1 Лабораторная 1

Дана задача:

$$\frac{\partial K(t)}{\partial t} = L(t) + 3K(t), K(0) = 2, 0 \le L < \infty, t \in [0,2] \quad (1)$$

$$I(K,L) = \int_0^2 K(t) + L^2(t)dt - 2K(2) \to \min. \quad (2)$$

Решение:

Оптимальный процесс является решением вспомогательной задачи

$$H(K,L,p) = -(K+L^2) + p(L+3K) \to \max_L, \quad (3)$$

то есть

$$\frac{\partial H}{\partial L} = -2L + p = 0 \Rightarrow L = \frac{p}{2}. \quad (4)$$

Сопряженная задача имеет вид:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial K} = 1 - 3p, \quad (5)$$

$$p(2) = -\frac{\partial(-2K(2))}{\partial K(2)} = 2. \quad (6)$$

Расчётная часть представлена на рис. 1-2.

Дифференциальное уравнение имеет решение $p = C_1\frac{e^{-3t}}{3} + \frac{1}{3}$, причем $p(2) = 2$, поэтому $C_1 = 5e^6$, тогда

$$p(t) = \frac{1}{3}\left(5e^6e^{-3t} + 1\right), \quad (7)$$

$$L(t) = \frac{1}{6}\left(5e^6e^{-3t} + 1\right) > 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = 3K + \frac{5}{6}e^{-3t+6} + \frac{1}{6} \Rightarrow K = \left(C_1 - \frac{ce^{-3t}}{3} - \frac{ke^{-6t}}{6}\right)e^{3t}, c = \frac{1}{6}, k = \frac{5e^6}{6}. \quad (9)$$

Из условия $K(0) = 2$ находим $C_1 = 2\frac{1}{18} + \frac{5e^6}{36}$, откуда

$$K(t) = K = \left(2\frac{1}{18} + \frac{5e^6}{36} - \frac{e^{-3t}}{18} - \frac{5e^6e^{-6t}}{36}\right)e^{3t}. \quad (10)$$

Расчётная часть представлена на рис. 3-4.

$$Y(K,L) := L \qquad alpha := 1 \qquad beta := -3$$

$$Ham(K,L,P) := -\left(K + L^2\right) + P \cdot (alpha \cdot L - beta \cdot K)$$

$$dHam(K,L,P) := \frac{d}{dL} Ham(K,L,P) \rightarrow P - 2 \cdot L$$

$$Lmax(K,P) := \frac{P}{2}$$

$$dK(K,P) := alpha \cdot Lmax(K,P) - beta \cdot K \rightarrow 3 \cdot K + \frac{P}{2}$$

$$dP(K,P) := \frac{d}{dK}(Ham(K,L,P) \cdot -1) \rightarrow 1 - 3 \cdot P$$

$$t1 := 0 \qquad t2 := 2$$

$$v := (1) \qquad y_0 := 2$$

$$load(t1,v) := \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \qquad scope(t2,y) := y_1 - 2$$

$$Fmax(t,y) := \begin{pmatrix} dK\left(y_0, y_1\right) \\ dP\left(y_0, y_1\right) \end{pmatrix}$$

$$a := sbval(v,t1,t2,Fmax,load,scope) = (672.715)$$

$$y_1 := a_0$$

$$res := rkfixed(y,t1,t2,100,Fmax)$$

$$i := 0..rows(res) - 1$$

Рис. 1: Расчёты

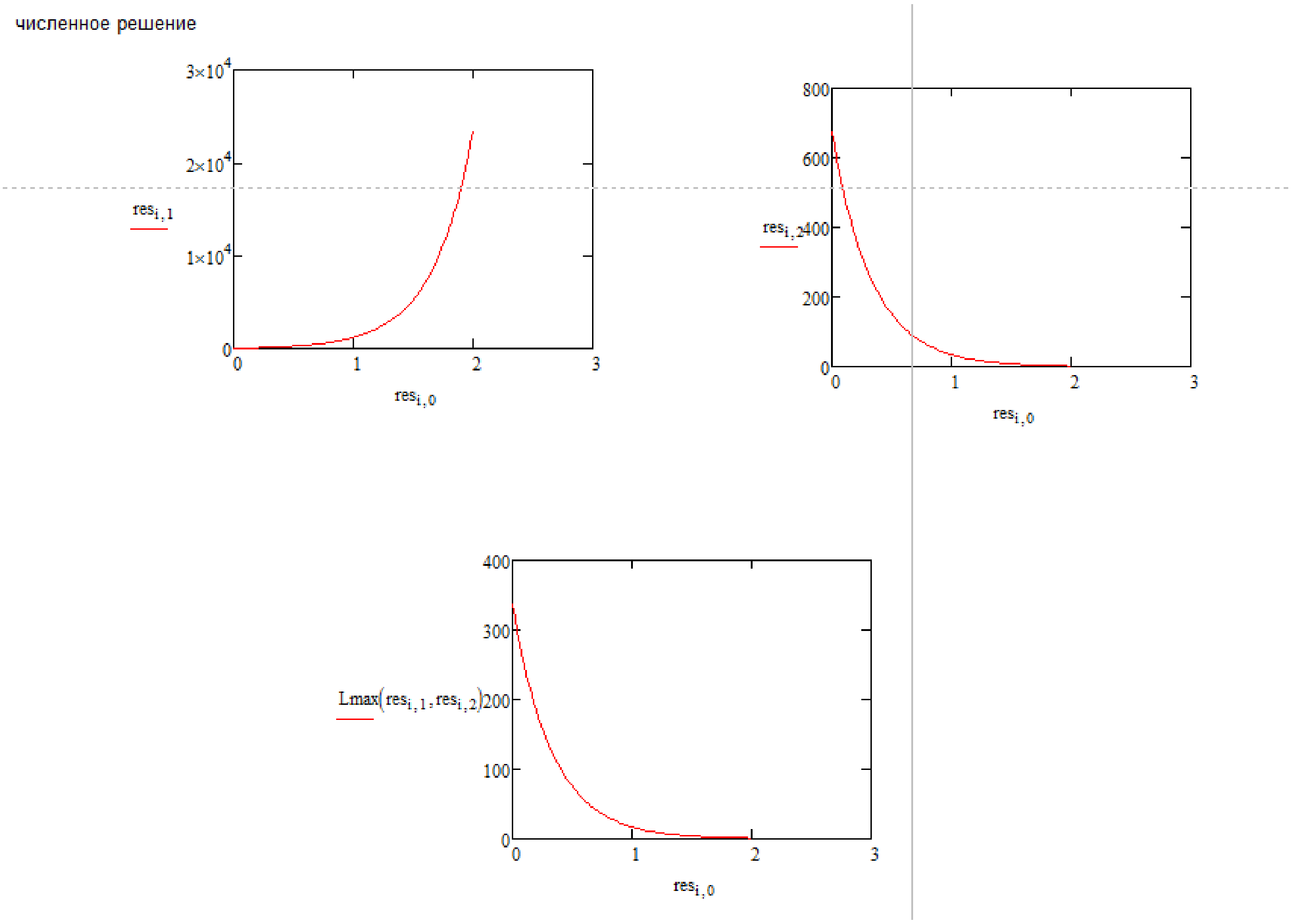


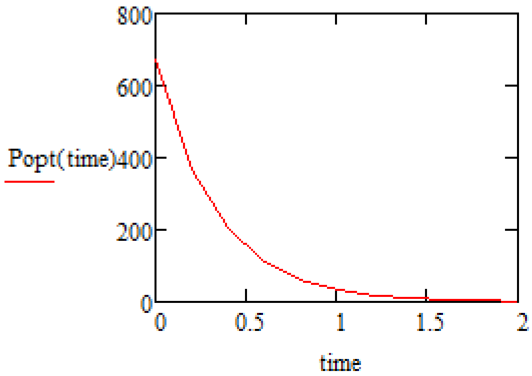
Рис. 2: Графики численного решения

$k1 := \exp(6) \cdot \frac{5}{3} = 672.381$ $\qquad$ $k2 := \frac{1}{3}$

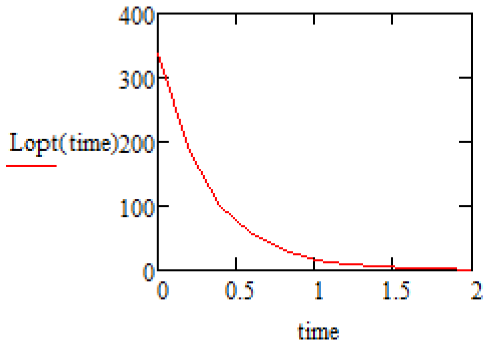
$time := 0, 0.2 .. 2$

аналитическое решение

$Popt(t) := k1 \cdot \exp(-3t) + k2$



$Lopt(t) := \frac{Popt(t)}{2}$

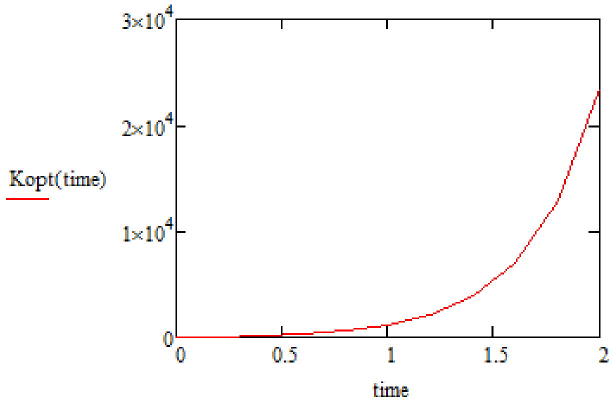


$c := \frac{k2}{2}$ $\qquad$ $k := \frac{k1}{2}$

Рис. 3: Графики аналитического решения

$$\mathrm{Kopt}(t) := \left(\frac{k1}{12} + \frac{-k1 \cdot \exp(-6t)}{12} + 2 - \frac{\exp(-3t)}{18} + \frac{1}{18}\right)\exp(3t)$$

$$\mathrm{Kopt}(0) = 2$$



$$\mathrm{left}(t) := \frac{d}{dt}\mathrm{Kopt}(t)$$

$$\mathrm{right}(t) := \mathrm{Lopt}(t) + 3\,\mathrm{Kopt}(t)$$

left(time) =	right(time) =
342.357	342.357
409.779	409.779
629.2	629.2
$1.082 \cdot 10^{3}$	$1.082 \cdot 10^{3}$
$1.936 \cdot 10^{3}$	$1.936 \cdot 10^{3}$
$3.509 \cdot 10^{3}$	$3.509 \cdot 10^{3}$
$6.382 \cdot 10^{3}$	$6.382 \cdot 10^{3}$
$1.162 \cdot 10^{4}$	$1.162 \cdot 10^{4}$
$2.118 \cdot 10^{4}$	$2.118 \cdot 10^{4}$
$3.858 \cdot 10^{4}$	$3.858 \cdot 10^{4}$
$7.03 \cdot 10^{4}$	$7.03 \cdot 10^{4}$

$$I(K,L) := \int_0^2 K(t) + L(t)^2\,dt - 2K(2)$$

$$I(\mathrm{Kopt},\mathrm{Lopt}) = -2.022 \times 10^{4}$$

Рис. 4: Графики аналитического решения

2 Лабораторная 2

Задача:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u, & x_2(0) = 1, t \in [0, 10] \end{cases} \tag{11}$$

$$I = \int_0^{10} u^2 - x_1 dt \to \min. \tag{12}$$

Решение:

Задача для функции Гамильтона

$$H = x_1 - u^2 + p_1 x_2 + p_2(x_1 + u) \to \max_u \tag{13}$$

имеет решение

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + p_2 = 0 \Rightarrow u = \frac{p_2}{2}. \tag{14}$$

Для сопряжённых переменных система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -1 - p_2, & p_1(10) = 0, \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1, & p_2(10) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

имеет решение в виде

$$\begin{cases} p_1 = C_1 e^t - C_2 e^{-t}, \\ p_2 = -C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1, \end{cases} \tag{16}$$

где $C_1 = -\dfrac{e^{-10}}{2}, C_2 = -\dfrac{e^{10}}{2}$. Тогда система для $\mathbf{x}$ имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + \dfrac{e^{-10}}{4} e^t + \dfrac{e^{10}}{4} e^{-t} - \dfrac{1}{2}, & x_2(0) = 1. \end{cases} \tag{17}$$

Расчётная часть представлена на рис. 5-6.

Введём константы $a = \dfrac{e^{-10}}{4}, b = \dfrac{e^{10}}{4}, c = -\dfrac{1}{2}$, тогда общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4}\left(a e^t (2t - 1) - b e^{-t}(2t + 1) - 4c\right) + \dfrac{1}{2} C_1 (e^t + e^{-t}) + \dfrac{1}{2} C_2 (e^t - e^{-t}), \\ x_2 = \dfrac{1}{4} e^{-t}\left(a e^{2t}(2t + 1) + b(2t - 1)\right) + \dfrac{1}{2} C_1 (e^t - e^{-t}) + \dfrac{1}{2} C_2 (e^t + e^{-t}). \end{cases} \tag{18}$$

Из граничных условий находим: $C_1 = 1 + \dfrac{1}{4}(a + b + 4c), C_2 = 1 + \dfrac{1}{4}(b - a)$. **Расчётная часть** представлена на рис. 7.

функция Гамильтона

$$H(x,p,u) := x_1 - u^2 + p_1 x_1 + p_2 (x_1 + u)$$

$$\frac{d}{du} H(x,p,u) \rightarrow p_2 - 2 \cdot u$$

оптимальное управление (тут надо учитывать, что индексы на самом деле с 0 начинаются)

$$umax(x,p) := \frac{p_1}{2}$$

система для траектории

$$f(x,p) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 + umax(x,p) \end{pmatrix}$$

система для сопряжённых переменных

$$fs(x,p) := \begin{pmatrix} -p_1 - 1 \\ -p_0 \end{pmatrix}$$

сама решаемая система

$$fmax(t,y) := \left[f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]_0 \; f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]_1 \; fs\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]_0 \; fs\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]_1 \right]^T$$

известные начальные условия

$$y_0 := 1 \qquad y_1 := 1$$

$$f1(t1,v) := \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & v_0 & v_1 \end{pmatrix}^T$$

$$v_0 := 1 \qquad v_1 := 1$$

интервал по времени

$$t1 := 0 \qquad t2 := 10$$

функция для условий на конце отрезка

$$f2(t2,y) := \begin{pmatrix} y_2 - 0 \\ y_3 - 0 \end{pmatrix}$$

$$a := sbval(y,t1,t2,fmax,f1,f2) \rightarrow sbval\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 10, function, function, function\right]$$

Рис. 5: Расчёты

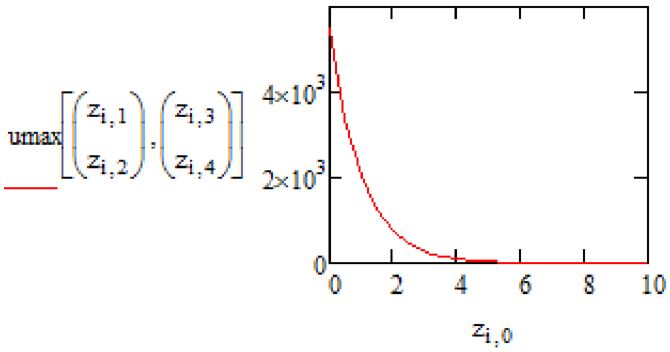
$y_2 := a_0 \quad y_3 := a_1 \qquad i := 0..20$

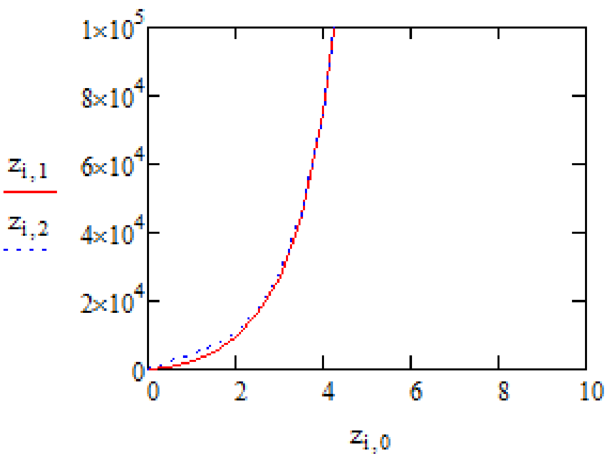
$z := \mathrm{rkfixed}(y, t1, t2, 20, \mathrm{fmax})$

$z_{20,1} = 3.024 \times 10^{7} \qquad z_{20,2} = 3.024 \times 10^{7}$

$z_{0,3} = 1.101 \times 10^{4} \qquad z_{0,4} = 1.101 \times 10^{4}$

$\mathrm{umax}\left[\begin{pmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_{0,3} \\ z_{0,4} \end{pmatrix}\right] = 5.506 \times 10^{3} \qquad \mathrm{umax}\left[\begin{pmatrix} z_{20,1} \\ z_{20,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_{20,3} \\ z_{20,4} \end{pmatrix}\right] = 1.128 \times 10^{-3}$





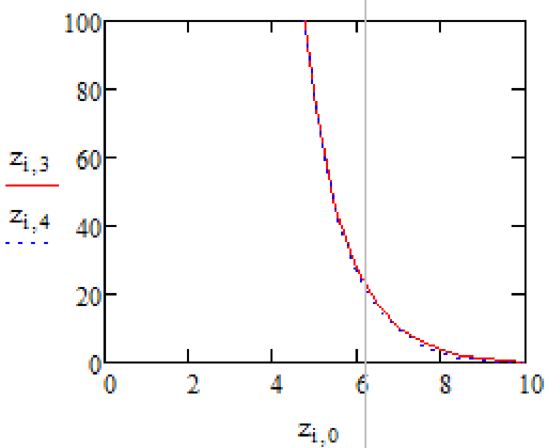


Рис. 6: Графики численного решения

аналитическое решение

$$C1 := \frac{-\exp(-10)}{2} \qquad C2 := \frac{-\exp(10)}{2}$$

$$a := \frac{-C1}{2} \qquad b := \frac{-C2}{2} \qquad c := \frac{-1}{2}$$

$$k1 := 1 + \frac{(a + b + 4c)}{4} \qquad k2 := 1 + \frac{(b - a)}{4}$$

$$p1(t) := C1 \cdot \exp(t) - C2 \cdot \exp(-t)$$

$$p2(t) := -C1 \cdot \exp(t) - C2 \cdot \exp(-t) - 1$$

$$u(t) := \frac{p2(t)}{2} \qquad i := 0..10$$

$$x1(t) := \frac{[a \cdot \exp(t) \cdot (2t - 1) - b \cdot \exp(-t) \cdot (2t + 1) - 4c] + 2k1 \cdot (\exp(t) + \exp(-t)) + 2k2 \cdot (\exp(t) - \exp(-t))}{4}$$

$$x2(t) := \frac{\exp(-t) \cdot [a \cdot \exp(2t) \cdot (2t + 1) + b \cdot (2t - 1)] + 2k1 \cdot (\exp(t) - \exp(-t)) + 2k2 \cdot (\exp(t) + \exp(-t))}{4}$$

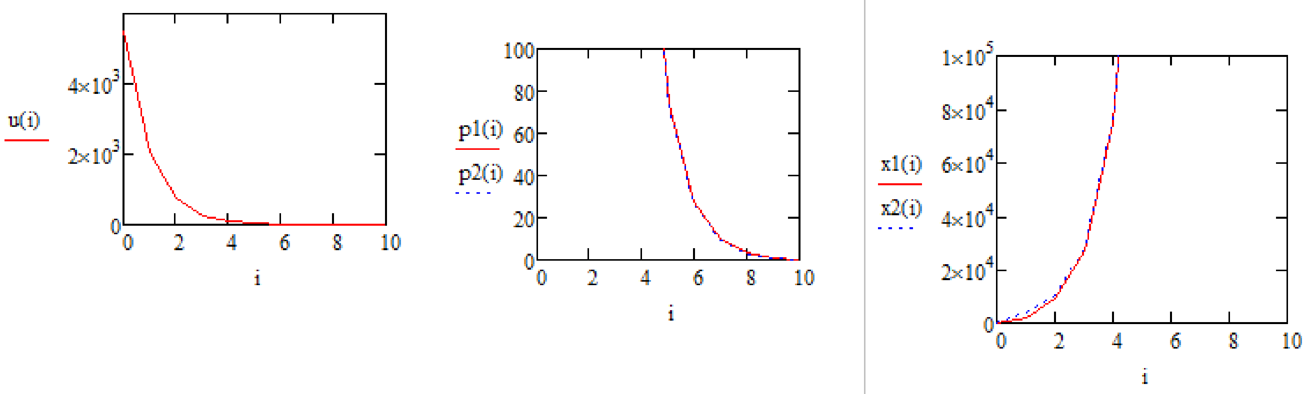


Рис. 7: Графики аналитического решения

3 Лабораторная 3

Задача:

$$\dot{x} = x + u, 0 \leq u \leq 3, x(0) = 1, t \in [0, 4], \tag{19}$$

$$I = \int_0^4 3u dt - x(4) \to \min. \tag{20}$$

Решение:

Из задачи для функции Гамильтона

$$H = -3u + p(x + u) = u(p - 3) + px \to \max \tag{21}$$

следует

$$u = \begin{cases} 3, & p - 3 > 0, \\ 0, & p - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3, & p > 3, \\ 0, & p < 3 \end{cases} \tag{22}$$

Для p имеем задачу

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -p, p(4) = -\frac{\partial(-x(4))}{\partial x(4)} = 1, \tag{23}$$

откуда

$$p = C_1 e^{-t} \Rightarrow p(4) = C_1 e^{-4} = 1 \Rightarrow C_1 = e^4 \Rightarrow p = e^4 e^{-t}. \tag{24}$$

Расчётная часть представлена на рис. 8.

Тогда $p = 3$ при $t = 4 - \ln 3$. Поскольку функция p убывающая, функция u принимает вид

$$u = \begin{cases} 3, & t \in [0, 4 - \ln 3], \\ 0, & t \in [4 - \ln 3, 4] \end{cases} \tag{25}$$

Из уравнения $\dot{x} = x + u$ следует $x = C_1 e^t - u$. Тогда на отрезке $t \in [0, 4 - \ln 3]$ решается задача

$$x = C_1 e^t - 3, x(0) = 1 \Rightarrow C_1 - 3 = 1 \Rightarrow C_1 = 4 \Rightarrow x = 4e^t - 3, x(4 - \ln 3) = \frac{4}{3}e^4 - 3. \tag{26}$$

Аналогично для отрезка $t \in [4 - \ln 3, 4]$:

$$x = C_1 e^t, x(4 - \ln 3) = \frac{4}{3}e^4 - 3 \Rightarrow C_1 = e^{\ln 3 - 4}\left(\frac{4}{3}e^4 - 3\right) = 4 - 9e^{-4} \Rightarrow x = (4 - 9e^{-4})e^t. \tag{27}$$

В итоге для траектории:

$$\begin{cases} x = 4e^t - 3, & t \in [0, 4 - \ln 3], \\ x = (4 - 9e^{-4})e^t & t \in [4 - \ln 3, 4]. \end{cases} \tag{28}$$

Расчётная часть представлена на рис. 9.

$$H(x,p,u) := -3u + p\cdot(x+u)$$

$$\frac{d}{du}H(x,p,u) \rightarrow p - 3$$

$$umax(x,p) := \left| \begin{array}{l} 3 \ \text{ if } \ p - 3 \geq 0 \\ 0 \ \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

функции для системы

$f(x,p) := x + umax(x,p)$ $\qquad$ $fs(x,p) := -p$

$$fmax(t,y) := \begin{pmatrix} f(y_0, y_1) \\ fs(y_0, y_1) \end{pmatrix} \qquad y_0 := 1$$

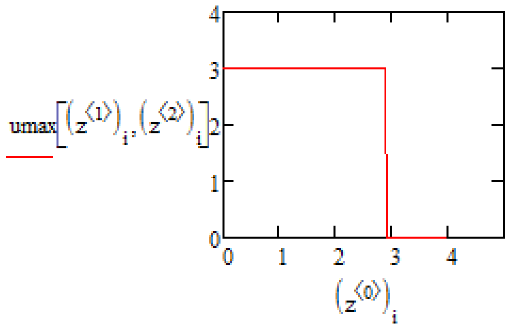
$$f1(t1,v) := \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \qquad t1 := 0 \qquad t2 := 4 \qquad v_0 := y_0$$

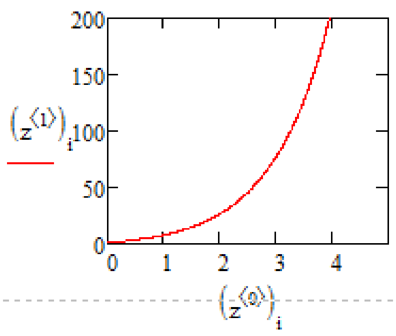
$$f2(t2,y) := y_1 - 1 \qquad a := sbval(y, t1, t2, fmax, f1, f2)$$

$$y_1 := a_0 \qquad w^{\langle 0 \rangle} := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad N := 1000 \qquad i := 0..N$$

$$z := rkfixed(w, 0, t2, N, fmax) \qquad \left(z^{\langle 1 \rangle}\right)_{1000} = 209.386 \quad \left(z^{\langle 2 \rangle}\right)_0 = 54.598$$

численное решение





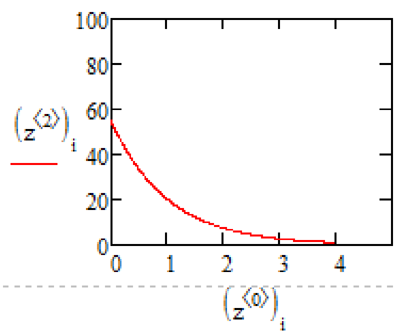


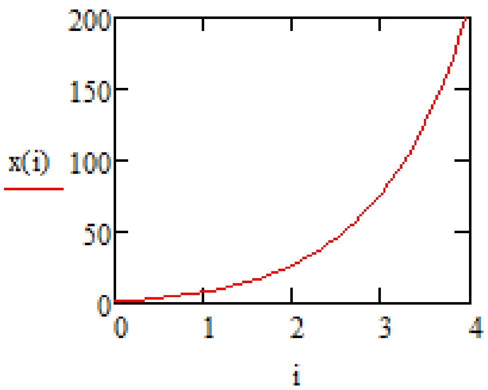
Рис. 8: Графики численного решения

$$4 - \ln(3) = 2.901$$

$$p(t) := \exp(4)\cdot\exp(-t)$$

$$x(t) := \begin{vmatrix} \exp(t)\cdot(4 - 9\cdot\exp(-4)) & \text{if } t + \ln(3) \ge 4 \\ 4\cdot\exp(t) - 3 & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

$$i := 0, 0.1 .. 4$$



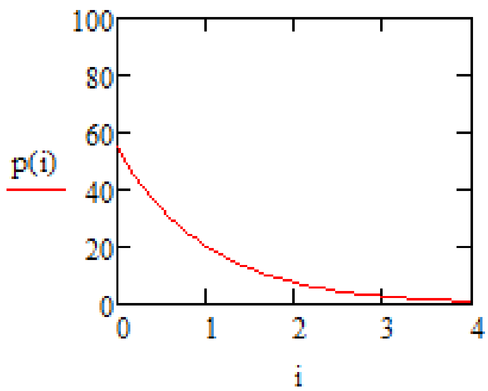


Рис. 9: Графики аналитического решения

4 Лабораторная 4

Задача:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, & x_2(0) = 2, t \in [0,1], 0 \le u \le 2 \end{cases} \tag{29}$$

$$I = \int_0^1 x_2 + u dt + x_2(1) \to \min . \tag{30}$$

Решение:

Из задачи для функции Гамильтона:

$$H = -u - x_2 - p_1 x_2 + p_2(u - x_1) = (p_1 - 1)u - p_1 x_2 - p_2 x_1 - x_2 \to \max_u \tag{31}$$

следует

$$u = \begin{cases} 2, & p_2 > 1 \\ 0, & p_2 < 1 \end{cases}. \tag{32}$$

Задача для сопряженных переменных

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_2, & p_1(1) = 0 \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = p_1 + 1, & p_2(1) = -\frac{\partial(x_2(1))}{\partial x_2(1)} = -1 \end{cases} \tag{33}$$

имеет решение

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{2}C_1(e^t + e^{-t}) + \dfrac{1}{2}C_2(e^t - e^{-t}) - 1, \\ p_2 = \dfrac{1}{2}C_1(e^t - e^{-t}) + \dfrac{1}{2}C_2(e^t + e^{-t}) \end{cases}, \tag{34}$$

где $C_1 = e, C_2 = -e$. В сокращённом виде:

$$\begin{cases} p_1 = e \cdot e^{-t} - 1, \\ p_2 = -e \cdot e^{-t} \end{cases}. \tag{35}$$

Расчётная часть представлена на рис. 10-11.

Очевидно, что $p_2 < 0$ всегда, откуда $u = 0$. В этом случае система дифференциальных уравнений для $\mathbf{x}$ имеет решение

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \\ x_2 = -C_1 e^t + C_2 e^{-t} \end{cases}, \tag{36}$$

где $C_1 = -0.5$, $C_2 = 1.5$.

Расчётная часть представлена на рис. 12.

$$H(x,p,u) := -u - x_1 - p_0 x_1 + p_1 \cdot (u - x_0)$$

$$\frac{d}{du} H(x,p,u) \rightarrow p_1 - 1$$

$$umax(x,p) := \begin{cases} 2 & \text{if } p_1 - 1 \ge 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f(x,p) := \begin{pmatrix} -x_1 \\ umax(x,p) - x_0 \end{pmatrix} \qquad fs(x,p) := \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 + 1 \end{pmatrix}$$

$$fmax(t,y) := \left[f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]_0 \; f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]_1 \; fs\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]_0 \; fs\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]_1 \right]^T$$

$$y_1 := 1 \qquad y_0 := 2 \qquad f1(t1,v) := \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & v_0 & v_1 \end{pmatrix}^T$$

$$v_0 := 0 \qquad v_1 := 0 \qquad t1 := 0 \qquad t2 := 1$$

$$f2(t2,y) := \begin{pmatrix} y_2 - 0 \\ y_3 + 1 \end{pmatrix}$$

$$a := sbval(y,t1,t2,fmax,f1,f2)$$

$$y_2 := a_0 \qquad y_3 := a_1 \qquad i := 0..20 \qquad z := rkfixed(y,t1,t2,20,fmax)$$

$$z_{20,1} = 1.911 \qquad z_{20,2} = -0.807 \qquad z_{0,3} = 1.718 \qquad z_{0,4} = -2.718$$

$$umax\left[\begin{pmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_{0,3} \\ z_{0,4} \end{pmatrix}\right] = 0 \qquad umax\left[\begin{pmatrix} z_{20,1} \\ z_{20,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_{20,3} \\ z_{20,4} \end{pmatrix}\right] = 0$$

Рис. 10: Расчёты

численное решение

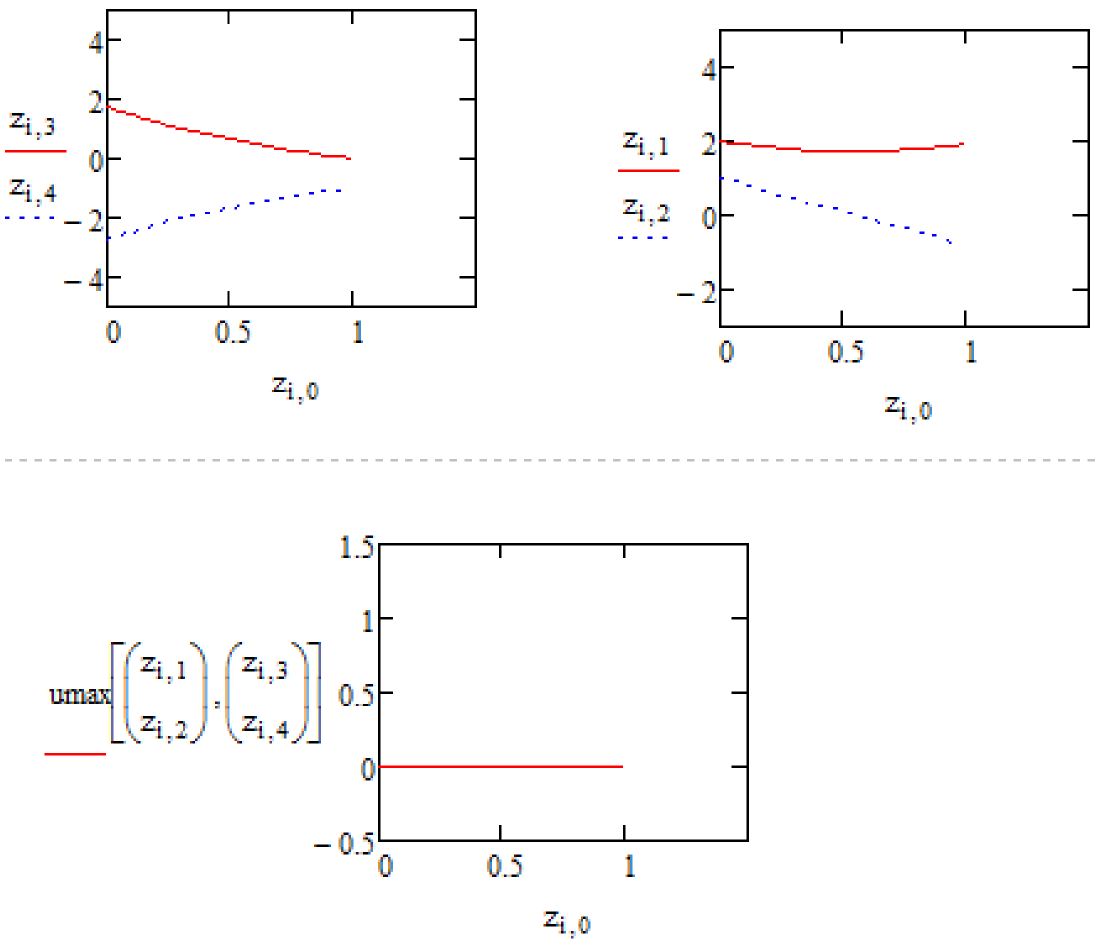


Рис. 11: Графики численного решения

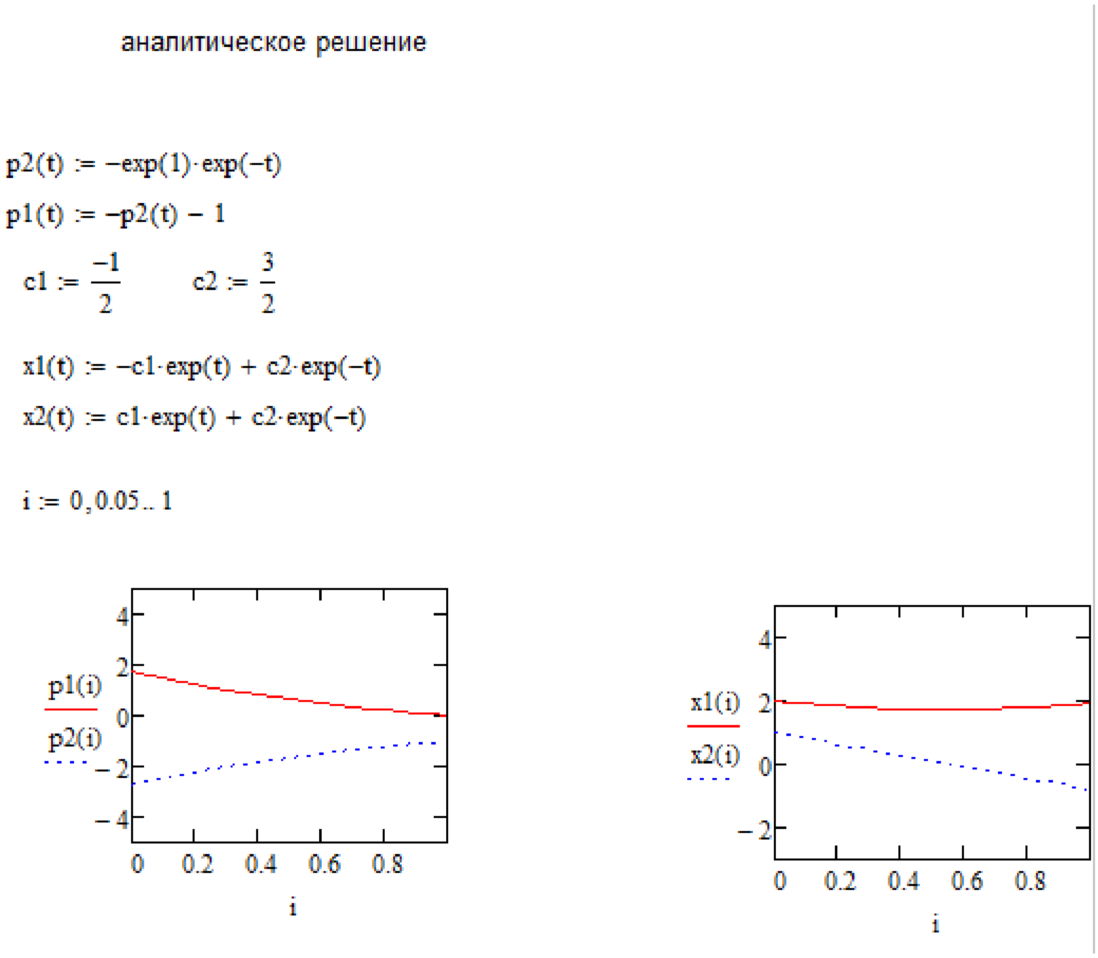


Рис. 12: Графики аналитического решения

5 Лабораторная 5

Задача:

$$\dot{x} = u, x(0) = -1, t \in [0, 3], \tag{37}$$

$$I = \int_0^3 u^2 + xdt - x(3) \to \min. \tag{38}$$

Решение: Из задачи

$$R = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} u - u^2 - x \to \max_u \tag{39}$$

находим, что

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2u \Rightarrow u = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{40}$$

Поскольку терминальная функция $F(x) = -x$ является многочленом первого порядка, то функцию $\varphi(t, x)$ будем искать в виде $\varphi(t, x) = p(t) \cdot x$, откуда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \cdot x, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = p. \tag{41}$$

Из уравнения для p

$$P(x, t) = R|_{u=\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - x = \left(\frac{\partial p}{\partial t} - 1\right) + \frac{1}{4}p^2 = c(t) \tag{42}$$

получается уравнение

$$\dot{p} = 1 \tag{43}$$

при граничном условии

$$\Phi(X) = \varphi(T, X) + F(x) = p(3)x - x = 0 \Rightarrow p(3) = 1. \tag{44}$$

Для x получаем уравнение $\dot{x} = \frac{1}{2}p$ при граничном условии $x(0) = -1$. Система этих уравнений имеет решение

$$\begin{cases} p = t - 2, \\ x = \frac{t^2}{2} - t - 1. \end{cases} \tag{45}$$

Расчётная часть представлена на рис. 13-14.

оптимальное управление

$$umax(x,p) := \frac{p}{2}$$

уравнения для u и p

$$f(x,p) := umax(x,p)$$

$$fs(x,p) := 1$$

$$fmax(t,y) := \begin{pmatrix} f(y_0, y_1) \\ fs(y_0, y_1) \end{pmatrix}$$

начальные условия

$$y_0 := -1 \qquad f1(t1,v) := \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$v_0 := -11$$

интервал по времени

$$t1 := 0 \qquad t2 := 3$$

условие на конец

$$f2(t2,y) := y_1 - 1$$

$$a := sbval(y,t1,t2,fmax,f1,f2)$$

$$y_1 := a_0 \qquad i := 0..20$$

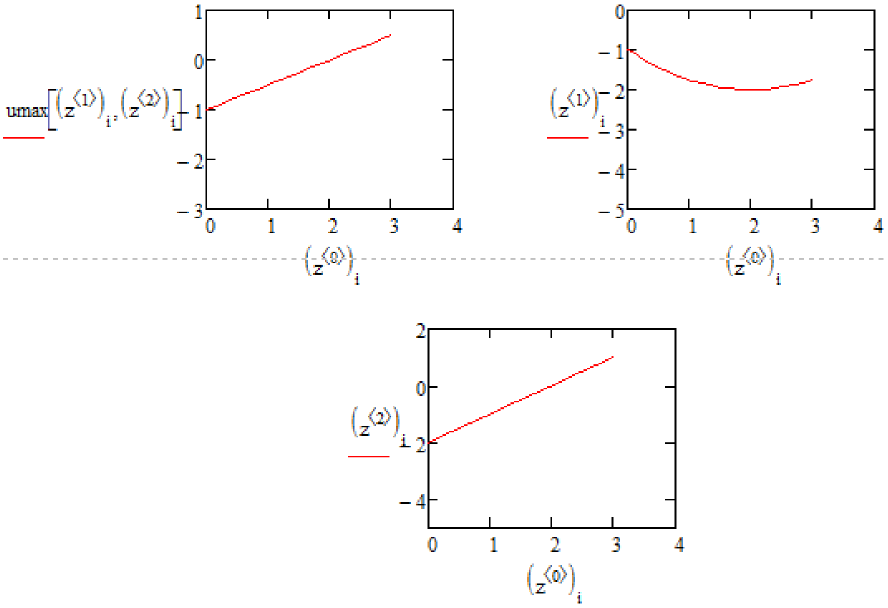
$$z := rkfixed(y,t1,t2,20,fmax)$$

$$\left(z^{\langle 2\rangle}\right)_0 = -2 \qquad umax\left[\left(z^{\langle 1\rangle}\right)_0, \left(z^{\langle 2\rangle}\right)_0\right] = -1$$

$$\left(z^{\langle 1\rangle}\right)_{20} = -1.75 \qquad umax\left[\left(z^{\langle 1\rangle}\right)_{20}, \left(z^{\langle 2\rangle}\right)_{20}\right] = 0.5$$

Рис. 13: Расчёты

численное решение



аналитическое решение

$p(t) := t - 2$ $\qquad$ $u(t) := \frac{p(t)}{2}$

$x(t) := \frac{t^2}{4} + -1 - t$

$t := 0, 0.1 .. 3$

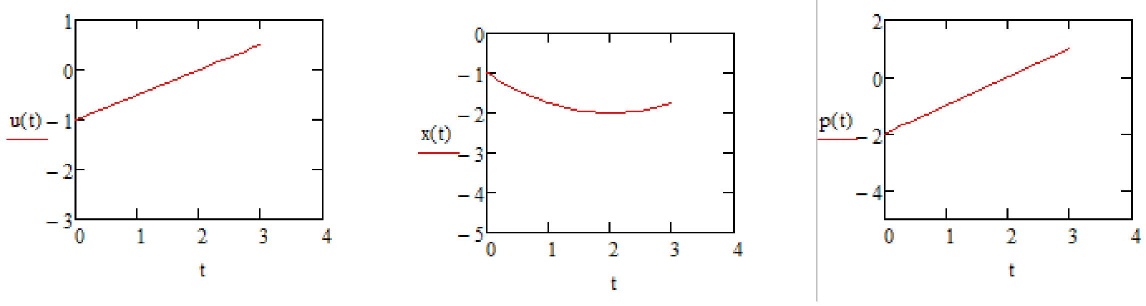


Рис. 14: Графики решения

6 Лабораторная 6

Задача:

$$\dot{x} = -x + u, -1 \leq u \leq 0, x(0) = 1, t \in [0, 2], \tag{46}$$

$$I = \int_0^2 x - u dt - 3x(2) \to \min. \tag{47}$$

Решение:

Из уравнения

$$R = u - x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-x + u) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{48}$$

получаем

$$\frac{\partial R}{\partial u} = 1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow u = \begin{cases} 0, & \frac{\partial \varphi}{\partial x} > -1, \\ -1, & \frac{\partial \varphi}{\partial x} < -1 \end{cases}. \tag{49}$$

Аналогично заданию 5 получаем, что $\varphi(t, x) = p(t) \cdot x$, откуда для $p > 1$

$$P(x, t) = -x(1 + p) + \dot{p}x = c(t) \Rightarrow \dot{p} = p + 1 \tag{50}$$

и

$$p(2)x - 3x = 0 \Rightarrow p(2) = 3. \tag{51}$$

К этому уравнению добавляется

$$\dot{x} = -x, x(0) = 2. \tag{52}$$

Решение полученной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = 2e^{-t}, \\ p = 4e^{t-2} - 1 \geq -1 \end{cases} \tag{53}$$

Расчётная часть представлена на рис. 15-16.

Для $p > 1$ получим такое же уравнение для p с таким же решением $p \geq -1$

$$P(x, t) = -1 - x + p(-x - 1) + \dot{p}x = -1 - x(1 + p) - p + \dot{p}x = c(t) \Rightarrow \dot{p} = p + 1, \tag{54}$$

откуда следует, что x искать не имеет смысла и $u = 0$ всегда.

$$umax(x,p) := \begin{cases} 0 & \text{if } (p+1) \ge 0 \\ (-1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f(x,p) := -x + umax(x,p) \qquad fs(x,p) := p + 1$$

$$fmax(t,y) := \begin{pmatrix} f(y_0, y_1) \\ fs(y_0, y_1) \end{pmatrix}$$

$$y_0 := 2 \qquad f1(t1, v) := \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$v_0 := 25$$

$$t1 := 0 \qquad t2 := 2$$

$$f2(t2, y) := y_1 - 3$$

$$a := sbval(y, t1, t2, fmax, f1, f2)$$

$$y_1 := a_0 \qquad i := 0..20$$

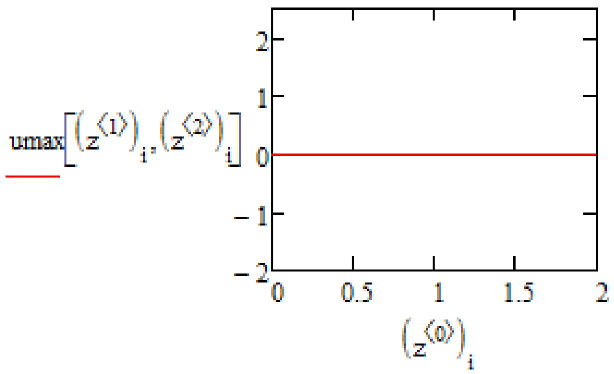
$$z := rkfixed(y, t1, t2, 20, fmax)$$

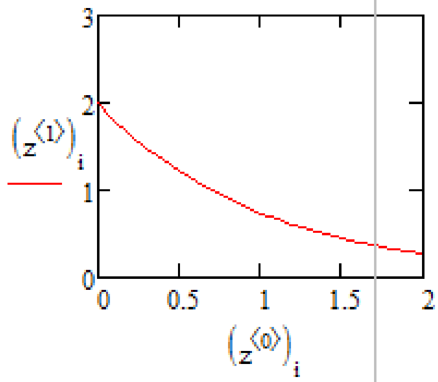
$$\left(z^{\langle 2\rangle}\right)_0 = -0.459 \qquad umax\left[\left(z^{\langle 1\rangle}\right)_{20}, \left(z^{\langle 2\rangle}\right)_{20}\right] = 0$$

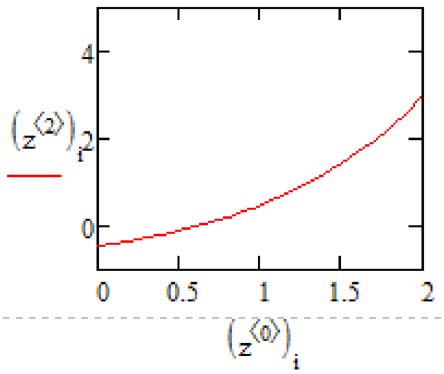
$$\left(z^{\langle 1\rangle}\right)_{20} = 0.271 \qquad umax\left[\left(z^{\langle 1\rangle}\right)_{0}, \left(z^{\langle 2\rangle}\right)_{0}\right] = 0$$

Рис. 15: Расчёты

численное решение



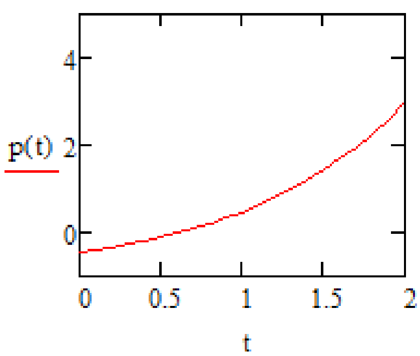




аналитическое решение

$x(t) := 2\cdot\exp(-t) \qquad p(t) := 4\cdot\exp(t-2) - 1$

$t := 0, 0.1 .. 2$



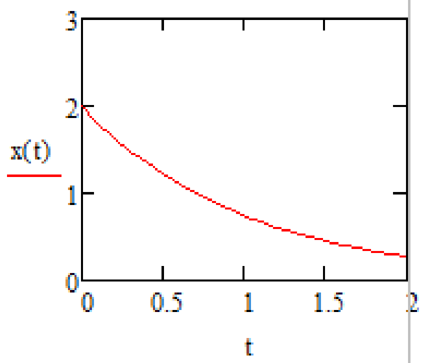


Рис. 16: Графики решения