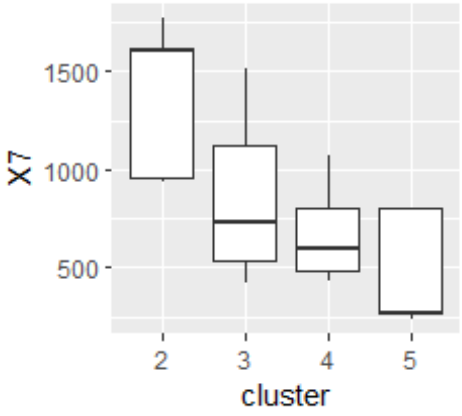






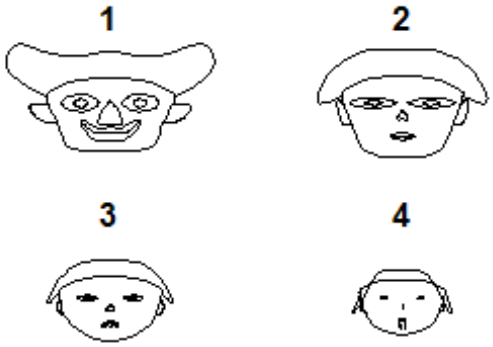






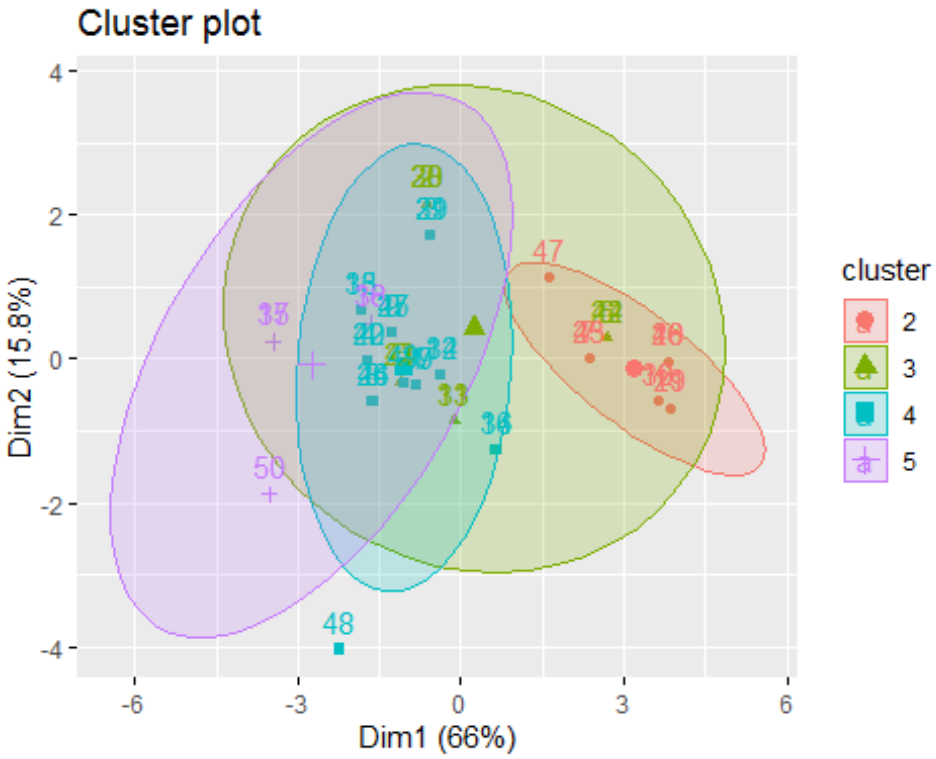
Также **лица Чернова**:

```
newdata = as_data_frame(data2) %>% group_by(cluster) %>%
summarise_all(funs(mean))
faces(newdata[, 2:8])  #рисуем лица
```



Визуализация через главные компоненты:

```
print(fviz_cluster(list(data = data2[, 1:7], cluster = data2[, 8]), ellipse.type
= "norm"))
```



В целом качество такое же, как в обучающей выборке.

Временные ряды

Используются две переменные:

```
p1 = nchar("Дмитрий")  #число букв в имени
p2 = nchar("Пасько")  #число букв в фамилии
```

Задание 1

Прочитаем и обработаем **данные**:

```
library(readxl)
library(dplyr)
tab = data.frame(t(read_xlsx("Рожь18век.xlsx")))
names(tab) = sapply(tab[1, ], as.character)  #поставить правильные названия
tab = tab[-1, ]  #удалить строку с именами
tab = data.frame(Year = sapply(rownames(tab), as.numeric), tab)
tab = sapply(tab, as.numeric)  #факторы перевести в числа
tab %>% tbl_df()

## # A tibble: 62 x 19
##     Year Северный1 Северный2 Восточный1 Восточный2 ЮгоВосточный1
##    <dbl>     <dbl>     <dbl>      <dbl>      <dbl>          <dbl>
##  1  1707        39        31         45         32             20
##  2  1708        44        38         50         39             22
##  3  1709        51        40         41         37             23
```

```
##  4  1710        52        42         39         39             24
##  5  1711        57        46         51         41             NA
##  6  1712        58        47         52         42             NA
##  7  1713        56        48         54         43             NA
##  8  1714         1        10          4          1             NA
##  9  1715         8         1          2          4             NA
## 10  1716         9         8          1          2             NA
## # ... with 52 more rows, and 13 more variables: ЮгоВосточный2 <dbl>,
## #   Волжский1 <dbl>, Волжский2 <dbl>, ЦентральноЧерноземный1 <dbl>,
## #   ЦентральноЧерноземный2 <dbl>, ЦентральноПечериозельный1 <dbl>,
## #   ЦентральноПечериозельный2 <dbl>, Украинский1 <dbl>, Украинский2 <dbl>,
## #   ЗападнаяСибирь1 <dbl>, ЗападнаяСибирь2 <dbl>,
## #   ЕвропейскаяРоссия1 <dbl>, ЕвропейскаяРоссия2 <dbl>
```

Создадим **фрейм со средними по годам для всей страны и её районов**:

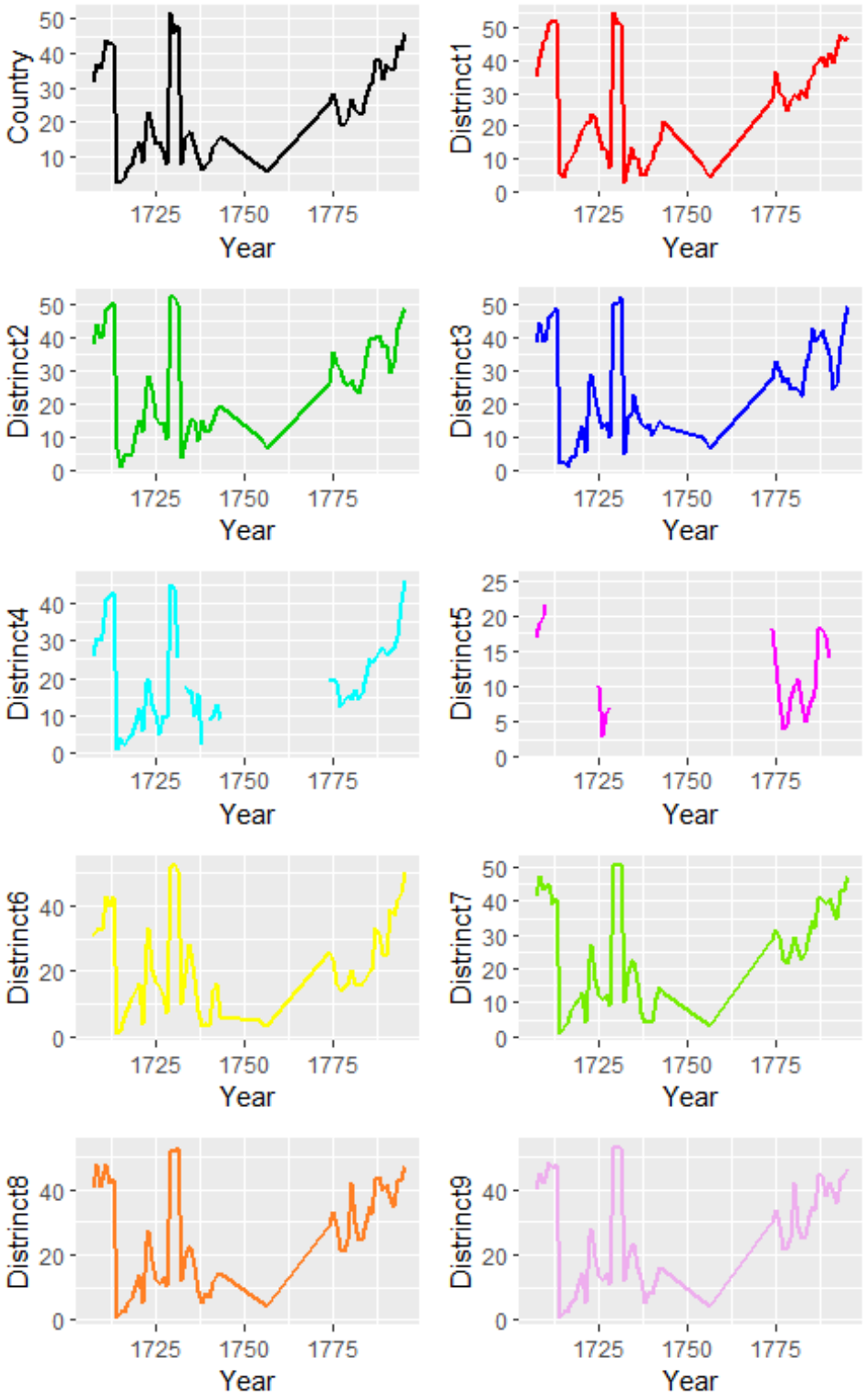
```
tmptab = tab[, -1]
means = list(rowMeans(tmptab, na.rm = T))
for (i in 1:((ncol(tab) - 1)/2)) {
    means[[i + 1]] = rowMeans(tmptab[, c(i, i + 1)], na.rm = T)
}

means = sapply(means, function(col) sapply(col, function(row)
ifelse(is.nan(row),
    NA, row)))  #Заменить все NaN на NA
means = data.frame(tab[, 1], means)
names(means) = c("Year", "Country", "Distrinct1", "Distrinct2", "Distrinct3",
    "Distrinct4", "Distrinct5", "Distrinct6", "Distrinct7", "Distrinct8",
"Distrinct9")
means %>% tbl_df()
```

```
## # A tibble: 62 x 11
##     Year Country Distrinct1 Distrinct2 Distrinct3 Distrinct4 Distrinct5
##    <dbl>   <dbl>      <dbl>      <dbl>      <dbl>      <dbl>      <dbl>
##  1  1707   32.1        35         38         38.5       26         17
##  2  1708   36.8        41         44         44.5       30.5       19
##  3  1709   36          45.5       40.5       39         30         20
##  4  1710   37.5        47         40.5       39         31.5       21.5
##  5  1711   43.6        51.5       48.5       46         41         NA
##  6  1712   42.7        52.5       49.5       47         42         NA
##  7  1713   42.7        52         51         48.5       43         NA
##  8  1714    2.47        5.5        7          2.5        1         NA
##  9  1715    2.67        4.5        1.5        3          4         NA
## 10  1716    4.15        8.5        4.5        1.5        2         NA
## # ... with 52 more rows, and 4 more variables: Distrinct6 <dbl>,
## #   Distrinct7 <dbl>, Distrinct8 <dbl>, Distrinct9 <dbl>
```

Визуализация полученных значений показывает, что *в целом цена ведёт себя одинаково по всем регионам*:

```
library(ggplot2)
g1 = ggplot(means, aes(x = Year)) + geom_line(aes(y = Country), size = 1)
g2 = ggplot(means, aes(x = Year)) + geom_line(aes(y = Distrinct1), size = 1,
```

```
    col = 2)
g3 = ggplot(means, aes(x = Year)) + geom_line(aes(y = Distrinct2), size = 1,
    col = 3)
g4 = ggplot(means, aes(x = Year)) + geom_line(aes(y = Distrinct3), size = 1,
    col = 4)
g5 = ggplot(means, aes(x = Year)) + geom_line(aes(y = Distrinct4), size = 1,
    col = 5)
g6 = ggplot(means, aes(x = Year)) + geom_line(aes(y = Distrinct5), size = 1,
    col = 6)
g7 = ggplot(means, aes(x = Year)) + geom_line(aes(y = Distrinct6), size = 1,
    col = 7)
g8 = ggplot(means, aes(x = Year)) + geom_line(aes(y = Distrinct7), size = 1,
    col = "chartreuse2")
g9 = ggplot(means, aes(x = Year)) + geom_line(aes(y = Distrinct8), size = 1,
    col = "chocolate1")
g10 = ggplot(means, aes(x = Year)) + geom_line(aes(y = Distrinct9), size = 1,
    col = "plum2")
library(ggpubr)
ggarrange(g1, g2, g3, g4, g5, g6, g7, g8, g9, g10, nrow = 5, ncol = 2)
```



Зададим **новый временной ряд**:

```
price1 = c(40 + p1, 43 + p1, 40, 80, 74, 40 + p2, 55 + p2, 42 + p2, 42, 50,
    40 + p2, 43, 43, 35 + p1, 40 + p1, 30, 36 + p1, 50, 30 + p1, 29, 45 + p1,
    40, 42, 40, 36, 50, 30 + p1, 24 + p2, 25 + p2, 40, 32 + p1, 30, 20, 30,
    25, 32 + p2)
cat("Длина вектора:", length(price1), "\n")
```

```
## Длина вектора: 36
```

```
summary(price1)  #минимальные характеристики
```

```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max. 
##   20.00   36.75   42.00   42.44   47.25   80.00
```

Тест Стьюдента для среднего значения (42.4444444) показывает **значимое отличие среднего ряда от нуля (p-value очень близкое к нулю)**:

```
(ts = t.test(price1, conf.level = 0.95))  #тест Стьюдента для среднего
```

```
##
##  One Sample t-test
##
## data:  price1
## t = 21.17, df = 35, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  38.37422 46.51467
## sample estimates:
## mean of x
##  42.44444
```

```
cat("Доверительный интервал: ", ts$conf.int, "\n")
```

```
## Доверительный интервал:  38.37422 46.51467
```

```
cat("Стандартная ошибка среднего: ", ts$stderr, "\n")
```

```
## Стандартная ошибка среднего:  2.004932
```

а **низкий коэффициент вариации говорит об однородности выборки**

```
vart = sd(price1)/mean(price1) * 100
cat("Коэффициент вариации равен", vart, "%\n")
```

```
## Коэффициент вариации равен 28.34197 %
```

```
# так как коэффициент вариации < 30%, выборка достаточно однородная
```

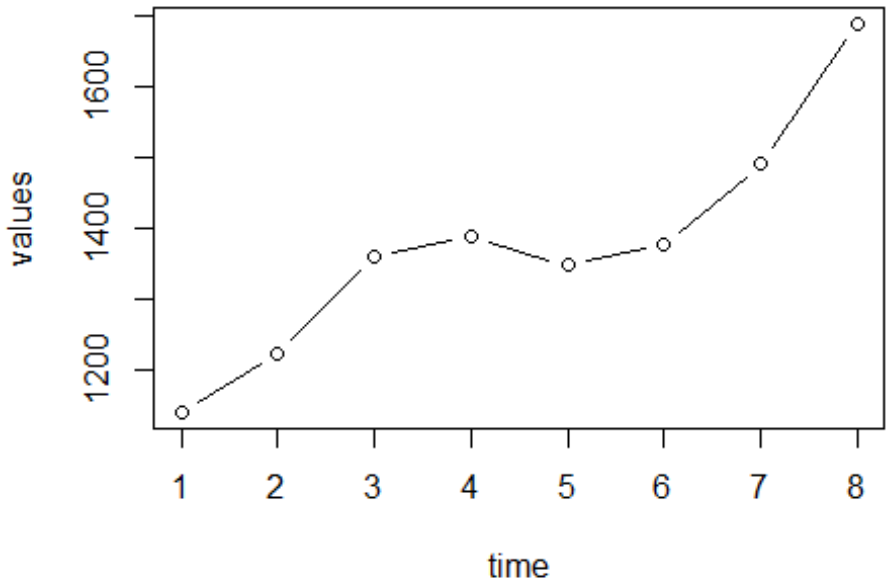
Замечание: в проведённом тесте Стьюдента число степеней свободы было на 1 (а не на 2) меньше числа наблюдений, так как при тесте использовалась одна выборка. Можно считать, что исходная выборка сравнивается с выборкой из единственного элемента 0, поэтому число степеней свободы всего на 1 меньше числа наблюдений. Так же определяется число степеней свободы, например, здесь.

Задание 3

Создадим и визуализируем **временной ряд**:

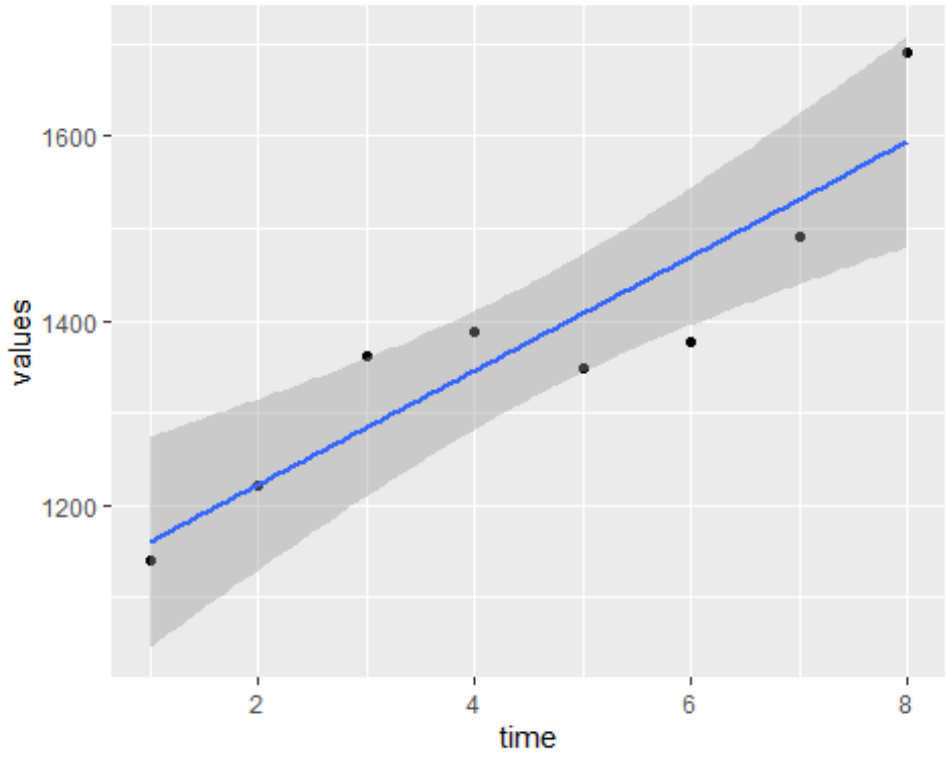
```
library(ggplot2)

yt = c(1133 + p1, 1222, 1354 + p1, 1389, 1342 + p2, 1377, 1491, 1684 + p2)
```

```
data = data.frame(time = 1:length(yt), values = yt)
plot(data, type = "b")
```



В целом, здесь наблюдается линейная составляющая. Построим линейную модель и **регрессионную прямую**:

```
fit = lm(values ~ time, data)  #создание модели
ggplot(data, aes(x = time, y = values)) + geom_point() + geom_smooth(method =
lm)
```



Посмотрим **информацию о модели**:

```
summary(fit)  #информация о модели

##
## Call:
## lm(formula = values ~ time, data = data)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -93.14 -45.86 -10.46  51.20  96.00
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  1098.57      56.30  19.513 1.17e-06 ***
## time           61.93      11.15   5.555  0.00144 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 72.25 on 6 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8372, Adjusted R-squared:  0.8101
## F-statistic: 30.85 on 1 and 6 DF,  p-value: 0.00144

confint(fit, level = 0.95)  #доверительные интервалы

##                 2.5 %     97.5 %
## (Intercept) 960.81185 1236.33101
## time         34.64811   89.20903
```

Самое важное здесь — модель описывает более 80% дисперсий (**Adjusted R-squared**), каждый её коэффициент (**Pr(>|t|)**) и она сама (**p-value** в самом низу, в строке с **F-statistic**) статистически значимы (поскольку p-value меньше 0.05). **Estimate** — это коэффициенты модели, значит сама регресионная прямая имеет вид

$$y = 1098.57 + 61.93t$$

Коэффициент при t показывает, на сколько в среднем увеличится y при изменении t на единицу. Дисперсионный анализ можно выполнить и отдельно с тем же результатом:

```
anova(fit)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: values
##           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
## time       1 161076  161076  30.854 0.00144 **
## Residuals  6  31323    5221
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Теперь выполним прогноз для среднего и индивидульного значений при $t = 9$:

```
# прогноз среднего
predict(fit, data.frame(time = c(9)), se.fit = TRUE, interval = "confidence",
    level = 0.95)$fit
```

```
##        fit      lwr      upr
## 1 1655.929 1518.169 1793.688
```

```
# прогноз индивидуального
predict(fit, data.frame(time = c(9)), se.fit = TRUE, interval = "prediction",
    level = 0.95)$fit
```

```
##        fit      lwr     upr
## 1 1655.929 1431.797 1880.06
```

Здесь первое число — само предсказанное значение, последующие — границы доверительного интервала.Итак, само предсказанное значение равно 1655.929, доверительный интервал для среднего: [1518.169,1793.688], для индивидуального: [1431.797,1880.06].

Задание 4

Считаем **набор данных** и проведём некоторую обработку:

```
library(readxl)
data = data.frame(read_xlsx("РожьВсеГода.xlsx"))
data[, -1] = apply(data[, -1], 2, as.numeric)  #перевести в числа все строки
y = t(data[, -1])  #транспонирование для удобства

# получить массив лет
ns = rownames(y)
x = sapply(ns, function(s) as.numeric(substr(s, 2, nchar(s))))
```

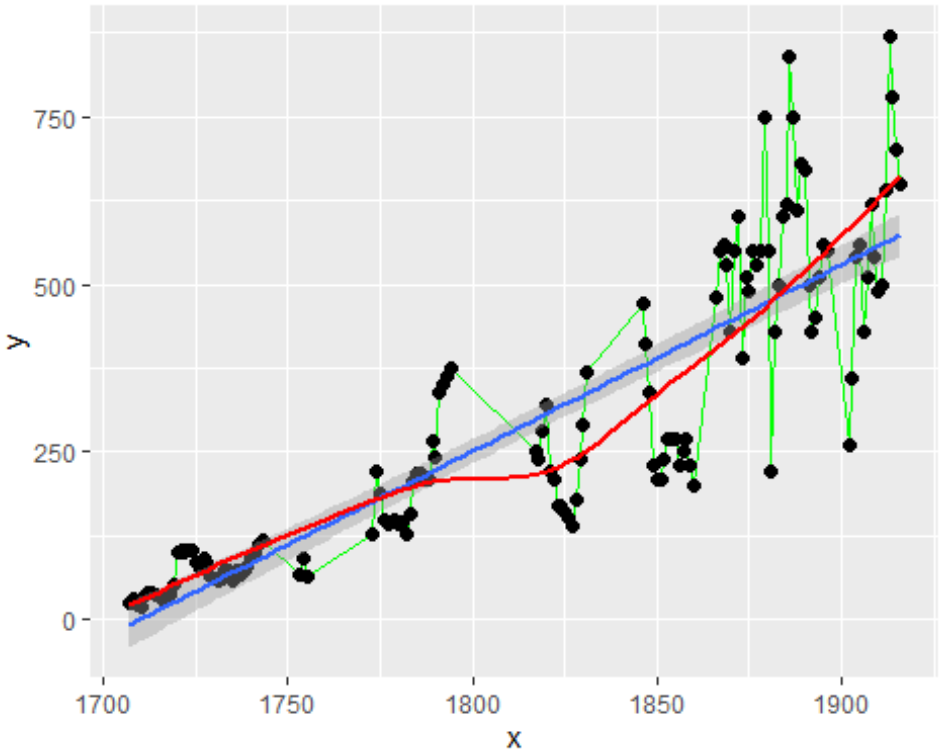
```
library(mice)  #обработать пустые значения
imp = mice(y, seed = 11)
y = complete(imp, action = 1)

df = data.frame(x = x, y = y[, 2])  #объединить данные в фрейм

# print(df[sort(sample(1:nrow(df),13)),2,drop=FALSE]) #вывести 13 случайных
# строк
```

Получаем:

```
df %>% tbl_df()

## # A tibble: 138 x 2
##        x     y
##    <dbl> <dbl>
##  1  1707    26
##  2  1708    32
##  3  1709    23
##  4  1710    20
##  5  1711    35
##  6  1712    39
##  7  1713    41
##  8  1714    38
##  9  1715    34
## 10  1716    31
## # ... with 128 more rows
```

При этом пропущенные значения были обработаны по алгоритму MICE, **для дальнейшего исследования был взят второй район**. Визуализировав данные по нему

```
library(ggplot2)
ggplot(df, aes(x = x, y = y)) + geom_line(col = "green") + geom_point(size = 2)
+
    geom_smooth(method = lm) + geom_smooth(se = F, col = "red")
```



приходим к выводу, что в целом поведение цен можно описать линейной моделью, однако для обычной линейной модели здесь явно не будет выполняться требование гомоскедастичности. Попробуем разные **преобразования данных** (качество модели определяется величиной Adjusted R-squared):

```
summary(lm(y ~ x, df))

##
## Call:
## lm(formula = y ~ x, data = df)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -274.50  -52.12    7.23   45.45  349.99
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -4754.7565   241.9835  -19.65   <2e-16 ***
## x               2.7809     0.1333   20.87   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 105.9 on 136 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.762,  Adjusted R-squared:  0.7603
## F-statistic: 435.5 on 1 and 136 DF,  p-value: < 2.2e-16

summary(lm(sqrt(y) ~ x, df))
```

```
##
## Call:
## lm(formula = sqrt(y) ~ x, data = df)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -7.370 -1.454 -0.163  1.628  6.901
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -1.444e+02  6.017e+00  -24.00   <2e-16 ***
## x            8.829e-02  3.314e-03   26.65   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 2.633 on 136 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8392, Adjusted R-squared:  0.8381
## F-statistic:   710 on 1 and 136 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```
summary(lm(log(y) ~ x, df))
```

```
##
## Call:
## lm(formula = log(y) ~ x, data = df)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.00146 -0.26602 -0.00776  0.26103  0.87028
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -1.762e+01  8.398e-01  -20.99   <2e-16 ***
## x            1.264e-02  4.625e-04   27.34   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.3675 on 136 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8461, Adjusted R-squared:  0.8449
## F-statistic: 747.6 on 1 and 136 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```
summary(lm(log(y) ~ log(x), df))
```

```
##
## Call:
## lm(formula = log(y) ~ log(x), data = df)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.97970 -0.26965 -0.00275  0.25610  0.85541
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -166.5906     6.2023  -26.86   <2e-16 ***
```

```
## log(x)        22.9125     0.8266   27.72   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.3633 on 136 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8496, Adjusted R-squared:  0.8485
## F-statistic: 768.3 on 1 and 136 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Видно, что *модель с логарифмами описывает почти 85% дисперсий*, поэтому в дальнейшем будем использовать её. Эта модель имеет вид:

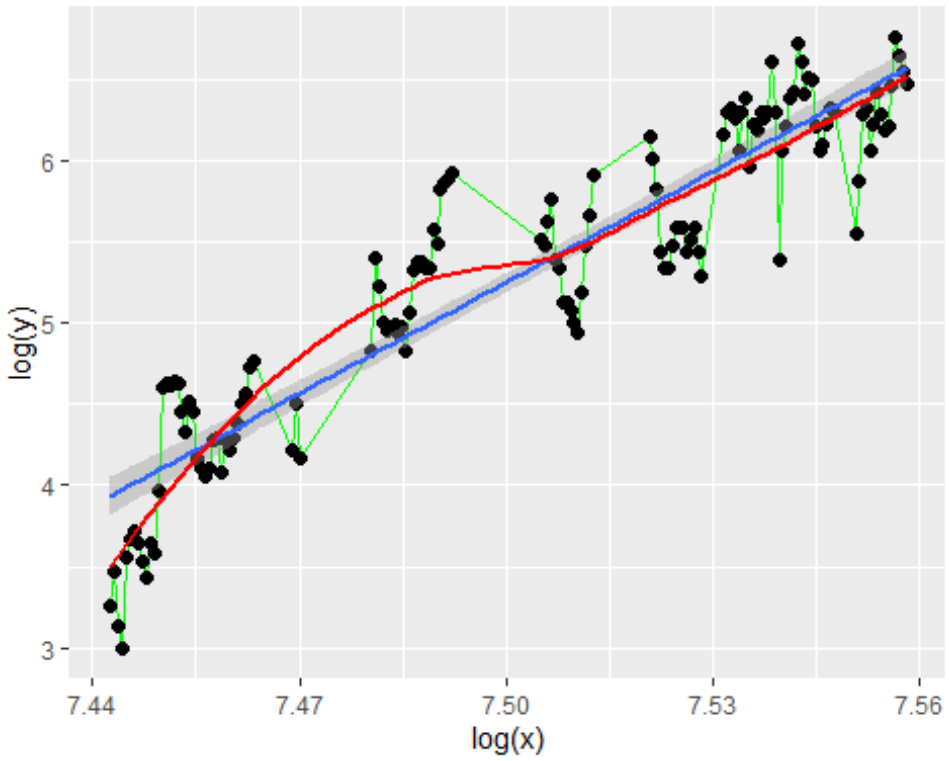
$$\log y = -166.5906 + 22.9125 \log x$$

а иначе:

$$y = e^{-166.5906} x^{22.9125}$$

Построим тот же график:

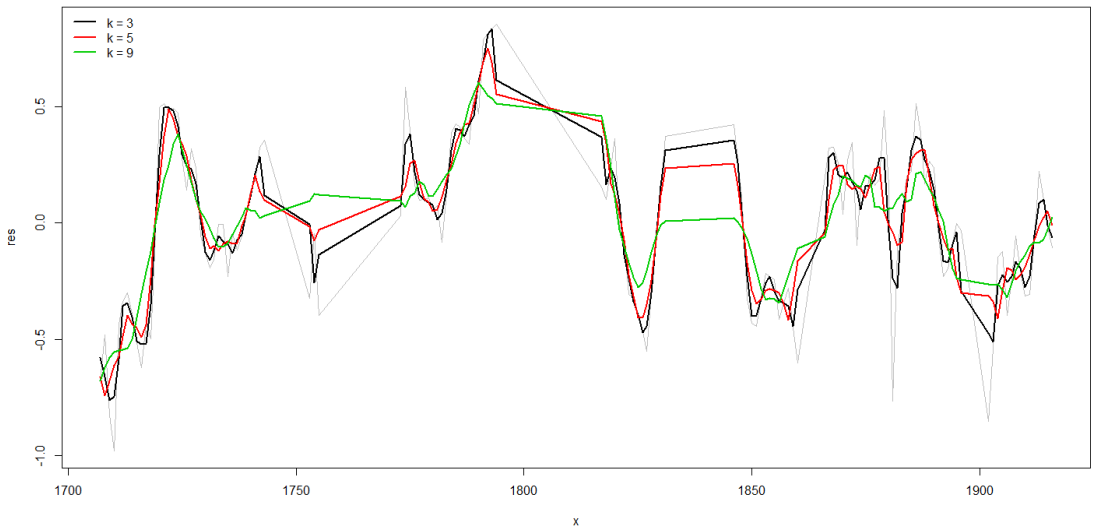
```
ggplot(df, aes(x = log(x), y = log(y))) + geom_line(col = "green") +
geom_point(size = 2) +
    geom_smooth(method = lm) + geom_smooth(se = F, col = "red")
```



Для остатков полученной модели проведём сглаживание методом k-средних:

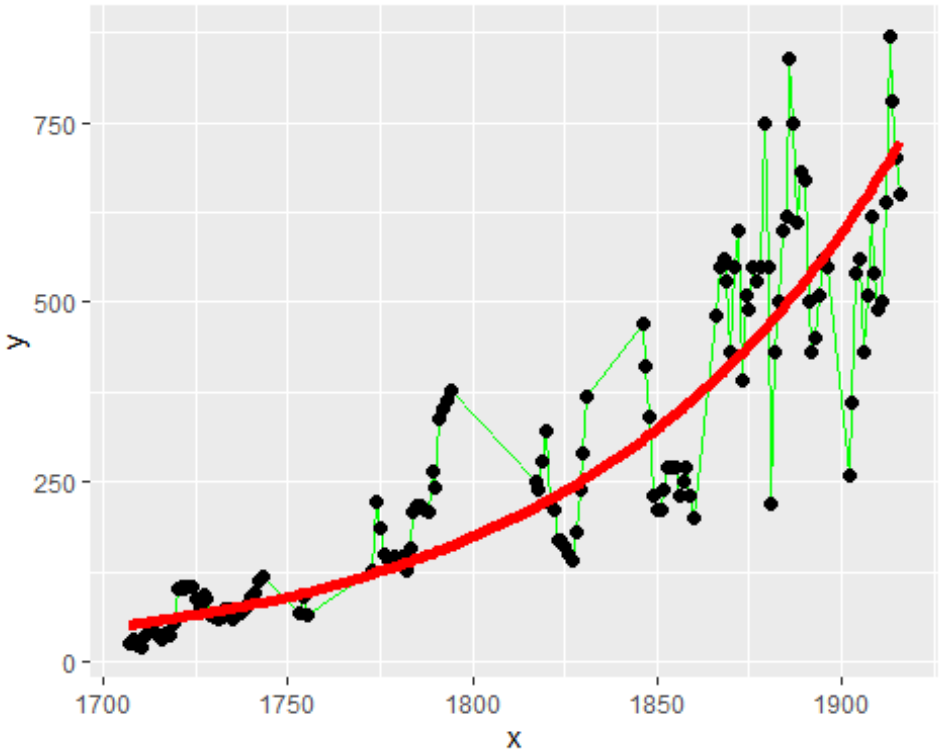
```
mt = lm(log(y) ~ log(x), df)
res = mt$residuals
# скользящее среднее
library(caTools)
k = c(3, 5, 9)
```

```
plot(x, res, type = "l", col = "grey")
for (i in 1:length(k)) {
    lines(x, runmean(res, k[i]), col = i, lwd = 2)
}

legend("topleft", c(paste("k =", k)), col = 1:length(k), bty = "n", lwd = 2)
```



Построим график этой модели в исходной системе координат:

```
ggplot(df, aes(x = x, y = y)) + geom_line(col = "green") + geom_point(size = 2)
+
    geom_line(aes(x = x, y = exp(-166.5906) * x^22.9125), col = "red", size = 2)
```

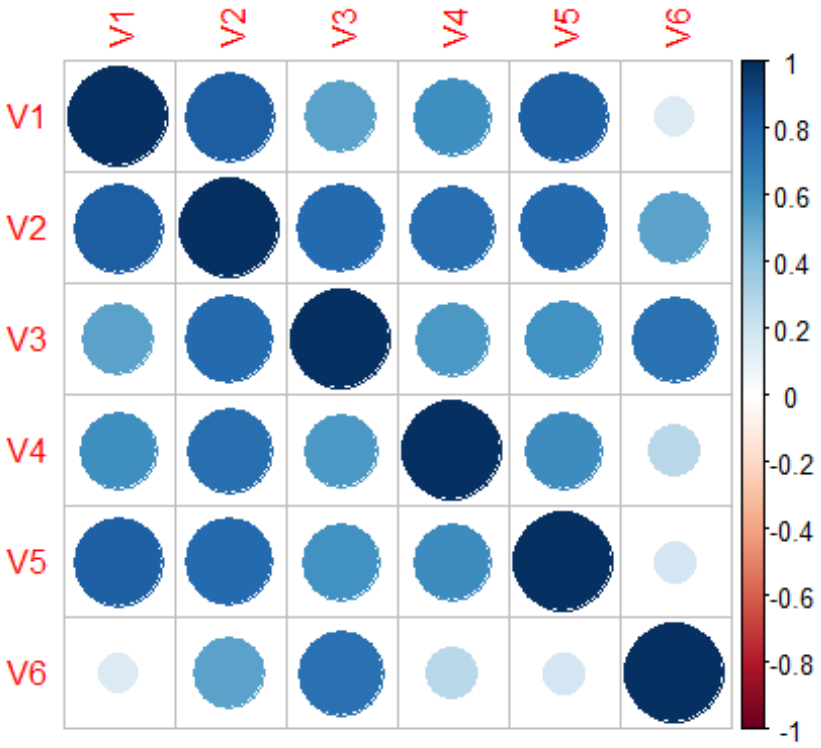


И последнее: **визуализируем корреляции между всеми исходными районами за последние 60 лет наблюдений по отрезкам в 20 лет**:

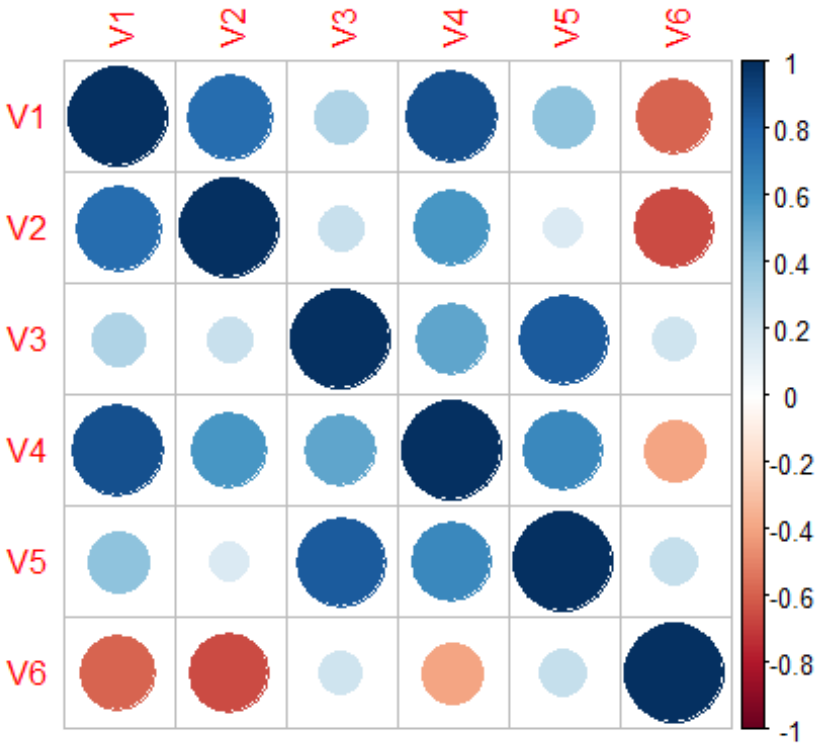
```
nn = 20

for (i in seq(length(x) - 60, length(x) - nn, nn)) {
    tmp = i:(i + nn - 1)
    cat("Times:", x[tmp], "\n")
    data = y[tmp, ]
    cormatrix = cor(data)
    cat("Матрица корреляций:\n")
    print(cormatrix)
    lower = abs(cormatrix[lower.tri(cormatrix)])
    cat("Статистика по треугольнику корреляционной матрицы \n")
    print(summary(lower[lower != 0]))
    corrplot(cormatrix)
}
```

```
## Times: 1846 1847 1848 1849 1850 1851 1852 1853 1854 1855 1856 1857 1858 1859
1860 1866 1867 1868 1869 1870
## Матрица корреляций:
##           V1        V2        V3        V4        V5        V6
## V1 1.0000000 0.8291448 0.5366430 0.6129233 0.8161189 0.1555005
## V2 0.8291448 1.0000000 0.7717488 0.7558893 0.7731484 0.5312709
## V3 0.5366430 0.7717488 1.0000000 0.5726800 0.6073105 0.7487677
## V4 0.6129233 0.7558893 0.5726800 1.0000000 0.6249769 0.2797815
## V5 0.8161189 0.7731484 0.6073105 0.6249769 1.0000000 0.1852402
## V6 0.1555005 0.5312709 0.7487677 0.2797815 0.1852402 1.0000000
## Статистика по треугольнику корреляционной матрицы
```

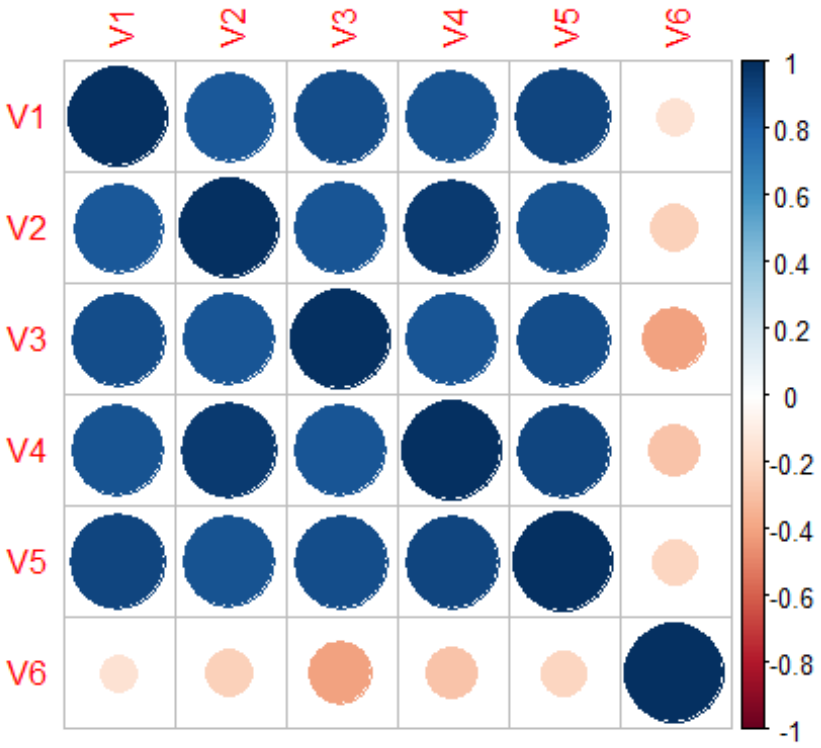
```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##  0.1555  0.5340  0.6129  0.5867  0.7638  0.8291
```




```
## Times: 1871 1872 1873 1874 1875 1876 1877 1878 1879 1880 1881 1882 1883 1884
1885 1886 1887 1888 1889 1890
## Матрица корреляций:
##             V1         V2        V3         V4        V5         V6
## V1  1.0000000  0.7649144 0.3027825  0.8765815 0.4005356 -0.5869152
## V2  0.7649144  1.0000000 0.2207233  0.5826532 0.1561994 -0.6556954
## V3  0.3027825  0.2207233 1.0000000  0.5261564 0.8357040  0.2055036
## V4  0.8765815  0.5826532 0.5261564  1.0000000 0.6427869 -0.3945789
## V5  0.4005356  0.1561994 0.8357040  0.6427869 1.0000000  0.2367902
## V6 -0.5869152 -0.6556954 0.2055036 -0.3945789 0.2367902  1.0000000
## Статистика по треугольнику корреляционной матрицы
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##  0.1562  0.2698  0.5262  0.4926  0.6492  0.8766
```




```
## Times: 1891 1892 1893 1894 1895 1896 1902 1903 1904 1905 1906 1907 1908 1909
1910 1911 1912 1913 1914 1915
## Матрица корреляций:
##            V1         V2         V3         V4         V5         V6
## V1  1.0000000  0.8424524  0.8816869  0.8683768  0.9197496 -0.1501039
## V2  0.8424524  1.0000000  0.8579754  0.9580594  0.8652964 -0.2309437
## V3  0.8816869  0.8579754  1.0000000  0.8514249  0.8895560 -0.4079528
## V4  0.8683768  0.9580594  0.8514249  1.0000000  0.9179652 -0.2816789
## V5  0.9197496  0.8652964  0.8895560  0.9179652  1.0000000 -0.2186937
## V6 -0.1501039 -0.2309437 -0.4079528 -0.2816789 -0.2186937  1.0000000
## Статистика по треугольнику корреляционной матрицы
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##  0.1501  0.3448  0.8580  0.6761  0.8856  0.9581
```



Наглядно видно, что ближе к концу наблюдений корреляция между переменными возрастает. Проблемы с шестой переменной связаны с тем, что для неё было очень много пропущенных значений.