

Московский физико-технический институт  
(государственный университет)

Инновационная образовательная программа  
«Наукоемкие технологии и экономика инноваций»  
Московского физико-технического института  
(государственного университета)  
на 2006–2007 годы

В. Ф. Журавлев

# ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Издание третье, переработанное

*Рекомендовано УМО высших учебных заведений  
Российской Федерации в области прикладных  
математики и физики в качестве учебника  
для студентов вузов в области прикладных  
математики и физики*



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2008

УДК 531  
ББК 22.21  
Ж 91

Журавлев В.Ф. **Основы теоретической механики.** — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 304 с. — ISBN 978-5-9221-0907-9.

Книгу отличает более глубокий, чем обычно принято в учебной литературе, анализ оснований классической и релятивистской механики, выполненный с единым для этих парадигм подходом. Курс включает изложение элементов теории групп Ли, достаточное для понимания особенностей применения идей этой теории в современной механике и физике. Традиционные разделы теоретической механики подвергнуты серьезной методической переработке с целью, с одной стороны, максимально упростить введение основных понятий, доказательства теорем и основные методы, с другой стороны, заменить устаревшие представления более эффективными современными. Последнее относится, например, к аппарату теории конечных поворотов.

Рекомендовано в качестве учебника студентам вузов в области прикладных математики и физики.

---

Учебное издание

*ЖУРАВЛЕВ Виктор Филиппович*

## **ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

Редактор *А.Г. Мордвинцев*

Оригинал-макет: *Е.В. Сабаяева*

Подписано в печать 21.11.07. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 19. Уч.-изд. л. 20,9. Тираж 1500 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;  
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ОАО «Ивановская областная типография»  
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6  
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 978-5-9221-0907-9



9 785922 109079

---

ISBN 978-5-9221-0907-9

© ФИЗМАТЛИТ, 2008

© В.Ф. Журавлев, 2008

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	7
§ 1. Проблема аксиоматизации классической механики . . . . .	7
§ 2. Инвариантность и ковариантность уравнений механики . . . . .	10

### Часть 1. Кинематика

Глава 1. <b>Кинематика точки</b> . . . . .	14
§ 3. Основные определения . . . . .	14
§ 4. Кинематика точки в естественной системе осей . . . . .	15
§ 5. Кинематика точки в криволинейных координатах . . . . .	17
Глава 2. <b>Кинематика твердого тела</b> . . . . .	23
§ 6. Способы задания ориентации твердого тела . . . . .	23
§ 7. Сложение поворотов . . . . .	40
§ 8. Топология многообразия поворотов твердого тела . . . . .	48
§ 9. Угловая скорость твердого тела . . . . .	50
Глава 3. <b>Кинематика относительного движения</b> . . . . .	59
§ 10. Скорости и ускорения в неинерциальных системах отсчета . . . . .	59

### Часть 2. Динамика

Глава 4. <b>Общие теоремы динамики</b> . . . . .	64
§ 11. Определения . . . . .	64
§ 12. Теорема об изменении количества движения . . . . .	66
§ 13. Теорема об изменении момента количества движения . . . . .	68
§ 14. Теорема об изменении энергии . . . . .	69
§ 15. Первые интегралы . . . . .	70
§ 16. Теорема Кёнига . . . . .	71
§ 17. Теорема о вириале . . . . .	71
§ 18. Общее уравнение динамики системы связанных материальных точек . . . . .	73

Глава 5. <b>Специальные задачи динамики</b> . . . . .	75
§ 19. Задача двух тел . . . . .	75
§ 20. Динамика твердого тела с одной неподвижной точкой. . . . .	79
§ 21. Реактивное движение . . . . .	91
§ 22. Теория удара . . . . .	93
§ 23. Теория рассеяния частиц . . . . .	101

### Часть 3. Лагранжева механика

Глава 6. <b>Уравнения Лагранжа для голономных систем</b> . . . . .	104
§ 24. Основные определения. . . . .	104
§ 25. Вывод уравнений Лагранжа . . . . .	108
§ 26. Свойства уравнений Лагранжа . . . . .	112
§ 27. Понятие первого интеграла. . . . .	117
§ 28. Первые интегралы лагранжевых систем . . . . .	118
Глава 7. <b>Уравнения Рауса</b> . . . . .	122
§ 29. Преобразования Лежандра . . . . .	122
§ 30. Уравнения Рауса. . . . .	123
Глава 8. <b>Уравнения систем с дополнительными связями</b> . . . . .	126
§ 31. Классификация связей. . . . .	126
§ 32. Уравнения Лагранжа с множителями . . . . .	130
§ 33. Уравнения Аппеля . . . . .	131
§ 34. Уравнения Лагранжа для систем с неудерживающими связями. . . . .	135

### Часть 4. Колебания и устойчивость

Глава 9. <b>Равновесие и движение вблизи положения равновесия</b> . . . . .	148
§ 35. Определение устойчивости положения равновесия . . . . .	148
§ 36. Корректность понятия устойчивости . . . . .	150
§ 37. Общие теоремы об устойчивости линейных систем. . . . .	152
§ 38. Устойчивость линейных систем с постоянной матрицей. . . . .	154
§ 39. Устойчивость положений равновесия нелинейных систем. . . . .	160
Глава 10. <b>Малые колебания в окрестности положения равновесия</b> . . . . .	166
§ 40. Колебательная система с одной степенью свободы . . . . .	166
§ 41. Колебательные системы произвольного числа степеней свободы . . . . .	169
§ 42. Спектральные свойства линейных систем . . . . .	181
§ 43. Нелинейные системы. Метод нормальной формы Пуанкаре . . . . .	186
§ 44. Свойства колебаний нелинейных систем . . . . .	189

## Часть 5. Однопараметрические группы Ли

Глава 11. Элементы локальной теории . . . . .	196
§ 45. Понятие группы . . . . .	196
§ 46. Группа Ли. Примеры . . . . .	197
§ 47. Инфинитезимальный оператор группы. Алгебра Ли . . . . .	200
§ 48. Однопараметрические группы. Теорема единственности . . . . .	204
§ 49. Уравнение Лиувилля. Инварианты. Собственные функции . . . . .	207
§ 50. Линейные уравнения с частными производными . . . . .	211
§ 51. Канонические координаты группы . . . . .	213
§ 52. Формула Хаусдорфа. Группы симметрий . . . . .	215
§ 53. Принцип суперпозиции решений в нелинейных системах дифференциальных уравнений . . . . .	224
§ 54. Теория продолжения . . . . .	226
§ 55. Уравнения, допускающие заданную группу . . . . .	231
§ 56. Симметрии уравнений в частных производных . . . . .	235
§ 57. Примеры интегрирования задач механики на основе вычисления симметрий . . . . .	238
§ 58. Уравнения Пуанкаре . . . . .	245
Глава 12. Группы симметрий уравнений классической механики . . . . .	248
§ 59. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы . . . . .	248
§ 60. Второй закон Ньютона. Группа Галилея . . . . .	251
Глава 13. Релятивистская механика . . . . .	254
§ 61. Постулаты релятивистской механики . . . . .	254
§ 62. Группа симметрий уравнений Максвелла . . . . .	255
§ 63. Оператор второго продолжения. Дважды продолженная группа Лоренца . . . . .	256
§ 64. Инварианты группы . . . . .	258
§ 65. Релятивистские уравнения динамики точки . . . . .	260
§ 66. О неинерциальных системах отсчета . . . . .	261

## Часть 6. Гамильтонова механика

Глава 14. Системы Гамильтона и их свойства . . . . .	263
§ 67. Уравнения Гамильтона . . . . .	263
§ 68. Связь законов сохранения со свойствами симметрии гамильтоновых систем . . . . .	265
§ 69. Инварианты гамильтоновых систем . . . . .	268
§ 70. Канонические преобразования . . . . .	275

§ 71. Уравнение Гамильтона–Якоби . . . . .	282
§ 72. Теорема Лиувилля об интегрируемых системах . . . . .	284
§ 73. Переменные «действие–угол» . . . . .	286
§ 74. Метод Пуанкаре–Цейделя . . . . .	287
§ 75. Метод Биркгофа нормализации гамильтонианов. . . . .	290
Приложение . . . . .	298
Предметный указатель . . . . .	303

# Введение

## § 1. Проблема аксиоматизации классической механики

Классическая механика представляет собой аксиоматическую систему. Понятие аксиоматической системы является общематематическим и состоит в следующем. Построение теории должно начинаться с введения основных для дальнейшего неопределяемых категорий, которые мы обозначим условно буквами  $A, B, C, \dots$ . Обычно эти категории имеют названия, например точка, сила и т. д. Однако на этой стадии роль названий минимальна. Индивидуальные свойства у обозначаемых ими объектов появляются не тогда, когда они вводятся, а тогда, когда они связываются друг с другом какими-то соотношениями, называемыми аксиомами. Дополнив введенную систему категорий и аксиом правилами логического вывода, мы можем как угодно глубоко развивать на этой основе теорию, не прибегая ни к каким ссылкам на какую-либо практику или очевидность. Построенная таким образом теория может показаться плодом чистого разума, никакой связи с природой не имеющей. Однако, если в этой природе, или какой-либо другой науке, или области человеческой деятельности, найдутся объекты, которые, будучи поставленными в соответствие с введенными  $A, B, C, \dots$ , окажутся в тех же отношениях, что и предписываемые аксиомами, то все выводы построенной теории будут верны и для этих объектов независимо ни от каких других их свойств. Установление соответствия между категориями аксиоматической системы и подобными объектами носит название *реализации* аксиоматической системы.

Однако прежде чем подобную теорию строить, необходимо убедиться в «доброкачественности» фундамента, т. е. выбранной аксиоматической основы.

В связи с этим рассматриваются три основные проблемы аксиоматики: 1) проблема непротиворечивости, 2) проблема минимальности, 3) проблема полноты.

Непротиворечивость системы аксиом означает, что на ее основе нельзя вывести посредством правильных рассуждений утверждение и отрицание одного и того же факта.

Решить проблему минимальности — значит доказать, что каждое положение системы аксиом не зависит от остальных положений, т. е. не может быть получено из них логическим путем.

Наконец, полнота системы аксиом означает возможность доказать истинность (или ложность) любого осмысленного утверждения, содержащего рассматриваемые объекты.

Требование построения физико-математических дисциплин на аксиоматической основе было выдвинуто Гильбертом в конце прошлого века (шестая проблема Гильберта) и рассматривалось им как необходимое условие достижения абсолютной строгости. Впервые основные аксиомы механики в систематическом виде были сформулированы в 1687 году Ньютоном. Их исследование с целью решения трех вышеперечисленных проблем было предпринято только в прошлом веке. Это потребовало изменить форму представления аксиом механики для того, чтобы максимально приспособить ее к применению методов математической логики. В настоящее время имеется несколько форм представления аксиом механики. Есть аксиоматические системы, основанные на рассмотрении дискретных совокупностей материальных точек. Есть системы, в которых уже в аксиоматике отражена идея континуума. Некоторые системы были созданы под влиянием идей Маха, который утверждал, что в науку нельзя вводить понятие, не допускающее конструктивной проверки на практике. Поэтому все понятия такой метааксиоматической системы строятся так, чтобы ими можно было воспользоваться для выполнения конкретных измерений. В системах этого типа неперменным является требование соответствия между первоначальными понятиями на формальном, аксиоматическом уровне и наблюдаемыми величинами на эмпирическом уровне.

Наконец, известна аксиоматизация в чисто гильбертовском духе, когда первичные категории просто перечисляются и их содержание определяется лишь вводимыми аксиомами. Заметим, что изложение любой формальной аксиоматизации классической механики в курсе механики неуместно, поскольку составляет фактически главу математической логики, а не собственно механики.

Точно так же аксиоматизация арифметики не является предметом самой арифметики. По этому поводу уместно процитировать А. Пуанкаре <sup>1)</sup>, который, анализируя проблему аксиоматизации арифметики в главе «Математика и логика», пишет: «...Бурали-Форти определяет число 1 следующим образом:

$$1 = iT' \{ K \circ \neg (u, h) \varepsilon (u \in Un) \}.$$

Это определение в высшей степени подходит для того, чтобы дать представление о числе 1 тем лицам, которые никогда о нем ничего не слышали!».

Так и в механике, имеет смысл предполагать наличие у читателей достаточной физической интуиции, чтобы не перегружать изложение основ избыточным формализмом.

**Аксиомы классической механики.** 1. Первая группа аксиом целиком заимствована из геометрии и определяет понятие евклидова

---

<sup>1)</sup> Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1983.



пространства  $E^3$  и геометрических объектов в нем (точки, прямые, плоскости).

2. Объекты в  $E^3$  полагаются зависящими от скалярного параметра  $t$ , называемого *временем*. Сказанное означает, что в механике рассматривается отображение  $R^1 \rightarrow E^3$ , называемое *движением*.

3. Материальная точка — геометрическая точка, которой поставлен в соответствие скаляр, называемый массой:  $(\mathbf{r}, m)$ ,  $\mathbf{r}$  — вектор в евклидовом пространстве, отнесенном к какой-либо декартовой системе координат. Масса полагается постоянной, не зависящей ни от положения точки в пространстве, ни от времени.

4. Каждой паре материальных точек  $(\mathbf{r}_1, m_1)$  и  $(\mathbf{r}_2, m_2)$  может быть поставлена в соответствие пара векторов  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ , удовлетворяющих условию  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$  ( $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ).

При этом говорят, что *сила*  $\mathbf{F}$  приложена к материальной точке или что она действует на материальную точку. Материальные точки, которым поставлены в соответствие удовлетворяющие приведенному условию силы, называются взаимодействующими. Если рассматривается совокупность взаимодействующих материальных точек, то к одной материальной точке может быть приложено несколько сил. Их векторная сумма называется равнодействующей. (Эта аксиома одновременно с категорией «сила» вводит и третий закон Ньютона.)

5. В евклидовом пространстве можно найти такую декартову систему координат и такой способ параметризации  $t$ , что

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

(по традиции, идущей от Ньютона, производная по времени обозначается точкой над буквой:  $\dot{\mathbf{r}} \equiv d\mathbf{r}/dt$ ). Такие системы координат в  $E^3$  и такой параметр  $t$ , для которых справедливо написанное уравнение (второй закон Ньютона), называются *инерциальными системами отсчета*.

Такова аксиоматика классической механики.

Обратим внимание на двойственный характер всех основных категорий механики: с одной стороны, понятия «сила», «масса», «ускорение» суть абстрактные категории аксиоматической системы, для которых второй и третий законы Ньютона служат их определением, с другой стороны, эти понятия апеллируют к реальным объектам, с которыми имеет дело человеческая практика и на которых осуществляется реализация аксиоматической системы механики. «Сила» при этом представляет собой меру физического взаимодействия тел, измеряемую любыми физическими средствами; «материальная точка» — тело достаточно малых размеров. Реализацией понятия «евклидово пространство» является пространство неподвижных звезд, лучи света — реализации категории «прямая линия». Декартовы координатные трехгранники, с помощью которых можно задавать положение любых тел в пространстве, могут связываться с неподвижными звездами при помощи оптических приборов. Реализация категории «время» осуществляется

посредством сравнения наблюдаемых процессов с каким-либо одним, обычно содержащим повторяющиеся фазы, например обращение Земли вокруг Солнца.

Употребляющиеся в механике термины «однородность» и «изотропность» пространства и «однородность времени» лежат вне аксиоматической схемы, поскольку они там не нужны. Эти понятия относятся к сфере реализации и определяют свойства реального физического пространства и конкретных способов измерения времени. Пространство называется однородным и изотропным, если физические законы не зависят ни от места в пространстве, где протекают соответствующие явления, ни от направлений в нем. Однородность времени означает возможность выбора таких часов, по которым любая движущаяся материальная точка, на которую не действуют никакие силы, проходит одинаковые отрезки пути за одинаковые интервалы времени. Обратим внимание на то, что вне аксиоматической системы классической механики лежат и такие житейские словосочетания как «время течет», «время течет в точке». Время является аргументом функции и ничем больше. Иногда формулировке второго закона Ньютона предпосылают формулировку первого закона: «в евклидовом пространстве всегда можно найти такую декартову систему координат и такой способ параметризации  $t$ , что любая свободная от действия каких бы то ни было сил материальная точка ( $\mathbf{F} \equiv 0$ ) движется прямолинейно и равномерно или неподвижна». Такой способ введения аксиом механики содержит противоречие (см. § 59).

Завершая обсуждение проблемы аксиоматизации классической механики, заметим, что программу аксиоматизации физико-математических наук, сформулированную Гильбертом, как известно, в полной мере осуществить не удалось.

Геделем было показано, что любая достаточно мощная аксиоматическая система (классическая механика к таким системам относится) не может быть полной, т.е. она допускает истинное недоказуемое высказывание. Отсюда следовала и невозможность установить непротиворечивость системы средствами самой системы. Появилось, однако, понятие относительной непротиворечивости. Например, классическая механика непротиворечива, если непротиворечива арифметика. Для целей обоснования механики подобный аргумент представляется достаточно убедительным.

## **§ 2. Инвариантность и ковариантность уравнений механики**

Основные законы механики сформулированы Ньютоном в труде «Математические начала натуральной философии». Понятие инерци-

альной системы отсчета в этой работе отсутствует. Вместо него Ньютон говорит об «абсолютном пространстве» и об «абсолютном времени». Например, он пишет: «Абсолютное пространство по самой своей сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему остается всегда одинаковым и неподвижным». Такое определение ясностью не отличается, однако в конкретных ситуациях Ньютон в качестве «абсолютного пространства» рассматривает пространство неподвижных звезд. На то, что законы механики не изменяются при переходе от той системы отсчета, где они верны, к другой, движущейся относительно исходной равномерно и прямолинейно, впервые указал Галилей. Поэтому преобразования, осуществляющие переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, носят название преобразований Галилея. Математически эти преобразования могут быть выражены следующим образом  $\{t, x, y, z\} \rightarrow \{t', x', y', z'\}$ :

$$\begin{aligned}t' &= t + \tau, \\x' &= a + v_x t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\y' &= b + v_y t + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\z' &= c + v_z t + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.\end{aligned}$$

Здесь постоянные  $\tau, a, b, c$  характеризуют смещение начала отсчета времени и координат, постоянные  $v_x, v_y, v_z$  определяют равномерное, прямолинейное движение начала новой системы координат относительно старой, постоянные числа  $a_{ik}$  определяют матрицу поворота (см. § 6) осей новой системы координат относительно старой. Поскольку независимых коэффициентов в произвольной матрице поворота только три, то множество всех преобразований Галилея содержит 10 произвольных параметров и представляет собой 10-параметрическую группу Галилея (см. § 60).

На современном языке все сказанное выражается следующими словами: *законы классической механики инвариантны по отношению к группе Галилея*. Это утверждение носит название *принципа относительности Галилея*.

Термин «инвариантность» в механике и в физике существует наряду с термином «ковариантность». Оба эти термина отражают различные свойства уравнений движения и их не следует путать. Попробуем пояснить точный смысл обоих терминов. Рассмотрим в общем случае произвольную систему дифференциальных уравнений:

$$F_i \left( t, q, \dot{q}, \dots, \overset{(k)}{q} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Независимая переменная  $t$  — время, зависимая переменная  $q$  — вектор, содержащий  $n$  компонент. Старшая производная, входящая в систему,  $\overset{(k)}{q} \equiv d^k q / dt^k$ .

Пусть над зависимыми и независимыми переменными совершается преобразование  $(t, q) \rightarrow (t', q')$ :

$$t = t(t', q'), \quad q = q(t', q').$$

Выписанная система дифференциальных уравнений называется инвариантной по отношению к этому преобразованию переменных, если после подстановки замены в уравнения для новых переменных можно получить уравнения с теми же самыми функциями  $F_i$ :

$$F_i \left( t', q', \frac{dq'}{dt'}, \dots, \frac{d^k q'}{dt'^k} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

*Пример.* Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q - t}{q + t} \quad (q - \text{скалярная переменная}).$$

Осуществим преобразование переменных  $(t, q) \rightarrow (t', q')$ :

$$t = q' + t', \quad q = q' - t'.$$

Прямая подстановка этой замены в уравнение дает:

$$\left( \frac{dq'}{dt'} - 1 \right) / \left( \frac{dq'}{dt'} + 1 \right) = -\frac{t'}{q'}.$$

После разрешения этого соотношения относительно производной получаем

$$\frac{dq'}{dt'} = \frac{q' - t'}{q' + t'}.$$

Таким образом, в новых переменных дифференциальное уравнение имеет тот же вид, что и в старых переменных.

Преобразования, относительно которых дифференциальные уравнения инвариантны, называются *симметриями* этих уравнений (см. §52). Симметрии обладают тем очевидным свойством, что они переводят решения системы в решения той же системы. Пусть, например, мы нашли некоторое решение  $q = f(t)$  уравнения

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q - t}{q + t}.$$

Подставим это решение в замену:

$$q' - t' = f(t' + q').$$

Разрешим это уравнение относительно  $q'$ :

$$q' = g(t').$$

Тогда можно утверждать, что  $q = g(t)$  есть еще одно решение рассматриваемого уравнения.

В принципе относительности Галилея речь идет об инвариантности законов классической механики, а не об инвариантности тех конкретных дифференциальных уравнений, которые могут быть получены в силу этих законов в разных конкретных задачах. Инвариантность закона означает неизменность *правила* составления дифференциальных уравнений, но не самих уравнений. В частности, инвариантность второго закона Ньютона по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой означает, что в новой системе мы должны по-прежнему приравнять ускорение точки, умноженное на ее массу, той же самой силе, действующей на точку. При этом в новых переменных эта сила может иметь иное аналитическое выражение.

Инвариантность правила составления дифференциальных уравнений по отношению к переходу к новым переменным и называется *ковариантностью* самих дифференциальных уравнений:

ковариантность  
дифференциальных уравнений  $\equiv$  инвариантность закона,  
в силу которого они составлены.

В дальнейшем мы встретимся с ковариантностью дифференциальных уравнений, составленных в форме уравнений Лагранжа, по отношению к любым заменам обобщенных координат и с ковариантностью уравнений, составленных в форме Гамильтона по отношению к каноническим преобразованиям. И в этих случаях речь идет об инвариантности правила составления дифференциальных уравнений, а не об инвариантности самих составленных уравнений <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> В прекрасном учебнике В. И. Арнольда «Математические методы классической механики» дается ошибочное толкование принципа относительности Галилея, возникшее из-за смешения понятий «инвариантность» и «ковариантность».

# Часть 1

## КИНЕМАТИКА

### Глава 1

#### КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Задачей кинематики точки является определение таких понятий как *положение точки, скорость и ускорение точки*, а также установление связи между этими характеристиками при различных способах описания движения точки.

### § 3. Основные определения

*Положение* материальной точки считается известным, если задан радиус-вектор  $\mathbf{r}$  этой точки в некоторой заранее фиксированной декартовой системе координат. Движение материальной точки задается явной функцией времени  $\mathbf{r}(t)$ , что соответствует заданию трех скалярных функций времени  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  при рассмотрении радиуса-вектора в некотором базисе  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Кривая, описываемая движущейся точкой, называется *траекторией*. *Скоростью* точки называется вектор

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}.$$

Функции времени

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

являются проекциями вектора скорости на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Модуль скорости

$$v = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Ускорением точки называется вектор

$$\mathbf{w}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}.$$

Проекции ускорения на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  есть

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad w_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Модуль ускорения

$$w = |\mathbf{w}(t)| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}.$$

Если скорость точки как функция времени задана и требуется найти ее положение, то для этого необходимо решить три дифференциальных уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = v_x(t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(t), \quad \frac{dz}{dt} = v_z(t),$$

называемых *кинематическими* уравнениями движения точки, в отличие от уравнений Ньютона, называемых динамическими уравнениями.

Решение этих уравнений определяет закон движения точки

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t) dt, \quad y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(t) dt, \quad z(t) = z_0 + \int_0^t v_z(t) dt,$$

одновременно представляющий собой уравнения траектории, заданные в параметрической форме.

## § 4. Кинематика точки в естественной системе осей

Пусть закон движения точки задан:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Выберем на траектории произвольную точку, от которой будем отсчитывать пройденный рассматриваемой точкой по траектории путь  $s(t)$ . Рассматривая  $s$  в качестве нового параметра траектории, получим следующее выражение для скорости точки:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}[s(t)] = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\tau} \frac{ds}{dt}.$$

Из дифференциальной геометрии известно, что модуль вектора

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

равен единице, а сам вектор определяет направление касательной к траектории в рассматриваемой точке. Следовательно, модуль скорости определяется производной от пути:

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}.$$

Вычислим ускорение точки:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}.$$

Вектор  $d\boldsymbol{\tau}/ds$  называется вектором кривизны. Он связан с единичным вектором нормали к кривой  $\mathbf{n}$  следующим образом:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n},$$

где величина  $\rho$  называется радиусом кривизны траектории в рассматриваемой точке.

Таким образом, вектор ускорения  $\mathbf{w}$  оказался разложенным на два взаимно перпендикулярных единичных вектора  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{n}$  следующим образом (рис. 1):

$$\mathbf{w} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}.$$

Дополнив векторы  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{n}$  третьим ортогональным им единичным вектором  $\mathbf{b}$  таким образом, чтобы построенный базис из трех векторов оказался правым, мы и получим то, что называется естественным, или сопровождающим трехгранником траектории.

Проекция ускорения  $\mathbf{w}$  на ось  $\boldsymbol{\tau}$  называется тангенциальным, или касательным ускорением:

$$w_{\tau} = \frac{dv}{dt}.$$

Проекция ускорения на нормаль называется нормальным ускорением:

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Проекция на вектор  $\mathbf{b}$  (вектор бинормали) ускорение  $\mathbf{w}$  не имеет.

*Пример.* Точка движется по винтовой линии

$$x = h \cos t, \quad y = h \sin t, \quad z = lt.$$

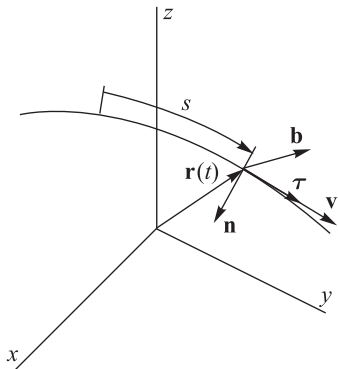


Рис. 1

Найти проекции ускорения на оси естественного трехгранника.



Решение. Путь, пройденный точкой,

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \sqrt{h^2 + l^2} t.$$

Перепишем уравнения траектории, выраженные через новую независимую переменную:

$$x = h \cos \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}}, \quad y = h \sin \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}}, \quad z = \frac{ls}{\sqrt{h^2 + l^2}}.$$

Вычисляем базисные векторы сопровождающего трехгранника:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \left\{ \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right\} = \\ &= \left\{ -\frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}}, \frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}}, \frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}} \right\}, \\ \mathbf{n} &= \rho \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = - \left\{ \cos \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}}, 0 \right\}, \quad \rho = \frac{h^2 + l^2}{h}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n} =$$

$$= \left\{ \frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}}, -\frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}}, \frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}} \right\}.$$

Проекции скорости на оси сопровождающего трехгранника:

$$v_{\boldsymbol{\tau}} = \sqrt{h^2 + l^2}, \quad v_{\mathbf{n}} = 0, \quad v_{\mathbf{b}} = 0.$$

Проекции ускорения на эти же оси:

$$w_{\boldsymbol{\tau}} = \frac{dv_{\boldsymbol{\tau}}}{dt} = 0, \quad w_{\mathbf{n}} = \frac{v_{\boldsymbol{\tau}}^2}{\rho} = h, \quad w_{\mathbf{b}} = 0.$$

## § 5. Кинематика точки в криволинейных координатах

Положение материальной точки  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$  можно задавать не только при помощи декартовых координат  $x, y, z$ , но и любых других переменных  $q_1, q_2, q_3$ , через которые декартовы координаты могут быть однозначно выражены:

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3).$$

Для того чтобы соответствие между тройкой новых переменных и тройкой декартовых координат было взаимно однозначным, требуется

невырожденность соответствующего отображения, а чтобы вычислять в дальнейшем скорость и ускорение, надо потребовать его дифференцируемость нужное число раз.

Если точка движется, т.е.  $\mathbf{r}(t)$ , то новые координаты являются функциями времени:

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t).$$

Наша задача состоит в том, чтобы выразить скорость точки  $\mathbf{v}(t)$  и ускорение  $\mathbf{w}(t)$  через производные по времени от новых координат и при этом представить эти векторы в проекциях на локальный базис, связанный с новыми координатами.

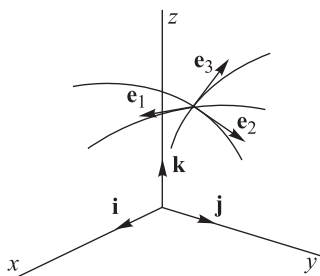


Рис. 2

Рассматривая в формуле замены переменных  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$  по очереди каждую из переменных  $q_k$  в качестве параметра при фиксированных оставшихся, получим три семейства кривых, называемых *координатными линиями*. Сами координаты  $q_k$  называются *криволинейными координатами*.

Рассмотрим касательные к координатным линиям в текущем положении наблюдаемой материальной точки (рис. 2). Векторы, определяющие направления этих касательных, выражаются

следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \mathbf{k} = H_1 \mathbf{e}_1, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} &= \frac{\partial x}{\partial q_2} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \mathbf{k} = H_2 \mathbf{e}_2, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} &= \frac{\partial x}{\partial q_3} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_3} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_3} \mathbf{k} = H_3 \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $H_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) представляют собой норму векторов  $\partial \mathbf{r} / \partial q_k$ , а векторы  $\mathbf{e}_k$  являются единичными векторами направлений, задаваемых векторами  $\partial \mathbf{r} / \partial q_k$ :

$$H_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)^2}.$$

Эти коэффициенты называются коэффициентами Ляме.

Криволинейные координаты называются *ортогональными*, если следующие скалярные произведения равны нулю:

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3) = 0.$$

Эти условия эквивалентны следующим:

$$\frac{\partial x}{\partial q_l} \frac{\partial x}{\partial q_m} + \frac{\partial y}{\partial q_l} \frac{\partial y}{\partial q_m} + \frac{\partial z}{\partial q_l} \frac{\partial z}{\partial q_m} = 0, \quad \text{если } l \neq m.$$

Дифференциал дуги произвольной кривой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

может быть выражен через дифференциалы криволинейных координат после подстановки сюда выражений

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3. \end{aligned}$$

Результат подстановки приводит к квадратичной форме

$$ds^2 = g_{lm} dq_l dq_m,$$

называемой *метрикой* пространства, выраженной в координатах  $q_k$  (по индексам  $l$  и  $m$  подразумевается суммирование  $l, m = 1, 2, 3$ ).

Если система криволинейных координат ортогональна, то метрика диагональна и имеет вид

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2.$$

Найдем скорость движущейся точки

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3 = H_1 \dot{q}_1 \mathbf{e}_1 + H_2 \dot{q}_2 \mathbf{e}_2 + H_3 \dot{q}_3 \mathbf{e}_3.$$

Скорость оказалась разложенной по единичным векторам  $\mathbf{e}_k$ :

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$$

с компонентами

$$v_k = H_k \dot{q}_k.$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{(H_1 \dot{q}_1 \mathbf{e}_1 + H_2 \dot{q}_2 \mathbf{e}_2 + H_3 \dot{q}_3 \mathbf{e}_3)^2}.$$

Если криволинейные координаты ортогональны, то это выражение принимает вид

$$v = \sqrt{H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Ускорение движущейся точки также может быть выражено через производные по времени от криволинейных координат и представлено в виде разложения по единичным векторам  $\mathbf{e}_k$ :

$$\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + w_3 \mathbf{e}_3.$$

Для того чтобы найти компоненты  $w_k$ , нужно исходить из равенства

$$\mathbf{w} = \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{k} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2},$$

в котором производные от декартовых координат следует выразить через производные от криволинейных координат:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial q_l \partial q_m} \dot{q}_l \dot{q}_m + \frac{\partial x}{\partial q_l} \ddot{q}_l, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial q_l \partial q_m} \dot{q}_l \dot{q}_m + \frac{\partial y}{\partial q_l} \ddot{q}_l, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial q_l \partial q_m} \dot{q}_l \dot{q}_m + \frac{\partial z}{\partial q_l} \ddot{q}_l \end{aligned}$$

(по  $l$  и  $m$  суммирование).

После этого надо выразить векторы исходного базиса  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  через векторы базиса  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  из системы линейных уравнений:

$$\frac{\partial x}{\partial q_k} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_k} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_k} \mathbf{k} = H_k \mathbf{e}_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Получающиеся таким образом компоненты ускорения  $w_k$  имеют достаточно громоздкий вид и далее нигде не используются. Более удобными оказываются ортогональные проекции вектора ускорения на единичные векторы  $\mathbf{e}_k$ :

$$w_{e_k} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Скалярные произведения здесь понимаются в обычном, евклидовом смысле.

Если базис  $\mathbf{e}_k$  ортогонален, то  $w_{e_k} = w_k$ . Вычислим указанные проекции  $w_{e_k}$  в общем случае. Используя выражения для  $\mathbf{e}_k$ , получим

$$H_k w_{e_k} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}.$$

Поскольку

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3,$$

то

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}.$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_k},$$

поэтому

$$H_k w_{e_k} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_k}.$$

Введем обозначение  $T = m\mathbf{v}^2/2$ . В дальнейшем (часть 2) для этой величины будет введено название кинетической энергии материальной точки. Используя это обозначение, для проекции вектора ускорения  $\mathbf{w}$  на направление, задаваемое вектором  $\mathbf{e}_k$ , получим

$$w_{e_k} = \frac{1}{mH_k} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right).$$

Одним из приложений полученного результата является запись второго закона Ньютона  $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$  в общековариантной форме. Действительно, проецируя это векторное равенство на три оси  $\mathbf{e}_k$ , получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = H_k F_{e_k} \quad (k = 1, 2, 3),$$

где  $T = mv^2/2$ .

Термин «общековариантны» означает, что эти уравнения не меняют своей формы при переходе к любым другим допустимым системам криволинейных координат. Допустимыми считаются такие координаты, в которых могут быть выполнены все потребные операции дифференцирования и которые не нарушают взаимно однозначного соответствия между точками некоторых открытых областей в пространствах  $\{x, y, z\}$  и  $\{q_1, q_2, q_3\}$ .

*Пример.* Сферические координаты:

$$x = r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \cos \theta, \quad z = r \sin \theta.$$

Роль переменных  $q_1, q_2, q_3$  играют  $\varphi, \theta, r$ , изменяющиеся в пределах  $0 \leq \varphi < 2\pi, -\pi/2 < \theta \leq \pi/2, 0 < r < \infty$ . Коэффициенты Ляме:

$$H_1 = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2} = r \cos \theta,$$

$$H_2 = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2} = r,$$

$$H_3 = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2} = 1.$$

Локальный базис:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \{-\sin \varphi, \cos \varphi, 0\}, \\ \mathbf{e}_2 &= \{-\cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi \sin \theta, \cos \theta\}, \\ \mathbf{e}_3 &= \{\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta\}.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что базис ортогонален. Разложение скорости в локальном базисе:

$$v_1 = r\dot{\varphi} \cos \theta, \quad v_2 = r\dot{\theta}, \quad v_3 = \dot{r}.$$

Модуль скорости:

$$v = \sqrt{r^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2}.$$

Функция  $T$ :

$$\begin{aligned}T &= \frac{m}{2}(r^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2), \\ w_{e_1} &= 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \theta + r\ddot{\varphi} \cos \theta - 2r\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta, \\ w_{e_2} &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + r\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta, \\ w_{e_3} &= \ddot{r} - r(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}).\end{aligned}$$

## Глава 2

# КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Совокупность материальных точек, состоящая из более чем одной материальной точки, называется *твердым* телом (иногда абсолютно твердым телом), если расстояние между любыми двумя точками этой совокупности неизменно. *Вращением* твердого тела называется такое его движение, при котором по крайней мере одна точка тела все время неподвижна в выбранной системе отсчета.

Произвольное движение твердого тела в пространстве складывается из движения какой-нибудь одной точки этого тела и вращения тела вокруг этой точки. Кинематике точки была посвящена предыдущая глава. Настоящая глава посвящена кинематике вращательных движений твердого тела.

## § 6. Способы задания ориентации твердого тела

**1. Углы конечного вращения.** С любым твердым телом может быть жестко связан координатный трехгранник (триэдр), в котором все точки тела неподвижны. Начало этого координатного трехгранника удобно поместить в неподвижную точку. Ориентация твердого тела определяется как ориентация одного триэдра (жестко связанного с телом) относительно другого, принимаемого за неподвижный.

Исторически первый способ задания ориентации — углы Эйлера (рис. 3). Углы  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ , задающие ориентацию подвижного триэдра  $\xi\eta\zeta$  относительно неподвижного  $xuz$ , представляют собой углы плоских поворотов, на которые надо было бы мысленно повернуть неподвижный триэдр до совмещения его с подвижным. При этом первый поворот осуществлялся в плоскости  $xu$  на угол  $\psi$ , второй в плоскости  $uz$  на угол  $\theta$ , третий — снова в плоскости  $xu$  на угол  $\varphi$ . Заметим, что плоскость  $uz$  после первого мысленного поворота изменила свою ориентацию по отношению к неподвижному пространству. То же можно заметить и про плоскость  $xu$  в связи со вторым поворотом.

Угол  $\psi$  носит название угла прецессии, угол  $\theta$  — угол нутации, угол  $\varphi$  — угол собственного вращения. Важно иметь ввиду следующее

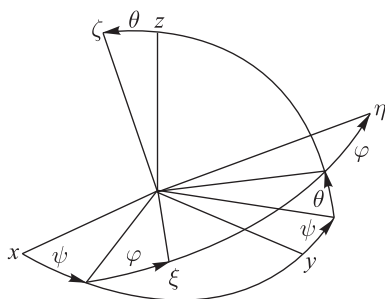


Рис. 3

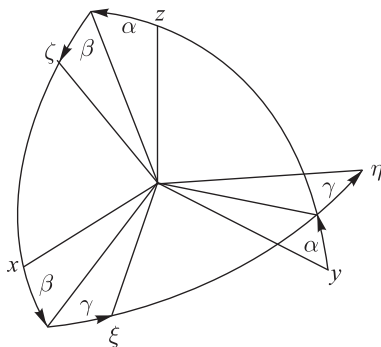


Рис. 4

обстоятельство. Три числа  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ , определяющие ориентацию твердого тела, не являются *наблюдаемыми*, как это имело место в случае декартовых координат материальной точки. Указанные повороты, наполняющие конкретным содержанием углы  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , представляют собой воображаемую конструкцию, которая может быть и иной. Например, одной из распространенных в настоящее время последовательностей поворотов является изображенная на рис. 4 (углы Крылова–Булгакова). Здесь углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  позволяют мысленно совместить неподвижную систему с подвижной, совершая первый поворот вокруг первой оси на угол  $\alpha$ , второй поворот вокруг второй оси на угол  $\beta$  и третий поворот вокруг третьей оси на угол  $\gamma$ . Символически эту последовательность можно изобразить так: 1–2–3. Можно представить себе и другие последовательности поворотов; например, последовательность 3–1–2 означает, что первый поворот выполнен вокруг третьей оси, второй — вокруг первой и последний поворот — вокруг второй оси.

Последовательность, образующая углы Эйлера, записывается так: 3–1–3. Совокупность возможных последовательностей называется *системой углов конечного вращения*. Все последовательности поворотов могут быть разбиты на четыре класса:

- I 1–2–3, 3–1–2, 2–3–1;
- II 1–3–2, 2–1–3, 3–2–1;
- III 1–2–1, 2–3–2, 3–1–3;
- IV 1–3–1, 3–2–3, 2–1–2.

В I и II классах повороты осуществляются вокруг всех трех осей, в III и IV классах одна из осей пропущена. Для удобства описания свойств выделенных классов в III и IV классах изменим обозначения последовательностей поворотов; на первом месте будет стоять номер оси, вокруг которой поворот осуществляется дважды, а на третьем месте — номер оси, вокруг которой вращения нет. Например, в случае углов Эйлера 3–1–3 обозначение этой последовательности принимает



вид 3–1–2. Так что последние два класса переписываются в виде

$$\begin{array}{l} \text{III} \quad 1-2-3, \quad 2-3-1, \quad 3-1-2; \\ \text{IV} \quad 1-3-2, \quad 3-2-1, \quad 2-1-3. \end{array}$$

В этих обозначениях в один класс попадают все последовательности поворотов, которые получаются одна из другой четной подстановкой (напомним, подстановка называется четной, если она состоит из четного числа инверсий двух соседних элементов). Переход от класса I к классу II, а также от класса III к классу IV осуществляется нечетной подстановкой.

Все последовательности поворотов, принадлежащие одному классу, являются эквивалентными между собой в том смысле, что при одних и тех же числовых значениях углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  положение тела, задаваемое одной последовательностью, отличается от положения тела, задаваемого другой последовательностью, поворотом тела вокруг биссектрисы координатного угла на угол  $\pm 120^\circ$ .

Таким образом, из двенадцати возможных последовательностей поворотов вокруг координатных осей существенно различными являются лишь четыре. Последовательности из I и II класса называются *углами конечного вращения первого рода*. Последовательности из III и IV — *углами конечного вращения второго рода*.

Нижеследующая теорема доказывает, что для определения положения твердого тела трех углов достаточно.

*Теорема.* Любое положение твердого тела может быть получено тремя последовательными плоскими поворотами из любого начального положения любым из указанных выше способов.

*Доказательство* проводится одинаково для любого из четырех классов. Для определенности остановимся на I классе (углы Крылова–Булгакова). Обратимся к рис. 5. Пусть триэдр  $\xi\eta\zeta$  произвольно ориентирован относительно триэдра  $xuz$ . В общем случае плоскость  $uz$  пересекается с плоскостью  $\xi\eta$  по прямой  $l$ . Если плоскости совпадают, то это означает частный случай, когда триэдр  $xuz$  удастся совместить с триэдром  $\xi\eta\zeta$  двумя или даже одним плоским поворотом. Если случай общий, то прямая  $l$  существует и поворотом триэдра  $xuz$  вокруг оси  $x$  ось  $u$  можно совместить с прямой  $l$ .

Поскольку на прямой  $l$  не определено направление, то минимальный угол этого поворота лежит в пределах  $0 \leq \alpha < \pi$ . В новом положении триэдра  $xuz$  его ось  $u$  перпендикулярна оси  $\zeta$  (поскольку прямая  $l$  перпендикулярна оси  $\zeta$ ). Значит, вторым поворотом триэдра  $xuz$  вокруг оси  $l$  (или  $u$ ) можно совместить ось  $z$  с осью  $\zeta$ . Поскольку необходимо обеспечить и совпадение направлений этих осей, то минимальный угол этого поворота лежит в пределах  $0 \leq \beta < 2\pi$ . После второго поворота плоскости  $xu$  и  $\xi\eta$  оказываются совпавшими, и для полного совмещения трехгранников достаточно повернуть триэдр  $xuz$  вокруг оси  $z$  на угол  $0 \leq \gamma < 2\pi$ . Теорема доказана.

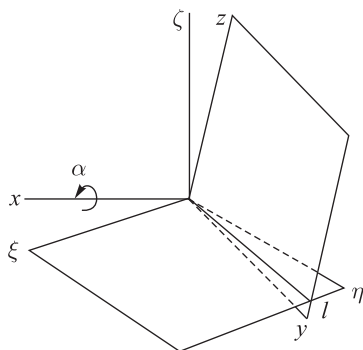


Рис. 5

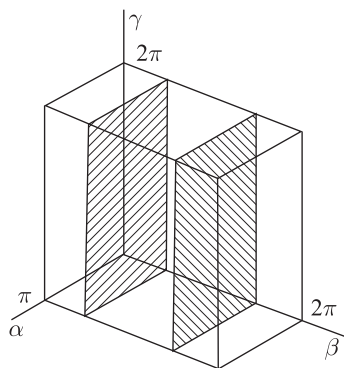


Рис. 6

На рис. 6 изображен параллелепипед, у которого противоположные грани отождествлены и каждой точке которого соответствует единственное положение твердого тела. При этом в силу доказанной теоремы оказываются исчерпанными *все* положения тела. Между тем взаимно однозначного соответствия между положениями тела и точками изображенного параллелепипеда нет.

Если угол  $\beta$  равен  $\pi/2$  или  $3\pi/2$ , то ось  $z$  после второго поворота занимает положение оси  $x$  и третий поворот складывается с первым поворотом, образуя единый плоский поворот  $\alpha + \gamma$ . Иными словами, множеству точек  $\alpha + \gamma = \text{const}$ ,  $\beta = \pi/2$  соответствует одно положение твердого тела. Если  $\beta = 3\pi/2$ , то этим свойством обладает множество  $\alpha - \gamma = \text{const}$ . Этот факт является общим для углов конечного вращения первого рода. Для углов второго рода плоскостями, в которых нарушается единственность представления положений твердого тела тремя углами, являются плоскости  $\beta = 0$  и  $\beta = \pi$ .

Это неудобство углов конечного вращения заставляет искать другие способы задания положений твердого тела, не имеющие указанных вырождений.

**2. Ортогональные матрицы.** Поворот твердого тела математически может быть задан как линейное отображение трехмерного евклидова пространства на себя, при котором расстояния между произвольными точками неизменны. Такие отображения называются *ортогональными*. Пусть вектор  $\mathbf{R}$  задан в триэдре  $x y z$  (нам удобно здесь его представлять как матрицу-столбец):

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Преобразованием поворота этот вектор отображается в вектор  $\mathbf{R}'$ :

$$\mathbf{R}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Само преобразование в триэдре  $xyz$  задается матрицей  $A$ :

$$\mathbf{R}' = A\mathbf{R},$$

имеющей вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Из определения поворота следует равенство скалярных квадратов векторов  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{R}'$ :

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}',$$

откуда вытекает

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = A\mathbf{R} \cdot A\mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot A^T A \mathbf{R},$$

$$A^T A - E = J,$$

$$J^T = -J \Rightarrow J = 0.$$

И, следовательно,  $A^T A = E$  — произведение транспонированной матрицы на саму эту матрицу равно единичной матрице. Это условие означает, что столбцы матрицы  $A$  представляют собой ортонормированную систему (сумма квадратов элементов столбца равна единице, а скалярное произведение различных столбцов друг на друга равно нулю). Такие матрицы называются *ортогональными*.

*Пример.* Рассмотрим преобразование поворота на угол  $\varphi$  вокруг оси  $x$ . Поскольку первая координата вектора  $\mathbf{R}$  при этом не изменяется, будем считать, что он целиком лежит в плоскости  $yz$  (рис. 7).

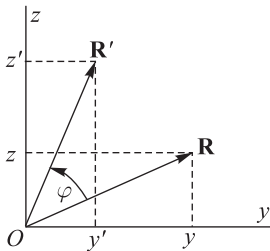


Рис. 7

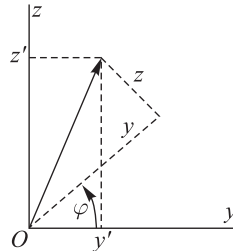


Рис. 8

Для установления связи координат преобразованного вектора  $y', z'$  с координатами исходного вектора  $y, z$  повернем треугольник  $Oy\mathbf{R}$  на угол  $\varphi$  так, чтобы  $\mathbf{R}$  совместилось с  $\mathbf{R}'$  (рис. 8). Из полученного рисунка непосредственно видно, что  $y' = y \cos \varphi - z \sin \varphi$ ,

$z' = y \sin \varphi + z \cos \varphi$ . Если вектор  $\mathbf{R}$  не лежит в плоскости поворота, то к этим двум соотношениям следует добавить  $x' = x$ , и матрица поворота вокруг оси  $x$  принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Аналогично можно установить, что матрицы поворотов вокруг осей  $y$  и  $z$  соответственно имеют вид

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь учтено, что в плоскости  $zx$  положительным является поворот от оси  $z$  к оси  $x$ .

Отметим важнейшие свойства ортогональных матриц.

*Свойство 1.* Из равенства  $\det(A^T A) = 1$  вытекает  $\det A = \pm 1$ .

*Свойство 2.* Из алгебры известно, что если  $\det A \neq 0$ , то существует и единственная матрица  $A^{-1}$ , удовлетворяющая свойству  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ . Это означает, что в случае ортогональных матриц  $A^T = A^{-1}$  и  $AA^T = E$ , т. е. не только столбцы представляют собой ортонормированную систему, но и строки тоже.

*Свойство 3.* Произведение двух ортогональных матриц есть ортогональная матрица. Действительно, пусть  $A$  и  $B$  — ортогональные матрицы, и рассмотрим  $C = AB$ . Тогда  $C^T = (AB)^T = B^T A^T$ . Что влечет  $C^T C = B^T A^T AB = E$ .

*Свойство 4.* Поскольку операция произведения матриц является ассоциативной, то из предыдущих двух свойств вытекает, что множество всех ортогональных матриц образует группу. (Напомним, в алгебре группой называется любое множество элементов, в котором есть единица и для каждого элемента существует обратный в силу единственной ассоциативной операции. См. гл. 11.) Эта группа имеет стандартное обозначение  $O(3)$ . Множество ортогональных матриц с положительным детерминантом образует подгруппу. Ее обозначают  $SO(3)$ . Читается это обозначение так: специальная ортогональная группа преобразований трехмерного пространства в себя.

*Свойство 5.* Между всеми ортогональными матрицами ( $\det A = 1$ ) и всеми поворотами твердого тела существует взаимно однозначное соответствие. Действительно, рассмотрим образ первого единичного вектора триедра  $x y z$ :

$$\mathbf{i}' = A\mathbf{i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},$$

т. е. образом первого орта является первый столбец матрицы  $A$ . Аналогично для остальных. Но это значит, что если задана ортогональная

матрица, то однозначно определяется положение нового триэдра. И обратно, если задано положение нового триэдра, то, выбирая его орты в качестве столбцов матрицы  $A$ , получаем однозначное определение этой матрицы. При этом номер столбца соответствует номеру орта, что влечет за собой  $\det A = 1$ .

Итак, группа  $SO(3)$  является основной математической моделью множества всех поворотов твердого тела. Она представляет собой *конфигурационное многообразие* твердого тела с одной неподвижной точкой.

*Свойство 6.* Элементы ортогональной матрицы равны их алгебраическим дополнениям. Действительно, используя правило вычисления обратной матрицы, имеем  $A^{-1} = \{A_{ij}\}^T / \det A$ . Рассмотрим лишь матрицы с  $\det A = 1$  и, учитывая, что  $A^T = A^{-1}$ , находим  $a_{ij} = A_{ij}$ .

*Свойство 7.* Определим действие ортогонального преобразования на комплексный вектор:

$$A(\mathbf{P} + i\mathbf{Q}) = A\mathbf{P} + iA\mathbf{Q},$$

где  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  — вещественные векторы.

Если определить норму комплексного вектора как

$$|\mathbf{P} + i\mathbf{Q}| = \sqrt{(\mathbf{P} + i\mathbf{Q})^*(\mathbf{P} + i\mathbf{Q})} = \sqrt{\mathbf{P}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}},$$

то свойство ортогональных преобразований сохранять норму вектора распространяется и на комплексные векторы. (Звездочкой обозначен эрмитово сопряженный вектор, получающийся из исходного транспонированием и заменой  $i$  на  $-i$ .)

*Свойство 8.* Собственные векторы и собственные числа ортогональных преобразований.

Собственные векторы удовлетворяют условию  $A\mathbf{R} = \lambda\mathbf{R}$ , где  $\lambda$  — числовой коэффициент. Поскольку ортогональное преобразование не изменяет длину вектора, то  $|\lambda| = 1$ . Собственные числа находятся из уравнения  $\det(A - \lambda E) = 0$ , которое, используя свойство 6, можно получить в виде  $\lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{tr} A - 1 = 0$ . Здесь след матрицы  $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ . Это уравнение имеет очевидный корень  $\lambda_1 = 1$ . Для двух других получаем

$$\lambda_{2,3} = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\operatorname{tr} A - 1)^2}{4} - 1}.$$

Поскольку модуль  $\lambda$  равен единице, то тригонометрическая форма этого выражения в общем виде такова:

$$\lambda_{2,3} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi.$$

Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}.$$

Для нахождения трех собственных векторов  $\mathbf{R}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), соответствующих трем собственным числам  $\lambda_k$ , следует решить три однородные системы  $\mathbf{A}\mathbf{R}_k = \lambda_k\mathbf{R}_k$ . Первое собственное число — вещественное, вещественным будет и первый собственный вектор

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

для нахождения которого имеем

$$\begin{aligned} (a_{11} - 1)x + a_{12}y + a_{13}z &= 0, \\ a_{21}x + (a_{22} - 1)y + a_{23}z &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33} - 1)z &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Добавление последнего уравнения вызвано желанием получить собственные векторы единичной нормы. Эта система имеет два решения, отличающиеся знаком:

$$x = \pm \frac{a_{32} - a_{23}}{2 \sin \varphi}, \quad y = \pm \frac{a_{13} - a_{31}}{2 \sin \varphi}, \quad z = \pm \frac{a_{21} - a_{12}}{2 \sin \varphi}.$$

Выбор знака определим условием: поворот вокруг координатной оси на положительный угол должен осуществляться против часовой стрелки, если смотреть на него со стороны положительного направления оси. Для матрицы поворота вокруг оси  $x$ , вычисленной в последнем примере, имеем

$$a_{32} = \sin \varphi, \quad a_{23} = -\sin \varphi, \quad a_{13} = a_{31} = a_{21} = a_{12} = 0.$$

Следовательно,  $x = \pm 1$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ . Таким образом, в полученном решении следует оставить знак плюс.

Собственные векторы для комплексно-сопряженных собственных чисел  $\lambda_{2,3} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$  являются тоже комплексно-сопряженными:  $\mathbf{R}_{2,3} = \mathbf{P} \mp i\mathbf{Q}$ . Покажем, что три вещественных вектора  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  представляют собой правую, ортогональную систему векторов.

Вначале вычислим произведение  $(\mathbf{A}\mathbf{R}_1)^\top \cdot \mathbf{R}_2$ . С одной стороны,

$$(\mathbf{A}\mathbf{R}_1)^\top \cdot \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1^\top \cdot \mathbf{R}_2.$$

С другой стороны,

$$(\mathbf{A}\mathbf{R}_1)^\top \cdot \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1^\top \cdot \mathbf{A}\mathbf{R}_2 = \lambda_3 \mathbf{R}_1^\top \cdot \mathbf{R}_2.$$

Использован тот факт, что  $\mathbf{R}_2$  есть собственный вектор матрицы  $\mathbf{A}^\top$  с собственным значением  $\lambda = 1/\lambda_2 = \lambda_3$ .

Сравнивая оба результата, видим, что если  $\lambda_3 \neq 0$ , то  $\mathbf{R}_1^\top \cdot \mathbf{R}_2 = 0$ , откуда следует, что  $\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{P} = 0$  и  $\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{Q} = 0$ . Поступая как в предыдущем случае, получим, с одной стороны,

$$(\mathbf{A}\mathbf{R}_2)^\top \cdot \mathbf{R}_2 = \lambda_2 \mathbf{R}_2^\top \cdot \mathbf{A}\mathbf{R}_2,$$

с другой стороны,

$$(A\mathbf{R}_2)^\top \cdot \mathbf{R}_2 = \lambda_3 \mathbf{R}_2^\top \cdot \mathbf{R}_2.$$

Сравнивая результаты, видим, что если  $\lambda_2 \neq \lambda_3$ , то  $\mathbf{R}_2^\top \cdot \mathbf{R}_2 = 0$  или  $\mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2 + 2i\mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{Q} = 0$ , откуда  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{Q}^2$  и  $\mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{Q} = 0$ .

Случай  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$  означает тождественное преобразование  $A = E$ , для него все векторы собственные, так что всегда найдутся взаимно ортогональные.

Осталось показать, что система  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  является правой. Для этого найдем собственные векторы для комплексных собственных значений для частного случая поворота вокруг оси  $x$ , рассмотренного в последнем примере. Система для нахождения  $\mathbf{R}_2$  имеет вид

$$A\mathbf{R}_2 = \lambda_2 \mathbf{R}_2,$$

или

$$\begin{aligned} (1 - \cos \varphi - i \sin \varphi)x &= 0, \\ -i \sin \varphi \cdot y - \sin \varphi \cdot z &= 0, \\ \sin \varphi \cdot y - i \sin \varphi \cdot z &= 0. \end{aligned}$$

Из нее следует:

$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = -i.$$

Так что собственный вектор  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{P} - i\mathbf{Q}$  имеет вид

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

является правой. Поскольку общий случай отличается от рассмотренного преобразованием с положительным детерминантом, то доказанное верно и в общем случае.

*Свойство 9.* Любое ортогональное преобразование пространства эквивалентно повороту пространства вокруг собственного вектора  $\mathbf{R}$  на угол  $\varphi$ .

Действительно, перепишем уравнение  $A\mathbf{R}_k = \lambda_k \mathbf{R}_k$  для каждого собственного вектора в вещественной форме:

$$\begin{aligned} A\mathbf{R} &= \mathbf{R}, \\ A\mathbf{P} &= \mathbf{P} \cos \varphi + \mathbf{Q} \sin \varphi, \\ A\mathbf{Q} &= -\mathbf{P} \sin \varphi + \mathbf{Q} \cos \varphi \end{aligned}$$

Если оси исходного триэдра  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  выбрать направленными по векторам  $\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ , то

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

и из полученных соотношений следует

$$(\mathbf{AR}, \mathbf{AP}, \mathbf{AQ}) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

т.е. в базисе  $\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$  ортогональная матрица имеет вид матрицы плоского поворота вокруг вектора  $\mathbf{R}$  на угол  $\varphi$ .

*Следствие* (Теорема Эйлера). Любое перемещение твердого тела с одной неподвижной точкой может быть заменено плоским поворотом вокруг некоторой оси на некоторый угол.

В свойстве 9 вычислено направление этой оси и соответствующий угол.

**3. Кватернионы.** Рассмотрим четырехмерное векторное пространство над полем вещественных чисел. Любой элемент этого пространства  $\Lambda$  в каком-либо базисе  $i_0, i_1, i_2, i_3$  имеет вид

$$\Lambda = \lambda_0 i_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3.$$

Вещественные числа  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  называются координатами вектора  $\Lambda$  в заданном базисе.

Векторное пространство превращается в *алгебру*, если в нем определено произведение двух векторов, ставящее им в соответствие третий вектор. Закон умножения должен быть ассоциативным:

$$(\Lambda \circ \mathcal{M}) \circ \mathcal{N} = \Lambda \circ (\mathcal{M} \circ \mathcal{N})$$

для любых трех векторов. Он должен быть дистрибутивным:

$$(\Lambda + \mathcal{M}) \circ (\mathcal{N} + \mathcal{R}) = \Lambda \circ \mathcal{N} + \mathcal{M} \circ \mathcal{N} + \Lambda \circ \mathcal{R} + \mathcal{M} \circ \mathcal{R}$$

для любых четырех векторов. Наконец, этот закон обязан удовлетворять условию

$$(\lambda \Lambda) \circ (\mu \mathcal{M}) = \lambda \mu \Lambda \circ \mathcal{M},$$

где  $\lambda, \mu$  — произвольные вещественные числа,  $\Lambda, \mathcal{M}$  — произвольные векторы. Заметим, что это определение алгебры годится для векторного пространства любой размерности. При этом размерностью алгебры называется размерность ее как векторного пространства. Также заметим, что коммутативность операции умножения не предполагается.

В силу этих требований для того чтобы знать произведение любых двух векторов, достаточно знать таблицу умножения векторов базиса. Четырехмерные векторы называются *кватернионами*, если умножение



их, удовлетворяющее сформулированным требованиям, задается следующей таблицей умножения ортов:

$$\begin{aligned} i_0 \circ i_k &= i_k \circ i_0 = i_k, & k &= 0, 1, 2, 3, \\ i_k \circ i_k &= -i_0, & k &= 1, 2, 3, \\ i_1 \circ i_2 &= i_3, & i_2 \circ i_3 &= i_1, & i_3 \circ i_1 &= i_2, \\ i_2 \circ i_1 &= -i_3, & i_3 \circ i_2 &= -i_1, & i_1 \circ i_3 &= -i_2. \end{aligned}$$

Введенная абстрактная алгебра кватернионов допускает различные интерпретации. Для того чтобы понять, чем абстрактное определение отличается от интерпретации, обратимся к примеру алгебры комплексных чисел. Эта алгебра построена на базе двумерного векторного пространства  $\Lambda = \lambda_0 i_0 + \lambda_1 i_1$  со следующей таблицей перемножения ортов:

$$i_0 \circ i_0 = i_0, \quad i_0 \circ i_1 = i_1 \circ i_0 = i_1, \quad i_1 \circ i_1 = -i_0.$$

Укажем три различные интерпретации комплексных чисел.

*Геометрическая интерпретация.* Каждый вектор  $\Lambda$  понимается как направленный отрезок прямой в геометрической плоскости.

*Матричная интерпретация.* Если под  $i_0$  понимать матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , а под  $i_1$  — матрицу  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , то векторное пространство матриц вида

$$\Lambda = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

с обычным правилом произведения матриц подчиняется введенным выше правилам умножения в абстрактной форме.

*Числовая интерпретация.* Если под  $i_0$  понимать вещественное число 1, а под  $i_1$  — мнимое число  $\sqrt{-1}$ , то векторное пространство чисел вида

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \sqrt{-1}$$

также подчиняется введенным правилам умножения.

Вернемся теперь к кватернионам. Важнейшей их интерпретацией является *геометро-числовая* интерпретация. В этой интерпретации орт  $i_0$  отождествляется с вещественной единицей, а орты  $i_1, i_2, i_3$  являются ортами некоторого базиса трехмерного евклидова пространства. Таким образом, любой кватернион может быть записан так:

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3 = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}, \quad \lambda_0 \in R^1, \quad \boldsymbol{\lambda} \in E^3.$$

Если при этом определить правила произведения трехмерных ортов как

$$\mathbf{i}_k \circ \mathbf{i}_k = -1, \quad \mathbf{i}_k \circ \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_l \quad (k \neq l),$$

то произведение любых кватернионов будет подчиняться введенным выше правилам в абстрактной форме (здесь  $\mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_l$  — обычное векторное произведение в трехмерном пространстве). В дальнейшем в этой

интерпретации мы будем часто использовать традиционные обозначения ортов:  $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{i}_2 = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{i}_3 = \mathbf{k}$ . Эта интерпретация позволяет выписать формулу произведения двух произвольных кватернионов:

$$\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathcal{M} = \mu_0 + \boldsymbol{\mu}, \quad \Lambda \circ \mathcal{M} = \lambda_0 \mu_0 - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} + \lambda_0 \boldsymbol{\mu} + \mu_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu}.$$

*Матричная интерпретация кватернионов* (спиновые матрицы Паули) будет изложена далее.

Для того чтобы векторное пространство превратить в алгебру, таблица умножения ортов может выбираться произвольно. Та конкретная таблица, которая предложена выше, обладает уникальным свойством: она и только она позволяет во введенной алгебре кватернионов построить деление, т. е. определить операцию, *обратную* введенной операции умножения.

Заметим, что в конечномерном пространстве *алгебру с делением* можно ввести только в трех случаях: алгебра вещественных чисел, алгебра комплексных чисел и алгебра кватернионов. При этом первые две коммутативны (теорема Фробениуса).

Введем понятие сопряженного кватерниона:

$$\bar{\Lambda} = \lambda_0 - \boldsymbol{\lambda}, \quad \bar{\Lambda} = \lambda_0 - \boldsymbol{\lambda}$$

и нормы кватерниона

$$\|\Lambda\| = \Lambda \circ \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda} \circ \Lambda = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

Перечислим основные свойства операции умножения.

*Свойство 1.* Введенное произведение некоммукативно:

$$\Lambda \circ \mathcal{M} \neq \mathcal{M} \circ \Lambda,$$

поскольку  $\mathbf{i}_k \circ \mathbf{i}_l \neq \mathbf{i}_l \circ \mathbf{i}_k$  ( $k \neq l$ ).

*Свойство 2.* Сопряженный кватернион от произведения двух и более кватернионов равен произведению сопряженных кватернионов в обратном порядке:

$$\overline{\Lambda \circ \mathcal{M}} = \bar{\mathcal{M}} \circ \bar{\Lambda}.$$

Действительно:

$$\begin{aligned} \overline{(\lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}) \circ (\mu_0 + \boldsymbol{\mu})} &= \lambda_0 \mu_0 - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} - \lambda_0 \boldsymbol{\mu} - \mu_0 \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu}, \\ \overline{(\mu_0 + \boldsymbol{\mu}) \circ (\lambda_0 + \boldsymbol{\lambda})} &= \lambda_0 \mu_0 - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} - \lambda_0 \boldsymbol{\mu} - \mu_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\lambda}. \end{aligned}$$

*Свойство 3.* Норма произведения равна произведению норм:

$$\|\Lambda \circ \mathcal{M}\| = (\Lambda \circ \mathcal{M}) \circ \overline{(\Lambda \circ \mathcal{M})} = \Lambda \circ \mathcal{M} \circ \bar{\mathcal{M}} \circ \bar{\Lambda} = \|\Lambda\| \|\mathcal{M}\|.$$

*Свойство 4.* Операция произведения кватернионов инвариантна по отношению к ортогональным преобразованиям векторной части кватернионов. Сказанное означает следующее. Пусть умножаются два кватерниона  $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$  и  $\mathcal{M} = \mu_0 + \boldsymbol{\mu}$  и в результате получается кватернион  $\mathcal{N} = n_0 + \mathbf{n}$ . Если перед тем как умножать, в векторной

части осуществить ортогональное преобразование:  $\lambda' = A\lambda$ ,  $\mu' = A\mu$  и после этого перемножить преобразованные таким образом кватернионы  $\Lambda' = \lambda_0 + \lambda'$ ,  $M' = \mu_0 + \mu'$ , то получится кватернион, равный  $N' = n_0 + An$ . То есть операции перемножения кватернионов и ортогонального преобразования векторной части можно переставлять местами.

Это свойство следует из того, что в формуле для произведения кватернионов скалярное произведение  $\lambda \cdot \mu$  не изменяется при ортогональных преобразованиях, а векторное произведение  $\lambda \times \mu$ , как известно, обладает свойством инвариантности.

*Свойство 5.* Для любого ненулевого ( $\|\Lambda\| \neq 0$ ) кватерниона существует обратный. Легко видеть, что этим свойством обладает кватернион

$$\Lambda^{-1} = \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|}.$$

Кватернионы, рассматриваемые в числовой интерпретации, носят также название *гиперкомплексных чисел*. Для гиперкомплексных чисел основная теорема алгебры неверна.

*Пример.* Решить уравнение  $x^2 + x + 1 = 0$ .

- а) В вещественных числах решений нет.  
б) В комплексных числах решений два:

$$x = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- в) Найдем все решения в гиперкомплексных числах  $x = x_0 + \mathbf{x}$ :

$$x^2 = (x_0 + \mathbf{x}) \circ (x_0 + \mathbf{x}) = x_0^2 - \mathbf{x}^2 + 2x_0\mathbf{x}.$$

Подставляя это соотношение в уравнение, получаем

$$x_0^2 - \mathbf{x}^2 + 2x_0\mathbf{x} + x_0 + \mathbf{x} + 1 = 0.$$

Кватернион равен нулю тогда и только тогда, когда равны нулю отдельно его скалярная и векторная части:

$$x_0^2 - \mathbf{x}^2 + x_0 + 1 = 0, \quad (2x_0 + 1)\mathbf{x} = 0.$$

Если  $\mathbf{x} = 0$ , то уравнение для  $x_0$  неразрешимо, если  $\mathbf{x} \neq 0$ , то  $x_0 = -1/2$  и из первого уравнения находим

$$\mathbf{x}^2 = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, решением предложенного уравнения является любой кватернион вида

$$x = -\frac{1}{2} + \mathbf{x},$$

где  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{3}/2$ .

Решений бесконечно много. Основная теорема алгебры о том, что решений в комплексных числах столько же, каков порядок уравнения, здесь не имеет места.

Использование кватернионов для задания положения твердого тела с одной неподвижной точкой основано на свойствах вводимого ниже *присоединенного отображения*:

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}' : \quad \mathcal{R}' = \text{Ad } \mathcal{R} \equiv \Lambda \circ \mathcal{R} \circ \bar{\Lambda}.$$

Это отображение алгебры кватернионов в себя ( $\mathcal{R}$  — произвольный кватернион) определяется фиксированным кватернионом  $\Lambda$ , имеющим единичную норму  $\|\Lambda\| = 1$ .

Присоединенное отображение обладает следующими свойствами.

*Свойство 1.* Отображение не меняет скалярной части кватерниона:

$$\Lambda \circ \mathcal{R} \circ \bar{\Lambda} = \Lambda \circ (r_0 + \mathbf{r}) \circ \bar{\Lambda} = \Lambda \circ r_0 \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \bar{\Lambda} = r_0 + \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \bar{\Lambda}.$$

Остается показать, что  $\Lambda \circ \mathbf{r} \circ \bar{\Lambda}$  не имеет скалярной части.

Действительно,

$$\overline{\Lambda \circ \mathbf{r} \circ \bar{\Lambda}} = \Lambda \circ \bar{\mathbf{r}} \circ \bar{\Lambda}.$$

Сопряженный кватернион равен исходному со знаком минус, если у него нет скалярной части.

*Свойство 2.* В силу свойства 1 присоединенное преобразование действует так, что векторная часть кватерниона подвергается линейному преобразованию:

$$\mathbf{r}' = A\mathbf{r}.$$

При этом  $A$  является ортогональной матрицей.

Действительно, рассмотрим норму

$$\|\mathcal{R}'\| = \|\Lambda \circ \mathcal{R} \circ \bar{\Lambda}\| = \|\Lambda\| \cdot \|\mathcal{R}\| \cdot \|\bar{\Lambda}\| = \|\mathcal{R}\|.$$

Следовательно,  $r_0'^2 + r_1'^2 + r_2'^2 + r_3'^2 = r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ . Поскольку  $r_0' = r_0$ , то  $\|\mathbf{r}'\| = \|\mathbf{r}\|$ .

Таким образом, ортогональные преобразования можно задавать наряду с ортогональными матрицами также и единичными кватернионами:  $\|\Lambda\| = 1$ . Запишем такой кватернион в форме

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda \mathbf{e},$$

где  $\lambda$  — модуль вектора  $\boldsymbol{\lambda}$ , а  $\mathbf{e}$  — единичный вектор его направления.

Из условия  $\|\Lambda\| = 1$  следует  $\lambda_0^2 + \lambda^2 = 1$ . Два скаляра, удовлетворяющие уравнению единичной окружности, всегда могут быть представлены в виде:  $\lambda_0 = \cos(\varphi/2)$ ,  $\lambda = \sin(\varphi/2)$ . Тогда  $\Lambda = \cos(\varphi/2) + \mathbf{e} \sin(\varphi/2)$  с условием  $|\mathbf{e}| = 1$  представляет собой общий вид кватерниона единичной нормы.

*Теорема.* Поворот, определяемый кватернионом  $\Lambda$  в  $E^3$ , есть поворот вокруг вектора  $\mathbf{e}$  на угол  $\varphi$  (рис. 9).

*Доказательство* состоит в непосредственном вычислении матрицы поворота  $A$  по заданному кватерниону  $\cos(\varphi/2) + \mathbf{e} \sin(\varphi/2)$ . В соот-

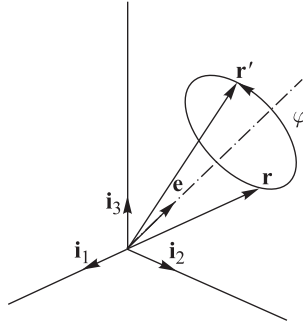


Рис. 9

ветствии со свойством 5 (см. п. 2) столбцы матрицы  $A$  представляют собой образы ортов исходного базиса. Вычислим эти образы. При этом исходный базис выберем так:  $\mathbf{i}_1 \equiv \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3 \perp \mathbf{e}$ . (Свободу в выборе базиса в  $E^3$  нам гарантирует свойство 4 операции умножения кватернионов.) Тогда

$$\mathbf{i}'_1 = \left( \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_1 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \circ \mathbf{i}_1 \circ \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \mathbf{i}_1 \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \mathbf{i}_1,$$

$$\mathbf{i}'_2 = \left( \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_1 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \circ \mathbf{i}_2 \circ \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \mathbf{i}_1 \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \mathbf{i}_2 \cos \varphi + \mathbf{i}_3 \sin \varphi,$$

$$\mathbf{i}'_3 = \left( \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_1 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \circ \mathbf{i}_3 \circ \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \mathbf{i}_1 \sin \frac{\varphi}{2} \right) = -\mathbf{i}_2 \sin \varphi + \mathbf{i}_3 \cos \varphi.$$

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, в записи единичного кватерниона  $\cos(\varphi/2) + \mathbf{e} \sin(\varphi/2)$ , определяющего присоединенное отображение,  $\mathbf{e}$  есть единичный вектор оси эйлера поворота  $E^3$  а  $\varphi$  — угол этого поворота. В покомпонентной записи в соответствии с ранее полученным этот кватернион имеет вид

$$\Lambda = \left\{ \cos \frac{\varphi}{2}, x \sin \frac{\varphi}{2}, y \sin \frac{\varphi}{2}, z \sin \frac{\varphi}{2} \right\}.$$

Коэффициенты этого кватерниона

$$\lambda_0 = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_1 = x \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_2 = y \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = z \sin \frac{\varphi}{2}$$

носят название *параметров Родрига–Гамильтона* конечного поворота.

**4. Спиповые матрицы Паули.** Спиповые матрицы Паули позволяют дать *матричную интерпретацию* алгебры кватернионов, в которой правила, определяющие перемножение ортов, представляются наиболее

естественным образом. Дадим для этих ортов следующую матричную интерпретацию:

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad i_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Здесь  $i = \sqrt{-1}$ . Можно проверить, что если под произведением понимать обычное матричное умножение, то введенная ранее таблица умножения ортов оказывается выполненной. Кроме того, выполненными оказываются и все остальные аксиомы алгебры кватернионов. Следовательно, любой кватернион может быть переписан так:

$$\Lambda = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Конкретные интерпретации обладают рядом свойств, лежащих вне исходных аксиом, которыми можно с успехом пользоваться. В данном случае матрицы можно сложить и записать кватернион так:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 + i\lambda_3 & -\lambda_2 + i\lambda_1 \\ \lambda_2 + i\lambda_1 & \lambda_0 - i\lambda_3 \end{pmatrix},$$

после чего перемножение подобных кватернионов осуществлять как обычное умножение матриц. Сопряженный кватернион имеет вид

$$\bar{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_0 - i\lambda_3 & \lambda_2 - i\lambda_1 \\ -\lambda_2 - i\lambda_1 & \lambda_0 + i\lambda_3 \end{pmatrix},$$

Видно, что сопряженный в ранее определенном смысле кватернион, рассматриваемый в матричной форме, представляет собой эрмитово-сопряженную матрицу (комплексно-сопряженную и транспонированную):

$$\bar{\Lambda} = \Lambda^*.$$

При этом норма кватерниона равна детерминанту соответствующей ему матрицы

$$\|\Lambda\| = \det \Lambda.$$

Так что кватернионы единичной нормы, служащие для определения положения твердого тела, описываются комплексными матрицами  $2 \times 2$ , удовлетворяющими двум условиям  $\Lambda\Lambda^* = E$ ,  $\det \Lambda = 1$ . Элементы таких матриц, являющиеся комплексными комбинациями компонент кватерниона, называются *параметрами Кейли–Клейна*:

$$a = \lambda_0 + i\lambda_3 \quad b = \lambda_2 + i\lambda_1.$$

В таких обозначениях матричная интерпретация кватерниона приобретает вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Некоторые представления о других свойствах параметров Кейли–Клейна дают

**5. Дробно-линейные преобразования.** Рассмотрим поворот твердого тела как преобразование единичной сферы в себя (рис. 10).

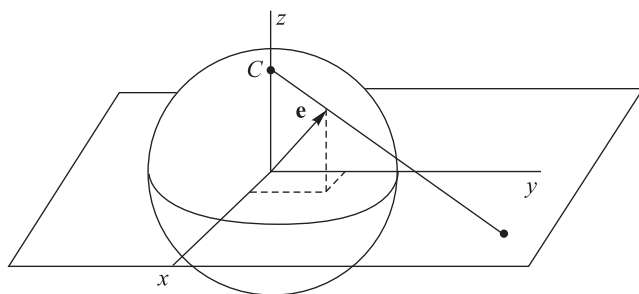


Рис. 10

Поворот осуществляется вокруг оси, задаваемой единичным вектором  $\mathbf{e}$ , на угол  $\varphi$ , т.е. описывается следующим кватернионом:  $\Lambda = \cos(\varphi/2) + \mathbf{e} \sin(\varphi/2)$ .

При стереографическом проектировании сферы на плоскость  $xy$  повороту сферы будет соответствовать некоторое преобразование плоскости. Выясним, какое именно. Покажем, что любая окружность на сфере при стереографическом проектировании переходит в окружность (при этом прямые считаются окружностями, которые проходят через бесконечно удаленную точку). Для этого рассмотрим в плоскости  $xy$  произвольную окружность и проведем через нее коническую поверхность с вершиной в полюсе  $C$ . Этот конус пересекает сферу по кривой, являющейся прообразом рассматриваемой окружности при стереографическом проектировании. Если окружность в плоскости  $xy$  проходит через бесконечно удаленную точку, т.е. является прямой, то конус превращается в плоскость и сечение сферы плоскостью есть всегда окружность.

В общем случае рассмотрим сечение сферы плоскостью, проходящей через ось конуса и перпендикулярной плоскости  $xy$ . Это сечение изображено на рис. 11. Точки  $L$  и  $M$ , лежащие в этом сечении, принадлежат и конусу, и сфере. Проведем через эти точки плоскость  $\Pi$  перпендикулярно плоскости сечения. Поскольку угол  $ABC$  равен половине угла, стягиваемого дугой  $CL$ , а угол  $CML$  опирается на эту дугу, то эти углы равны. Следовательно, плоскость  $\Pi$  ориентирована по отношению к конусу так же, как и плоскость  $xy$  (поворотом вокруг оси конуса на угол  $\pi$  плоскость  $\Pi$  переводится в положение, параллельное плоскости  $xy$ ). Следовательно, сечение конуса плоскостью  $\Pi$  — тоже окружность. Плоскость  $\Pi$  сечет сферу по окружности, поскольку точки  $L$  и  $M$  у этих окружностей общие, то они совпадают.





ного вращения (с обязательным указанием последовательности воображаемых поворотов), ортогональные матрицы, отображающие базис неподвижной системы координат в базис, жестко связанный с телом, и кватернионы, выполняющие ту же роль, что и матрицы, но с меньшим числом параметров.

Задание поворота параметрами Кейли–Клейна или дробно-линейными функциями по сути своей эквивалентны заданию его кватернионом, имеется лишь некоторое отличие в правилах оперирования этими параметрами.

Важнейшей задачей кинематики твердого тела является задача сложения двух или нескольких поворотов, т.е. задача вычисления по параметрам составляющих поворотов параметров результирующего поворота. Пусть, например, положение некоторого трехгранника  $x'y'z'$  определено углами Эйлера  $\psi_1, \theta_1, \varphi_1$  относительно неподвижного трехгранника  $xyz$ , а положение твердого тела, с которым жестко скреплена система  $\xi\eta\zeta$  определяется углами  $\psi_2, \theta_2, \varphi_2$  относительно трехгранника  $x'y'z'$ . Требуется найти углы  $\psi_3, \theta_3, \varphi_3$ , определяющие положение тела относительно исходной системы  $xyz$ . Эта задача в углах конечного вращения вообще и в углах Эйлера в частности имеет очень громоздкое решение. Между тем в матрицах или в кватернионах операция сложения поворотов есть основная операция соответствующей группы (группы  $SO(3)$ , или группы единичных кватернионов).

**1. Группа  $SO(3)$ .** Если после преобразования поворота  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}'$  с матрицей  $A$

$$\mathbf{R}' = A\mathbf{R}$$

осуществляется новое преобразование  $\mathbf{R}' \rightarrow \mathbf{R}''$  с матрицей  $B$

$$\mathbf{R}'' = B\mathbf{R}',$$

то результирующее преобразование  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}''$  очевидно получается так:

$$\mathbf{R}'' = B\mathbf{R}' = BA\mathbf{R}.$$

Матрица  $C = BA$ , равная произведению матриц составляющих поворотов в *обратном порядке*, и есть матрица, задающая суммарный поворот.

До сих пор мы смотрели на ортогональное преобразование как на оператор, отображающий пространство в себя. Система координат, в которой записывалась матрица этого преобразования, была неизменной. Это так называемая *активная точка зрения* на преобразование. Можно, однако, образы единичных векторов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , т.е.  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ , рассматривать как базис новой системы  $x'y'z'$ , а ортогональное преобразование — как преобразование координат. Сами векторы при этом считаются неизменными (пассивная точка зрения). Чтобы подчеркнуть, что рассматриваемый вектор  $\mathbf{R}$  неизменен (меняются только его координаты по отношению к новому базису) мы будем пользоваться

обозначением  $\mathbf{R}^{(i)}$ . Выясним, как подсчитываются координаты вектора  $\mathbf{R}$  в новом базисе. Образы ортов исходного базиса имеют вид

$$\mathbf{i}' = A\mathbf{i}, \quad \mathbf{j}' = A\mathbf{j}, \quad \mathbf{k}' = A\mathbf{k}.$$

Подставляя их обратное преобразование

$$\mathbf{i} = A^\top \mathbf{i}', \quad \mathbf{j} = A^\top \mathbf{j}', \quad \mathbf{k} = A^\top \mathbf{k}'$$

в разложение

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

находим

$$\mathbf{R} = xA^\top \mathbf{i}' + yA^\top \mathbf{j}' + zA^\top \mathbf{k}' = A^\top (x\mathbf{i}' + y\mathbf{j}' + z\mathbf{k}').$$

В новом базисе матричная форма записи самих ортов такова:

$$\mathbf{i}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

поэтому последнее соотношение можно переписать как

$$\mathbf{R}^{(i)} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{(i)} = A^\top \mathbf{R}.$$

Пусть теперь осуществляется переход к новому базису  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{i}'', \mathbf{j}'', \mathbf{k}''$  посредством ортогонального преобразования  $B$ :  $\mathbf{i}'' = B\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'' = B\mathbf{j}'$ ,  $\mathbf{k}'' = B\mathbf{k}'$ . Тогда, в соответствии с изложенным:  $\mathbf{R}^{(ii)} = B^\top \mathbf{R}^{(i)} = B^\top A^\top \mathbf{R} = C^\top \mathbf{R}$ , т.е. матрица полного преобразования координат есть

$$C = AB.$$

Это и есть формула сложения поворотов с позиций преобразования координат.

Подчеркнем принципиальные различия двух точек зрения при сложении поворотов.

*Активная точка зрения.* Матрицы последовательных поворотов перемножаются в *обратном порядке*. Все матрицы вычисляются в общем для всех базисе  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

*Пассивная точка зрения.* Матрицы последовательных поворотов перемножаются в *прямом порядке*. Каждая матрица рассматривается в поворачиваемом ею базисе ( $A$  в  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ,  $B$  в  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  и т.д.)

*Пример.* Тело повернули вокруг оси  $x$  на угол  $\pi/2$ , затем вокруг оси  $y$  на угол  $\pi/2$  (рис. 12). Найти матрицу результирующего поворота.

По смыслу постановки задачи здесь речь идет об активной точке зрения на преобразование. Матрица первого поворота

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

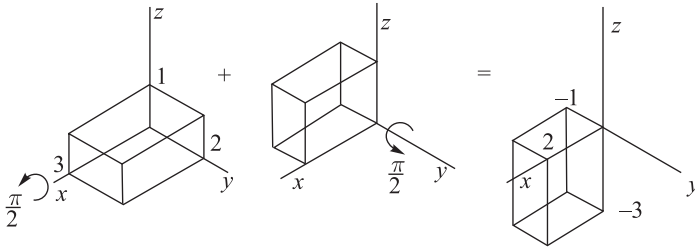


Рис. 12

Матрица второго поворота

$$B = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Матрица результирующего поворота

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Например, вектор диагонали параллелепипеда переходит в новое положение

$$\mathbf{R}' = C\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Этот же пример может быть решен и при помощи пассивной точки зрения на преобразование (рис. 13).

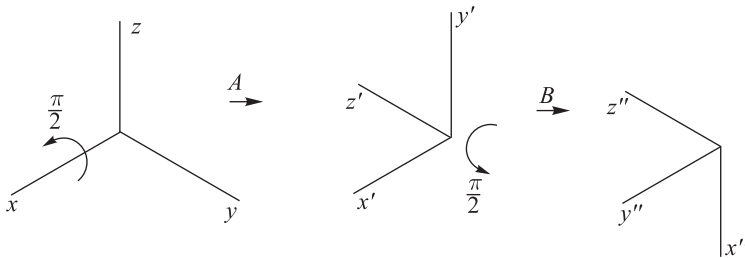


Рис. 13

Матрица первого поворота та же, что и в предыдущем случае. Матрица второго поворота  $B$  должна быть записана в новых осях:

$$B = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Матрица результирующего поворота

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В рассмотренном примере оба способа вычисления матрицы  $C$  оказываются эквивалентными по сложности. В разных задачах могут оказаться предпочтительными разные подходы.

*Пример.* Выразить матрицу конечного поворота через углы Эйлера. Напомним (см. § 6) последовательность поворотов в данном случае:

$$xyz \xrightarrow{\psi} x'y'z' \xrightarrow{\theta} x''y''z'' \xrightarrow{\varphi} \xi\eta\zeta,$$

при этом угол  $\psi$  есть угол поворота вокруг оси  $z$ , угол  $\theta$  — угол поворота трехгранника  $x'y'z'$  вокруг оси  $x'$ , угол  $\varphi$  — угол поворота трехгранника  $x''y''z''$  вокруг оси  $z''$  (см. рис. 3).

При решении этой задачи также можно воспользоваться как активным, так и пассивным представлением ортогонального преобразования. Однако в этом примере пассивное представление намного удобнее, поскольку матрицы составляющих поворотов здесь выглядят намного проще в промежуточных осях, чем в общей, исходной системе  $xyz$ .

Матрица первого поворота

$$\Psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица второго поворота

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Матрица последнего поворота

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Матрица результирующего поворота

$$A = \Psi\Theta\Phi = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi, \\
 A_{12} &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi, \\
 A_{13} &= \sin \theta \sin \psi, \\
 A_{21} &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi, \\
 A_{22} &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi, \\
 A_{23} &= -\sin \theta \cos \psi, \\
 A_{31} &= \sin \varphi \sin \theta, \\
 A_{32} &= \cos \varphi \sin \theta, \\
 A_{33} &= \cos \theta.
 \end{aligned}$$

**2. Кватернионное сложение поворотов.** Как и в случае матриц, сложению поворотов отвечает произведение кватернионов, при этом активная и пассивная точки зрения на преобразования имеют существенные отличия.

*Активная точка зрения.* Пусть первый поворот задан кватернионом  $\Lambda$ :

$$\mathbf{R}' = \Lambda \circ \mathbf{R} \circ \bar{\Lambda},$$

после чего выполнен второй поворот (кватернион  $\mathcal{M}$ )

$$\mathbf{R}'' = \mathcal{M} \circ \mathbf{R}' \circ \overline{\mathcal{M}}.$$

Следовательно, результирующий поворот

$$\mathbf{R}'' = \mathcal{M} \circ \Lambda \circ \mathbf{R} \circ \bar{\Lambda} \circ \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \circ \Lambda \circ \mathbf{R} \circ \overline{(\mathcal{M} \circ \Lambda)}$$

задается кватернионом  $\mathcal{N} = \mathcal{M} \circ \Lambda$ .

Как и в случае матриц, сложению поворотов в случае их активного представления отвечает произведение кватернионов составляющих поворотов в *обратном порядке*. При этом все кватернионы заданы в исходном базисе  $\mathbf{i}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

*Пассивная точка зрения.* Выясним вначале, как изменяется запись вектора при переходе к новому базису  $\mathbf{i}'_k = \Lambda \circ \mathbf{i}_k \circ \bar{\Lambda}$ .

Пусть в старом базисе имеем разложение вектора

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3.$$

При переходе к новому базису получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}^{(')} &= x\bar{\Lambda} \circ \mathbf{i}'_1 \circ \Lambda + y\bar{\Lambda} \circ \mathbf{i}'_2 \circ \Lambda + z\bar{\Lambda} \circ \mathbf{i}'_3 \circ \Lambda = \\
 &= \bar{\Lambda} \circ (x\mathbf{i}'_1 + y\mathbf{i}'_2 + z\mathbf{i}'_3) \circ \Lambda = x'\mathbf{i}'_1 + y'\mathbf{i}'_2 + z'\mathbf{i}'_3.
 \end{aligned}$$

Поскольку направляющие косинусы оси конечного поворота одинаковы как в исходных осях, так и в повернутых, то  $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2 + \lambda_3\mathbf{i}_3 = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i}'_1 + \lambda_2\mathbf{i}'_2 + \lambda_3\mathbf{i}'_3$  и в последнем равенстве можно считать все кватернионы заданными в осях  $\mathbf{i}'_k$ .

Пусть кватернион  $\mathcal{M}$  задает очередное преобразование базиса:  $\mathbf{i}_k'' = \mathcal{M} \circ \mathbf{i}_k' \circ \overline{\mathcal{M}}$ , тогда по аналогии с предыдущим имеем:

$$\mathbf{R}^{(n)} = \overline{\mathcal{M}} \circ (x'\mathbf{i}_1'' + y'\mathbf{i}_2'' + z'\mathbf{i}_3'') \circ \mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} \circ \overline{\Lambda} \circ (x\mathbf{i}_1'' + y\mathbf{i}_2'' + \mathbf{i}_3'') \circ \Lambda \circ \mathcal{M}.$$

Кватернион результирующего поворота получился таким:

$$\mathcal{N} = \Lambda \circ \mathcal{M},$$

т.е. он равен произведению кватернионов составляющих поворотов в прямом порядке. При этом в соответствии с изложенным компоненты кватернионов заданы в поворачиваемых ими базисах. Несмотря на то, что перемножаемые кватернионы заданы в разных базисах, их перемножение осуществляется при формальной записи их в одном базисе — последнем. Результат оказывается записанным в исходном базисе  $\mathbf{i}_k$ , поскольку

$$\mathcal{N} = n_0 + n_1\mathbf{i}_1'' + n_2\mathbf{i}_2'' + n_3\mathbf{i}_3'' = n_0 + n_1\mathbf{i}_1 + n_2\mathbf{i}_2 + n_3\mathbf{i}_3.$$

*Пример.* Рассмотрим пример из предыдущего пункта (см. рис. 12). Требуется найти угол и эйлерову ось результирующего поворота. Первый поворот задается кватернионом

$$\Lambda = \cos \frac{\pi}{4} + \mathbf{i}_1 \sin \frac{\pi}{4},$$

второй поворот — кватернионом

$$\mathcal{M} = \cos \frac{\pi}{4} + \mathbf{i}_2 \sin \frac{\pi}{4}.$$

Кватернион результирующего поворота есть

$$\mathcal{N} = \mathcal{M} \circ \Lambda = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \circ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3),$$

т.е. эквивалентный эйлеров поворот осуществляется вокруг вектора  $\mathbf{e} = (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3)$  на угол  $120^\circ$  (рис. 14).

Выполним это же вычисление, используя пассивную точку зрения. Кватернион первого поворота тот же:

$$\Lambda = \cos \frac{\pi}{4} + \mathbf{i}_1 \sin \frac{\pi}{4}.$$

Кватернион второго поворота, заданный в повернутых осях, имеет уже иной вид:

$$\mathcal{M} = \cos \frac{\pi}{4} - \mathbf{i}_3 \sin \frac{\pi}{4}.$$

Кватернион результирующего поворота

$$\begin{aligned}\mathcal{N} = \Lambda \circ \mathcal{M} &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}_1'' \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \circ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i}_3'' \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i}_1'' + \mathbf{i}_2'' - \mathbf{i}_3'') = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3).\end{aligned}$$

Сложение поворотов можно выполнять и в параметрах Кейли–Клейна. Сумме поворотов соответствует произведение соответствующих матриц или композиция соответствующих дробно-линейных преобразований. Все правила вычисления произведения аналогичны вышеизложенным.

*Пример.* Найти связь углов конечного вращения первого рода (см. рис. 4) с параметрами эквивалентного эйлерова поворота. Кватернионы последовательных поворотов в данном случае наиболее просто выглядят в пассивном представлении. В соответствии с вышеизложенным при вычислении произведения их в прямом порядке их формально следует записывать в исходном базисе:

$$A = \cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{i}_1 \sin \frac{\alpha}{2}, \quad B = \cos \frac{\beta}{2} + \mathbf{i}_2 \sin \frac{\beta}{2}, \quad C = \cos \frac{\gamma}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Результирующий поворот определяется кватернионом  $\Lambda$ :

$$\Lambda = A \circ B \circ C.$$

Запишем результат вычислений в покоординатной форме:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &\equiv \cos \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ \lambda_1 &\equiv x \sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ \lambda_2 &\equiv y \sin \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ \lambda_3 &\equiv z \sin \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Из первого соотношения находится угол эйлерова поворота  $\varphi$ , после чего из трех оставшихся находятся проекции единичного вектора оси эйлерова поворота  $x, y, z$ .

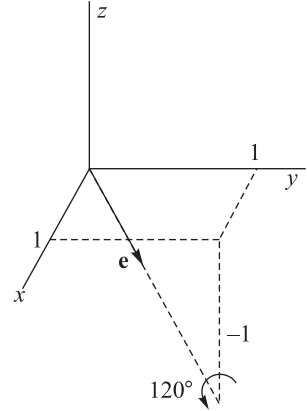


Рис. 14.

## § 8. Топология многообразия поворотов твердого тела

Рассмотрим множество положений твердого тела с одной неподвижной точкой, или, что одно и то же, множество всех ортогональных матриц с равным единице детерминантом. Введем здесь следующие обозначения для элементов ортогональной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что столбцы матрицы  $A$  представляют собой координаты образов единичных векторов при преобразовании с матрицей  $A$ . Если известны первые два вектора

$$\mathbf{i}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}' = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix},$$

то третий определяется однозначно условием ортогональности и условием  $\det A = 1$ . Поэтому все множество ортогональных матриц может быть представлено пересечением трех гиперповерхностей в шестимерном пространстве:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \\ x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1, \\ x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 = 0. \end{cases}$$

Это и есть геометрическое представление конфигурационного многообразия твердого тела с неподвижной точкой.

Важнейшая топологическая характеристика многообразия заключается в понятии односвязности многообразия. Многообразие называется *односвязным*, если всякий замкнутый контур на нем может быть непрерывно стянут в точку. Это условие очевидно выполняется для сферы в трехмерном пространстве и не выполняется для тора. Замкнутый контур на группе  $SO(3)$  соответствует непрерывному вращению твердого тела, которое заканчивается в начальном положении тела.

*Теорема.* Группа  $SO(3)$  неодносвязна. Все замкнутые кривые на ней разбиваются на два класса. первому классу принадлежат кривые, стягиваемые непрерывной деформацией в точку, второму классу принадлежат кривые, стягиваемые к кривой, соответствующей повороту тела на угол  $2\pi$  вокруг фиксированной оси.

Для доказательства теоремы удобно сделать следующее представление для конфигурационного многообразия твердого тела. Всякий поворот по теореме Эйлера может быть задан осью конечного поворота  $\mathbf{e}$  и углом правовинтового вращения вокруг нее  $\varphi$ . Образует в трехмерном пространстве вектор  $\varphi\mathbf{e}$ , где  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Между множеством положений тела и точками введенного шара взаимно однозначного



соответствия нет, поскольку поворот вокруг  $\mathbf{e}$  на угол  $\pi$  дает то же самое положение тела, что и поворот вокруг оси  $-\mathbf{e}$  на угол  $\pi$ . Однако если мы отождествим диаметрально противоположные точки поверхности этого шара, то получим множество, находящееся с поворотами во взаимно однозначном соответствии. Все замкнутые траектории в шаре могут быть разделены на два типа: внутренние траектории (рис. 15, а) и траектории с выходом на поверхность и последующим продолжением из диаметрально противоположной, тождественной точки (рис. 15, б).

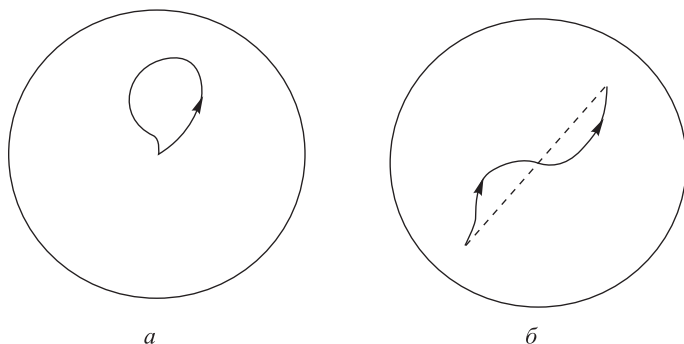


Рис. 15

Траектории первого типа непрерывно стягиваемы в начало координат. Траектории второго типа из-за наличия в них разрыва (само вращение при этом непрерывно) в начало координат стянуты быть не могут. Они могут быть непрерывно стянуты к диаметру шара, соответствующему повороту тела на угол  $2\pi$  вокруг этого диаметра. На рис. 15, б изображена траектория с одним выходом на поверхность. Общий случай делится на два подслучая: четное число выходов на поверхность и нечетное. Нетрудно понять, что при четном числе выходов на поверхность кривая непрерывно стягивается в начало координат, а при нечетном — к диаметру.

Рассмотрим в качестве примера два выхода на поверхность (рис. 16, а). Первый выход состоялся в точке 1 и из точки 1' продолжился до второго выхода в точке 2, после чего он продолжился из точки 2' и завершился в исходной точке. Очевидно, точку 2 можно непрерывно стянуть в точку 1' (при этом точка 2' непрерывно переходит в точку 1) (рис. 16, б). После чего замкнутая петля в 1', 2 непрерывно стягивается в точку 1', 2, а оставшаяся петля стягивается в ноль. Теорема доказана.

Представление поворотов при помощи кватернионов единичной нормы представляет собой многообразие, являющееся трехмерной сферой в четырехмерном пространстве:  $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ . Это многообразие является односвязным, но оно не находится во взаимно однозначном соответствии с группой  $SO(3)$ : два кватерниона  $\Lambda$  и  $-\Lambda$  задают одно

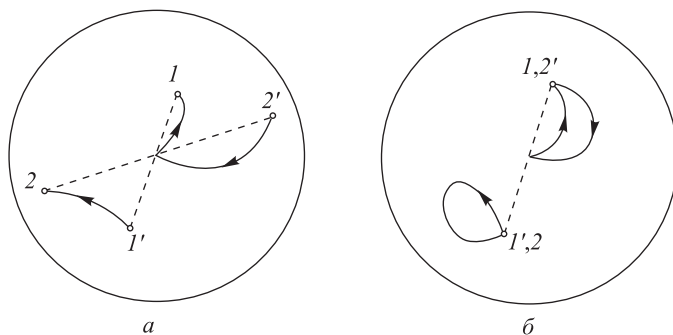


Рис. 16

и то же положение твердого тела. Группа единичных кватернионов называется в математике односвязной накрывающей группы вращений. Не входя в детали этого нового понятия, укажем, что накрывающая группа строится по заданной так: каждый ее элемент есть элемент исходной группы с указанием траектории, ведущей к этому элементу из некоторого, заранее фиксированного (обычно единица группы). Построение накрывающего многообразия называется разверткой исходной группы. Например, разверткой окружности (группа  $SO(2)$ ) является прямая  $R^1$ .

## § 9. Угловая скорость твердого тела

**1. Определение угловой скорости.** Пусть тело совершает непрерывное вращение вокруг неподвижной точки. Определим понятие мгновенной угловой скорости в мгновение времени  $t$  так. Положение тела в этот момент времени примем за начальное. Положение тела в близкий момент  $t + \Delta t$  по теореме Эйлера может быть получено из начального положения поворотом вокруг некоторой оси  $\varepsilon(t, \Delta t)$  на некоторый угол  $\Delta\varphi(t, \Delta t)$ . То есть это положение может быть описано введенным в § 8 вектором конечного поворота  $\Delta\varphi(t, \Delta t)\varepsilon(t, \Delta t)$ . Мгновенной угловой скоростью твердого тела называется предел

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi(t, \Delta t)}{\Delta t} \varepsilon(t, \Delta t),$$

если такой предел существует.

Угловую скорость тела удобно связать с производной от положения тела, задаваемого одним из приведенных в § 6 способов. Лучше всего соответствует введенному определению задание текущего положения

тела кватернионом

$$\Lambda(t) = \cos \frac{\varphi(t)}{2} + \mathbf{e}(t) \sin \frac{\varphi(t)}{2}.$$

В момент времени  $t + \Delta t$  тело находится в положении

$$\Lambda(t + \Delta t) = \cos \frac{\varphi(t + \Delta t)}{2} + \mathbf{e}(t + \Delta t) \sin \frac{\varphi(t + \Delta t)}{2}.$$

Кватернион малого поворота, переводящий тело из первого положения во второе:

$$\Delta\Lambda = \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + \varepsilon \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \simeq 1 + \varepsilon \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Закон сложения поворотов (активная точка зрения):

$$\Lambda(t + \Delta t) = \Delta\Lambda \circ \Lambda(t) = \left(1 + \varepsilon \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \circ \Lambda(t).$$

Отсюда получаем

$$\dot{\Lambda} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \circ \Lambda(t).$$

То есть угловая скорость выражается через производную от кватерниона так:

$$\boldsymbol{\omega} = 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}.$$

И вектор  $\boldsymbol{\omega}$ , и кватернион  $\Lambda$  определены здесь в неподвижных осях.

В случае пассивной точки зрения на поворот закон сложения поворотов дает

$$\Lambda(t + \Delta t) = \Lambda \circ \Delta\Lambda = \Lambda \circ \left(1 + \varepsilon \frac{\Delta\varphi}{2}\right).$$

Отсюда получаем

$$\boldsymbol{\omega} = 2\bar{\Lambda} \circ \dot{\Lambda}.$$

Здесь и вектор  $\boldsymbol{\omega}$ , и кватернион  $\Lambda$  определены в осях, связанных жестко с телом. Как ранее уже отмечалось, кватернион  $\Lambda$  имеет одинаковый вид в обоих случаях.

**2. Сложение угловых скоростей.** Постановка вопроса следующая. Относительно неподвижной системы координат  $xyz$  совершает произвольное вращение тело, представляемое жестко связанной с ним системой  $x'y'z'$ . Кватернион, определяющий положение триэдра  $x'y'z'$  относительно триэдра  $xyz$ , есть  $\Lambda(t)$ , а угловая скорость триэдра  $x'y'z'$  равна  $\boldsymbol{\omega}_1 = 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}$  (в осях  $xyz$ ). Относительно этого тела вращается некоторое другое тело, представляемое триэдром  $x''y''z''$ . Кватернион, определяющий положение триэдра  $x''y''z''$  относительно триэдра  $x'y'z'$ , есть  $M(t)$ , а угловая скорость вращения триэдра  $x''y''z''$  относительно триэдра  $x'y'z'$  есть  $\boldsymbol{\omega}_2 = 2M \circ \bar{M}$  (в осях  $x'y'z'$ ).

Ставится вопрос, чему равна угловая скорость триэдра  $x''y''z''$  относительно исходного триэдра  $xyz$ .

В соответствии с правилом сложения поворотов (пассивная точка зрения) имеем

$$\mathcal{N} = \Lambda \circ \mathcal{M},$$

а искомая угловая скорость есть

$$\omega = 2\dot{\mathcal{N}} \circ \overline{\mathcal{N}} = 2(\dot{\Lambda} \circ \mathcal{M} + \Lambda \circ \dot{\mathcal{M}}) \circ \overline{\mathcal{M}} \circ \overline{\Lambda} = 2\dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda} + 2\Lambda \circ \dot{\mathcal{M}} \circ \overline{\mathcal{M}} \circ \overline{\Lambda}.$$

Первое слагаемое есть  $\omega_1$  в проекциях на  $xyz$ , второе слагаемое есть  $\omega_2$  в проекциях на  $x'y'z'$ , перепроектируемое на оси  $xyz$ . Таким образом, для угловых скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , заданных в одних и тех же осях, имеем

$$\omega = \omega_1 + \omega_2.$$

**3. Формула Эйлера.** Формула Эйлера определяет закон распределения линейных скоростей точек твердого тела, совершающего вращение. Пусть некоторая точка тела  $\mathbf{r}'(t)$  является образом какой-то неподвижной точки  $\mathbf{r}$  в пространстве  $xyz$ :

$$\mathbf{r}'(t) = \Lambda(t) \circ \mathbf{r} \circ \overline{\Lambda}(t).$$

Скорость этой точки есть

$$\dot{\mathbf{r}}'(t) = \dot{\Lambda}(t) \circ \mathbf{r} \circ \overline{\Lambda}(t) + \Lambda(t) \circ \mathbf{r} \circ \dot{\overline{\Lambda}}(t).$$

Чтобы выразить эту скорость через положение самой точки, подставим в эту формулу равенство  $\mathbf{r} = \overline{\Lambda} \circ \mathbf{r}' \circ \Lambda$ :

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda} \circ \mathbf{r}' + \mathbf{r}' \circ \Lambda \circ \dot{\overline{\Lambda}} = \frac{1}{2}(\omega \circ \mathbf{r}' + \mathbf{r}' \circ \overline{\omega}) = \omega \times \mathbf{r}'.$$

Формула распределения скоростей

$$\dot{\mathbf{r}}' = \omega \times \mathbf{r}'$$

и называется формулой Эйлера. В силу инвариантной формы ее записи она верна не только в системе  $xyz$ , как это следует по выводу, но и в любой другой системе. Формулу Эйлера можно представить в матричной форме

$$\dot{\mathbf{r}}' = \Omega \mathbf{r}',$$

где  $\Omega$  называется матрицей угловой скорости, определяющей оператор векторного произведения. Эта матрица является кососимметрической и обычно ее рассматривают в двух вариантах:

в проекциях на неподвижные оси  $xyz$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix},$$

в проекциях на связанные с телом оси  $\xi\eta\zeta$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix},$$

где  $p, q, r$  — традиционные (следуя Эйлеру) обозначения для этих проекций.

**4. Кинематические уравнения Эйлера.** Эти уравнения определяют связь между проекциями угловой скорости тела на оси, с ним жестко связанные, и производными от углов Эйлера. Связь легко установить, представив произвольное вращение как составленное из трех плоских вращений, воспользовавшись установленным выше законом сложения скоростей (рис. 17)

$$xyz \xrightarrow{\psi} x'y'z' \xrightarrow{\theta} x''y''z'' \xrightarrow{\varphi} \xi\eta\zeta.$$

Скорости составляющих вращений имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} && \text{в осях } x'y'z', \\ \dot{\Theta} &= \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{в осях } x''y''z'', \\ \dot{\Phi} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} && \text{в осях } \xi\eta\zeta. \end{aligned}$$

Эти скорости надо сложить, предварительно спроектировав их на оси  $\xi\eta\zeta$ :

$$\begin{aligned} \omega &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \\ &\quad + \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}, \\ \omega &= \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \end{aligned}$$

Если нам задана угловая скорость тела  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $r(t)$  и необходимо найти его положение в углах Эйлера, то следует решить систему

дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta}, \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta.\end{aligned}$$

Перед нами система нелинейных уравнений с переменными коэффициентами, имеющая особенность в точке  $\theta = 0$ .

Более удобными уравнениями для решения задачи нахождения ориентации тела по его скорости являются

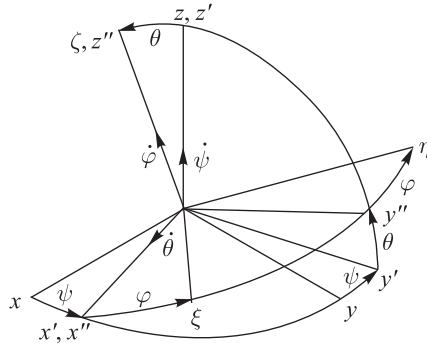


Рис. 17

**5. Уравнения Пуассона.** Пусть вращение тела описывается в основных переменных, определяющих положение тела с одной стороны неподвижной точкой, т. е. в элементах группы  $SO(3)$ :  $A(t)$ . Тогда положение любой точки тела в пространстве  $xyz$  есть

$$\mathbf{r}' = A(t)\mathbf{r},$$

а ее скорость

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{A}(t)\mathbf{r} = \dot{A}(t)A^\top(t)\mathbf{r}'.$$

Воспользовавшись формулой Эйлера в матричной форме, получим

$$\Omega \mathbf{r}' = \dot{A}(t)A^\top(t)\mathbf{r}',$$

откуда следует

$$\dot{A} = \Omega A.$$

Это и есть уравнения Пуассона в проекциях на оси  $xyz$ . Для записи его в проекциях на оси  $\xi\eta\zeta$  достаточно заметить, что

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} A^\top.$$

И в проекциях на собственные оси получаем

$$\dot{A} = A\Omega.$$

Эти уравнения обладают существенными преимуществами по сравнению с кинематическими уравнениями Эйлера — они линейны и не имеют особенностей. Их недостатком является более высокая размерность по сравнению с последними.

Линейные кинематические уравнения минимальной размерности можно получить в кватернионах. Как следует из п. 1 настоящего параграфа, эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} 2\dot{\Lambda} &= \omega \circ \Lambda \quad \text{в осях } xyz, \\ 2\dot{\Lambda} &= \Lambda \circ \omega \quad \text{в осях } \xi\eta\zeta. \end{aligned}$$

Основным свойством уравнений Пуассона является то, что в отличие от общего случая линейных систем, когда для построения общего решения необходимо знать столько линейно независимых частных решений, каков порядок системы, здесь для построения общего решения достаточно знать единственное частное. Покажем это.

Пусть известно какое-то частное решение  $A_r(t)$ . Будем искать общее решение в виде

$$A(t) = CA_r(t),$$

$C$  — некоторая постоянная ортогональная матрица. Общее решение будет найдено, если можно найти  $C$  так, чтобы удовлетворить любым наперед заданным начальным условиям  $A(0) = A_0$ :

$$A(0) = CA_r(0) = A_0 \Rightarrow C = A_0 A_r^\top(0).$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$A = A_0 A_r^\top(0) A_r(t).$$

Таким образом, оказывается, что все решения конгруэнтны друг другу, поскольку получаются одно из другого преобразованием поворота.

**6. Теорема о телесном угле** <sup>1)</sup>. Как следует от изложенного выше, кинематические уравнения твердого тела, записанные в любой форме, имеют существенно более сложную структуру, чем кинематические уравнения материальной точки

$$\dot{x} = v_x(t), \quad \dot{y} = v_y(t), \quad \dot{z} = v_z(t).$$

Если проекция скорости точки на какую-либо ось равна нулю (например,  $v_x(t) \equiv 0$ ), то и изменение соответствующей координаты (в данном случае  $x$ ) отсутствует.

---

<sup>1)</sup> Впервые доказана А. Ю. Ишлинским в 1952 г.

Не так дело обстоит с твердым телом. Если угловая скорость тела в проекции на какую-либо ось равна нулю, то тело вокруг этой оси неподвижным не остается.

Прежде чем сформулировать этот факт точно, заметим, что он связан с тем, что в отличие от материальной точки, конфигурационное многообразие которой есть трехмерное евклидово пространство, многообразие положений тела с одной неподвижной точкой евклидовым не является.

**Теорема.** Если некоторая ось  $\mathbf{l}$ , жестко связанная с телом, описала в процессе движения тела замкнутую коническую поверхность и при этом проекция угловой скорости тела на эту ось была равна нулю:  $\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv 0$ , то после возвращения оси  $\mathbf{l}$  в исходное положение тело оказывается повернутым вокруг нее на угол, равный телесному углу описанного конуса.

**Доказательство** удобно провести, воспользовавшись для задания подвижного триэдра  $\xi\eta\zeta$  «географическими» координатами (рис. 18).

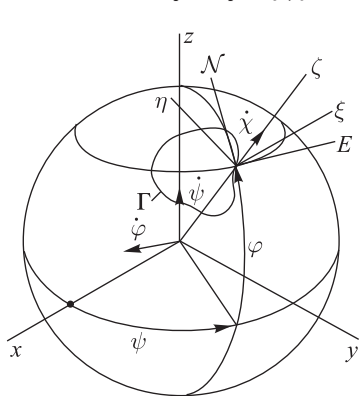


Рис. 18

Положение подвижного триэдра  $\xi\eta\zeta$  относительно неподвижного  $xyz$  задается тремя углами:  $\psi$  — долгота,  $\varphi$  — широта и  $\chi$  — азимут. Чтобы не загромождать рисунок, центр подвижного трехгранника смещен из центра неподвижного. Ось  $\mathbf{l}$ , о которой идет речь в теореме, совпадает с осью  $\zeta$  и описывает на поверхности единичной сферы замкнутую кривую  $\Gamma$ .

Выразим явно через введенные углы  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $\chi$  условие  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l} \equiv 0$ . Воспользуемся правилом сложения скоростей. Скорость  $\dot{\varphi}$  перпендикулярна плоскости меридиана и, следовательно, проекция на ось  $\zeta$  не имеет. Проекция скорости  $\dot{\varphi}$  на эту ось равна  $\dot{\varphi} \sin \varphi$ . Скорость  $\dot{\chi}$  проектируется в натуральную величину. Следовательно,

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l} \equiv r = \dot{\chi} + \dot{\varphi} \sin \varphi = 0.$$

Отсюда имеем

$$\chi = - \oint_{\Gamma} \sin \varphi d\psi.$$

Воспользовавшись теоремой Грина, получим

$$\chi = \iint_{\mathcal{S}} \cos \varphi d\varphi d\psi = \iint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} = \mathcal{S}$$



— площадь участка поверхности сферы внутри кривой  $\Gamma$ . По определению это и есть телесный угол конуса с образующей  $\Gamma$ . Теорема доказана.

Теорему нетрудно проиллюстрировать. На рис. 19, *a* изображено тело в начальном положении. Жестко связанная с телом ось  $\xi$  будет описывать замкнутую коническую поверхность. Полное движение, в котором ось  $\zeta$  возвращается в исходное положение, состоит из трех простых поворотов (рис. 19, *б-г*).

На каждом этапе выполнено  $\omega \perp \zeta$ . Кривая  $\Gamma$ , которую описала ось  $\zeta$  на единичной сфере, ограничивает собой восьмушку сферы. По доказанной теореме поворот вокруг оси  $\zeta$  должен быть равен  $\pi/2$ , что хорошо видно на рисунке. Доказанная теорема допускает небольшое обобщение. Если в условиях теоремы проекция абсолютной угловой скорости  $\omega$  на ось  $l$  является известной функцией времени:  $\omega \cdot l = \omega_l(t)$ , то уравнение для нахождения угла поворота тела имеет вид

$$\dot{\chi} + \dot{\psi} \sin \varphi = \omega_l(t).$$

Отсюда

$$\chi = - \oint_{\Gamma} \sin \varphi d\psi + \int_0^T \omega_l(t) dt,$$

где  $T$  — время обхода контура  $\Gamma$ . И, окончательно

$$\chi = S + \int_0^T \omega_l(t) dt.$$

Результат, аналогичный доказанному, имеет место и в том случае, если ось, в проекции на которую угловая скорость тела задана, является неподвижной не в теле, а в неподвижном пространстве.

*Теорема.* Если тело движется так, что некоторая неподвижная в пространстве ось (например,  $z$ ) описала в теле замкнутую коническую поверхность и проекция угловой скорости тела на эту ось задана:  $\omega_z = \omega_z(t)$ , то угол поворота тела вокруг этой оси равен

$$\int_0^T \omega_z(t) dt - S,$$

где  $S$  — телесный угол конуса, описанного неподвижной осью в теле, а  $T$  — время обхода конуса.

*Доказательство* легко получается, если принять неподвижным вращающееся тело и считать вращающимся вокруг него ранее неподвижное пространство. Тогда угловая скорость пространства относительно тела равна угловой скорости тела относительно пространства,

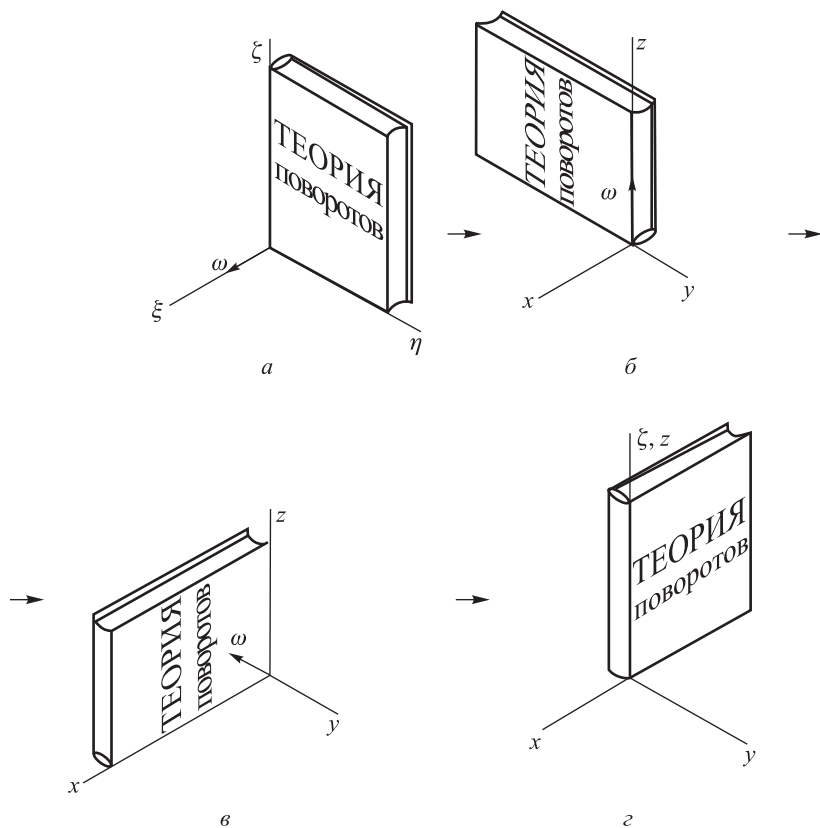


Рис. 19

взятой с обратным знаком:  $-\omega$ . Для определения положения пространства относительно тела справедлива доказанная выше теорема:

$$\chi = \mathcal{S} - \int_0^T \omega_z(t) dt,$$

а поскольку угол поворота пространства относительно тела равен углу поворота тела относительно пространства, взятому с обратным знаком, то это и завершает доказательство.

## Глава 3

# КИНЕМАТИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### § 10. Скорости и ускорения в неинерциальных системах отсчета

Рассмотренные выше раздельно кинематика точки и кинематика твердого тела сочетаются в настоящей главе, в которой мы задаемся вопросом: как подсчитать скорости и ускорения материальной точки относительно некоторой неподвижной системы отсчета  $xyz$ , если мы знаем, как движется точка в некоторой подвижной системе отсчета  $\xi\eta\zeta$ , причем движение  $\xi\eta\zeta$  относительно  $xyz$  тоже известно (рис. 20).

Мы будем полагать известными в проекциях на подвижные оси (система отсчета наблюдателя) следующие величины:

$\mathbf{v}_0(t)$  — скорость точки  $O$ ;

$\mathbf{w}_0(t)$  — ускорение точки  $O$ ;

$\boldsymbol{\omega}(t)$  — угловая скорость системы  $\xi\eta\zeta$  относительно системы  $xyz$ ;

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$  — положение точки в подвижной системе;

$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix}$  — скорость точки в подвижной системе;

$\mathbf{w}_{\text{отн}} = \ddot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix}$  — ускорение точки в подвижной системе.

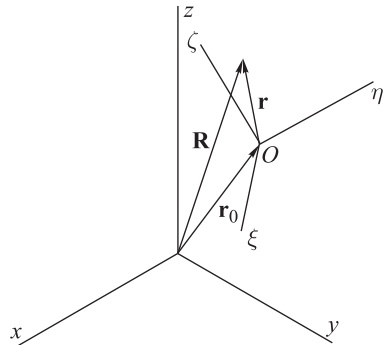


Рис. 20

Требуется найти в проекциях на подвижные оси полную скорость точки относительно системы  $xyz$  и полное ускорение этой точки относительно той же системы. Пусть  $A$  есть ортогональная матрица преобразования от системы  $x'y'z'$  к системе  $\xi\eta\zeta$  (система  $x'y'z'$  имеет общее начало с системой  $\xi\eta\zeta$ , а оси параллельны осям  $xyz$ ). Тогда связь между изображенными на рис. 20 векторами будет такой:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + A\mathbf{r}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Вычисляем полную производную:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \dot{A}\mathbf{r} + A\dot{\mathbf{r}}.$$

Перепроектируем это равенство на подвижные оси:

$$A^\top \frac{d\mathbf{R}}{dt} = A^\top \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + A^\top \dot{A}\mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}.$$

Введя обозначение для полной скорости в проекциях на подвижные оси

$$\mathbf{V} = A^\top \frac{d\mathbf{R}}{dt},$$

а также имея в виду, что

$$A^\top \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \mathbf{v}_0 \quad \text{и} \quad A^\top \dot{A}\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

получим искомое выражение для скоростей:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{отн}}.$$

Скорость  $\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_{\text{пер}}$  называется *переносной* скоростью. Она определяет скорость той точки системы  $\xi\eta\zeta$ , с которой в данный момент совпадает рассматриваемая точка.

Для вычисления ускорения вернемся в последнем соотношении к проекциям на неподвижные оси:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + A(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{отн}}).$$

Дифференцируя это соотношение, находим

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} + \dot{A}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{отн}}) + A(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}}_{\text{отн}}).$$

Перепроектируя на подвижные оси, получаем

$$A^\top \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = A^\top \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} + A^\top \dot{A}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{отн}}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}}_{\text{отн}},$$

или

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}} + \mathbf{w}_{\text{отн}}.$$

Мы получили, что полное ускорение может быть представлено в виде суммы трех частей. Первая часть называется *переносным* ускорением

$$\mathbf{W}_{\text{пер}} = \mathbf{W}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}.$$

Оно получается из полного ускорения в предположении, что рассматриваемая точка в системе  $\xi\eta\zeta$  неподвижна:  $\mathbf{v}_{\text{отн}} = 0$ ,  $\mathbf{w}_{\text{отн}} = 0$ .

Вторая часть представляет собой *относительное* ускорение. Оно совпадает с полным тогда, когда система  $\xi\eta\zeta$  относительно системы  $xyz$  движется равномерно и поступательно, т. е.  $\mathbf{w}_0 = 0$ ,  $\boldsymbol{\omega} = 0$ .

Третья часть представляет собой ускорение, называемое *кориолисовым*:  $\mathbf{w}_{\text{кор}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}$ .

*Пример.* Определить абсолютное ускорение точки, движение которой наблюдается относительно Земли в связанной с нею местной системе координат, оси которой направлены на восток, север и в зенит (рис. 21).

Полагая ускорения, связанные с движением центра Земли вокруг Солнца, малыми, будем считать, что этот центр неподвижен в инерциальной системе координат  $xyz$ , относительно которой Земля вращается с угловой скоростью суточного вращения  $\boldsymbol{\omega}$ . Роль подвижного трехгранника  $\xi\eta\zeta$  здесь играет репер, ориентированный по сторонам света  $\mathcal{E}\mathcal{N}\mathcal{Z}$ . Наблюдается и считается известным движение точки в этом трехграннике:

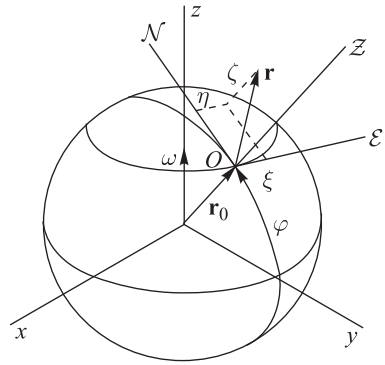


Рис. 21

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\text{отн}} = \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_{\text{отн}} = \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix}.$$

Требуется определить абсолютное ускорение этой точки в проекциях на эти же оси. Исходим из формулы

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\text{пер}} + \mathbf{w}_{\text{отн}} + \mathbf{w}_{\text{кор}}.$$

Подсчитаем переносное ускорение. Ускорение точки  $O$  в проекциях на  $xyz$  есть

$$\mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 r_0 \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Или, в проекциях на оси  $\mathcal{ENZ}$ :

$$\mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 r_0 \cos \varphi \sin \varphi \\ -\omega^2 r_0 \cos^2 \varphi \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\varphi$  — широта места.

Поскольку предполагается, что Земля вращается равномерно, то  $\dot{\omega} = 0$ . Скорость вращения Земли в проекциях на  $\mathcal{ENZ}$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos \varphi \\ \omega \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Подсчитаем  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ :

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -\omega^2 \xi \\ \omega^2 (\zeta \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \sin \varphi \\ -\omega^2 (\zeta \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Складывая это ускорение с ускорением  $\mathbf{w}_0$ , получаем переносное ускорение:

$$\mathbf{W}_{\text{пер}} = \begin{pmatrix} -\omega^2 \xi \\ \omega^2 [(\zeta + r_0) \cos \varphi - \eta \sin \varphi] \sin \varphi \\ -\omega^2 [(\zeta + r_0) \cos \varphi - \eta \sin \varphi] \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Подсчитаем кориолисово ускорение:

$$\mathbf{W}_{\text{кор}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}} = 2 \begin{pmatrix} \dot{\zeta} \omega \cos \varphi - \dot{\eta} \omega \sin \varphi \\ \omega \dot{\xi} \sin \varphi \\ -\omega \dot{\xi} \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Складывая переносное, кориолисово и относительное ускорения, получим полное ускорение в проекциях на оси  $\mathcal{ENZ}$ :

$$\begin{aligned} w_{\mathcal{E}} &= -\omega^2 \xi + 2\omega(\dot{\zeta} \cos \varphi - \dot{\eta} \sin \varphi) + \ddot{\xi}, \\ w_{\mathcal{N}} &= \omega^2 [(\zeta + r_0) \cos \varphi - \eta \sin \varphi] \sin \varphi + 2\omega \dot{\xi} \sin \varphi + \ddot{\eta}, \\ w_{\mathcal{Z}} &= -\omega^2 [(\zeta + r_0) \cos \varphi - \eta \sin \varphi] \cos \varphi - 2\omega \dot{\xi} \cos \varphi + \ddot{\zeta}. \end{aligned}$$

Воспользуемся этими выражениями, чтобы ответить на вопрос, куда падает из состояния покоя материальная точка, поднятая на высоту  $h$  над Землей. Для этого надо решить уравнения

$$w_{\mathcal{E}} = 0, \quad w_{\mathcal{N}} = 0, \quad w_{\mathcal{Z}} = -g$$

при начальных условиях  $\xi = \eta = 0$ ,  $\zeta = h$ ,  $\dot{\xi} = \dot{\zeta} = 0$ .

Относительно искомым переменных эти уравнения линейны и могут быть решены точно. Однако полагая, что  $\omega$  — малая угловая скорость

и пренебрегая в решении квадратом этой скорости, можно сильно упростить выкладки. Решаем систему

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + 2\omega(\dot{\zeta} \cos \varphi - \dot{\eta} \sin \varphi) = 0, \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} \sin \varphi = 0, \\ \ddot{\zeta} - 2\omega\dot{\xi} \cos \varphi = -g \end{cases}$$

с указанными выше начальными условиями методом последовательных приближений. В нулевом приближении  $\omega = 0$ , и из системы получаем  $\xi \equiv 0$ ,  $\eta \equiv 0$ ,  $\zeta = h - gt^2/2$ . Подставляя это решение в члены, содержащие множителем  $\omega$ , и еще раз интегрируя, получаем решение первого приближения:

$$\xi = \frac{1}{3}\omega gt^3 \cos \varphi, \quad \eta = 0, \quad \zeta = h - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент падения на Землю  $\zeta = 0$ , откуда  $t = \sqrt{2h/g}$ . Отклонение точки к востоку в момент падения равно

$$\xi = \frac{1}{3}\omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \cos \varphi.$$

При значениях параметров, равных  $\omega = 0,00007 \text{ с}^{-1}$ ,  $g = 1000 \text{ см/с}^2$ ,  $\cos \varphi = 1/2$ ,  $h = 10 \text{ м}$ , отклонение к востоку составит

$$\xi \simeq 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ см}.$$

## Часть 2

# ДИНАМИКА

### Глава 4

## ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

### § 11. Определения

Рассматривается совокупность (дискретная или континуальная) материальных точек, образующая механическую систему  $S$ . На каждую точку системы действует сила с массовой плотностью  $\mathbf{F}$  (рис. 22). Сила, действующая на элемент массы  $dm$ , равна  $\mathbf{F}dm$ . В дальнейшем будем иметь в виду следующие основные определения.

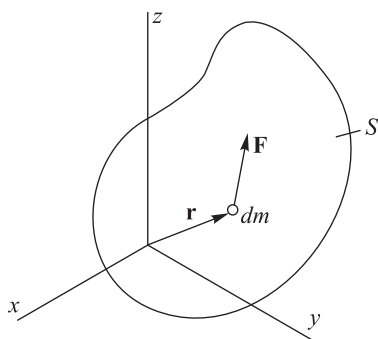


Рис. 22

Силы, которые действуют на рассматриваемую точку системы  $S$  со стороны других точек этой же системы, называются *внутренними*. Силы, действующие со стороны материальных точек, лежащих вне рассматриваемой системы, называются *внешними*.

*Количеством движения* изолированной материальной точки массы  $m$ , движущейся со скоростью  $\mathbf{v}$ , называется вектор

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$



Количеством движения системы  $N$  изолированных материальных точек называется сумма количеств движения всех составляющих систему точек:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i.$$

Количеством движения непрерывной системы материальных точек называется интеграл

$$\mathbf{p} = \int_S \mathbf{v} dm.$$

*Моментом количества движения, или кинетическим моментом, изолированной материальной точки относительно точки  $O$ , радиус-вектор которой есть  $\mathbf{r}_0$ , называется вектор*

$$\mathbf{K} = m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{v}.$$

*Моментом количеств движения системы  $N$  изолированных материальных точек называется сумма*

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{v}_i.$$

В непрерывном случае этот вектор имеет вид

$$\mathbf{K} = \int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{v} dm.$$

*Кинетической энергией материальной точки называется скалярная неотрицательная величина*

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}.$$

Кинетической энергией системы  $N$  изолированных материальных точек называется сумма

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i.$$

В непрерывном случае эта скалярная величина имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dm.$$

*Центром масс системы  $N$  изолированных материальных точек называется точка, радиус-вектор которой вычисляется по формуле*

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (M = \sum_{i=1}^N m_i).$$

Или, в непрерывном случае:

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M} \int_S \mathbf{r} dm \quad (M = \int_S dm).$$

*Импульсом силы* за время  $t_2 - t_1$  называется интеграл

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$$

в случае, если  $\mathbf{F}$  — дискретная сила. Если  $\mathbf{F}$  — массовая плотность силы, то этот интеграл называется массовой плотностью импульса силы.

*Мощностью силы* называется скалярное произведение силы на скорость:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

*Работой силы* называется интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt.$$

Если  $\partial \mathbf{F} / \partial t \equiv 0$ , то работа, совершенная силой  $\mathbf{F}$  за время от  $t_1$  до  $t_2$  может быть вычислена при помощи криволинейного интеграла вдоль кривой  $\gamma$ , по которой переместилась за время от  $t_1$  до  $t_2$  точка приложения силы  $\mathbf{F}$ .

*Вириалом* материальной точки называется выражение

$$-\frac{1}{2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки,  $\mathbf{F}$  — приложенная к ней сила.

Вириал системы материальных точек:

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i$$

Таковы основные определения. Добавим, что количество движения и кинетическая энергия называются соответственно векторной и скалярной *мерой движения* системы.

## § 12. Теорема об изменении количества движения

Представим массовую плотность сил  $\mathbf{F}$  в виде суммы плотности внутренних сил  $\mathbf{F}^i$  и плотности внешних сил  $\mathbf{F}^e$  и запишем уравнение Ньютона

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}^i + \mathbf{F}^e.$$

Проинтегрируем это уравнение по всей системе  $S$ , учитывая, что в силу третьего закона Ньютона интеграл от плотности внутренних сил равен нулю:

$$\int_S \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} dm = \int_S (\mathbf{F}^i + \mathbf{F}^e) dm = \int_S \mathbf{F}^e dm.$$

Если масса системы от времени не зависит (система постоянного состава), то из этого соотношения выводим

$$\frac{d}{dt} \int_S \frac{d\mathbf{r}}{dt} dm = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int_S \mathbf{F}^e dm.$$

Этот результат формулируется так: *производная от количества движения системы равна сумме всех внешних сил, действующих на систему.*

В частности, если внешние силы равны нулю, то количество движения системы измениться не может:  $\mathbf{p} \stackrel{t}{=} \text{const.}$  Для системы постоянного состава количество движения системы может быть выражено через скорость движения ее центра масс:

$$\mathbf{p} = \int_S \frac{d\mathbf{r}}{dt} dm = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{r} dm = M \frac{d\mathbf{r}_c}{dt}.$$

Поэтому, если на систему внешние силы не действуют, то центр масс ее движется равномерно и прямолинейно:

$$\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \text{const.}$$

Иными словами, никакими внутренними силами привести центр масс механической системы в ускоренное движение невозможно.

Проинтегрируем по времени уравнение  $d\mathbf{p}/dt = ds \int_S \mathbf{F}^e dm$ :

$$\Delta \mathbf{p} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_S \mathbf{F}^e dm \right) dt = \mathbf{I}.$$

Это соотношение называется законом изменения количества движения в интегральной форме и звучит так: *изменение количества движения системы  $S$  за время  $t_2 - t_1$  равно импульсу внешних сил за это же время.*

*Замечание.* В современной литературе термины «количество движения» и «импульс» часто выступают как синонимы.

### § 13. Теорема об изменении момента количеств движения

Умножим уравнение Ньютона  $d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{F}^i + \mathbf{F}^e$  векторно на  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  и проинтегрируем результат по всей системе  $S$ :

$$\int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} dm = \int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}^e dm$$

(как и в предыдущем параграфе мы использовали здесь третий закон Ньютона, что привело к исчезновению внутренних сил). Левую часть полученного равенства можно представить так:

$$\int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} dm = \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} dm - \int_S \frac{d}{dt} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} dm.$$

Первый член суммы представляет собой производную от момента количеств движения относительно точки  $O$ , а второй член преобразуется следующим образом:

$$\int_S \frac{d}{dt} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} dm = - \int_S \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} dm = - \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \times \mathbf{p}.$$

И, окончательно, мы получаем:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}^e dm - \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \times \mathbf{p}$$

— закон изменения момента количеств движения: *скорость изменения момента количеств движения относительно некоторой точки  $O$  равна моменту всех внешних сил, вычисленному относительно той же точки, минус скорость точки  $O$ , векторно умноженная на количество движения системы.*

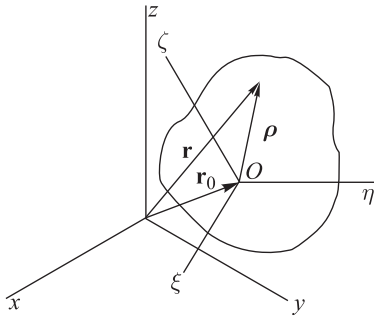


Рис. 23

Теорема об изменении момента количеств движения известна и в другой форме.

Введем понятие *относительного момента количеств движения*. Свяжем с подвижной точкой  $O$  систему координат  $\xi\eta\zeta$ , поступательно движущуюся относительно системы  $xyz$  (рис. 23). В определении количества движения скорости точек будем рассматривать не относительно системы  $xyz$ , как в предыдущем случае, а относительно подвижной системы  $\xi\eta\zeta$ :

$$\mathbf{K}_{\text{отн}} = \int_S \boldsymbol{\rho} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} dm.$$

В этом случае, проделывая выкладки, аналогичные предыдущим, получаем

$$\int_S \rho \times \frac{d^2(\mathbf{r}_0 + \rho)}{dt^2} dm = M \rho_c \times \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} + \frac{d\mathbf{K}_{\text{отн}}}{dt} = \int_S \rho \times \mathbf{F}^e dm,$$

и уравнение для относительного момента количеств движения принимает вид

$$\frac{d\mathbf{K}_{\text{отн}}}{dt} = \int_S \rho \times \mathbf{F}^e dm - M \rho_c \times \mathbf{w}_0$$

— скорость изменения относительного кинетического момента вокруг точки  $O$  равна моменту внешних сил относительно той же точки минус момент силы инерции переносного движения  $M\mathbf{w}_0$ , вычисленный относительно центра масс системы.

В последнем результате дополнительный момент сил инерции равен нулю, если система  $\xi\eta\zeta$  движется равномерно —  $\mathbf{w}_0 = 0$ , или, если точка  $O$  совпадает с центром масс —  $\rho_c = 0$ .

## § 14. Теорема об изменении энергии

Вычислим производную по времени от кинетической энергии системы:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dm \right] = \int_S \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dm.$$

Учитывая закон Ньютона  $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}$ , получим

$$\frac{dT}{dt} = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} dm.$$

Элементарная работа всех сил, приложенных к точке на перемещении точки  $d\mathbf{r}$ , равна  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . Отношение этой работы к интервалу времени  $dt$ , за которое она была совершена, называется мощностью силы  $\mathbf{F}$ . Полученный результат может быть сформулирован так: *производная по времени от кинетической энергии системы равна мощности всех сил, приложенных к ней.*

В дифференциальной форме теорема об изменении энергии может быть записана так:

$$dT = \int_S d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} dm$$

— *приращение кинетической энергии равно элементарной работе всех сил, приложенных к системе.*

Сила, приложенная к точке, называется потенциальной, если существует такая функция координат этой точки и времени  $U(t, x, y, z)$ , что проекции  $\mathbf{F}$  на оси могут быть вычислены как

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

или, в краткой форме:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

Если потенциал  $U$  от времени не зависит, то выражение  $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$  представляет собой полный дифференциал функции  $U$ :

$$d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = dU.$$

*Потенциальной энергией всей системы* называется величина

$$\Pi = - \int_S U dm.$$

Для случая потенциальных и не зависящих от времени сил теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме принимает вид

$$dT = -d\Pi,$$

откуда следует

$$T + \Pi = \text{const.}$$

Сумма  $T + \Pi$  называется *полной механической энергией системы*.

Таким образом, установлено: *полная механическая энергия системы не изменяется во времени, если все действующие силы потенциальны, а их потенциал от времени не зависит*. Этот закон называется *законом сохранения энергии*.

## § 15. Первые интегралы

Понятие первого интеграла более подробно будет обсуждаться в § 27. Здесь же мы дадим лишь предварительные сведения.

Функция, зависящая от координат и скоростей точек механической системы и не являющаяся тождественной константой, называется ее *первым интегралом*, если она не изменяется во время любого движения системы.

Доказанные выше теоремы позволяют установить условия существования трех основных типов первых интегралов. Если внешние силы отсутствуют, то не меняется во времени количество движения системы, называемое в этом случае *интегралом количества движения*. Если момент внешних сил равен нулю, то не меняется кинетический момент системы, называемый в этом случае *интегралом момента*

количеств движения. Наконец, если все действующие силы потенциальны и не зависят от времени, то полная механическая энергия является *интегралом энергии* рассматриваемой системы.

## § 16. Теорема Кёнига

Введем понятие *относительной кинетической энергии* системы  $S$ . Это энергия, вычисленная в движении системы относительно поступательно перемещающегося трехгранника (см. рис. 23):

$$T_{\text{отн}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} dm.$$

Рассмотрим частный случай, когда начало подвижного трехгранника помещено в центр масс системы, и вычислим полную кинетическую энергию системы:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dm = \frac{1}{2} \int \left( \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \cdot \left( \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) dm = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \int dm + \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \int dm + \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} dm. \end{aligned}$$

Первый член в полученной сумме представляет собой кинетическую энергию материальной точки, помещенной в начало подвижного трехгранника и имеющей массу, равную массе системы. Второй член равен нулю, поскольку предположено, что центр масс лежит в точке  $O$  и, следовательно,  $\int \mathbf{p} dm = 0$ . Третий член равен относительной кинетической энергии системы.

Таким образом, установлена теорема Кёнига: *кинетическая энергия системы есть энергия движения центра масс (в определенном выше смысле) плюс энергия движения относительно центра масс.*

## § 17. Теорема о вириале

Рассмотрим систему  $N$  материальных точек, кинетическая энергия которой есть

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i.$$

Заметим, что кинетическую энергию можно представить в следующей форме:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{v}_i,$$

где  $\mathbf{p}_i$  — количество движения  $i$ -й точки.

Запишем очевидное тождество:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \cdot \mathbf{r}_i.$$

Таким образом, учитывая закон Ньютона  $d\mathbf{p}_i/dt = \mathbf{F}_i$ , для кинетической энергии получаем

$$T = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i.$$

Вычислим среднее значение по времени от обеих частей равенства, введя для среднего значения обозначение

$$\langle T \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} T dt.$$

Будем предполагать, что движение материальной системы осуществляется в ограниченной области пространства и с ограниченными скоростями. Из этого следует, что сумма  $\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i$  ограничена, а следовательно,

$$\left\langle \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i \Big|_0^{\tau} = 0.$$

Значит, для среднего значения кинетической энергии получаем

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle.$$

*Среднее значение кинетической энергии системы равно среднему значению ее вириала.*

Если действующие силы  $\mathbf{F}_i$  потенциальны, т. е.

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_i},$$

где  $\Pi$  — потенциальная энергия, то написанное соотношение приобретает вид

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle.$$

Если потенциальная энергия есть функция  $n$ -й степени от всех радиус-векторов  $\mathbf{r}_i$  то

$$\langle T \rangle = \frac{n}{2} \langle \Pi \rangle.$$



Поскольку полная энергия  $E = T + \Pi$ , то

$$\langle \Pi \rangle = \frac{2}{n+2} E, \quad \langle T \rangle = \frac{n}{n+2} E$$

(в силу закона сохранения энергии  $E = \text{const}$  и  $\langle E \rangle = E$ ).

Если  $n = 2$  (потенциальная энергия сил, линейно зависящих от  $\mathbf{r}_i$ ) то  $\langle T \rangle = \langle \Pi \rangle$  — среднее по времени от кинетической энергии равно среднему по времени от потенциальной.

Если  $n = -1$  (потенциальная энергия частиц, взаимодействующих по закону всемирного тяготения), то  $2\langle T \rangle = -\langle \Pi \rangle$ .

## § 18. Общее уравнение динамики системы связанных материальных точек

Рассмотрим систему  $N$  материальных точек. Будем предполагать, что между точками системы существуют связи, математически выражающиеся в наличии соотношений типа

$$f_i(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0, \quad i = 1, \dots, n < 3N,$$

или типа

$$f_i(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N), \quad i = 1, \dots, n < 3N.$$

Связи первого типа называются *голономными*, второго типа — *кинематическими* (см. также § 31).

Связи тождественно выполняются для любого момента времени и для любых движений системы. Действие связей на материальные точки эквивалентно появлению дополнительных сил, называемых *реакциями связей*, так что уравнения Ньютона системы связанных материальных точек могут быть записаны в виде

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k, \quad k = 1, \dots, N.$$

Здесь  $\mathbf{F}_k$  — так называемые активные силы,  $\mathbf{R}_k$  — реакции связей;

Введем определение. *Виртуальным перемещением* системы называется такое перемещение  $\delta \mathbf{r}_k$ , которое удовлетворяет линеаризованым в момент времени  $t$  связям (см. также § 24):

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad \text{в случае голономных связей}$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_k = 0 \quad \text{в случае кинематических связей}$$

Понятие виртуального перемещения обычно противопоставляется понятиям *действительного перемещения* и *возможного переме-*

щения. Действительным перемещением называется перемещение  $\delta \mathbf{r}_k$ , удовлетворяющее и уравнениям движения, и уравнениям связей. Возможным перемещением  $\delta \mathbf{r}_k$  называется перемещение, удовлетворяющее уравнениям связей:

$$f_i[t, \mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N + \delta \mathbf{r}_N] = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

или

$$f_i[t, \mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N + \delta \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1 + \delta \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N + \delta \dot{\mathbf{r}}_N] = 0.$$

Связи называются *идеальными*, если их работа на любых виртуальных перемещениях равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0.$$

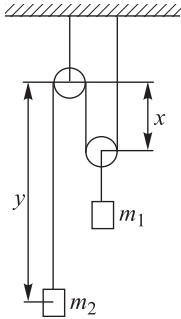


Рис. 24

Если выразить из написанных выше уравнений Ньютона реакции связей и подставить их в это соотношение, получим уравнение

$$\sum_{i=1}^N (m_k \ddot{\mathbf{r}}_k - \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$$

называемое *общим уравнением динамики*. Это уравнение выражает принцип Даламбера–Лагранжа: сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

*Пример.* Найти ускорение груза  $m_1$  (рис. 24). В блоках отсутствует трение, нить невесома и нерастяжима.

*Решение.* Система двух материальных точек  $m_1$  и  $m_2$  подчинена связи  $2x + y = \text{const}$ . Вид общего уравнения механики в этом случае

$$(m_1 \ddot{x} - m_1 g) \delta x + (m_2 \ddot{y} - m_2 g) \delta y = 0.$$

Виртуальные перемещения  $\delta x$  и  $\delta y$  и ускорения  $\ddot{x}$  и  $\ddot{y}$  связаны уравнением связи:

$$\delta y = -2\delta x, \quad \ddot{y} = -2\ddot{x}.$$

Подставляя эти соотношения в общее уравнение, имеем

$$[m_1(\ddot{x} - g) - 2m_2(-2\ddot{x} - g)]\delta x = 0.$$

Поскольку  $\delta x$  произвольно, то

$$m_1(\ddot{x} - g) - 2m_2(-2\ddot{x} - g) = 0,$$

откуда находим

$$\ddot{x} = \frac{g(m_1 - 2m_2)}{m_1 + 4m_2}.$$

## Глава 5

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

### § 19. Задача двух тел

Исторически задача двух тел возникла в небесной механике в связи с изучением движения планет вокруг Солнца под действием сил, подчиняющихся закону всемирного тяготения. Если считать, что сила взаимодействия между планетой и Солнцем много больше сил взаимодействия планет друг с другом, то задача изучения движения любой планеты сводится к задаче движения в инерциальном пространстве двух тел (рис. 25). Масса Солнца обозначена буквой  $M$ , масса планеты — буквой  $m$ .

Если считать размеры тел много меньше расстояния между ними, то оба тела можно рассматривать как материальные точки, притягивающиеся друг к другу с силой, модуль которой равен

$$F = \gamma \frac{mM}{(\mathbf{R} - \mathbf{r})^2}.$$

Коэффициент  $\gamma$  называется универсальной гравитационной постоянной,  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  — радиусы-векторы Солнца и планеты соответственно. По теореме об изменении количества движения системы имеем

$$M\dot{\mathbf{R}} + m\dot{\mathbf{r}} = \text{const},$$

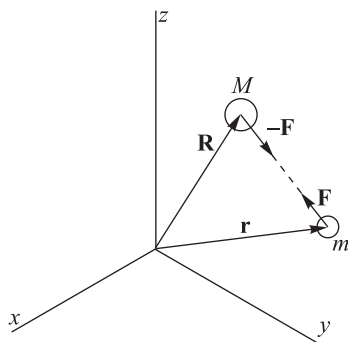


Рис. 25

поскольку внешних сил нет. То есть центр масс системы Солнце плюс планета в произвольной инерциальной системе отсчета движется равномерно и прямолинейно.

Выберем такую инерциальную систему, в которой этот центр покоится, и поместим начало координат в этот центр:  $M\mathbf{R} + m\mathbf{r} = 0$ . Тем самым, достаточно найти движение планеты, движение Солнца определится из соотношения  $\mathbf{R} = -m\mathbf{r}/M$ . Подставим это соотношение

в выражение для силы тяготения и запишем уравнение движения планеты:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\gamma \frac{mM}{(1+m/M)^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Обозначив величину  $\gamma M/(M+m)^2$  буквой  $k$ , получим

$$\ddot{\mathbf{r}} = -k \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Тем самым задача двух тел при помощи теоремы об изменении количества движения сводится к задаче движения одной материальной точки в поле притягивающего центра. Умножив полученное уравнение слева векторно на  $\mathbf{r}$ , находим:  $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$ . Это соотношение можно переписать так:  $d(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})/dt$ , откуда следует

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C},$$

что выражает собой закон сохранения кинетического момента. Из него следует, что движение происходит в неизменной плоскости, ортогональной вектору  $\mathbf{C}$ . Исходную инерциальную систему отсчета можно выбрать так, чтобы это была плоскость  $\{x, y\}$ . В этом случае уравнения движения точки принимают вид

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad \ddot{y} = -\frac{ky}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$$

Решение этой системы нелинейных уравнений удобно проводить в полярной системе координат

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Воспользуемся уравнениями Лагранжа, выведенными в § 5:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = H_i F_i \quad (i = 1, 2)$$

в которых  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $(F_1, F_2)$  — проекции силы  $(F_x, F_y)$  на направление к центру и на перпендикуляр к нему. Подсчитаем коэффициенты Ламе:

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} = r.$$

Кинетическая энергия точки

$$T = \frac{1}{2} v^2 = (H_1^2 \dot{r}^2 + H_2^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2).$$

Проекции силы

$$F_1 = -\frac{1}{r^2}, \quad F_2 = 0.$$

Уравнения Лагранжа дают

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{k}{r^2}, \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0.$$

Из последнего уравнения следует  $r^2\dot{\varphi} = C$  — модуль вектора неизменного момента количества движения  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}$ . Поскольку  $r^2 d\varphi/2 = dS$  — элемент площади, замеченной радиусом  $\mathbf{r}$  при бесконечно малом смещении вдоль траектории, то константа  $C = 2dS/dt$  выражает собой закон постоянства *секторной скорости*.

Этот закон позволяет исключить переменную  $\varphi$  из уравнений:

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = -\frac{k}{r^2}.$$

Это уравнение сводится к линейному при помощи подстановки Бине. Вместо переменной  $r$  будем рассматривать переменную  $u = 1/r$ , а вместо независимой переменной  $t$  в качестве независимой выберем переменную  $\varphi$ . Последнее возможно, поскольку из соотношения  $\dot{\varphi} = C/r^2$  следует, что  $\varphi$  изменяется монотонно.

Выполним необходимые выкладки:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -C \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) = -C \frac{du}{d\varphi}, \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dr}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2 u}{d\varphi^2}. \end{aligned}$$

После этого написанное выше дифференциальное уравнение приобретает вид

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{k}{C^2}.$$

Его общее решение

$$u = A \cos(\varphi + \varphi_0) + \frac{k}{C^2},$$

или, в исходной переменной:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \psi}, \quad \psi = \varphi + \varphi_0,$$

где

$$p = \frac{C^2}{k}, \quad e = \frac{C^2 A}{k}.$$

Полученное решение представляет собой уравнение эллипса, записанное в полярных координатах, если  $e < 1$ . Этот случай и имеет место для планет. В общем случае при  $e = 1$  траектория представляет собой параболу, если  $e > 1$  — гиперболу.

Найденное решение позволяет подтвердить справедливость трех законов Кеплера.

*Первый закон Кеплера: планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце.*

Более точно, в фокусе находится центр масс системы Солнце + планета, однако масса Солнца намного больше массы любой планеты, и этот закон практически точен.

*Второй закон Кеплера: площади, заметаемые радиусом-вектором, идущим от Солнца к планете, пропорциональны промежуткам времени, в которые они были замечены.*

Этот закон является следствием отмеченного выше постоянства секторной скорости и, так же как и первый закон, должен формулироваться для центра масс.

*Третий закон Кеплера: квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их больших полуосей.*

Этот закон получим, если воспользуемся известной из геометрии связью между параметром эллипса  $p$  и его полуосями  $a$  и  $b$ :

$$p = b^2/a.$$

Константу интеграла площадей  $C$  можно выразить через площадь эллипса и через период обращения так:

$$C = 2\pi ab/T.$$

Поскольку

$$p = \frac{C^2}{k} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{kT^2},$$

то указанная выше связь между  $p$ ,  $a$  и  $b$  дает

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k}.$$

Поскольку константа  $k$  слабо зависит от массы планеты  $m$ , то и этот закон тем точнее, чем меньше соотношение  $m/M$ .

*Пример (низколетящий спутник).* Предполагаем, что движение материальной точки совершается по круговой орбите радиуса, близкого к радиусу Земли:  $r = R_3 = \text{const}$ . В этом случае из уравнения  $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -k/r^2$  находим  $R_3\dot{\varphi}^2 = k/R_3^2 = g$ , откуда следует  $\dot{\varphi} = 2\pi/T = \sqrt{g/R_3}$ , и для периода обращения низколетящего спутника по круговой орбите получаем:  $T = 84,4$  мин. Ускорение свободного падения и радиус Земли приняты равными  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ,  $R_3 = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$ .

*Пример (спутник на геостационарной орбите).* Найти радиус круговой орбиты, по которой период обращения спутника равен одним суткам. Радиус геостационарной орбиты  $R_r$  удовлетворяет уравнению из предыдущего примера  $R_r\dot{\varphi}^2 = k/R_r^2$ , в котором  $\dot{\varphi} = 2\pi/T_c$ , где  $T_c$

равно 24 часам, а  $k$  может быть выражено как  $k = gR_3$ . Откуда находим  $R_r = \sqrt[3]{g(R_3 T_c / 2\pi)^2} \simeq 42\,200$  км.

*Пример (падение материальной точки в прямолинейном канале, проходящем через центр невращающейся Земли).* Сферическая поверхность с центром в центре Земли, проходящая через текущее положение падающей точки, делит земной шар на две части — внутреннюю и внешнюю. Внешняя часть на точку не действует, внутренняя притягивает ее как шар радиуса, равного расстоянию от точки до центра Земли. Поэтому в уравнении  $\ddot{r} = -\gamma M/r^2$  масса  $M = (4/3)\pi r^3 \rho$ , где  $\rho$  — средняя плотность Земли. Получаем  $\ddot{r} = -(4\pi\gamma\rho/3)r$ . При  $r = R_3$  правая часть равна  $(4\pi\gamma\rho/3)R_3 = g$ . Уравнение падения материальной точки приобретает вид  $\ddot{r} = -(g/R_3)r$ . Это уравнение линейного осциллятора с периодом колебаний  $T = 2\pi\sqrt{R_3/g}$ , совпадающим с периодом обращения низколетящего спутника.

## § 20. Динамика твердого тела с одной неподвижной точкой

**1. Геометрия масс.** В основе геометрии масс абсолютно твердого тела лежит понятие момента инерции тела вокруг некоторой оси. *Моментом инерции тела* вокруг оси, определяемой единичным вектором  $\mathbf{e}$  (рис. 26), называется следующий интеграл

$$\mathcal{I}_{\mathbf{e}} = \int \rho^2 dm,$$

где  $\rho$  есть расстояние от элемента массы  $dm$  до оси. Поскольку  $\rho^2 = (\mathbf{e} \times \mathbf{r})^2 = \mathbf{e} \cdot \mathfrak{R}^T \mathfrak{R} \mathbf{e}$ , где  $\mathfrak{R} \mathbf{e} \equiv \mathbf{e} \times \mathbf{r}$  представляет собой линейный оператор векторного произведения

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix},$$

то искомый момент инерции может быть вычислен в виде следующего скалярного произведения

$$\mathcal{I}_{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot \mathcal{I} \mathbf{e},$$

в котором

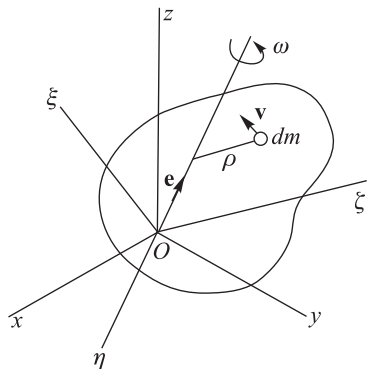


Рис. 26

$$\mathcal{J} = \int \mathbf{R}^\top \mathbf{R} dm = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yz dm \\ -\int xz dm & -\int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{xx} & -\mathcal{J}_{xy} & -\mathcal{J}_{xz} \\ -\mathcal{J}_{xy} & \mathcal{J}_{yy} & -\mathcal{J}_{yz} \\ -\mathcal{J}_{xz} & -\mathcal{J}_{yz} & \mathcal{J}_{zz} \end{pmatrix}$$

— матрица, выражающая в базисе трехгранника  $(x, y, z)$  *тензор инерции тела*.

Диагональные элементы этой матрицы  $\mathcal{J}_{xx}, \mathcal{J}_{yy}, \mathcal{J}_{zz}$  представляют собой моменты инерции вокруг соответствующих осей координат. Внедиагональные элементы называются *центробежными моментами инерции*. В повернутом при помощи ортогонального преобразования  $A$  базисе вектор  $\mathbf{e}$  преобразуется так:  $\mathbf{e} = A\mathbf{e}'$ , что влечет за собой преобразование тензора инерции

$$\mathcal{J}' = A^\top \mathcal{J} A.$$

Поскольку матрица  $\mathcal{J}$  симметрическая и положительно определенная, то найдется такое ортогональное преобразование  $A$ , что матрица  $\mathcal{J}'$  может быть получена в диагональной форме

$$\mathcal{J}' = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Базис, в котором тензор инерции принимает диагональную форму, называется *главным*. *Главными осями инерции* называются и определяемые им оси. В этом базисе все центробежные моменты инерции равны нулю, а осевые моменты инерции  $A, B, C$  называются *главными*. Если главные оси инерции проходят через центр масс тела, то они называются *главными центральными осями инерции*. Отметим, что главные моменты инерции удовлетворяют неравенству треугольника, например:  $A + B \geq C$ . Действительно

$$A + B = \int (y^2 + z^2) dm + \int (x^2 + z^2) dm = \int (x^2 + y^2) dm + 2 \int z^2 dm \geq C.$$

Выясним теперь, как меняется тензор инерции при параллельном переносе осей координат  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{s}$ . Кососимметрическая матрица  $S$  определяется вектором переноса  $\mathbf{s}$ , имеющим компоненты  $a, b, c$ :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}.$$



Тензор инерции в новых осях приобретает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{J}' &= \int \mathbf{R}'^\top \mathbf{R}' dm = \int \mathbf{R}^\top \mathbf{R} dm + S^\top \int \mathbf{R} dm + \left( \int \mathbf{R}^\top dm \right) S + \\ &+ S^\top S \int dm = J + S^\top \int \mathbf{R} dm + \left( \int \mathbf{R}^\top dm \right) S + MS^\top S.\end{aligned}$$

Если оси переносили из центра масс, то  $\int \mathbf{R} dm = 0$ , и мы приходим к формуле Гюйгенса–Штейнера

$$\mathcal{J}' = \mathcal{J} + MS^\top S.$$

Поскольку

$$S^\top S = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix},$$

то из полученной формулы следует, что главные моменты инерции имеют минимальное значение в центре масс. Если перенос начала координат осуществляется вдоль одной из координатных осей, то при диагональной форме тензора  $\mathcal{J}$  тензор  $\mathcal{J}'$  также диагонален.

Когда в центре масс тензор  $\mathcal{J}$  недиагонален, то переносом осей его можно диагонализировать, если точку переноса выбрать из условия

$$\mathcal{J}_{xy} + ab = 0, \quad \mathcal{J}_{xz} + ac = 0, \quad \mathcal{J}_{yz} + bc = 0.$$

Полученная система разрешима относительно  $a, b, c$  при условии  $\mathcal{J}_{xy}\mathcal{J}_{xz}\mathcal{J}_{yz} < 0$ :

$$a = \pm \sqrt{-\frac{\mathcal{J}_{yx}\mathcal{J}_{zx}}{\mathcal{J}_{yz}}}; \quad b = \pm \sqrt{-\frac{\mathcal{J}_{xy}\mathcal{J}_{zy}}{\mathcal{J}_{xz}}}; \quad c = \pm \sqrt{-\frac{\mathcal{J}_{xz}\mathcal{J}_{yz}}{\mathcal{J}_{xy}}}.$$

Если отличен от нуля только один из центробежных моментов инерции, то система имеет бесконечно много решений. Например, в случае  $\mathcal{J}_{xy} \neq 0$ ,  $\mathcal{J}_{xz} = \mathcal{J}_{yz} = 0$  семейство решений выглядит так:  $c = 0$ ,  $ab = -\mathcal{J}_{xy}$ .

*Эллипсоид инерции.* Это геометрическая поверхность, жестко связанная с телом, которая строится так. В произвольном направлении, задаваемом вектором  $\mathbf{e}$ , отложим отрезок длиной  $1/\sqrt{\mathcal{J}_{\mathbf{e}}}$ . Геометрическое место таких точек и есть эллипсоид инерции. Действительно, подставляя в выражение  $\mathcal{J}_{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot \mathcal{J} \mathbf{e}$  вектор  $\mathbf{e}$  в виде  $\mathbf{e} = \mathbf{r}\sqrt{\mathcal{J}_{\mathbf{e}}}$ , получаем

$$\mathbf{r} \cdot \mathcal{J} \mathbf{r} = 1.$$

В главных осях это уравнение имеет простейший вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Найдем динамические характеристики твердого тела.

*Кинетическая энергия*

$$T = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}^2 dm = \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = \\ = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \left( \int \mathfrak{R}^\top \mathfrak{R} dm \right) \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathcal{J} \boldsymbol{\omega}.$$

*Момент количеств движения*

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] dm = \left( \int \mathfrak{R}^\top \mathfrak{R} dm \right) \boldsymbol{\omega} = \mathcal{J} \boldsymbol{\omega}.$$

Отметим связь скалярной и векторной мер движения

$$\mathbf{K} = \frac{dT}{d\boldsymbol{\omega}}.$$

**2. Динамические уравнения Эйлера.** Динамические уравнения Эйлера для твердого тела с одной неподвижной точкой выводятся из теоремы об изменении момента количеств движения (§ 13):

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{K} = \{K_x, K_y, K_z\}, \quad \mathbf{M} = \{M_x, M_y, M_z\}.$$

В этом выражении  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  рассматриваются в проекциях на неподвижные оси  $xyz$ . В дальнейшем оказывается более удобным рассматривать это уравнение в проекциях на оси, жестко связанные с телом, —  $\xi\eta\zeta$ .

Для того чтобы написать соответствующие уравнения, воспользуемся правилом вычисления полной производной от вектора, заданного своими проекциями в подвижной системе координат (см. § 10). Если обозначить угловую скорость тела, или, что то же самое, трехгранника  $\xi\eta\zeta$ , через  $\boldsymbol{\omega}$ , то рассматриваемое уравнение принимает вид:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}, \\ \mathbf{K} = \{K_\xi, K_\eta, K_\zeta\}, \quad \boldsymbol{\omega} = \{p, q, r\}, \quad \mathbf{M} = \{M_\xi, M_\eta, M_\zeta\}.$$

Удобство этого уравнения заключается в том, что в нем вектор  $\mathbf{K}$  выражается через вектор  $\boldsymbol{\omega}$  установленным выше соотношением  $\mathbf{K} = \mathcal{J} \boldsymbol{\omega}$ , в котором тензор  $\mathcal{J}$  уже не зависит от времени.

Выбирая в качестве осей  $\xi\eta\zeta$  главные оси инерции тела, в покомнатной форме написанное уравнение получим в виде

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = M_\xi, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = M_\eta, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = M_\zeta.$$

Эти уравнения и называются *динамическими уравнениями Эйлера*.

В общем случае момент внешних сил  $\mathbf{M}$  зависит от положения твердого тела относительно триедра  $xuz$ , от скорости  $\boldsymbol{\omega}$  и от времени. Поэтому для замыкания системы к ней необходимо присоединить кинематические уравнения, связывающие положение тела с его угловой скоростью.

Эти уравнения могут быть взяты в любой из установленных в § 9 форм: кинематические уравнения Эйлера в углах Эйлера, кинематические уравнения Пуассона в ортогональных матрицах, или в кватернионах.

**3. Решение в случае Эйлера ( $\mathbf{M} = 0$ ).** Особый интерес представляет собой движение тела по инерции, т. е. когда внешние моменты равны нулю. Этот случай и называется *случаем Эйлера*. Выбрав в качестве кинематических уравнений, дополняющих динамические, уравнения Эйлера, запишем полную систему дифференциальных уравнений, описывающих движение твердого тела с одной неподвижной точкой по инерции:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= 0, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= 0, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= 0, \\ \dot{\psi} &= \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta}, \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned}$$

Уравнения расщепились, динамические уравнения могут быть решены независимо от кинематических. Найденное для динамических уравнений решение затем нужно подставить в кинематические уравнения, что позволяет решить и их.

Для решения динамических уравнений заметим, что в случае  $\mathbf{M} \equiv 0$  система допускает интеграл кинетического момента и интеграл энергии. Вектор кинетического момента постоянен в осях  $xuz$ :

$$\mathbf{K} = \text{const.}$$

В осях  $\xi\eta\zeta$  постоянным будет лишь его модуль:

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2.$$

Добавив к нему интеграл энергии

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T,$$

получаем систему алгебраических уравнений, позволяющих выразить из нее любые две компоненты скорости через третью.

Положим для определенности  $A \geq B \geq C$  ( $A > C$ ). (Случай  $A = B = C$  очень прост. В нем  $\omega = \text{const}$ , и все движение состоит во вращении тела с постоянной скоростью вокруг неподвижной оси.) Выразим из первых двух интегралов компоненты  $p$  и  $r$ , учитывая, что определитель системы относительно переменных  $p^2$  и  $r^2$  равен  $AC(A - C)$  и, следовательно, отличен от нуля:

$$p = \pm \sqrt{a - bq^2}, \quad r = \pm \sqrt{c - dq^2}.$$

Здесь параметры  $a, b, c, d$  выражаются через исходные параметры задачи. Подставляя эти соотношения в уравнение  $Bdq/dt + (A - C)pr = 0$ , находим

$$B \frac{dq}{dt} \pm (A - C) \sqrt{(a - bq^2)(c - dq^2)} = 0.$$

Нахождение из этого уравнения  $q(t)$  сводится к обращению эллиптического интеграла:

$$\frac{A - C}{B}(t - t_0) = \pm \int_0^q \frac{dq}{\sqrt{(a - bq^2)(c - dq^2)}}.$$

Такое обращение делается при помощи так называемых эллиптических функций, что и завершает задачу нахождения  $p(t)$ ,  $q(t)$  и  $r(t)$ .

Для того чтобы решить кинематические уравнения, их удобно записать, выбрав трехгранник  $xyz$  специальным образом: пользуясь неизменностью вектора  $\mathbf{K}$ , напомним ось  $z$  по этому вектору (рис. 27). Тогда проекции вектора  $\mathbf{K}$  на оси  $\xi\eta\zeta$  примут вид

$$K_\xi = K \sin \theta \sin \varphi,$$

$$K_\eta = K \sin \theta \cos \varphi,$$

$$K_\zeta = K \cos \theta.$$

С другой стороны,  $K_\xi = Ap$ ,  $K_\eta = Bq$ ,  $K_\zeta = Ar$ , что позволяет последовательно найти

$$\cos \theta = \frac{Ar(t)}{K}, \quad \cos \varphi = \frac{Bq(t)}{K \sin \theta}.$$

Для нахождения  $\psi$  воспользуемся первым из кинематических уравнений Эйлера:

$$\psi(t) = \psi_0 + \int_0^t \frac{p(t) \sin \varphi(t) + q(t) \cos \varphi(t)}{\sin \theta(t)} dt.$$

**4. Геометрическая интерпретация Мак-Куллага.** Использованные выше интеграл модуля кинетического момента и интеграл кинети-

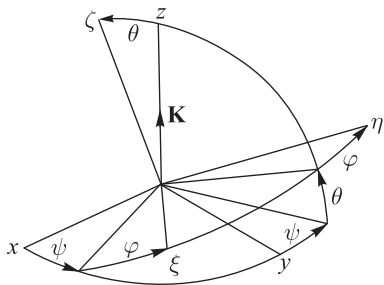


Рис. 27

ческой энергии, выраженные через компоненты скорости  $p, q, r$ , могут быть выражены через компоненты кинетического момента:

$$K_{\xi}^2 + K_{\eta}^2 + K_{\zeta}^2 = K^2,$$

$$\frac{K_{\xi}^2}{A} + \frac{K_{\eta}^2}{B} + \frac{K_{\zeta}^2}{C} = 2T.$$

Эти уравнения позволяют получить достаточно ясное представление о движении тела в случае Эйлера. В осях  $K_{\xi}, K_{\eta}, K_{\zeta}$  первое уравнение представляет собой сферу радиуса  $K$ , второе уравнение — эллипсоид, называемый эллипсоидом Мак-Куллага, с полуосями  $\sqrt{2TA}, \sqrt{2TB}$  и  $\sqrt{2TC}$ . В процессе движения тела вектор кинетического момента должен принадлежать пересечению этих поверхностей. Само пересечение возможно, если радиус сферы лежит между большой и малой полуосями эллипсоида:

$$2TA \geq K^2 \geq 2TC.$$

Поскольку вектор  $\mathbf{K}$  неподвижен в пространстве  $xyz$ , а эллипсоид Мак-Куллага неподвижен в теле, то движение тела в пространстве  $xyz$  представляет собой обкатывание эллипсоидом неподвижного конца  $\mathbf{K}$  по линиям пересечения эллипсоида со сферой.

Проследим характер траекторий вектора  $\mathbf{K}$  на рассматриваемом эллипсоиде. Начнем с критического случая  $K^2 = 2TB$ . В этом случае траектория является плоской. Действительно, умножив интеграл энергии на  $B$  и вычтя его из интеграла кинетического момента, получим

$$\left(1 - \frac{B}{A}\right) K_{\xi}^2 + \left(1 - \frac{B}{C}\right) K_{\zeta}^2 = 0,$$

откуда следует

$$\sqrt{1 - \frac{B}{A}} K_{\xi} \pm \sqrt{\frac{B}{C} - 1} K_{\zeta} = 0.$$

Эти две плоскости проходят через ось  $\eta$  (ось среднего момента инерции тела) и пересекают эллипсоид Мак-Куллага по двум эллипсам, которые разделяют остальные траектории на два класса: 1) эпициклоидальное движение, 2) перициклоидальное движение. В первом случае траектории являются замкнутыми вокруг оси  $\xi$  кривыми, во втором — они замкнуты вокруг оси  $\zeta$  (рис. 28). Это следует из того, что предельным для первого случая является движение с  $K^2 = 2TC$ , для которого  $K_{\xi} = K_{\eta} = 0, K_{\zeta} \neq 0$ . Во втором случае предельным является движение с  $K^2 = 2TA$ , для которого  $K_{\xi} \neq 0, K_{\eta} = K_{\zeta} = 0$ .

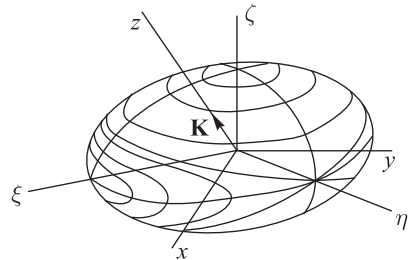


Рис. 28

Для завершения рассматриваемой интерпретации осталось заметить, что проекция скорости тела на ось  $\mathbf{K}$  постоянна:  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K} = 2T$ , и для определения положения тела вокруг этой оси можно воспользоваться теоремой о телесном угле.

**5. Геометрическая интерпретация Пуансо.** В отличие от предыдущей интерпретации здесь используется эллипсоид инерции:

$$f = \xi^2 A + \eta^2 B + \zeta^2 C - 1 \equiv \mathbf{r} \cdot \mathcal{J} \mathbf{r} - 1 = 0.$$

Покажем, что при движении твердого тела в случае Эйлера жестко связанный с телом его эллипсоид инерции катится без проскальзывания по неподвижной плоскости, перпендикулярной вектору кинетического момента (рис. 29).

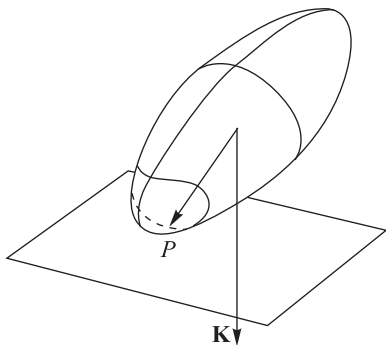


Рис. 29

Действительно, рассмотрим точку на поверхности эллипсоида инерции, через которую проходит вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\mathbf{r} = \frac{r}{\omega} \boldsymbol{\omega}.$$

Подставляя этот вектор в уравнение эллипсоида, получим

$$\frac{r^2}{\omega^2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathcal{J} \boldsymbol{\omega} - 1 = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{r}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2T}} = \text{const.}$$

Вычислим нормаль к эллипсоиду в этой точке:

$$\mathbf{n} = \frac{df}{d\mathbf{r}} = 2\mathcal{J}\mathbf{r} = 2\frac{r}{\omega}\mathcal{J}\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{\sqrt{2T}}\mathbf{K}.$$

Мы получили, что эта нормаль в процессе движения неизменна. Для того чтобы касательная плоскость к эллипсоиду в рассматриваемой точке была неизменной, осталось, таким образом, показать, что расстояние от нее до неподвижной точки постоянно. Это расстояние равно

$$\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{K}}{K} = \frac{r}{K\omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K} = \frac{1}{K\sqrt{2T}} = \text{const.}$$

Поскольку через рассматриваемую точку проходит вектор угловой скорости, то это значит, что скорость этой точки тела равна нулю, т. е. тело, представляемое своим эллипсоидом инерции, катится по неподвижной плоскости без проскальзывания. Такое качение называется движением Пуансо. Точка  $P$  описывает в эллипсоиде инерции кривую, называемую *полодией*, соответствующая кривая на неподвижной плоскости называется *герполодией*.

**6. Уравнение динамически симметричного тела в наблюдаемых переменных.** Динамические уравнения Эйлера для симметричного твердого тела (когда, например,  $(A = B)$  несколько упрощаются. Однако наличие у тела динамической симметрии может быть использовано более существенно. Ниже мы получим уравнения, в которых динамические и кинематические уравнения неразрывно слиты и которые после своего решения не требуют геометрической интерпретации движения, поскольку записаны в переменных, непосредственно доступных наблюдению.

Введем следующие обозначения (рис. 30):  $\mathbf{e}$  — единичный вектор оси динамической симметрии тела,  $C$  — момент инерции тела вокруг этой оси (полярный момент инерции),  $A$  — момент инерции тела вокруг любой оси, перпендикулярной оси динамической симметрии (экваториальный момент инерции). Тензор инерции тела в главных осях имеет вид

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

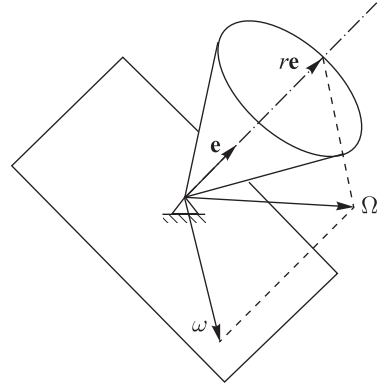


Рис. 30

Тензор инерции обладает следующими свойствами:

$$\mathcal{J}\mathbf{R} = C\mathbf{R}, \quad \text{если } \mathbf{R} \parallel \mathbf{e}, \quad \mathcal{J}\mathbf{R} = A\mathbf{R}, \quad \text{если } \mathbf{R} \perp \mathbf{e},$$

т.е. направленные таким образом векторы являются собственными векторами тензора инерции, а моменты инерции  $A$  и  $C$  — соответствующими собственными числами. Все векторные величины, фигурирующие в задаче, удобно раскладывать по собственным векторам тензора инерции. Угловая скорость тела

$$\mathbf{\Omega} = \{p, q, r\} = r\mathbf{e} + \boldsymbol{\omega} \quad (\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{e}).$$

Момент внешних сил

$$\mathbf{M} = \{M_\xi, M_\eta, M_\zeta\} = M_\zeta\mathbf{e} + \mathbf{m} \quad (\mathbf{m} \perp \mathbf{e}).$$

Момент количеств движения

$$\mathbf{K} = \mathcal{J}\mathbf{\Omega} = \mathcal{J}(r\mathbf{e} + \boldsymbol{\omega}) = rC\mathbf{e} + A\boldsymbol{\omega} = H\mathbf{e} + A\boldsymbol{\omega},$$

где через  $H = rC$  обозначен так называемый собственный кинетический момент тела.

Теорема об изменении момента количеств движения дает

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \dot{H}\mathbf{e} + H\dot{\mathbf{e}} + A\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M}.$$

Исключим из этого уравнения производную от проекции угловой скорости на плоскость, перпендикулярную оси динамической симметрии  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ . Для этого по теореме Эйлера о распределении скоростей в твердом теле запишем

$$\dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} = (r\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{e} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}.$$

Умножая это равенство слева векторно на  $\mathbf{e}$ , получаем

$$\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}] = \boldsymbol{\omega}.$$

После чего теорема об изменении  $\mathbf{K}$  приобретает вид

$$\dot{H}\mathbf{e} + H\dot{\mathbf{e}} + A\mathbf{e} \times \ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{M}.$$

Или, в проекциях на собственные векторы:

$$\begin{cases} \dot{H} = M_{\zeta}, \\ A\mathbf{e} \times \ddot{\mathbf{e}} + H\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{m}. \end{cases}$$

Если, как это часто бывает, правые части полученной системы зависят только от  $t$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\dot{\mathbf{e}}$ ,  $H$ , то эта система оказывается замкнутой и достаточной для полного описания движения тела, поскольку для динамически симметричного тела его положение вокруг динамической оси симметрии интереса не представляет.

Рассмотрим в качестве примера свободное движение тела. В этом случае  $M_{\zeta} = 0$  и  $\mathbf{m} = 0$ . Из первого уравнения находим  $H = \text{const}$ , а второе уравнение принимает вид

$$A\mathbf{e} \times \ddot{\mathbf{e}} + H\dot{\mathbf{e}} = 0.$$

из которого следует первый интеграл

$$A\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}} + H\mathbf{e} = \mathbf{K} = \text{const}.$$

Умножив это равенство скалярно на  $\mathbf{e}$ , находим

$$H = \mathbf{K} \cdot \mathbf{e} = K \cos \theta = \text{const}.$$

Таким образом, тело движется так, что угол  $\theta$  между осью  $\mathbf{e}$  и постоянным вектором  $\mathbf{K}$  остается постоянным, т.е. ось  $\mathbf{e}$  описывает коническую поверхность.

Для того чтобы выяснить скорость движения по этой конической поверхности, умножим найденный первый интеграл векторно на  $\mathbf{e}$  справа:

$$[A\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}] \times \mathbf{e} = \mathbf{K} \times \mathbf{e},$$

откуда следует

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{K}}{A} \times \mathbf{e}.$$



Это означает, что вектор  $\mathbf{e}$  движется по конической поверхности с постоянной угловой скоростью, равной

$$\mathbf{K}/A.$$

Движение тела, в котором тело вращается с постоянной скоростью вокруг некоторой оси, которая, в свою очередь, движется с постоянной скоростью по поверхности прямого кругового конуса, называется *регулярной прецессией*.

Таким образом, свободное движение динамически симметричного твердого тела полностью описано.

Выясним теперь, может ли тело совершать регулярную прецессию под действием внешнего момента  $\mathbf{m}$ .

Подставляем условие регулярной прецессии  $\dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{e}$  в уравнение  $A\mathbf{e} \times \ddot{\mathbf{e}} + H\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{m}$ , для чего предварительно вычислим

$$\ddot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\nu} \times \dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\nu} \times [\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{e}] = \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu} \cos \theta - \mathbf{e}\boldsymbol{\nu}^2.$$

После подстановки в уравнение находим

$$A\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu} \cos \theta + H\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{e} = \mathbf{m}.$$

Таким образом, вызывающий регулярную прецессию момент направлен по вектору  $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{e}$  и имеет модуль

$$m = (H - \nu A \cos \theta)\nu \sin \theta.$$

**7. Волчок Лагранжа.** Момент сил, вызывающий регулярную прецессию и вычисленный в п. 6, возникает естественным образом в случае, когда тело находится в поле тяжести, а центр тяжести его смещен вдоль оси симметрии на расстояние  $l$  от точки подвеса. Тогда уравнение движения волчка приобретает вид

$$A\mathbf{e} \times \ddot{\mathbf{e}} + H\dot{\mathbf{e}} = Mgl\mathbf{e} \times \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Здесь через  $M$  обозначена масса тела,  $g$  — ускорение земного тяготения,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — единичный вектор направления силы тяжести. Величина  $d = Mgl$  называется неуравновешенностью.

Будем искать частное решение этого уравнения в форме регулярной прецессии с осью прецессии, направленной по оси тяжести:

$$\dot{\mathbf{e}} = \nu\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{e},$$

где  $\nu$  — искомая угловая скорость прецессии.

Подставляя это выражение в уравнение волчка, получим

$$(H - \nu A \cos \theta)\nu + d = 0.$$

Если ось динамической симметрии перпендикулярна направлению поля тяжести, то  $\cos \theta = 0$  и написанное уравнение для нахождения скорости прецессии  $\nu$  имеет единственное решение

$$\nu = -d/H$$

— скорость прецессии направлена противоположно полю тяжести.

Если  $\cos \theta \neq 0$ , то рассматриваемое уравнение имеет решение вида

$$\nu = \frac{H \pm \sqrt{H^2 + 4Ad \cos \theta}}{2A \cos \theta}.$$

Отсюда видно, что если  $\cos \theta > 0$ , то имеются два решения. Если  $\cos \theta < 0$ , то два решения имеются, если

$$H^2 > -4Ad \cos \theta.$$

В частности, если  $\cos \theta = -1$ , то условие  $H^2 > 4Ad$  известно как условие Майевского устойчивости вертикального положения волчка. Если  $H^2 < 4Ad \cos \theta$ , то движений типа регулярной прецессии нет.

Во всех случаях существования двух решений одно из них

$$\nu = \frac{H + \sqrt{H^2 + 4Ad \cos \theta}}{2A \cos \theta} \rightarrow \infty \quad (H \rightarrow \infty)$$

имеет порядок роста  $H$  при увеличении  $H$ , другое

$$\nu = \frac{H - \sqrt{H^2 + 4Ad \cos \theta}}{2A \cos \theta} \rightarrow 0 \quad (H \rightarrow \infty)$$

имеет порядок убывания  $1/H$ .

Первое решение носит название *быстрой прецессии*, второе решение — *медленная прецессия*.

Динамически симметричное твердое тело, имеющее одну неподвижную точку и достаточно большой собственный кинетический момент  $H$ , называется *гироскопом*.

Предположение, что  $H \rightarrow \infty$ , позволяет воспользоваться *приближенной теорией гироскопа*, получаемой, если в уравнениях

$$\dot{H} = M_\zeta, \quad A\mathbf{e} \times \ddot{\mathbf{e}} + H\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{m}$$

пренебречь членом  $A\mathbf{e} \times \ddot{\mathbf{e}}$  в сравнении с членом  $H\dot{\mathbf{e}}$ :

$$\dot{H} = M_\zeta, \quad H\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{m}.$$

Эти уравнения называются *уравнениями прецессионной теории гироскопа*: скорость конца вектора собственного кинетического момента равна моменту внешних сил. В частности, если, как в предыдущем примере, к волчку в точке  $l$  на его оси приложена сила  $\mathbf{F}$ , то его прецессионные уравнения примут вид

$$\dot{H} = 0, \quad H\dot{\mathbf{e}} = l\mathbf{e} \times \mathbf{F}.$$

Из них следуют три основных свойства гироскопа:

1) гироскоп стремится сохранить направление своей оси неизменным в инерциальном пространстве, поскольку, несмотря на наличие  $\mathbf{F}$ , скорость  $\dot{\mathbf{e}} \rightarrow 0$  при  $H \rightarrow \infty$ ;

2)  $\dot{\mathbf{e}} \perp \mathbf{F}$  — приложенная сила вызывает движение не по направлению силы, а перпендикулярно ему;

3) гироскоп обладает свойством «безынерционности», т. е. при приложении силы  $\mathbf{F}$  или при снятии ее скорость  $\mathbf{e}$  мгновенно принимает значение  $(l/H)\mathbf{e} \times \mathbf{F}$  или обращается в ноль (гироскоп мгновенно останавливается).

## § 21. Реактивное движение

Системы, рассмотренные в гл. 4, состояли из неизменного числа точек, каждая из которых обладала неизменной массой. Такие системы называются системами *постоянного состава*.

Нередко, однако, приходится иметь дело с ситуацией, когда в процессе движения масса системы меняется.

Если рассматривать системы, в которых за малые промежутки времени и масса изменяется мало, т. е. системы с непрерывным изменением массы, то система переменного состава может быть представлена как система постоянного числа точек, обладающих переменной массой. В этом случае в число внешних сил, действующих на каждую точку, следует включить так называемые *реактивные силы*, обусловленные изменением массы, к вычислению которых мы и переходим.

Материальная точка (материальное тело, размерами которого можно по смыслу задачи пренебречь) может иметь переменную массу тогда, когда к ней непрерывно присоединяются или его непрерывно покидают частицы исчезающе малой массы.

Рассмотрим два состояния материальной точки массы  $m$ : в момент времени  $t$  и в близкий момент времени  $t + \Delta t$ . За время  $\Delta t$  к этой точке присоединилась частица массы  $\Delta m_1$ , имевшая перед присоединением скорость  $\mathbf{u}_1$ , и точку покинула частица массы  $\Delta m_2$  со скоростью  $\mathbf{u}_2$ . Подсчитаем количество движения системы точка и две частицы в моменты времени  $t$  и  $t + \Delta t$ . В момент времени  $t$ :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \Delta m_1 \mathbf{u}_1.$$

В момент времени  $t + \Delta t$ :

$$\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p} = (m + \Delta m_1 - \Delta m_2)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + \Delta m_2 \mathbf{u}_2.$$

Изменение количества движения равно импульсу всех внешних сил, действующих на точку и частицы:

$$\Delta \mathbf{p} = (m + \Delta m_1 - \Delta m_2)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + \Delta m_2 \mathbf{u}_2 - m\mathbf{v} - \Delta m_1 \mathbf{u}_1 = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F}^e dt.$$

Разделив это соотношение на  $\Delta t$  и устремив  $\Delta t$  к нулю, находим:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm_1}{dt}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_1) - \frac{dm_2}{dt}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_2) = \mathbf{F}^e.$$

Или

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^e + \mathbf{R},$$

где реактивная сила имеет вид

$$\mathbf{R} = \frac{dm_1}{dt}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}) - \frac{dm_2}{dt}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}).$$

Выражения  $\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}$  представляют собой относительные скорости соответственно присоединяющейся и отделяющейся частиц.

Полученное уравнение, обобщающее уравнение Ньютона на случай переменной массы, называется уравнением Мещерского. Использование реактивных сил для движения описано в «Пневматике» Герона (I век н.э.). Первое вычисление реактивной силы выполнено Д. Бернулли в его «Гидродинамике» в 1738 г.

*Пример* (обменные силы). Рассмотрим две достаточно длинные платформы, движущиеся параллельно друг другу (рис. 31).

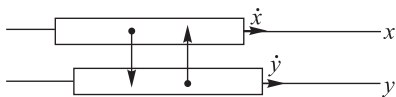


Рис. 31

Платформы имеют одинаковую массу  $M$  и различные начальные скорости. Когда одна из платформ догоняет другую, платформы начинают обмениваться грузом; причем количество массы, покидающей платформу в единицу времени,

равно количеству массы, добавляющейся к платформе за это же время. Будем полагать для простоты это количество постоянным. Скорость отделяющейся массы вдоль оси платформы равна скорости платформы (груз кидают перпендикулярно оси движения). Требуется определить движение платформ на интервале времени, в течение которого описанный обмен происходит, в предположении, что никакие внешние силы на платформы не действуют.

*Решение.* Напишем уравнение Мещерского для каждой платформы:

$$M\ddot{x} = \frac{dm}{dt}(u_1 - \dot{x}) - \frac{dm}{dt}(u_2 - \dot{x}),$$

$$M\ddot{y} = \frac{dm}{dt}(v_1 - \dot{y}) - \frac{dm}{dt}(v_2 - \dot{y}).$$

По условиям задачи  $dm/dt = \text{const}$ ;  $M = \text{const}$ ; скорость частиц, прибавляющихся к первой платформе, равна скорости второй платформы:  $u_1 = \dot{y}$  и, наоборот,  $v_1 = \dot{x}$ ; скорость частиц, покидающих первую платформу, равна скорости этой платформы:  $u_2 = \dot{x}$  и, аналогично,  $v_2 = \dot{y}$ . Поэтому написанная система принимает вид

$$\ddot{x} = \mu(\dot{y} - \dot{x}), \quad \ddot{y} = \mu(\dot{x} - \dot{y}) \quad \left( \mu = \frac{1}{M} \frac{dm}{dt} \right).$$

Реактивные силы, появившиеся в правых частях уравнений, носят название обменных сил, они приводят к выравниванию скоростей плат-

форм. Действительно, общее решение написанной системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}x &= A + Ct + De^{-2\mu t}, & \dot{x} &= C - 2\mu De^{-2\mu t}, \\y &= B + Ct - De^{-2\mu t}, & \dot{y} &= C + 2\mu De^{-2\mu t}.\end{aligned}$$

Произвольные постоянные  $A, B, C, D$  определяются начальными условиями. Видно, что если время действия обменных сил достаточно велико, то скорости  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  стремятся к общему значению:

$$C = \frac{1}{2}[\dot{x}(0) + \dot{y}(0)].$$

## § 22. Теория удара

**1. Понятие об ударе.** Ударом называется процесс мгновенного изменения скорости материальной точки под действием мгновенных сил. Понятие мгновенного изменения скорости и понятие мгновенной силы являются весьма удобными в расчетах идеализациями той ситуации, когда конечное изменение скорости происходит за малые промежутки времени при кратковременном действии больших по величине сил.

Понятия «большая сила» и «малый промежуток времени» имеют смысл, когда сила сравнивается с какими-либо другими силами, действующими на точку, а время — с характерными промежутками времени, такими как, например, период собственных колебаний, время затухания переходного процесса и т. п.

Если кроме мгновенных сил на точку не действуют никакие другие, то идеализация при помощи удара имеет субъективный характер: время действия мало по сравнению со временем наблюдения, а сила считается большой потому, что за малое время приводит к конечным изменениям скорости.

Рассмотрим действие мгновенных сил на материальную точку. Движение свободной материальной точки под действием силы  $\mathbf{F}$  подчиняется дифференциальному уравнению

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}.$$

Изменение количества движения материальной точки за время от  $t_0$  до  $t$  равно

$$m\dot{\mathbf{r}} - m\dot{\mathbf{r}}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt.$$

Векторная величина, равная

$$\mathbf{J} = \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt,$$

называется импульсом силы за промежуток времени от  $t_0$  до  $t$  (§ 11).

*Мгновенной силой*, действующей на материальную точку в момент времени  $t_0$ , назовем такую идеализацию большой силы  $\mathbf{F}$ , действующей на малом промежутке времени  $t - t_0$ , при которой следующий предел имеет конечное значение:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt = \mathbf{J}.$$

Этот предел и называется *ударным импульсом*.

Изменение количества движения материальной точки при этом равно

$$\Delta(m\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{J}.$$

То есть скорость рассматриваемой точки в момент времени  $t_0$ , в который действует ударный импульс, изменяется скачком.

Заметим, что мгновенная сила за время своего действия не производит перемещения материальной точки. Действительно, если еще раз проинтегрировать исходные дифференциальные уравнения, то получим

$$m\mathbf{r} - m\mathbf{r}_0 = m\dot{\mathbf{r}}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt$$

и при переходе к пределу  $t \rightarrow t_0$  имеем  $m\mathbf{r} - m\mathbf{r}_0 = 0$ , поскольку

$$\int_{t_0}^t \mathbf{F} dt \rightarrow \mathbf{J}, \quad \int_{t_0}^t \mathbf{J} dt \rightarrow 0.$$

**2. Общие теоремы теории удара.** Общие теоремы динамики системы материальных точек могут быть переформулированы для случая, когда среди действующих на систему сил присутствуют мгновенные силы, следующим образом.

*Теорема об изменении количества движения при ударе.* Аналитическое выражение теоремы в общем случае

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left( \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu} \right) = \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu},$$

в котором в левой части стоит производная от количества движения системы материальных точек, а в правой части — сумма всех внешних

сил, действующих на эту систему, после интегрирования от  $t_0$  до  $t$  принимает вид

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \int_{t_0}^t \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} dt.$$

При  $t \rightarrow t_0$  импульсы обычных сил стремятся к нулю, импульсы мгновенных сил, в соответствии с принятой выше идеализацией этих сил, стремятся к ударным импульсам:

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \sum_{\nu} \mathbf{J}_{\nu}.$$

*Изменение количества движения системы материальных точек в момент удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему в этот момент.*

*Теорема об изменении момента количеств движения при ударе.* Проинтегрируем от  $t_0$  до  $t$  аналитическое выражение для этой теоремы, записанное в общем случае в виде

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left( \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{r}_{\nu} \times \dot{\mathbf{r}}_{\nu} \right) = \sum_{\nu} \mathbf{r}_{\nu} \times \mathbf{F}_{\nu} - M \mathbf{r}_c \times \mathbf{w}_0,$$

где  $\mathbf{w}_0$  — ускорение той точки (полюс), относительно которой вычисляются момент количеств движения и момент внешних сил,  $\mathbf{r}_c$  — координата центра масс в системе, начало которой совпадает с подвижным полюсом,  $\mathbf{r}_{\nu}$  — координаты точек в этой системе.

В результате интегрирования имеем

$$\mathbf{K} - \mathbf{K}_0 = \int_{t_0}^t \sum_{\nu} \mathbf{r}_{\nu} \times \mathbf{F}_{\nu} dt - \int_{t_0}^t M \mathbf{r}_c \times \mathbf{w}_0 dt.$$

При  $t \rightarrow t_0$  в правой части остаются лишь моменты от внешних мгновенных сил:

$$\mathbf{K} - \mathbf{K}_0 = \sum_{\nu} \mathbf{r}_{\nu} \times \mathbf{J}_{\nu}.$$

*Изменение момента количеств движения системы материальных точек относительно произвольно движущегося полюса в момент удара равно моменту внешних ударных импульсов.*

Подчеркнем, что эта теорема имеет одинаковый вид независимо от того, подвижен или неподвижен полюс, совпадает ли он с центром масс или нет.

*Общее уравнение динамики системы материальных точек при ударе.* Общее уравнение динамики системы некоторого числа связанных материальных точек

$$\sum_{\nu} [(m_{\nu} \ddot{x}_{\nu} - F_{x\nu}) \delta x_{\nu} + (m_{\nu} \ddot{y}_{\nu} - F_{y\nu}) \delta y_{\nu} + (m_{\nu} \ddot{z}_{\nu} - F_{z\nu}) \delta z_{\nu}] = 0$$

для описания процесса удара может быть видоизменено следующим образом. Пусть среди сил  $\mathbf{F}_\nu$  присутствуют мгновенные силы. Обозначим эти силы через  $\mathbf{G}_\nu$  и выделим их из сил  $\mathbf{F}_\nu$ :

$$\mathbf{F}_\nu = \mathbf{G}_\nu + \Phi_\nu,$$

где  $\Phi_\nu$  — прочие, «обычные» силы.

Общее уравнение динамики будет справедливым и в случае, если гипотезу Лагранжа об идеальных связях распространить и на случай удара. Осуществляя интегрирование за время удара, запишем

$$\int_{t_0}^t (m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{F}_\nu) dt = m_\nu \Delta \dot{\mathbf{r}}_\nu - \int_{t_0}^t \Phi_\nu dt - \int_{t_0}^t \mathbf{G}_\nu dt.$$

Поскольку

$$\int_{t_0}^t \Phi_\nu dt \rightarrow 0, \quad \int_{t_0}^t \mathbf{G}_\nu dt \rightarrow \mathbf{J}_\nu \quad (t \rightarrow t_0),$$

то общее уравнение динамики можно переписать в виде

$$\sum_{\nu} (m_\nu \Delta \dot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{J}_\nu) \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0,$$

называемом *общим уравнением теории удара*.

*Теорема Карно.* В теореме Карно рассматривается система связанных материальных точек, на которую не действуют внешние ударные импульсы  $\mathbf{J}_\nu = 0$ , но которая в некоторый момент времени подвержена внезапному наложению дополнительных связей, сохраняющихся в дальнейшем. Такие связи называются *неупругими*. Общее уравнение теории удара в этом случае имеет вид

$$\sum_{\nu} m_\nu \Delta \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0.$$

Положим, что связи не зависят от времени. Тогда можно выбрать  $\delta \mathbf{r}_\nu = k \dot{\mathbf{r}}_\nu$  и из написанного уравнения получим

$$\sum_{\nu} m_\nu (\dot{\mathbf{r}}_\nu - \dot{\mathbf{r}}_{\nu 0}) \dot{\mathbf{r}}_\nu = 0.$$

Поскольку

$$(\dot{\mathbf{r}}_\nu - \dot{\mathbf{r}}_{\nu 0}) \dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{(\dot{\mathbf{r}}_\nu - \dot{\mathbf{r}}_{\nu 0})^2}{2} + \frac{\dot{\mathbf{r}}_\nu^2}{2} - \frac{\dot{\mathbf{r}}_{\nu 0}^2}{2},$$

то

$$\sum_{\nu} \frac{m_\nu \mathbf{v}_\nu^2}{2} = T_0 - T_1,$$



где

$$\mathbf{v}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu - \dot{\mathbf{r}}_{\nu_0}, \quad T_0 = \sum_\nu \frac{m_\nu \dot{\mathbf{r}}_{\nu_0}^2}{2}, \quad T_1 = \sum_\nu \frac{m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu^2}{2}.$$

Потеря кинетической энергии при наложении неупругих связей равна кинетической энергии потерянных скоростей.

**3. Удар материальной точки о препятствие.** Препятствие, о которое происходит соударение материальной точки, полагается неподвижным в некоторой инерциальной системе координат. Удар называется *прямым*, если скорость материальной точки перед соударением направлена по нормали к поверхности препятствия в точке соударения. Удар называется *абсолютно упругим*, если скорость материальной точки при ударе меняется на противоположную:  $v^+ = -v^-$  ( $v^-$  — скорость до удара,  $v^+$  — после). Удар называется *абсолютно неупругим*, если после удара материальная точка осталась на поверхности, т. е.  $v^+ = 0$ .

Промежуточный случай выражается гипотезой Ньютона:

$$v^+ = -kv^-,$$

где коэффициент  $k$ , называемый коэффициентом восстановления, лежит в пределах  $0 \leq k \leq 1$ .

*Косой удар* (рис. 32). Если скорость материальной точки перед ударом не направлена по нормали к поверхности, то следует рассмотреть изменение обеих ее проекций (движение предполагается плоским). Для проекции на нормаль используется, как и в случае прямого удара, гипотеза Ньютона:

$$v_y^+ = -kv_y^-.$$

Для того чтобы связать доударные и послеударные значения составляющей скорости вдоль препятствия, требуется новая гипотеза. Употребительными являются две гипотезы. Первая использует закон Кулона, связывающий нормальное и касательное усилия при сухом трении (гипотеза Рауса), что приводит к соотношению

$$v_x^+ - v_x^- = f(v_y^+ - v_y^-)$$

— приращение скорости в касательном направлении пропорционально приращению скорости в нормальном направлении,  $f$  — коэффициент сухого трения. Подставляя в это соотношение связь между нормальными составляющими, получим

$$v_x^+ - v_x^- = -f(1+k)v_y^-,$$

что и выражает в окончательной форме гипотезу Рауса.

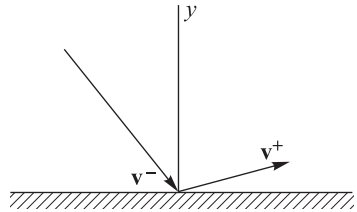


Рис. 32

Другая, более простая гипотеза основывается на предположении, что изменение касательной составляющей скорости пропорционально доударному значению этой составляющей:

$$v_x^+ - v_x^- = -\lambda v_x^-.$$

**Стесненный удар.** Стесненным ударом называется удар несвободной материальной точки о неподвижное препятствие, т. е. точки, стесненной некоторыми связями с другими точками.

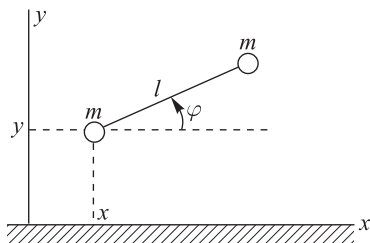


Рис. 33

В случае нестесненного косого удара движение материальной точки характеризуется равенством угла падения углу отражения, когда удар абсолютно упругий, и бóльшим значением угла отражения для неупругого удара (угол измеряется от нормали). В случае стесненного удара равенства этих углов может не быть даже для абсолютно упругого удара.

Рассмотрим пример на рис. 33.

Две материальные точки с одинаковыми массами, связанные абсолютно жестким, невесомым стержнем, совершают плоское движение. Одна из точек сталкивается с неподвижной преградой, характеризуемой неудерживающей связью  $y \geq 0$ . Перед ударом скорости  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}$  произвольны. Требуется найти приращения этих скоростей  $\Delta\dot{x}, \Delta\dot{y}, \Delta\dot{\varphi}$ , возникающие в результате удара в предположении, что удар идеальный (кинетическая энергия системы в момент удара не изменяется).

В этом примере материальная точка в момент удара находится под действием двух мгновенных сил: одна сила направлена по нормали к поверхности, о которую происходит соударение, вторая сила направлена по стержню, связывающему две точки, и определяет реакцию связи в момент удара. Это и объясняет более сложную картину движения, чем в случае свободной материальной точки. Общий метод решения подобных задач дан в § 34.

**Столкновение двух материальных точек.** Рассмотрим простейшую ситуацию, когда сталкиваются две движущиеся по одной прямой материальные точки.

Пусть их массы  $m_1$  и  $m_2$ , а скорости  $v_1$  и  $v_2$  соответственно. Скорости измеряются в той системе отсчета, в которой центр масс неподвижен.

Из закона сохранения количества движения имеем

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0.$$

Это соотношение справедливо как для доударных скоростей, так и для последударных, поскольку никаких внешних мгновенных сил не

предполагается. Из этого следует

$$v_2^- = -\frac{m_1}{m_2}v_1^-, \quad v_2^+ = -\frac{m_1}{m_2}v_1^+.$$

Гипотеза Ньютона для двух сталкивающихся материальных точек состоит в равенствах:

$$v_1^+ = -kv_1^-, \quad v_2^+ = -kv_2^-.$$

Этими равенствами связаны не только скорости точек относительно их общего центра масс, но и доударная и послеударная относительные скорости  $u = v_2 - v_1$ :

$$u^+ = -ku^-.$$

Если одно из тел много больше другого ( $m_1 \gg m_2$ ), то задача о столкновении двух точек переходит в задачу о столкновении точки с неподвижным препятствием.

**4. Удар шаров.** Задача об ударе шаров в предположении, что ударный импульс направлен по общей нормали к поверхности шаров в точке касания, сводится к задаче об ударе двух материальных точек. Действительно, проведя ось  $x$  через центры шаров в момент удара (рис. 34), заключаем, что изменение количества движения любого из шаров в проекции на ось  $y$  равна нулю (поскольку сила взаимодействия между шарами не имеет проекции на эту ось). Следовательно, проекции скоростей шаров на ось  $y$  в момент удара изменений не претерпевают. Что касается проекций этих скоростей на ось  $x$ , то они подчиняются законам, установленным для удара двух точек.

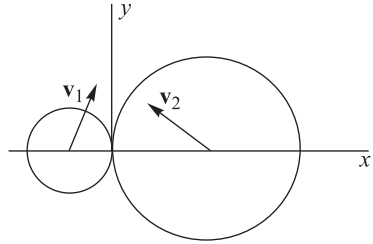


Рис. 34

**5. Удар твердых тел.** Теорема об изменении момента количества движения относительно неподвижной точки, записанная для твердого тела в проекциях на жестко связанные с ним оси, имеет вид (уравнения Эйлера)

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость твердого тела,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки приложения мгновенной силы  $\mathbf{F}$ .

Интегрируя это уравнение на интервале от  $t_0$  до  $t$ , на котором действует мгновенная сила, имеем

$$\mathbf{K} - \mathbf{K}_0 + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} dt = \mathbf{r} \times \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt$$

(предполагается, что точка приложения мгновенной силы не изменяется за время от  $t_0$  до  $t$ ).

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{t_0}^t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} dt = 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt = \mathbf{J}$$

и для изменения момента количества движения тела при ударе получается

$$\mathbf{K} - \mathbf{K}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{J}.$$

*Гироскопические свойства тела при ударе никак не проявляются: изменение момента количества движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, под действием ударного импульса имеет одинаковый вид как в проекциях на неподвижные оси, так и на связанные с телом оси.*

*Действие удара на твердое тело, имеющее неподвижную ось вращения.* Рассмотрим твердое тело в системе координат  $xuz$ ,

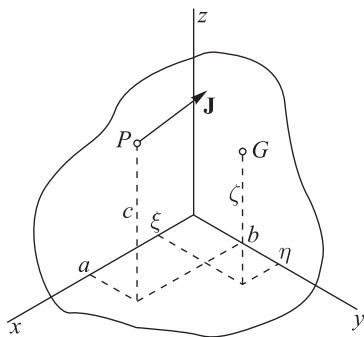


Рис. 35

ось  $z$  которой направлена по оси вращения тела (рис. 35). Центр масс тела находится в точке  $G(\xi, \eta, \zeta)$ . В точке  $P(a, b, c)$  к телу приложен ударный импульс  $\mathbf{J} = \{J_x, J_y, J_z\}$ .

Поставим задачу: найти точку приложения импульса, т. е. величины  $a, b, c$ , такие, чтобы ось вращения не испытывала ударных нагрузок. Такая точка существует, и она называется *центром удара*.

В результате удара первоначально покоившееся тело приобретает вокруг оси  $z$  угловую скорость  $\omega$ . По теореме об изменении количества движения

имеем

$$-M\omega\eta = J_x, \quad M\omega\xi = J_y, \quad J_z = 0.$$

По теореме об изменении момента количества движения

$$-\mathcal{J}_{xz}\omega = -cJ_y, \quad -\mathcal{J}_{yz}\omega = cJ_x, \quad \mathcal{J}_{zz}\omega = J_ya - J_xb.$$

В этих соотношениях через  $M$  обозначена масса тела, а через  $\mathcal{J}_{xz}, \mathcal{J}_{yz}, \mathcal{J}_{zz}$  обозначены моменты инерции тела относительно соответствующих осей.

Из условия  $J_z = 0$  следует, что ударный импульс должен быть перпендикулярен оси вращения. Неподвижную систему  $xuz$  можно выбрать так, чтобы ударный импульс лежал в плоскости  $xy$ ; кроме того, поворотом этой системы вокруг оси  $z$  можно добиться ортогональности

этого импульса оси  $x$ . Таким образом, без ограничения общности можно считать, что  $J_x = 0$ .

Тогда приведенные выше соотношения примут вид

$$\begin{aligned} -\omega\eta &= 0, & M\omega\xi &= J_y, & -\mathcal{J}_{xz}\omega &= 0, \\ -\mathcal{J}_{yz}\omega &= 0, & \mathcal{J}_{zz}\omega &= aJ_y. \end{aligned}$$

Отсюда следует:  $\eta = 0$  — центр масс должен лежать в плоскости, перпендикулярной ударному импульсу и проходящей через ось вращения;  $\mathcal{J}_{xz} = \mathcal{J}_{yz} = 0$  — ось вращения должна быть главной осью инерции тела в точке  $O$ ;  $a = \mathcal{J}_{zz}/(M\xi)$ ,  $b$  — произвольно.

## § 23. Теория рассеяния частиц

Ставится следующая задача. Пучок легких электрически заряженных частиц, летящих из бесконечности, имеет первоначально цилиндрическую форму. Пролетая вблизи ядра тяжелого элемента, каждая частица испытывает воздействие со стороны ядра посредством кулоновой силы. Вследствие этого при удалении частиц в бесконечность пучок приобретает коническую форму (рис. 36). Это явление называется рассеянием частиц.

Будем предполагать взаимодействие частиц друг с другом несущественным и сведем задачу к задаче двух тел (§ 19) с тем только отличием, что вместо силы притяжения будем иметь в виду силу отталкивания.

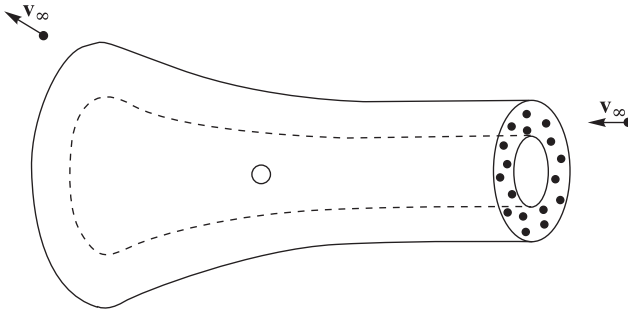


Рис. 36

Обозначив массу легкой частицы  $m$ , а массу ядра  $M$ , в системе координат, связанной с центром масс ядра и частицы, получим

$$m\ddot{\mathbf{r}} = k \frac{e_1 e_2}{(1 + m/M)^2} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

где  $e_1$  и  $e_2$  — электрические заряды ядра и частицы, имеющие одинаковый знак,  $k$  — множитель пропорциональности, зависящий от выбранной системы единиц,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор легкой частицы.

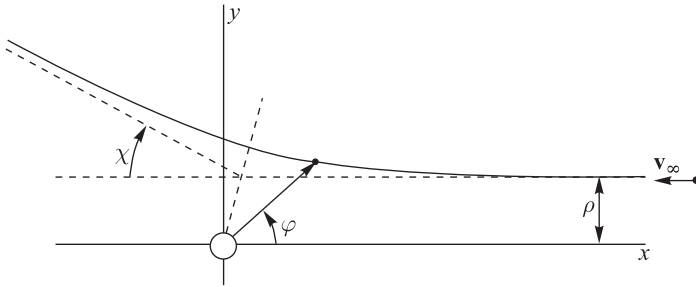


Рис. 37

Как и в § 19 введем в плоскости движения полярную систему координат  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  (рис. 37). Тогда в переменных  $r$  и  $\varphi$  уравнения движения примут вид

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \frac{\alpha}{r^2}, \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0.$$

Являющийся постоянным в силу второго уравнения момент количества движения частицы  $mr^2\dot{\varphi}$  может быть выражен через скорость частицы на бесконечности  $V_\infty$  и через прицельное расстояние  $\rho$ :

$$K = mr^2\dot{\varphi} = mV_\infty\rho.$$

Выполняя, как и в § 19, подстановку Бине, найдем

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m\alpha}{K^2} \quad \left(u = \frac{1}{r}\right)$$

с очевидным начальным условием

$$u(0) = 0.$$

Начальное условие для  $du/d\varphi$  найдем, используя равенство

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{K}{mr^2} = -\frac{K}{m} \frac{du}{d\varphi}.$$

Поскольку при  $\varphi = 0$   $\dot{r} = -V_\infty$ , имеем

$$\left. \frac{du}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = \frac{mV_\infty}{K} = \frac{1}{\rho}.$$

После этого решение написанного дифференциального уравнения второго порядка с указанными начальными условиями получается в виде

$$u = \frac{m\alpha}{K^2}(\cos \varphi - 1) + \frac{1}{\rho} \sin \varphi.$$

Или, учитывая выражения для  $K = mV_\infty \rho$ :

$$u = \frac{\alpha}{mV_\infty^2 \rho^2} (\cos \varphi - 1) + \frac{1}{\rho} \sin \varphi.$$

Нас интересует то значение угла  $\varphi$ , при котором  $r$  снова уходит в бесконечность:

$$\frac{\alpha}{mV_\infty^2 \rho^2} (\cos \varphi - 1) + \frac{1}{\rho} \sin \varphi = 0,$$

откуда находим связь прицельного расстояния  $\rho$  с углом, определяющим отклонение траектории:

$$\rho = \frac{\alpha}{mV_\infty^2} \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\alpha}{mV_\infty^2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha}{mV_\infty^2} \operatorname{ctg} \frac{\varkappa}{2} \quad (\varkappa = \pi - \varphi).$$

Пусть теперь  $dN$  — число частиц, рассеиваемых внутри угла от  $\varkappa$  до  $\varkappa + d\varkappa$ . Число частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади в исходной трубке, обозначим буквой  $n$ .

Отношение

$$\Delta\sigma = \frac{dN}{n}$$

носит название *дифференциального эффективного поперечного сечения рассеяния*.

В луч, заключенный между углами  $\varkappa$  и  $\varkappa + d\varkappa$ , попадают частицы, которые в начале движения прошли через кольцо с внутренним диаметром  $\rho$  и внешним  $\rho + d\rho$ . Таких частиц в единицу времени проходит

$$dN = n \cdot 2\pi\rho d\rho = \pi n d\rho^2.$$

Следовательно,

$$d\sigma = \pi d\rho^2.$$

Подставляя сюда найденное выше значение  $\rho$ , находим выражение для абсолютной величины  $d\sigma$ :

$$d\sigma = \pi \left( \frac{\alpha}{mV_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos(\varkappa/2)}{\sin^3(\varkappa/2)} d\varkappa.$$

Это выражение называется *формулой Резерфорда*.

От угла  $d\varkappa$  удобно перейти к телесному углу  $d\theta$ :

$$d\theta = 2\pi \sin \varkappa d\varkappa.$$

Формула Резерфорда тогда приобретает вид

$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{mV_\infty^2} \right)^2 \frac{d\theta}{\sin^4(\varkappa/2)}.$$

# Часть 3

## ЛАГРАНЖЕВА МЕХАНИКА

### Глава 6

#### УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

#### § 24. Основные определения

*Механической системой* будем называть конечную или бесконечную совокупность материальных точек в трехмерном евклидовом пространстве.

Будем говорить, что положение механической системы известно, если известно положение любой ее точки в некоторой декартовой системе координат.

Сказанное означает, что нам известна вектор-функция

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\nu) = \left\| \begin{array}{c} x(\nu) \\ y(\nu) \\ z(\nu) \end{array} \right\|,$$

ставящая в соответствие точке системы, имеющей номер  $\nu$ , ее декартовы координаты  $x, y, z$ .

Два разных положения механической системы  $\mathbf{R}_1(\nu)$  и  $\mathbf{R}_2(\nu)$  близки друг другу, если точки  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  близки в смысле метрики *трехмерного евклидова пространства*  $E^3$  для любого  $\nu$ .

Механическая система называется системой с *конечным числом степеней свободы*, если можно ввести такое конечномерное линейное (векторное) пространство  $R^m$  и такое множество точек  $M$  в нем, что между всеми возможными положениями механической системы и всеми точками множества  $M \subset R^m$  имеется взаимно однозначное соответствие. Множество  $M$  называется *конфигурационным многообразием* механической системы, если указанное соответствие дифференцируемо в обе стороны (под дифференцируемостью понимается  $k$ -кратная непрерывная дифференцируемость, при этом конкретное значение  $k$  несущественно).



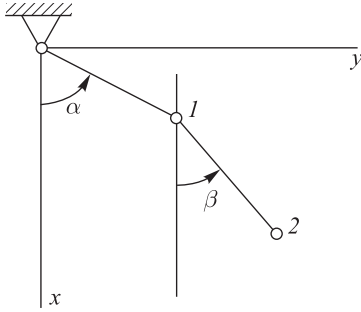


Рис. 38

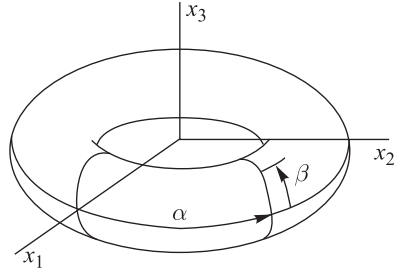


Рис. 39

*Пример 1.* На рис. 38 изображен двухзвенный маятник, состоящий из двух материальных точек 1 и 2, соединенных невесомыми, нерастяжимыми стержнями.

Конфигурационное многообразие этой системы является тором (рис. 39). Откладывая углы  $\alpha$  и  $\beta$  от произвольно выбранных за нулевые меридиана и параллели, убеждаемся в наличии взаимно однозначного соответствия между точками тора и положениями двухзвенного маятника. Сам тор в  $R^3$  может быть задан, например, уравнением

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5)^2 + 16x_3^2 = 16.$$

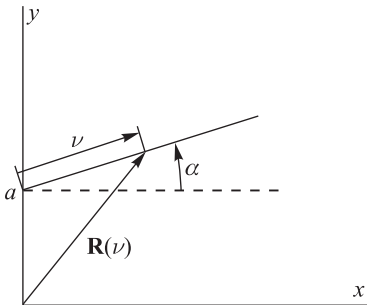


Рис. 40

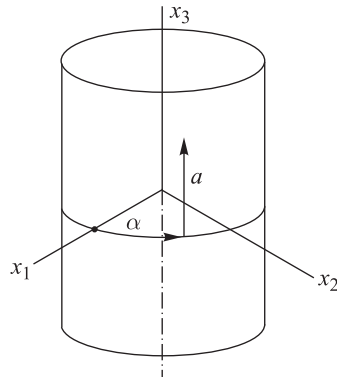


Рис. 41

*Пример 2.* Тонкий абсолютно жесткий стержень длиной  $l$ , один конец которого занимает произвольное положение на оси  $y$  (рис. 40), угол наклона стержня к оси  $x$  также произволен. Конфигурационным многообразием этой системы является бесконечный цилиндр (рис. 41),

уравнение которого может быть задано в виде

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ x_3 — \text{произвольно.}$$

*Пример 3.* Абсолютно твердое тело (рис. 42). В качестве номера точки, принадлежащей телу, можно взять ее декартовы координаты в некотором, жестко связанном с телом декартовом трехграннике ( $\nu$  — в этом случае вектор).

В § 6 было показано, что конфигурационным многообразием твердого тела, одна точка которого неподвижна, является группа  $SO(3)$ . Если  $A$  — матрица, определяющая ориентацию трехгранника  $\xi\eta\zeta$  относительно трехгранника  $xyz$ :

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{vmatrix},$$

то это многообразие задается в пространстве  $R^6$  уравнениями

$$x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \\ x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1, \quad \det A = 1.$$

Если точка  $O$  не закреплена и ее координаты  $x_0, y_0, z_0$  произвольны, то конфигурационное многообразие такого тела представляет собой произведение группы  $SO(3)$  на трехмерное пространство  $R^3$ .

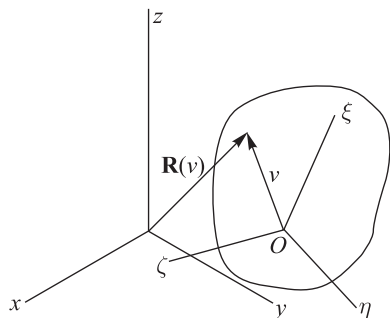


Рис. 42

*Число степеней свободы* механической системы называется размерность ее конфигурационного многообразия. Напомним, что размерностью многообразия называется разность между размерностью пространства, в которое оно погружено, и числом уравнений, задающих многообразие аналитически. В примерах 1 и 2 число степеней свободы равно двум, в примере 3 — шести. (Условие  $\det A = 1$  не ограничивает размерности многообразия, поскольку в общем случае

ортогональных матриц  $\det A = \pm 1$  и это условие представляет собой лишь выбор одной из полостей в общем случае несвязного многообразия.)

*Параметризация* механической системы с конечным числом степени свободы называется введение конечного числа параметров

$q_1, \dots, q_n$ , задание которых однозначно определяет положение системы:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\nu, t, q_1, \dots, q_n).$$

Сами параметры  $q_1, \dots, q_n$  называются *лагранжевыми параметрами*.

Очевидно, в качестве таких параметров можно взять координаты того  $R^m$ , в которое погружено конфигурационное многообразие рассматриваемой системы:  $q_i = x_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), тогда запись  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\nu, t, q)$ ,  $q \in M \subset R^m$  определяет *глобальную* параметризацию. Однако если взаимно однозначного соответствия между положениями системы и точками ее конфигурационного многообразия требовать не всюду, а лишь в некоторой окрестности выбранного положения, то, используя уравнения многообразия, можно уменьшить число параметров  $q_i$  до минимального, равного числу степеней свободы. Такая параметризация называется *локальной*.

Функция  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\nu, t, q_1, \dots, q_n)$ , задающая локальную параметризацию, должна обеспечивать взаимно однозначное и взаимно непрерывно дифференцируемое соответствие между точками указанных окрестностей. В частности, не должно существовать такого направления  $\{e_i\}$ , производная вдоль которого равна нулю тождественно по всем точкам системы, т. е. по  $\nu$ . Следовательно, должно быть выполнено

$$\sum_i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} e_i \neq 0, \quad \forall e_i \quad \left( \sum e_i^2 = 1 \right).$$

В противном случае будет существовать такая вариация локальных координат, которая не приводит к вариации положения, что вступает в противоречие с требованием непрерывной дифференцируемости обратного отображения.

Геометрически независимые параметры  $q_i$ , задающие локальную параметризацию, называются *локальными координатами* конфигурационного многообразия или *обобщенными координатами* рассматриваемой механической системы.

В примере 1 локальная параметризация может быть такой:

$$\mathbf{R}(1, q) = \left\| \begin{array}{l} l_1 \cos q_1 \\ l_1 \sin q_1 \end{array} \right\|, \quad \mathbf{R}(2, q) = \left\| \begin{array}{l} l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2 \\ l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_2 \end{array} \right\|,$$

где  $q_1 \equiv \alpha$ ,  $q_2 \equiv \beta$ .

В примере 2 локальная параметризация может быть записана так:

$$\mathbf{R}(\nu, q) = \left\| \begin{array}{l} \nu \cos q_1 \\ \nu \sin q_1 + q_2 \end{array} \right\|, \quad \nu \in [0, l],$$

где  $q_1 = \alpha$ ,  $q_2 = a$ .

В примере 3 локальная параметризация имеет следующий вид:

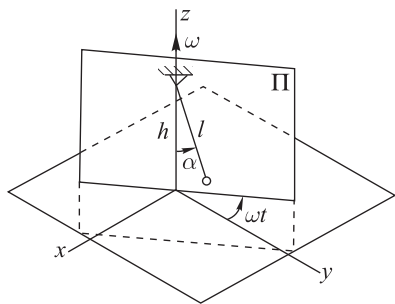
$$\mathbf{R}(\nu, q) = \left\| \begin{array}{l} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{array} \right\| + A \left\| \begin{array}{l} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{array} \right\|, \quad \nu = \left\| \begin{array}{l} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{array} \right\|, \quad \nu \in \text{телу},$$

где  $A$  — ортогональная матрица, выраженная, например, через углы Эйлера (§ 6). При этом  $q_3 = \psi$ ,  $q_4 = \theta$ ,  $q_5 = \varphi$ .

Если параметризация  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\nu, t, q)$  от времени явно не зависит, то такая параметризация называется *стационарной*. В противном случае параметризация *нестационарная*.

Во всех предыдущих примерах параметризация была стационарной.

*Пример 4.* Пример нестационарной параметризации доставляет система, изображенная на рис. 43. Она представляет собой математический маятник, который может занимать произвольное положение в плоскости  $\Pi$  (угол  $\alpha$  — произволен). Сама же плоскость  $\Pi$  принудительно вращается вокруг оси  $z$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Конфигурационным многообразием этой системы является окружность. Угол  $\alpha$  можно взять в качестве ее локальной координаты  $q_1 = \alpha$ . Положение маятника однозначно задается следующим образом:



$$\mathbf{R}(t, q) = \begin{pmatrix} l \sin q \cos \omega t \\ l \sin q \sin \omega t \\ h - l \cos q \end{pmatrix}$$

(зависимости от номера нет, так как точка одна). Если механическая система движется, то локальные координаты конфигурационного многообразия  $q$  являются функциями времени:

$$q_i = q_i(t) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Рис. 43

Если в движении системы локальные координаты не стеснены никакими дополнительными условиями типа

$$f_k(t, q, \dot{q}) = 0, \quad k = 1, \dots, s,$$

связывающими производные от обобщенных координат, то такие координаты называются *кинематически независимыми*, а сами механические системы — *голономными*.

*Виртуальным перемещением* механической системы, локальная параметризация которой —  $\mathbf{R}(\nu, t, q)$ , называется полный дифференциал этой функции при фиксированном времени:

$$\delta \mathbf{R} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \delta q_i.$$

## § 25. Вывод уравнений Лагранжа

Рассмотрим в механической системе малую окрестность некоторой точки  $\mathbf{R}$ . Расположенный в этой окрестности малый элемент механи-

ческой системы имеет массу  $dm$  и находится под действием сил с массовой плотностью  $\mathbf{F}$ , так что сила, действующая на рассматриваемый элемент, есть  $\mathbf{F} dm$ .

В соответствии со вторым законом Ньютона  $\ddot{\mathbf{R}} dm = \mathbf{F} dm$  получаем

$$\ddot{\mathbf{R}} - \mathbf{F} = 0.$$

Рассмотрим виртуальное перемещение системы  $\delta\mathbf{R}$  и вычислим работу силы  $\mathbf{F} dm$  на этом перемещении:  $\delta\mathbf{R} \cdot \mathbf{F} dm$ . Полная работа всех сил, действующих на точки системы на виртуальном перемещении  $\delta\mathbf{R}$ , есть

$$\delta A = \int \delta\mathbf{R} \cdot \mathbf{F} dm.$$

Интегрирование ведется по всей массе системы. Подставляя сюда выражение для виртуального перемещения, находим

$$\delta A = \sum_i \delta q_i \int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{F} dm = \sum_i \varphi_i \delta q_i,$$

где

$$\varphi_i = \int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{F} dm$$

— коэффициенты линейной формы вариации положения  $\delta q$  механической системы в конфигурационном многообразии.

Действующие на элемент  $dm$  силы с массовой плотностью  $\mathbf{F}$  могут быть разбиты на два класса — реакции связей, плотность которых обозначим  $\mathbf{F}^l$ , и все остальные с плотностью  $\mathbf{F}^d$ .

Реакции связей представляют собой силы взаимодействия между точками системы или с внешними по отношению к рассматриваемой системе точками, которые неизвестны заранее как функции времени, положения и скорости точек и должны быть определены из условий, наложенных на взаимное положение этих точек. Все прочие силы задаются в виде функций:  $\mathbf{F}^d = \mathbf{F}^d(t, \mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})$ .

Если в примере со стержнем (рис. 40) предположить, что он находится в однородном поле тяжести с силой тяжести, направленной вдоль оси  $x$ , то

$$\mathbf{F}^d = \left\| \begin{array}{c} g \\ 0 \end{array} \right\|,$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести.

Реакции связей в этом примере представляют собой силы двух видов: внутренние напряжения в стержне, вычисляемые из условия, что он абсолютно недеформируем, и сила реакции в точке стержня  $\nu = 0$ , вычисляемая из условия, что эта точка не покидает ось  $y$ . Эта сила является сосредоточенной, и ее массовая плотность представляется с помощью дельта-функции Дирака.

*Гипотеза идеальных связей.* Связи называются *идеальными*, если виртуальная работа реакций связей тождественно по  $\delta q$  равна нулю.

Для того чтобы связи были идеальными, необходимо и достаточно равенство нулю коэффициентов линейной формы виртуальной работы, вычисленных для  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^l$ :

$$\varphi_i(\mathbf{F}^l) = \int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{F}^l dm = 0.$$

Достаточность этого условия очевидна; необходимость следует из условия независимости вариаций  $\delta q_i$  и имеет место только для голономных систем.

*Определение.* Коэффициенты линейной формы виртуальной работы заданных сил  $\mathbf{F}^d$  называются *обобщенными силами* рассматриваемой механической системы:

$$Q_i = \int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{F}^d dm.$$

Из уравнения Ньютона  $\ddot{\mathbf{R}} - \mathbf{F} = 0$  следует

$$\sum_i \delta q_i \int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} (\ddot{\mathbf{R}} - \mathbf{F}) dm = 0.$$

Или, предполагая выполненной гипотезу идеальных связей и учитывая обозначение для обобщенных сил:

$$\sum_i \delta q_i \left( \int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \ddot{\mathbf{R}} dm - Q_i \right) = 0.$$

Если система голономна, то все  $\delta q_i$  независимы и из этого соотношения следует

$$\int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \ddot{\mathbf{R}} dm = Q_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Вычислим стоящий в левой части равенства интеграл, для чего установим предварительно некоторые соотношения

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i}.$$

Наряду с этим соотношением покажем переставимость операций полного дифференцирования по времени с операцией частного дифференцирования по координате:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t \partial q_i} + \sum_j \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial q_i \partial t} + \sum_j \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j.$$

И если частные производные переставимы, то

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Интересующий нас интеграл представим в виде

$$\int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \ddot{\mathbf{R}} dm = \int \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{V} \right) dm - \int \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{V} dm.$$

Или, используя выведенные выше соотношения, находим:

$$\int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \ddot{\mathbf{R}} dm = \int \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \mathbf{V} \right) dm - \int \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{V} dm.$$

Кинетической энергией (§ 11) механической системы называется следующий интеграл:

$$T = \frac{1}{2} \int \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} dm.$$

Учитывая это обозначение, окончательно уравнения

$$\int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \ddot{\mathbf{R}} dm = Q_i$$

можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Это и есть *уравнения Лагранжа* для голономных механических систем.

Обобщенные силы  $Q_i$  называются *потенциальными*, если существует такая скалярная функция времени и обобщенных координат  $U(t, q_1, \dots, q_n)$ , что силы  $Q_i$  могут быть представлены в виде

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Обобщенные силы  $Q_i$  называются *обобщенно потенциальными*, если существует такая функция времени, координат и скоростей  $U(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ , что обобщенные силы могут быть представлены в виде

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

В обоих случаях можно ввести функцию

$$\mathcal{L} = T + U,$$

называемую *функцией Лагранжа*, или *лагранжианом*, или *кинетическим потенциалом* системы, с использованием которой уравнения Лагранжа можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

*Пример 1.* Силы, линейно зависящие от координат,

$$Q_i = \sum_j a_{ij} q_j,$$

с симметрической матрицей  $\{a_{ij}\}$ , т. е.  $a_{ij} = a_{ji}$ , имеют потенциал

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} q_i q_j.$$

*Пример 2.* Силы, линейно зависящие от скоростей,

$$Q_i = \sum_j \gamma_{ij} \dot{q}_j,$$

с кососимметрической матрицей  $\{\gamma_{ij}\}$ , т. е.  $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$ , имеют обобщенный потенциал

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \gamma_{ij} q_i \dot{q}_j.$$

Такие силы называются *гироскопическими*.

## § 26. Свойства уравнений Лагранжа

**1. Ковариантность.** Если обобщенные координаты  $q_i$  подвергнуть невырожденным дважды непрерывно дифференцируемым преобразованиям  $q_i \rightarrow \tilde{q}_i$ :

$$q_i = q_i(t, \tilde{q}),$$

то в новых переменных уравнения Лагранжа сохраняют свою форму. Сказанное означает коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{T, Q} & \longrightarrow & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q & \longrightarrow & \boxed{\text{уравнения движения в } q} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \boxed{\tilde{T}, \tilde{Q}} & \longrightarrow & \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\tilde{q}}} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{q}} = \tilde{Q} & \longrightarrow & \boxed{\text{уравнения движения в } \tilde{q}} \end{array}$$

Справедливость утверждения очевидна, поскольку переменные  $\tilde{q}_i$  также являются локальными координатами конфигурационного мно-



гообразия системы. Напомним (§ 2), что ковариантность уравнений движения означает инвариантность правила их составления (уравнения Лагранжа), а не инвариантность самих полученных в результате применения этого правила уравнений.

**2. Калибровочная инвариантность.** Если к кинетической энергии системы добавить полную производную по времени от произвольной гладкой функции времени и обобщенных координат, то уравнения Лагранжа не изменятся:

$$T(t, q, \dot{q}) + \frac{d}{dt} f(t, q).$$

Это утверждение проверяется прямой подстановкой так измененной кинетической энергии в уравнения Лагранжа.

**3. Структура кинетической энергии.** Выясним, как зависит кинетическая энергия механической системы от обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$ :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int \mathbf{v}^2 dm = \frac{1}{2} \int \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j \int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_j} dm + \sum_i \dot{q}_i \int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} dm + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} dm. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$a_{ij} = \int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_j} dm, \quad b_i = \int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} dm, \quad T_0 = \frac{1}{2} \int \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right)^2 dm.$$

Кинетическая энергия записывается в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_i b_i \dot{q}_i + T_0 = T_2 + T_1 + T_0$$

и представляет собой сумму трех форм от обобщенных скоростей: квадратичной  $T_2 = (1/2) \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ , линейной  $T_1 = \sum b_i \dot{q}_i$  и формы нулевой степени  $T_0(t, q)$ . Коэффициенты этих форм являются функциями времени и обобщенных координат:  $a_{ij}(t, q)$ ,  $b_i(t, q)$ ,  $T_0(t, q)$ .

Механические системы, у которых кинетическая энергия зависит от обобщенных скоростей указанным образом, называются *натуральными*.

**4. Невырожденность.** В силу указанной структуры кинетической энергии уравнения Лагранжа всегда оказываются линейными по обобщенным ускорениям:

$$\sum_j a_{ij} \ddot{q}_j + F_i(t, q, \dot{q}) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Матрица коэффициентов при ускорениях  $A = \{a_{ij}\}$ , являющаяся матрицей квадратичной части кинетической энергии, невырождена:  $\det A \neq 0$ .

Для доказательства этого факта предположим противное, т. е. пусть  $\det A = 0$ . Тогда следующая алгебраическая система относительно неизвестных чисел  $e_j$  имеет нетривиальное решение

$$\sum_j a_{ij} e_j = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть имеем такое решение:  $\sum e_i^2 = 1$ . Оно определяет направление в пространстве обобщенных скоростей  $\{\dot{q}_i\}$ , вдоль которого кинетическая энергия системы принимает вид

$$T = v \sum_i b_i e_i + T_0.$$

Здесь  $v$  — модуль вектора  $\{\dot{q}_i\} = v\{e_i\}$ , а

$$T_2 = \frac{v^2}{2} \sum_{i,j} a_{ij} e_i e_j \stackrel{v}{\equiv} 0.$$

Вспоминая выражения для  $T_2$ :

$$T_2 = \frac{v^2}{2} \int \left( \sum_i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} e_i \right)^2 dm,$$

закключаем, что оно может быть тождественно по  $v$  равным нулю тогда и только тогда, когда

$$\sum_i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} e_i \stackrel{v}{\equiv} 0,$$

что противоречит введенному ранее определению локальной параметризации.

**5. Принцип наименьшего действия по Гамильтону.** Действием по Гамильтону называется следующий функционал:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, q, \dot{q}) dt,$$

ставящий в соответствие произвольной дифференцируемой кривой  $\{q_i(t)\}$  число  $S$ .

Рассмотрим семейство кривых, проходящих в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  через две заданные точки  $q^a$  и  $q^b$ . Параметр семейства  $\alpha$  выбран

так, что при  $\alpha = 0$  кривая этого семейства является действительной траекторией, соответствующей решению краевой задачи

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad q(t_1) = q^a, \quad q(t_2) = q^b.$$

На рис. 44 эта кривая изображена жирной линией.

Решение этой краевой задачи является единственным, если точки  $q^a$  и  $q^b$  выбраны достаточно близко друг к другу.

Тем самым все остальные кривые семейства  $q(t, \alpha)$  при  $\alpha \neq 0$  решениями поставленной краевой задачи не являются. При подстановке этого семейства в функционал, выражающий действие по Гамильтону, мы получаем скалярную функцию скалярного аргумента  $S(\alpha)$ . Если семейство является дифференцируемым по  $\alpha$ , дифференцируемой по  $\alpha$  будет и функция  $S(\alpha)$ . Кривая семейства, для которой  $dS/d\alpha = 0$ , называется *экстремалью* действия по Гамильтону.

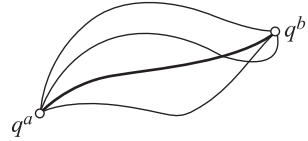


Рис. 44

**Теорема.** Действительная траектория ( $\alpha = 0$ ) и только она является экстремалью действия по Гамильтону.

*Доказательство.*

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{t_0}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} \right) dt.$$

Второе слагаемое под знаком интеграла можно проинтегрировать по частям:

$$\int_{t_0}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} dt = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial q}{\partial \alpha} dt.$$

Поскольку все кривые семейства проходят через точки  $q^a$  и  $q^b$ , то

$$\left. \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right|_{t_1} = \left. \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right|_{t_2} = 0$$

и производная  $dS/d\alpha$  принимает вид

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial q}{\partial \alpha} dt.$$

Если  $\alpha = 0$ , то  $\partial \mathcal{L} / \partial q - d(\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}) / dt = 0$  и  $dS/d\alpha = 0$ . Если  $dS/d\alpha = 0$ , то, в силу произвольности  $\partial q / \partial \alpha$ , имеет место

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0.$$

Теорема доказана.

В вариационном исчислении доказывается, что на самом деле экстремаль действия по Гамильтону обращает его в минимум.

Это означает, что для любых кривых, достаточно близких к действительной траектории и с достаточно близкими скоростями ( $\|q(t, \alpha) - q(t, 0)\| < \varepsilon$ ,  $\|\dot{q}(t, \alpha) - \dot{q}(t, 0)\| < \varepsilon$ ) действие по Гамильтону строго больше действия вдоль действительной траектории. Такой экстремум называется слабым, в отличие от сильного экстремума, когда ограничений на скорости нет.

**6. Движение по геодезическим.** Если в системе обобщенные силы отсутствуют, то функция Лагранжа совпадает с кинетической энергией:  $\mathcal{L}(t, q, \dot{q}) \equiv T(t, q, \dot{q})$ . Рассмотрим стационарную систему

$$T(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

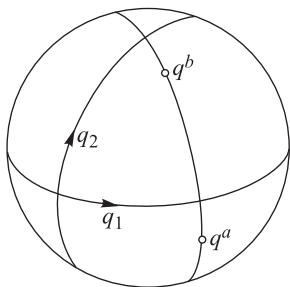


Рис. 45

Экстремаль действия по Гамильтону будет экстремалью функционала, в котором вместо функции Лагранжа стоит произвольная дифференцируемая и монотонная функция от функции Лагранжа. В частности, на действительных траекториях минимальным будет интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j} dt,$$

представляющий собой длину кривой от точки  $q^a$  до точки  $q^b$ :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum a_{ij}(q) dq_i dq_j}$$

в метрике, определяемой кинетической энергией, т.е. геодезическая, проходящая через рассматриваемые точки. Таким образом, движение по инерции стационарной лагранжевой системы представляет собой движение по геодезическим ее конфигурационного многообразия.

*Пример.* Рассмотрим движение по инерции материальной точки на поверхности единичной сферы (рис. 45). В сферических координатах  $(q_1, q_2)$  кинетическая энергия имеет вид

$$2T = m(\dot{q}_1^2 \cos^2 q_2 + \dot{q}_2^2).$$

Если точки  $q^a$  и  $q^b$  не диаметрально противоположны, то единственная дуга большого круга, проходящая через них, обращает в минимум

интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{m(dq_1^2 \cos^2 q_2 + dq_2^2)},$$

представляющий собой при  $m = 1$  длину этой дуги.

## § 27. Понятие первого интеграла

Рассмотрим автономную динамическую систему общего вида:

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Правые части определены в некоторой области  $D \subset R^n$ . Скалярная функция  $G(x_1, \dots, x_n)$ , не являющаяся тождественно константой, определенная в той же области  $D$ , что и рассматриваемая система, называется *глобальным первым интегралом* или просто *первым интегралом* этой системы, если она остается постоянной вдоль любого решения этой системы:

$$G[x_1(t), \dots, x_n(t)] \stackrel{t}{=} \text{const.}$$

Если функция  $G(x)$  дифференцируемая, то необходимым и достаточным условием первого интеграла является следующее тождество:

$$\sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} F_i(x_1, \dots, x_n) \stackrel{x}{=} 0.$$

Если скалярная функция  $G(x)$  удовлетворяет условию первого интеграла, но определена в подобласти области  $D$ , то она называется *локальным первым интегралом*.

Если правые части системы  $\dot{x} = F(x)$  дифференцируемы, то в окрестности любой неособой точки  $x^0$ , т.е. такой, что  $F(x^0) \neq 0$ , система имеет  $n - 1$  функционально независимых локальных первых интегралов.

Глобальный первый интеграл, даже один, существует лишь в исключительных случаях и представляет собой интерес в механике. Он позволяет полностью расслоить фазовое пространство на интегральные многообразия меньшей размерности.

*Пример.* Механическая система  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ , описывающая движение линейного одномерного осциллятора, имеет глобальный первый интеграл

$$G(x, y) = x^2 + y^2.$$

И система, и функция  $x^2 + y^2$  определены во всей фазовой плоскости  $R^2$ . Система  $\dot{x} = x, \dot{y} = y$  имеет локальный первый интеграл  $G(x, y) = y/x$ , определенный всюду за исключением прямой  $x = 0$ . Глобальных первых интегралов у этой системы нет.

Определение первого интеграла в случае неавтономной системы

$$\dot{x}_i = F_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

сводится к приведенному выше определению формальным сведением к автономной системе добавлением еще одного уравнения  $\dot{t} = 1$ . Первым интегралом неавтономной системы будет скалярная функция  $G(t, x_1, \dots, x_n)$ , удовлетворяющая всем указанным выше условиям. В частности, в случае дифференцируемости этой функции должно выполняться тождество

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} F_i \stackrel{t,x}{=} 0.$$

В случае системы уравнений второго порядка, какими и являются уравнения Лагранжа, первым интегралом будет называться скалярная функция  $G(t, q, \dot{q})$ , определенная там же, где определена кинетическая энергия и обобщенные силы, и постоянная вдоль любых траекторий системы.

Механическая система называется *интегрируемой*, если она имеет глобальный первый интеграл.

*Пример.* Система  $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$  неинтегрируема, поскольку глобального первого интеграла у нее не существует. Заметим, что решение ее тем не менее выписывается без труда.

## § 28. Первые интегралы лагранжевых систем

Рассмотрим уравнения Лагранжа с потенциальными силами. Умножая их на  $\dot{q}_i$  и суммируя по  $i$ , получаем следующее скалярное соотношение:

$$\sum_i \left( \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) = 0,$$

которое можно переписать в форме

$$\sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \ddot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] = 0.$$

Поскольку

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t, q, \dot{q}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right),$$

то последнее соотношение переписывается в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0.$$

Если функция Лагранжа от времени не зависит, т. е.  $\partial\mathcal{L}/\partial t \equiv 0$ , то из записанного равенства следует первый интеграл

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = \text{const.}$$

Этот интеграл носит название *обобщенного интеграла энергии*, или интеграла Пенлеве–Якоби.

Выясним структуру этого интеграла, учитывая, что

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_i b_i \dot{q}_i + T_0 + U.$$

Подставляя это выражение в полученное выражение для интеграла Пенлеве–Якоби, находим:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - T_0 - U = T_2 - T_0 - U = \text{const.}$$

Или, используя обозначения для потенциальной энергии  $\Pi = -U$ :

$$T_2 - T_0 + \Pi = \text{const.}$$

Заметим, что полная энергия  $E = T_2 + T_1 + T_0 + \Pi$  в общем случае не сохраняется.

Механическая система называется *консервативной*, если выполнены следующие условия:

- 1) параметризация стационарна, т. е.  $\partial \mathbf{R}/\partial t \equiv 0$ ;
- 2) силы потенциальны:  $Q_i = \partial U/\partial q_i$ ;
- 3) потенциал  $U$  от времени явно не зависит:  $\partial U/\partial t \equiv 0$ .

Если система консервативна, то  $T_1 = T_0 = 0$  и обобщенный интеграл энергии совпадает с полной энергией  $T_2 + \Pi = \text{const}$  и выражает тем самым закон сохранения полной энергии в консервативных механических системах.

Еще один распространенный в механике тип первых интегралов составляют так называемые циклические интегралы. Они имеют место тогда, когда функция Лагранжа  $\mathcal{L}(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  не зависит от некоторых координат:  $q_{l+1}, \dots, q_n$ . В этом случае уравнения Лагранжа приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} &= 0, \quad i = 1, \dots, l, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} &= 0, \quad i = l+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Из последних  $n - l$  уравнений следует  $n - l$  первых интегралов  $\partial \mathcal{L}/\partial q_i = \text{const}$  ( $i = l+1, \dots, n$ ).

Сами переменные, которые не входят явно в функцию Лагранжа, называются циклическими.

Знание первых интегралов позволяет понизить порядок системы, т. е. продвинуться в деле нахождения решения системы в явном виде.

*Пример.* Эллиптический маятник (рис. 46). Лагранжиан этой системы имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}[(\dot{x} + l\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + l^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi] + mgl \cos \varphi.$$

Система консервативна, поэтому имеет интеграл энергии

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi + l^2\dot{\varphi}^2) - mgl \cos \varphi = \text{const.}$$

Кроме того, координата  $x$  является циклической, поскольку явно в выражение для  $\mathcal{L}$  не входит. Поэтому в системе есть еще и циклический интеграл

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} + l\dot{\varphi} \cos \varphi) = \text{const.}$$

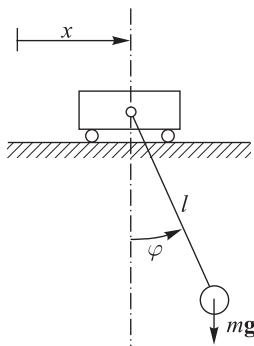


Рис. 46

Рассматривая два последних соотношения в качестве уравнений для нахождения  $x(t)$  и  $\varphi(t)$ , можно исключить из них  $\dot{x}$  и свести задачу к одному уравнению относительно  $\varphi$ , из которого  $\varphi(t)$  находится посредством вычисления интеграла, т. е., как принято говорить, задача сводится к квадратуре.

Следует иметь в виду, что уменьшение порядка при помощи первых интегралов приводит, как правило, к системе уравнений, неэквивалентной исходной.

Например, задачу о прямолинейном падении материальной точки в однородном поле тяжести можно решать исходя из уравнения Ньютона  $\ddot{y} = -g$  при начальных условиях  $y(0) = h$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ , что приводит к единственному решению:  $y = h - gt^2/2$ . Если же воспользоваться в этой задаче интегралом энергии  $\dot{y}/2 + gy = \text{const}$  и рассматривать его как дифференциальное уравнение, из которого можно найти  $y(t)$  при тех же начальных условиях, то решений получается бесконечно много:

$$y = \begin{cases} h, & 0 \leq |t| \leq t_0, \\ h - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2, & |t| > t_0, \end{cases}$$

где  $t_0$  — произвольно. При  $t_0 = 0$  получается правильное решение.

Построение точного решения, или понижение порядка системы — не единственная цель поиска первого интеграла. Глобальные первые интегралы выражают обычно некоторые законы сохранения, представляющие самостоятельный интерес, как содержательный физический факт. Установление таких законов бывает интересным даже тогда,



когда общее решение задачи известно. В этой ситуации представляет интерес следующий прием. Пусть

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

— изучаемая система. Пусть общее решение ее есть

$$\varphi_i(t, x_1, \dots, x_n),$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — начальные условия, т. е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv f_i[\varphi_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(t, x_1, \dots, x_n)].$$

Тогда, если существует и не сводится к константе выражение

$$F(x_1, \dots, x_n) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G[\varphi_1(\tau, x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(\tau, x_1, \dots, x_n)] d\tau,$$

то оно является первым интегралом исходной системы. При этом  $G(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  — произвольная функция.

*Пример.* У системы  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$  имеется общее решение  $\varphi_1 = x \cos t + y \sin t, \varphi_2 = -x \sin t + y \cos t$  ( $x$  и  $y$  в нем — начальные условия).

Выбор функции  $G(\varphi_1, \varphi_2)$  для вычисления первого интеграла не ограничивается ничем, кроме возможности вычисления соответствующего предела. Возьмем, к примеру,  $G(\varphi_1, \varphi_2) = |\varphi_1|$ ; тогда

$$F(x, y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x \cos \tau + y \sin \tau| d\tau = \frac{2}{\pi} \sqrt{x^2 + y^2},$$

т. е. получен интеграл энергии.

Доказательство сформулированного общего приема вычисления первого интеграла осуществляется прямой подстановкой решения  $x_i = \varphi_i(t, C_1, \dots, C_n)$  в функцию  $F(x)$ . При этом приходится рассматривать выражения  $\varphi_k[\tau, \varphi_1(t, C_1, \dots, C_n), \dots, \varphi_n(t, C_1, \dots, C_n)]$ , которые, в силу группового свойства решений автономной системы дифференциальных уравнений (см. § 47), сводятся к выражениям  $\varphi_k(\tau + t, C_1, \dots, C_n)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} F[\varphi_1(t, C_1, \dots, C_n), \dots, \varphi_n(t, C_1, \dots, C_n)] &= \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G[\varphi_1(t + \tau, C_1, \dots, C_n), \dots, (t + \tau, C_1, \dots, C_n)] d\tau = \\ &= F(C_1, \dots, C_n), \end{aligned}$$

поскольку вычисление предела при  $T \rightarrow \infty$  не зависит от начальной точки интегрирования.

## Глава 7

### УРАВНЕНИЯ РАУСА

#### § 29. Преобразования Лежандра

Переход от уравнений Лагранжа  $d(\partial T/\partial \dot{q})/dt - \partial T/\partial q = Q$  к уравнениям Рауса осуществляется при помощи специальной замены фазовых переменных, для введения которой рассмотрим некоторый особый класс преобразований, называемых *преобразованиями Лежандра*, или *потенциальными преобразованиями*.

Пусть от некоторых переменных  $x_1, \dots, x_n$  осуществляется переход к другим переменным  $y_1, \dots, y_n$  по формулам

$$\begin{aligned}y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\&\dots \\y_n &= f_n(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Это преобразование переменных называется преобразованием Лежандра, если его правая часть имеет потенциал, т.е. если найдется такая скалярная функция  $V(x_1, \dots, x_n)$ , что

$$f_k = \frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Потенциал  $V$  называется невырожденным, если

$$\det \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_l} \right) \neq 0.$$

Этот потенциал называется сильно невырожденным, если уравнения  $y_k = f_k(x_1, \dots, x_n)$  можно гладко и взаимно однозначно разрешить относительно переменных  $x_k$ :

$$x_k = \varphi_k(y_1, \dots, y_n), \quad k = 1, \dots, n.$$

*Теорема.* Если преобразование  $y_k = f_k(x_1, \dots, x_n)$  потенциально, а потенциал  $V(x_1, \dots, x_n)$  сильно невырожден, то обратное преобразование  $x_k = \varphi_k(y_1, \dots, y_n)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) также потенциально и его потен-

циал  $W(y_1, \dots, y_n)$  также сильно невырожден и связан с потенциалом  $V$  формулой

$$W(y_1, \dots, y_n) = \left[ \sum x_i y_i - V(x_1, \dots, x_n) \right]_{x_k = \varphi_k(y_1, \dots, y_n)}.$$

*Доказательство.* Продифференцируем написанную формулу по  $y_k$

$$\frac{\partial W}{\partial y_k} = \left[ x_k + \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_k} y_i - \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \right]_{x_i = \varphi_i(y_1, \dots, y_n)}.$$

Поскольку  $\partial V / \partial x_i = y_i$ , то из этого следует

$$\frac{\partial W}{\partial y_k} = \varphi_k(y_1, \dots, y_n),$$

т. е. преобразование  $x_k = \varphi_k(y_1, \dots, y_n)$  потенциально.

Потенциалы  $V$  и  $W$  называются сопряженными.

## § 30. Уравнения Рауса

Воспользуемся преобразованием Лежандра для построения уравнений Рауса. Преобразованию подвергаются фазовые переменные

$$(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \rightarrow (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, p_{l+1}, \dots, p_n),$$

т. е. на самом деле преобразовываются не все фазовые переменные, а лишь  $s = n - l$  обобщенных скоростей. В качестве потенциальной функции для соответствующего преобразования возьмем выражение для кинетической энергии:

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Все остальные переменные остаются параметрами.

Потенциал обратного преобразования называется функцией Рауса и, в соответствии с теоремой предыдущего параграфа, он имеет вид

$$\mathcal{R}(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, p_{l+1}, \dots, p_n) = \sum \dot{q}_k p_k - T.$$

В правой части этого выражения всюду вместо  $\dot{q}_i$  надо подставить их выражения через  $p_i$ , получаемые после обращения преобразований  $p_k = \partial T / \partial \dot{q}_k$ .

Уравнения в новых переменных вместо исходных уравнений Лагранжа получаются с использованием функции Рауса. Действительно, для  $i = 1, \dots, l$  имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i} &= \sum \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} p_k - \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial T}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} &= -\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}.\end{aligned}$$

Поэтому для первых  $l$  уравнений получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i} = -Q_i \quad (i = 1, \dots, l),$$

т. е. они сохранили форму уравнений Лагранжа с заменой знака перед обобщенными силами. Для оставшихся переменных  $i = l + 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i} &= -\frac{\partial T}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} &= \sum \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} p_k + \dot{q}_i - \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i.\end{aligned}$$

Подстановка этих соотношений в уравнения Лагранжа дает

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i} + Q_i, \quad i = l + 1, \dots, n.$$

В итоге полная система уравнений Рауса получается в виде

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i} &= -Q_i \quad i = 1, \dots, l, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i} + Q_i \quad i = l + 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Уравнения Рауса оказываются удобными при исследовании систем с циклическими координатами. Уточним здесь введенное § 28 понятие циклической координаты. Координата  $q_i$  называется *циклической*, если

- 1) от нее не зависит функция Рауса:  $\partial \mathcal{R} / \partial q_i = 0$ ;
- 2) от нее не зависят обобщенные силы:  $\partial Q / \partial q_i = 0$ ;
- 3) обобщенная сила, соответствующая этой координате, равна нулю:  $Q_i = 0$ .

Пусть в системе последние  $n - l$  координат циклические, тогда в уравнениях Рауса  $dp_i / dt = 0$  ( $i = l + 1, \dots, n$ ) и лагранжева часть уравнений полностью отделяется, поскольку в функции Рауса и в обобщенных силах переменные  $p_i$  оказываются постоянными, а от циклических переменных, по определению, зависимости нет. Сами циклические переменные  $q_i$  находятся после того, как проинтегрирована система

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i} = -Q_i \quad (i = 1, \dots, l)$$

простой квадратурой

$$q_i(t) = \int \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} dt \quad (i = l + 1, \dots, n).$$

Таким образом, для систем с циклическими координатами указанное преобразование Лежандра позволяет понизить порядок системы на  $2(n - l)$  единиц.

Координаты называются *псевдоциклическими*, если из трех условий циклических координат не выполнено второе, т. е. силы могут зависеть от этих координат. Свойство  $dp_i/dt = 0$  ( $i = l + 1, \dots, n$ ) выполнено и в этом случае, однако отделившейся оказывается следующая система:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i} &= -Q_i \quad (i = 1, \dots, l), \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i}, \quad (i = l + 1, \dots, n). \end{aligned}$$

В случае псевдоциклических координат использование преобразования Лежандра с соответствующим числом  $l$  приводит к понижению порядка системы на  $n - l$  единиц. Процедура исключения циклических координат посредством перехода к уравнениям Рауса носит название процедуры игнорирования циклических координат по Раусу. Уравнения Рауса используются также для систем с неудерживающими связями (§ 34).

Преобразование Лежандра, осуществленное над всеми обобщенными скоростями  $\dot{q}_i$ , приводит к частному случаю уравнений Рауса, называемому уравнениями Гамильтона (§ 67).

## Глава 8

# УРАВНЕНИЯ СИСТЕМ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

### § 31. Классификация связей

Помимо тех связей, которые определяют конфигурационное многообразие голономной механической системы (§ 24), на систему могут быть наложены дополнительные связи, которые можно аналитически задавать ограничениями на обобщенные координаты и обобщенные скорости. В зависимости от вида этих ограничений различают следующие типы связей.

**1. Голономные связи.** Они выражаются уравнениями, в которые скорости не входят:

$$f_k(t, q_1, \dots, q_n) = 0 \quad (k = 1, \dots, m).$$

Эти связи изменяют конфигурационное многообразие системы, и при введении независимых обобщенных координат они могли быть учтены с самого начала. Число степеней свободы при этом равно  $n - m$ . Однако есть возможность учесть эти дополнительные связи и после того, как параметризация системы была выполнена без их учета, посредством введения дополнительных членов в уравнения Лагранжа. Об этом речь идет в следующем параграфе.

**2. Кинематические связи.** Эти связи выражаются уравнениями вида

$$\sum_{i=1}^n c_{ki}(t, q) \dot{q}_i + l_k(t, q) = 0 \quad (k = 1, \dots, m).$$

Напрашивается более общий вид этих связей, в котором зависимость от скоростей является нелинейной:

$$f_k(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = 0 \quad (k = 1, \dots, m).$$

Однако рассмотрение подобных связей не имеет большого смысла. Все известные конкретные примеры кинематических связей выражаются именно линейными по скоростям соотношениями. Попытки построить искусственно примеры нелинейных кинематических связей успеха

не имели. В 1915 г. французский механик Делассю изучал вопросы принципиальной реализуемости таких связей и пришел к отрицательным результатам.

Линейные кинематические связи можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\sum_{i=1}^n c_{ki}(t, q) dq_i + l_k(t, q) dt = 0 \quad (k = 1, \dots, m).$$

Введем следующие обозначения для стоящих слева дифференциальных форм:

$$\omega_k = \sum_{i=1}^n c_{ki}(t, q) dq_i + l_k(t, q) dt.$$

Если существует матрица  $s \times m$  ( $s \leq m$ )

$$H = \{h_{jk}\}_{s \times m}$$

с зависящими от  $t$  и  $q$  элементами, такая, что  $s$  соотношений

$$\{h_{jk}\} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} = 0$$

представляют собой  $s$  полных дифференциалов

$$df_j(t, q) = 0 \quad (j = 1, \dots, s),$$

то исходные  $m$  кинематических связей можно свести к  $m - s$  кинематическим связям и  $s$  голономным связям:

$$f_i(t, q) = \text{const} \quad (i = 1, \dots, s).$$

Кинематические связи при этом называются *интегрируемыми*. Если  $s = m$  и матрица  $H$  невырождена, то эти связи называются *вполне интегрируемыми*.

В последнем случае кинематические связи могут быть целиком заменены конечными связями. Если кинематические связи не являются вполне интегрируемыми, то они называются *неголономными*.

Условия, позволяющие установить полную интегрируемость уравнений кинематических связей, составляют содержание теоремы Фробениуса, которую можно найти в теории систем дифференциальных уравнений Пфаффа. При составлении уравнений движения механических систем с кинематическими связями вопрос об интегрируемости этих связей никакого значения не имеет, поэтому мы на этой теореме останавливаться не будем.

Отметим только качественные отличия в движении систем с интегрируемыми и с неинтегрируемыми (неголономными) связями. Кинематические связи в обоих случаях не изменяют конфигурационного

многообразия системы, и система может находиться в любой точке многообразия. Однако если в случае неголономных связей систему можно из любой точки многообразия перевести подходящими силами в любую другую, то для случая вполне интегрируемых связей система из точки  $q^\alpha$  может быть переведена в точку  $q^\beta$  только, если

$$f_k(t, q^\alpha) = f_k(t, q^\beta).$$

Последним соображением можно пользоваться для проверки неинтегрируемости кинематических связей, не прибегая к теореме Фробениуса.

*Пример.* Рассмотрим движение конька по льду. Будем себе представлять конек тонким стержнем, одна из точек которого, например центр масс, может иметь скорость, направленную только вдоль конька. Положение конька можно описать тремя координатами:  $x$  и  $y$  — координаты центра масс на плоскости и  $\varphi$  — угол наклона конька к оси  $x$ . В процессе движения введенные переменные подчинены условию  $\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0$ . Эта кинематическая связь неинтегрируема, в чем легко убедиться, заметив, что из любой точки  $\{x_1, y_1, \varphi_1\}$  конфигурационного многообразия конек может быть переведен в любую другую  $\{x_2, y_2, \varphi_2\}$ , например, таким способом. Не меняя вначале  $x_1$  и  $y_1$ , изменяем угол  $\varphi$  так, чтобы конек был направлен в точку  $x_2, y_2$ . После этого, не меняя  $\varphi$ , по прямой перемещаем конек в точку  $x_2, y_2$ . Наконец, в этой точке поворачиваем конек на нужный угол. Следовательно, из условия  $\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0$  не может вытекать никакого соотношения  $f(x, y, \varphi) = \text{const}$ . Конек с указанной связью является неголономной системой.

**3. Неудерживающие (односторонние) связи.** Эти связи аналитически выражаются ограничениями на обобщенные координаты вида неравенств:

$$f_k(t, q) \geq 0 \quad (k = 1, \dots, m).$$

Иногда неголономные связи определяются как связи, не являющиеся голономными. Если стоять на этой позиции, то неудерживающие связи следует отнести к неголономным. Мы будем придерживаться более узкого понимания неголономных связей, данного выше.

**4. Стационарные связи.** Если все перечисленные выше связи не зависят от времени:

$$f_k(q) = 0 \quad \text{— в случае голономных связей,}$$

$$\sum c_{ij}(q) \dot{q}_j = 0 \quad \text{— в случае кинематических связей,}$$

$$f_k(q) \geq 0 \quad \text{— в случае неудерживающих связей,}$$

то такие связи называются *стационарными*.

В случае кинематических связей условие стационарности включает в себя кроме того требование отсутствия неоднородного члена:  $b_k = 0$ .

**5. Виртуальные перемещения в случае дополнительных связей.** Ограничения на координаты и скорости приводят, очевидно, и к ограничениям на виртуальные перемещения, определенные в § 24.



Если связи голономные:  $f_k(q) = 0$ , то виртуальные перемещения стеснены условием

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \delta q_i = 0.$$

Если связи кинематические:  $\sum_{i=1}^n c_{ki}(t, q) dq_i + l_k dt = 0$ , то виртуальные перемещения ограничены так:

$$\sum_{i=1}^n c_{ki}(t, q) dq_i = 0$$

(в соответствии с определением виртуальных перемещений  $dt = 0$ ).

Если связи неудерживающие:  $f_k(q) \geq 0$ , то

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \delta q_i \geq 0.$$

**6. Гипотеза идеальности связей.** В случае голономных и кинематических связей введенная (см. § 25) гипотеза идеальности связей сохраняет свою форму: работа реакций связей на любых виртуальных перемещениях должна быть равна нулю.

При этом реакциями связей мы будем называть те дополнительные обобщенные силы  $\mathcal{N}_i$ , в уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \mathcal{N}_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

которые нужно приложить к системе, чтобы движение ее удовлетворяло дополнительным связям. Тогда условие идеальности голономных и кинематических связей можно записать так:

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{N}_i \delta q_i = 0.$$

При неудерживающих связях  $f_k(t, q) \geq 0$  — случай движения по связи, т. е. когда выполняется строгое равенство, и случай, когда возникает переход от неравенства к равенству и обратно, должны рассматриваться отдельно. Реакция связи, возникающая в первом случае на всех виртуальных перемещениях, удовлетворяющих условию  $\sum (\partial f_k / \partial q_i) \delta q_i = 0$ , не должна совершать работы. Во втором случае движение сопровождается ударом, и связь будет считаться идеальной, если в момент удара кинетическая энергия системы не претерпевает разрыва:

$$T_- = T_+,$$

где  $T_-$  — значение энергии непосредственно перед выходом на связь,  $T_+$  — после.

### § 32. Уравнения Лагранжа с множителями

Выведем уравнения, содержащие дополнительные голономные или кинематические связи. Как уже было сказано, введя понятие дополнительных реакций связей  $\mathcal{N}_i$ , уравнения можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \mathcal{N}_i.$$

Однако пользы от этих уравнений нет, поскольку в них возникли дополнительные  $n$  неизвестных функций времени  $\mathcal{N}_i$ , а уравнений связей у нас  $m < n$ . В системе  $2n$  неизвестных и  $n + m$  уравнений, из которых найти эти неизвестные нельзя.

Для исключения лишних переменных умножим эти уравнения скалярно на виртуальные перемещения:

$$\sum_{i=1}^n \delta q_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) = 0.$$

Реакции связей здесь исчезли, поскольку мы предполагаем их идеальными. В этом соотношении виртуальные перемещения стеснены условиями

$$\sum_i \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad (k = 1, \dots, m)$$

— в случае голономных связей или

$$\sum_i c_{ki} \delta q_i = 0 \quad (k = 1, \dots, m)$$

— в случае кинематических.

Введем  $m$  новых неизвестных функций времени

$$\mu_k \quad (k = 1, \dots, m).$$

Очевидно, имеют место равенства

$$\sum_k \sum_i \mu_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad \text{или} \quad \sum_k \sum_i \mu_k c_{ki} \delta q_i = 0.$$

Вычитая их из полученного выше скалярного соотношения, находим:

$$\sum_i \delta q_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i - \sum_k \mu_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \right) = 0$$

или

$$\sum_i \delta q_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i - \sum_k \mu_k c_{ki} \right) = 0.$$

Выберем неизвестные функции  $\mu_k$  так, чтобы первые слагаемые в этих суммах были тождественно равны нулю:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_k \mu_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, m)$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_k c_{ki} \mu_k \quad (k = 1, \dots, m).$$

В оставшихся суммах присутствует только  $n - m$  компонент виртуальных перемещений  $\delta q_i$ . Но их уже можно считать независимыми и произвольными, а это влечет за собой равенство нулю оставшихся множителей при  $\delta q_i$ , и полученные только что уравнения справедливы при любых  $i$ .

Итак, уравнения Лагранжа с множителями в случае дополнительных голономных связей имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_k \mu_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} & (i = 1, \dots, n) \\ f_k(t, q) = 0 & (k = 1, \dots, m). \end{cases}$$

Для кинематических связей:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_k \mu_k c_{ki} & (i = 1, \dots, n) \\ \sum_i c_{ki} \dot{q}_i + l_k = 0 & (k = 1, \dots, m). \end{cases}$$

Эти уравнения в количестве  $n + m$  позволяют найти такое же количество неизвестных функций  $q_i$  и  $\mu_k$ .

### § 33. Уравнения Аппеля

В полученных в предыдущем параграфе уравнениях Лагранжа с дополнительными кинематическими связями множители  $\mu$  могут быть исключены. Покажем это, переписав эти уравнения в матричной форме:

$$A\ddot{q} = G + C^\top \mu, \quad C\dot{q} + l = 0.$$

Здесь буквой  $G$  обозначены все те члены в уравнении Лагранжа, которые не зависят от ускорений.

Выразим из уравнений движения ускорения:

$$\ddot{q} = A^{-1}G + A^{-1}C^\top \mu.$$

Продифференцируем уравнения связей по времени:

$$C\ddot{q} + \dot{C}\dot{q} + \dot{l} = 0.$$

Подставим сюда найденные выше ускорения:

$$CA^{-1}G + CA^{-1}C^{\top}\mu + \dot{C}\dot{q} + \dot{l} = 0.$$

Если кинематические связи независимы, то матрица  $CA^{-1}C^{\top}$  невырождена и последнее соотношение может быть разрешено относительно множителей  $\mu$ :

$$\mu = (CA^{-1}C^{\top})^{-1}(-CA^{-1}G - \dot{C}\dot{q} - \dot{l}).$$

Подставляя это выражение в уравнения движения, окончательно получим:

$$A\ddot{q} = G - C^{\top}(CA^{-1}C^{\top})^{-1}(CA^{-1}G + \dot{C}\dot{q} + \dot{l}).$$

Множители Лагранжа исключены, написанные уравнения имеют тот же порядок, что и исходные уравнения без дополнительных связей, сами связи оказываются первыми интегралами этих уравнений. Начальные условия следует подчинить исходным связям.

Между тем наложение связей приводит к понижению числа степеней свободы и было бы интересно построить такие уравнения, в которых это обстоятельство находило бы отражение. Определенным преимуществом в этом плане обладают выводимые ниже уравнения Аппеля.

Для составления уравнений Аппеля вернемся к уравнению баланса виртуальных работ, полученному в § 25 в виде

$$\delta q_i \int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \ddot{\mathbf{R}} dm = \delta q_i \int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{F}^d dm = \delta q_i Q_i.$$

Для сокращения записей здесь опущен знак суммы, по повторяющимся индексам суммирование подразумевается.

На этот раз коэффициенты виртуальной работы инерционных сил, т. е. выражения

$$\int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \ddot{\mathbf{R}} dm,$$

преобразуем иначе.

Продифференцируем выражение для скорости  $\dot{\mathbf{R}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}$ .  
Получим:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \mathcal{P}(t, q, \dot{q}),$$

где через  $\mathcal{P}$  обозначены все члены, не зависящие от обобщенных ускорений  $\ddot{q}$ . Тогда

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i},$$

что позволяет вычислить

$$\int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \ddot{\mathbf{R}} dm = \int \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}}{\partial \ddot{q}_i} \cdot \ddot{\mathbf{R}} dm = \frac{1}{2} \int \frac{\partial \ddot{\mathbf{R}}^2}{\partial \ddot{q}_i} dm = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i},$$

где функция

$$S = \frac{1}{2} \int \ddot{\mathbf{R}}^2 dm$$

называется функцией Аппеля (иногда «энергией» ускорений).

Если все  $\delta q_i$  независимы, то из баланса виртуальных работ следуют уравнения, эквивалентные уравнениям Лагранжа

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть теперь на рассматриваемую систему наложены  $m$  кинематических связей:

$$c_{si}\dot{q}_i + l_s = 0, \quad s = 1, \dots, m.$$

В этом случае в уравнении виртуальных работ вариации  $\delta q_i$  больше не являются независимыми; кроме того, обобщенные силы должны вычисляться с учетом появившихся новых реакций связей  $\mathbf{N}$ :

$$Q_i = \int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot (\mathbf{F}^d + \mathbf{N}) dm.$$

Из уравнений связей можно выразить последние  $m$  обобщенных скоростей через первые  $n - m$ :

$$\dot{q}_l = \alpha_{lk}\dot{q}_k + \beta_l.$$

Условимся в дальнейшем обозначать индексом  $k$ , меняющимся от 1 до  $n - m$ , оставшиеся независимыми скорости, а индексом  $l$ , меняющимся от  $n - m + 1$  до  $n$ , обобщенные скорости, выражаемые через независимые обобщенные скорости по написанной формуле.

Разобьем уравнение виртуальных работ на две части:

$$\delta q_k \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} + \delta q_l \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_l} = \delta q_k \int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_k} \cdot (\mathbf{F}^d + \mathbf{N}) dm + \delta q_l \int \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_l} \cdot (\mathbf{F}^d + \mathbf{N}) dm.$$

В первой части суммируются члены с независимыми вариациями  $\delta q_k$ , во второй части — с зависимыми вариациями  $\delta q_l$ . Зависимые и независимые вариации, очевидно, связаны так:  $\delta q_l = \alpha_{lk}\delta q_k$ , что позволяет уравнение работ записать в виде

$$\delta q_k \left( \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} + \alpha_{lk} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_l} \right) = \delta q_k \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_k} + \alpha_{lk} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_l} \right) \cdot (\mathbf{F}^d + \mathbf{N}) dm.$$

В функции Аппеля можно исключить зависимые ускорения  $\ddot{q}_l$ , если продифференцировать связь между скоростями:  $\dot{q}_l = \alpha_{lk}\dot{q}_k + \beta_l$ , где  $\gamma_l$  обозначает члены, не зависящие от ускорений.

Обозначим через  $S^*$  функцию Аппеля, появившуюся после такого исключения:  $S^*(\ddot{q}_k) = S[\ddot{q}_k, \ddot{q}_l(\ddot{q}_k)]$ . Тогда

$$\frac{\partial S^*}{\partial \ddot{q}_k} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} + \alpha_{lk} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_l}.$$

Назовем реакции кинематических связей идеальными, если

$$\delta q_k \int \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_k} + \alpha_{lk} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_l} \right) \mathbf{N} dm = 0.$$

Тогда в силу независимости  $\delta q_k$  из уравнения виртуальных работ получим

$$\frac{\partial S^*}{\partial \ddot{q}_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, n - m,$$

где

$$Q_k = \int \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_k} + \alpha_{lk} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_l} \right) \mathbf{F}^d dm.$$

Добавляя к найденным уравнениям уравнения связей, получаем систему  $n$  уравнений относительно  $n$  обобщенных координат.

Поскольку в этой системе  $n - m$  уравнений второго порядка и  $m$  уравнений первого, то порядок полученной системы равен  $2(n - m) + m = 2n - m$ .

*Пример.* Материальная точка массы  $m$ , радиус-вектор которой  $\mathbf{R} = \{x, y, z\}$ , с действующей на нее силой  $\mathbf{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$  подчинены идеальной кинематической связи  $\dot{x} + y\dot{z} = 0$ . Требуется составить уравнения Аппеля.

Выразим зависимые переменные через независимые:

$$\delta z = -\frac{\delta x}{y}, \quad \ddot{z} = -\frac{\ddot{x} + \dot{y}\dot{z}}{y}.$$

Подсчитаем обобщенные силы из условия

$$Q_x \delta x + Q_y \delta y = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = \left( F_x - \frac{F_z}{y} \right) \delta x + F_y \delta y,$$

откуда

$$Q_x = F_x - \frac{F_z}{y}, \quad Q_y = F_y.$$

Подсчитаем энергию ускорений

$$S = \frac{m}{2}(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) = \frac{m}{2} \left[ \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \left( \frac{\ddot{x} + \dot{y}\dot{z}}{y} \right)^2 \right].$$

Уравнения Аппеля позволяют найти:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + m \left( \frac{\ddot{x} + \dot{y}\dot{z}}{y^2} \right) &= F_x - \frac{F_z}{y}, \\ m\ddot{y} &= F_y, \\ \dot{x} + y\dot{z} &= 0. \end{aligned}$$

## § 34. Уравнения Лагранжа для систем с неудерживающими связями

**1. Удар в механических системах.** Рассмотрим произвольную механическую систему и запишем ее уравнения движения в форме, указанной в п. 4 § 26:

$$A\ddot{q} + F(t, q, \dot{q}) = 0,$$

где  $A$  — матрица квадратичной формы кинетической энергии.

Пусть на систему наложена идеальная односторонняя связь

$$f(t, q) \geq 0.$$

Пока система находится вне связи, так что выполняется строгое неравенство  $f(t, q) > 0$ , ее движение описывается приведенными уравнениями. В те моменты времени, когда  $f(t, q) = 0$ , система подвержена действию дополнительных мгновенных сил  $\mathcal{N}$ , представляющих собой реакции связей. В эти моменты уравнения движения могут быть записаны в виде

$$A\ddot{q} + F(t, q, \dot{q}) = \mathcal{N}.$$

Запись такого вида содержит условность, связанную с понятием «мгновенная сила», что было предметом обсуждения в § 22.

Виртуальные перемещения вдоль связи обязаны удовлетворять условию

$$\frac{\partial f}{\partial q} \delta q = 0$$

(мы используем матричную форму записи условия, приведенного в п. 5 § 31).

Матрица-строка  $\partial f / \partial q = (\partial f / \partial q_1, \dots, \partial f / \partial q_n)$  определяет нормаль к поверхности  $f(t, q) = 0$ , компоненты единичного вектора нормали  $e$  имеют вид

$$e_i = \frac{\partial f}{\partial q_i} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

и условие на виртуальные перемещения может быть переписано так:

$$e' \delta q = 0.$$

Для удобства дальнейших выкладок мы применяем матричные обозначения, в которых все векторы понимаются как матрицы-столбцы, а штрихи обозначают их транспонирование.

Из условия идеальности рассматриваемой связи, т. е. из

$$\mathcal{N}' \delta q = 0,$$

следует

$$\mathcal{N} = |\mathcal{N}| e,$$

т. е. реакция связи направлена по нормали к связи.

Подставляя это выражение для реакции в уравнения движения и интегрируя уравнение за время удара  $\Delta t$ , получим

$$A\Delta\dot{q} + \int_{\Delta t} F(t, q, \dot{q})dt = e \int_{\Delta t} |\mathcal{N}|dt.$$

Обозначая ударный импульс  $I = \int_{\Delta t} |\mathcal{N}|dt$  и полагая  $\Delta t$  малым, так что

в написанном уравнении можно пренебречь интегралом  $\int_{\Delta t} F(t, q, \dot{q})dt$ , находим

$$A\Delta\dot{q} = Ie.$$

Отсюда для приращения обобщенных скоростей в момент удара выводим:

$$\Delta\dot{q} = IA^{-1}e.$$

Для определения величины ударного импульса воспользуемся условием непрерывности кинетической энергии ( $T_- = T_+$ ). Если кинетическую энергию до удара записать в форме

$$T_- = \frac{1}{2}\dot{q}'A\dot{q} + b'\dot{q} + T_0,$$

то после удара она приобретает вид

$$T_+ = \frac{1}{2}(\dot{q} + \Delta\dot{q})'A(\dot{q} + \Delta\dot{q}) + b'(\dot{q} + \Delta\dot{q}) + T_0.$$

Приравнявая эти выражения друг другу и сокращая одинаковые члены, получим

$$\Delta\dot{q}'A\dot{q} + \frac{1}{2}\Delta\dot{q}'A\dot{q} + b'\Delta\dot{q} = 0.$$

Подставляя в это равенство полученное выше выражение для приращения скоростей  $\Delta\dot{q}$ , получаем уравнение для нахождения величины ударного импульса  $I$ :

$$Ie'\dot{q} + \frac{1}{2}I^2e'A^{-1}e + Ib'A^{-1}e = 0.$$

Исключая нулевое решение, находим

$$I = -2 \frac{e'(\dot{q} + A^{-1}b)}{e'A^{-1}e},$$

что позволяет получить окончательную формулу для приращения обобщенных скоростей в момент удара:

$$\Delta\dot{q} = -2 \frac{e'(\dot{q} + A^{-1}b)}{e'A^{-1}e} A^{-1}e.$$



Эта формула и представляет собой общее решение задачи определения послеударного состояния произвольной механической системы по известному доударному в случае идеального удара (идеальных связей). Здесь  $\dot{q}$  — доударные скорости,  $\dot{q} + \Delta\dot{q}$  — послеударные,  $e$  — единичный вектор нормали к связи в точке удара,  $A$  — матрица квадратичной формы кинетической энергии,  $b$  — коэффициенты линейной формы кинетической энергии, возникающие в случае нестационарной параметризации.

Если параметризация стационарная, то  $b \equiv 0$  и формула для приращения скоростей принимает более простой вид:

$$\Delta\dot{q} = -2 \frac{e' \dot{q}}{e' A^{-1} e} A^{-1} e.$$

Остановимся на некоторых свойствах идеального удара в лагранжевых механических системах, вытекающих из полученных формул.

*Свойство 1.* Для того чтобы падающая скорость  $\dot{q}$  и отраженная скорость  $\dot{q} + \Delta\dot{q}$  и вектор нормали  $e$  в точке удара лежали в одном линейном многообразии размерности два при любых  $\dot{q}$ , необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали был собственным вектором матрицы кинетической энергии в этой точке.

*Доказательство.* Двумерное многообразие, натянутое на векторы  $\dot{q}$  и  $\dot{q} + \Delta\dot{q}$ , имеет вид

$$\Lambda = \lambda \dot{q} + \mu A^{-1} e,$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — произвольные числовые коэффициенты.

Если вектор нормали  $e$  принадлежит этому многообразию, то найдутся такие  $\lambda_0$  и  $\mu_0$ , что

$$\lambda_0 \dot{q} + \mu_0 A^{-1} e = e.$$

При произвольном  $\dot{q}$  отсюда следует, что  $\lambda_0 = 0$  и  $\mu_0 A^{-1} e = e$ , т. е.  $\mu_0$  — собственное число матрицы  $A$ , соответствующее собственному вектору  $e$ .

Таким образом, эффект стесненного идеального удара, проявляющийся в нарушении закона «угол падения равен углу отражения», определяется структурой матрицы квадратичной формы кинетической энергии в точке удара.

*Свойство 2.* Для стационарных систем ( $b \equiv 0$ ) проекция на нормаль в точке удара  $e$  падающей скорости  $\dot{q}$  равна проекции на эту нормаль отраженной скорости  $\dot{q} + \Delta\dot{q}$  по модулю и противоположна по знаку:

$$e' \dot{q} = -e' (\dot{q} + \Delta\dot{q}).$$

*Доказательство* получается прямой подстановкой в это равенство формулы для приращений скоростей  $\Delta\dot{q}$  при  $b \equiv 0$ .

*Свойство 3* (Теорема Аппеля). Обобщенные импульсы, соответствующие обобщенным координатам, на которые не наложена неудерживающая связь, в момент выхода системы на связь непрерывны.

*Доказательство.* Обобщенные импульсы имеют вид

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = A\dot{q} + b.$$

Поскольку в момент удара координаты непрерывны, то

$$\Delta p = A\Delta \dot{q} = Ie.$$

Пусть связь наложена на координату  $q_1$ , т. е.

$$q_1 \geq 0,$$

тогда единичный вектор нормали  $e$  имеет следующие компоненты:

$$e_i = \begin{cases} 0, & i \neq 1, \\ 1, & i = 1. \end{cases}$$

Следовательно, и

$$\Delta p = \begin{cases} 0, & i \neq 1, \\ I, & i = 1. \end{cases}$$

В заключение этого пункта приведем решение задачи о стесненном ударе, сформулированной в § 22 для системы, изображенной на рис. 33.

Кинетическая энергия изображенной на рисунке системы может быть записана следующим образом:

$$T = m \left[ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + l(\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi)\dot{\varphi} + \frac{l^2}{2}\dot{\varphi}^2 \right],$$

так что матрица кинетической энергии получается такой:

$$A = \begin{vmatrix} 2m & 0 & -ml \sin \varphi \\ 0 & 2m & ml \cos \varphi \\ -ml \sin \varphi & ml \cos \varphi & ml^2 \end{vmatrix}.$$

Вычисление обратной матрицы дает

$$A^{-1} = \frac{1}{2ml^2} \begin{vmatrix} l^2(2 - \cos^2 \varphi) & -l^2 \sin \varphi \cos \varphi & 2l \sin \varphi \\ -l^2 \sin \varphi \cos \varphi & l^2(2 - \sin^2 \varphi) & -2l \cos \varphi \\ 2l \sin \varphi & -2l \cos \varphi & 4 \end{vmatrix}.$$

Поскольку уравнение связи имеет вид  $y \geq 0$ , то вектор нормали получается таким:

$$e = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \left( \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \rightarrow \text{вектор обобщенных координат} \right).$$

Поскольку система стационарная, то  $b \equiv 0$  и вычисление приращения скоростей производится по формуле

$$\Delta \dot{q} = \begin{vmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \\ \Delta \dot{\varphi} \end{vmatrix} = -2 \frac{e' \dot{q}}{e' A e} A^{-1} e.$$

В этой формуле

$$e' \dot{q} = (0, 1, 0) \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{vmatrix} = \dot{y}, \quad e' A^{-1} e = \frac{1}{2m} (2 - \sin^2 \varphi),$$

$$A^{-1} e = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2m} \sin \varphi \cos \varphi \\ \frac{1}{2m} (2 - \sin^2 \varphi) \\ -\frac{1}{ml} \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует:

$$\Delta \dot{x} = \frac{2\dot{y}}{2 - \sin^2 \varphi} \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\Delta \dot{y} = -\frac{2\dot{y}}{2 - \sin^2 \varphi} (2 - \sin^2 \varphi) = -2\dot{y},$$

$$\Delta \dot{\varphi} = \frac{4\dot{y} \cos \varphi}{l(2 - \sin^2 \varphi)}.$$

Приращение горизонтальной составляющей скорости равно нулю для горизонтального и вертикального положений стержня в момент удара. Если  $l \rightarrow \infty$ , то стержень движется поступательно ( $\Delta \dot{\varphi} = 0$ ), однако имеется разрыв как вертикальной составляющей скорости, так и горизонтальной.

**2. Негладкая регуляризация.** Как следует из изложенного выше, в момент выхода системы на идеальную неудерживающую связь обобщенные скорости в общем случае терпят разрыв первого рода как функции времени. В системе возникает удар, движение ее может быть описано дифференциальными уравнениями только в промежутке между двумя ударами. В моменты ударов требуется пересчет начальных условий.

Между тем существует возможность посредством подходящей замены обобщенных координат исключить удары в системе, после чего дифференциальные уравнения движения оказываются пригодными на бесконечном интервале времени.

Такая замена переменных называется регуляризацией исходной системы.

Аналитический смысл излагаемой регуляризации заключается в том, что негладким преобразованием обобщенных координат мы можем в системе с неудерживающими связями эти связи исключить.

Рассмотрим идею такой замены вначале на простом примере.

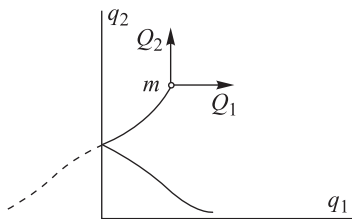


Рис. 47

Пусть изучается плоское движение материальной точки под действием сил произвольной природы (рис. 47).

Обозначим декартовы координаты плоскости как  $q_1, q_2$ , а силы, зависящие от времени, координат и скоростей материальной точки,  $Q_1, Q_2$ . Пусть точке запрещено пребывание в левой полуплоскости, ось координат  $q_1 = 0$  представляет собой идеально отражающую стенку. Формализация

описания рассматриваемой механической системы в терминах теоретической механики исчерпывается заданием выражения для кинетической энергии, обобщенных сил и уравнения связи:

1) кинетическая энергия  $T = m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)/2$ ;

2) обобщенные силы  $Q_1(t, q, \dot{q})$ ,  $Q_2(t, q, \dot{q})$ ;

3) идеальная неудерживающая связь  $q_1 \geq 0$ .

Выполним негладкую замену переменных  $(q_1, q_2) \rightarrow (x, y)$ :

$$q_1 = |x|, \quad q_2 = y.$$

В силу этой замены скорости преобразуются следующим образом:

$$\dot{q}_1 = \dot{x} \operatorname{sign} x, \quad \dot{q}_2 = \dot{y}$$

(способ доопределения производной от модуля в нуле большого значения в дальнейшем не имеет).

Кинетическая энергия в новых переменных приобретает вид  $T = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$ , она оказалась инвариантной по отношению к выполненной замене переменных.

Подсчитаем обобщенные силы, которые будем обозначать  $X$  и  $Y$ . В соответствии с определением обобщенных сил (§ 25) имеем

$$X = \frac{\partial q_1}{\partial x} Q_1 + \frac{\partial q_2}{\partial x} Q_2, \quad Y = \frac{\partial q_1}{\partial y} Q_1 + \frac{\partial q_2}{\partial y} Q_2,$$

откуда

$$X = Q_1 \operatorname{sign} x, \quad Y = Q_2.$$

Осталось выяснить, как преобразуется выражение неудерживающей связи. Поскольку  $q_1 = |x| \geq 0$  выполняется при любых  $x \in (-\infty, \infty)$ , то на новые переменные никаких ограничений не наложено. Связь исключена. Имеем систему, для которой справедливы уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = X, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = Y.$$

Подставляя сюда найденные выражения для кинетической энергии и обобщенных сил, получим

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= Q_1(t, |x|, y, \dot{x} \operatorname{sign} x, \dot{y}) \operatorname{sign} x, \\ m\ddot{y} &= Q_2(t, |x|, y, \dot{x} \operatorname{sign} x, \dot{y}). \end{aligned}$$

Полученные уравнения описывают движение материальной точки на бесконечном интервале времени, включая любые фазы движения. После того как решение этой системы  $x(t), y(t)$  найдено, подстановкой его в выполненную ранее замену находим решение в исходных переменных  $q_1(t) = |x(t)|, q_2(t) = y(t)$ .

*Пример.* Пусть движение пружинного маятника ограничено так, что его перемещение из положения равновесия возможно только в положительном направлении (рис. 48). Допустим также, что при выходе на ограничитель возникающий удар является идеально упругим. Тогда уравнения движения такого маятника можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \ddot{q} + q &= 0, \quad q > 0, \\ \dot{q}_+ &= -\dot{q}_-, \quad q = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения состоят из двух существенно отличающихся частей. Первая часть представляет собой дифференциальное уравнение, справедливое лишь тогда, когда движение удовлетворяет строгому неравенству. Вторая часть, заменяющая дифференциальное уравнение в моменты, когда неравенство превращается в равенство, связывает значения скорости в моменты времени, непосредственно предшествующие удару, со скоростями сразу после удара.

Такая форма уравнений движения предопределяет и способ их решения, состоящий в отыскании кусков траекторий между ударами с последующим их сшиванием в моменты удара.

Между тем при помощи указанной выше негладкой замены переменных можно получить дифференциальные уравнения движения, справедливые в любой момент времени и не дополненные никакими условиями на скорости.

В рассматриваемом примере исходное описание системы таково:

кинетическая энергия  $T = \dot{q}^2/2$ ,

обобщенная сила  $Q = -q$ ,

неудерживающая связь  $q \geq 0$ .

Производим замену переменной  $q \rightarrow x: q = |x|$ . Кинетическая энергия инвариантна к этой замене:  $T = \dot{x}^2/2$ . Обобщенная сила  $X$  пересчитывается в новую обобщенную силу так:

$$X = Q \operatorname{sign} x = -q \operatorname{sign} x = -|x| \operatorname{sign} x = -x.$$

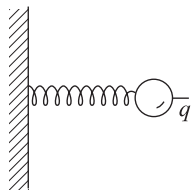


Рис. 48

В этом примере и выражение для обобщенной силы оказалось инвариантным к выполненной замене. Исходная неудерживающая связь ни к каким ограничениям на новую переменную не приводит. Уравнение движения в переменной  $x$  имеет вид

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Его общее решение, справедливое на бесконечном интервале времени, таково:

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Подстановка этого решения в выполненную замену дает общее решение исходной задачи:

$$q = |C_1 \cos t + C_2 \sin t|.$$

**3. Система с канонической формой кинетической энергии.** Рассмотрим механическую систему с неудерживающими связями общего вида. Кинетическая энергия, обобщенные силы и неудерживающая связь заданы функциями

$$T = T(t, q, \dot{q}), \quad Q = Q(t, q, \dot{q}), \quad f(t, q) \geq 0.$$

В механических системах с удерживающими связями большое значение имеет число наложенных связей, прямо связанное с числом степеней свободы. В системах с неудерживающими связями дело обстоит по-другому. На рис. 49 изображен случай двух неудерживающих связей  $f_1(t, q) \geq 0$  и  $f_2(t, q) \geq 0$ . Понятно, что случай сводится к одной связи, имеющей угловые точки при пересечении поверхностей, определяемых каждой связью в отдельности.

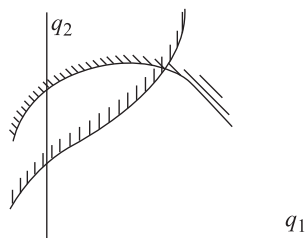


Рис. 49

Таким образом, связь  $f(t, q)$  без ограничения общности может считаться скалярной, а различные предположения о гладкости могут делаться в зависимости от потребностей конкретных задач.

Если функция  $f(t, q)$  — гладкая, то существует гладкая замена переменных  $q \rightarrow r$ , такая, что неравенство, выражающее связь, может быть приведено к виду  $r_1 \geq 0$ . Иными словами, функцию, выражающую неудерживающую связь, можно voltar в качестве новой обобщенной координаты.

Выбор других новых обобщенных координат ограничен только требованием невырожденности осуществляемой замены переменных.

Можно считать, что исходная система уже имеет такой вид, т. е.  $f(t, q) \equiv q_1 \geq 0$ . Для удобства в дальнейшем введем для компоненты  $q_1$  специальное обозначение  $q_1 = s$ . Введем также обозначение для оставшихся компонент  $(q_2, \dots, q_n)' = y$ . (Штрих, как и ранее, обозначает транспонирование, все векторы изображаются как матрицы-столбцы.)

С учетом этих обозначений рассматриваемая система приобретает вид

$$T(t, s, y, \dot{s}, \dot{y}), \quad S(t, s, y, \dot{s}, \dot{y}), \quad Y(t, s, y, \dot{s}, \dot{y}), \quad s \geq 0,$$

где  $S$  и  $Y$  — обобщенные силы, соответствующие координатам  $s$  и  $y$ .

Кинетическая энергия, как это следует из § 26, в общем случае имеет вид  $T = T_2 + T_1 + T_0$ . Однако члены, получающиеся в уравнении Лагранжа от дифференцирования  $T_1(t, q, \dot{q})$  и  $T_0(t, q)$ , можно присоединить к обобщенным силам  $S$ ,  $Y$ . Поэтому в дальнейшем под кинетической энергией будем понимать только ее квадратичную часть:

$$T = \frac{1}{2} \left\| \dot{s} \dot{y}' \right\| A \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $A = A(t, s, y)$  — матрица квадратичной формы кинетической энергии.

Матрицу  $A$  представим разбитой на блоки следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a & h' \\ h & B^{-1} \end{pmatrix},$$

$$a = a_{11}, \quad h' = (a_{12}, \dots, a_{1n}), \quad B^{-1} = \{a_{ij}\} \quad (i, j = 2, \dots, n).$$

Имея в виду эти обозначения, перепишем выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} (a \dot{s}^2 + 2 \dot{s} h' \dot{y} + \dot{y}' B^{-1} \dot{y}).$$

*Определение.* Кинетическая энергия системы имеет по отношению к неудерживающей связи  $s \geq 0$  каноническую форму, если  $h \equiv 0$ . Иными словами, кинетическая энергия в канонической форме является инвариантной по отношению к негладкой замене  $s \rightarrow x$ :  $s = |x|$ , устранимой неудерживающую связь.

Рассмотренный в предыдущем пункте пример негладкой регуляризации простой системы с неудерживающей связью полностью применим для любых систем в канонической форме. Обобщенная сила  $X$ , соответствующая новой обобщенной координате  $x$ , находится из баланса мощностей:

$$X \dot{x} = S \dot{s} = S \dot{x} \operatorname{sign} x,$$

откуда

$$X = S \operatorname{sign} x.$$

И следовательно, уравнения движения, справедливые для любых моментов времени, имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = S \operatorname{sign} x, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = Y.$$

Неудерживающая связь исключена.

Если кинетическая энергия не имеет канонической формы, т. е.  $h \neq 0$ , то ее можно привести к этой форме.

**4. Приведение к канонической форме.** Для приведения к канонической форме разыскиваем подходящую замену переменных, на которые неудерживающая связь не наложена:  $y \rightarrow v$ ,  $y = \varphi(t, s, v)$ . Подставляя выражения для обобщенных скоростей  $\dot{y} = \partial\varphi/\partial t + (\partial\varphi/\partial s)\dot{s} + (\partial\varphi/\partial v)\dot{v}$  в выражение для кинетической энергии, находим:

$$2T = \left( a + 2h' \frac{\partial\varphi}{\partial s} + \frac{\partial\varphi'}{\partial s} B^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right) \dot{s}^2 + 2\dot{s} \left( h' + \frac{\partial\varphi'}{\partial s} B^{-1} \right) \frac{\partial\varphi}{\partial v} \dot{v} + \\ + \dot{v}' \frac{\partial\varphi'}{\partial v} B^{-1} \dot{v} + 2\dot{s} \left( h' \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi'}{\partial t} B^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right) + 2 \frac{\partial\varphi'}{\partial t} B^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial v} \dot{v} + \\ + \frac{\partial\varphi'}{\partial t} B^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Для того чтобы кинетическая энергия была канонической, необходимо обратить в ноль члены, содержащие первую степень  $\dot{s}$ . Для этого достаточно выполнения тождества  $\partial\varphi/\partial s = -Bh$ .

Получена система дифференциальных уравнений для нахождения функций  $\varphi$ . Общее решение этой системы зависит от произвольных постоянных  $C$ :

$$\varphi = \varphi(t, s, C).$$

Подставляя вместо  $C$  новые обобщенные координаты  $v$ , мы получаем искомую замену  $y = \varphi(t, s, v)$ .

*Пример.* Пусть кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2}(\dot{s}^2 + 2\dot{s}y_2\dot{y}_1 + 2\dot{s}\dot{y}_2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2).$$

В соответствии с вышеизложенным, замена, устраняющая линейные по  $\dot{s}$  члены, должна удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial s} = -\varphi_2, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial s} = -1$$

$$\left( \text{в этом примере } a = 1, h = (y_2, 1), B^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right).$$

Общее решение этой системы таково:

$$\varphi_1 = \frac{s^2}{2} - C_2 s - C_1, \quad \varphi_2 = -s + C_2.$$

Следовательно, преобразование, приводящее к канонической форме кинетическую энергию, имеет вид

$$y_1 = \frac{s^2}{2} - v_2 s - v_1, \quad y_2 = -s + v_2.$$

В новых переменных кинетическая энергия оказывается такой:

$$T = \frac{1}{2}[-(s - v_2)^2 \dot{s}^2 + \dot{v}^2 + 2s\dot{v}_1\dot{v}_2 + \dot{v}_2^2].$$



**5. Общие уравнения систем с неудерживающими связями.** Приведенный выше прием сведения кинетической энергии к канонической форме дает принципиальное решение задачи составления регулярных уравнений движения систем с неудерживающими связями в самом общем случае. Однако он требует знания общего решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений для разыскания замены переменных, что при решении конкретных задач может быть препятствием для построения искоемых уравнений системы с неудерживающими связями в явном виде.

В этом пункте излагается прием, позволяющий выписать регулярные уравнения систем с неудерживающими связями в явном виде для любых таких систем. В основе этого приема лежит изложенное в п. 1 настоящего параграфа свойство 3 (теорема Аппеля), согласно которому обобщенные импульсы, соответствующие переменным, на которые не наложена неудерживающая связь, в момент удара не терпят разрыва. Следовательно, если выбрать эти импульсы в качестве фазовых переменных, то дифференциальные уравнения могут содержать не более чем разрывы первого рода.

Переход от части обобщенных скоростей к обобщенным импульсам соответствует переходу от уравнений Лагранжа к уравнениям Рауса (§ 30). Будем исходить из выражения системы с неудерживающей связью в виде, представленном в п. 2 настоящего параграфа. Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}(a\dot{s}^2 + 2\dot{s}h'\dot{y} + \dot{y}'B^{-1}\dot{y}),$$

$s, y$  — обобщенные силы,  $s \geq 0$  — уравнение связи.

Введем в рассмотрение функцию Рауса, заменив обобщенные скорости  $\dot{y}$  на соответствующие обобщенные импульсы.

Дифференцируя выражение для кинетической энергии, найдем

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \dot{s}h + B^{-1}\dot{y}.$$

Из этого соотношения следует

$$\dot{y} = B(p - \dot{s}h).$$

Запишем функцию Рауса (в отличие от записи этой функции в § 30 берем ее с обратным знаком)

$$\mathcal{R}^* = T(t, s, y, \dot{s}, \dot{y}) - p'\dot{y}.$$

Подставляя сюда полученное выше выражение для  $\dot{y}$ , находим

$$\mathcal{R}^* = \frac{1}{2}(a - h'Bh)\dot{s}^2 - \frac{1}{2}p'Bp + \dot{s}p'Bh.$$

Выполним теперь негладкую замену  $s \rightarrow x$ :

$$s = |x|.$$

С учетом этой замены функция Рауса переписывается так:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^*(t, |x|, y, \dot{x} \operatorname{sign} x, p) &\equiv \mathcal{R}(t, x, y, \dot{x}, p) = \\ &= \frac{1}{2}(a - h' Bh)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}p' Bp + \dot{x}p' Bh \operatorname{sign} x = \\ &= \mathcal{R}_0 + \dot{x}p' Bh \operatorname{sign} x,\end{aligned}$$

где через  $\mathcal{R}_0$  обозначена непрерывная часть:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{1}{2}(a - h' Bh)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}p' Bp.$$

Запишем уравнения движения:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} = X, \quad \dot{y} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p}, \quad \dot{p} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} + Y.$$

Подставляя сюда приведенное представление функции Рауса, получим более подробное выражение:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial x} &= X - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \dot{x}p' Bh \operatorname{sign} x, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial p} - \dot{x} Bh \operatorname{sign} x, \quad \dot{p} = \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial p} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial y} (p' Bh) \operatorname{sign} x + Y.\end{aligned}$$

В этом выражении содержится член

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \dot{x}p' Bh \operatorname{sign} x,$$

в котором операции дифференцирования применяются к разрывной функции  $\operatorname{sign} x$ . При дифференцировании разрывных функций обычно возникают сингулярности типа так называемых  $\delta$ -функций, введенных первоначально в физику П. Дираком, теория которых (теория обобщенных функций) впоследствии была построена Л. Шварцем. Покажем, что в нашем случае требуемое дифференцирование ни к каким подобным сингулярностям не приводит и выписанная система уравнений является регулярной дифференциальной системой, определенной в любой точке бесконечного интервала времени. Для этой цели выполним подробное дифференцирование разрывного члена:

$$\begin{aligned}\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \dot{x}p' Bh \operatorname{sign} x &= \frac{d}{dt} (p' Bh \operatorname{sign} x) - \dot{x}p' \frac{\partial}{\partial x} (Bh \operatorname{sign} x) = \\ &= \left[ \frac{d}{dt} (p' Bh) - \dot{x}p' \frac{\partial}{\partial x} (Bh) \right] \operatorname{sign} x + p' Bh \left( \frac{d}{dt} \operatorname{sign} x - \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sign} x \right).\end{aligned}$$

Последний член в этом выражении, который мог быть ответственным за появление сингулярности, на самом деле равен нулю, если только

правило дифференцирования сложной функции остается справедливым и для обобщенной функции:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sign} x = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sign} x.$$

В теории обобщенных функций показывается, что это действительно так, если только  $\dot{x}(t)$  — непрерывная функция времени.

Таким образом, нам осталось убедиться в непрерывности  $\dot{x}$  в момент удара.

*Теорема.* Если кинетическая энергия системы с неударживающей связью, записанная в первоначальных переменных,

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}' A \dot{q} + b' \dot{q} + T_0$$

не содержит линейной формы скоростей, т. е.  $b \equiv 0$ , то  $\dot{x}(t)$  является непрерывной функцией времени.

*Доказательство.* Пусть в своем движении рассматриваемая система проходит положение  $s = 0$ , сопровождаемое ударом. Пусть  $\dot{s}$  — скорость до удара, а  $\dot{s} + \Delta\dot{s}$  — после. В соответствии с заменой  $s = |x|$  разрыв скорости  $\Delta\dot{s}$  приводит в общем случае к разрыву скорости  $\Delta\dot{x}$ . До удара  $\dot{s} = \dot{x} \operatorname{sign} x$ , после удара  $\dot{s} + \Delta\dot{s} = (\dot{x} + \Delta\dot{x}) \operatorname{sign} x$ . Поскольку до удара  $\operatorname{sign} x = -1$ , а после удара  $\operatorname{sign} x = 1$ , то получаем  $\dot{s} = -\dot{x}$ ,  $\dot{s} + \Delta\dot{s} = \dot{x} + \Delta\dot{x}$ . Из этих двух равенств находим  $\Delta\dot{x} = 2\dot{s} + \Delta\dot{s}$ . Воспользуемся полученным в п. 1 настоящего параграфа выражением для приращения скорости по той переменной, на которую наложена связь:

$$\Delta\dot{s} = -2(\dot{s} + A^{-1}b)$$

(напомним, что  $s = q_1$ ). Следовательно, для приращения скорости  $\Delta\dot{x}$  получаем  $\Delta\dot{x} = 2A^{-1}b$ . И если  $b \equiv 0$ , то и  $\Delta\dot{x} \equiv 0$ . Теорема доказана. В частности, теорема верна для стационарных систем, для которых не только  $T_1$ , но и  $T_0$  равно нулю.

# Часть 4

## КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ

### Глава 9

#### РАВНОВЕСИЕ И ДВИЖЕНИЕ ВБЛИЗИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

#### § 35. Определение устойчивости положения равновесия

Как было показано в § 26, уравнения Лагранжа разрешимы относительно старших производных:

$$\ddot{q} = F(t, q, \dot{q}), \quad q = (q_1, \dots, q_n).$$

При обозначении  $\dot{q} = p$  система сводится к нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{q} = p, \\ \dot{p} = F(t, q, p), \end{cases}$$

которую мы будем записывать в виде

$$\dot{x} = X(t, x), \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Число компонент вектора  $x$ , т.е. число  $n$ , здесь вдвое больше числа компонент вектора  $q$ , однако четномерность вектора  $x$  для механических систем в дальнейшем никакого значения не имеет, и мы на этом не будем акцентировать внимания.

Правые части будут предполагаться достаточно гладкими в области их определения функциями своих переменных, с тем чтобы решение любой начальной задачи Коши существовало и было единственным.

Решение системы  $x(t)$  называется бесконечно продолжаемым вправо, если оно существует для любого  $t \in [t_0, \infty)$ .

Решение, не являющееся бесконечно продолжаемым вправо, за конечное время выходит на границу области существования.

*Пример.* Уравнение  $\dot{x} = 1 - \sqrt{1 - x^2 t^2}$  имеет область определения, задаваемую условием  $x^2 t^2 \leq 1$ . Решения начальной задачи Коши для этого уравнения изображены на рис. 50. Видно, что существуют как продолжаемые, так и не продолжаемые бесконечно вправо решения.

Система допускает положение равновесия  $\dot{x} = 0$ , если система  $X(t, x) = 0$  имеет не зависящее от  $t$  решение  $x = a = \text{const}$ . Без ограничения общности можно полагать  $a = 0$ .

**Определение 1.** Положение равновесия системы  $\dot{x} = X(t, x)$  называется *устойчивым по Ляпунову*, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что любое малое возмущение начальных данных  $\|x(t_0)\| < \delta$  влечет и малое возмущение положения равновесия:  $\|x(t)\| < \varepsilon$  для любого  $t_0 \leq t < \infty$  (рис. 51).

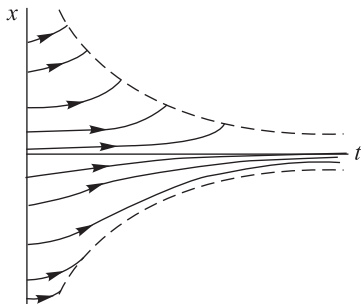


Рис. 50

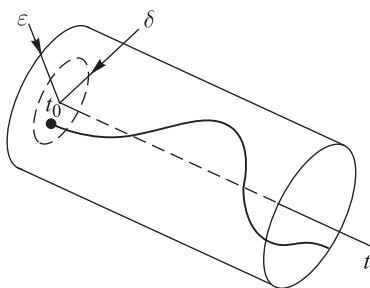


Рис. 51

Заметим, что из условия малости возмущенного движения при любом  $t$  следует, что в достаточно малой окрестности устойчивого положения равновесия любые решения бесконечно продолжаемы вправо.

Определение устойчивости по Ляпунову представляет собой не что иное, как определение непрерывности решения начальной задачи Коши по начальным условиям, причем эта непрерывность является равномерной по  $t$ .

Положение равновесия будет неустойчивым по Ляпунову, если либо в любой сколь угодно малой окрестности его найдется хотя бы одно не продолжаемое бесконечно вправо решение, либо, каким бы малым ни назначить  $\delta$ , всегда найдется такое решение, удовлетворяющее условию  $\|x(t_0)\| < \delta$ , и такой момент времени  $t^*$ , когда это решение выйдет за пределы  $\mu$ -окрестности нуля:  $\|x(t^*)\| > \mu$ , где  $\mu$  — некоторое положительное число. Положение равновесия в примере на рис. 50 неустойчиво, поскольку в любой окрестности его есть не продолжаемое решение.

**Определение 2.** Положение равновесия рассматриваемой системы называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову*, если, во-первых, оно устойчиво по Ляпунову и, во-вторых, существует такая окрестность нуля, что все решения, стартующие из нее, при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к положению равновесия:  $\|x(t)\| \rightarrow 0$ .

В приведенных определениях под нормой вектора фазового состояния  $x(t)$  понимается евклидова норма:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Заметим, что к исследованию устойчивости положения равновесия всегда может быть сведено исследование устойчивости любого частного решения.

Действительно, пусть  $x = \psi(t)$  — некоторое частное решение системы  $\dot{x} = F(t, x)$ . Выполним в этой системе замену переменных  $x \rightarrow y$ :  $x = y + \psi(t)$ .

Систему в новых переменных получаем в виде

$$\dot{y} = F[t, y + \psi(t)] - F[t, \psi(t)]$$

с положением равновесия  $y \equiv 0$ .

Решение  $x = \psi(t)$  называется устойчивым по Ляпунову, если устойчивым по Ляпунову будет это положение равновесия. Аналогичное определение имеет место и для асимптотической устойчивости.

### § 36. Корректность понятия устойчивости

В определении устойчивости присутствует начальный момент времени  $t_0$ . Возникает вопрос — зависит ли от выбора начального момента свойство устойчивости?

**Теорема.** Если положение равновесия системы  $\dot{x} = X(t, x)$  устойчиво для начального момента времени  $t = t_0$ , то оно является устойчивым и для любого последующего момента времени  $t = t_1$ , принимаемого за начальный.

**Доказательство.** Пусть задано произвольное  $\varepsilon > 0$  и нужно построить такое  $\delta_1 > 0$ , чтобы из условия  $\|x(t_1)\| < \delta_1$  следовало  $\|x(t)\| < \varepsilon$  для любого  $t_1 \leq t < \infty$ . Поскольку для начального момента времени  $t = t_0$  устойчивость имеет место, то существует такое  $\delta$ , что из  $\|x(t_0)\| < \delta$  следует  $\|x(t)\| < \varepsilon$  для любого  $t_0 < t < \infty$ . Обозначим через  $D_\delta$   $\delta$ -окрестность нуля, через  $G$  ее образ при отображении, осуществляемом вдоль траекторий, стартующих из  $D_\delta$  в момент времени  $t = t_0$  и рассматриваемых в момент времени  $t = t_1$  (рис. 52):

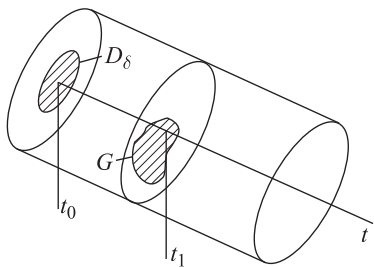


Рис. 52

$$G = \psi(t_1, D_\delta).$$

Здесь  $x = \psi(t, x_0)$  — решение системы с  $x(t_0) = x_0$ .

Это отображение является взаимно однозначным и взаимно непрерывным. Если бы это было не так, то либо задача

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad x(t_0) = a,$$

либо задача

$$\frac{dx}{d\tau} = -X(t_1 - \tau, x), \quad x(0) = b$$

не имела бы единственного решения, непрерывного по начальным данным.

Из того, что отображение  $D_\delta \rightarrow G$  является взаимно непрерывным, следует, что все внутренние точки  $D_\delta$  отображаются во внутренние точки  $G$ . Поскольку положение равновесия есть внутренняя точка  $D_\delta$ , то оно остается внутренней точкой и в  $G$ . Значит, расстояние от нее до границы области  $G$  положительно. Это расстояние и представляет собой искомое  $\delta_1$ . Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что от выбора начального момента времени в определении устойчивости может только зависеть  $\delta$ . Если окажется, что  $\delta$  можно находить не зависящим от  $t_0$ , то такая устойчивость называется равномерной.

Не столь хорошо дело обстоит с выбором переменных, в которых описывается система. Устойчивая в одних переменных, она может оказаться неустойчивой в других и наоборот.

*Пример.* Рассмотрим устойчивость решения следующей начальной задачи Коши:  $\dot{x} = 1/2$ ,  $x(0) = x_0$ . Это решение имеет вид

$$x = x_0 + \frac{t}{2}.$$

При возмущении начальных условий имеем возмущенное решение  $\tilde{x} = x_0 + \delta x_0 + t/2$ . Разность между возмущенным решением и исследуемым на устойчивость  $|\tilde{x} - x| = \delta x_0$  сколь угодно мала при сколь угодно малых  $\delta x_0$  для любого момента времени.

Рассмотрим эту же систему, перейдя к новой переменной  $x \rightarrow y$ :  $y = x^2$ . Приходим к задаче Коши:  $\dot{y} = \sqrt{y}$ ,  $y(0) = x_0^2$ . Решению  $x_0 + t/2$  в исходной переменной соответствует решение в новой:

$$y = \left(x_0 + \frac{t}{2}\right)^2.$$

При возмущении начальных данных имеем

$$\tilde{y} = \left(x_0 + \delta x_0 + \frac{t}{2}\right)^2.$$

Соответствующая разность

$$|\tilde{y} - y| \geq 2\delta x_0 \left(x_0 + \frac{t}{2}\right)$$

не ограничена, каким бы малым ни выбрать начальное возмущение, Решение, устойчивое в переменной  $x$ , оказалось неустойчивым в переменной  $y$ .

Для того чтобы исследование устойчивости было корректным, мы должны, во-первых, твердо знать, по отношению к каким переменным нас интересует устойчивость. И, во-вторых, если процедура исследования требует перехода к новым переменным, мы должны гарантировать эквивалентность свойств устойчивости в старых и в новых переменных.

Замены переменных, не изменяющие свойств устойчивости исследуемых решений, называются *допустимыми*.

Достаточные условия допустимой замены дает следующая

*Теорема.* Пусть  $x \equiv 0$  — устойчивое решение системы  $\dot{x} = f(t, x)$ . Если замена  $x \rightarrow y$ :  $x = F(t, y)$  такая, что  $F(t, 0) \equiv 0$  удовлетворяет условиям:

- 1)  $\partial F / \partial y$  невырождена в некоторой окрестности нуля;
- 2) если  $F(t, y)$  и  $F^{-1}(t, x)$  непрерывны в нуле равномерно по  $t$ , то решение  $y \equiv 0$  системы  $\dot{y} = (\partial F / \partial y)^{-1} f[t, F(t, y)]$  устойчиво (и наоборот).

Доказательство теоремы предоставим читателю в качестве упражнения.

## § 37. Общие теоремы об устойчивости линейных систем

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t).$$

Выше было дано определение устойчивости положения равновесия и было отмечено, что к изучению устойчивости равновесия может быть сведено изучение устойчивости любого частного решения. Если все частные решения дифференциальной системы устойчивы, то говорят, что сама эта система является устойчивой.

*Теорема 1.* Линейная система устойчива (с любым свободным членом) тогда и только тогда, когда устойчиво тривиальное решение соответствующей однородной системы.

*Доказательство.* Пусть  $x = \psi(t)$  — исследуемое на устойчивость решение неоднородной системы. Сведем задачу к исследованию устойчивости положения равновесия:

$$x \rightarrow y, \quad x = \psi(t) + y.$$



Подстановка в систему дает

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{dy}{dt} = A(t)[\psi(t) + y] + f(t).$$

Поскольку

$$\frac{d\psi}{dt} \equiv A(t)\psi(t) + f(t),$$

то для  $y$  получаем систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y,$$

которая не зависит от того, какое именно частное решение рассматривается. Теорема доказана.

*Теорема 2.* Линейная однородная система устойчива тогда и только тогда, когда каждое ее решение ограничено.

*Доказательство.* Допустим, что система устойчива, но у нее есть неограниченное решение  $x = \psi(t)$ .

Очевидно,  $\psi(0) \neq 0$ , и мы можем построить решение

$$x = \frac{\psi(t)}{\psi(0)}\delta,$$

обладающее свойством  $x_0 = \delta$ . При любом  $\delta$  это решение неограничено, что вступает в противоречие с определением устойчивости при  $\delta \rightarrow 0$ .

В обратную сторону. Пусть любое решение ограничено. Но тогда и ограничена фундаментальная матрица решений:

$$X(t) = \left\| \begin{array}{ccc} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{array} \right\|,$$

столбцы которой составлены из линейно независимых частных решений. Если эти решения выбраны так, что

$$X(0) = E,$$

где  $E$  — единичная матрица, то общее решение линейной однородной системы можно записать как

$$x(t) = X(t)x(0).$$

Тогда

$$\|x(t)\| \leq M\|x(0)\|.$$

И при  $\|x(0)\| \rightarrow 0$  функция  $\|x(t)\| \rightarrow 0$  равномерно по  $t \in [0, \infty)$ , что и означает устойчивость.

### § 38. Устойчивость линейных систем с постоянной матрицей

*Теорема 1.* Линейная система с постоянной матрицей асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда вещественные части корней характеристического уравнения системы

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

отрицательны

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

*Доказательство.* Из теории линейных систем дифференциальных уравнений известно, что произвольная компонента вектора решения  $z$  линейной системы состоит из суммы функций следующего вида:  $(\exp a_k t) \cos b_k t$ , если корни  $\lambda_k = a_k + ib_k$  не являются кратными. Если же среди корней есть кратные, то в решении появляются слагаемые вида  $(C_0 + C_1 t + \dots + C_p t^p)(\exp a_k t) \cos b_k t$ . Если  $a_k < 0$ , то все такие слагаемые стремятся к нулю.

Решения линейной системы оказываются ограниченными и, в силу теоремы 2 из § 37, сама система является устойчивой, а в силу экспоненциального затухания решений — и асимптотически устойчивой. Теорема доказана.

Таким образом, чтобы установить асимптотическую устойчивость линейной системы, достаточно убедиться, что все корни ее характеристического уравнения (иногда его называют вековым)

$$\det(A - \lambda E) \equiv a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n = 0$$

обладают отрицательными вещественными частями.

*Теорема 2* (Критерий Рауса–Гурвица). Для того чтобы полином

$$f(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n \quad (a_0 > 0)$$

имел все корни с отрицательными вещественными частями, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы

$$M = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \end{vmatrix}$$

были положительны.

Поясним, что на главной диагонали этой матрицы стоят коэффициенты рассматриваемого полинома, от  $a_1$  до  $a_n$ , а каждая строка получается достраиванием диагонального элемента вправо и влево до последовательности всех коэффициентов в порядке их убывания.

*Доказательство.* Полином  $f(\lambda)$ , корни которого обладают отрицательными вещественными частями, называется *устойчивым*.

*Лемма 1.* Если полином устойчив, то все коэффициенты его положительны.

Действительно, пусть полином имеет корни

$$\lambda_j = -\alpha_j \pm i\beta_j, \quad j = 1, \dots, p,$$

с кратностями  $\sigma_j$ , а также корни  $\lambda_k = -\gamma_k$  с кратностями  $s_k$ ,  $k = 1, \dots, q$ . Поскольку полином устойчив, то  $\alpha_j, \gamma_k > 0$ .

Представим полином в виде разложения на сомножители:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= a_n \prod_{j=1}^p [(\alpha_j - i\beta_j)(\lambda + \alpha_j + i\beta_j)]^{\sigma_j} \prod_{k=1}^q (\lambda + \gamma_k)^{s_k} = \\ &= a_n \prod_{j=1}^p (\lambda^2 + 2\lambda\alpha_j + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{\sigma_j} \prod_{k=1}^q (\lambda + \gamma_k)^{s_k}. \end{aligned}$$

Произведение сомножителей с положительными коэффициентами есть полином с положительными коэффициентами. Лемма доказана.

Полином  $F(\lambda) = (1 + \alpha\lambda)f(\lambda) + f(-\lambda)$ , в котором  $\alpha > 0$ , называется *присоединенным* к полиному  $f(\lambda)$ .

*Лемма 2.* Если полином  $f(\lambda)$  устойчив, то и присоединенный полином тоже устойчив.

Рассмотрим вспомогательный полином

$$\Phi_\mu = (1 + \alpha\lambda)f(\lambda) + \mu f(-\lambda), \quad \mu \in [0, 1].$$

Очевидно, что  $\Phi_0(\lambda)$  — устойчивый полином. Корни полинома  $\Phi_\mu(\lambda)$  являются непрерывными функциями параметра  $\mu$ . Если  $\Phi_1(\lambda) \equiv F(\lambda)$  не является устойчивым, то это значит, что существует  $\mu^*$  такое, что

$$\operatorname{Re} \lambda_k(\mu^*) = 0, \quad \lambda_k = i\beta.$$

Подставим этот корень в полином  $\Phi_\mu$ :

$$(1 + \alpha i\beta)f(i\beta) = -\mu^* f(-i\beta).$$

Отсюда

$$|1 + \alpha i\beta||f(i\beta)| = \mu^* |f(-i\beta)|.$$

Так как  $f(\lambda)$  — устойчивый полином, то

$$|f(i\beta)| = |\bar{f}(i\beta)| = f(-i\beta) \neq 0.$$

И из полученного выше равенства следует

$$|1 + i\alpha\beta| = \mu^*, \quad \text{или} \quad 1 + \alpha^2\beta^2 = \mu^{*2}.$$

Так как  $\Phi_\mu(0) = (1 + \mu)f(0) = (1 + \mu)a_0 \neq 0$ , то и  $\beta \neq 0$ . Значит,  $1 + \alpha^2\beta^2 = \mu^{*2} > 1$ , что невозможно, поскольку  $\mu \leq 1$ . Лемма доказана.

*Лемма 3.* Для всякого устойчивого полинома степени  $n + 1$  существует устойчивый полином степени  $n$ , для которого данный полином является присоединенным.

Пусть  $F(\lambda)$  — заданный устойчивый полином степени  $n + 1$ . Найдем устойчивый полином  $f(\lambda)$  степени  $n$  такой, чтобы

$$F(\lambda) = (1 + \alpha\lambda)f(\lambda) + f(-\lambda).$$

Отсюда, учитывая, что

$$F(-\lambda) = (1 - \alpha\lambda)f(-\lambda) + f(\lambda),$$

находим

$$\alpha^2 \lambda^2 f(\lambda) = -(1 - \alpha\lambda)F(\lambda) + F(-\lambda).$$

Прежде всего нужно показать, что  $f(\lambda)$  является полиномом, т. е. это равенство можно сократить на  $\lambda^2$ . Для этого запишем  $F(\lambda)$  в виде

$$F(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \dots + A_{n+1}\lambda^{n+1}$$

и подставим в полученное равенство:

$$\alpha^2 \lambda^2 f(\lambda) = (\alpha A_0 - 2A_1)\lambda + \alpha A_1 \lambda^2 + \dots$$

Отсюда видно, что  $f(\lambda)$  будет полиномом степени  $n$ , если выбрать

$$\alpha = 2A_1/A_0.$$

Осталось показать, что такой полином будет устойчивым.

Рассмотрим функцию

$$\Phi_\mu(\lambda) = -(1 - \alpha\lambda)F(\lambda) + \mu F(-\lambda), \quad \mu \in [0, 1].$$

Полином  $\Phi_0(\lambda)$  имеет один корень  $\lambda = 1/\alpha$  положительный и все остальные с отрицательными вещественными частями. Выясним, при каких  $\mu$  сохраняется подобная расстановка корней.

Пусть при некотором  $\mu = \mu^*$

$$\lambda_k = i\beta,$$

тогда  $1 + \alpha^2 \beta^2 = \mu^{*2}$ , что невозможно для  $0 \leq \mu < 1$ . При  $\mu = 1$  полином  $\Phi_1(\lambda)$  имеет двукратный нулевой корень.

Рассмотрим поведение корней при  $\mu \rightarrow 1$ . Возможны два варианта поведения. В первом варианте в нулевой корень сливаются один корень из левой полуплоскости и единственный корень из правой (рис. 53). Во втором варианте корень в правой полуплоскости остается в ней же, а к нулю стремятся два корня из левой полуплоскости (рис. 54).

Если имеет место первый случай, то после сокращения на  $\lambda^2$  оставшиеся корни будут лежать в левой полуплоскости и полином  $f(\lambda)$  оказывается устойчивым. Покажем, что именно этот вариант и имеет

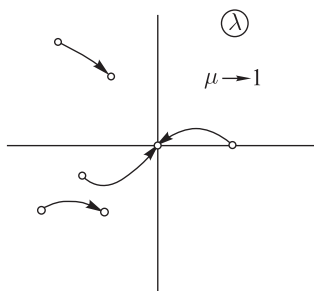


Рис. 53

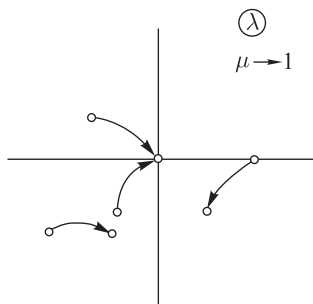


Рис. 54

место. Обозначим два корня, стремящиеся к нулю при  $\mu \rightarrow 1$ , через  $\lambda_p$  и  $\lambda_q$ . Рассмотрим подробнее поведение этих корней при  $1 - \mu = \varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\Phi_\mu = -A_0\varepsilon + A_1\varepsilon\lambda + \left(\frac{2A_1^2}{A_0} - \varepsilon A_2\right)\lambda^2 + \dots = 0.$$

Ищем указанные корни в виде

$$\lambda_{p,q} = \rho_1\sqrt{\varepsilon} + \rho_2(\sqrt{\varepsilon})^2 + \dots$$

Подставляя в написанное выше уравнение, находим:

$$\left(-A_0 + \frac{2A_1^2}{A_0}\rho_1^2\right)\varepsilon + \left(A_1 + \frac{4A_1^2}{A_0}\rho_2\right)\rho_1\varepsilon^{3/2} + \dots = 0,$$

откуда получаем

$$\rho_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \frac{A_0}{A_1}.$$

Но при  $\mu \neq 1$  у полинома  $\Phi_\mu$  единственный корень с положительной вещественной частью, следовательно, это и есть корень  $\lambda_p$ . Лемма доказана.

Доказательство самой теоремы будем проводить методом полной математической индукции. Покажем вначале необходимость условий теоремы. Пусть полином  $f(\lambda)$  устойчив. Тогда для  $n = 1$   $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$  и главный диагональный минор фигурирующей в теореме матрицы сводится к  $a_1$ , которое должно быть больше нуля из условия отрицательности  $\lambda$ . Для  $n = 1$  условие теоремы, как необходимое, справедливо.

Пусть теперь оно справедливо для некоторого  $n$ . Покажем, что оно справедливо и для  $n + 1$ . Полином степени  $n + 1$  можно рассматривать как присоединенный к полиному степени  $n$ :

$$F(\lambda) = (1 + \alpha\lambda)f(\lambda) + f(-\lambda).$$

Для удобства примем  $\alpha = 2C$ . Выразим полином  $F(\lambda)$  через коэффициенты полинома  $f(\lambda)$ :

$$F(\lambda) = 2 \sum_{k=0}^{n+1} \left[ C_{a_{k-1}} + \frac{1 + (-\lambda)^k}{2} a_k \right] \lambda^k, \quad a_{-1} = a_{n+1} = 0.$$

Вычислим главный диагональный минор порядка  $k+1$  матрицы  $M$ :

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} 2Ca_0 & 2a_0 & 0 & 0 & \cdot \\ 2Ca_2 & 2a_2 + 2Ca_1 & 2Ca_0 & 2a_0 & \cdot \\ 2Ca_4 & 2a_4 + 2Ca_3 & 2Ca_2 & 2a_2 + 2Ca_1 & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2Ca_{2k} & 2a_{2k} + 2Ca_{2k-1} & 2Ca_{2k-2} & 2a_{2k-2} + 2Ca_{2k-3} & \cdot \end{vmatrix}.$$

Вынесем из первого столбца за знак определителя  $2C$  и вычтем после этого из второго столбца удвоенный первый. Из полученного второго столбца вынесем  $2C$  и повторим процедуру для третьего и четвертого, затем пятого и шестого и т. д. В результате получим

$$D_{k+1} = (2C)^{k+1} \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2k} & a_{2k-1} & a_{2k-3} & \cdot \end{vmatrix} = (2C)^{k+1} a_0 \Delta_k,$$

где  $\Delta_k$  — главный минор порядка  $k$  матрицы  $M$  для полинома  $f(\lambda)$ . Но по предположению индукции  $\Delta_k > 0$  для  $k = 1, \dots, n$ . Значит, и  $D_{k+1} > 0$ .

Докажем теперь достаточность. Пусть  $n = 1$ ,  $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$ , из условия  $\Delta_1 > 0$ , т. е.  $a_1 > 0$ , следует, что полином устойчивый. Пусть теперь теорема верна вплоть до некоторого  $n$  включительно: из  $\Delta_k > 0$  при  $k = 1, \dots, n$  следует, что  $f(\lambda)$  — устойчивый полином. Рассмотрим полином  $F(\lambda)$  порядка  $n+1$ . Дано, что для него все  $D_{k+1} > 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Для этого полинома существует полином  $f(\lambda)$ :  $F(\lambda) = (1 + \alpha\lambda)f(\lambda) + f(-\lambda)$  и в силу  $D_{k+1} = \alpha^{k+1}a_0\Delta_k$  следует, что  $\Delta_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Но это значит, что полином  $f(\lambda)$  — устойчивый. Тогда по лемме 2  $f(\lambda)$  — тоже устойчивый полином. Теорема доказана.

Существуют теоремы, в которых необходимые и достаточные условия устойчивости полинома  $f(\lambda)$  формулируются не в аналитической форме, как в предыдущей теореме, а в геометрической. Остановимся на одной из таких теорем, которая называется *геометрическим критерием устойчивости Михайлова*.

**Определение.** Кривая, описываемая в комплексной плоскости комплексным числом  $f(i\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , называется годографом Михайлова функции  $f(\lambda)$ .

**Теорема** (Критерий Михайлова). Для того чтобы вещественные части корней полинома  $f(\lambda) = 0$  были строго отрицательны:  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ ,

необходимо и достаточно, чтобы при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$   $\arg f(i\omega)$  изменился на  $\pi n/2$ .

*Доказательство.* Представим полином  $f(i\omega)$  в виде разложения на множители:

$$f(i\omega) = a_n(i\omega - \lambda_1) \dots (i\omega - \lambda_n).$$

Изменение аргумента произведения комплексных чисел равно сумме изменений аргументов сомножителей:

$$\Delta \arg f(i\omega) = \sum_{k=1}^n \Delta \arg (i\omega - \lambda_k).$$

Изменение аргумента сомножителя  $i\omega - \lambda_k$  зависит от знака вещественной части корня (рис. 55). Если  $a_k < 0$ , то изменение аргумента  $i\omega - \lambda_k$  при  $\omega$ , изменяющемся от  $-\infty$  до  $\infty$ , очевидно равно  $-\pi$ . Если

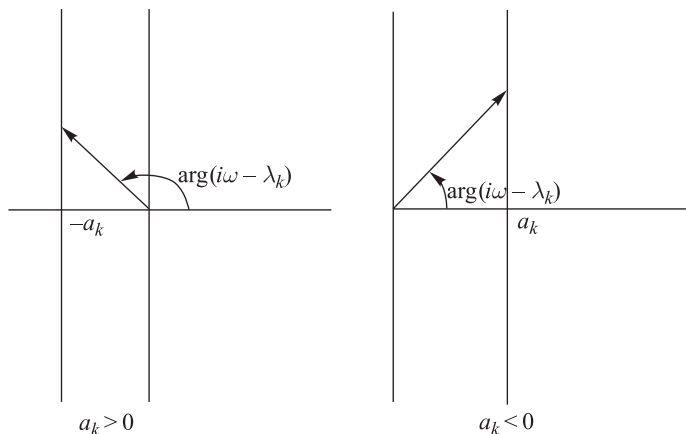


Рис. 55

$a_k > 0$ , то изменение аргумента в том же диапазоне изменения  $\omega$  равно  $+\pi$ . Если  $a_k = 0$ , то изменение аргумента не определено. Значения предела этого изменения при  $a_k \rightarrow 0$  справа и слева не равны друг другу. Следовательно,

$$\Delta \arg f(i\omega) = \begin{cases} \pi(l-r), & a_k \neq 0 \quad \forall k, \\ \text{не определено, если} & \exists k : a_k = 0. \end{cases}$$

Поскольку  $f(-i\omega) = \overline{f(i\omega)}$ , то кривая оказывается симметричной относительно вещественной оси для  $\omega \in (-\infty, \infty)$ , поэтому для  $\omega \in [0, \infty)$

$$\Delta \arg f(i\omega) = \begin{cases} \pi(l-r)/2, & a_k \neq 0 \quad \forall k, \\ \text{не определено, если} & \exists k : a_k = 0. \end{cases}$$

Здесь  $l$  — число корней с отрицательной вещественной частью,  $r$  — число корней с положительной вещественной частью.

Таким образом, если полином устойчив, то все  $a_k < 0$  и из полученной формулы следует  $\Delta \arg f(i\omega) = \pi n/2$ . Обратно, если  $\Delta \arg f(i\omega) = \pi n/2$ , то это значит, что изменение аргумента определено, т.е.  $a_k \neq 0$ , и из той же формулы следует, что  $r = 0$ , т.е. все  $a_k < 0$  — полином устойчив. Теорема доказана.

### § 39. Устойчивость положений равновесия нелинейных систем

В большинстве случаев исследование устойчивости положения равновесия нелинейных систем может быть сведено к исследованию устойчивости линейных систем, выполненному в предыдущем параграфе. Случаи, когда это можно сделать, описываются в нижеследующих теоремах Ляпунова.

**1. Теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости.** *Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.* Пусть для системы

$$\dot{x} = X(x),$$

положение равновесия которой  $x \equiv 0$ , правая часть является непрерывно дифференцируемой в нуле, а вторые производные ее существуют в некоторой окрестности положения равновесия и ограничены в ней.

Пусть, кроме того, линейная часть этой системы

$$\dot{x} = Ax$$

является асимптотически устойчивой.

Тогда положение равновесия исходной системы также является асимптотически устойчивым.

*Доказательство.* Вначале докажем *лемму Гронуолла*.

*Лемма.* Пусть для положительных  $u(t)$ ,  $f(t)$  и  $C$  имеет место неравенство

$$u(t) \leq C + \int_0^t f(t)u(t) dt.$$

Тогда

$$u(t) \leq C \exp \left[ \int_0^t f(t) dt \right].$$



*Доказательство леммы.* Из исходного неравенства последовательно получаем

$$\frac{u(t)}{C + \int_0^t f(t)u(t) dt} \leq 1, \quad \frac{u(t)f(t)}{C + \int_0^t f(t)u(t) dt} \leq f(t).$$

Интегрируя последнее, находим:

$$\ln \left[ C + \int_0^t f(t)u(t) dt \right] - \ln C \leq \int_0^t f(t) dt,$$

откуда

$$C + \int_0^t f(t)u(t) dt \leq C \exp \left[ \int_0^t f(t) dt \right].$$

В силу исходного неравенства это влечет за собой доказываемое неравенство.

Приступим к доказательству теоремы. В условиях теоремы правая часть системы допускает представление

$$\dot{x} = Ax + f(x), \quad \|f(x)\| \leq a\|x\|^2.$$

Поскольку линейная часть системы асимптотически устойчива, то все корни характеристического уравнения

$$\det |A - \lambda E| = 0$$

удовлетворяют условию  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ . Обозначим  $\min_k |\operatorname{Re} \lambda_k| = 2h$  и выполним замену переменных  $x \rightarrow y$ :

$$x = ye^{-ht}.$$

Рассматриваемая система приобретает вид

$$\dot{y} = By + e^{ht}f(ye^{-ht}), \quad B = A + hE.$$

Очевидно, что линейная часть этой системы по-прежнему устойчива.

Запишем эту систему в эквивалентной форме

$$y(t) = e^{Bt}y_0 + \int_0^t e^{B(t-\tau)}e^{h\tau}f[y(\tau)e^{-h\tau}]d\tau$$

и оценим  $y(t)$  по норме

$$\|y(t)\| \leq \|e^{Bt}\|\|y_0\| + \int_0^t \|e^{B(t-\tau)}\|e^{h\tau}\|f[y(\tau)e^{-h\tau}]\|d\tau.$$

Поскольку линейная часть системы устойчива, то ее фундаментальная матрица решений ограничена:

$$\|\exp(Bt)\| \leq M,$$

и написанное неравенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq M\|y_0\| + Ma \int_0^t \exp(-h\tau) \|y(\tau)\|^2 d\tau \leq \\ &\leq M\|y_0\| + Ma \int_0^t \exp(-h\tau) \|y(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Последний переход верен до тех пор, пока  $\|y(\tau)\| \leq 1$ .

Используя лемму Гронуолла, получаем

$$\|y(t)\| \leq M \exp \left[ Ma \int_0^t \exp(-h\tau) d\tau \right] \|y_0\| \leq k\|y_0\|.$$

Если  $\|y_0\| < 1/k$ , то неравенство  $\|y(\tau)\|^2 < \|y(\tau)\|$  справедливо при любом  $t$  и из неравенства  $\|y(t)\| \leq k\|y_0\|$  следует устойчивость положения равновесия в переменной  $y$ . Переходя к переменной  $x$ , имеем

$$\|x(t)\| = \|y(t)\| e^{-ht} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

что и означает асимптотическую устойчивость положения равновесия в переменной  $x$ . Теорема доказана.

*Теорема Ляпунова о неустойчивости.* Положение равновесия рассмотренной в предыдущей теореме системы

$$\dot{x} = Ax + f(x), \quad \|f(x)\| \leq a\|x\|^2$$

неустойчиво, если хотя бы один корень характеристического уравнения  $\det(A - \lambda E)$  имеет положительную правую часть.

*Доказательство* теоремы проводится как и в предыдущем случае методом оценок с использованием леммы Гронуолла, в которой неравенство следует заменить на противоположное.

Из приведенных теорем следует, что вне поля зрения остались такие нелинейные системы, в которых у линейной части существуют корни характеристического уравнения с нулевой вещественной частью. Такие случаи исследования устойчивости называются *особыми*. В особых случаях из свойств устойчивости линейной части системы никак не следует устойчивость положения равновесия всей системы. Некоторые возможности в исследовании устойчивости в этих случаях дает теорема Лагранжа.

**2. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной механической системы.** Уравнения Лагранжа консервативной механической системы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n),$$

где кинетическая энергия  $T$  содержит только квадратичную форму (§ 26):

$$T = T_2 = \sum a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

а  $\Pi$  представляет собой потенциальную энергию.

В положении равновесия  $\dot{q}_i = 0$  ( $\forall i$ ). В этой точке вся левая часть обращается в ноль и, следовательно,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

То есть в положении равновесия консервативной механической системы потенциальная энергия принимает стационарное значение (максимум, минимум или точка перегиба).

*Теорема.* Если в положении равновесия консервативной механической системы с конечным числом степеней свободы потенциальная энергия имеет строгий минимум, то это положение равновесия устойчиво.

*Доказательство.* Консервативная механическая система обладает первым интегралом (§ 28) вида  $E = T + \Pi = \text{const}$ . Обозначения можно выбрать так, чтобы в положении равновесия  $q_i = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и  $\Pi(0) = 0$ . Тогда в некоторой окрестности положения равновесия  $E = T + \Pi > 0$ .

Обозначим буквой  $x$  фазовый вектор:

$$x = \{q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n\}$$

с нормой  $\|x\| = \sqrt{q_1^2 + \dots + q_n^2 + \dot{q}_1^2 + \dots + \dot{q}_n^2}$ .

Выберем число  $\varepsilon$  и найдем минимум полной энергии  $E$  на сфере  $\|x\| = \varepsilon$ . Обозначим этот минимум буквой  $E^*$ . Такой минимум существует, поскольку непрерывная функция  $E(x)$  на ограниченном замкнутом множестве достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Поскольку экстремум  $\Pi$  в положении равновесия строгий, то этот минимум строго больше нуля:  $E^* > 0$ .

Так как  $E \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ , то существует такое  $\delta$ , что  $E < E^*$ , если только  $\|x\| < \delta$ . Но тогда любое решение  $x(t)$  с начальными условиями

$$\|x(0)\| < \delta$$

будет удовлетворять условию  $\|x(t)\| < \varepsilon$ , так как в противном случае  $E > E^*$ , что невозможно, поскольку  $E \equiv \text{const}$ . Теорема доказана.

Пусть к только что рассмотренной системе приложены дополнительно непотенциальные силы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i(q, \dot{q}), \quad Q_i(0, 0) = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Будем говорить, что силы  $Q$  являются диссипативными силами с полной диссипацией, если

$$\sum \dot{q}_i Q_i < 0 \quad (\dot{q}_i \neq 0).$$

**Теорема.** Изолированное положение равновесия консервативной механической системы с конечным числом степеней свободы, в котором потенциальная энергия имеет строгий минимум, становится асимптотически устойчивым при добавлении к системе диссипативных сил с полной диссипацией.

**Доказательство.** Поскольку положение равновесия изолировано, то можно так выбрать число  $\varepsilon$ , чтобы в области  $\|x\| < \varepsilon$  других положений равновесия кроме  $x \equiv 0$  не было.

Поскольку выполнены условия предыдущей теоремы, то это положение равновесия является устойчивым, и для выбранного  $\varepsilon$  можно найти  $\delta$  такое, при котором из  $\|x(0)\| < \delta$  следует, что  $\|x(t)\| < \varepsilon$  для любого  $t$ .

Как следует из § 28, производная по времени от полной энергии имеет вид

$$\frac{dE}{dt} = \sum \dot{q}_i Q_i$$

и, в силу условий теоремы, является монотонно убывающей функцией времени. Покажем, что вдоль любой траектории, удовлетворяющей в начальный момент времени условию  $\|x(0)\| < \delta$ , полная энергия стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Отсюда и будет следовать, что

$$\|\dot{x}(t)\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

Пусть это не так. Пусть существует траектория  $\tilde{x}(t)$  такая, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} E[\tilde{x}(t)] = E_0 > 0$  (рис. 56).

Рассмотрим бесконечную последовательность моментов времени  $t_k \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty)$ . Бесконечная и ограниченная последовательность  $\tilde{x}(t_k)$  по теореме Больцано–Вейерштрасса содержит

сходящуюся подпоследовательность  $x_i = \tilde{x}(t_{k_i}) \rightarrow x^*$  при  $i \rightarrow \infty$ . Причем в силу непрерывности  $E(x)$   $x^*$  не совпадает с положением равновесия и  $\lim_{i \rightarrow \infty} E(x_i) = E_0$ .

Рассмотрим траекторию, начинающуюся в момент времени  $t = 0$  в точке  $x^*$ :  $x(x^*, t)$ . Поскольку  $x^*$  не есть положение равновесия, то

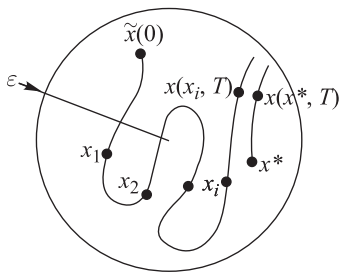


Рис. 56

энергия вдоль этой траектории монотонно убывает, и в некоторый момент времени  $T$  мы имеем неравенство

$$E[x(x^*, T)] < E_0 = E[x^*].$$

Рассмотрим далее другую траекторию, начинающуюся в момент времени  $t = 0$  в точке  $x_i: x(x_i, t)$ . По теореме о непрерывной зависимости решений начальной задачи Коши от начальных условий имеет место

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x(x_i, T) = x(x^*, T).$$

Напомним известную теорему о пределах: если  $A < B$  и если  $A_i \rightarrow A$ , то, начиная с некоторого  $i$ ,  $A_i < B$ . В силу этой теоремы, если  $E[x(x^*, T)] < E_0$  и если  $E[x(x_i, T)] \rightarrow E[x(x^*, T)]$ , то, начиная с некоторого  $i$ ,  $E[x(x_i, T)] < E_0$ . Однако траектория  $x(x_i, t)$ , в силу теоремы о единственности решений начальной задачи Коши, представляет собой часть траектории  $\tilde{x}(t)$ , для которой в любой момент времени  $E[\tilde{x}(t)] > E_0$ . Полученное противоречие и доказывает теорему.

*Пример.* Исследовать устойчивость вертикального положения равновесия маятника с линейной восстанавливающей пружиной (рис. 57). Выбором масштабов измерения переменных уравнения движения такого маятника можно привести к виду

$$\ddot{x} + kx = \sin x.$$

Линеаризация этого уравнения дает

$$\ddot{x} + (k - 1)x = 0.$$

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + (k - 1) = 0$  имеет один вещественный положительный корень, если  $k < 1$ , и по теореме Ляпунова о неустойчивости заключаем, что в этом случае положение  $x = 0$  неустойчиво. Если  $k \geq 1$ , то оба корня лежат на мнимой оси, и сделать вывод об устойчивости нельзя.

Применим теорему Лагранжа. Потенциальная энергия рассматриваемого маятника имеет вид

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} + \cos x - 1 = \frac{k-1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

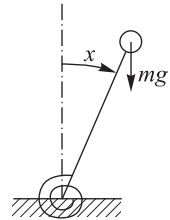


Рис. 57

Если  $k \geq 1$ , то потенциальная энергия имеет строгий минимум и по теореме Лагранжа следует, что положение  $x \equiv 0$  в этом случае устойчиво.

## Глава 10

# МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

### § 40. Колебательная система с одной степенью свободы

**1. Амплитудно-частотная характеристика.** Уравнения колебаний линейного одномерного осциллятора (рис. 58) могут быть получены как уравнения Ньютона, связывающие ускорение материальной точки массы  $m$  с действующими силами:  $-kx$  — сила упругости пружины,  $-h\dot{x}$  — сила вязкого сопротивления и  $p \cos \omega t$  — сила периодического возбуждения. Это уравнение имеет вид

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = p \cos \omega t.$$

Если  $p = 0$ , то маятник осуществляет свободное движение, которое можно искать в виде

$$x = x_0 e^{\lambda t}.$$

После подстановки этого решения в уравнение для нахождения  $\lambda$  получаем уравнение

$$m\lambda^2 + h\lambda + k = 0,$$

корни которого

$$\lambda_{1,2} = -\frac{h}{2m} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

позволяют записать общее решение для случая  $p = 0$  в виде

$$x = A \exp(\lambda_1 t) + B \exp(\lambda_2 t),$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные интегрирования.

Если  $h^2 - 4mk > 0$ , то выписанное решение является вещественным и оно при  $h > 0$  определяет решение, стремящееся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

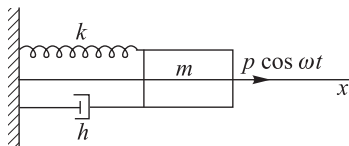


Рис. 58

Если  $h^2 - 4mk < 0$ , то полученное решение в вещественной форме имеет вид

$$x = \exp\left(-\frac{h}{2m}t\right) \left( A \cos \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}t \right).$$

Оно определяет затухающий колебательный процесс, если  $h > 0$  и незатухающие колебания, если  $h = 0$ :

$$x = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Величина  $\Omega = \sqrt{k/m}$  называется *частотой собственных колебаний* осциллятора.

Если  $h^2 - 4mk = 0$ , то общее решение уравнения при  $p = 0$  имеет следующий вид:

$$x = (A + Bt) \exp\left(-\frac{h}{2m}t\right).$$

Если  $p \neq 0$ , осциллятор находится под действием внешней периодической силы и общее решение уравнения колебаний в этом случае складывается из общего решения однородного уравнения (т.е. при  $p = 0$ ), что нами уже найдено, и какого-либо частного решения неоднородного уравнения. Необходимое решение будем строить следующим образом. В силу принципа суперпозиции интересующее нас частное решение будет представлять собой вещественную часть соответствующего частного решения следующего уравнения:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = p(\cos \omega t + i \sin \omega t) = p \exp(i\omega t).$$

Разыскивая решение этого уравнения в виде

$$x = x_0 \exp(i\omega t),$$

находим

$$x_0 = \frac{p}{(k - m\omega^2) + ih\omega} = p(a - ib),$$

$$a = \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + h^2\omega^2}, \quad b = \frac{h\omega}{(k - m\omega^2)^2 + h^2\omega^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} x &= \operatorname{Re} [p(a - ib)(\cos \omega t + i \sin \omega t)] = \\ &= p(a \cos \omega t + b \sin \omega t) = A \cos(\omega t - \alpha), \end{aligned}$$

где

$$A = \frac{p}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + h^2\omega^2}}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{h\omega}{k - m\omega^2}.$$

Полученные выражения для амплитуды *вынужденных колебаний*  $A$  и для фазы  $\alpha$ , рассматриваемые как функции частоты внешней силы  $\omega$ , называются соответственно *амплитудно-частотной* и *фазо-частотной* характеристиками линейного осциллятора. Они изображены на рис. 59 в виде семейства кривых, где параметром семейства является коэффициент демпфирования  $h$ . Амплитуда вынужденных колебаний принимает максимальное значение вблизи точки  $\omega = \sqrt{k/m}$ , т. е. когда частота внешней силы близка к частоте собственных колебаний. Это явление называется *резонансом*.

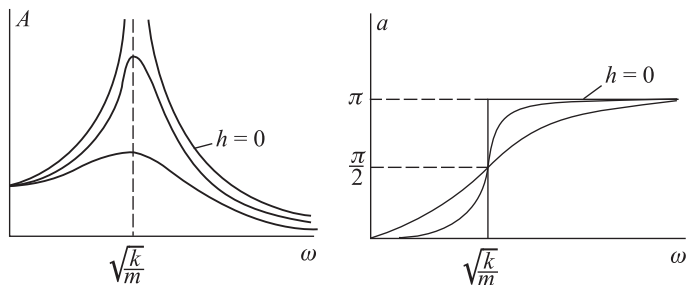


Рис. 59

**2. Функция Грина.** Пусть внешняя сила, приложенная к осциллятору, зависит от времени произвольно:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = f(t).$$

Частное решение этого уравнения разыскиваем в виде

$$x = \int_0^t G(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Подлежащая определению функция  $G(\theta)$  носит название *функции Грина* для рассматриваемого осциллятора.

Говорят, что частное решение уравнения осциллятора в этом случае представляет собой свертку функции, выражающей зависимость внешней силы от времени, с функцией Грина осциллятора.

Подставляя это решение в уравнение, найдем

$$\begin{aligned} \int_0^t [m\ddot{G}(t - \tau) + h\dot{G}(t - \tau) + kG(t - \tau)] d\tau + \\ + mG(0)(\dot{f})(t) + [m\dot{G}(0) + hG(0)]f(t) = f(t). \end{aligned}$$



Для того чтобы это соотношение выполнялось тождественно, достаточно положить

$$m\ddot{G} + h\dot{G} + kG = 0, \quad G(0) = 0, \quad \dot{G}(0) = 1/m.$$

Таким образом, функция Грина является решением начальной задачи Коши для однородного уравнения и в случае  $4km > h^2$  имеет вид

$$G(\theta) = \frac{1}{m\omega} \exp\left(-\frac{h}{2m}\theta\right) \sin \Omega\theta \quad \left(\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}\right).$$

В результате частное решение при произвольном неоднородном члене имеет вид

$$x = \frac{1}{m\omega} \int_0^t \exp\left[-\frac{h}{2m}(t-\tau)\right] [\sin \Omega(t-\tau)] f(\tau) d\tau.$$

## § 41. Колебательные системы произвольного числа степеней свободы

**1. Классификация линейных сил.** Рассмотрим механическую систему со стационарными связями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

где  $Q_i(q, \dot{q})$  — обобщенные силы.

Пусть  $q_i \stackrel{t}{\equiv} 0$  — положение равновесия этой системы. Как и в случае исследования устойчивости положения равновесия, движение в его окрестности можно изучать, осуществив линеаризацию системы, полагая  $q_i$  и  $\dot{q}_i$  малыми:

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \simeq \frac{1}{2} \sum a_{ij}(0) \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

$$Q_i = - \sum b_{ij} \dot{q}_j - \sum c_{ij} q_j.$$

Тогда уравнения движения могут быть записаны в следующей матричной форме:

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0,$$

где  $A = \{a_{ij}(0)\}$  — симметрическая, положительно определенная матрица кинетической энергии,  $B = \{b_{ij}\}$  — матрица скоростных сил произвольного вида,  $C = \{c_{ij}\}$  — также произвольного вида матрица позиционных сил.

Произвольная матрица скоростных сил  $B$  может быть единственным образом разложена в сумму симметрической и кососимметрической матриц:

$$B = D + \Gamma, \quad D^\top = D, \quad \Gamma^\top = -\Gamma.$$

Силы  $D\dot{q}$  называются *диссипативными*, если квадратичная форма  $\dot{q}^\top D\dot{q} \geq 0$ , и они называются силами с *полной диссипацией*, если  $\dot{q}^\top D\dot{q} > 0$  для любого  $\dot{q} \neq 0$ . Функция  $\mathcal{R} = \dot{q}^\top D\dot{q}/2$  называется *диссипативной функцией Релея*. Диссипативные силы связаны с ней так:  $D\dot{q} = d\mathcal{R}/d\dot{q}$ .

Силы  $\Gamma\dot{q}$  называются *гироскопическими*, и они обладают следующими основными свойствами.

*Свойство 1.* Мощность гироскопических сил в любом движении равна нулю:  $W = \dot{q}^\top \Gamma \dot{q} = 0$ .

Действительно,  $W^\top = (\dot{q}^\top \Gamma \dot{q})^\top = -\dot{q}^\top \Gamma \dot{q} = -W$ , но  $W$  — скаляр и он равен себе обратному только, если  $W = 0$ .

*Свойство 2.* Гироскопические силы имеют обобщенный потенциал:

$$\Gamma\dot{q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V}{\partial q}.$$

Действительно, нетрудно проверить, что роль потенциала играет следующая билинейная форма:

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} q^\top \Gamma \dot{q}.$$

*Свойство 3* (без доказательства). Подходящим ортогональным преобразованием обобщенных координат матрица  $\Gamma$  может быть приведена к следующей канонической форме:

$$\mathcal{M}^\top \Gamma \mathcal{M} = \left\| \begin{array}{ccccccc} \square_1 & & & & & & \\ & \square_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \square_k & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{array} \right\|; \quad \square_k = \left\| \begin{array}{cc} 0 & \gamma_k \\ -\gamma_k & 0 \end{array} \right\|.$$

По главной диагонали этой блочной матрицы стоят двумерные блоки или нули. Вне главной диагонали — нули.

*Свойство 4.*  $\det \Gamma \geq 0$ , если  $n$  — четное, и  $\det \Gamma = 0$ , если  $n$  — нечетное (следует из предыдущего свойства). Последние два свойства относятся и к вводимой ниже кососимметрической матрице  $\mathcal{N}$ .

Произвольная матрица позиционных сил  $C$  также единственным способом разлагается в сумму симметрической и кососимметрической частей:

$$C = K + \mathcal{N}, \quad K^\top = K, \quad \mathcal{N}^\top = -\mathcal{N}.$$

Силы  $Kq$  называются *потенциальными* или *консервативными*. Они обладают следующими основными свойствами.

*Свойство 5.* Консервативные силы обладают потенциалом:

$$Kq = \frac{dU}{dq},$$

где  $U = q^T Kq/2$ .

Это свойство ранее нами было положено в основу определения потенциальных сил.

*Свойство 6.* Работа консервативных сил по любому замкнутому контуру в конфигурационном пространстве равна нулю:

$$\oint \sum_{i,j} K_{ij} q_j dq_i = 0.$$

Это свойство немедленно следует из предыдущего. Силы  $\mathcal{N}q$  в литературе по механике имеют несколько названий: *циркулярные*, или *псевдогироскопические*, или *собственно неконсервативные*, или *силы радиальной коррекции*. Последнее название встречается в более специальной литературе. Основные свойства этих сил таковы.

*Свойство 7.* Циркулярные силы ортогональны вектору обобщенных координат:

$$q^T \mathcal{N}q = 0.$$

В частности, в плоском случае это означает, что силовые линии векторного поля циркулярных сил — окружности (рис. 60). Этим и объясняется их название (от франц. *cercle* — круг).

*Свойство 8.* Работа циркуляционных сил по замкнутому контуру в плоском случае пропорциональна площади, охваченной этим контуром:

$$\oint \sum_{i,j} \mathcal{N}_{ij} q_j dq_i = n \oint q_2 dq_1 - q_1 dq_2, \quad \mathcal{N} = \begin{vmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{vmatrix}.$$

В общем случае эта работа равна сумме площадей проекций замкнутого контура на двумерные подпространства, соответствующие каноническому представлению матрицы  $\mathcal{N}$ .

Существует и более подробная классификация линейных сил, основанная на дальнейшем разложении (тоже единственным способом) симметрических матриц  $D$  и  $K$  в сумму скалярной и дивергентной частей. Скалярная матрица это диагональная матрица с одним и тем же числом на главной диагонали. Матрица-дивергент — это матрица, имеющая равный нулю след.

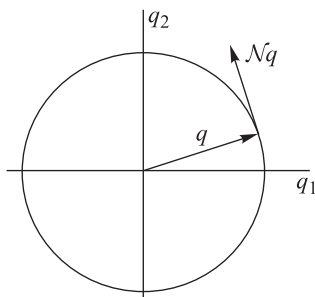


Рис. 60

Скоростные силы, определяемые скалярной матрицей, называются скоростными силами *сферического типа*, а определяемые девiatorом — скоростными силами *гиперболического типа*. Аналогично и для позиционных сил — позиционные силы сферического и гиперболического типа.

**2. Свободные колебания консервативных систем.** В консервативных системах действуют только потенциальные силы, поэтому уравнения движения имеют вид

$$A\ddot{q} + Kq = 0.$$

Для того чтобы движения системы были колебательными, матрицу  $K$  тоже следует считать положительно определенной:  $q^\top Kq > 0$ .

Разыскиваем движение этой системы в виде

$$q = h \cos(\lambda t + \alpha),$$

где  $h$  — неизвестный постоянный вектор,  $\lambda$  и  $\alpha$  — неизвестные постоянные скаляры (частота и начальная фаза). Для нахождения  $h$  получается линейная алгебраическая система

$$(K - \mu A)h = 0 \quad (\mu = \lambda^2).$$

Система линейных однородных уравнений имеет нетривиальное решение  $h \neq 0$ , если и только если

$$\det(K - \mu A) = 0.$$

Это характеристическое уравнение порядка  $n$  относительно неизвестной  $\mu$  называется уравнением частот.

**Теорема.** Уравнение частот имеет только вещественные и положительные корни.

**Доказательство.** Пусть  $\mu$  — комплексный корень уравнения частот и ему соответствует комплексное решение  $h$  соответствующей линейной системы. Умножим эту систему слева на эрмитово сопряженный вектор  $h^*$ , т.е. транспонированный и с комплексно сопряженными элементами:

$$h^* = (\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n).$$

В результате получаем

$$h^* K h - \mu h^* A h = 0.$$

Отсюда находим  $\mu$ :

$$\mu = \frac{\sum k_{ij} \bar{h}_i h_j}{\sum a_{ij} \bar{h}_i h_j}.$$

Поскольку система вещественная, то имеется и комплексно сопряженный корень  $\bar{\mu}$  с комплексно сопряженным решением  $\bar{h}$ . Прodelывая выкладку аналогично только что выполненной, получаем

$$\bar{\mu} = \frac{\sum k_{ij} h_i \bar{h}_j}{\sum a_{ij} h_i \bar{h}_j}.$$

И, в силу симметричности матриц  $A$  и  $K$ , получаем  $\mu = \bar{\mu}$ , т. е.  $\mu$  — вещественное. Следовательно, и  $h$  — вещественный вектор, и, поскольку формы  $\sum k_{ij} h_i h_j$  и  $\sum a_{ij} h_i h_j$  положительно определены,  $\mu > 0$ .

Таким образом, уравнение частот имеет  $n$  положительных корней  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , и им соответствуют  $n$  вещественных векторов  $h^1, \dots, h^n$ .

*Теорема.* Если среди корней уравнения частот нет кратных, то собственные векторы  $h^k$  являются  $A$ -ортогональными, т. е.

$$(h^s, Ah^l) = 0, \quad \text{если } s \neq l.$$

*Доказательство.* Векторы  $h^s$  и  $h^l$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$Kh^l = \mu_l Ah^l \quad \text{и} \quad Kh^s = \mu_s Ah^s.$$

Умножая первое скалярно на  $h^s$ , а второе на  $h^l$ , получаем

$$(h^s, Kh^l) = \mu_l (h^s, Ah^l), \quad (h^l, Kh^s) = \mu_s (h^l, Ah^s).$$

Вычитая одно из другого, имеем

$$(\mu_l - \mu_s)(h^l, Ah^s) = 0,$$

откуда, если  $\mu_l \neq \mu_s$ ,  $(h^l, Ah^s) = 0$ . Если  $l = s$ ,  $(h^l, Ah^s) = m_l > 0$ . Нормируем вектор  $h^l$ :  $h^l \rightarrow h^l \sqrt{m_l}$ . Тогда доказанное свойство  $A$ -ортогональности можно записать как свойство  $A$ -ортонормированности:  $(h^l, Ah^s) = \delta_{sl}$ , где  $\delta_{sl} = 1$  при  $s = l$  и  $\delta_{sl} = 0$ , если  $s \neq l$ .

*Следствие.* Векторы  $h^1, \dots, h^n$  линейно независимы. Действительно, если  $\nu_1 h^1 + \dots + \nu_n h^n = 0$  и  $\nu_k \neq 0$ , то  $(Ah^k, \nu_1 h^1 + \dots + \nu_n h^n) = 0$ , что влечет за собой  $(Ah^k, h^k) = 0$ , а это невозможно.

Следовательно, общее решение системы  $A\ddot{q} + Kq = 0$  есть

$$q = C_1 h^1 \cos(\lambda_1 t + \alpha_1) + \dots + C_n h^n \cos(\lambda_n t + \alpha_n).$$

Векторы  $h^k$  носят название амплитудных векторов. Колебания с чистым тоном, из которых составляется общее решение

$$q = C_k h^k \cos(\lambda t + \alpha_k),$$

называются *главными колебаниями* системы. Направления главных колебаний, определяемые амплитудными векторами  $h^k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), называются *главными направлениями* в конфигурационном пространстве линейной колебательной системы. Эти главные направления можно выбрать в качестве новых координатных осей, рассматривая амплитудные векторы в качестве нового базиса. Тогда координаты, определя-

ющие положение колебательной системы в новом базисе, называются *нормальными координатами*.

Для перехода к нормальным координатам в системе  $A\ddot{q} + Kq = 0$  следует выполнить замену переменных  $q \rightarrow y$  по формуле

$$q = h^1 y_1 + \dots + h^n y_n = Hy,$$

где

$$H = \begin{pmatrix} h_1^1 & \cdot & \cdot & \cdot & h_1^n \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ h_n^1 & \cdot & \cdot & \cdot & h_n^n \end{pmatrix}.$$

Выполняя это преобразование в рассматриваемой системе и умножая слева на  $H^\top$ , получим

$$H^\top A H \ddot{y} + H^\top K H y = 0.$$

В силу того, что  $(h^k, Ah^l) = \delta_{kl}$ , матрица  $H^\top A H$  равна единичной, а в силу того, что

$$(h^k, Kh^l) = \mu_l (h^k, Ah^l) = \mu_l \delta_{kl},$$

имеем

$$H^\top C H = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & 0 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в нормальных координатах рассматриваемая система приобретает вид

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \mu_1 y_1 &= 0, \\ &\dots \\ \ddot{y}_n + \mu_n y_n &= 0. \end{aligned}$$

Все сказанное выше получено в предположении отсутствия кратных корней в уравнении частот. Все остается справедливым и в случае кратных частот (следует из известной в алгебре теоремы о приведении пары форм к главным осям). При решении уравнений  $(K - \mu A)h = 0$  в случае кратного корня  $\mu$  размерность пространства решений равна кратности корня. Выбор независимых решений из этого пространства осуществляется с использованием процедуры ортогонализации.

**3. Вынужденные колебания.** Пусть консервативная колебательная система подвержена действию внешней силы, зависящей от времени  $f(t)$ :

$$A\ddot{q} + Kq = f(t).$$

Будем полагать, что гармоническая внешняя сила приложена по  $k$ -й обобщенной координате, т. е.  $f(t)$  имеет вид

$$f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} p \cos \omega t = e_k p \cos \omega t.$$

Переходя к нормальным координатам  $q \rightarrow y$ , получим

$$H^T A N \ddot{y} + H^T K N y = H^T e_k p \cos \omega t$$

или, в покоординатной форме:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \lambda_1^2 y_1 &= h_k^1 p \cos \omega t, \\ &\dots \\ \ddot{y}_n + \lambda_n^2 y_n &= h_k^n p \cos \omega t. \end{aligned}$$

Частное решение этой системы с периодом внешней силы (вынужденные колебания) имеет вид

$$y_m = \frac{h_k^m p \cos \omega t}{\lambda_m^2 - \omega^2} \quad (m = 1, \dots, n)$$

или же, возвращаясь к старым координатам, найдем:

$$q_s = p \left( \frac{h_s^1 h_k^1}{\lambda_1^2 - \omega^2} + \dots + \frac{h_s^n h_k^n}{\lambda_n^2 - \omega^2} \right) \cos \omega t = p A_{sk} \cos \omega t.$$

Коэффициенты показывающие, как возбуждение по  $k$ -й координате влияет на движение по  $s$ -й координате, называются гармоническими коэффициентами влияния. Они, очевидно, являются симметрическими:  $A_{sk} = A_{ks}$ , что выражает так называемый принцип взаимности.

Если  $s = k$ , то в выражении для  $A_{sk}$  числители всех слагаемых положительны, и график зависимости  $A_{ss}(\omega)$ , сочетающий в себе понятия амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик одномерной системы, имеет вид, изображенный на рис. 61. График показывает, что всегда имеется ровно  $n$  резонансов и ровно  $n - 1$  точек на оси частот, при которых амплитуда колебаний возбуждаемой обобщенной координаты равна нулю. Такое явление называется явлением динамического поглощения колебаний или антирезонансом. Если же  $k \neq s$ , число антирезонансов может быть меньше, чем  $n - 1$  (их может не быть совсем), и график  $A_{sk}(\omega)$  имеет, например, такой вид, как это изображено на рис. 62.

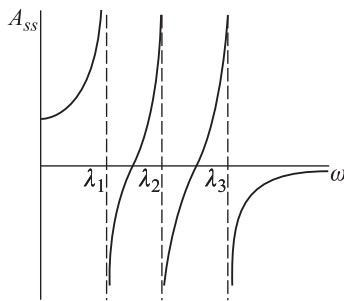


Рис. 61

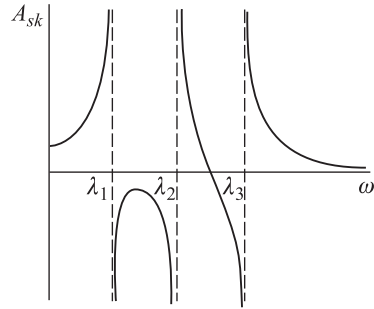


Рис. 62

Рассмотрим теперь вынужденные колебания в тех случаях, когда в системе присутствуют диссипативные силы:

$$A\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = e_k p \cos \omega t.$$

Поступаем так же, как в случае одномерной системы, т.е. заменяем написанное уравнение следующим:

$$A\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = e_k p e^{i\omega t}.$$

Частное периодическое решение исходного уравнения получается как вещественная часть соответствующего решения только что написанного уравнения:

$$q = l e^{i\omega t}.$$

Для вектора амплитуд  $l$  получается система алгебраических уравнений

$$(-A\omega^2 + i\omega D + K)l = e_k p.$$

Решая ее по правилу Крамера, получаем для  $s$ -й компоненты вектора  $l$ :

$$l_s = \Delta_{sk} / \Delta = [u(\omega) - iv(\omega)]p,$$

где  $\Delta$  — определитель системы, а  $\Delta_{sk}$  — алгебраическое дополнение элемента этого определителя, стоящего на пересечении  $k$ -й строки и  $s$ -го столбца. Искомое вещественное решение исходной системы имеет вид

$$q_s = [u(\omega) \cos \omega t + v(\omega) \sin \omega t]p.$$

Функция

$$w_{sk}(\omega) = p \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)}$$

определяет амплитудно-частотную характеристику колебаний по  $s$ -й координате при возбуждении по  $k$ -й.

**4. Особые направления в пространстве конфигураций линейных консервативных систем.** Найденные выше главные направления свободных колебаний  $h^k$  являются особыми в том смысле, что только в этих направлениях форма колебаний прямолинейна, а сами колебания



являются гармоническими (одночастотными). При сколь угодно малом отклонении начальных условий от начальных условий, определяющих главные колебания, отмеченные свойства пропадают.

Рассмотрение вынужденных колебаний обнаруживает существование в конфигурационном пространстве еще двух семейств особых направлений: если внешняя периодическая сила действует вдоль какого-либо из этих направлений, то периодическое решение системы обладает свойствами, которых не имеют периодические решения при любых других внешних силах.

*Особые направления, сопряженные главным*, получаются из главных преобразованием  $h^k$  с матрицей  $K$ , т.е.  $Kh^k$ . Свойства этих направлений устанавливает следующая теорема.

*Теорема.* Если в системе

$$A\ddot{q} + Kq = p \cos \omega t$$

сила  $p \cos \omega t$  (здесь  $p$  — вектор) направлена вдоль сопряженного направления, то вынужденные колебания, имеющие частоту  $\omega$ , осуществляются вдоль соответствующего главного направления, причем при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности система ведет себя как одномерная, т.е. амплитудно-частотная характеристика имеет единственный разрыв второго рода в точке  $\omega = \lambda_k$ .

*Доказательство.* По условию теоремы  $p = Kh^k$ . Периодическое решение ищем направленным по вектору  $h^k$ :

$$q = ah^k \cos \omega t,$$

где  $a$  — скалярная величина, определяющая амплитуду решения. Подставляя эти выражения для  $p$  и  $q$  в систему, находим

$$a(K - \omega^2 A)h^k = Kh^k.$$

Поскольку амплитудные векторы  $h^k$  удовлетворяют условию  $\lambda_k^2 Ah^k = Kh^k$ , то из написанного соотношения получаем:

$$\left[ a \left( 1 - \frac{\omega^2}{\lambda_k^2} \right) - 1 \right] Kh^k = 0,$$

откуда

$$a = \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - \omega^2}.$$

Теорема доказана.

Особый характер направления, сопряженного главному, проявляется в том, что при сколь угодно малом отклонении направления вынуждающей силы от этого направления на амплитудно-частотной характеристике появляются в общем случае  $n$  точек разрыва.

Рассмотрим *главные направления вынужденных колебаний*.

*Определение.* Пусть  $q = h \cos \omega t$  — частное решение системы  $A\ddot{q} + Kq = p \cos \omega t$ . Главным направлением вынужденных колебаний

будем называть такое направление  $p$ , которое совпадает с направлением отклика системы на периодическое возбуждение:

$$h = \nu p,$$

где  $\nu$  — скаляр, определяющий амплитуду колебаний. Поскольку вектор  $h$  связан с вектором  $p$  в общем случае формулой  $(K - \omega^2 A)h = p$ , то главные направления вынужденных колебаний должны удовлетворять системе

$$(K - \omega^2 A - \mu E)h = 0,$$

т. е. вектор, определяющий главное направление, является собственным вектором матрицы  $K - \omega^2 A$ , а величина, обратная амплитуде колебаний  $\mu = \nu^{-1}$ , представляет собой собственное значение ( $E$  — единичная матрица).

Это собственное значение является корнем уравнения

$$\det(K - \omega^2 A - \mu E) = 0.$$

Поскольку матрица  $K - \omega^2 A$  симметрическая, то написанное уравнение содержит ровно  $n$  вещественных решений. Так как  $A$  и  $K$  — положительно определенные матрицы, то существует  $\omega_{\min}$  такое, что  $K - \omega^2 A$  — также положительно определенная матрица для всех  $\omega$  из интервала  $0 < \omega < \omega_{\min}$ . Наряду с этим существует  $\omega_{\max}$  такое, что  $K - \omega^2 A$  — отрицательно определенная матрица для всех  $\omega$  из интервала  $\omega_{\max} < \omega < \infty$ .

Первый случай называется дорезонансным, для него все  $\mu$  отрицательные. Поскольку при переходе от отрицательных значений к положительным  $\mu$  проходит через ноль, то  $\omega_{\min}$  и  $\omega_{\max}$  совпадают с наименьшим и наибольшим значениями корней уравнения

$$\det(K - \omega^2 A) = 0.$$

Каждому решению уравнения  $\det(K - \omega^2 A - \mu E) = 0$  относительно  $\mu$  соответствует собственный вектор  $h$ , являющейся решением соответствующей однородной системы.

Уравнение для нахождения  $\mu$  определяет неявную функцию  $\mu(\omega^2)$ , имеющую  $n$  ветвей. Свойства этой функции устанавливает следующая теорема.

*Теорема.* Каждая из ветвей функции  $\mu(\omega^2)$  является монотонно убывающей, имеющей ровно один ноль на интервале  $\omega^2 \in [0, \infty)$ .

*Доказательство.* Систему для нахождения  $h$  умножим скалярно на вектор  $h$ :

$$(h, Kh) - \omega^2(h, Ah) - \mu(h, h) = 0.$$

В этом уравнении векторы  $h$ , представляющие собой решение системы  $(-A\omega^2 + K - \mu E)h = 0$ , сами являются функциями  $\omega$ , поэтому,

дифференцируя его по  $\omega^2$ , имеем

$$2 \left( \frac{dh}{d\omega^2}, Kh \right) - (h, Ah) - 2\omega^2 \left( \frac{dh}{d\omega^2}, Ah \right) - \frac{d\mu}{d\omega^2} (h, h) - 2\mu \left( \frac{dh}{d\omega^2}, h \right) = 0$$

Поскольку в этом уравнении члены, содержащие  $dh/d\omega^2$ , в силу системы в сумме обращаются в ноль, то оставшиеся члены дают

$$\frac{d\mu}{d\omega^2} = -\frac{(h, Ah)}{(h, h)}.$$

В силу положительной определенности  $A$  отсюда следует, что  $d\mu/d\omega^2 < 0$ .

В полученной формуле для производной  $d\mu/d\omega^2$  каждый собственный вектор  $h$  определяет производную от соответствующего именно ему собственного значения  $\mu$ . Если же при каком-то  $\omega^2$  возникает случай кратных корней уравнения  $\det(K - \omega^2 A - \mu E) = 0$ , то в силу симметричности матрицы  $K - \omega^2 A$  собственные числа остаются дифференцируемыми функциями  $\omega^2$ , и формула для  $d\mu/d\omega^2$  остается верной, однако она требует специального выбора собственных векторов из собственного подпространства, отвечающего кратному корню. Монотонное убывание функции  $\mu(\omega^2)$  доказано. Заметим далее, что  $\mu(0) > 0$ , поскольку  $\mu(0)$  — собственные числа матрицы  $K$ . С другой стороны,  $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \mu(\omega^2)/\omega^2 < 0$ , поскольку этот предел совпадает с собственными числами матрицы  $-A$ . Монотонно убывающая непрерывная функция, имеющая на концах интервала значения разных знаков, имеет один ноль внутри этого интервала. Теорема доказана.

На рис. 63 изображена произвольная ветвь функции  $\mu(\omega^2)$ . Величина  $|\nu(\omega^2)| = |\mu(\omega^2)|^{-1}$  представляет собой амплитудно-частотную характеристику главных вынужденных колебаний механической системы.

Из изложенного следует, что любая система  $A\ddot{q} + Kq = p \cos \omega t$  имеет ровно  $n$  амплитудно-частотных характеристик главных колебаний, каждая из которых имеет единственный разрыв второго рода. Это означает, что если систему с  $n$  степенями свободы возбудить вдоль главного в определенном выше смысле направления, то при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  в системе наблюдается один резонанс. Как и в случае возбуждения вдоль сопряженного направления, система ведет себя как одномерная.

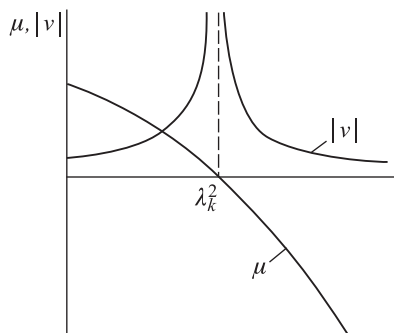


Рис. 63

*Пример.* Построить амплитудно-частотные характеристики главных вынужденных колебаний в колебательной системе с двумя степенями свободы:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \end{vmatrix} \cos \omega t.$$

*Решение.* Система для определения главных направлений вынужденных колебаний имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2 - 2\omega^2 - \mu & -1 \\ -1 & 2 - \omega^2 - \mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_1 \\ h_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Приравнявая ее определитель нулю

$$(2 - 2\omega^2 - \mu)(2 - \omega^2 - \mu) - 1 = 0,$$

находим ветви функции  $\mu(\omega^2)$ :

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2}(4 - 3\omega^2 \pm \sqrt{\omega^4 + 4}).$$

Соответствующие этим собственным значениям собственные векторы имеют вид

$$h^1 = \begin{vmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(\omega^2 + \sqrt{\omega^4 + 4}) \end{vmatrix}, \quad h^2 = \begin{vmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(\omega^2 - \sqrt{\omega^4 + 4}) \end{vmatrix}.$$

Если сила  $p$  единичной нормы направлена по какому-либо из этих векторов, то и отклик системы будет направлен по этому же вектору:

$$\begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix} = \nu \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \end{vmatrix} \cos \omega t.$$

Скаляр  $\nu = 1/\mu$  и есть амплитуда колебаний в этом случае. То есть амплитудно-частотные характеристики двух главных направлений имеют вид

$$\nu_1 = \frac{2}{4 - 3\omega^2 + \sqrt{\omega^4 + 4}}, \quad \nu_2 = \frac{2}{4 - 3\omega^2 - \sqrt{\omega^4 + 4}}.$$

Точки разрыва этих характеристик (резонансы)

$$\omega_1^2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}, \quad \omega_2^2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

совпадают с собственными частотами соответствующей однородной системы.

Полученные в настоящем пункте результаты представим следующей таблицей:

$A\ddot{q} + Kq = p \cos \omega t$	Определяющие соотношения	Периодическое решение	Свойства ортогональности
Главные направления колебаний $h$	$(K - \lambda^2 A)h = 0$	$q = h \cos \lambda t$	$A$ -ортогональность: $(\tilde{h}^k, Ah^l) = 0, k \neq l$
Сопряженные направления $\tilde{h}$	$\tilde{h} = Kh = p$	$q = \frac{\lambda^2 h}{\lambda^2 - \omega^2} \cos \omega t$	$A^{-1}$ -ортогональность: $(\tilde{h}^k, A^{-1}h^l) = 0, k \neq l$
Главные направления возбуждения $p$	$(K - \omega^2 A - \mu E)p = 0$	$q = \frac{p}{\mu} \cos \omega t$	$E$ -ортогональность: $(p^k, p^l) = 0, k \neq l$

## § 42. Спектральные свойства линейных систем

Будем рассматривать линейные системы следующего вида:

$$A\ddot{q} + \Gamma\dot{q} + Kq = 0,$$

где матрицы  $A$  и  $K$  — симметрические и положительно определенные,  $\Gamma$  — кососимметрическая матрица гироскопических сил.

Системы этого вида представляют собой самый общий вид линейных колебательных систем, т. е. таких систем, общее решение которых может быть составлено из гармонических колебаний. Это означает, что независимые частные решения можно искать в виде  $q = he^{i\lambda t}$  с вещественными  $\lambda$ . Покажем это. Подставляя это решение в рассматриваемую систему, находим:

$$(-\lambda^2 A + i\lambda\Gamma + K)h = 0.$$

Умножая полученное равенство на комплексно сопряженный вектор  $\bar{h}$ , получим следующее скалярное равенство:

$$-\lambda^2 \bar{h} \cdot Ah + i\lambda \bar{h} \cdot \Gamma h + \bar{h} \cdot Kh = 0.$$

Заметим, что, в силу свойств симметрии матриц  $A$  и  $K$  и косой симметрии матрицы  $\Gamma$ , имеем

$$\bar{h} \cdot Ah = h^1 \cdot Ah^1 + h^2 \cdot Ah^2 = a \quad (h = h^1 + ih^2),$$

$$\bar{h} \cdot Kh = h^1 \cdot Kh^1 + h^2 \cdot Kh^2 = k,$$

$$\bar{h} \cdot \Gamma h = 2ih^1 \cdot \Gamma h^2 = 2ig,$$

где  $a, k, g$  — вещественные числа, причем  $a > 0, k > 0$ .

Из найденного квадратного уравнения выводим

$$\lambda = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 + ak}}{2}.$$

откуда и следует вещественность  $\lambda$ .

Корни  $\lambda$  находятся из характеристического уравнения

$$\det(-\lambda^2 A + i\lambda\Gamma + K) = 0,$$

имеющего  $2n$  корней. Если  $\lambda = \lambda_0$  — корень этого уравнения, то  $\lambda = -\lambda_0$  — тоже корень. Это следует из того, что

$$\det(-\lambda^2 A + i\lambda\Gamma + K) = \det(-\lambda^2 A + i\lambda\Gamma + K)^\top = \det(-\lambda^2 A - i\lambda\Gamma + K).$$

Таким образом, у характеристического уравнения с гироскопическими силами всегда есть  $n$  положительных корней, которые и являются собственными частотами системы.

### 1. Поведение собственных частот при изменении жесткости.

Для изучения поведения частот при изменении жесткости рассмотрим гомотопию

$$K = K_1 + \mu(K_2 - K_1); \quad \mu \in [0, 1]; \quad K(0) = K_1, \quad K(1) = K_2.$$

Систему с  $K = K_2$  будем называть более жесткой, чем система с  $K = K_1$ , если  $q \cdot K_2 q \geq q \cdot K_1 q$  для любого  $q$ . Таким образом, увеличивая  $\mu$  мы увеличиваем жесткость системы.

*Теорема.* При увеличении жесткости линейной колебательной системы с гироскопическими силами собственные частоты могут только возрастать:  $\lambda(1) \geq \lambda(0)$ .

*Доказательство.* Полученное выше уравнение

$$-\lambda^2 \bar{h} \cdot Ah + i\lambda \bar{h} \cdot \Gamma h + \bar{h} \cdot K(\mu)h = 0$$

представляет собой неявную функцию  $\lambda(\mu)$ , причем в этой функции амплитудные векторы также, очевидно, зависят от  $\mu$ :  $h(\mu)$ . Продифференцируем это уравнение по  $\mu$ :

$$\begin{aligned} (-2\lambda a - 2g) \frac{d\lambda}{d\mu} + \bar{h} \cdot (K_2 - K_1)h + \\ + \frac{d\bar{h}}{d\mu} \cdot (-\lambda^2 A + i\lambda\Gamma + K)h + \bar{h}(-\lambda^2 A + i\lambda\Gamma + K) \frac{dh}{d\mu} = 0. \end{aligned}$$

В этом равенстве  $(-\lambda^2 A + i\lambda\Gamma + K)h = 0$ . Выражение  $\bar{h}(-\lambda^2 A + i\lambda\Gamma + K)$  также равно нулю, поскольку оно совпадает с предыдущим после транспонирования и сопряжения.

В результате находим

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{\bar{h} \cdot (K_2 - K_1)h}{2(\lambda a + g)}.$$

Уравнение  $\lambda^2 a + \lambda g - k = 0$  имеет положительные корни, являющиеся собственными частотами  $\lambda = (-g + \sqrt{g^2 + ak})/a$ . Подставляя это значение в выражение для  $d\lambda/d\mu$ , получаем

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{\bar{h} \cdot (K_2 - K_1)h}{2\sqrt{g^2 + ak}}.$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$\lambda(1) = \lambda(0) + \int_0^1 \frac{\bar{h} \cdot (K_2 - K_1)h}{2\sqrt{g^2 + ak}} d\mu.$$

Откуда в силу  $\bar{h} \cdot (K_2 - K_1)h \geq 0$  следует  $\lambda(1) \geq \lambda(0)$ . Доказательство закончено.

Совершенно аналогично, рассматривая гомотопию

$$A = A_1 + \mu(A_2 - A_1); \quad \mu \in [0, 1]$$

и определяя более массивную систему естественным условием:  $\dot{q} \cdot A_2 \dot{q} \geq \dot{q} \cdot A_1 \dot{q}$  для любого  $\dot{q}$ , сформулируем аналогичную теорему.

*Теорема.* При увеличении массы линейной колебательной системы с гироскопическими силами собственные частоты могут только уменьшаться:  $\lambda(1) \leq \lambda(0)$ .

Доказательство этой теоремы аналогично предыдущему.

*Замечание.* Обе рассмотренные теоремы были сформулированы и доказаны Рэлеем в случае, когда гироскопических сил нет:  $\Gamma = 0$ .

**2. Поведение собственных частот при изменении гироскопической связи.** Уравнения рассматриваемой колебательной системы перепишем в следующей форме:

$$A\ddot{q} + g\Gamma\dot{q} + Kq = 0,$$

где выделен скалярный параметр  $g$ , определяющий норму матрицы гироскопических сил.

Представляет интерес изучение поведения собственных частот при  $g \rightarrow \infty$ . Введем следующие определения.

*Прецессионной* частью рассматриваемой системы называется следующая система (прецессионная система):

$$g\Gamma\dot{q} + Kq = 0.$$

*Нутационной* частью рассматриваемой системы называется система

$$A\ddot{q} + g\Gamma\dot{q} = 0.$$

Характеристическое уравнение как для прецессионной системы  $\det(i\lambda g\Gamma + K) = 0$ , так и для нутационной системы  $\det(-\lambda^2 A + i\lambda g\Gamma) = 0$  сохраняет свойства корней характеристического уравнения полной системы: все корни вещественные и входят парами отличающихся друг от друга знаком корней.

У нутационной системы всегда есть не менее чем  $n$  нулевых корней. Количество ненулевых корней у нутационной и у прецессионной систем одинаково, и, если  $\det \Gamma \neq 0$ , то их у каждой системы ровно  $n$ .

Заметим, что  $\det \Gamma \neq 0$  может быть только для систем, имеющих четную размерность:  $n = 2m$ . Действительно,

$$\det \Gamma = \det \Gamma^T = (-1)^n \det \Gamma$$

и, если  $n$  нечетно, то  $\det \Gamma = 0$ .

*Теорема.* Если в линейной колебательной системе  $A\ddot{q}g + g\Gamma\dot{q} + Kq = 0$  матрица  $K$  положительно определена и  $\det \Gamma \neq 0$ , то собственные частоты делятся на две группы:

$$\begin{aligned} 1) \lambda_k &\sim g, \quad g \rightarrow \infty, \\ 2) \lambda_l &\sim 1/g, \quad g \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Частоты первой группы при этом стремятся к ненулевым частотам нутационной системы, а частоты второй группы — к частотам прецессионной системы.

*Доказательство.* Выполним замену времени ( $t \rightarrow \tau$ ):

$$t = \frac{1}{g}\tau$$

и обозначим  $\varepsilon = g^{-2}$ . Характеристическое уравнение системы запишет-ся при этом в виде

$$\det(-\lambda^2 A + i\lambda\Gamma + \varepsilon K) = 0.$$

Рассматриваем это уравнение как неявную функцию  $\lambda(\varepsilon)$ . При  $\varepsilon = 0$  уравнение переходит в характеристическое уравнение нутационной системы, у которого, в соответствии со сделанными выше замечаниями,  $m$  ненулевых корней:  $\lambda_1^H, \dots, \lambda_m^H$ . По теореме о неявных функциях, в случае, если среди  $\lambda_k^H$  нет кратных, корни полного уравнения можно искать в виде

$$\lambda_k = \lambda_k^H + a_k \varepsilon + \dots$$

Точками обозначены члены с более высокими степенями  $\varepsilon$ .

Так как частное решение исходной системы имеет вид

$$q = \exp(i\lambda_k \tau) = \exp[ig(\lambda_k^H + a_k \varepsilon + \dots)t],$$

то первая группа собственных частот имеет вид

$$\lambda_k = g\lambda_k^H + \frac{a_k}{g} + \dots \quad (k = 1, \dots, m).$$

Если среди корней  $\lambda_k^H$  имеется кратный корень кратности  $p$ , то разложение следует искать не по степеням  $\varepsilon$ , а по степеням  $\sqrt[p]{\varepsilon}$ . Результат оказывается тем же, хотя скорость стремления корней полной системы к корням нутационной будет меньше.

Для рассмотрения второй группы частот выполняется иная замена времени:  $t = g\tau$ , после чего характеристическое уравнение принимает вид

$$\det(-\varepsilon\lambda^2 A + i\lambda\Gamma + K) = 0.$$



Рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к следующему виду собственных частот:

$$\lambda_k = \frac{1}{g} \lambda_k^{\text{пр}} + \frac{b_k}{g^3} + \dots \quad (k = m + 1, \dots, n).$$

Теорема доказана.

Если в условии теоремы  $\det \Gamma = 0$  (для нечетномерных систем так будет всегда), то помимо указанных двух групп частот будет еще и третья, частоты которой имеют конечные, отличные от нуля пределы при  $g \rightarrow \infty$ .

Суммируя все случаи, приходим к заключению. Если  $K$  положительно определена, то при  $g \rightarrow \infty$  частоты произвольной линейной колебательной системы ведут себя следующим образом. Часть частот, называемых *прецессионными*, стремится к нулю:  $\lambda_k \sim 1/g$ , часть частот, называемых *нутацонными*, стремится к бесконечности:  $\lambda_k \sim g$ , часть частот, называемых *маятниковыми*, стремится к конечным, не равным нулю пределам:  $\lambda_k \sim 1$ . Число прецессионных частот всегда равно числу нутацонных частот, а число маятниковых частот равно разности между размерностью системы  $n$  и рангом матрицы гироскопических сил  $\Gamma$ .

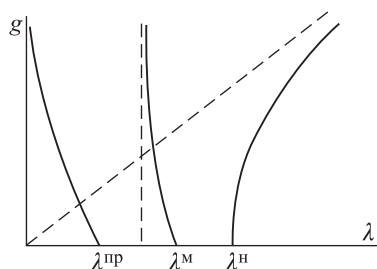


Рис. 64

Типичное поведение частот линейной колебательной системы при изменении интенсивности гироскопической связи изображено на рис. 64.

**3. Экстремальные свойства собственных частот.** Рассмотрим удвоенную потенциальную энергию линейной колебательной системы  $A\ddot{q} + Kq = 0$ :  $2\Pi = q \cdot Kq$ . Будем изучать ее на условный экстремум при фиксированном значении квадратичной формы  $2T = 2(q \cdot Aq) = 1$ . В нормальных координатах (§ 41) эти квадратичные формы имеют вид

$$2\Pi = \lambda_1^2 q_1^2 + \dots + \lambda_n^2 q_n^2; \quad 2T = q_1^2 + \dots + q_n^2 = 1.$$

Находим  $q_1^2 = 1 - q_2^2 - \dots - q_n^2$  и подставляем в выражение для  $2\Pi$ :

$$2\Pi = \lambda_1^2 + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)q_2^2 + \dots + (\lambda_n^2 - \lambda_1^2)q_n^2.$$

Необходимое условие экстремума  $\partial\Pi/\partial q_i = 0$  дает  $q_2 = \dots = q_n = 0$ . В этой точке удвоенное значение потенциальной энергии равно квадрату первой собственной частоты и если все частоты пронумерованы в порядке их возрастания  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ , то это значение есть минимум. Таким образом, показано, что *потенциальная энергия линейной системы при фиксированном значении кинетической принимает*

минимальное значение, равное половине квадрата наименьшей собственной частоты в первом главном направлении.

Аналогично показывается, что максимальное значение функция 2П получит в точке  $q_1 = \dots = q_{n-1} = 0$  и оно будет равно  $\lambda_n^2$ .

Если систему подчинить линейной связи  $q_1 = \dots = q_{k-1} \equiv 0$ , то минимум потенциальной энергии, равный  $\lambda_k^2/2$ , будет достигаться в направлении  $q_k \neq 0$ .

### § 43. Нелинейные системы. Метод нормальной формы Пуанкаре

Метод нормальной формы Пуанкаре, применяемый для анализа нелинейных систем, не ограничен рамками колебательных механических систем. Применение его к собственно колебательным системам будет дано в следующем параграфе. Здесь же мы изложим его в общей постановке. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с аналитическими в окрестности нуля правыми частями:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= f_1(y_1, \dots, y_n), \\ &\dots \\ \dot{y}_n &= f_n(y_1, \dots, y_n).\end{aligned}$$

Здесь  $y_k$  — комплексные переменные ( $1 \leq k \leq n$ ).

Будем полагать, что правые части в нуле обращаются в нуль, т. е.  $f_k(0, \dots, 0) = 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Записанная в виде рядов по степеням переменных эта система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + \sum f_{m_1, \dots, m_n}^1 y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}, \\ &\dots \\ \dot{y}_n &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + \sum f_{m_1, \dots, m_n}^n y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}.\end{aligned}\tag{*}$$

Суммирование ведется по всем положительным, целочисленным  $m_k$ , удовлетворяющим условию  $\sum_{k=1}^n m_k \geq 2$ . Число  $\sigma = \sum m_k$  называется порядком нелинейного члена  $y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}$ .

Поставим задачу: найти такую аналитическую замену переменных  $(y_1, \dots, y_n) \rightarrow (z_1, \dots, z_n)$ , чтобы обратить в нуль максимально возможное число коэффициентов  $a_{ij}$  линейной части системы, а также и коэффициентов  $f_{m_1, \dots, m_n}^i$  нелинейной части вплоть до любого заданного порядка  $\sigma$  включительно.

Вид системы, в котором до заданного порядка нелинейных членов никакое дальнейшее упрощение в классе аналитических замен уже

невозможно, называется нормальной формой Пуанкаре до соответствующего порядка.

Приведение к нормальной форме можно осуществить последовательно, начиная с линейной части. После упрощения линейной части приступают к упрощению членов второго порядка, затем упрощают члены третьего порядка и так далее вплоть до заданного.

Задача упрощения линейной части хорошо известна: линейным преобразованием она приводится к жордановой форме, в которой матрица линейной части имеет отличными от нуля лишь две диагонали — главную, на которой стоят элементы, называемые собственными числами, и ближайшую к ней, на которой стоят либо нули, либо единицы.

Будем считать, что наша система уже упрощена по линейным членам (для механических колебательных систем это приведение к нормальным координатам, или к главным осям). Кроме того, примем вначале, что жорданова форма чисто диагональная:

$$\dot{y}_k = \lambda_k y_k + \sum f_{m_1 \dots m_n}^k y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Суть применяемой процедуры нормализации полностью и во всех деталях выясняется при рассмотрении одного-единственного нелинейного члена в одном уравнении из  $n$  уравнений системы

$$\begin{aligned} \dot{y}_s &= \lambda_s y_s, \quad s \neq k, \\ \dot{y}_k &= \lambda_k y_k + f^k y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}. \end{aligned}$$

Здесь уже  $m_1, \dots, m_n$  фиксированы.

Так получается потому, что преобразование, изменяющее этот член, можно выбрать так, чтобы оно не меняло никаких членов низшего порядка, а также и никаких других членов этого же порядка. Нужное преобразование имеет вид  $(y_1, \dots, y_n) \rightarrow (z_1, \dots, z_n)$ :

$$\begin{aligned} y_s &= z_s \quad (s \neq k), \\ y_k &= z_k + h^k z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}, \end{aligned}$$

т. е. нелинейный член в преобразовании берется точно такого же вида, как и подлежащий уничтожению.

Прежде чем внести это преобразование в преобразовываемую систему, запасемся обратным преобразованием, которое с точностью до членов более высокого порядка отличается от прямого преобразования лишь знаком перед нелинейным членом:

$$z_k = y_k - h^k y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n} + \dots$$

Если нас интересует выполнение лишь одного шага, т. е. устранение рассматриваемого члена, и появляющиеся при этом члены более высоких порядков нас уже не беспокоят, то в обратном преобразовании достаточно ограничиться выписанными членами. Если же мы предполагаем продолжить процедуру дальше, то обращение преобразования следует выполнять с большей точностью.

Дифференцируя обратное преобразование, получаем

$$\dot{z}_k = \dot{y}_k - h^k (m_1 y_1^{m_1-1} y_2^{m_2} \dots y_n^{m_n} \dot{y}_1 + \dots + m_n y_1^{m_1} \dots y_{n-1}^{m_{n-1}} y_n^{m_n-1} \dot{y}_n).$$

Подставляя сюда вместо  $\dot{y}_k$  правую часть системы, а вместо  $y_k$  его выражение через  $z_k$ , находим:

$$\dot{z}_k = \lambda_k z_k + [f^k - (-\lambda_k + m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n) h^k] z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n} + \dots$$

Для того чтобы устранить рассматриваемый нелинейный член, следует выбрать  $h^k$  из условия

$$h^k = \frac{f^k}{-\lambda_k + m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n}.$$

Это возможно, если  $\lambda_k \neq m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n$ .

Нелинейный член в  $k$ -м уравнении, у которого показатели  $m_1, \dots, m_n$  таковы, что

$$\lambda_k = m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n,$$

называется *резонансным*. Резонансные члены не могут быть уничтожены никакими полиномиальными заменами, они вообще не изменяются при таких заменах.

Устранение нелинейных членов одного порядка в общем случае осуществляется для каждого члена независимо от других:

$$y_k = z_k + \sum h_{m_1 \dots m_n}^k z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Суммирование распространено на все  $m_1, \dots, m_n$  рассматриваемого порядка  $m_1 + \dots + m_n = \sigma$ . Поскольку все нелинейные члены одного порядка малости преобразуются независимо один от другого, то найденная выше формула для  $h^k$  справедлива и в общем случае:

$$h_{m_1 \dots m_n}^k = \frac{f_{m_1 \dots m_n}^k}{-\lambda_k + m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n}.$$

Таким образом, нормальная форма — это форма, в которой в разложении правых частей по степеням переменных присутствуют лишь резонансные члены.

Рассмотрим теперь случай недиагональной жордановой формы. Пусть для простоты имеется только одна жорданова клетка, соответствующая двукратному корню

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + y_2 + f^1 y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n},$$

$$\dot{y}_2 = \lambda_2 y_2,$$

...

$$\dot{y}_s = \lambda_s y_s \quad (n \geq s > 2).$$

Рассматривается присутствие одного нелинейного члена в первом уравнении. Как и ранее, из последующего будет ясно, что делать в общем случае.

Вид замены для устранения имеющегося нелинейного члена такой же, как и в простом случае:

$$y_1 = z_1 + h^1 z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}, \quad z_1 = y_1 - h^1 y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n} + \dots$$

Поступая аналогично случаю простых корней, находим:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + z_2 + [f^1 - (-\lambda_1 + m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n) h^1] z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n} - \\ - h^1 m_1 z_1^{m_1-1} z_2^{m_2+1} z_3^{m_3} \dots z_n^{m_n} + \dots \end{aligned}$$

По-прежнему в нерезонансном случае, т. е. когда

$$-\lambda_1 + m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n \neq 0,$$

можно устранить член  $z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}$ , однако появляется новый член того же порядка

$$z_1^{m_1-1} z_2^{m_2+1} z_3^{m_3} \dots z_n^{m_n}.$$

Очевидно, что этот член тоже нерезонансный и его можно устранить очередным преобразованием. При последовательном выполнении этих процедур степень первого сомножителя будет убывать, а второго — расти. Повторив процесс нужное число раз (равное степени первого сомножителя), получаем член вида

$$z_2^{m_2+m_1} z_3^{m_3} \dots z_n^{m_n},$$

который уже устраняется без появления новых членов того же порядка.

Рассмотрение случая произвольного набора жордановых клеток уже не встречает принципиальных затруднений. При применении этой процедуры на практике все указанные элементарные преобразования выполняются одновременно. Нами доказана (с указанием конструктивной процедуры приведения)

*Теорема Пуанкаре–Дюлака.* В классе полиномиальных замен конечного порядка любая система вида (\*) приводима к виду, в котором все члены до соответствующего порядка включительно резонансны.

## § 44. Свойства колебаний нелинейных систем

**1. Нелинейная диссипация энергии колебаний.** Рассмотрим колебания одномерного осциллятора, на который действует диссипативная сила, нелинейно зависящая от скорости:

$$\ddot{x} + \frac{8}{3} \varepsilon \dot{x}^3 + x = 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

Запишем это уравнение в виде системы в нормальной форме Коши:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - \frac{8}{3}\varepsilon y^3.$$

Для приведения линейной части к диагональному виду введем обозначения:  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ . В этих переменных имеем

$$\dot{z} = -iz + \frac{1}{3}\varepsilon(z^3 - 3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 - \bar{z}^3).$$

Уравнение для  $\bar{z}$  является сопряженным к написанному, поэтому выписывать его не обязательно, хотя его присутствие будет иметься в виду.

Теперь наш осциллятор записан в виде, к которому может быть применен метод нормальной формы Пуанкаре. Поскольку  $\lambda_1 = -i$ ,  $\lambda_2 = i$ , то в правой части написанного уравнения присутствует только один резонансный член  $z^2\bar{z}$  (для него  $\lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$ ). Поэтому нормальная форма Пуанкаре второго порядка имеет вид

$$\dot{z} = -iz - \varepsilon z^2\bar{z}.$$

Переменная, удовлетворяющая этому уравнению, отличается от переменной, удовлетворяющей исходному уравнению, как это следует из доказательства теоремы Пуанкаре–Дюлака, квадратичными членами. Поэтому, с точностью до этих членов, приближенное решение точного уравнения можно получить, решая его нормальную форму <sup>1)</sup>.

Нерезонансные члены оказывают меньшее влияние на решение, чем резонансные.

Нормальная форма легко решается. Умножим написанное уравнение на  $\bar{z}$ , а сопряженное ему на  $z$  и сложим:

$$\frac{d(z\bar{z})}{dt} = -2\varepsilon(z\bar{z})^2.$$

Отсюда

$$z\bar{z} = \frac{C}{1 + 2\varepsilon Ct},$$

где  $C$  — значение  $z\bar{z}$  в начальный момент времени  $C = z_0\bar{z}_0$ . Подставляя это решение в  $\dot{z} = -iz - \varepsilon z(z\bar{z})$  и интегрируя, получаем

$$z = \frac{z_0 e^{-it}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon Ct}}.$$

---

<sup>1)</sup> Более строгое утверждение о соответствии точных и приближенных решений дается теоремой Боголюбова, в силу которой приближенное решение стремится к точному при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для любого  $t$  из интервала  $[0, 1/\varepsilon]$  (теорема сформулирована для метода осреднения, представляющего собой разновидность метода нормальной формы).

Или, возвращаясь к переменным  $x, y$ , имеем

$$x = \frac{x_0 \cos t + y_0 \sin t}{\sqrt{1 + 2\varepsilon(x_0^2 + y_0^2)t}}.$$

Полученное решение показывает, что характер затухания колебаний при  $t \rightarrow \infty$  уже не имеет экспоненциального вида, как это было в линейном случае. Нелинейные диссипативные силы приводят к затуханию степенного вида, т. е. к более «вялому», чем линейные.

**2. Автоколебания.** Автоколебаниями называются изолированные, асимптотически устойчивые периодические решения автономных систем дифференциальных уравнений. Отличие автоколебаний от вынужденных колебаний заключается в следующем. В системах с диссипативными силами поддержание периодических колебаний осуществляется посредством приложения периодических внешних сил. Это проявляется в том, что дифференциальные уравнения, описывающие такие системы, являются неавтономными, периодически зависящими от времени.

В автоколебательных системах внешних периодических сил нет. Поддержание периодических колебаний в них осуществляется за счет стационарных внешних или внутренних источников энергии, благодаря особому механизму взаимодействия их с самой системой. Типичным примером автоколебательной системы являются механические часы. В них стационарный источник энергии — внутренний.

Древнейшим примером автоколебательной системы является танталов сосуд (рис. 65). Вода медленно поступает в сосуд из источника с постоянным расходом. При достижении уровня  $h_2$  она быстро истекает через боковой патрубок до уровня  $h_1$ . Процесс периодически повторяется.

Простейшим математическим примером автоколебательной системы является уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + 2\varepsilon(1 - 4x^2)\dot{x} + x = 0,$$

приблизительно описывающее колебательный процесс в ламповом генераторе.

Как и в предыдущем примере, от системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - 2\varepsilon(1 - 4x^2)y,$$

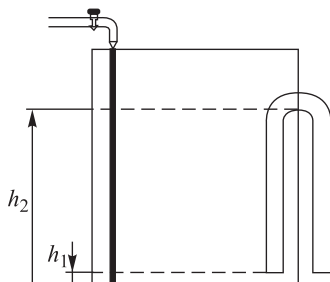


Рис. 65

посредством замены переменных  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$  приходим к системе

$$\dot{z} = -iz - \varepsilon[1 - (z + \bar{z})^2](z - \bar{z}), \quad \dot{\bar{z}} = iz - \varepsilon[1 - (z + \bar{z})^2](\bar{z} - z),$$

в которой  $\lambda_1 = -i$ ,  $\lambda_2 = i$  и резонансный член в первом уравнении имеет вид  $z^2\bar{z}$ .

Следовательно, нормальная форма первого приближения есть

$$\dot{z} = -iz - \varepsilon(z - z^2\bar{z}), \quad \dot{\bar{z}} = iz - \varepsilon(\bar{z} - \bar{z}^2z).$$

Решение этих уравнений осуществляется как и в предыдущем случае, т. е. умножая первое уравнение на  $\bar{z}$ , а второе на  $z$  и складывая, получим:

$$\frac{d}{dt}(z\bar{z}) = -2\varepsilon[z\bar{z} - (z\bar{z})^2].$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$z\bar{z} = \frac{z_0\bar{z}_0}{z_0\bar{z}_0 + (1 - z_0\bar{z}_0)e^{2\varepsilon t}}.$$

Подставляя это решение в исходную систему и интегрируя получающиеся линейные уравнения, находим:

$$z = \frac{z_0 e^{-it}}{\sqrt{z_0\bar{z}_0 + (1 - z_0\bar{z}_0)e^{2\varepsilon t}}}.$$

Или, возвращаясь к исходным переменным:

$$x = \frac{x_0 \cos t + y_0 \sin t}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + (1 - x_0^2 - y_0^2)e^{2\varepsilon t}}}.$$

Это решение показывает, что у уравнения Ван-дер-Поля имеется единственное периодическое решение с начальными условиями:  $x_0^2 + y_0^2 = 1$  и с амплитудой, равной единице. Все остальные решения стремятся к нему асимптотически при  $t \rightarrow \infty$ , если  $\varepsilon < 0$ .

Найденное периодическое решение в этом случае и представляет собой автоколебательный процесс.

**3. Вынужденные колебания.** Вынужденные колебания нелинейного осциллятора мы рассмотрим на примере уравнения Дуффинга

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + cx^3 = d \sin \omega t,$$

в котором нелинейная восстанавливающая сила представлена кубическим двучленом.

Целью следующего ниже анализа является выяснение вопроса о том, какие изменения претерпевает амплитудно-частотная характеристика линейной системы, изображенная на рис. 59, при появлении в уравнении нелинейного члена  $cx^3$ . Для удобства дальнейших выкладок слегка изменим обозначения входящих в уравнение парамет-



ров:  $a = 2h$ ,  $b = 1 - 2\Delta$ ,  $c = 8\varepsilon/3$ ,  $d = 2\mu$ . Величина  $\Delta$  называется расстройкой частот. Если единицу измерения времени выбрать так, чтобы  $\omega = 1$ , то при  $\Delta = 0$  в линейной системе наблюдается резонанс. Зависимость амплитуды установившихся колебаний, имеющих период внешней силы, от расстройки  $\Delta$  и будет представлять собой форму записи амплитудно-частотной характеристики.

Решать написанное нелинейное дифференциальное уравнение мы будем методом нормальной формы Пуанкаре, для чего перепишем исходное уравнение в виде системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x(1 - 2\Delta) - 2hy - \frac{8}{3}\varepsilon x^3 + 2\mu \cos t.\end{aligned}$$

Выше нормальная форма Пуанкаре излагалась и применялась для автономных систем дифференциальных уравнений. Рассматриваемая теперь система неавтономна. Однако и ее можно записать в автономной форме, если ввести вспомогательный осциллятор  $\ddot{u} + u = 0$ . Его решение при начальных условиях  $u(0) = 1$ ,  $\dot{u}(0) = 0$  имеет вид  $u = \cos t$ , совпадающий с видом приложенной к исходному нелинейному осциллятору силы. Поэтому написанная система эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, & \dot{y} &= -x(1 - 2\Delta) - 2hy - \frac{8}{3}\varepsilon x^3 + 2\mu u, \\ \dot{u} &= v, & \dot{v} &= -u, & u(0) &= 1, & v(0) &= 0.\end{aligned}$$

Эта система автономна и к ней применяется метод Пуанкаре. По-прежнему удобно использование комплексных переменных  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ , в которых написанная система принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -i(1 - \Delta)z + i\Delta\bar{z} - h(z - \bar{z}) - \frac{1}{3}i\varepsilon(z + \bar{z})^3 + i\mu(w + \bar{w}), \\ \dot{w} &= -iw, & w(0) &= 1.\end{aligned}$$

Уравнения для сопряженных переменных  $\bar{z}$  и  $\bar{w}$  являются сопряженными к написанным. Характеристические числа «невозмущенной» части системы (т.е. системы при  $\Delta = h = \varepsilon = \mu = 0$ ) имеют вид  $\lambda_1 = \lambda_2 = -i$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = i$ . Первые два относятся к выписанной системе, вторые два — к сопряженной. В соответствии с этим нормальная форма первого приближения такова:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -i(1 - \Delta)z - hz - i\varepsilon z^2\bar{z} + i\mu w, \\ \dot{w} &= -iw, & w(0) &= 1.\end{aligned}$$

Если решение этой системы искать в виде

$$z = z_0 \exp(-it), \quad w = w_0 \exp(-it),$$

то для переменных  $z_0(t)$  и  $w_0(t)$  получаются уравнения

$$\begin{aligned}\dot{z}_0 &= i\Delta z_0 - h z_0 - i\varepsilon z_0^2 \bar{z}_0 + i\mu, \\ \dot{w}_0 &= 0.\end{aligned}$$

Решение будет периодическим, если  $z_0 = \text{const}$  и  $w_0 = \text{const}$ . Это приводит к уравнению для нахождения  $z_0$ :

$$i\Delta z_0 - h z_0 - i\varepsilon z_0^2 \bar{z}_0 + i\mu = 0,$$

откуда, обозначая квадрат амплитуды  $A^2 = z_0 \bar{z}_0 = x_0^2 + y_0^2$ , находим:

$$z_0 = \frac{-i\mu}{i\Delta - h - i\varepsilon A^2}, \quad \bar{z}_0 = \frac{-i\mu}{i\Delta + h - i\varepsilon A^2}.$$

Перемножая эти равенства друг на друга, имеем

$$A^2 = \frac{\mu^2}{h^2 + (\varepsilon A^2 - \Delta)^2} \Rightarrow A^2[h^2 + (\varepsilon A^2 - \Delta)^2] = \mu^2. \quad (**)$$

Получено уравнение, определяющее в неявной форме амплитудно-частотную характеристику  $A(\Delta)$ . Она может быть разрешена явно относительно  $\Delta$ :

$$\Delta = \varepsilon A^2 \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{A^2} - h^2}.$$

Семейство амплитудно-частотных характеристик (параметром семейства рассматривается амплитуда внешней силы  $\mu$ ), построенное по этой формуле, изображено на рис. 66.

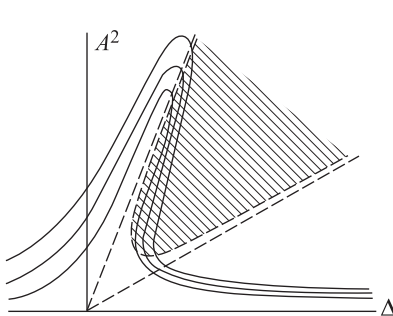


Рис. 66

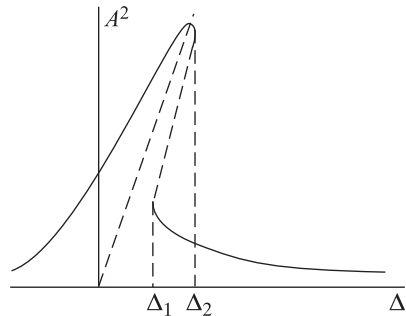


Рис. 67

Основное отличие полученной характеристики для вынужденных колебаний нелинейного осциллятора от линейного случая, изображенного на рис. 59, состоит в наклоне резонансного пика вправо (для  $\varepsilon > 0$ ). В результате этого на оси частот появляется зона (от  $\Delta_1$  до  $\Delta_2$ ), внутри которой у осциллятора возможно существование трех значений амплитуды установившихся колебаний (рис. 67). Сами значения  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  обладают тем свойством, что при сколь угодно малом отклонении

$\Delta$  от них состояние системы может изменяться на конечную величину. Такое явление называется *бифуркацией*, а значения  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — бифуркационными значениями параметра  $\Delta$ .

Изучим устойчивость найденных режимов установившихся колебаний. Для этого введем малое отклонение  $\delta z_0$  от стационарного значения  $z_0$  и на основе системы (\*) запишем систему уравнений в вариациях

$$\begin{aligned}\delta \dot{z}_0 &= (i\Delta - h - 2i\varepsilon A^2)\delta z_0 - i\varepsilon z_0^2 \delta \bar{z}_0, \\ \delta \dot{\bar{z}}_0 &= (-i\Delta - h + 2i\varepsilon A^2)\delta \bar{z}_0 + i\varepsilon \bar{z}_0^2 \delta z_0.\end{aligned}$$

Характеристический определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} i\Delta - h - 2i\varepsilon A^2 - \lambda & -i\varepsilon z_0^2 \\ i\varepsilon \bar{z}_0^2 & -i\Delta - h + 2i\varepsilon A^2 - \lambda \end{vmatrix} = \\ = \lambda^2 + 2h\lambda + h^2 + (3\varepsilon A^2 - \Delta)(\varepsilon A^2 - \Delta) = 0$$

позволяет выписать условия асимптотической устойчивости:

$$h > 0, \quad h^2 + (3\varepsilon A^2 - \Delta)(\varepsilon A^2 - \Delta) > 0.$$

Наиболее существенным условием является второе. Оно не зависит от  $\mu$  и в переменных  $(\Delta, A^2)$  представляет собой гиперболу, изображенную на рис. 66 и отделяющую область устойчивости от области неустойчивости (последняя заштрихована). Асимптотами гиперболы являются две прямые  $\Delta = 3\varepsilon A^2$  и  $\Delta = \varepsilon A^2$ . Если продифференцировать по  $A^2$  функцию (\*\*) и приравнять производную нулю, то можно убедиться, что геометрическое место точек, в которых семейство амплитудно-частотных характеристик имеет вертикальные касательные, совпадает с найденной гиперболой.

Таким образом, из трех возможных значений амплитуды установившихся колебаний устойчивым колебаниям соответствуют наибольшее и наименьшее значения, а неустойчивым — среднее.

# Часть 5

## ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ЛИ

### Глава 11

## ЭЛЕМЕНТЫ ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

### § 45. Понятие группы

Пусть  $G$  обозначает множество элементов произвольной природы (множество чисел, или функций, или каких-нибудь объектов геометрической природы и т. п.).

Множество  $G$  называется *группой*, если:

1) На множестве  $G$  определена *операция*, которая любым двум элементам из  $G$ :  $A \in G$  и  $B \in G$ , взятым в определенном порядке, ставит в соответствие единственный элемент  $C \in G$ . Будем называть условно эту операцию умножением и записывать ее так:

$$A \circ B = C.$$

Операция, вообще говоря, некоммутативна, т. е.  $A \circ B \neq B \circ A$ , что и определяет понятие порядка выбора элементов в произведении.

2) Существует элемент  $E$ , такой, что для любого  $A \in G$  имеет место

$$A \circ E = E \circ A = A.$$

Этот элемент называется *единицей группы*.

3) Для любого  $A \in G$  существует элемент  $A^{-1}$ , такой, что

$$A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = E.$$

Этот элемент называется *обратным* элементу  $A$ .

4) Имеет место *ассоциативность* операции:

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$$

для любых  $A, B, C$  из  $G$ .

*Примеры групп.*

1. Множество всех рациональных чисел без нуля. Операция — арифметическое умножение.

2. Множество всех векторов на плоскости. Операция — сложение.

3. Любое конечное число элементов с операцией, задаваемой таблицей Кейли (в примере 5 элементов):

$\circ$	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$
$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$A$
$B$	$C$	$D$	$E$	$A$	$B$
$C$	$D$	$E$	$A$	$B$	$C$
$D$	$E$	$A$	$B$	$C$	$D$
$E$	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$

4. Множество всех точек, лежащих на окружности. Операция — точке  $A$ , положение которой на окружности определено углом  $\varphi_A$ , и точке  $B$  с углом  $\varphi_B$  ставится в соответствие точка  $C$ , положение которой определяется суммой углов

$$\varphi_C = \varphi_A + \varphi_B.$$

5. Множество матриц  $n \times n$  с неравным нулю определителем. Операция — матричное умножение.

*Примеры не групп*, когда определенная на множестве операция не удовлетворяет каким-то из свойств 2–4.

1. Множество целых чисел. Операция — умножение.

2. Множество векторов в трехмерном пространстве. Операция — векторное произведение.

## § 46. Группа Ли. Примеры

Нетрудно заметить, что в примерах 1, 2, 4, 5 на множестве элементов, составляющих группу, можно совершенно независимо от аксиом группы ввести понятие близости между любыми двумя элементами, в силу которого групповые операции оказываются непрерывными функциями, что позволяет на такие группы (они называются топологическими) смотреть одновременно с двух точек зрения: с точки зрения алгебры и с точки зрения анализа. Такое объединение оказывается весьма плодотворным. Это и используется самым существенным образом в теории групп Ли. В настоящее время под термином групп Ли понимают более широкий объект, чем тот, который ввел сам Ли и который и будет рассматриваться далее нами.

Под множеством  $G$ , на котором вводится операция, удовлетворяющая аксиомам группы, будет пониматься множество преобразований  $n$ -мерного вещественного арифметического пространства в себя:

$$q' = Q(q, a) \quad (q \in R^n).$$

Переход от одного преобразования к другому осуществляется изменением параметра  $a$ . Если параметр скалярный, то множество пре-

образований называется однопараметрическим. Параметр может быть векторным:  $a \in R^k$ . Размерность этого вектора и определяет размерность множества преобразований. При этом все  $a_1, \dots, a_k$  должны быть существенными, т. е. несводимыми при помощи преобразований к меньшему числу.

Операция, вводимая на множестве преобразований  $q' = Q(q, a)$ , есть композиция двух преобразований. Пусть, например, после преобразования  $q \rightarrow q'$  с некоторым фиксированным  $a$  выполняется преобразование  $q' \rightarrow q''$  с некоторым фиксированным  $b$ :

$$q'' = Q(q', b).$$

Если композиция преобразований, определяющая преобразование  $q \rightarrow q''$ :

$$q'' = Q[Q(q, a), b],$$

есть преобразование из того же самого множества (отвечающее какому-то другому значению параметра  $c$ ), т. е.

$$q'' = Q(q, c),$$

то это и означает, что на рассматриваемом множестве преобразований определена операция (композиция двух преобразований из множества не выходит за пределы этого множества).

Для того чтобы не интересоваться областью определения функций  $q' = Q(q, a)$  как по переменной  $q$ , так и по параметру  $a$ , предполагают, что преобразования определены на некотором открытом множестве из  $R^n$  и в достаточно малой окрестности некоторой точки  $a$ .

Тем самым функция  $q' = Q(q, a)$  определяет локальное семейство локальных преобразований.

*Определение.* Множество преобразований  $q' = Q(q, a)$  называется локальной группой преобразований Ли (в дальнейшем коротко: группой Ли), если:

1) Композиция любых двух преобразований определяет операцию на этом множестве, т. е. есть преобразование из этого же множества.

2) Рассматриваемому множеству принадлежит тождественное преобразование (единица группы). Значение параметра  $a$ , определяющее тождественное преобразование, будем обозначать буквой  $e$ .

3) Для любого преобразования из множества существует обратное, принадлежащее этому же множеству, такое, что их композиция дает тождественное преобразование.

4) Функция  $q' = Q(q, a)$  является аналитической по переменным  $q$  и  $a$  в некотором открытом множестве изменения  $q$  и в некоторой окрестности единичного элемента  $e$  для переменной  $a$ .

Заметим, что требование ассоциативности операции, необходимое при общем определении группы, здесь излишне, поскольку композиция преобразований этому свойству, очевидно, удовлетворяет.

*Важнейшие примеры групп Ли.*

1. *Группа трансляций:*  $q' = q + a$ . Здесь размерность параметра  $a$  такая же, как и переменной  $q$ .

2. *Группа растяжений:*  $q'_i = a_i q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Если  $a_i = a$  — скаляр, не зависящий от  $i$ , то группа называется группой подобия.

3. *Группа вращений:*  $q'_i = \sum_j a_{ij} q_j$ , где  $A = \{a_{ij}\}$  — ортогональная матрица  $A^T = A^{-1}$ ,  $\det A = 1$ . Принято обозначение для этой группы —  $SO(n)$ , что означает специальная, ортогональная, действующая в  $R^n$ .

4. *Группа линейных преобразований:*  $q'_i = \sum_j a_{ij} q_j$  при  $\det A \neq 0$ .

Обозначение  $GL(n)$  — общая, линейная. Если дополнительно потребовать  $\det A = 1$ , то получаем группу  $SL(n)$  — специальная, линейная.

5. *Группа движений:*  $q' = a + Aq$ , где  $Aq$  есть краткое обозначение  $\sum_j a_{ij} q_j$  и матрица  $A$  — ортогональная.

6. *Аффинная группа:*  $q' = a + Aq$ , где  $\det A \neq 0$ .

7. *Проективная группа:*

$$q'_i = \frac{\sum a_{ij} q_j + b_i}{\sum a_j q_j + b} \quad \text{при} \quad \det \begin{pmatrix} a_{ij} & b_i \\ a_j & b \end{pmatrix} \neq 0.$$

В стоящей под знаком детерминанта блочной матрице матрица  $A = \{a_{ij}\}$  окаймлена столбцом из элементов  $b_i$ , строкой из элементов  $a_j$  и последним диагональным элементом  $b$ .

8. *Группа отображений, сохраняющих площадь* ( $n = 2$ ).

9. *Группа Лоренца* (запишем ее в двумерном случае с традиционным обозначением переменных):

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

*Групповая операция.* Композиция преобразований  $q' = Q(q, a)$ ,  $q'' = Q(q', b)$  определяет преобразование  $q'' = Q(q, c)$ , в котором параметр  $c$  связан функционально с параметрами  $a$  и  $b$ :

$$c = \gamma(a, b).$$

Эта функция, аналитическая в окрестности единицы ( $a = e$  и  $b = e$ ), и представляет собой выражение групповой операции.

В примере группы Лоренца

$$t'' = \frac{t' - v_2 x'}{\sqrt{1 - v_2^2}} = \frac{t - (v_1 + v_2)x / (1 + v_1 v_2)}{\sqrt{1 - [(v_1 + v_2) / (1 + v_1 v_2)]^2}},$$

$$x'' = \frac{x' - v_2 t'}{\sqrt{1 - v_2^2}} = \frac{x - (v_1 + v_2)t / (1 + v_1 v_2)}{\sqrt{1 - [(v_1 + v_2) / (1 + v_1 v_2)]^2}}$$

групповая операция имеет вид

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}.$$

Связь прямого и обратного преобразований в терминах групповой операции такова:

$$\gamma(a, a^{-1}) = \gamma(a^{-1}, a) = e.$$

## § 47. Инфинитезимальный оператор группы. Алгебра Ли

Предположим вначале, что  $a$  — скалярный параметр. Заменой переменной  $a \rightarrow \mu$ :  $a = e + \mu$  добиваемся того, что тождественному преобразованию всегда соответствует  $\mu = 0$ . Пусть в уравнении группы  $q' = Q(q, \mu)$  мы имеем именно такой параметр. Разложим это выражение в ряд по степеням  $\mu$ , в окрестности нуля:

$$q' = q + \mu\eta(q) + \dots$$

Выписанная линейная по  $\mu$  часть группы называется *ядром* группы. Пусть в пространстве переменных  $q$  задана некоторая скалярная функция  $F(q)$ . Преобразования  $q \rightarrow q'$  переводят функцию  $F(q) \rightarrow F(q')$ :

$$F(q') = F[q + \mu\eta(q) + \dots] = F(q) + \mu\eta(q)\frac{dF}{dq} + \dots$$

Линейная по  $\mu$  часть приращения функции  $F(q')$  имеет вид

$$\Delta F(q') \equiv \mu\eta(q)\frac{dF}{dq} \equiv \mu \sum \eta_i(q)\frac{\partial F}{\partial q_i} \equiv \mu U F,$$

где  $U$  представляет собой линейный дифференциальный оператор первого порядка:

$$U = \eta_1(q)\frac{\partial}{\partial q_1} + \dots + \eta_n(q)\frac{\partial}{\partial q_n},$$

который называется *инфинитезимальным оператором* группы. Если группа многопараметрическая, то у нее столько операторов, сколько независимых параметров.

Приведем выражения для инфинитезимальных операторов в перечисленных выше примерах групп Ли.

1. Группа трансляций:

$$U_i = \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$



2. Группа растяжений:

$$U_i = q_i \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

( $U = \sum q_i \partial / \partial q_i$  — группа подобия).

3. Группа вращений. Рассмотрим малую окрестность единичной матрицы в множестве ортогональных матриц:

$$A = E + \mu \mathcal{N},$$

где  $\mu$  — малый скалярный параметр.

Из условия ортогональности

$$(E + \mu \mathcal{N})^\top (E + \mu \mathcal{N}) = E,$$

пренебрегая малыми второго порядка, находим  $\mathcal{N} = -\mathcal{N}^\top$ . Следовательно, инфинитезимальные операторы группы вращения (в количестве  $n(n-1)/2$ ) имеют вид

$$U_{ik} = q_i \frac{\partial}{\partial q_k} - q_k \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (i > k = 1, \dots, n).$$

4. Группа линейных преобразований:

$$U_{ik} = q_i \frac{\partial}{\partial q_k} \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

5. Операторы группы движений представляют собой операторы трансляций и операторы группы вращений.

6. Операторы аффинной группы представляют собой операторы трансляций и операторы группы линейных преобразований.

7. Операторы проективной группы состоят из операторов аффинной группы

$$U_i = \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad U_{ik} = q_i \frac{\partial}{\partial q_k} \quad (i, k = 1, \dots, n)$$

и операторов

$$U_j = \sum_k q_j q_k \frac{\partial}{\partial q_k} \quad (j, k = 1, \dots, n).$$

8. Группа отображений, сохраняющих площадь ( $n = 2$ ). Рассмотрим отображение, близкое к тождественному:

$$q'_1 = q_1 + \mu \eta_1(q_1, q_2), \quad q'_2 = q_2 + \mu \eta_2(q_1, q_2).$$

Условие сохранения площади имеет вид

$$\iint dq'_1 dq'_2 = \iint \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial q'_1}{\partial q_1} & \frac{\partial q'_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial q'_2}{\partial q_1} & \frac{\partial q'_2}{\partial q_2} \end{array} \right| dq_1 dq_2 = \iint dq_1 dq_2,$$

т. е.

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial q'_1}{\partial q_1} & \frac{\partial q'_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial q'_2}{\partial q_1} & \frac{\partial q'_2}{\partial q_2} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 + \mu \frac{\partial \eta_1}{\partial q_1} & \mu \frac{\partial \eta_1}{\partial q_2} \\ \mu \frac{\partial \eta_2}{\partial q_1} & 1 + \mu \frac{\partial \eta_2}{\partial q_2} \end{array} \right| = 1,$$

откуда с точностью до  $\mu^2$  получаем:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \eta_2}{\partial q_2} = 0, \quad U = \eta_1(q_1, q_2) \frac{\partial}{\partial q_1} + \eta_2(q_1, q_2) \frac{\partial}{\partial q_2}.$$

9. Группа Лоренца:

$$U = x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x}.$$

Пусть  $m$ -параметрическая группа имеет  $m$  операторов:  $U_1, \dots, U_m$ . Если все  $m$  параметров существенны, т. е. не могут быть заменами сведены к меньшему числу, то операторы линейно независимы (первая основная теорема Ли). Это означает, что не существует таких, не всех равных нулю чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , что

$$\lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_m U_m = 0.$$

В противном случае операторы называются линейно зависимыми. Числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  при этом предполагаются не зависящими от  $q$ .

Линейная независимость этих операторов позволяет взять их в качестве базиса линейного пространства операторов, связанного с рассматриваемой группой. Любой элемент этого пространства есть оператор вида:

$$U = \lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_m U_m,$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  — координаты оператора  $U$  в этом пространстве.

В этом пространстве можно ввести операцию произведения операторов. Пусть  $U$  и  $V$  — два оператора из рассматриваемого пространства. Введем произведение операторов, называемое коммутатором, так:

$$[U, V] = UV - VU.$$

Это означает, что действие оператора  $[U, V]$  на некоторую функцию  $F(q)$  заключается в том, что нужно вначале подействовать на нее оператором  $V$ , после чего на полученную функцию подействовать оператором  $U$  и из результата вычесть то, что получается при действии на  $F(q)$  этих же операторов в обратном порядке:

$$[U, V]F(q) = U(VF) - V(UF).$$

Такое определение требует проверки нескольких фактов. Во-первых, будет ли оператор  $[U, F]$  оператором первого порядка? Прямое вычисление показывает, что возникающие вторые производные при вы-

числении  $U(VF)$  сокращается после вычитания  $V(UF)$ . Если оператор  $U$  имеет вид

$$U = \sum \eta_i \frac{\partial}{\partial q_i},$$

а оператор  $V$  имеет вид

$$V = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial q_i},$$

то оператор  $[U, V]$  получается таким:

$$[U, V] = \sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial q_i},$$

где коэффициенты  $\alpha_i(q) = U\xi_i(q) - V\eta_i(q)$ .

Во-вторых, будет ли оператор  $[U, V]$  принадлежать рассматриваемому пространству операторов, т. е. может ли он быть выражен линейной комбинацией исходных базисных операторов  $U_i$ ? Если заданы  $m$  произвольных линейно независимых операторов, то произведение любых двух из них вовсе не обязано выражаться линейной комбинацией этих  $m$  операторов. Оказывается, что если эти  $m$  операторов являются операторами  $m$ -параметрической группы, то произведение любых двух операторов из соответствующего этой группе пространства ему же и принадлежит (вторая основная теорема Ли):

$$[U, V] = k_1 U_1 + \dots + k_m U_m.$$

В силу того, что введенное произведение очевидно обладает свойством дистрибутивности по сложению, т. е.

$$[U, V + W] = [U, V] + [U, W],$$

то для нахождения констант  $k_1, \dots, k_m$  в случае произвольных  $U$  и  $V$  достаточно знать эти константы для базисных операторов:

$$[U_i, U_j] = \sum_s C_{ij}^s U_s.$$

Константы  $C_{ij}^s$  называются структурными константами группы и определяют группу полностью.

В-третьих, важно знать, является ли введенное произведение корректным в следующем смысле. Говоря о преобразовании пространства или какой-то его области, мы выражаем это преобразование с помощью координат  $q$ . Если пространство отнести к другим координатам, например  $r$ , то те же преобразования, выраженные в виде функции от координат, будут иметь иной вид. Иной вид будут иметь и операторы (правило преобразования оператора при замене переменных будет приведено в § 51). Зависит ли операция произведения операторов

$$[U, V] = \sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial q_i},$$

где  $\alpha_i = U\xi_i - V\eta_i$ , от того, в каких переменных она вычисляется? Другими словами, имеет ли значение, если вначале заменить в операторах переменные, а потом взять их произведение, или поступить наоборот? Несложная выкладка показывает, что все равно. Введенное произведение не зависит от выбора системы переменных.

Получившийся объект: линейное пространство операторов с введенной в этом пространстве операцией умножения называется алгеброй Ли.

Алгебра Ли порождается группой Ли. Верно и обратное: если даны какие-то  $n$  линейно независимых операторов, таких, что коммутатор любой пары есть их линейная комбинация, то они порождают некоторую  $n$ -параметрическую группу Ли (вторая обратная теорема Ли).

Заметим, что коммутатор по каждому из аргументов линеен, т.е., например:

$$[U, aV_1 + bV_2] = a[U, V_1] + b[U, V_2],$$

где  $a$  и  $b$  — скаляры.

Кроме того, он кососимметричен:  $[U, V] = -[V, U]$  и удовлетворяет тождеству Якоби

$$[[U, V], W] + [[V, W], U] + [[W, U], V] = 0.$$

Абстрактное определение алгебры Ли не связано ни с группами, ни с операторами и определяется посредством введения в линейном пространстве операции умножения билинейной, кососимметрической и удовлетворяющей тождеству Якоби. Пример: трехмерное векторное пространство с операцией векторного произведения есть алгебра Ли.

*Пример.* Группа  $SL(2)$ . Операторы

$$U_1 = q_2 \frac{\partial}{\partial q_1}, \quad U_2 = q_1 \frac{\partial}{\partial q_2}, \quad q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_2}$$

образуют базис трехмерной алгебры Ли со следующим правилом перемножения операторов базиса:

$$[U_1, U_2] = -U_3, \quad [U_1, U_3] = 2U_1, \quad [U_2, U_3] = -2U_2.$$

## § 48. Однопараметрические группы. Теорема единственности

В дальнейшем речь будет идти в основном об однопараметрических группах. В предыдущем параграфе уже упоминалась вторая теорема Ли: всякая  $n$ -параметрическая группа порождает  $n$ -мерную алгебру, и обратно: всякая  $n$ -мерная алгебра Ли операторов порождает группу той же размерности. Теорема в случае  $n = 1$  имеет нелокальный характер.

*Теорема.* По заданному инфинитезимальному оператору  $U = \sum_i \eta_i \partial / \partial q_i$  группа  $q' = Q(q, \mu)$  восстанавливается (с точностью до замены параметра  $\mu$ ) единственным образом.

Иными словами, знание производной по  $\mu$  функции в нуле определяет всю функцию полностью. (В случае функций, не имеющих отношения к группам, для построения функции, например, в форме ряда, необходимо знать все производные в нуле.)

*Доказательство.* Рассмотрим малую вариацию параметра группы  $\mu + \delta\mu$ , приводящую и к малой вариации образа точки  $q$ :

$$q' + \delta q' = Q(q, \mu + \delta\mu).$$

Подставим в правую часть этой формулы выражение для  $q$ :

$$q = Q(q', \mu^{-1})$$

и воспользуемся групповым свойством

$$q' + \delta q' = Q[q', \gamma(\mu^{-1}, \mu + \delta\mu)].$$

Разложим групповую операцию  $\gamma(\mu^{-1}, \mu + \delta\mu)$  в ряд по степеням  $\delta\mu$ :  $\gamma(\mu^{-1}, \mu + \delta\mu) = \gamma(\mu^{-1}, \mu) + \Gamma(\mu)\delta\mu + \dots$ , где  $\gamma(\mu^{-1}, \mu) = 0$  и  $\Gamma(\mu) = \partial\gamma(\mu_1, \mu_2)/\partial\mu_2$  при  $\mu_1 = \mu^{-1}$  и  $\mu_2 = \mu$ .

Таким образом, получаем

$$q' + \delta q' = Q[q', \Gamma(\mu)\delta\mu + \dots].$$

Раскладывая функцию  $Q$  в ряд по  $\delta\mu$ , находим

$$q' + \delta q' = q' + \eta(q')\Gamma(\mu)\delta\mu + \dots$$

Переходя к пределу  $\delta\mu \rightarrow 0$ , имеем

$$\frac{dq'}{d\mu} = \Gamma(\mu)\eta(q').$$

Так как  $\mu$  в этом соотношении произвольно и оно (это соотношение) должно обращаться в тождество при подстановке в него  $q' = Q(q, \mu)$ , то это означает, что группа  $q' = Q(q, \mu)$  может быть получена из этого соотношения, рассматриваемого как дифференциальное уравнение с начальным условием  $q'|_{\mu=0} = q$ .

При этом единственность группы следует из теоремы о существовании и единственности решения начальной задачи Коши, что в данном случае имеет место в силу аналитичности правых частей. Если заменить параметр  $\mu \rightarrow \tau$ :

$$\tau = \int_0^{\mu} \Gamma(\mu) d\mu,$$

то найденное дифференциальное уравнение приобретает вид

$$\frac{dq'}{d\tau} = \eta(q'), \quad q'(0) = q.$$

Правая часть его определяется лишь оператором группы. Решая его, мы восстанавливаем группу полностью с точностью до указанной замены параметра. Теорема доказана.

*Замечание 1.* Доказанная теорема означает, что между всеми одночленными группами в  $R^n$  и всеми автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями с аналитическими правыми частями существует взаимно однозначное соответствие (с точностью до несущественной замены параметра).

*Замечание 2.* Параметр  $\tau = \int_0^\mu \Gamma(\mu) d\mu$  носит название канонического. Построение группы при помощи решения автономного дифференциального уравнения определяет эту группу автоматически через канонический параметр.

Каноничность параметра состоит в том, что групповая операция для него имеет простейший вид  $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$ , а обратный элемент  $\tau^{-1} = -\tau$ .

*Пример.* Найти групповую операцию и канонический параметр в группе подобия:

$$q' = aq = (1 + \mu)q.$$

Пусть  $q'' = (1 + \nu)q'$ . Тогда  $q'' = (1 + \mu + \nu + \mu\nu)q$  и групповая операция  $\gamma(\mu, \nu) = \mu + \nu + \mu\nu$ . Вычислим обратный элемент:

$$\gamma(\mu, \mu^{-1}) = 0 \Rightarrow \mu + \mu^{-1} + \mu\mu^{-1} = 0 \Rightarrow \mu^{-1} = -\frac{\mu}{1 + \mu}.$$

Вычислим производную:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = 1 + \mu.$$

Находим функцию  $\Gamma(\mu)$ :

$$\Gamma(\mu) = \frac{\partial \gamma}{\partial \nu}, \quad \mu \rightarrow \mu^{-1} \quad \text{и} \quad \nu \rightarrow \mu,$$

откуда  $\Gamma(\mu) = 1/(1 + \mu)$ . Канонический параметр

$$\tau = \int_0^\mu \frac{d\mu}{1 + \mu} = \ln(1 + \mu).$$

Выражение группы подобия через канонический параметр имеет вид

$$q' = e^\tau q.$$

*Пример.* Рассмотрим проективную группу на плоскости. Один из ее операторов имеет вид

$$U = q_1^2 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_1 q_2 \frac{\partial}{\partial q_2}.$$

Построим однопараметрическую подгруппу, порождаемую этим оператором. Дифференциальные уравнения, определяющие эту подгруппу, имеют вид

$$\frac{dq_1'}{d\tau} = q_1'^2, \quad \frac{dq_2'}{d\tau} = q_1' q_2', \quad q_1'(0) = q_1, \quad q_2'(0) = q_2.$$

Решение этой начальной задачи Коши и дает искомую подгруппу:

$$q_1' = \frac{q_1}{1 - \tau q_1}, \quad q_2' = \frac{q_2}{1 - \tau q_1}.$$

Выбирая любой оператор из алгебры Ли операторов группы, можно построить таким образом все ее однопараметрические подгруппы.

## § 49. Уравнение Лиувилля. Инварианты. Собственные функции

Пусть группа задана через канонический параметр  $\tau$ :

$$q' = q + \eta(q)\tau + \dots$$

и ей по доказанному выше эквивалентна система

$$\frac{dq'}{d\tau} = \eta(q').$$

Вернемся к вопросу о преобразовании с помощью этой группы некоторой функции  $F(q)$ . Если  $q \rightarrow q'$ , то

$$F(q) \rightarrow F(q') = F[q + \eta(q)\tau + \dots] \equiv \tilde{F}(q, \tau).$$

Определим производную этой функции по  $\tau$ :

$$\frac{dF}{d\tau} = \frac{dF}{dq'} \frac{dq'}{d\tau} = \frac{dF}{dq'} \eta(q') = U F.$$

Найдем связь преобразованной функции  $\tilde{F}(q, \tau)$  с исходной функцией  $F(q)$  и оператором группы  $U$ .

Ряд Тейлора для  $\tilde{F}(q, \tau)$ :

$$\tilde{F}(q, \tau) = \tilde{F}(q, 0) + \left. \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \tau + \dots$$

Последовательно имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(q, 0) &= F(q), \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} = \frac{dF}{d\tau} = UF(q'), \quad \left. \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = UF(q), \\ \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \tau^2} &= \frac{d^2 F}{d\tau^2} = U^2 F(q'), \quad \left. \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0} = U^2 F(q)\end{aligned}$$

и так далее.

В результате искомую связь находим в виде ряда:

$$F(q') \equiv \tilde{F}(q, \tau) = F(q) + \tau UF(q) + \frac{\tau^2}{2!} U^2 F(q) + \dots$$

Этот ряд называется рядом Ли. Он может быть записан еще в такой форме:

$$F(q') = e^{\tau U} F(q).$$

Ряд Ли и служит для определения операторной экспоненты. Дифференцируя ряд Ли по  $\tau$ , находим

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} = UF + \tau U^2 F + \dots = U(F + \tau UF + \dots) = U\tilde{F}.$$

Уравнение

$$\frac{\partial \tilde{F}(q, \tau)}{\partial \tau} = U\tilde{F}(q, \tau)$$

носит название уравнения Лиувилля. Или, в более подробной записи:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} = \sum_i \eta_i(q) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial q_i}.$$

Дополнив это уравнение начальным условием  $\tilde{F}(q, 0) = F(q)$ , получаем начальную задачу Коши для линейного уравнения в частных производных относительно искомой функции  $\tilde{F}(q, \tau)$ , эквивалентную системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dq'}{d\tau} = \eta(q').$$

Эквивалентность понимается в следующем смысле. Если известно общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений  $q' = Q(q, \tau)$ , где  $q$  — начальные условия, то решение уравнения Лиувилля есть

$$\tilde{F}(q, \tau) = F[Q(q, \tau)],$$

где функция  $F(q)$  определяет начальные условия для уравнения Лиувилля.



Обратно, если известно решение начальной задачи Коши для этого уравнения:  $\tilde{F}(q, \tau)$ , то, выбрав в качестве начальной функции  $F(q) \equiv q$ , получим общее решение  $q' = Q(q, \tau)$  системы

$$\frac{dq'}{d\tau} = \eta(q').$$

Указанная эквивалентность позволяет заменить изучение нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений часто более удобным изучением линейного уравнения первого порядка в частных производных.

Ряд Ли для частного вида функции  $F(q) \equiv q$  позволяет записать выражения для группы в виде ряда Тейлора по  $\tau$ :

$$q' = q + \tau Uq + \frac{\tau^2}{2!} U^2 q + \dots$$

*Пример.* Восстановить группу вращений  $SO(2)$  по ее оператору  $U = q_2 \partial / \partial q_1 - q_1 \partial / \partial q_2$ .

Последовательно находим:

$$Uq_1 = q_2, \quad U^2 q_1 = Uq_2 = -q_1, \quad U^3 q_1 = -Uq_1 = -q_2, \dots$$

$$Uq_2 = -q_1, \quad U^2 q_2 = -Uq_1 = -q_2, \quad U^3 q_2 = -Uq_2 = q_1, \dots$$

Следовательно,

$$q'_1 = q_1 + \tau q_2 - \frac{\tau^2}{2!} q_1 - \frac{\tau^3}{3!} q_2 + \dots = q_1 \cos \tau + q_2 \sin \tau,$$

$$q'_2 = q_2 - \tau q_1 - \frac{\tau^2}{2!} q_2 + \frac{\tau^3}{3!} q_1 + \dots = -q_1 \sin \tau + q_2 \cos \tau.$$

*Определение.* Функция  $G(q)$  называется инвариантом группы, если она не изменяется группой:

$$G(q') \equiv G(q).$$

Ряд Ли показывает, что для того чтобы аналитическая функция своих переменных была инвариантом группы, необходимо и достаточно, чтобы она была корнем оператора группы:

$$UG(q) = 0 \quad \text{для любого } q.$$

*Свойство инварианта.* Пусть  $G(q)$  — инвариант, а  $F(q)$  — произвольная функция. Тогда

$$U[G(q)F(q)] = F(q)UG(q) + G(q)UF(q) = G(q)UF(q),$$

т. е. инвариант группы играет роль константы для ее оператора.

*Определение.* Функция  $P(q)$  называется собственной функцией оператора  $U$ , если

$$UP(q) = \lambda(q)P(q),$$

где  $\lambda(q)$  — инвариант, называемый в данном случае собственным значением, отвечающим собственной функции  $P(q)$ .

Если  $P(q)$  — собственная функция оператора  $U$ , то она преобразуется соответствующей этому оператору группой так:

$$\tilde{P}(q, \tau) = G(q, \tau)P(q),$$

где  $G(q, \tau)$  — инвариант группы при любом фиксированном  $\tau$ :

$$G(q, \tau) = 1 + \tau\lambda(q) + \frac{\tau^2}{2!}\lambda^2(q) + \dots$$

Очевидно следующее свойство собственных функций оператора. Если  $P_1(q)$  — собственная функция с собственным значением  $\lambda_1(q)$ , а  $P_2(q)$  — собственная функция с собственным значением  $\lambda_2(q)$ , то

$$U(P_1P_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)P_1P_2,$$

т. е.  $P_1P_2$  — тоже собственная функция с собственным значением  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

*Инвариантное семейство поверхностей.* Если функция  $G(q)$  есть инвариант группы, то приравнявая ее произвольной постоянной:  $G(q) = C$ , получаем семейство гиперповерхностей, каждая из которых преобразуется сама в себя. Иными словами любая такая гиперповерхность является инвариантной.

Представляет интерес несколько другая ситуация. Пусть задано некоторое семейство гиперповерхностей:  $\omega(q) = C$ . Причем  $\omega(q)$  инвариантом группы не является. Таким образом, преобразование группы изменяет каждую конкретную гиперповерхность семейства. Нас будет интересовать случай, когда при таком изменении они переходят в другие гиперповерхности того же семейства. Такое семейство называется инвариантным.

*Пример.* Семейство прямых, исходящих из начала координат в плоскости  $(q_1, q_2)$ :  $q_1/q_2 = C$ , является инвариантным семейством группы вращений.

Найдем условие, которому должна удовлетворять функция  $\omega(q)$ , чтобы она определяла инвариантное семейство. Пусть  $\omega(q) = C$  и  $\sigma(q) = k$  — два представления одного и того же семейства. Каждая гиперповерхность одного представления конгруэнтна некоторой поверхности другого. Это значит, что для каждого значения  $C$  первого представления найдется такое значение  $k$  второго, что оба представления определяют одну и ту же гиперповерхность. То есть  $k$  есть функция  $C$ :  $k = f(C)$ . Но тогда и  $\sigma(q) = f[\omega(q)]$ . Таким образом, условие инвариантности семейства состоит в следующем:

$$\tilde{\omega}(q, \tau) = f[\omega(q, \tau)].$$

Раскладывая это условие в ряд по  $\tau$ , находим

$$\tilde{\omega}(q, \tau) = \omega(q) + \tau f_1[\omega(q)] + \frac{\tau^2}{2!} f_2[\omega(q)] + \dots$$

Это приводит к условию

$$U\omega(q) = 1,$$

которое и будем считать основным для нахождения инвариантного семейства.

## § 50. Линейные уравнения с частными производными

Как видно из предыдущего, задача нахождения инвариантов и инвариантных семейств приводит к необходимости решать линейные уравнения с частными производными

$$Q_1(q_1, \dots, q_n) \frac{\partial \omega}{\partial q_1} + \dots + Q_n(q_1, \dots, q_n) \frac{\partial \omega}{\partial q_n} = Q_{n+1}(q_1, \dots, q_n, \omega).$$

В случае поиска инварианта уравнение однородное, т. е.  $Q_{n+1} \equiv 0$ . Если ищется инвариантное семейство, то уравнение неоднородное.

Рассмотрим вначале однородное уравнение. Поставим ему в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_1}{Q_1} = \frac{dq_2}{Q_2} = \dots = \frac{dq_n}{Q_n}.$$

*Теорема.* Функция  $\omega(q)$  тогда и только тогда является решением уравнения

$$\sum Q_i \frac{\partial \omega}{\partial q_i} = 0,$$

когда она есть первый интеграл написанной системы.

Доказательство следует из отмеченной в предыдущем параграфе эквивалентности уравнения Лиувилля соответствующей ему системе обыкновенных уравнений.

Решение неоднородного уравнения сводится к решению однородного уравнения, если искать это решение в неявной форме:

$$\Phi[\omega, q] = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial \omega}{\partial q_k} = - \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} / \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}$$

и после подстановки в  $\sum_i Q_i \partial \omega / \partial q_i = Q_{n+1}$  получаем

$$Q_1(q) \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} + \dots + Q_{n+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть произвольная функция первых интегралов системы

$$\frac{dq_1}{Q_1} = \dots = \frac{d\omega}{Q_{n+1}},$$

т. е.

$$\Phi = F[\alpha_1(q, \omega), \dots, \alpha_n(q, \omega)].$$

Приравнявая ее нулю и разрешая относительно  $\omega$ , и получаем решение исходного неоднородного уравнения.

*Пример.* Найти инвариантные семейства группы вращения:

$$U = q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial}{\partial q_2}.$$

Условие инвариантного семейства

$$U\omega = q_2 \frac{\partial \omega}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial \omega}{\partial q_2} = 1.$$

Этому уравнению соответствует следующее однородное уравнение:

$$q_2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = 0.$$

Эквивалентная система обыкновенных уравнений

$$\frac{dq_1}{q_2} = \frac{dq_2}{-q_1} = \frac{d\omega}{1}$$

имеет следующие первые интегралы. Из уравнения

$$\frac{dq_1}{q_2} = \frac{dq_2}{-q_1}$$

находим

$$\alpha_1 = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}.$$

Из уравнения

$$\frac{d\omega}{1} = \frac{dq_1}{\sqrt{\alpha_1^2 - q_1^2}}$$

получаем

$$\alpha_2 = \omega - \arcsin \frac{q_1}{\alpha_1} = \omega - \arcsin \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} = \omega - \operatorname{arctg} \frac{q_1}{q_2}.$$

Общее решение однородного уравнения есть

$$\Phi = F(\alpha_1, \alpha_2) = F\left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \omega - \operatorname{arctg} \frac{q_1}{q_2}\right).$$

Приравнявая его нулю и разрешая относительно  $\omega$ , имеем

$$\omega = \operatorname{arctg} \frac{q_1}{q_2} + P(q_1^2 + q_2^2),$$

где  $P$  — произвольная функция.

Если  $P \equiv 0$ , то  $\arctg(q_1/q_2) = C$  определяет пучок прямых, проходящих через начало координат. Если  $P = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$ , то  $\arctg(q_1/q_2) + \sqrt{q_1^2 + q_2^2} = C$  определяет семейство спиралей Архимеда.

## § 51. Канонические координаты группы

Вид оператора однопараметрической группы  $U = \sum_i \eta_i(q) \partial / \partial q_i$ , действующей в пространстве переменных  $q$ , зависит от выбора координат  $q$ . Выясним, как изменится этот вид, если от координат  $q$  перейти к координатам  $r$  по формулам

$$r = R(q).$$

Пусть в новых координатах оператор имеет вид

$$\tilde{U} = \sum_i \tilde{\eta}_i(r) \frac{\partial}{\partial r_i}.$$

Ему соответствуют дифференциальные уравнения группы

$$\frac{dr'}{d\tau} = \tilde{\eta}(r').$$

Запишем для каждой из компонент функции  $R(q')$  уравнение Ливилля

$$\frac{dR_i}{d\tau} = U R_i,$$

откуда следует

$$\tilde{\eta}_i(r') = U R_i|_{q'=R^{-1}(r')}.$$

Таким образом, формула замены переменных в операторе имеет следующий вид:

$$\tilde{U} = \sum_i (U R_i) \frac{\partial}{\partial r_i},$$

в которой после применения оператора в старых переменных к уравнениям замены  $R(q)$  переменные  $q$  следует выразить через  $r$ , используя обратную замену  $q = R^{-1}(r)$ .

*Пример.* Выразить оператор

$$U = q_1^2 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_1 q_2 \frac{\partial}{\partial q_2}$$

в полярных координатах  $(q_1, q_2) \rightarrow (r, \varphi)$ :

$$r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{q_2}{q_1}, \quad q_1 = r \cos \varphi, \quad q_2 = r \sin \varphi.$$

Последовательно находим

$$\begin{aligned} Ur &= q_1 \sqrt{q_1^2 + q_2^2} = r^2 \cos \varphi, \\ U\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Вид оператора в полярных координатах таков:

$$\tilde{U} = r^2 \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r}.$$

*Канонические координаты группы.* Естественно поставить вопрос о нахождении таких координат, в которых группа имела бы простейший вид. Для этого потребуем в  $\tilde{U} = \sum_i (UR_i) \partial / \partial r_i$  чтобы выполнялось:

$$UR_1 = 1, \quad UR_i = 0 \quad (i \neq 1).$$

Функции  $R_i(q)$  ( $i = 2, \dots, n$ ) представляют собой  $n - 1$  функционально независимых инвариантов рассматриваемой группы, которые всегда существуют. Это следует из известной теоремы из теории обыкновенных дифференциальных уравнений о том, что система уравнений  $n$ -го порядка в окрестности любой неособой точки имеет ровно  $n - 1$  локальных первых интегралов. Функция  $R_1(q)$  определяет инвариантное семейство гиперповерхностей.

Рассматривая функцию, определяющую инвариантное семейство, совместно с  $n - 1$  инвариантом группы в качестве новых переменных, мы приходим к простейшему виду оператора данной группы:

$$\tilde{U} = \frac{\partial}{\partial r_1},$$

представляющего собой оператор группы трансляций.

Сам результат о подобии любой одночленной группы группе параллельных переносов вдоль одной из осей эквивалентен теореме о выпрямлении векторного поля.

Координаты, в которых заданная группа является группой трансляций, называются *каноническими*.

Заметим, что функция, определяющая инвариантное семейство и удовлетворяющая уравнению  $UR_1 = 1$ , является логарифмом любой собственной функции. Действительно, пусть  $P(q)$  — собственная функция, а  $\lambda(q)$  — собственное значение:  $UP(q) = \lambda(q)P(q)$ . Определим  $R_1$  как  $R_1 = \ln P(q)$ . Тогда

$$UR_1 = \frac{1}{P(q)} UP(q) = \lambda(q).$$

Поскольку  $\lambda(q)$  — инвариант, то в новых переменных это просто константа, которую можно считать равной единице. Вопрос о знаке  $P(q)$  не имеет значения, поскольку, если  $P(q)$  — собственная функция,

то  $P^2(q)$  тоже собственная, т. е. всегда существуют положительные собственные функции.

Таким образом, роль канонических координат группы играет логарифм собственной функции ее оператора и  $n - 1$  независимых инвариантов.

## § 52. Формула Хаусдорфа. Группы симметрий

В § 49 было выяснено, как преобразуется функция, заданная в некоторой области пространства, однопараметрической группой преобразований. Результат был представлен в двух формах: уравнение Лиувилля и ряд Ли. В обеих формах приведенные соотношения связывали выражение рассматриваемой функции в старых координатах, ее выражение в новых координатах и оператор группы преобразований старых координат в новые.

В настоящем параграфе рассматривается аналогичная задача, однако объектом преобразования является уже не функция, а система дифференциальных уравнений

$$\frac{dq}{dt} = K(q).$$

Пусть задана группа преобразований  $q \rightarrow q'$ :

$$q' = Q(q, \tau).$$

Требуется выяснить, как преобразуется в результате этой замены написанная система дифференциальных уравнений. В терминах операторов групп задача формулируется так. Оператор группы, порождаемой дифференциальной системой, имеет вид

$$A = \sum K_i(q) \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Оператор группы преобразований:

$$U = \sum \eta_i(q) \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

В новых переменных дифференциальная система принимает вид

$$\frac{dq'}{dt} = \tilde{K}(q')$$

с оператором

$$\tilde{A} = \sum \tilde{K}_i(q') \frac{\partial}{\partial q'_i}.$$

Необходимо установить связь между  $A$ ,  $\tilde{A}$  и  $U$ .

Решение этой задачи дается формулой Хаусдорфа, к выводу которой мы приступаем. Запишем преобразования, задаваемые группой, и им обратные в экспоненциальной форме (см. § 49):

$$q' = e^{\tau U} q, \quad q = e^{-\tau U} q'.$$

Напомним, что в этих выражениях в случае прямого преобразования  $U = \sum \eta_i(q) \partial / \partial q_i$ , а в случае обратного в этом операторе формально вместо старых переменных надо писать новые:

$$U = \sum \eta_i(q') \frac{\partial}{\partial q'_i}.$$

Используя формулы замены переменных в операторе, установленные в предыдущем параграфе, перейдем в операторе  $\tilde{A}$  обратно от новых переменных к старым:

$$A \sum (\tilde{A} q_i) \frac{\partial}{\partial q_i} = \sum (\tilde{A} e^{-\tau U} q'_i) \frac{\partial}{\partial q'_i}.$$

Компоненты оператора  $A$  в этой формуле являются функциями новых переменных. Заменяя их на старые, получаем компоненты исходного оператора  $A$ :

$$\tilde{A} e^{-\tau U} q'_i \Big|_{q'_i = e^{\tau U} q_i} = \eta_i(q).$$

Эти выражения не зависят от  $\tau$ , поэтому

$$\frac{d}{d\tau} (\tilde{A} e^{-\tau U} q'_i) = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tau} e^{-\tau U} q'_i - \tilde{A} U e^{-\tau U} q'_i + U \tilde{A} e^{-\tau U} q'_i = 0.$$

Первый и второй члены этого соотношения получены дифференцированием по явно входящему  $\tau$ . Третий член представляет собой дифференцирование по  $\tau$  функции, зависящей от  $q'$ , которая, в свою очередь, зависит от  $\tau$ :  $q' = e^{\tau U} q$ . В результате получаем:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tau} = \tilde{A} U - U \tilde{A} = [\tilde{A}, U].$$

К этому уравнению следует добавить начальное условие

$$\tilde{A}(q', \tau) \Big|_{\tau=0} = A(q'),$$

чтобы получить искомую связь между  $A$ ,  $\tilde{A}$  и  $U$ .

Уравнение  $\partial \tilde{A} / \partial \tau = [\tilde{A}, U]$ , определяющее преобразованный оператор  $\tilde{A}$ , является аналогом уравнения Лиувилля, определяющего преобразованную функцию. Оно раскрывает смысл второго названия для коммутатора — производный оператор: коммутатор есть в буквальном



смысле слова производная оператора  $\tilde{A}$  по параметру группы, определяемой оператором  $U$ .

Приведенная начальная задача Коши для операторного уравнения решается при помощи разложения  $\tilde{A}(q', \tau)$  в ряд Тейлора по  $\tau$ :

$$\tilde{A}(q', \tau) = A(q') + \tau \left. \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} + \frac{\tau^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0} + \dots$$

Последовательно находим:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} &= [\tilde{A}, U]_{\tau=0} = [A, U], \\ \left. \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial \tau} [\tilde{A}, U], U \right|_{\tau=0} = [[\tilde{A}, U], U]_{\tau=0} = [[A, U], U] \end{aligned}$$

и так далее.

В результате приходим к формуле Хаусдорфа:

$$\tilde{A} = A + \tau[A, U] + \frac{\tau^2}{2!} [[A, U], U] + \dots$$

Из этой формулы следует, что если  $[A, U] = 0$ , то  $\tilde{A} = A$ , т.е. группа с оператором  $U$  не изменяет оператора  $A$  (или соответствующих ему дифференциальных уравнений).

Группа  $q' = Q(q, \tau)$  в этом случае называется *группой симметрий* дифференциальной системы  $dq/dt = K(q)$ . Или, говоря иначе: дифференциальная система допускает группу. Если уравнения преобразованиями группы симметрий не изменяются, то это означает, что любые решения этих уравнений группой симметрий переводятся в решения этих же уравнений. Этот факт может служить другим определением группы симметрий. При этом для эквивалентного дифференциальной системе  $dq/dt = K(q)$  уравнения Лиувилля  $\partial \tilde{F}/\partial t = A\tilde{F}$  имеет место следующее. Если  $\tilde{F}(q, t)$  — решение этого уравнения, то  $U\tilde{F}(q, t)$  — тоже решение. То есть решения уравнения Лиувилля переводятся в его же решения оператором группы симметрий.

Полезность установления симметрий дифференциальной системы демонстрирует следующая теорема.

*Теорема.* Пусть задана система

$$\frac{dq}{dt} = K(q).$$

Если известна группа симметрий этой системы с оператором

$$U = \sum_i \eta_i(q) \frac{\partial}{\partial q_i},$$

то заданная система может быть понижена в порядке.

*Доказательство.* Укажем алгоритм понижения порядка. Группа, порождаемая оператором  $U$ , предполагается известной в такой степени, что известны ее канонические координаты

$$r = R(q),$$

в которых оператор  $U$  имеет простейший вид:  $\tilde{U} = \partial/\partial r_1$ . Но тогда условие  $[A, U] = 0$  переходит в условие

$$[\tilde{A}, \tilde{U}] = \left[ \tilde{A}, \frac{\partial}{\partial r_1} \right] = 0.$$

Последний коммутатор сводится к дифференцированию компонент оператора  $\tilde{A}$  по  $r_1$ . Равенство нулю означает при этом, что в канонических координатах группы  $U$  оператор  $\tilde{A}$  (а следовательно, и дифференциальная система, соответствующая ему) от переменной  $r_1$  не зависит.

*Пример.* Понизить порядок уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \mathcal{M}(t) \frac{dy}{dt} + \mathcal{N}(t)y = 0.$$

Вначале приведем это уравнение к виду системы уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = -\mathcal{M}(x)z - \mathcal{N}(x)y.$$

Одна из групп симметрий этой системы очевидна. Она связана с изменением масштаба измерения переменной  $y$ . Это группа растяжений:

$$x' = x, \quad y' = ky = (1 + \mu)y, \quad z' = kz = (1 + \mu)z.$$

Следовательно, операторы  $A$  и  $U$  имеют вид

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} - [\mathcal{M}(x)z + \mathcal{N}(x)y] \frac{\partial}{\partial z},$$

$$U = y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Можно проверить, что  $[A, U] = 0$ .

Разыскиваем канонические координаты группы  $U$ :

$$p = p(x, y, z), \quad q = q(x, y, z), \quad r = r(x, y, z),$$

исходя из условий

$$Up = 1, \quad Uq = 0, \quad Ur = 0,$$

для чего, в соответствии с процедурой, изложенной в § 51, разыскиваем первые интегралы системы

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{dp}{1}.$$

Отсюда:  $p = \ln y$ ,  $q = z/y$ ,  $r = x$ . Находим выражение для оператора  $A$  в новых переменных:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= (Ap)\frac{\partial}{\partial p} + (Aq)\frac{\partial}{\partial q} + (Ar)\frac{\partial}{\partial r} = \\ &= \frac{z}{y}\frac{\partial}{\partial p} - \left\{ \frac{1}{y}[\mathcal{M}(x)z + \mathcal{N}(x)y] + \frac{z^2}{y^2} \right\} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial r}.\end{aligned}$$

Или, выражая  $x, y, z$  через  $p, q, r$ :

$$\tilde{A} = q\frac{\partial}{\partial p} - [\mathcal{M}(r)q + \mathcal{N}(r) + q^2]\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial r}.$$

Иными словами, в новых переменных исходная дифференциальная система имеет вид

$$\dot{p} = q, \quad \dot{q} = \mathcal{N}(r) + \mathcal{M}(r)q + q^2, \quad \dot{r} = 1,$$

т. е. задача сведена к интегрированию уравнения Риккати.

Заметим, что приведенный способ понижения порядка требует знания канонических координат группы симметрий. Однако есть случаи, когда для этого достаточно лишь знания оператора группы. Например, это возможно, когда размерность системы равна двум. Рассмотрим этот случай. Пусть имеем систему

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

с оператором

$$A = X(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Y(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

и пусть известен оператор ее группы симметрий:

$$U = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

про который будем дополнительно предполагать, что он является линейно несвязанным с оператором  $A$ . (Условие линейной несвязанности является более жестким, чем условие линейной независимости, и определяется так: операторы  $U_1, \dots, U_k$  называются линейно несвязанными, если не существует таких  $\lambda_1(q), \dots, \lambda_k(q)$ , не всех тождественно равных нулю, что

$$\lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_n U_n = 0.$$

В отличие от определения линейной независимости здесь коэффициенты  $\lambda$  могут зависеть от переменных  $q$ .)

Пусть  $\omega(x, y)$  — первый интеграл рассматриваемой системы. Это значит, что

$$A\omega(x, y) = 0.$$

Поскольку группа симметрий переводит решения в решения, то семейство интегральных кривых  $\omega(x, y) = C$  должно быть инвариантным семейством группы:

$$U\omega(x, y) = 1.$$

Эти два соотношения образуют систему

$$\begin{aligned} X(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial x} + Y(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial y} &= 0, \\ \xi(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial y} &= 1. \end{aligned}$$

Разрешая эту систему, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= - \frac{Y(x, y)}{X(x, y)\eta(x, y) - Y(x, z)\xi(x, y)}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{X(x, y)}{X(x, y)\eta(x, y) - Y(x, z)\xi(x, y)}. \end{aligned}$$

Отсюда первый интеграл исходной системы находится квадратурой

$$\omega(x, y) = \int \frac{X(x, y)dy - Y(x, y)dx}{X(x, y)\eta(x, y) - Y(x, y)\xi(x, y)}.$$

Аналогичный результат имеет место и в случае произвольной размерности. В книге Н. Г. Чеботарева<sup>1)</sup> он сформулирован так.

*Теорема.* Если система  $dq/dt = K(q)$  допускает  $(n - 1)$ -параметрическую разрешимую группу, операторы которой  $U_1, \dots, U_{n-1}$  вместе с оператором  $A$  составляют линейно несвязанную систему, то рассматриваемая дифференциальная система интегрируется в квадратурах.

Термин «разрешимая группа» как раз и происходит от возможности использования таких групп для интегрирования в квадратурах систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Не приводя точного определения понятия «разрешимая группа», приведем критерий, позволяющий установить наличие этого свойства:  $n$ -параметрическая группа разрешима тогда и только тогда, когда ее структурные константы (см. § 47) связаны условием

$$C_{i\lambda}^{\mu} C_{j\mu}^{\nu} C_{k\nu}^{\lambda} = C_{i\mu}^{\lambda} C_{j\nu}^{\mu} C_{k\lambda}^{\nu} \quad (i, j, k = 1, \dots, n)$$

(по  $i, j, k$  — суммирование (Картан)).

*Расширение понятия группы симметрий.* Вернемся к системе

$$\frac{dq}{dt} = K(q)$$

с оператором  $A$ .

<sup>1)</sup> Чеботарев Н. Г. Теория групп Ли. — М.: ГИТТЛ, 1940.

Пусть дана группа с оператором  $U$  таким, что имеет место

$$[A, U] = \lambda_1(q)A.$$

Используя формулу Хаусдорфа, выясним, как в этом случае изменяется рассматриваемая дифференциальная система. Последовательно найдем

$$\begin{aligned} [[A, U], U] &= [\lambda_1 A, U] = \lambda_1 AU - U(\lambda_1 A) = \lambda_1 AU - \lambda_1 UA - (U\lambda_1)A = \\ &= \lambda_1[A, U] - (U\lambda_1)A = (\lambda_1^2 - (U\lambda_1))A = \lambda_2 A, \end{aligned}$$

где  $\lambda_2 = \lambda_1^2 - (U\lambda_1)$ .

Аналогично и для других членов ряда. Следовательно, формула Хаусдорфа дает

$$\tilde{A} = \lambda(q)A.$$

Таким образом, система  $\dot{q} = K(q)$  группой  $q' = Q(q, \tau)$  в этом случае приводится к виду

$$\frac{dq'}{dt} = \lambda(q')K(q').$$

Хотя уравнения и изменились, но фазовые траектории остались теми же, поскольку общий для всей правой части множитель  $\lambda(q')$  сокращается при делении всех уравнений системы на одно из них.

Группа, удовлетворяющая условию  $[A, U] = \lambda A$ , также называется группой симметрий. Она переводит фазовые траектории в фазовые траектории.

*Теорема.* Если дифференциальная система допускает группу симметрий в расширенном смысле, то эта система может быть понижена в порядке.

*Доказательство.* Выполним переход к каноническим координатам группы  $U$ :  $q \rightarrow r$ . Тогда  $\tilde{U} = \partial/\partial r_1$  и условие расширенной симметрии приобретает вид

$$\left[ \tilde{A}, \frac{\partial}{\partial r_1} \right] = \tilde{\lambda} \tilde{A} \quad \text{или} \quad -\frac{\partial \tilde{A}}{\partial r_1} = \tilde{\lambda} \tilde{A}.$$

В терминах компонент оператора  $\tilde{A}$  это запишется:

$$-\frac{\partial \tilde{K}_i}{\partial r_1} = \tilde{\lambda} \tilde{K}_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Разделив все эти уравнения на первое, получаем:

$$\frac{\partial \tilde{K}_i}{\partial K_1} = \frac{\tilde{K}_i}{\tilde{K}_1} \quad (i = 2, \dots, n).$$

Или, интегрируя, находим

$$\tilde{K}_i = C_i \tilde{K}_1 \quad (i = 2, \dots, n).$$

Константа  $C_i$  зависит от всех остальных переменных, кроме  $r_1$ :  $C_i(r_2, \dots, r_n)$ .

На полученное означает, что в канонических координатах группы  $U$  рассматриваемая система приобретает вид

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 &= \tilde{K}_1, \\ \dot{r}_i &= C_i(r_2, \dots, r_n) \tilde{K}_1 \quad (i = 2, \dots, n).\end{aligned}$$

Разделив все уравнения на первое, приходим к системе меньшего порядка.

*Пример.* Уравнение Блазиуса:

$$y \frac{d^2 y}{dt^2} + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{t}{2} \frac{dy}{dt} = 0.$$

Требуется понизить порядок.

Приведем предварительно это уравнение к нормальной форме Коши автономной системы:

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{z^2}{y} - \frac{xz}{2y}$$

с оператором

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} - \left( \frac{z^2}{y} + \frac{xz}{2y} \right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Ищем группу симметрий при помощи изменения масштаба:

$$\begin{aligned}x &= kx', \quad y = my', \quad z = sz', \\ \frac{dx'}{dt} &= \frac{1}{k}, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{s}{m} z', \quad \frac{dz'}{dt} = -\frac{s}{m} \frac{z'^2}{y'} - \frac{k}{m} \frac{x' z'}{2y'}.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что правая часть этих уравнений приобретает одинаковый для всех скалярный множитель, если  $s = k$  и  $1/k = s/m$ .

Следовательно, однопараметрическая группа симметрий (в расширенном смысле) имеет вид

$$x = kx', \quad y = k^2 y', \quad z = kz'$$

или

$$x' = (1 + \mu)x, \quad y' = (1 + 2\mu + \dots)y, \quad z' = (1 + \mu)z.$$

Оператор этой группы

$$U = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Коммутатор операторов  $A$  и  $U$  в этом примере равен

$$[A, U] = A.$$

Для понижения порядка системы достаточно перейти от переменных, в которых она записана, к переменным, являющимся каноническими координатами ее группы симметрий  $(x, y, z) \rightarrow (p, q, r)$ :

$$x \frac{\partial p}{\partial x} + 2y \frac{\partial p}{\partial y} + z \frac{\partial p}{\partial z} = 1,$$

$$x \frac{\partial q}{\partial x} + 2y \frac{\partial q}{\partial y} + z \frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$

$$x \frac{\partial r}{\partial x} + 2y \frac{\partial r}{\partial y} + z \frac{\partial r}{\partial z} = 0.$$

Эта система представляет собой полную запись условий, которым должны удовлетворять канонические координаты, однако при практических вычислениях выписывать два нижних уравнения не требуется, поскольку все необходимые интегралы получаются уже из первого уравнения:

$$p = \ln x, \quad q = \frac{x^2}{y}, \quad r = \frac{x}{r}.$$

Обратная замена:

$$x = e^p, \quad y = \frac{e^{2p}}{q}, \quad z = \frac{e^p}{r}.$$

Осталось найти вид оператора  $A$  в новых переменных:

$$\tilde{A} = e^{-p} \left[ \frac{\partial}{\partial p} + \left( 2q - \frac{q^2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial q} + \left( r + q + \frac{rq}{2} \right) \frac{\partial}{\partial r} \right].$$

Следовательно, исходные уравнения в новых переменных приобретают вид

$$\frac{dp}{dt} = e^{-p}, \quad \frac{dq}{dt} = e^{-p} \left( 2q - \frac{q^2}{r} \right),$$

$$\frac{dr}{dt} = e^{-p} \left( r + q + \frac{rq}{2} \right).$$

В этом примере видно, в чем состоит отличие случая, когда  $[A, U] = 0$ , от случая, когда  $[A, U] = \lambda A$ . В первом случае при переходе к каноническим координатам система теряет зависимость от одной из переменных, во втором — зависимость от одной из переменных присутствует лишь в виде общего скалярного множителя при всей правой части (в этом примере  $e^{-p}$ ), что не мешает понижению порядка:

$$\frac{dq}{dp} = 2q - \frac{q^2}{r}, \quad \frac{dr}{dp} = q + r + \frac{qr}{2}.$$

### § 53. Принцип суперпозиции решений в нелинейных системах дифференциальных уравнений

Рассмотрим две системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = f_1(q_1, \dots, q_n), \\ \dots \\ \frac{dq_n}{dt} = f_n(q_1, \dots, q_n) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{d\tau} = F_1(q_1, \dots, q_n), \\ \dots \\ \frac{dq_n}{d\tau} = F_n(q_1, \dots, q_n) \end{cases}$$

Или, в краткой записи:

$$\frac{dq}{dt} = f(q) \quad \text{и} \quad \frac{dq}{d\tau} = F(q).$$

Этим системам соответствуют группы

$$q' = u(q, t), \quad q' = v(q, \tau),$$

представляющие собой решения этих систем с начальными условиями

$$q'(0) = q.$$

Операторы этих групп:

$$\begin{aligned} A &= f_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial q_n} = f(q) \frac{\partial}{\partial q}, \\ B &= F_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \dots + F_n \frac{\partial}{\partial q_n} = F(q) \frac{\partial}{\partial q}. \end{aligned}$$

Рассмотрим композицию пробразований из разных групп, т. е. пусть

$$q' = u(q, t), \quad q'' = v(q', \tau) = v[u(q, t), \tau].$$

Выполним эти же преобразования (при тех же фиксированных  $t$  и  $\tau$ ), но в обратном порядке:

$$q' = v(q, t), \quad q'' = u(q', \tau) = u[v(q, t), \tau].$$

Зададимся вопросом, когда композиция не зависит от порядка выполнения преобразований? Если такое случается, то говорят, что указанные две группы коммутируют:

$$v[u(q, t), \tau] \equiv u[v(q, \tau), t].$$

*Утверждение 1.* Группы коммутируют тогда и только тогда, когда коммутируют их операторы.

*Доказательство.* Воспользуемся экспоненциальным представлением групп (§ 48):

$$\begin{aligned} u[v(q, \tau), t] &= e^{At} v(q, \tau) = e^{At} e^{B\tau} q, \\ v[u(q, t), \tau] &= e^{B\tau} u(q, t) = e^{B\tau} e^{At} q. \end{aligned}$$



Следовательно, группы коммутируют, если

$$e^{At}e^{B\tau} = e^{B\tau}e^{At}.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$AB = BA \quad (\text{или} \quad [A, B] = 0).$$

*Утверждение 2.* Если группы коммутируют, то их композиция есть также группа при условии отождествления параметров  $t = \tau$ , т. е.  $u[v(q, t), t]$  — группа. Справедливость этого утверждения следует из того, что при условии коммутирования имеем

$$u[v(q, t), t] = e^{At}e^{Bt}q = e^{Bt}e^{At}q = e^{(A+B)t}q.$$

Стоящая в правой части экспонента представляет собой группу с оператором  $A + B$ .

*Теорема* (Принцип суперпозиции в нелинейных системах). Если система дифференциальных уравнений

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = f(q) + F(q)$$

такова, что операторы систем  $\dot{q} = f(q)$  и  $\dot{q} = F(q)$  коммутируют:  $[A, B] = 0$ , то решение этой системы является суперпозицией решений систем  $\dot{q} = f(q)$  и  $\dot{q} = F(q)$ :

$$q = u[v(q_0, t), t] = v[u(q_0, t), t],$$

где  $q_0$  — начальное условие.

*Доказательство* вытекает из доказанных утверждений.

*Пример.* Пусть имеем систему

$$\dot{x} = kx + \lambda y, \quad \dot{y} = ky - \lambda x.$$

Разобьем ее на две системы так:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \dot{x} = kx, \quad \dot{y} = ky; \\ (2) \quad & \dot{x} = \lambda y, \quad \dot{y} = -\lambda x. \end{aligned}$$

Операторы составляющих систем

$$A = k \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad B = \lambda \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

коммутируют:  $[A, B] = 0$ .

Решение системы (1):

$$x = x_0 \exp(kt), \quad y = y_0 \exp(kt).$$

Решение системы (2):

$$x = x_0 \cos \lambda t + y_0 \sin \lambda t, \quad y = -x_0 \sin \lambda t + y_0 \cos \lambda t.$$

Решение полной системы есть суперпозиция этих решений в любом порядке (вместо начальных данных одной системы ставятся решения другой):

$$x = e^{kt}(x_0 \cos \lambda t + y_0 \sin \lambda t), \quad y = e^{kt}(-x_0 \sin \lambda t + y_0 \cos \lambda t).$$

## § 54. Теория продолжения

На задачу преобразования дифференциальных уравнений можно посмотреть несколько иначе, чем это было сделано в § 52. Пусть, к примеру, требуется выяснить, как изменяется группой система дифференциальных уравнений, записанная в следующей форме:

$$F(t, q, \dot{q}) = 0,$$

где  $t$  — независимая переменная (время),  $q$  и  $F$  —  $n$ -мерные векторы.

Пусть в пространстве  $(t, q)$  действует группа

$$\begin{aligned} t' &= t + \xi(t, q)\tau + \dots, \\ q' &= q + \eta(t, q)\tau + \dots \end{aligned}$$

Введем обозначение  $\dot{q} = p$  и будем рассматривать систему  $F(t, q, p)$  как уравнения многообразия в пространстве переменных  $(t, q, p)$ . Поскольку эти переменные по смыслу связаны, то и преобразование, которое индуцирует рассматриваемая группа в таком пространстве, будет целиком определяться коэффициентами  $\xi(t, q)$  и  $\eta(t, q)$ :

$$\begin{aligned} t' &= t + \xi(t, q)\tau + \dots, \\ q' &= q + \eta(t, q)\tau + \dots, \\ p' &= p + \zeta(t, q, p)\tau + \dots, \end{aligned}$$

где  $\zeta(t, q, p)$  должна определяться однозначно этими коэффициентами. По определению,

$$p' = \frac{dq'}{dt'} = \frac{dq'}{dt} \bigg/ \frac{dt'}{dt} = \frac{\dot{q} + \dot{\eta}\tau + \dots}{1 + \dot{\xi}\tau + \dots} = \dot{q} + (\dot{\eta} - \dot{q}\dot{\xi})\tau + \dots,$$

где  $\dot{\eta}$  и  $\dot{\xi}$  есть полные производные по  $t$ :

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial q} \dot{q}, \quad \dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial q} \dot{q}.$$

Следовательно,  $\zeta(t, q, p) = \dot{\eta} - p\dot{\xi}$ . Продолженная таким образом группа в пространстве переменных  $(t, p, q)$  называется группой первого продолжения, а ее оператор — оператором первого продолжения:

$$U^{(1)} = \xi(t, q) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(t, q) \frac{\partial}{\partial q} + \zeta(t, q, p) \frac{\partial}{\partial p}.$$

Аналогично можно рассмотреть преобразование систем уравнений, содержащих производные любых порядков.

Инварианты продолженной группы называются *дифференциальными инвариантами группы*.

*Пример.* Найти дифференциальные инварианты до второго порядка включительно группы вращений

$$U = q \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial q} \quad (q - \text{скаляр}).$$

Поскольку  $\xi = q$ , а  $\eta = -t$ , то

$$\zeta = \dot{\eta} - \dot{q}\xi = -1 - \dot{q}^2$$

и оператор первого продолжения имеет вид

$$U^{(1)} = q \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial q} - (1 + \dot{q}^2) \frac{\partial}{\partial \dot{q}}.$$

Для нахождения оператора второго продолжения имеем

$$\ddot{q}' = \frac{d\dot{q}'}{dt'} = \frac{d\dot{q}'}{dt} \bigg/ \frac{dt'}{dt} = \ddot{q} + (\dot{\zeta} - \ddot{q}\xi)\tau + \dots,$$

откуда

$$\delta(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) = \dot{\zeta} - \ddot{q}\xi = -2\dot{q}\ddot{q} - \dot{q}\ddot{q} = -3\dot{q}\ddot{q}.$$

Следовательно, оператор второго продолжения таков:

$$U^{(2)} = q \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial q} - (1 + \dot{q}^2) \frac{\partial}{\partial \dot{q}} - 3\dot{q}\ddot{q} \frac{\partial}{\partial \ddot{q}}.$$

Нахождение дифференциальных инвариантов сводится к нахождению первых интегралов следующей системы:

$$\frac{dt}{-q} = \frac{dq}{t} = \frac{d\dot{q}}{1 + \dot{q}^2} = \frac{d\ddot{q}}{3\dot{q}\ddot{q}}.$$

Из первого уравнения  $C_1 = \sqrt{t^2 + q^2}$ . Из уравнения

$$\frac{dq}{\sqrt{C_1^2 - q^2}} = \frac{d\dot{q}}{1 + \dot{q}^2}$$

получаем

$$C_2 = \arctg \frac{q}{t} - \arctg \dot{q}, \quad \operatorname{tg} C_2 = \frac{\dot{q} - q/t}{1 + q\dot{q}/t}.$$

Наконец, из уравнения

$$\frac{d\dot{q}}{1 + \dot{q}^2} = \frac{d\ddot{q}}{3\dot{q}\ddot{q}}$$

находим

$$C_3 = [1 + \dot{q}^2]^{3/2} / \ddot{q}.$$

Этот инвариант имеет смысл кривизны кривой.

*Интегральные инварианты.* Рассмотрим следующие три типа интегралов:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t, q, \dot{q}, \dots) dt, & \mathcal{J}_2 &= \oint_{\gamma} \Phi_k(q) dq_k, \\ \mathcal{J}_3 &= \int \dots \int_V \Phi(q) dq_1 \dots dq_n. \end{aligned}$$

Интеграл  $\mathcal{J}_1$  представляет собой функционал на траекториях  $q(t)$ . В интеграле  $\mathcal{J}_2$  имеется в виду суммирование по  $k$ .

Пусть имеем группу отображений:

$$\begin{aligned} t' &= t + \xi(t, q)\tau + \dots, \\ q' &= q + \eta(t, q)\tau + \dots \end{aligned}$$

Вычислим указанные интегралы в новых переменных, но с теми же подынтегральными функциями:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'_1 &= \int_{t'_1}^{t'_2} \Phi(t', q', \dot{q}', \dots) dt', & \mathcal{J}'_2 &= \oint_{\gamma'} \Phi_k(q') dq'_k, \\ \mathcal{J}'_3 &= \int \dots \int_{V'} \Phi(q') dq'_1 \dots dq'_n. \end{aligned}$$

В общем случае эти интегралы становятся функциями  $\tau$ :

$$\mathcal{J}'_1(\tau), \quad \mathcal{J}'_2(\tau), \quad \mathcal{J}'_3(\tau).$$

*Определение.* Указанные интегралы называются *интегральными инвариантами* рассматриваемой группы, если

$$\mathcal{J}'_1(\tau) \equiv \mathcal{J}_1, \quad \mathcal{J}'_2(\tau) \equiv \mathcal{J}_2, \quad \mathcal{J}'_3(\tau) \equiv \mathcal{J}_3.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{d\mathcal{J}'_1}{d\tau} \equiv 0, \quad \frac{d\mathcal{J}'_2}{d\tau} \equiv 0, \quad \frac{d\mathcal{J}'_3}{d\tau} \equiv 0.$$

Найдем, каким условиям должны удовлетворять функции  $\Phi(t, q, \dot{q}, \dots)$ ,  $\Phi_k(q)$ ,  $\Phi(q)$ , чтобы соответствующие интегралы были интегральными инвариантами заданной группы.

Начнем с первого интеграла и рассмотрим малое приращение параметра группы  $\tau + \delta\tau$ :

$$\mathcal{J}'_1(\tau + \delta\tau) = \int_{t'_1(\tau + \delta\tau)}^{t'_2(\tau + \delta\tau)} \Phi[t'(\tau + \delta\tau), q'(\tau + \delta\tau), \dots] dt'(\tau + \delta\tau).$$

В полученном интеграле выполним замену переменных

$$t'(\tau + \delta\tau) \rightarrow t'(\tau), \quad q'(\tau + \delta\tau) \rightarrow q'(\tau)$$

по формулам

$$\begin{aligned} t'(\tau + \delta\tau) &= t'(\tau) + \frac{dt'}{d\tau} \delta\tau + \dots, \\ q'(\tau + \delta\tau) &= q'(\tau) + \frac{dq'}{d\tau} \delta\tau + \dots \end{aligned}$$

Поскольку, в силу теоремы единственности группы (§ 48),

$$\frac{dt'}{d\tau} = \xi(t', q'), \quad \frac{dq'}{d\tau} = \eta(t', q'),$$

то написанный интеграл приобретает вид

$$\mathcal{J}'_1(\tau + \delta\tau) = \int_{t'_1}^{t'_2} \left[ \Phi(t', q', \dot{q}', \dots) + \frac{d\Phi}{d\tau} \delta\tau + \dots \right] d(t' + \xi(t', q') \delta\tau + \dots).$$

Учитывая, что  $d\Phi/d\tau = {}^{(n)}U \Phi$ , получаем

$$\mathcal{J}'_1(\tau + \delta\tau) = \int_{t'_1}^{t'_2} \Phi(t', q', \dots) dt' + \delta\tau \int_{t'_1}^{t'_2} \left[ {}^{(n)}U \Phi + \frac{d\xi}{dt'} \Phi \right] dt' + \dots$$

Отсюда следует:

$$\lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}'_1(\tau + \delta\tau) - \mathcal{J}'_1(\tau)}{\delta\tau} \equiv \frac{d\mathcal{J}'_1}{d\tau} = \int_{t'_1}^{t'_2} \left( {}^{(n)}U \Phi + \dot{\xi} \Phi \right) dt'.$$

Для того чтобы на любых траекториях  $q'(t')$  было  $d\mathcal{J}'_1/d\tau = 0$ , необходимо и достаточно

$${}^{(n)}U \Phi(t', q', \dot{q}', \dots) + \dot{\xi}(t', q') \Phi(t', q', \dot{q}', \dots) = 0.$$

Поскольку это выражение явно от  $\tau$  не зависит, то  $t'$ ,  $q'$  имеют смысл немых переменных, и штрихи можно опустить:

$$^{(n)}U\Phi + \dot{\xi}\Phi = 0.$$

Последнее соотношение и выражает собой критерий интегрального инварианта  $\mathcal{J}_1$ .

При вычислении производных по параметру группы от  $\mathcal{J}'_2$  и  $\mathcal{J}'_3$  поступаем совершенно аналогично. Поскольку в подынтегральных функциях время не присутствует, то и в группе преобразований можно положить  $\xi(t, q) \equiv 0$ . В результате находим

$$\frac{d\mathcal{J}'_2}{d\tau} = \oint_{\gamma'} \left( \eta_l \frac{\partial \Phi_k}{\partial q'_l} + \Phi_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q'_k} \right) dq'_k$$

(по  $l, i, k$  — суммирование),

$$\frac{d\mathcal{J}'_3}{d\tau} = \int \dots \int_{V'} (U\Phi + \Phi \operatorname{div} \eta) dq'_1 \dots dq'_n.$$

Отсюда и следует критерий инвариантности  $\mathcal{J}'_2$ :

$$\frac{\partial}{\partial q_s} \left( \eta_l \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_l} + \Phi_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \eta_l \frac{\partial \Phi_s}{\partial q_l} + \Phi_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q_s} \right)$$

и критерий инвариантности  $\mathcal{J}'_3$ :

$$U\Phi + \Phi \operatorname{div} \eta = 0.$$

*Пример.* Найти интегральные инварианты вида  $\mathcal{J}_1$  группы вращений.

Продолженный оператор группы имеет вид

$$^{(n)}U = q \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial q} - (1 + \dot{q}^2) \frac{\partial}{\partial \dot{q}} - 3\dot{q}\ddot{q} \frac{\partial}{\partial \ddot{q}} + \dots$$

Условие инвариантности  $\mathcal{J}_1$ :

$$^{(n)}U\Phi + \dot{\xi}\Phi = q \frac{\partial \Phi}{\partial t} - t \frac{\partial \Phi}{\partial q} - (1 + \dot{q}^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} - 3\dot{q}\ddot{q} \frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{q}} + \dots + \dot{q}\Phi = 0.$$

Соответствующая система обыкновенных уравнений:

$$\frac{dt}{-q} = \frac{dq}{t} = \frac{d\dot{q}}{1 + \dot{q}^2} = \frac{d\ddot{q}}{3\dot{q}\ddot{q}} = \dots = \frac{d\Phi}{\dot{q}\Phi}.$$

Уравнения, не содержащие  $\Phi$ , позволяют вычислить дифференциальные инварианты до  $n$ -го порядка включительно:

$$C_1 = \sqrt{t^2 + q^2}, \quad C_2 = \frac{t\dot{q} - q}{t + q\dot{q}}, \quad C_3 = \frac{(1 + \dot{q}^2)^{3/2}}{\ddot{q}}, \dots$$

Из уравнения  $d\dot{q}/(1 + \dot{q}^2) = d\Phi/(\dot{q}\Phi)$  находим  $\Phi = C\sqrt{1 + \dot{q}^2}$  или

$$C = \frac{\Phi}{\sqrt{1 + \dot{q}^2}}.$$

Общее решение уравнения, выражающего условие инвариантности  $\mathcal{J}'_1$ , есть функция  $\Phi$ , которая находится из условия  $G(C_1, C_2, \dots, C) = 0$ , где  $G$  — произвольная функция найденных первых интегралов. Или, разрешая это соотношение относительно  $\Phi$ , получаем

$$\Phi = \sqrt{1 + \dot{q}^2} Q(C_1, C_2, \dots),$$

где  $Q$  — произвольная функция дифференциальных инвариантов.

Таким образом, общее выражение для интегрального инварианта  $\mathcal{J}_1$  группы вращений есть

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \dot{q}^2} Q(t^2 + q^2, \dots) dt.$$

В частности, при  $Q \equiv 1$  этот функционал выражает длину кривой.

## § 55. Уравнения, допускающие заданную группу

Теория продолжения оператора позволяет иначе сформулировать условие инвариантности дифференциальных уравнений относительно однопараметрической группы преобразований.

Пусть, к примеру, имеем дифференциальное уравнение, заданное в плоскости  $x, y$  и записанное в неявной форме:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Из результатов предыдущего параграфа ясно что, для того чтобы это уравнение было инвариантным относительно группы с оператором

$$U = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\stackrel{(1)}{U} F(x, y, p) = 0, \quad F(x, y, p) = 0,$$

т.е. уравнение  $F(x, y, p) = 0$  должно определять инвариантную поверхность один раз продолженной группы. Покажем эквивалентность этого критерия критерию  $[A, U] = \lambda A$  для системы в нормальной форме Коши:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y),$$

которую перепишем в неявной форме:

$$X(x, y)p - Y(x, y) = 0.$$

Применим к этому уравнению оператор первого продолжения:

$$\xi \left( \frac{\partial X}{\partial x} p - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) + \eta \left( \frac{\partial X}{\partial y} p - \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + \zeta(x, y, p)X = 0,$$

где

$$\zeta(x, y, p) = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)p - \xi_y p^2,$$

и оно должно быть выполнено на  $Xp - Y = 0$ .

Выражая отсюда  $p$  и подставляя его в полученное уравнение, находим

$$\begin{aligned} Y \left( \xi \frac{\partial X}{\partial x} + \eta \frac{\partial X}{\partial y} \right) - x \left( \xi \frac{\partial Y}{\partial x} + \eta \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + \\ + X \left( X \frac{\partial \eta}{\partial x} + Y \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - Y \left( X \frac{\partial \xi}{\partial x} + Y \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Напомним, что  $U = \xi \partial / \partial x + \eta \partial / \partial y$ ,  $A = X \partial / \partial x + Y \partial / \partial y$ . Поэтому последнее соотношение принимает вид

$$YUX - XUY + XA\eta - YA\xi = 0,$$

откуда

$$\frac{UX - A\xi}{X} = \frac{UY - A\eta}{Y}.$$

Но это и означает, что координаты коммутатора  $[A, U]$  пропорциональны координатам оператора  $A$ :

$$[A, U] = \lambda A.$$

Для уравнений более высокого порядка доказанная эквивалентность места не имеет. Рассмотрим уравнение  $n$ -го порядка в разрешенной относительно старшей производной форме:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f \left( x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right).$$

Условие инвариантности этого уравнения относительно некоторой группы может быть сформулировано в двух различных формах. Во-первых, при помощи введенного понятия продолженного оператора

$$^{(n)}U \left( \frac{d^n y}{dx^n} - f \right) = 0, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = f.$$

Если на полученное соотношение смотреть как на на условие для нахождения группы симметрий, то оно представляет собой уравнение в частных производных относительно двух неизвестных функций  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$ . Это уравнение распадается, как правило, на переопределенную систему, поскольку искомые функции не зависят



от производных и необходимо приравнять нулю коэффициенты при всех степенях и произведениях всех  $d^k y / dx^k$ . Решений такой системы может не существовать, что означает, что симметрий рассматриваемого типа у изучаемого дифференциального уравнения нет. Во-вторых, это дифференциальное уравнение может быть переписано в нормальной форме Коши:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = x_3, \dots, \frac{dx_n}{d\tau} = x_{n+1}, \quad \frac{dx_{n+1}}{d\tau} = f(x_1, \dots, x_{n+1}).$$

После чего для отыскания симметрий можно воспользоваться критерием  $[A, U] = \lambda A$ . В этом случае у разыскиваемого оператора уже  $n + 1$  компонента, которые не связаны условиями продолжения, в силу чего такая задача всегда разрешима.

Большой интерес представляет решение обратной задачи: задана группа с оператором

$$U = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

требуется найти общий вид дифференциальных уравнений, инвариантных относительно этой группы.

Решение этой задачи начнем с дифференциальных уравнений первого порядка. Поскольку каждое дифференциальное уравнение

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

инвариантное относительно группы, должно быть инвариантной поверхностью один раз продолженной группы в пространстве  $x, y, p = dy/dx$ , то запись общего вида такой поверхности и будет решением задачи. Если  $u(x, y, p)$  и  $v(x, y, p)$  — два независимых инварианта продолженной группы, то общий вид инвариантной поверхности есть

$$\mathcal{M}(u, v) = 0,$$

где  $\mathcal{M}$  — произвольная функция.

В качестве  $u$  можно взять инвариант оператора  $U = \xi \partial / \partial x + \eta \partial / \partial y$  и, следовательно, он не зависит от  $p$ , а в качестве  $v$  — дифференциальный инвариант. Тогда общий вид дифференциальных уравнений первого порядка, инвариантных относительно группы с оператором  $U$ , может быть записан так:

$$v\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = \mathcal{N}[u(x, y)],$$

$\mathcal{N}$  — произвольная функция.

*Пример.* Общий вид уравнений, инвариантных относительно группы вращений, таков:

$$\left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\right) / \left(1 + \frac{y}{x} \frac{dy}{dx}\right) = \mathcal{N}(x^2 + y^2).$$

*Замечание.* Нахождение дифференциального инварианта первого порядка для оператора  $U = \xi \partial / \partial x + \eta \partial / \partial y$  приводит к необходимости решать следующую систему:

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = \frac{dp}{\eta_x + (\eta_y - \xi_x)p - \xi_y p^2}.$$

Если предположить, что простой инвариант известен:

$$u(x, y) = C,$$

то для нахождения дифференциального инварианта приходится решать уравнение Риккати

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\xi(x, y)} [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)p - \xi_y p^2] \equiv \mathcal{L}_0(x, C) + \mathcal{L}_1(x, C)p + \mathcal{L}_2(x, C)p^2.$$

Однако именно это уравнение решается в квадратурах, поскольку можно указать его частное решение:

$$p = \frac{\eta[x, y(x)]}{\xi[x, y(x)]}.$$

Для уравнений второго порядка

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

аналогичные рассуждения приводят к следующему выражению для общего вида таких уравнений, инвариантных относительно заданной группы с оператором  $U = \xi \partial / \partial x + \eta \partial / \partial y$ :

$$w\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = \mathcal{M}\left[u(x, y), v\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right],$$

где  $u, v, w$  — инварианты нулевого, первого и второго порядков,  $\mathcal{M}$  — произвольная функция. Причем дифференциальный инвариант каждого следующего порядка может быть получен дифференцированием инварианта предыдущего порядка по инварианту нулевого порядка.

*Пример.* Общий вид уравнений второго порядка, инвариантных относительно группы вращений, таков:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3} \mathcal{M}\left[x^2 + y^2, \frac{dy/dx - y/x}{1 + (y/x)dy/dx}\right].$$

Построение уравнений третьего и высшего порядков, инвариантных относительно заданной группы, осуществляется аналогично.

## § 56. Симметрии уравнений в частных производных

Пусть уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными записано в виде

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots\right) = 0.$$

И пусть в пространстве  $x, y, z$  действует группа с оператором

$$U = \xi(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + \zeta(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Введя обозначения

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = l,$$

представляем написанное дифференциальное уравнение как уравнение поверхности в пространстве соответствующего числа измерений:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, l) = 0.$$

Заданная группа индуцирует в этом пространстве группу (продолженная группа), определяемую продолженным оператором. Способ построения продолженного оператора состоит в следующем.

Выпишем ядро продолженной группы:

$$\begin{aligned} x' &= x + \xi(x, y, z)\tau + \dots \\ y' &= y + \eta(x, y, z)\tau + \dots \\ z' &= z + \zeta(x, y, z)\tau + \dots \\ p' &= p + \pi(x, y, z, p, q)\tau + \dots \\ q' &= q + \rho(x, y, z, p, q)\tau + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Требуется вычислить коэффициенты  $\pi, \rho$  и т. д. Переменные  $x, y, z, p, q$  не являются независимыми и связаны условием полного дифференциала:

$$dz = p dx + q dy.$$

Точно так же определены переменные  $p'$  и  $q'$ :

$$dz' = p' dx' + q' dy'.$$

Подставляем в последнее соотношение ядро группы:

$$\begin{aligned}
 dz + \tau(\zeta_x dx + \zeta_y dy + \zeta_z dz) + \dots = \\
 = (p + \pi\tau + \dots)[dx + \tau(\xi_x dx + \xi_y dy + \xi_z dz) + \dots] + \\
 + (q + \rho\tau + \dots)[dy + \tau(\eta_x dx + \eta_y dy + \eta_z dz) + \dots].
 \end{aligned}$$

Заменяя  $dz$  на  $p dx + q dy$  и приравнявая коэффициенты при  $dx$  и  $dy$ , находим

$$\begin{aligned}
 \pi &= \zeta_x - p\xi_x - q\eta_x - p(-\zeta_z + p\xi_z + q\eta_z), \\
 \rho &= \zeta_y - p\xi_y - q\eta_y - q(-\zeta_z + p\xi_z + q\eta_z).
 \end{aligned}$$

Эти соотношения достаточны для построения оператора первого продолжения. Для построения оператора второго продолжения следует снова воспользоваться условием полного дифференциала

$$d\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy, \quad d\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy,$$

или

$$dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + l dy.$$

Продолжение ядра группы на переменные  $r, s, l$  определяется коэффициентами  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$r' = r + \alpha\tau + \dots, \quad s' = s + \beta\tau + \dots, \quad l' = l + \gamma\tau + \dots$$

Поступая как и при нахождении  $\pi$  и  $\rho$ , получим

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \pi_x + p\pi_z + r\pi_p + s\pi_q - r(\xi_x + p\xi_z) - s(\eta_x + p\eta_z), \\
 \beta &= \pi_y + q\pi_z + s\pi_p + l\pi_q - r(\xi_y + q\xi_z) - s(\eta_y + q\eta_z), \\
 \gamma &= \rho_y + q\rho_z + s\rho_p + l\rho_q - s(\xi_y + q\xi_z) - l(\eta_y + q\eta_z).
 \end{aligned}$$

Оператор второго продолжения имеет вид

$$^{(2)}U = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} + \pi \frac{\partial}{\partial p} + \rho \frac{\partial}{\partial q} + \alpha \frac{\partial}{\partial r} + \beta \frac{\partial}{\partial s} + \gamma \frac{\partial}{\partial l}.$$

Условие инвариантности поверхности  $F(x, y, z, p, q, r, s, l) = 0$ , или, что то же самое, условие инвариантности соответствующего уравнения в частных производных второго порядка получается следующим:

$$^{(2)}UF = 0, \quad F = 0.$$

Как и ранее, на эти соотношения можно смотреть двояко: задан оператор  $U$  — найти инвариантную поверхность, или задана поверхность — найти сохраняющую ее группу. В обыкновенных дифференциальных уравнениях обе задачи эквивалентны по сложности, поскольку обыкновенное дифференциальное уравнение и группа, преобразующая его, — объекты одной и той же природы. В случае уравнений в частных производных это уже не так. Дифференциальные уравнения, определяющие группу, — обыкновенные, а преобразуемое уравнение — в частных производных.

Первый объект проще. Поэтому и алгоритмы поиска групп симметрий уравнений в частных производных оказываются эффективными.

Если уравнение  $F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, \dots) = 0$  линейное, то, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, условия инвариантности уравнения можно сформулировать без использования продолжения операторов, в терминах коммутаторов.

Запишем это уравнение в виде  $Az = 0$ , где  $A$  — линейный дифференциальный оператор:

$$A = X_{11}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + X_{12}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + X_{22}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \dots$$

В силу линейности уравнения преобразовывать переменную  $z$  не имеет смысла. Тот факт, что линейное однородное уравнение допускает группу растяжений по  $z$ , очевиден и интереса не представляет. Поэтому будем рассматривать группу, действующую в пространстве переменных  $x, y$  с оператором  $U = \xi(x, y) \partial / \partial x + \eta(x, y) \partial / \partial y$ .

Коммутатор двух операторов  $A$  и  $U$  есть оператор второго порядка:  $[A, U] = AU - UA$ .

*Определение.* Оператор  $U$  называется оператором симметрий для уравнения  $Az = 0$ , если

$$[A, U] = \lambda(x, y)A.$$

*Теорема.* Оператор симметрий отображает решение уравнения  $Az = 0$  в решение этого же уравнения.

*Доказательство.* Пусть  $z = \varphi(x, y)$  — решение, тогда

$$A(U\varphi) = U(A\varphi) + \lambda A\varphi = 0,$$

т. е.  $U\varphi$  — тоже решение.

*Пример.* Уравнение Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \omega^2 z = 0 \quad \left( A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2 \right).$$

Требуется найти алгебру симметрий этого уравнения. Исходим из условия  $[A, U] = \lambda A$ , в котором помимо неизвестного оператора  $U$  нахождению подлежит скалярный коэффициент  $\lambda(x, y)$ .

Вычисление коммутатора дает

$$AU - UA =$$

$$= 2\xi_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(\eta_x + \xi_y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2\eta_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\xi_{xx} + \xi_{yy}) \frac{\partial}{\partial x} + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Вычитая из него оператор  $\lambda A$  и обращая в нуль коэффициенты полученного разностного оператора, находим

$$\begin{aligned} 2\xi_x &= \lambda, & 2\eta_y &= \lambda, & 2(\eta_x + \xi_y) &= 0, & \xi_{xx} + \xi_{yy} &= 0, \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= 0, & \omega^2 \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает решение:  $\lambda \equiv 0$ ,  $\xi = a + by$ ,  $\eta = c - bx$  где  $a, b, c$  — произвольные постоянные.

Следовательно, общий вид искомого оператора  $U$  такой:

$$U = (a + by)\frac{\partial}{\partial x} + (c - bx)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Он представляет собой произвольный элемент трехмерной алгебры операторов

$$U = aU_1 + bU_2 + cU_3$$

с базисом операторов

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad U_2 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad U_3 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Операторы  $U_1$  и  $U_3$  — операторы трансляций вдоль осей  $x$  и  $y$ , оператор  $U_2$  — оператор группы вращений.

## § 57. Примеры интегрирования задач механики на основе вычисления симметрий

**1. Движение материальной точки под действием следящей силы.** Рассмотрим плоское движение материальной точки массы  $m$  под действием силы  $F$ , которая постоянна по модулю и приложена в любой момент времени перпендикулярно радиусу-вектору этой точки (рис. 68). Так как масштаб можно выбрать произвольно при измерении переменных, будем считать  $m = 1$ ,  $F = 3\sqrt{2}$ . Уравнения рассматриваемой материальной точки в полярной системе координат имеют вид

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0, \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 3\sqrt{2}r.$$

Перепишем эту систему в виде трех уравнений первого порядка, введя обозначения для скорости изменения  $r$  ( $\dot{r} = v$ ) и для момента количества движения  $\sigma = r^2\dot{\varphi}$ :

$$\dot{r} = v, \quad \dot{v} = \sigma^2 r^{-3}, \quad \dot{\sigma} = 3\sqrt{2}r.$$

Поскольку фазовые переменные в правых частях этой системы входят только в виде степеней и произведений, группу симметрий этой системы естественно искать в виде группы растяжений

$$(r, v, \sigma) \rightarrow (r', v', \sigma'): \quad r = \alpha r', \quad v = \beta v', \quad \sigma = \gamma \sigma',$$

после подстановки которой в уравнения получаем

$$\dot{r}' = \frac{\beta}{\alpha} v', \quad \dot{v}' = \frac{\gamma^2}{\beta \alpha^3} \frac{\sigma'}{r'^3}, \quad \dot{\sigma}' = \frac{\alpha}{\gamma} 3\sqrt{2} r'.$$

Правые части в результате преобразования будут иметь общий для всех уравнений множитель, если

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma^2}{\beta\alpha^3} = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Выбирая  $\beta$  произвольным, из этих соотношений найдем  $\alpha = \beta^2$ ,  $\gamma = \beta^3$ . Следовательно, группа симметрий системы имеет вид

$$r' = \beta^{-2}r = r + 2r\tau + \dots, \quad v' = \beta^{-1}v = v + v\tau + \dots, \\ \sigma' = \beta^{-3}\sigma = \sigma + 3\sigma\tau + \dots,$$

где  $\tau$  — параметр группы ( $\beta = 1 - \tau$ ). Оператор этой группы имеет вид

$$U = 2r \frac{\partial}{\partial r} + v \frac{\partial}{\partial v} + 3\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma}.$$

Он удовлетворяет условию  $[A, U] = A$ .

Это условие является достаточным условием того, что группа с оператором  $U$  является группой симметрий в следующем смысле: любые интегральные кривые этой системы группой отображаются в интегральные кривые этой же системы, или же любое стационарное решение соответствующего системе уравнения Лиувилля  $\partial\Phi/\partial t = A\Phi$ , т. е. решение  $\Phi = \Phi(r, v, \sigma)$ , переводится оператором  $U$  в стационарное решение этого же уравнения:  $G = U\Phi$ . Если в исходной системе неза-

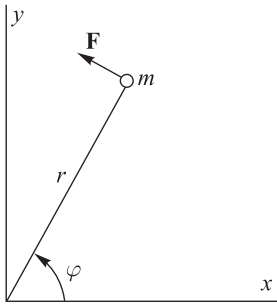


Рис. 68

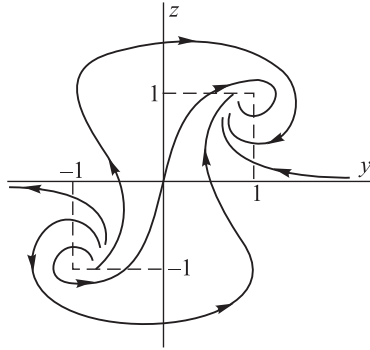


Рис. 69

висимой переменной считать не время, а полярный угол  $\varphi$ , то система примет вид

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{vr^2}{\sigma}, \quad \frac{dv}{d\varphi} = \frac{\sigma}{r}, \quad \frac{d\sigma}{d\varphi} = 3\sqrt{2} \frac{r^3}{\sigma}.$$

Оператор этой системы

$$B = \frac{vr^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial}{\partial v} + 3\sqrt{2} \frac{r^3}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}$$

коммутирует с оператором  $U$ :  $[B, U] = 0$ .

Следовательно, построенная группа, является группой симметрий для этих уравнений в более сильном смысле: каждое ее решение переводится группой в решение уравнения, и каждое решение уравнения Лиувилля  $\partial\Phi/\partial\varphi = A\Phi$  переводится оператором  $U$  в решение этого же уравнения. То есть, если  $\Phi(\varphi, r, v, \sigma)$  — решение, то  $U\Phi$  — тоже решение.

При наличии группы симметрий в том или в другом смысле система, рассматриваемая в любой ее форме записи, может быть понижена в размерности.

Для понижения размерности в системе следует выполнить замену переменных  $(r, v, \sigma) \rightarrow (x, y, z)$ , где  $x, y, z$  представляют собой канонические координаты группы симметрий, т. е. функции, удовлетворяющие условиям  $Ux = 1, Uy = 0, Uz = 0$ . То есть функции  $y(r, v, \sigma)$  и  $z(r, v, \sigma)$  являются инвариантами группы, а  $x(r, v, \sigma)$  представляет собой логарифм собственной функции (§51). Для нахождения этих функций достаточно решить уравнение

$$2r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + v \frac{\partial\Phi}{\partial v} + 3\sigma \frac{\partial\Phi}{\partial \sigma} = 1$$

или, что эквивалентно, систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{2r} = \frac{dv}{v} = \frac{d\sigma}{3\sigma} = \frac{d\Phi}{1}.$$

Отсюда находим:

$$x = \frac{1}{2} \ln r, \quad y = \frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{r}}, \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{r^3}}.$$

Поскольку любая функция инвариантов есть снова инвариант, то коэффициенты  $1/2$  и  $\sqrt{2}/2$  в выражениях для  $y$  и  $z$  выбраны только из соображений удобства для дальнейшего.

Найденным уравнениям замены соответствуют уравнения обратной замены:

$$r = e^{2x}, \quad v = 2ye^x, \quad \sigma = \sqrt{2}ze^{3x}.$$

Исходная система, после выполнения в ней этих замен, в новых переменных принимает вид

$$\dot{x} = e^{-x}y, \quad \dot{y} = e^{-x}(z^2 - y^2), \quad \dot{z} = 3e^{-x}(1 - yz)$$

или

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{y}{z}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( z - \frac{y^2}{z} \right), \quad \frac{dz}{d\varphi} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{z} - y \right).$$

Система имеет две особые точки  $y = z = 1$  и  $y = z = -1$ . Первой точке соответствует устойчивый фокус, второй — неустойчивый. Фазовый портрет системы изображен на рис. 69. Устойчивому фокусу



соответствует точная интегральная кривая в исходных переменных, получаемая из уравнений обратной замены при  $y = z = 1$  в виде

$$v = 2\sqrt{r}, \quad \sigma = \sqrt{2r^3}.$$

Для нахождения соответствующего решения исходим из уравнения  $\dot{r} = 2\sqrt{r}$ , откуда  $r = (\sqrt{r_0} + t)^2$ . Что позволяет выписать однопараметрическое семейство точных решений системы  $\dot{r} = v$ ,  $\dot{v} = \sigma^2 r^{-3}$ ,  $\dot{\sigma} = 3\sqrt{2}r$  в виде

$$r = (\sqrt{r_0} + t)^2, \quad v = 2(\sqrt{r_0} + t), \quad \sigma = \sqrt{2}(\sqrt{r_0} + t)^3.$$

Изменение полярного угла, соответствующее этому семейству, может быть найдено при помощи формулы  $\sigma = r^2 \dot{\varphi}$  в виде

$$\varphi = \sqrt{2} \ln(1 + t/\sqrt{r_0}).$$

В результате зависимость тех же переменных от угла  $\varphi$  может быть найдена в виде

$$r = r_0 \exp(\sqrt{2}\varphi), \quad v = 2\sqrt{r_0} \exp(\sqrt{2}\varphi/2), \quad \sigma = \sqrt{2}r_0^3 \exp(3\sqrt{2}\varphi/2).$$

Таким образом, движение точки под действием следящей силы в полярных координатах представляет собой логарифмическую спираль  $r = r_0 \exp(\sqrt{2}\varphi)$  или кривую, стремящуюся к ней при  $t \rightarrow \infty$ .

**2. Задача Суслова.** Рассмотрим задачу о скатывании материальной точки по наклонной шероховатой плоскости (рис. 70).

Уравнения движения при подходящем выборе масштаба измерения переменных могут быть записаны в следующей форме:

$$\ddot{x} = 1 - k \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \ddot{y} = -k \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

Общее решение этих уравнений для случая  $k \neq 1$  приведено в книге Г. К. Суслова<sup>1)</sup>. Случай  $k = 1$  — критический: сила трения равна при этом скатывающей силе, или угол наклона плоскости к горизонту

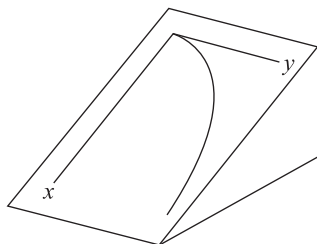


Рис. 70

<sup>1)</sup> Суслов Г. К. Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1946.

равен углу трения. Рассмотрим задачу именно для этого случая при следующих начальных условиях:  $x(0) = y(0) = \dot{x}(0), \dot{y}(0) = 1$ . Введя обозначения  $\dot{x} = u, \dot{y} = v, \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = w$ , получим систему

$$\dot{u} = 1 - u/w, \quad \dot{v} = -v/w, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = 1.$$

Группой симметрий этой системы, очевидно, является группа подобия с оператором  $U = u\partial/\partial u + v\partial/\partial v$  и каноническими координатами

$$\alpha = \frac{u}{v}, \quad \beta = \ln v.$$

Используя их в качестве замены переменных в рассматриваемой системе, приводим ее к виду

$$\dot{\alpha} = \exp(-\beta), \quad \dot{\beta} = -\exp(-\beta)(1 + \alpha^2)^{-1/2}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = -\sqrt{1 + \alpha^2}$$

с очевидным решением  $\alpha = -\operatorname{sh} \beta$ , имеющим в исходных переменных вид

$$u = \frac{1}{2}(1 - v^2).$$

Подставляя это выражение в уравнение  $\dot{v} = -v/w$ , приходим к уравнению

$$\dot{v} = -\frac{2v}{1 + v^2}, \quad v(0) = 1.$$

Решая это уравнение, находим

$$\ln v + \frac{v^2}{2} = -2t + \frac{1}{2}.$$

Если разделить уравнение  $\dot{v} = -2v(1 + v^2)^{-1}$  на  $\dot{y} = v$ , то получится уравнение

$$dy = -\frac{1}{2}(1 + v^2)dv, \quad y(1) = 0,$$

откуда следует

$$y = -\frac{v}{2} - \frac{v^3}{6} + \frac{2}{3}.$$

Система

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{4} - \frac{v^2}{4} - \frac{1}{2} \ln v, \\ y &= \frac{2}{3} - \frac{v}{2} - \frac{v^3}{6} \end{aligned}$$

определяет в параметрической форме решение  $y(t)$ , изображенное на рис. 71.

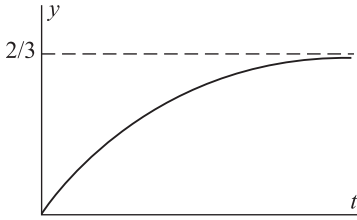


Рис. 71

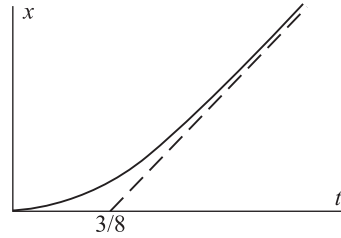


Рис. 72

Разделив далее  $\dot{x} = u$  на  $\dot{v} = -2v(1 + v^2)^{-1}$ , с учетом, что  $2u = 1 - v^2$ , получим

$$dx = -\frac{1}{4}(1 - v^4) \frac{dv}{v}, \quad x(1) = 0.$$

Отсюда следует параметрическая форма решения  $x(t)$ :

$$t = \frac{1}{4} - \frac{v^2}{4} - \frac{1}{2} \ln v,$$

$$x = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}v^4 - \frac{1}{4} \ln v,$$

изображенная графически на рис. 72.

**3. Задача о траектории преследования.** Пусть в плоскости (рис. 73) движутся две точки. Преследуемая точка движется с постоянной скоростью  $u$  на постоянном расстоянии  $l$  от горизонтальной оси. Преследующая точка движется с постоянной по модулю скоростью  $v > u$ , направленной вдоль прямой, соединяющей обе точки. В начальный момент времени прямая, соединяющая две точки, перпендикулярна горизонтальной оси, а расстояние между ними равно  $l$ .

Требуется найти время до встречи.

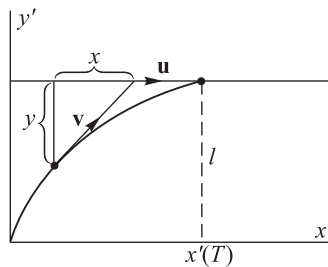


Рис. 73

Будем рассматривать положение преследуемой точки  $\{x, y\}$  в системе координат, начало которой совпадает с преследующей точкой. Закон сложения скоростей дает

$$v_x + \dot{x} = u, \quad v_y + \dot{y} = 0,$$

где

$$v_x = \frac{vx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v_y = \frac{vy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Отсюда и следуют уравнения движения преследуемой точки в системе, в которой неподвижна преследующая:

$$\dot{x} = u - \frac{vx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \dot{y} = -\frac{vy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Эти уравнения полностью идентичны уравнениям для скоростей в задаче Суслова. Все процедуры, примененные в предыдущем пункте, могут быть применены и в этой задаче.

Переход к каноническим координатам группы подобия  $(x, y) \rightarrow (\alpha, \beta)$ :  $\alpha = x/y$ ,  $\beta = \ln y$  позволяет получить

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{u}{v}\sqrt{1 + \alpha^2}, \quad \beta(0) = \ln l, \quad \alpha(0) = 0.$$

Обозначив  $u/v = k$ , запишем решение этого уравнения:

$$\alpha = -\operatorname{sh} k(\beta - \ln l).$$

После чего из уравнения для  $\beta$ :

$$\dot{\beta} = -\frac{ve^{-\beta}}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

ВЫВОДИМ

$$\int e^{\beta} \operatorname{ch} k(\beta - \ln l) d\beta = -vt + C.$$

ИЛИ

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{\beta(k+1)}}{l^k(k+1)} + \frac{l^k e^{\beta(1-k)}}{1-k} \right\} = -vt + C.$$

При  $t = 0$   $\beta = \ln l$ , что позволяет найти  $C$ :

$$C = \frac{1}{2} \left\{ \frac{l}{1+k} + \frac{l}{1-k} \right\}.$$

При  $t = T$  (момент встречи)  $\beta = -\infty$ , поэтому

$$-vT + \frac{l}{2} \left\{ \frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k} \right\} = 0,$$

откуда

$$T = \frac{l}{v(1-k^2)} = \frac{lv}{v^2 - u^2}.$$

## § 58. Уравнения Пуанкаре

Пусть имеется механическая система;  $T$  — ее кинетическая энергия,  $U$  — потенциальная. Пусть  $q_1, \dots, q_n$  — локальные (обобщенные) координаты этой системы,  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$  — обобщенные скорости.

Пусть, наконец, в области определения системы действует локальная группа Ли, обладающая свойством транзитивности (говорят, что группа транзитивна, если для любых двух точек пространства положений существует преобразование из группы, переводящее одну точку в другую).

Группа транзитивна тогда и только тогда, когда алгебра ее операторов содержит  $n$  линейно несвязанных:

$$\begin{aligned} U_1 &= \xi_1^1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \dots + \xi_n^1 \frac{\partial}{\partial q_n}, \\ &\dots \\ U_n &= \xi_1^n \frac{\partial}{\partial q_1} + \dots + \xi_n^n \frac{\partial}{\partial q_n}. \end{aligned}$$

Векторы

$$\xi^1 = \{\xi_1^1, \dots, \xi_n^1\}, \dots, \xi^n = \{\xi_1^n, \dots, \xi_n^n\}$$

образуют в пространстве  $q$  базис, по которому можно разложить обобщенную скорость:

$$\dot{q} = \eta_1 \xi^1 + \dots + \eta_n \xi^n.$$

Выберем в качестве фазовых переменных системы переменные

$$\{q_1, \dots, q_n, \eta_1, \dots, \eta_n\}.$$

Подставляя в выражение для кинетической энергии  $T(q, \dot{q})$  это представление для обобщенной скорости, получим функцию  $T(q, \eta)$  (для простоты новую функцию обозначим той же буквой).

Воспользуемся принципом наименьшего действия по Гамильтону:

$$\delta S = \delta \int (T - U) dt = 0.$$

Вычислим вариацию кинетической и потенциальной энергии:

$$\delta T = \sum \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \delta \eta_i + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i, \quad \delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Вариацию  $\delta q_i$  спроектируем на базис:  $\xi^1, \dots, \xi^n$ :

$$\delta q = \delta \omega_1 \xi^1 + \dots + \delta \omega_n \xi^n, \quad \delta q_i = \delta \omega_1 \xi_i^1 + \dots + \delta \omega_n \xi_i^n.$$

Вариацию  $\delta\eta$  также надо выразить через  $\delta\omega$ , для чего продифференцируем последнее соотношение:

$$\delta\dot{q} = \delta\dot{\omega}_1\xi^1 + \dots + \delta\dot{\omega}_n\xi^n + \delta\omega_1 \left( \frac{\partial\xi^1}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial\xi^1}{\partial q_n}\dot{q}_n \right) + \dots \\ \dots + \delta\omega_n \left( \frac{\partial\xi^n}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial\xi^n}{\partial q_n}\dot{q}_n \right).$$

Заменяя в этом равенстве  $\dot{q}$  на  $\eta$ , находим

$$\delta\dot{q} = \delta\dot{\omega}_1\xi^1 + \dots + \delta\dot{\omega}_n\xi^n + \delta\omega_1 \sum_k \frac{\partial\xi^1}{\partial q_k} \sum_i \eta_i \xi_k^i + \dots \\ \dots + \delta\omega_n \sum_k \frac{\partial\xi^n}{\partial q_k} \sum_i \eta_i \xi_k^i.$$

С другой стороны, вычисляя вариацию от  $\dot{q} = \sum_k \eta_i \xi_k^i$ , находим

$$\delta\dot{q} = \delta\eta_1\xi^1 + \dots + \delta\eta_n\xi^n + \eta_1 \left( \frac{\partial\xi^1}{\partial q_1}\delta q_1 + \dots + \frac{\partial\xi^1}{\partial q_n}\delta q_n \right) + \dots \\ \dots + \eta_n \left( \frac{\partial\xi^n}{\partial q_1}\delta q_1 + \dots + \frac{\partial\xi^n}{\partial q_n}\delta q_n \right).$$

Мы получили два представления для  $\delta\dot{q}$ , приравнявая их друг другу, выводим

$$(\delta\eta_1 - \delta\dot{\omega}_1)\xi^1 + \dots + (\delta\eta_n - \delta\dot{\omega}_n)\xi^n + \sum_s \eta_s \sum_k \frac{\partial\xi^s}{\partial q_k} \sum_i \delta\omega_i \xi_k^i - \\ - \sum_s \delta\omega_s \sum_k \frac{\partial\xi^s}{\partial q_k} \sum_i \eta_i \xi_k^i = 0.$$

Меня обозначения индексов  $i \leftrightarrow s$ , получаем

$$(\delta\eta_1 - \delta\dot{\omega}_1)\xi^1 + \dots + (\delta\eta_n - \delta\dot{\omega}_n)\xi^n + \sum_i \eta_i \sum_k \frac{\partial\xi^i}{\partial q_k} \sum_s \delta\omega_s \xi_k^s - \\ - \sum_s \delta\omega_s \sum_k \frac{\partial\xi^s}{\partial q_k} \sum_i \eta_i \xi_k^i = 0.$$

Или, иначе,

$$(\delta\eta_1 - \delta\dot{\omega}_1)\xi^1 + \dots + (\delta\eta_n - \delta\dot{\omega}_n)\xi^n + \sum_{i,s} \eta_i \delta\omega_s \sum_k \left( \frac{\partial\xi^i}{\partial q_k} \xi_k^s - \frac{\partial\xi^s}{\partial q_k} \xi_k^i \right) = 0.$$

Заметим, что

$$\sum_k \left( \frac{\partial \xi^i}{\partial q_k} \xi_k^s - \frac{\partial \xi^s}{\partial q_k} \xi_k^i \right)$$

есть вектор компонент коммутатора  $[U_s, U_i]$ .

Поскольку операторы группы образуют алгебру, то

$$[U_s, U_i] = \sum_l C_{si}^l U_l,$$

где  $C_{si}^l$  — структурные константы группы.

Следовательно,

$$(\delta \eta_1 - \delta \dot{\omega}_1) \xi^1 + \dots + (\delta \eta_n - \delta \dot{\omega}_n) \xi^n + \sum_{i,s} \eta_i \delta \omega_s C_{si}^1 \xi^1 + \dots + \sum_{i,s} \eta_i \delta \omega_s C_{si}^n \xi^n = 0.$$

Отсюда находим

$$\delta \eta_k = \delta \dot{\omega}_k - \sum_{i,s} \eta_i \delta \omega_s C_{si}^k.$$

Вариация действия примет вид

$$\int \left[ \sum_k \frac{\partial T}{\partial \eta_k} \delta \dot{\omega}_k - \sum_{k,i,s} \eta_i \frac{\partial T}{\partial \eta_k} \delta \omega_s C_{si}^k + \sum_{k,s} \left( \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta \omega_s \xi_k^s - \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta \omega_s \xi_k^s \right) \right] dt.$$

В первом члене применим интегрирование по частям:

$$\int \frac{\partial T}{\partial \eta_k} \delta \dot{\omega}_k dt = \frac{\partial T}{\partial \eta_k} \delta \omega_k \Big|_{t_0}^t - \int \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \eta_k} \delta \omega_k dt.$$

В силу независимости  $\delta \omega_k$  отсюда получаем уравнение Пуанкаре

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \eta_k} + \sum_{i,s} \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \eta_s C_{ks}^i = \Omega_k,$$

где

$$\Omega_k = \sum_s \left( \frac{\partial T}{\partial q_s} \xi_s^k - \frac{\partial U}{\partial q_s} \xi_s^k \right)$$

— обобщенная сила.

Частным случаем уравнений Пуанкаре, очевидно, являются уравнения Лагранжа.

В динамике твердого тела роль переменных  $\eta_i$  могут играть компоненты вектора угловой скорости тела в проекции на связанные с ним оси. В этом случае уравнения Пуанкаре переходят в уравнения Эйлера.

## Глава 12

# ГРУППЫ СИММЕТРИЙ УРАВНЕНИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

### § 59. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы

Обычно формулировке второго закона Ньютона предваряют формулировку первого закона: *«В евклидовом пространстве всегда можно найти такое тело отсчета и такую связанную с ним декартову систему координат, а также такой способ измерения времени  $t$ , что любая материальная точка, на которую не действуют силы, описывает прямую или неподвижна»*.

Этот закон служит для определения понятия инерциальной системы отсчета, после чего для любой такой системы формулируют второй закон Ньютона.

Такой способ введения аксиом механики содержит противоречие.

Действительно, пусть в соответствии с первым законом инерциальная система отсчета найдена:  $\{t, x, y, z\}$ . Любая свободная материальная точка движется в ней прямолинейно и равномерно. Перейдем к системе отсчета  $\{t_1, x_1, y_1, z_1\}$  по формулам

$$t_1 = t + \omega x, \quad x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z.$$

Поскольку линейным преобразованием все прямые переводятся в прямые, то и в этой системе рассматриваемая точка движется равномерно и прямолинейно. В соответствии с первым законом Ньютона и ее следует признать инерциальной. Но это войдет в противоречие со вторым законом, который в этой системе, как легко проверить, не имеет места.

Приведенная система координат не является искусственной и имеет ясный физический смысл. Представим себе поезд, идущий на восток. Пассажир следит в окно за километровыми столбами и видит установленные на них часы, показывающие местное время. Километры на столбах и время на их часах и образуют указанную в примере систему координат (разумеется, в областях, размеры которых малы по сравнению с радиусом Земли, чтобы ее формой можно было не интересоваться). Заметим, что кажущаяся искусственность в способе введения времени в этом примере на самом деле представляет собой



вопрос конкретного технического устройства часов. Можно, например, представить себе часы, внутри которых вмонтирована инерциальная навигационная система, непрерывно ведущая счисление координат местонахождения часов и вносящая в их показания необходимую поправку. Если бы у людей никаких других часов не было, то они могли бы и не подозревать, что существует какой-то иной способ измерения времени. При этом в примере с поездом пассажир, имея на руке такие часы, был бы избавлен от необходимости переводить стрелки при попадании в другой часовой пояс.

Для устранения противоречия следовало бы оговорить синхронизацию часов во всех точках пространства. Однако описание процедуры синхронизации вносит серьезные осложнения в формальную аксиоматическую конструкцию классической механики.

Гораздо проще оставить свободу в выборе способа измерения времени в любой точке пространства, а первый закон Ньютона считать лишь *необходимым* условием инерциальности выбранной системы отсчета.

При таком подходе необходимым и достаточным условием инерциальности системы отсчета становится выполнимость в ней второго закона Ньютона, но в таком случае первый закон теряет самостоятельное значение, превращаясь в следствие второго.

Иначе обстоит дело в релятивистской механике, обсуждаемой в следующей главе. Прерогатива в формировании критерия инерциальности системы отсчета в релятивистской механике переходит от уравнений Ньютона к уравнениям электродинамики Максвелла. В этом случае первый закон Ньютона превращается в самостоятельное и независимое необходимое условие инерциальности. Поэтому представляет большой интерес выяснение вопроса о том, как же связаны друг с другом те системы отсчета, которые удовлетворяют этому необходимому условию инерциальности.

Рассмотрим этот вопрос детально на примере одного пространственного измерения. Обобщение на трехмерный случай не имеет ни принципиальных особенностей, ни трудностей.

Прямая в плоскости  $(t, x)$  будет переходить в прямую в результате преобразования  $(t, x) \rightarrow (t', x')$ , если ее уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

будет относительно этого преобразования инвариантным.

Если искомую группу симметрий записать в виде

$$\begin{aligned} t' &= t + \xi(t, x)\tau + \dots, \\ x' &= x + \eta(t, x)\tau + \dots, \end{aligned}$$

то это уравнение должно быть инвариантным относительно дважды продолженной группы с оператором:

$$U^{(2)} = \xi(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + \zeta(t, x, v) \frac{\partial}{\partial v} + \delta(t, x, v, w) \frac{\partial}{\partial w},$$

где  $v = \dot{x}$  (скорость),  $w = \ddot{x}$  (ускорение). Рассматриваемое дифференциальное уравнение в пространстве  $(t, x, v, w)$  определяет гиперповерхность  $w = 0$ , условие ее инвариантности есть

$$U^{(2)} w = 0 \quad \text{на} \quad w = 0,$$

что в данном случае дает

$$\delta(t, x, v, 0) = 0.$$

В соответствии с теорией продолжения (§ 54) имеем

$$\begin{aligned} \delta &= \zeta_t + v\zeta_x + w(\zeta_v - \xi_t) - vw\xi_x, \\ \zeta &= \eta_t + v(\eta_x - \xi_t) - v^2\xi_x. \end{aligned}$$

Следовательно, условие инвариантности есть

$$\zeta_t + v\zeta_x = \eta_{tt} + v(\eta_{xt} - \zeta_{tt}) - v^2\xi_{xt} + v\eta_{tx} + v^2(\eta_{xx} - \xi_{tx}) - v^3\xi_{xx} = 0.$$

Поскольку функции  $\xi$  и  $\eta$  не зависят от  $v$ , то это соотношение распадается на следующие:

$$\eta_{tt} = 0, \quad 2\eta_{xt} - \xi_{tt} = 0, \quad 2\xi_{xt} - \eta_{xx} = 0, \quad \xi_{xx} = 0.$$

Дифференцируя второе из этих соотношений по  $x$ , а третье по  $t$ , получаем

$$\begin{aligned} 2\eta_{xxt} - \xi_{xtt} &= 0, \\ 2\xi_{xtt} - \eta_{xxt} &= 0. \end{aligned}$$

Два линейных алгебраических уравнения относительно неизвестных  $\xi_{xtt}$  и  $\eta_{xxt}$  с не равным нулю определителем имеют лишь тривиальное решение

$$\eta_{xxt} = 0, \quad \xi_{xtt} = 0,$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \xi &= a + bt + cx + dtx + et^2, \\ \eta &= f + gt + hx + ltx + mx^2 \end{aligned}$$

с постоянными  $a, b, c, d, e, f, g, h, l, m$ .

Подставляя эти решения в уравнения  $2\eta_{xt} - \xi_{tt} = 0$  и  $2\xi_{tx} - \eta_{xx} = 0$ , находим  $2d - 2m = 0$  и  $2l - 2e = 0$ .

Таким образом, окончательно оператор искомой группы, переводящий прямые в прямые, имеет вид

$$U = aU_1 + bU_2 + cU_3 + dU_4 + eU_5 + fU_6 + gU_7 + hU_8,$$

в котором  $a, b, c, d, e, f, g, h$  — произвольные постоянные, а операторы

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & U_2 &= t \frac{\partial}{\partial t}, & U_3 &= x \frac{\partial}{\partial t}, & U_4 &= tx \frac{\partial}{\partial t} + x^2 \frac{\partial}{\partial x}, \\ U_5 &= t^2 \frac{\partial}{\partial t} + tx \frac{\partial}{\partial x}, & U_6 &= \frac{\partial}{\partial x}, & U_7 &= t \frac{\partial}{\partial x}, & U_8 &= x \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

представляют собой операторы проективной группы (§ 47).

Таким образом, *все системы отсчета, в которых имеет место первый закон Ньютона (необходимое условие инерциальности), связаны друг с другом проективной группой.*

Этот же результат имеет место и в трехмерном случае.

## § 60. Второй закон Ньютона. Группа Галилея

Рассмотрим теперь вопрос о группах симметрий уравнений Ньютона, т. е. о тех группах преобразований, которые переводят инерциальные системы отсчета снова в инерциальные. При этом, как уже отмечалось во введении, следует различать понятия инвариантности и ковариантности уравнений по отношению к тем или иным преобразованиям переменных и времени. Если мы хотим рассмотреть вопрос об инвариантности уравнений в какой-то конкретной задаче механики, то следует иметь в виду конкретную зависимость сил от времени, координат и скоростей, и инвариантность изучать с учетом этой зависимости. Если же нас интересует инвариантность правила составления уравнений, а не самих уравнений (ковариантность уравнений), то зависимостью силы от указанных переменных интересоваться не нужно, рассматривая сами силы в качестве дополнительных преобразуемых переменных. При решении вопроса о связи инерциальных систем отсчета друг с другом нас интересует именно вторая постановка.

Опять-таки рассмотрим ее на примере одного пространственного измерения

$$m\ddot{x} = F.$$

Искомая группа симметрий в пространстве переменных  $(t, x, F)$  рассматривается в виде

$$\begin{aligned} t' &= t + \xi(t, x)\tau + \dots, \\ x' &= x + \eta(t, x)\tau + \dots, \\ F' &= F + \gamma(F)\tau + \dots \end{aligned}$$

Дважды продолженный оператор этой группы имеет вид

$$U^{(2)} = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial x} + \zeta \frac{\partial}{\partial v} + \delta \frac{\partial}{\partial w} + \gamma \frac{\partial}{\partial F}.$$

Условие инвариантности гиперповерхности  $\omega \equiv mw - F = 0$  есть

$$\stackrel{(2)}{U}\omega = 0, \quad \omega = 0,$$

что влечет

$$\delta \left( t, x, v, \frac{F}{m} \right) - \gamma(F) = 0.$$

Как и ранее,

$$\begin{aligned} \delta &= \zeta_t + v\zeta_x + w(\zeta_v - \xi_t) - vw\xi_x, \\ \zeta &= \eta_t + v(\eta_x - \xi_t) - v^2\xi_x. \end{aligned}$$

Поэтому условие инвариантности переписывается в виде

$$\zeta_t + v\zeta_x + \frac{F}{m}(\zeta_v - \xi_t) - \frac{F}{m}v\xi_x - \gamma(F) = 0.$$

Поскольку  $\zeta$  и  $\xi$  от  $F$  не зависят, то  $\gamma$  может быть только линейной функцией  $F$ :  $\gamma = k_1 + k_2 F/m$  и написанное условие распадается на два:

$$\zeta_t + v\zeta_x - k_1 = 0, \quad \zeta_v - \xi_t - v\xi_x - k_2 = 0.$$

Подставляя сюда вместо  $\zeta$  его выражение через  $\xi$  и  $\eta$ , имеем

$$\begin{aligned} \eta_{tt} + v(\eta_{xt} - \xi_{tt}) - v^2\xi_{xt} + v\eta_{xt} + v^2(\eta_{xx} - \xi_{tx}) - v^3\xi_{xx} - k_1 &= 0, \\ \eta_x - \xi_t - 2v\xi_x - \xi_t - v\xi_x - k_2 &= 0. \end{aligned}$$

Опять-таки, учитывая независимость  $\xi$  и  $\eta$  от  $v$ , получим

$$\begin{aligned} \eta_{tt} - k_1 &= 0, \quad 2\eta_{xt} - \xi_{tt} = 0, \quad 2\xi_{xt} - \eta_{xx} = 0, \\ \xi_{xx} &= 0, \quad \eta_x - 2\xi_t - k_2 = 0, \quad \xi_x = 0. \end{aligned}$$

Как и ранее, из второго и третьего уравнений можно вывести

$$\begin{aligned} \xi &= a + bt + cx + dtx + et^2, \\ \eta &= f + gt + hx + etx + dx^2. \end{aligned}$$

Но тогда из первого уравнения следует  $k_1 = 0$ , из последнего уравнения следует  $c = d = 0$ . Наконец, из предпоследнего —

$$k_2 = h + et - 2b - 4et.$$

Поскольку  $k_2$  не зависит от  $t$ , то  $e = 0$  и, окончательно, искомый оператор группы симметрий уравнения Ньютона в одномерном случае принимает вид

$$U = aU_1 + bU_2 + fU_3 + gU_4 + hU_5,$$

где  $a, b, f, g, h$  — произвольные константы, а базисные операторы таковы:

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad U_2 = t \frac{\partial}{\partial t} - 2 \frac{F}{m} \frac{\partial}{\partial F}, \quad U_3 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$U_4 = t \frac{\partial}{\partial x}, \quad U_5 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{F}{m} \frac{\partial}{\partial F}.$$

Оператор  $U_1$  определяет преобразование  $t' = t + \tau$ , означающее изменение начала отсчета времени. Оператор  $U_3$  соответствует сдвигу начала отсчета координаты  $x$ :  $x' = x + \tau$ . Оператор  $U_4$  определяет движение нового начала отсчета с постоянной скоростью относительно первоначального начала отсчета:  $x' = x + \tau t$  ( $\tau$  — скорость подвижной системы координат). Оператор  $U_2$  определяет одновременное изменение масштаба измерения времени и силы, а оператор  $U_5$  — одновременное изменение масштаба измерения координаты и силы.

Изменение масштаба переменных интереса не представляет. Трехпараметрическая группа с операторами  $U_1, U_3$  и  $U_4$  называется группой Галилея.

Вычисление группы симметрий уравнений Ньютона в пространственном случае никаких принципиальных отличий от описанной процедуры не имеет. Опуская преобразование масштабов измерения времени, координаты и силы, перечислим все остальные подгруппы группы симметрий уравнений классической механики.

- 1) Трансляция по времени:  $t' = t + \tau, r' = r, F' = F$ .
- 2) Трансляция по пространственным переменным:  $t' = t, r' = r + r_0, F' = F$ .
- 3) Поступательное движение координатного трехгранника с постоянной скоростью:  $t' = t, r' = r + vt, F' = F$ .
- 4) Переход к новому базису:  $t' = t, r' = Ar, F' = AF$  ( $\det A \neq 0$ ).

Если в последнем случае ограничиться только ортогональными базисами, то и матрица  $A$  будет также ортогональной, а само преобразование будет означать переход к повернутой системе координат.

Группой Галилея принято называть подгруппу симметрий уравнений Ньютона, не содержащую подгрупп изменения масштабов и не содержащую переходов к неортогональным системам координат. Такая группа является, очевидно, десятипараметрической. Полная группа содержит двадцать независимых параметров.

## РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

### § 61. Постулаты релятивистской механики

Как и в случае классической механики, основным аксиомам релятивистской механики должно предшествовать введение категорий пространства, времени, материальной точки и силы. При этом понятия пространства и времени, в отличие от классического случая, могут вводиться (хотя и не обязательно) в форме единого пространства-времени с индефинитной метрикой  $dl^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ .

Основными для дальнейшего аксиомами будут:

А. *Аксиома инерциальной координатной системы* (системы отсчета): существует система координат (и она называется инерциальной), в которой:

1) любая материальная точка, на которую не действуют никакие силы, описывает прямую;

2) уравнения Максвелла в пустоте имеют вид

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot} B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} = 0,$$

где  $E$  и  $B$  — электрическая и магнитная составляющие электромагнитного поля,  $c$  — скорость света.

В. *Аксиома динамики*: в любых инерциальных системах закон движения материальной точки выражается дифференциальным уравнением второго порядка, имеющим пределом уравнения Ньютона при  $c \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \Phi(t, r, \dot{r}, \ddot{r}, m, F, c) = m\ddot{r} - F,$$

где  $m$  и  $F$  — параметры предельного уравнения, т. е. масса и сила.

В классической механике уравнения динамики (уравнения Ньютона) постулировались и служили критерием инерциальности системы отсчета.

В релятивистской механике роль критерия инерциальности системы отсчета выполняют постулируемые уравнения электродинамики, а уравнения динамики точки надлежит вывести.

С этой целью необходимо выяснить, как связаны друг с другом инерциальные системы координат. Поскольку в любой инерциальной системе координат уравнения Максвелла обязаны иметь один и тот же вид, то преобразования, связывающие такие системы, должны быть симметриями этих уравнений.

Из уравнений Максвелла последовательно получаем:

$$\operatorname{rot} \dot{B} = \ddot{E} \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} E = -\ddot{E} \Rightarrow \ddot{E} - \nabla^2 E = 0$$

(без ограничения общности  $c = 1$ ).

Рассмотрим далее ради простоты одномерный случай (там, где неоднородность будет существенной, это будет указано)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0.$$

## § 62. Группа симметрий уравнений Максвелла

Для нахождения группы симметрий этого уравнения используем условие  $[A, U] = \lambda(t, x)A$  (§ 56), в котором операторы  $A$  и  $U$  имеют вид

$$A = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad U = \xi(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(t, x) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Определяющие уравнения для нахождения коэффициентов искомого оператора получаются в силу этого условия такими:

$$2\xi_t = \lambda, \quad 2\eta_x = \lambda, \quad \eta_t = \xi_x, \quad \xi_{tt} - \xi_{xx} = 0, \quad \eta_{tt} - \eta_{xx} = 0.$$

Из  $\xi_t = \eta_x$  и  $\eta_t = \xi_x$  следует  $\xi_{tt} = \eta_{xt}$ ,  $\xi_{xx} = \eta_{tx}$ . Следовательно, независимы только три соотношения:

$$2\xi_t = \lambda(t, x), \quad 2\eta_x = \lambda(t, x), \quad \eta_t = \xi_x,$$

представляющие собой систему трех уравнений относительно трех неизвестных функций. Множество решений этой системы бесконечно, так что алгебра симметрий волнового уравнения бесконечномерна. Однако нас интересуют только такие симметрии, которые переводят прямые в прямые, т. е. их следует искать в проективной группе, построенной в § 60:

$$\begin{aligned} \xi &= a + bt + cx + dtx + et^2, \\ \eta &= f + gt + hx + etx + dx^2. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в рассматриваемые соотношения, находим

$$\begin{aligned} 2(b + dx + 2et) &= \lambda, \quad 2(h + et + 2dx^2) = \lambda, \\ g + ex &= c + dt. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует  $g = c$ ,  $e = d = 0$ . После чего из первых двух находим  $b = h$ .

Следовательно, искомый оператор получен в виде

$$U = aU_1 + fU_2 + bU_3 + cU_4,$$

где

$U_1 = \partial/\partial t$  — оператор трансляции по времени,

$U_2 = \partial/\partial x$  — оператор трансляции по координате,

$U_3 = t\partial/\partial t + x\partial/\partial x$  — оператор группы подобия,

$U_4 = x\partial/\partial t + t\partial/\partial x$  — оператор группы Лоренца.

Таким образом, единственной группой, отличной от трансляций и однородных растяжений, которая исчерпывает все инерциальные системы отсчета, является группа Лоренца.

### § 63. Оператор второго продолжения. Дважды продолженная группа Лоренца

В дальнейшем нам понадобится дважды продолженный оператор группы Лоренца, который вычисляем так, как это делалось в § 54:

$$U_4^{(2)} = x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x} + (1 - \dot{x}^2) \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - 3\dot{x}\ddot{x} \frac{\partial}{\partial \ddot{x}}.$$

В соответствии с теоремой единственности группы (§ 48) по этому оператору восстанавливаем саму группу, решая дифференциальные уравнения

$$\frac{dt'}{d\tau} = x', \quad \frac{dx'}{d\tau} = t', \quad \frac{d\dot{x}'}{d\tau} = 1 - \dot{x}'^2, \quad \frac{d\ddot{x}'}{d\tau} = -3\dot{x}'\ddot{x}',$$

где правые части составлены из компонент оператора  $U_4^{(2)}$ .

Из первых двух уравнений находим

$$t' = t \operatorname{ch} \tau + x \operatorname{sh} \tau, \quad x' = t \operatorname{sh} \tau + x \operatorname{ch} \tau.$$

Из третьего находим

$$\ln \sqrt{\frac{1 + \dot{x}'}{1 - \dot{x}'}} = \tau + \ln \sqrt{\frac{1 + \dot{x}}{1 - \dot{x}}}.$$

Последним соотношением удобно воспользоваться, чтобы придать каноническому параметру  $\tau$  механический смысл. Пусть относительно неподвижной системы отсчета  $(t, x)$  система  $(t', x')$  движется по про-



странственной координате со скоростью  $v$ . Тогда для начала координат системы  $(t', x')$  его скорость  $\dot{x}'$  равна нулю, а  $\dot{x} = v$ , что дает

$$\tau = \ln \sqrt{(1-v)/(1+v)}.$$

Подставляя это выражение для  $\tau$  в  $\operatorname{sh} \tau$  и  $\operatorname{ch} \tau$ , находим уравнения группы Лоренца, выраженные через параметр  $v$ :

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Оставшиеся два дифференциальных уравнения позволяют найти

$$\dot{x}' = \frac{\dot{x} - v}{1 - \dot{x}v}, \quad \ddot{x} = \left( \frac{\sqrt{1 - v^2}}{1 - \dot{x}v} \right)^3 \ddot{x}.$$

Это и есть полные выражения для дважды продолженной группы Лоренца. Первые два соотношения представляют собой собственно группу Лоренца, третье — закон преобразования скоростей, четвертое — закон преобразования ускорений.

*Замечание 1.* В исходном операторе Лоренца  $U_4$  время и координата входят совершенно симметричным образом. В полученных выше выражениях для группы эта симметрия утеряна. Это означает, что где-то в ходе построения теории возникла ситуация неединственности и был осуществлен переход к одной из симметричных ветвей теории. Это произошло при продолжении оператора и расшифровке смысла канонического параметра группы. Переход к движущейся по оси  $x$  системе координат означает, что каждому значению  $t$  ставится в соответствие новое начало отсчета  $x$  (рис. 74). Ничто не мешает рассуждать иначе.

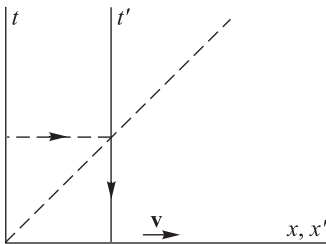


Рис. 74

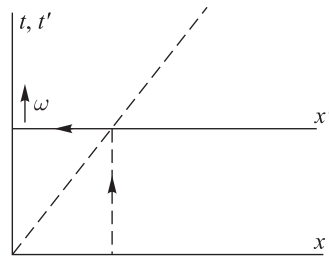


Рис. 75

Каждому значению  $x$  поставим в соответствие новое начало отсчета  $t$  (рис. 75).

Физически это означает, что в каждой точке оси  $x$  стоят свои часы, они все идут в одном темпе, но по-разному заведены. Пример такого рода и был приведен в § 59. Нетрудно построить преобразования, заменяющие в этом случае преобразования Лоренца.

Такие преобразования можно назвать *сопряженными преобразованиями Лоренца*. Если обозначить «скорость» перемещения системы  $(t', x')$  по оси времени через  $\omega$ , то после выкладок, совершенно аналогичных приведенным, получим

$$t' = \frac{t - \omega x}{\sqrt{1 - c^2 \omega^2}}, \quad x' = \frac{x - c^2 \omega t}{\sqrt{1 - c^2 \omega^2}} \quad \left( \omega^2 < \frac{1}{c^2} \right).$$

Здесь для ясности сохранен произвольный масштаб измерения скорости света  $c$ . Эти преобразования удовлетворяют обоим условиям, накладываемым на преобразования, переводящие инерциальные системы координат снова в инерциальные. То есть свободные материальные точки в координатах  $(t', x')$  движутся по прямым, и уравнения Максвелла в них имеют прежний вид.

Инвариантными относительно найденных преобразований являются и уравнения релятивистской динамики, которые представляют основную цель наших построений.

*Замечание 2.* В общем, пространственном случае оператор второго продолжения трехпараметрической группы Лоренца имеет вид

$$U^{(2)} = \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + (E - \dot{\mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}}^\top) \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - (2\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}}^\top + \ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}}^\top) \frac{\partial}{\partial \ddot{\mathbf{r}}},$$

где

$$U^{(2)} = \begin{Bmatrix} U_x^{(2)} \\ U_y^{(2)} \\ U_z^{(2)} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad E = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Три оператора группы в пространственном случае соответствуют трем компонентам скорости  $v$ .

## § 64. Инварианты группы

Перейдем к вычислению инвариантов группы Лоренца. Роль инвариантов исключительно высока. Они представляют собой величины, зависящие от времени, координат, скоростей и ускорений, численное значение которых не зависит от того, в какой системе координат их вычислять. Следовательно, именно они и характеризуют физику явлений, а не выбор системы отсчета. Если требуется построить какую-нибудь теорию, инвариантную относительно преобразований Лоренца, она должна быть выражена через инварианты этих преобразований.

Цель настоящего параграфа — уравнения релятивистской механики — как раз и представляет собой иллюстрацию сказанного.

Дифференциальные инварианты до второго порядка включительно находятся из уравнения

$${}^{(2)}U_4 G = 0 \quad \text{или} \quad x \frac{\partial G}{\partial t} + t \frac{\partial G}{\partial x} + (1 - \dot{x}^2) \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} - 3x\dot{x} \frac{\partial G}{\partial \ddot{x}} = 0.$$

Отсюда следуют три инварианта:

$$G_1 = \sqrt{t^2 - x^2}, \quad G_2 = (t + x) \sqrt{\frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}}}, \quad G_3 = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{(1 - \dot{x}^2)^3}}.$$

Инвариант  $G_1$  носит название интервала.

Для нахождения интегральных инвариантов исходим из уравнения (см. § 54)

$${}^{(2)}U_4 \mathcal{J} + \dot{x} \mathcal{J} = 0,$$

откуда следует

$$\mathcal{J} = \sqrt{1 - \dot{x}^2} \mathcal{M}(G_1, G_2, G_3),$$

т. е. интегральный инвариант группы Лоренца имеет вид

$$\int_a^b \sqrt{1 - \dot{x}^2} \mathcal{M}(G_1, G_2, G_3) dt,$$

где  $\mathcal{M}$  — произвольная функция инвариантов.

В частности, инвариант

$$\int_a^b \sqrt{1 - \dot{x}^2} dt$$

носит название *собственного времени* частицы, движущейся со скоростью  $\dot{x}$ . Смысл введения такого названия для этого инварианта требует пояснения.

Пусть, в частном случае, материальная точка движется с постоянной скоростью:  $\dot{x} = v$ . Тогда с этой точкой можно совместить начало подвижной системы  $(t', x')$ . Связь новых переменных со старыми:  $t' = (t - vx)/\sqrt{1 - v^2}$ ,  $x' = (x - vt)/\sqrt{1 - v^2}$  позволяет выяснить, как течет время на часах, помещенных в подвижную точку. Для нее  $x' = 0$ , откуда  $x = vt$  и  $t' = \sqrt{1 - v^2} t$ , что совпадает со значением интегрального инварианта в случае постоянной скорости.

Приведенное рассуждение оправдывает приписывание инварианту  $\int_0^t \sqrt{1 - v^2} dt$  смысла собственного времени, но ничего не доказывает.

Например, рассмотрим такой интегральный инвариант:

$$\int_0^t \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} \left[ 1 + \frac{\ddot{x}}{c^2 \sqrt{(1 - \dot{x}^2/c^2)^3}} \right] dt.$$

Он обладает тем свойством, что при  $\ddot{x} = 0$  тоже совпадает с найденным выражением для собственного времени при постоянной скорости, а при  $c \rightarrow \infty$  стремится к ньютоновскому «абсолютному» времени.

Система координат, совмещенная с неравномерно движущейся точкой, является неинерциальной и прежде чем говорить о времени в какой-либо точке такой системы (в частности, в начале координат), необходимо указать закон перехода от инерциальной системы к неинерциальной. При построении таких законов приходится вводить новые

постулаты. Поэтому и отождествление  $\int_0^t \sqrt{1 - \dot{x}^2} dt$  с собственным временем частицы, движущейся со скоростью  $\dot{x}$ , следует считать новым постулатом, независимым от уже введенных.

## § 65. Релятивистские уравнения динамики точки

После того как найдены инварианты, можно приступить к нахождению обобщения для уравнений Ньютона. Согласно аксиоме В (§ 61) эти уравнения должны иметь одинаковый вид в любой инерциальной системе координат. Общий вид уравнений второго порядка, инвариантных относительно заданной группы (§ 55), есть

$$G_3 = \Phi(G_1, G_2, F, m).$$

В силу однородности пространства (допустимость группы трансляций) зависимости от  $G_1$  и  $G_2$  быть не может, так как  $G_1$  и  $G_2$  не являются инвариантами трансляций, поэтому уравнение динамики приобретает вид  $G_3 = \Phi(F, m)$ . Используя найденное выше выражение для  $G$ , получим (возвращаясь к измерению  $c$  в произвольном масштабе):

$$\frac{\ddot{x}}{\sqrt{[1 - (\dot{x}/c)^2]^3}} = \Phi(F, m).$$

Из условия

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ddot{x}}{\sqrt{[1 - (\dot{x}/c)^2]^3}} - \Phi(F, m) \right\} = \ddot{x} - \frac{F}{m}$$

находим  $\Phi(F, m) = F/m$ .

Для получения трехмерного обобщения перепишем найденное уравнение в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} \right) = F \quad (c = 1).$$

Вычислим функцию Лагранжа из условия

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2}},$$

откуда находим

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{1-\dot{x}^2}.$$

Трехмерное обобщение, учитывающее инвариантность лагранжиана относительно поворотов, есть

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2-\dot{z}^2}.$$

Заметим, что действие по Гамильтону

$$S = -m \int \sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2-\dot{z}^2} dt = -m \int \sqrt{1-u^2} dt$$

есть интегральный инвариант группы Лоренца, поэтому пространственные уравнения релятивистской механики имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-u^2}} \right) = F_x, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{y}}{\sqrt{1-u^2}} \right) = F_y, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-u^2}} \right) = F_z.$$

Поскольку при записи уравнений Лагранжа в новых переменных  $(t, x, y, z) \rightarrow (t', x', y', z')$  происходит также и перепроектирование их на новые оси, то закон преобразования левых частей написанных уравнений навязывает тот же закон и для преобразования правых частей. В трехмерном случае при переходе от одной инерциальной системы к другой стоящие в правых частях силы изменяются. Для одномерного случая это не так; сила  $F$  одна и та же во всех системах координат и представляет собой обычную ньютонову силу. В одномерном случае уравнение механики инвариантно по отношению к лоренцевой группе, в трехмерном оно ковариантно.

## § 66. 0 неинерциальных системах отсчета

К построению законов перехода от инерциальной системы координат к неинерциальной можно подойти следующим образом.

Пусть относительно неподвижной системы отсчета, которую будем обозначать  $(t_0, x_0)$ , рассматриваемая точка  $x_0(t_0)$  (рис. 76) движется с кусочно-постоянной скоростью. Введем в начале каждого нового участка движения с постоянной скоростью свою непо-

движную систему координат: движение на участке со скоростью  $v_i$  рассматривается в неподвижной системе координат  $(t_i, x_i)$ . Обозначим оси подвижной системы координат, связанной с рассматриваемой точкой на том же участке движения, через  $(\tau_i, \xi_i)$ . Очевидно имеем:

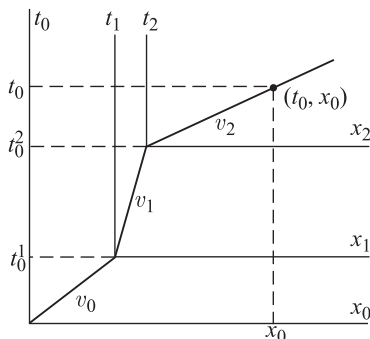


Рис. 76

$$\tau_i = \frac{t_i - v_i x_i}{\sqrt{1 - v_i^2}}, \quad \xi_i = \frac{x_i - v_i t_i}{\sqrt{1 - v_i^2}}.$$

Обозначим момент времени  $t_0$ , в который осуществляется переход к участку движения со скоростью  $v_i$ , через  $t_0^i$  ( $t_0^0 = 0$ ). Тогда  $x_i = x_0 - \sum_{k=0}^{i-1} v_k (t_0^{k+1} - t_0^k)$  и соотношение для  $\xi_i$  принимает вид

$$\xi_i = \frac{x_0 - \sum_{k=0}^{i-1} v_k (t_0^{k+1} - t_0^k) - v_i t_i}{\sqrt{1 - v_i^2}}.$$

В числителе стоит интегральная сумма; увеличивая число разбиений и переходя к пределу  $|t_0^{k+1} - t_0^k| \leq h \rightarrow 0$ , получим

$$x^* = \frac{x - \int_0^t v(t) dt}{\sqrt{1 - v^2(t)}} \quad (t_0 \equiv t, \quad x_0 \equiv x).$$

Аналогичные рассуждения при дополнительном предположении, что в процессе перехода от одного участка движения с постоянной скоростью к другому время во всех точках пространства меняется непрерывно, приводят к соотношению

$$t^* = \int_0^t \sqrt{1 - v^2(t)} dt - v_0 \frac{x - \int_0^t v(t) dt}{\sqrt{1 - v^2(t)}}.$$

Полученные соотношения и определяют закон перехода от инерциальной системы отсчета к неинерциальной:  $(t, x) \rightarrow (t^*, x^*)$ .

Если  $v = v_0 = \text{const}$ , эти преобразования переходят в преобразования Лоренца. Время, текущее в начале координат подвижной системы (т. е. при  $x^* = 0$ ), совпадает с введенным выше понятием собственного времени

$$t^* = \int_0^t \sqrt{1 - v^2(t)} dt.$$

# Часть 6

## ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

### Глава 14

## СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА И ИХ СВОЙСТВА

### § 67. Уравнения Гамильтона

В § 30 были введены уравнения Рауса. Рассмотрим частный случай этих уравнений, когда непотенциальные силы отсутствуют, а преобразованию Лежандра подвергаются все обобщенные скорости. Функция Рауса в этом случае называется функцией Гамильтона и обозначается обычно буквой  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H}(t, q, p) = \left[ \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(t, q, \dot{q}) \right]_{\dot{q}=f(t, q, p)},$$

где

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

— обобщенные импульсы, а функция  $\dot{q} = f(t, q, p)$  представляет собой результат обращения их относительно  $\dot{q}$ .

Уравнения движения, записанные в фазовых переменных, имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

и называются уравнениями Гамильтона.

*Свойства функции Гамильтона.* 1) Из свойств функции Рауса (§ 30) непосредственно следует

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}.$$

2) Вычислим полную производную функции Гамильтона вдоль действительных траекторий:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

Если функция Гамильтона явно от времени не зависит ( $\partial\mathcal{H}/\partial t \equiv 0$ ), то  $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$  влечет  $\mathcal{H} = \text{const}$ . То есть не зависящая от времени функция Гамильтона является первым интегралом системы.

3) Выясним структуру и физический смысл этого первого интеграла. Для этого вначале установим структуру функции Гамильтона.

Общая структура функции Лагранжа такова (§ 26):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_i b_i \dot{q}_i + T_0 + U(t, q).$$

Коэффициенты  $a_{ij}$  и  $b_i$  зависят от времени и от обобщенных координат. Следовательно, обобщенные импульсы могут быть найдены в виде

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j a_{ij} \dot{q}_j + b_i.$$

Эти линейные уравнения относительно  $\dot{q}$  могут быть разрешены, поскольку  $\det \{a_{ij}\} \neq 0$  (§ 26):

$$\dot{q}_i = \sum_j h_{ij} (p_j - b_j),$$

где  $h_{ij}$  — коэффициенты матрицы, обратной к матрице  $\{a_{ij}\}$ .

Подставляя это выражение для  $\dot{q}$  в формулу, определяющую функцию Гамильтона

$$\mathcal{H} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L},$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{i,j} h_{ij} (p_i - b_i) p_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} a_{ij} h_{ik} h_{jl} (p_k - b_k) (p_l - b_l) - \\ &\quad - \sum_{i,j} b_i h_{ij} (p_j - b_j) - T_0 - U = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} h_{ij} p_i p_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j} h_{ij} b_i b_j - \sum_{i,j} h_{ij} b_i p_j - T_0 - U. \end{aligned}$$

Если система консервативна, то  $b = 0$  и  $T_0 = 0$  и функция Гамильтона совпадает с полной энергией, выраженной через переменные  $(q, p)$ :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} h_{ij} p_i p_j - U.$$

И полученный первый интеграл (свойство 2) совпадает с интегралом полной энергии.

Если система неконсервативна, но  $\partial\mathcal{H}/\partial t \equiv 0$ , то система называется обобщенно консервативной, а первый интеграл совпадает с интегралом Пенлеве–Якоби (§ 28).

4) Уравнения Гамильтона в расширенном конфигурационном пространстве  $(t, q)$ .



Рассматривая время в качестве дополнительной обобщенной координаты, можно привести неавтономные уравнения Гамильтона к автономной форме. Для этого необходимо выяснить, что будет играть роль импульса, сопряженного координате  $t$ , и как следует трансформировать функцию Гамильтона с тем, чтобы она зависела от нового состава переменных.

Пусть исходная функция Гамильтона есть  $\mathcal{H}(t, q, p)$ , а трансформированная  $\mathcal{H}^*(t, T, q, p)$ , в которой  $T$  представляет собой импульс, сопряженный  $t$ . Уравнения Гамильтона запишем раздельно по переменным  $(t, T)$  и  $(q, p)$ :

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial T}, & \dot{T} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial t}, \\ \dot{q} &= \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial p}, & \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial q}. \end{aligned}$$

Для того чтобы эта система описывала исходную неавтономную систему с заданным гамильтонианом  $\mathcal{H}(t, q, p)$ , достаточно положить

$$\mathcal{H}^*(t, T, q, p) \equiv T + \mathcal{H}(t, q, p).$$

Поскольку

$$\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt},$$

то второе уравнение системы можно проинтегрировать, и мы получаем, что вдоль траекторий рассматриваемой системы обобщенный импульс, сопряженный времени, отличается от  $-\mathcal{H}$  на константу:

$$T = -\mathcal{H}(t, q, p) + \text{const.}$$

## § 68. Связь законов сохранения со свойствами симметрии гамильтоновых систем

*Теорема Нётер.* Если существует группа Ли

$$\begin{aligned} t' &= t + \xi(t, q)\tau + \dots, \\ q' &= q + \eta(t, q)\tau + \dots, \end{aligned}$$

для которой действие по Гамильтону

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, q, \dot{q}) dt$$

есть интегральный инвариант (§ 54), то у механической системы, описываемой лагранжианом  $\mathcal{L}$ , есть первый интеграл

$$\sum_i \eta_i(t, q) p_i - \xi(t, q) \mathcal{H}(t, q, p) = \text{const},$$

где  $p_i$  — обобщенные импульсы, а  $\mathcal{H}$  — гамильтониан.

*Доказательство.* Полученное в § 54 условие инвариантности функционала имеет в рассматриваемом случае вид

$$\stackrel{(1)}{U} \mathcal{L} + \dot{\xi} \mathcal{L} = 0.$$

Или, в развернутой форме:

$$\xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_i \eta_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \sum_i (\dot{\eta}_i - \dot{\xi} \dot{q}_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \dot{\xi} \mathcal{L} = 0.$$

Используем уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i},$$

с помощью которых условие инвариантности можно переписать в виде

$$\xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_i \eta_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \dot{\eta}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \sum_i \dot{\xi} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d\xi}{dt} \mathcal{L} = 0,$$

Поскольку  $\partial \mathcal{L} / \partial t = -\partial \mathcal{H} / \partial t = -d\mathcal{H} / dt$  и  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i = p_i$ , то

$$-\xi \frac{d\mathcal{H}}{dt} + \frac{d}{dt} \left( \sum_i \eta_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{d\xi}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i p_i \right) + \frac{d\xi}{dt} \mathcal{L} = 0,$$

откуда  $d(-\xi \mathcal{H} + \sum_i \eta_i \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i) / dt = 0$ .

Рассмотрим конкретные примеры.

*Группа трансляций по времени:*  $t' = t + \tau$ ,  $q' = q$ .

Если действие по Гамильтону инвариантно относительно этой группы, то в силу доказанной теоремы, поскольку  $\eta \equiv 0$ ,  $\xi \equiv 1$ , имеем

$$\mathcal{H}(q, p) = \text{const}.$$

То есть закон сохранения энергии есть следствие инвариантности действия по отношению к трансляции по времени.

*Группа трансляций по координатам:*  $t' = t$ ,  $q'_k = q_k + \tau$ ,  $q'_i = q_i$  ( $i \neq k$ ).

В этом случае  $\xi = 0$ ,  $\eta_k = 1$  и из теоремы следует  $p_k = \text{const}$  (закон сохранения импульса).

*Пример.* Механическая система, содержащая  $n$  материальных точек:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + V(x, y, z).$$

Если эта система допускает трансляцию по пространственной координате вида

$$x'_1 = x_1 + \tau, \dots, x'_n = x_n + \tau,$$

то  $\eta_1 = \dots = \eta_n = 1$ ,  $\xi = 0$  и из теоремы Нётер следует

$$\sum_i m_i \dot{x}_i = \text{const}$$

(закон сохранения количества движения).

Пусть  $n = 1$  и система допускает группу  $SO(3)$  (§ 6):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r} = (E + \tau\Gamma)\mathbf{r} + \dots,$$

где

$$-\Gamma^\top = \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_z & \gamma_y \\ \gamma_z & 0 & -\gamma_x \\ -\gamma_y & \gamma_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Для  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$  получаем

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) = \Gamma\mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r};$$

здесь  $\boldsymbol{\gamma}$  — единичный вектор малого поворота, определяющего ядро ортогональной группы. По теореме Нётер первый интеграл имеет вид

$$\mathbf{p} \cdot [\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}] = \boldsymbol{\gamma} \cdot [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = \text{const}.$$

Откуда следует интеграл момента количеств движения

$$\mathbf{K} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

*Замечание.* Если действие по Гамильтону инвариантно по отношению к некоторой группе, содержащей преобразование времени, то первый интеграл, доставляемый обсуждаемой теоремой, малополезен, поскольку он оказывается зависящим от времени и, следовательно, не позволяет понизить порядок автономной системы (§ 28).

*Пример.* Действие по Гамильтону для системы с лагранжианом  $\mathcal{L} = m\dot{x}^2/2$  (материальная точка с одной степенью свободы, движущаяся по инерции) инвариантно относительно группы

$$t' = t + 2t\tau, \quad x' = x + x\tau.$$

Действительно, в этом случае  $U \stackrel{(1)}{=} 2t\partial/\partial t + x\partial/\partial x - \dot{x}\partial/\partial \dot{x}$  и условие инвариантности действия есть

$$U\mathcal{L} + \dot{\xi}\mathcal{L} = 2t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} - \dot{x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} + 2\mathcal{L} = 0,$$

которое для  $\mathcal{L} = m\dot{x}^2/2$ , очевидно, выполнено.

Поэтому, учитывая, что  $\xi = 2t$ ,  $\eta = x$ ,  $\mathcal{H} = p^2/(2m)$ , получаем выражение для первого интеграла

$$-\frac{tp^2}{m} + xp = \text{const.}$$

## § 69. Инварианты гамильтоновых систем

На гамильтонову систему дифференциальных уравнений

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \quad \mathcal{H}(q, p)$$

можно смотреть, как на уравнения, определяющие в фазовом пространстве  $(q, p)$  однопараметрическую ( $t$  — параметр) группу Ли, оператор которой, очевидно, имеет вид

$$U = \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Любой инвариант такой группы  $G(q, p)$ , т.е. функция, для которой  $UG = 0$ , является первым интегралом исходной системы.

Выражение

$$UG \equiv \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right) \equiv \{\mathcal{H}, G\}$$

называется *скобкой Пуассона* двух функций  $\mathcal{H}$  и  $G$ .

*Свойства* скобки Пуассона. 1) Линейность по каждому аргументу:

$$\{\mathcal{H}, \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2\} = \lambda_1 \{\mathcal{H}, G_1\} + \lambda_2 \{\mathcal{H}, G_2\},$$

$\lambda_1, \lambda_2$  — вещественные числа.

2) Кососимметричность:

$$\{\mathcal{H}, G\} = -\{G, \mathcal{H}\}.$$

3) Справедливость правила Лейбница при дифференцировании по любой переменной, например,

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \{\mathcal{H}, G\} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}, G \right\} + \left\{ \mathcal{H}, \frac{\partial G}{\partial q_k} \right\}.$$

Эти свойства очевидны. Рассмотрим теперь три нужное число раз дифференцируемые функции  $\mathcal{H}(q, p)$ ,  $G(q, p)$ ,  $F(q, p)$ . Они порождают три гамильтоновые группы Ли с операторами

$$\begin{aligned}
 U_H &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}, \\
 U_G &= \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}, \\
 U_F &= \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}.
 \end{aligned}$$

4) Скобка Пуассона двух функций  $\mathcal{H}$  и  $G$  представляет собой функцию Гамильтона той дифференциальной системы, которая определяется коммутатором операторов систем с гамильтонианами  $\mathcal{H}$  и  $G$ . Иными словами:

$$[U_{\mathcal{H}}, U_G] = \frac{\partial \{\mathcal{H}, G\}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial \{\mathcal{H}, G\}}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}.$$

Докажем это свойство. Правило вычисления коммутатора, приведенное в § 47, в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{aligned}
 [U_{\mathcal{H}}, U_G] &= \left( U_{\mathcal{H}} \frac{\partial G}{\partial p} - U_G \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial q} - \left( U_{\mathcal{H}} \frac{\partial G}{\partial q} - U_G \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right) \frac{\partial}{\partial p} = \\
 &= \left( \left\{ \mathcal{H}, \frac{\partial G}{\partial p} \right\} - \left\{ G, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right\} \right) \frac{\partial}{\partial q} - \left( \left\{ \mathcal{H}, \frac{\partial G}{\partial q} \right\} - \left\{ G, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right\} \right) \frac{\partial}{\partial p}.
 \end{aligned}$$

Учитывая свойства 2 и 3, и получаем утверждаемое.

5) Тождество Пуассона:

$$\{\{\mathcal{H}, G\}, F\} + \{\{F, \mathcal{H}\}, G\} + \{\{G, F\}, \mathcal{H}\} = 0.$$

*Доказательство.* Вычислим скобку Пуассона, пользуясь свойством 3) (правило Лейбница):

$$\{\{\mathcal{H}, G\}, F\}^* = \{\{\mathcal{H}, F\}^*, G\} + \{\mathcal{H}, \{G, F\}^*\}.$$

Звездочкой помечена первоначально внешняя скобка, которая по правилу Лейбница была применена к каждому из членов внутренней скобки. Легко видеть, что полученное соотношение эквивалентно тождеству Пуассона.

6) Если  $G$  и  $F$  — первые интегралы гамильтоновой системы с гамильтонианом  $\mathcal{H}$ , то их скобка Пуассона  $\{G, F\}$  тоже является первым интегралом при условии, что она не обращается тождественно в ноль.

Доказательство следует из тождества Пуассона, в котором по условию  $\{\mathcal{H}, G\} = 0$  и  $\{F, \mathcal{H}\} = 0$ , следовательно, и  $\{\{G, F\}, \mathcal{H}\} = 0$ , а это означает, что  $\{G, F\}$  — первый интеграл.

Пусть гамильтонова система дифференциальных уравнений

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad \mathcal{H}(q, p)$$

порождает группу преобразований фазового пространства в себя  $(q, p) \rightarrow (q', p')$ , действующую вдоль траекторий этой системы. Ядро группы:

$$\begin{aligned} q'_i &= q_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} t + \dots \\ p'_i &= p_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} t + \dots \end{aligned}$$

Оператор группы:

$$U = \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Ниже речь идет об интегральных инвариантах этой группы.

*Теорема Лиувилля* (о сохранении фазового объема). Интеграл

$$\mathcal{J}_1 = \int \int_V dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$$

есть инвариант любой гамильтоновой группы. Иными словами, если при отображении  $(q, p) \rightarrow (q', p')$  область интегрирования изменилась:  $V \rightarrow V'$ , то интеграл по этой области постоянен:

$$\int \int_{V'} dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = \int \int_V dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n.$$

*Доказательство.* Воспользуемся критерием инвариантности подобного рода интегралов, установленным в § 54:

$$U\Phi + \Phi \operatorname{div} \eta = 0.$$

В нашем случае  $\Phi \equiv 1$ , а

$$\operatorname{div} \eta = \sum_i \left( \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0.$$

*Пример.* Гамильтонова система  $\dot{q}' = p'$ ,  $\dot{p}' = -q'$  с гамильтонианом  $\mathcal{H} = (p'^2 - q'^2)/2$  порождает группу отображений фазового пространства в себя:

$$q' = q \operatorname{ch} t + p \operatorname{sh} t, \quad p' = q \operatorname{sh} t + p \operatorname{ch} t \quad (t - \text{параметр группы}).$$

Здесь  $q, p$  — начальные условия, а  $q', p'$  — решение системы.

Рассмотрим интеграл

$$\int \int_{q^2 + p^2 \leq 1} dq dp.$$

При отображении  $(q, p) \rightarrow (q', p')$  граница круга  $f = q^2 + p^2 = 1$  преобразуется в границу:

$$f = q'^2 + p'^2 = (q \operatorname{ch} t + p \operatorname{sh} t)^2 + (q \operatorname{sh} t + p \operatorname{ch} t)^2 = f'(q, p, t) = 1.$$

Теорема Лиувилля утверждает (рис. 77):

$$\int \int_{f=q^2+p^2 \leq 1} dq dp = \int \int_{f'(q,p,t) \leq 1} dq dp.$$

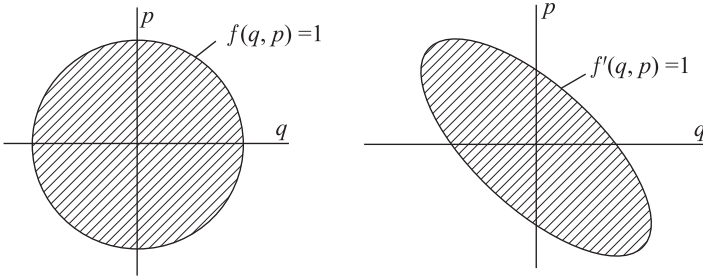


Рис. 77

**Теорема** (Интегральный инвариант Пуанкаре). Криволинейный интеграл

$$\mathcal{J}_2 = \oint_{\Gamma} Q(q, p) dq + P(q, p) dp$$

является инвариантом произвольной гамильтоновой группы тогда и только тогда, когда

$$Q(q, p) = cp, \quad P(q, p) = 0,$$

$c$  — скалярная константа.

**Доказательство.** Для сокращения выкладок рассмотрим случай, когда  $q$  и  $p$  — скаляры.

1) Необходимость: если группа  $q' = q + \eta_1(q, p)t + \dots$ ,  $p' = p + \eta_2(q, p)t + \dots$  гамильтонова, то  $Q \equiv cp$ , а  $P \equiv 0$ .

Условие инвариантности интеграла подобного типа получено в § 54. Оно состоит в требовании равенства нулю производной от этого интеграла вдоль траекторий группы:

$$\frac{d\mathcal{J}_2}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{\Gamma'} Q(q, p) dq + P(q, p) dp \quad (q, p \rightarrow q', p').$$

Эта производная была вычислена в виде (в обозначениях этого параграфа)

$$\frac{d\mathcal{J}_2}{dt} = \oint_{\Gamma'} \left( UQ + Q \frac{\partial \eta_1}{\partial q} + P \frac{\partial \eta_2}{\partial q} \right) dq + \left( UP + Q \frac{\partial \eta_1}{\partial p} + P \frac{\partial \eta_2}{\partial p} \right) dp.$$

Для равенства этой производной нулю необходимо и достаточно

$$\left( UQ + Q \frac{\partial \eta_1}{\partial q} + P \frac{\partial \eta_2}{\partial q} \right)_p = \left( UP + Q \frac{\partial \eta_1}{\partial p} + P \frac{\partial \eta_2}{\partial p} \right)_q.$$

Если рассматриваемая группа гамильтонова, то

$$UQ = \{\mathcal{H}, Q\}, \quad UP = \{\mathcal{H}, P\}, \quad \eta_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \eta_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$$

и написанное условие принимает вид

$$\{\mathcal{H}, Q\}_p + Q_p \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q \partial p} - P_p \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q^2} = \{\mathcal{H}, P\}_q + Q_q \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p^2} - P_q \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q \partial p}.$$

Отсюда вытекает

$$\{\mathcal{H}, Q_p\} = \{\mathcal{H}, P_q\}$$

или

$$\{\mathcal{H}, Q_p - P_q\} = 0.$$

Поскольку  $\mathcal{H}$  — произвольно, то отсюда следует

$$Q_p - P_q = c.$$

Частное решение этого уравнения есть

$$Q = cp, \quad P = 0.$$

Общее решение есть сумма какого-либо частного и общего решения однородного уравнения

$$Q = cp + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial q}, \quad P = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p},$$

$\mathcal{M}(q, p)$  — произвольная дифференцируемая функция. Необходимость доказана.

2) Достаточность: если интеграл

$$\mathcal{J}_2 = \oint_{\Gamma} p dq$$

является интегральным инвариантом группы

$$q' = q + \eta_1(q, p)t + \dots, \quad p' = p + \eta_2(q, p)t + \dots,$$

то эта группа — гамильтонова.

Полученное выше условие, для того чтобы  $d\mathcal{J}_2/dt = 0$ , в данном случае приобретает вид

$$\left( Up + p \frac{\partial \eta_1}{\partial q} \right)_p = \left( p \frac{\partial \eta_1}{\partial p} \right)_q.$$

Поскольку  $Up = \eta_2$ , то из него следует

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial p} + \frac{\partial \eta_1}{\partial q} = 0,$$

а это значит, что  $\eta_1 = \partial \mathcal{H} / \partial p$ ,  $\eta_2 = -\partial \mathcal{H} / \partial q$ , где  $\mathcal{H}(q, p)$  — произвольная дифференцируемая функция. Теорема полностью доказана.



Случай, когда гамильтониан явно зависит от времени, может быть, как это показано в § 67, сведен к автономному введением импульса, сопряженного времени. Однако получаемая таким образом автономная система обладает более простой структурой, чем в случае автономных систем общего вида. Поэтому и к доказанной выше теореме, которая в неавтономном случае формулируется для интегралов в виде

$$\oint_{\Gamma} T dt + p dq,$$

могут быть добавлены некоторые дополнительные детали.

Действительно, контур  $\Gamma$ , рассматриваемый в пространстве  $(t, T, q, p)$ , может выбираться из более узкого класса. Вместо того чтобы его рассматривать в параметрической форме

$$\begin{aligned} t &= t(\alpha), & T &= T(\alpha), \\ q &= q(\alpha), & p &= p(\alpha) \end{aligned}$$

с произвольными функциями параметра  $\alpha$ , сузим класс кривых  $\Gamma$ , воспользовавшись тем, что вдоль траекторий системы  $T \equiv -\mathcal{H}(t, q, p)$ , и выберем параметризацию  $T$  зависимым от параметризации  $t, q, p$  способом:

$$T(\alpha) = -\mathcal{H}[t(\alpha), q(\alpha), p(\alpha)].$$

Тогда интегральный инвариант Пуанкаре можно рассматривать в пространстве меньшего числа переменных:  $t, q, p$  и он приобретает вид

$$\oint_{\Gamma} [-\mathcal{H}(t, q, p) dt + p dq].$$

В этом частном случае интегральный инвариант Пуанкаре называется инвариантом Пуанкаре–Картана.

*Замечание.* Из доказанного ранее следует, что интеграл  $\oint [-\mathcal{H} dt + p dq]$  является интегральным инвариантом группы, определяемой уравнениями:

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}.$$

Однако этот интеграл инвариантен и относительно более широкой группы

$$\frac{dt}{d\tau} = \pi(t, q, p), \quad \frac{dq}{d\tau} = \pi(t, q, p) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\pi(t, q, p) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q},$$

где  $\pi(t, q, p)$  — произвольная скалярная функция.

У этой группы те же самые траектории. Меняется лишь расписание движения вдоль каждой траектории. Иными словами, интеграл Пуанкаре–Картана имеет одно и то же значение вдоль любой кривой  $\Gamma$ , охватывающей одну и ту же трубку траекторий, а не только вдоль

кривых, в которые сносится начальный контур самими траекториями (рис. 78). Этот факт следует из теоремы.

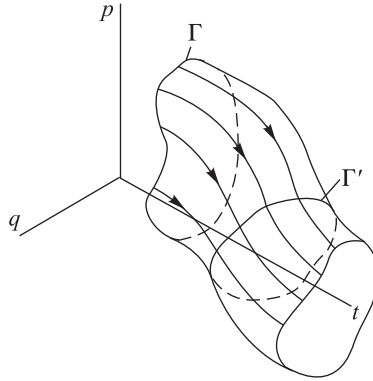


Рис. 78

*Теорема.* Для того чтобы интеграл  $\oint [-\mathcal{H}dt + pdq]$  был интегральным инвариантом группы  $dt/d\tau = \pi$ ,  $dq/d\tau = \pi\mathcal{M}$ ,  $dp/d\tau = \pi\mathcal{N}$  с произвольной функцией  $\pi(t, q, p)$ , необходимо и достаточно:

$$\mathcal{M} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \mathcal{N} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}.$$

*Доказательство.* Выпишем ядро группы

$$\begin{aligned} t' &= t + \pi\tau + \dots, \\ q' &= q + \pi\mathcal{M}\tau + \dots, \\ p' &= p + \pi\mathcal{N}\tau + \dots \end{aligned}$$

и ее оператор

$$U = \pi \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{M} \frac{\partial}{\partial q} + \mathcal{N} \frac{\partial}{\partial p} \right).$$

Под действием группы интеграл преобразуется так:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma'} [-\mathcal{H}(t', q', p') dt' + p' dq'] &= \oint_{\Gamma} [-\mathcal{H}(t, q, p) dt + pdq] + \\ &+ \tau \oint_{\Gamma} [-U\mathcal{H}dt + Updq + (-\mathcal{H}d\pi + pd(\pi\mathcal{M}))] + \dots \end{aligned}$$

Необходимое и достаточное условие инвариантности есть

$$\oint_{\Gamma} [-U\mathcal{H}dt + Updq - \mathcal{H}d\pi + pd(\pi\mathcal{M})] = 0.$$

Воспользуемся интегрированием по частям:

$$\oint \mathcal{H} d\pi = - \oint \pi d\mathcal{H}, \quad \oint p d(\pi \mathcal{M}) = - \oint \pi \mathcal{M} dp.$$

Тогда

$$\oint_{\Gamma} \left[ \left( -\mathcal{M} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - \mathcal{N} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right) dt + (\mathcal{N} + \mathcal{H}_q) dq + (-\mathcal{M} + \mathcal{H}_p) dp \right] \pi = 0.$$

В силу произвольности  $\pi$

$$\mathcal{M} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} + \mathcal{N} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = 0, \quad \mathcal{N} + \mathcal{H}_q = 0, \quad -\mathcal{M} + \mathcal{H}_p = 0.$$

Эта переопределенная система удовлетворяется единственным решением

$$\mathcal{N} = -\mathcal{H}_q, \quad \mathcal{M} = \mathcal{H}_p.$$

## § 70. Канонические преобразования

Начнем с рассмотрения примера.

*Пример.* Гамильтониан одномерного линейного осциллятора имеет вид  $\mathcal{H} = (p^2 + q^2)/2$ , а соответствующие ему уравнения движения таковы:  $\dot{q} = p$ ,  $\dot{p} = -q$ .

В этих уравнениях движения выполним замену переменных  $(q, p) \rightarrow (\varphi, r)$ :  $q = r \cos \varphi$ ,  $p = r \sin \varphi$ . Внося эту замену в уравнения, получаем уравнения движения осциллятора в новых переменных:  $\dot{\varphi} = -1$ ,  $\dot{r} = 0$ .

Можно поинтересоваться, во что переходит функция Гамильтона при этой замене переменных:

$$\tilde{\mathcal{H}}(\varphi, r) = \mathcal{H}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{1}{2} r^2.$$

Мы видим, что в новых переменных утрачена связь преобразованной функции Гамильтона с преобразованными уравнениями, поскольку

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial r} = r \neq -1.$$

Уравнения Лагранжа (§ 26) были ковариантны по отношению к любым допустимым (дифференцируемым) заменам обобщенных координат.

Уравнения Гамильтона свойством ковариантности по отношению к любым допустимым преобразованиям фазовых переменных не обладают.

Класс замен фазовых переменных, для которых ковариантность уравнений Гамильтона имеет место, и представляет собой канонические преобразования.

*Определение.* Преобразование  $(q, p) \rightarrow (\tilde{q}, \tilde{p})$  называется *каноническим*, если оно сохраняет связь преобразованных уравнений с преобразованным гамильтонианом, каким бы этот гамильтониан ни был. Иными словами, преобразование  $(q, p) \rightarrow (\tilde{q}, \tilde{p})$  называется каноническим, если для любого гамильтониана коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\mathcal{H}(q, p)} & \longrightarrow & \boxed{\dot{q} = \mathcal{H}_p, \dot{p} = -\mathcal{H}_q} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \boxed{\mathcal{H}[q(\tilde{q}, \tilde{p}), p(\tilde{q}, \tilde{p})] \equiv \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{q}, \tilde{p})} & \longrightarrow & \boxed{\dot{\tilde{q}} = \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{p}}, \dot{\tilde{p}} = -\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{q}}}
 \end{array}$$

*Замечание.* В литературе встречается определение *валентных* канонических преобразований. Так называются преобразования, переводящие любую гамильтонову систему снова в гамильтонову, однако гамильтониан преобразованной системы получается из гамильтониана исходной умножением на константу:  $\tilde{\mathcal{H}}(\tilde{q}, \tilde{p}) = c\mathcal{H}[q(\tilde{q}, \tilde{p}), p(\tilde{q}, \tilde{p})]$ . Эта константа  $c$  называется валентностью преобразования. Такое расширение класса канонических преобразований большой содержательностью не обладает, поскольку легко показать, что любое валентное каноническое преобразование есть композиция канонического преобразования и преобразования растяжения:  $q = k_1\tilde{q}$ ,  $p = k_2\tilde{p}$ .

*Условия каноничности замены.* Введем обозначения для фазового вектора:  $x = (q, p)$ , первые  $h$  координат которого совпадают с обобщенными координатами  $q_i$ , а оставшиеся  $n$  координат — с обобщенными импульсами  $p_i$ . В этих обозначениях систему уравнений Гамильтона можно записать в следующей форме:

$$\dot{x}_i = \sum_j \mathcal{J}_{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j}$$

или, в краткой записи  $\dot{x} = \mathcal{J}d\mathcal{H}/dx$ , где  $\mathcal{J}$  — симплектическая матрица  $2n \times 2n$ :

$$\mathcal{J} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & E \\ -E & 0 \end{array} \right\|,$$

а  $E$  — единичная  $n \times n$  матрица.

Матрица  $\mathcal{J}$  обладает свойством  $\mathcal{J}^2 = -E_{2n \times 2n}$  (аналог мнимой единицы).

Рассмотрим теперь замену переменных  $x \rightarrow \tilde{x}$ :

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x)$$

и установим, каким условиям должна удовлетворять функция  $\tilde{x}(x)$ , чтобы эта замена была канонической. Очевидно, имеем

$$\dot{\tilde{x}}_i = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j,k} \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} J_{jk} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k}.$$

С другой стороны

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k} = \sum_l \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{x}_l} \frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_k}.$$

Окончательно получаем

$$\dot{\tilde{x}}_i = \sum_{j,k,l} \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} J_{jk} \frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{x}_l}.$$

Или, в краткой записи:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{\mathcal{J}} \frac{d\tilde{\mathcal{H}}}{d\tilde{x}}, \quad \tilde{\mathcal{J}} = \frac{d\tilde{x}}{dx} \mathcal{J} \left( \frac{d\tilde{x}}{dx} \right)^\top.$$

Для того чтобы замена  $\tilde{x}(x)$  была канонической, необходимо и достаточно

$$\frac{d\tilde{x}}{dx} \mathcal{J} \left( \frac{d\tilde{x}}{dx} \right)^\top = \mathcal{J}.$$

Поскольку найденное условие каноничности замены содержит ограничения на производные от уравнений замены, то оно носит название *локального критерия каноничности*. Локальный критерий каноничности выделяет в множестве всех дифференцируемых замен многообразие второго порядка канонических замен.

*Пример.* Выделить из семейства линейных преобразований вида

$$\left\| \begin{array}{c} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} u & v \\ -v & u \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} q \\ p \end{array} \right\|,$$

$u, v$  — вещественные числа, многообразие канонических замен.

*Решение.* Здесь

$$\frac{d\tilde{x}}{dx} = \left\| \begin{array}{cc} u & v \\ -v & u \end{array} \right\|.$$

Используем найденный критерий:

$$\left\| \begin{array}{cc} u & v \\ -v & u \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} u & -v \\ v & u \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Перемножив матрицы слева, находим:

$$\left\| \begin{array}{cc} 0 & u^2 + v^2 \\ -u^2 - v^2 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right\|,$$

откуда

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Многообразие канонических замен в плоскости  $(u, v)$  всех рассматриваемых замен представляет собой окружность единичного радиуса.

Матрицу обсуждаемого линейного преобразования можно представить так:

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} = uE + v\mathcal{J}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что семейство таких преобразований изоморфно алгебре комплексных чисел и многообразие канонических преобразований в нем изоморфно группе вращений.

*Теорема.* Отображение, осуществляемое фазовым потоком гамильтоновой системы, является каноническим.

*Доказательство.* Пусть семейство замен  $x \rightarrow \tilde{x}$ :  $\tilde{x} = \tilde{x}(x, \tau)$  порождается гамильтоновой системой

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \mathcal{J} \frac{d\mathcal{H}}{d\tilde{x}}, \quad \tilde{x}(0) = x.$$

Введем следующие обозначения:  $A = d\tilde{x}/dx$ ,  $\tilde{\mathcal{J}} = A\mathcal{J}A^\top$ . Общий элемент последней матрицы есть функция  $x$  и  $\tau$ :  $\tilde{\mathcal{J}}_{ij}(x, \tau)$ . Любая такая функция представима рядом Ли (§49):

$$\tilde{\mathcal{J}}_{ij}(x, \tau) = \tilde{\mathcal{J}}_{ij}(x, 0) + \tau(U\tilde{\mathcal{J}}_{ij})_{\tau=0} + \dots$$

Если  $U\tilde{\mathcal{J}}|_{\tau=0} = 0$ , то и все  $U^k\tilde{\mathcal{J}}|_{\tau=0} = 0$ .

Вычислим  $U\tilde{\mathcal{J}}|_{\tau=0}$ . Последовательно имеем

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + \mathcal{J} \frac{d\mathcal{H}}{dx} \tau + \dots, & \frac{d\tilde{x}}{d\tau} &= E + \mathcal{J} \frac{d^2\mathcal{H}}{dx^2} \tau + \dots, \\ \left( \frac{d\tilde{x}}{d\tau} \right)^\top &= E - \frac{d^2\mathcal{H}}{dx^2} \mathcal{J} \tau + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dx} \mathcal{J} \left( \frac{d\tilde{x}}{d\tau} \right)^\top &= \left( E + \mathcal{J} \frac{d^2\mathcal{H}}{dx^2} \tau + \dots \right) \mathcal{J} \left( E - \frac{d^2\mathcal{H}}{dx^2} \mathcal{J} \tau + \dots \right) = \\ &= \mathcal{J} + \left( \mathcal{J} \frac{d^2\mathcal{H}}{dx^2} \mathcal{J} - \mathcal{J} \frac{d^2\mathcal{H}}{dx^2} \mathcal{J} \right) \tau + \dots \end{aligned}$$

Коэффициент при  $\tau$  равен нулю. Таким образом,  $\tilde{\mathcal{J}} = \mathcal{J}$ , т. е. фазовый поток гамильтоновой системы удовлетворяет условию каноничности.

*Производящие функции.* Так называются функции, позволяющие конструктивно строить канонические преобразования посредством применения к этим функциям некоторых простых операций.

Для введения производящих функций воспользуемся установленным ранее взаимно однозначным соответствием между уравнениями Гамильтона и интегральным инвариантом Пуанкаре–Картана:

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = 1 \\ \frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \end{cases} \sim \oint_{\Gamma} [-\mathcal{H}dt + pdq] - \text{инвариант.}$$

Рассмотрим преобразование  $(q, p) \rightarrow (\tilde{q}, \tilde{p})$ . В новых переменных уравнения приобретают вид

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{d\tilde{q}}{d\tau} = \mathcal{M}(t, \tilde{q}, \tilde{p}), \quad \frac{d\tilde{p}}{d\tau} = \mathcal{N}(t, \tilde{q}, \tilde{p}).$$

Если интегральный инвариант в новых переменных сохранит свою форму

$$\oint_{\tilde{\Gamma}} [-\tilde{\mathcal{H}}dt + \tilde{p}d\tilde{q}],$$

то, по доказанному ранее,  $\mathcal{M} = \partial \tilde{\mathcal{H}} / \partial \tilde{p}$ ,  $\mathcal{N} = -\partial \tilde{\mathcal{H}} / \partial \tilde{q}$ , следовательно, преобразование будет каноническим.

Для того чтобы в результате преобразования инвариант Пуанкаре–Картана сохранил свою форму, необходимо и достаточно, чтобы измененная часть подынтегрального выражения представляла собой полный дифференциал:

$$\oint_{\Gamma} [-\mathcal{H}dt + pdq] = \oint_{\tilde{\Gamma}} [-\tilde{\mathcal{H}}dt + \tilde{p}d\tilde{q} + dF(t, \tilde{q}, \tilde{p})].$$

Произвольную функцию  $F(t, \tilde{q}, \tilde{p})$ , используя рассматриваемое преобразование  $(q, p) \rightarrow (\tilde{q}, \tilde{p})$ , можно записать так:

$$F(t, \tilde{q}, \tilde{p}) = S[t, q(t, \tilde{q}, \tilde{p}), \tilde{p}].$$

Подставляя это представление под знак полного дифференциала, находим

$$\oint_{\Gamma} (-\mathcal{H}dt + pdq) = \oint_{\tilde{\Gamma}} \left( -\tilde{\mathcal{H}}dt + \tilde{p}d\tilde{q} + \frac{\partial S}{\partial t}dt + \frac{\partial S}{\partial q}dq + \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}}d\tilde{p} \right),$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &= \frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}[t, q(t, \tilde{q}, \tilde{p}), p(t, \tilde{q}, \tilde{p})], \\ \tilde{q} &= \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}}, \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}. \end{aligned} \quad (*)$$

Таким образом, конструктивный алгоритм построения канонического преобразования состоит в следующем. Взять произвольную дифференцируемую функцию смешанных переменных вида  $S(t, q, \tilde{p})$ . Составить соотношения (\*). Разрешить их либо относительно новых переменных, либо относительно старых. Результат такого разрешения и будет представлять собой каноническое преобразование.

*Пример.*  $S = q\tilde{p}^2$ . Соотношения (\*) дают

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \tilde{p}^2, \quad \tilde{q} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}} = 2q\tilde{p}.$$

Разрешая их относительно новых переменных, получаем каноническую замену:  $\tilde{q} = 2q\sqrt{p}$ ,  $\tilde{p} = \sqrt{p}$ .

Выбор состава смешанных переменных в производящей функции не является единственно возможным. Возможен следующий выбор:

$$S_1(t, q, \tilde{p}), \quad S_2(t, \tilde{q}, p), \quad S_3(t, q, \tilde{q}), \quad S_4(t, p, \tilde{p}).$$

Для трех новых функций  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$  выкладки, аналогичные выполненным, приводят к соотношениям:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &= \frac{\partial S_2}{\partial t} + \mathcal{H}, \quad \tilde{p} = -\frac{\partial S_2}{\partial \tilde{q}}, \quad q = -\frac{\partial S_2}{\partial p}, \\ \tilde{\mathcal{H}} &= \frac{\partial S_3}{\partial t} + \mathcal{H}, \quad p = \frac{\partial S_3}{\partial q}, \quad \tilde{p} = -\frac{\partial S_3}{\partial \tilde{q}}, \\ \tilde{\mathcal{H}} &= \frac{\partial S_4}{\partial t} + \mathcal{H}, \quad q = -\frac{\partial S_4}{\partial p}, \quad \tilde{q} = \frac{\partial S_4}{\partial \tilde{p}}. \end{aligned}$$

*Пример.* Построить производящие функции для семейства канонических преобразований

$$\left\| \begin{array}{c} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} u & v \\ -v & u \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} q \\ p \end{array} \right\| \quad (u^2 + v^2 = 1).$$

*Решение.* Для нахождения производящей функции  $S_1$  необходимо разрешить эту систему относительно  $p$  и  $\tilde{q}$ :

$$p = \frac{\tilde{q} + vq}{u}, \quad \tilde{q} = \frac{q + v\tilde{p}}{u} \quad (u \neq 0).$$

Таким образом, для нахождения  $S_1$  имеем уравнения

$$\frac{\partial S_1}{\partial q} = \frac{\tilde{p} + vq}{u}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial \tilde{p}} = \frac{q + v\tilde{p}}{u},$$

откуда

$$S_1 = \int_0^1 \left[ \left( \frac{\tilde{p} + vq}{u} \right) q + \left( \frac{q + v\tilde{p}}{u} \right) \tilde{p} \right] \tau d\tau = \frac{1}{2u} [2q\tilde{p} + v(q^2 + \tilde{p}^2)].$$



Для нахождения производящей функции  $S_2(\tilde{q}, p)$  необходимо разрешить эту систему относительно  $\tilde{p}$  и  $q$ :

$$q = \frac{\tilde{q} - vp}{u}, \quad \tilde{p} = \frac{p - v\tilde{q}}{u} \quad (u \neq 0)$$

и производящая функция получается такой:

$$S_2 = \frac{1}{2u}[-2p\tilde{q} + v(p^2 + \tilde{q}^2)].$$

Для нахождения производящей функции  $S_3(q, \tilde{q})$  рассматриваемую си-

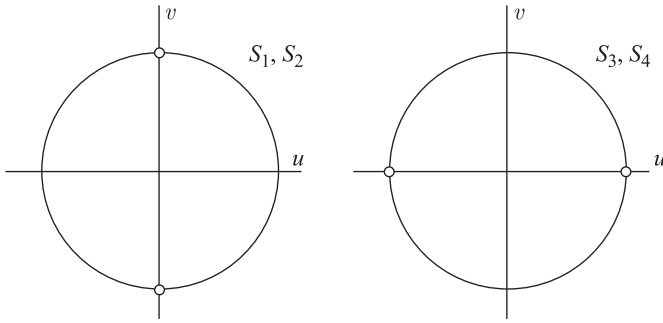


Рис. 79

стему разрешаем относительно  $p$  и  $\tilde{p}$ :

$$p = \frac{\tilde{q} - uq}{v}, \quad \tilde{p} = \frac{u\tilde{q} - q}{v} \quad (v \neq 0),$$

что дает

$$S_3 = \frac{1}{2v}[2q\tilde{q} - u(q^2 + \tilde{q}^2)].$$

Наконец, для функции  $S_4(p, \tilde{p})$ :

$$q = \frac{up - \tilde{p}}{v}, \quad \tilde{q} = \frac{p - u\tilde{p}}{v} \quad (v \neq 0)$$

и

$$S_4 = \frac{1}{2v}[2p\tilde{p} - u(p^2 + \tilde{p}^2)].$$

Мы видим, что в этом примере производящие функции  $S_1$  и  $S_2$  не существуют для симплектического преобразования:

$$\left\| \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} \right\| = \mathcal{J} \left\| \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \right\|,$$

а функции  $S_3$  и  $S_4$  не существуют для тождественного (рис. 79):

$$\left\| \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} \right\| = E \left\| \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \right\|.$$

## § 71. Уравнение Гамильтона–Якоби

Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \quad \mathcal{H}(t, q, p).$$

Поставим для нее задачу найти каноническую замену переменных  $(q, p) \rightarrow (\tilde{q}, \tilde{p})$ , приводящую ее уравнения к наипростейшей форме.

Воспользуемся для этого производящей функцией первого типа

$$S(t, q, \tilde{p}), \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \tilde{q} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}}.$$

Эта функция выбрана для определенности. С равным успехом можно было бы воспользоваться другими.

Выше была установлена связь между старым и новым гамильтонианами в силу канонической замены переменных:  $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \partial S / \partial t$ .

Уравнения движения принимают наиболее простую форму, если  $\tilde{\mathcal{H}} = 0$ . Это условие приводит к уравнению для нахождения производящей функции  $S$ :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} \left[ t, q, \frac{\partial S}{\partial q} \right] = 0.$$

Оно и называется уравнением Гамильтона–Якоби.

Функция  $S(t, q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , удовлетворяющая уравнению Гамильтона–Якоби и зависящая от  $n$  произвольных постоянных  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , называется *полным интегралом* этого уравнения, если ни одна из постоянных не входит аддитивно и

$$\det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right) \neq 0.$$

Если в найденном полном интеграле отождествить произвольные постоянные  $\alpha_k$  с новыми импульсами  $\tilde{p}_k$ , то использование этого полного интеграла в качестве производящей функции канонической замены приводит исходные дифференциальные уравнения Гамильтона к виду

$$\dot{\tilde{q}} = 0, \quad \dot{\tilde{p}} = 0$$

с очевидным решением  $\tilde{q} = \text{const}, \tilde{p} = \text{const}$ .

Разрешив соотношения  $\tilde{q} = \partial S / \partial \tilde{p}$ ,  $p = \partial S / \partial q$  относительно переменных  $q$  и  $p$ , получим общее решение исходных уравнений Гамильтона:

$$q = q(t, \tilde{q}, \tilde{p}), \quad p = p(t, \tilde{q}, \tilde{p}).$$

Установленная связь между уравнениями Гамильтона и уравнением Гамильтона–Якоби может быть использована для решения обратной задачи — найти полный интеграл уравнения в частных производных первого порядка, опираясь на решения соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений.

Делается это так. Пусть общее решение системы Гамильтона  $\dot{q} = \mathcal{H}_p$ ,  $\dot{p} = -\mathcal{H}_q$ ,  $\mathcal{H}(t, q, p)$  известно:

$$q = q(t, \alpha, \beta), \quad p = p(t, \alpha, \beta),$$

$\alpha, \beta$  — произвольные постоянные.

Разрешим эти соотношения относительно  $p$  и  $\alpha$ :

$$\alpha = f(t, q, \beta), \quad p = g(t, q, \beta).$$

Тогда полный интеграл уравнения в частных производных  $\partial S / \partial t + \mathcal{H}(t, q, \partial S / \partial q) = 0$  можно найти, положив

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = f(t, q, \beta), \quad \frac{\partial S}{\partial q} = g(t, q, \beta).$$

В силу установленной выше связи между системой Гамильтона и уравнением Гамильтона–Якоби эти уравнения разрешимы относительно  $S$ , и их решение может быть записано в виде

$$S = \int_0^1 [\beta f(t, \theta q, \theta \beta) + q g(t, \theta q, \theta \beta)] d\theta.$$

Рассмотрим отдельно случай автономного гамильтониана, для которого уравнение Гамильтона–Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0.$$

В этом случае полный интеграл можно разыскивать так, чтобы одна из констант в него входила следующим специальным образом:

$$S = -\alpha_1 t + W,$$

где функция  $W$  уже от времени не зависит.

Подставляя решение в этой форме в уравнение Гамильтона–Якоби, получаем для нахождения функции  $W$  следующее уравнение:

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_1.$$

Полный интеграл этого уравнения зависит от уже введенной произвольной константы  $\alpha_1$  и от  $n - 1$  оставшихся:

$$W(q, \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Представляет интерес выяснить, к какому виду могут быть приведены уравнения Гамильтона, если в качестве производящей функции соответствующей канонической замены брать не функцию  $S(t, q, \tilde{p})$ , а функцию  $W(q, \tilde{p})$ :

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad \tilde{q} = \frac{\partial W}{\partial \tilde{p}}.$$

Поскольку замена автономная, то новый гамильтониан получается при подстановке этой замены в старый. Однако при такой подстановке имеем  $\tilde{\mathcal{H}} \equiv \mathcal{H}[q(\tilde{q}, \tilde{p}), \partial W/\partial q] = \tilde{p}_1$ , и уравнения Гамильтона приобретают вид

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{q}}_1 &= 1, & \dot{\tilde{q}}_k &= 0, & k &\neq 1, \\ \dot{\tilde{p}}_k &= 0, & k &= 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Решение этой системы:  $\tilde{q}_1 = t + \text{const}$ ,  $\tilde{q}_k = \text{const}$  ( $k \neq 1$ ),  $\tilde{p}_k = \text{const}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) следует подставить в уравнения канонической замены, выраженные относительно старых переменных  $q = q(\tilde{q}, \tilde{p})$ ,  $p = p(\tilde{q}, \tilde{p})$ , чтобы получить общее решение исходной системы Гамильтона. Функция  $W(q, \tilde{p})$  носит название *характеристической функции* системы.

## § 72. Теорема Лиувилля об интегрируемых системах

Задача интегрирования системы Гамильтона по трудности эквивалентна задаче интегрирования уравнения Гамильтона–Якоби. Поэтому хотя установленная в предыдущем параграфе связь между этими объектами и является полезной, но она не продвигает ни на шаг в деле построения решений.

Общих методов построения точных решений системы Гамильтона (или уравнения Гамильтона–Якоби) не существует.

Ниже мы изложим некоторые приближенные методы интегрирования таких уравнений. Они основаны на так называемом локальном подходе, когда рассматриваемая система является в некотором смысле близкой к некоторой, точно интегрируемой. К точно интегрируемым системам относятся линейные системы, а также системы, описываемые в излагаемой ниже теореме Лиувилля.

Содержательность теоремы Лиувилля заключается в том, что она показывает, как, зная  $n$  первых интегралов системы Гамильтона  $2n$ -го порядка, можно свести всю задачу к квадратурам (обращение функций и взятие интегралов). Известно, что для системы  $2n$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для этой цели необходимо знание  $2n - 1$  первых интегралов.

*Теорема Лиувилля.* Пусть система Гамильтона  $\dot{q} = \mathcal{H}_p$ ,  $\dot{p} = -\mathcal{H}_q$ ,  $\mathcal{H}_k(q, p)$  имеет  $n$  первых интегралов в инволюции:  $\mathcal{H}_k(q, p)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) (два первых интеграла находятся в инволюции, если их скобка Пуассона равна нулю).

Тогда, если  $\det \{\partial \mathcal{H} / \partial p_i\} \neq 0$ , то эта система интегрируется в квадратурах.

*Доказательство.* В силу последнего условия система  $\mathcal{H}_k(q, p) = \alpha_k$  ( $\alpha_k$  — постоянные) может быть разрешена относительно обобщенных

импульсов:  $p_k = f_k(q, \alpha)$ . Перепишем условие инволюции в матричной форме

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right)^\top - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right)^\top = 0,$$

где  $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n)^\top$ . Тогда из тождества  $\mathcal{H}[q, f(q, \alpha)] \equiv \alpha$  следует

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Подставляя в условие инволюции, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)^\top \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right)^\top - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right)^\top &= \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)^\top - \frac{\partial f}{\partial q} \right] \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right)^\top = 0. \end{aligned}$$

Откуда, в силу условия

$$\det \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right) \neq 0,$$

получаем

$$\left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)^\top = \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Но тогда разрешима следующая система:

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = f_k(q, \alpha)$$

относительно скалярной функции  $S(q, \alpha)$ :

$$S(q, \alpha) = \int_0^1 \sum_k q_k f_k(\theta q, \alpha) d\theta,$$

которая и берется в качестве производящей функции канонического преобразования  $(q, p) \rightarrow (\tilde{q}, \tilde{p})$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \tilde{q} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}} \quad (\tilde{p} \equiv \alpha).$$

Поскольку функция Гамильтона  $\mathcal{H}(q, p)$  сама является первым интегралом, то она либо совпадает с одним из  $\mathcal{H}_k(q, p)$ , либо является их функцией:  $\mathcal{H} = F(\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n)$ . Построенная каноническая замена переводит исходный гамильтониан в новый так:  $\mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \tilde{p}_k$ , либо так:  $\mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = F(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)$ . Система с подобным гамильтонианом в обоих случаях легко интегрируется. Теорема доказана.

Если в условиях теоремы  $n$ -мерное многообразие в  $2n$ -мерном пространстве  $\{q, p\}$ , задаваемое уравнениями  $\mathcal{H}_k(q, p) = \alpha_k$ , является ком-

пактным, то можно показать, что это многообразие является тором <sup>1)</sup>. Это означает, что, помимо задания этого многообразия указанными уравнениями в неявной форме, его можно записать и в параметрической форме:  $q = q(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$ ,  $p = p(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$  в виде зависимости от  $n$  параметров  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , от которых эта зависимость  $2\pi$ -периодическая по каждому  $\theta_k$ . Все фазовое пространство расслоено такими торами, постоянные  $\alpha_k$  определяют  $n$ -параметрическое семейство  $n$ -мерных торов. Вектор  $\alpha$  является номером тора в этом семействе.

Поскольку каждая траектория, начавшись на каком-либо из этих торов, с него уже в дальнейшем сойти не может, то говорят, что решение интегрируемой по Лиувиллю системы в случае компактного многообразия уровня функций  $\mathcal{H}_k$  представляет собой обмотку тора. Сам тор является инвариантным: он не изменяется фазовым потоком системы.

### § 73. Переменные «действие–угол»

Канонические переменные «действие–угол» вводятся в случае компактного многообразия уровня первых интегралов  $\mathcal{H}_k$  и являются удобными при формировании в дальнейшем процедур приближенного интегрирования систем, близких к интегрируемым по Лиувиллю.

Строятся переменные «действие–угол» так. Воспользуемся найденной в предыдущем параграфе функцией  $S(q, \alpha) = \int_0^1 \sum_k q_k f_k(\theta q, \alpha) d\theta$ , которую мы использовали в качестве производящей функции канонической замены  $(q, p) \rightarrow (\tilde{q}, \tilde{p})$  после отождествления  $\alpha \equiv \tilde{p}$ .

Однако вместо этого отождествления свяжем константы интегралов с новыми импульсами иначе. Именно, положим

$$\tilde{p}_k(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\alpha, \theta) \frac{dq(\alpha, \theta)}{d\theta_k} d\theta_k.$$

Иными словами,  $k$ -я компонента нового импульса есть среднее значение  $p dq$  вдоль замкнутой траектории на торе, получаемой при изменении параметра  $\theta_k$  и при фиксированных остальных.

Полученную функцию  $\tilde{p} = \tilde{p}(\alpha)$  надо обратить и подставить в  $S(q, \alpha)$ . После чего новая координата строится обычным образом:

$$\tilde{q} = \frac{\partial}{\partial \tilde{p}} S[q, \alpha(\tilde{p})].$$

---

<sup>1)</sup> Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.

Такая переменная  $\tilde{p}$  и называется *действием*, а  $\tilde{q}$  — *углом*. В литературе для них приняты специальные обозначения:  $I$  и  $\varphi$ , так что

$$I_k(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_i p_i(\alpha, \theta_1, \dots, \theta_n) \frac{d}{d\theta_k} q_i(\alpha, \theta_1, \dots, \theta_n) d\theta_k,$$

$$\varphi_k = \frac{\partial}{\partial I_k} S[q, \alpha(I)].$$

Пусть для определенности гамильтониан системы совпадает с первым из находящихся в инволюции интегралов  $\mathcal{H}(q, p) \equiv \mathcal{H}_1(q, p)$ . Тогда после перехода к переменным «действие–угол» получаем новый гамильтониан в виде

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \left[ q, \frac{\partial S}{\partial q} \right] \equiv \mathcal{H}[q, f(q, \alpha(I))] = \alpha_1(I).$$

Из уравнения исходной системы в этих переменных получаются такими:

$$\dot{\varphi} = \frac{d\alpha_1}{dI}, \quad \dot{I} = 0.$$

Их решение  $\varphi = \omega(I)t + \varphi_0$ ,  $I = \text{const}$ ,  $\omega(I) = d\alpha_1/dI$  позволяет записать, воспользовавшись уравнениями замены, решение в исходных переменных:

$$q = q[\omega(I)t + \varphi_0, I], \quad p = p[\omega(I)t + \varphi_0, I].$$

Основное свойство переменных «действие–угол» заключается в том, что каноническая замена  $q(\varphi, I)$ ,  $p(\varphi, I)$  является  $2\pi$ -периодической по всем  $\varphi_k$ , так что выписанное решение представляет собой условно периодический колебательный процесс с  $n$  частотами  $\omega_k(I)$ . Доказательство этому факту можно найти в цитированной выше книге В. И. Арнольда.

## § 74. Метод Пуанкаре–Цейделя

Будем предполагать, что гамильтонова система близка к точно интегрируемой по Лиувиллю, так что ее гамильтониан может быть приведен к виду

$$\mathcal{H}(\varphi, I, \varepsilon) = \mathcal{H}_0(I) + \varepsilon \mathcal{H}_1(\varphi, I) + \dots$$

Здесь  $\varepsilon$  — малый параметр. Такая система называется возмущенной. Функция  $\mathcal{H}_0(I)$  есть функция Гамильтона вырожденной (или невозмущенной системы), которая предполагается интегрируемой по Лиувиллю. Канонические переменные  $I, \varphi$  являются переменными «действие–угол» в невозмущенной системе. Возмущением называются слагаемые, исчезающие вместе с  $\varepsilon$  и которые предполагаются  $2\pi$ -периодическими по всем угловым переменным  $\varphi$ .

Ставится задача найти каноническую замену переменных  $(\varphi, I) \rightarrow (\psi, \mathcal{J})$ , такую, чтобы в новых переменных уже весь гамильтониан не зависел от  $\varphi$ ,  $\mathcal{H}(\varphi, I, \varepsilon) \rightarrow K(\mathcal{J}, \varepsilon)$ ,

$$K = K_0(\mathcal{J}) + \varepsilon K_1(\mathcal{J}) + \varepsilon^2 K_2(\mathcal{J}) + \dots$$

Будем разыскивать производящую функцию такой замены  $S(\varphi, \mathcal{J}, \varepsilon)$  так, что сама замена определяется соотношениями

$$I = \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \quad \psi = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{J}}.$$

Представим исходную производящую функцию в виде ряда

$$S = \varphi \cdot \mathcal{J} + \varepsilon S_1(\varphi, \mathcal{J}) + \varepsilon^2 S_2(\varphi, \mathcal{J}) + \dots,$$

где  $\varphi \cdot \mathcal{J}$  — скалярное произведение:  $\varphi \cdot \mathcal{J} = \varphi_1 \mathcal{J}_1 + \dots + \varphi_n \mathcal{J}_n$ .

Поскольку при  $\varepsilon = 0$  гамильтониан уже имеет необходимый вид, то  $S(\varphi, \mathcal{J}, 0)$  должна порождать тождественную замену:

$$I = \frac{\partial}{\partial \varphi}(\varphi \cdot \mathcal{J}) = \mathcal{J}, \quad \psi = \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}}(\varphi \cdot \mathcal{J}) = \varphi.$$

Производящая функция, приводящая гамильтониан к указанному виду, носит название характеристической функции (§ 71), и она удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{H}\left(\varphi, \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \varepsilon\right) = \text{const} = K(\mathcal{J}).$$

Или же, подставляя вместо  $\mathcal{H}$ ,  $S$  и  $K$  их разложение по степеням  $\varepsilon$ , запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 \left( \frac{\partial S_0}{\partial \varphi_1} + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_1} + \dots, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial \varphi_n} + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_1} + \dots \right) + \\ + \varepsilon \mathcal{H}_1 \left( \varphi_1, \dots, \varphi_n, \frac{\partial S_0}{\partial \varphi_1} + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_1} + \dots \right) + \dots = \\ = K_0(\mathcal{J}) + \varepsilon K_1(\mathcal{J}) + \dots \end{aligned}$$

Раскладывая в ряды и разделяя порядки, получаем:

$$\mathcal{H}_0(\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n) = K_0(\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \mathcal{J}_1} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_1} + \dots + \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \mathcal{J}_n} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_n} + \mathcal{H}_1 \left( \varphi_1, \dots, \varphi_n, \frac{\partial S_0}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial \varphi_n} \right) = \\ = K_1(\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \mathcal{J}_1} \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_1} + \dots + \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \mathcal{J}_n} \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_n} + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial \mathcal{J}_k \partial \mathcal{J}_l} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_k} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_l} + \\ + \sum_k \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \mathcal{J}_k} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_k} + \mathcal{H}_2 \left( \varphi_1, \dots, \varphi_n, \frac{\partial S_0}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial \varphi_n} \right) = \\ = K_2(\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n), \end{aligned}$$

...

Учитывая, что  $\partial S_0 / \partial \varphi_k = \mathcal{J}_k$ , а  $\partial \mathcal{H}_0 / \partial \mathcal{J}_k = \omega_k(\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n)$ , получаем следующую цепочку дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, позволяющих найти все компоненты производящей функции:

$$\begin{aligned} \omega_1(\mathcal{J}) \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_1} + \dots + \omega_n(\mathcal{J}) \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_n} + \mathcal{H}_1(\varphi, \mathcal{J}) &= K_1(\mathcal{J}), \\ \omega_1(\mathcal{J}) \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_1} + \dots + \omega_n(\mathcal{J}) \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_n} + F_2 \left( \varphi, \mathcal{J}, \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \right) &= K_2(\mathcal{J}), \\ \dots \end{aligned}$$

Выбирая  $K_1(\mathcal{J})$  в виде среднего значения по всем  $\varphi_k$  гамильтониана  $\mathcal{H}_1(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n)$ , т. е.

$$K_1(\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n) = \langle \mathcal{H}_1(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n) \rangle,$$

для нахождения  $S_1$  получаем

$$\omega_1(\mathcal{J}) \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_1} + \dots + \omega_n(\mathcal{J}) \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_n} = -\tilde{\mathcal{H}}_1(\varphi, \mathcal{J}),$$

где  $\tilde{\mathcal{H}}_1$  — дополнение к среднему в функции  $\mathcal{H}_1$ .

Это уравнение легко решается (см. § 50). Подставляя решение во второе уравнение, для  $K_2(\mathcal{J})$  получим

$$K_2(\mathcal{J}) = \left\langle F_2 \left( \varphi, \mathcal{J}, \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \right) \right\rangle,$$

что позволяет найти  $S_2$  из уравнения

$$\omega_1(\mathcal{J}) \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_1} + \dots + \omega_n(\mathcal{J}) \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_n} = -\tilde{F}_2 \left( \varphi, \mathcal{J}, \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \right),$$

где  $\tilde{F}_2$  — дополнение к среднему от функции  $F_2$ .

Это уравнение точно такого же вида, как и предыдущее. И так далее.

Описанная процедура носит название нерезонансной, поскольку требует предположения, что частоты  $\omega_k(\mathcal{J})$  не связаны соотношениями типа

$$\lambda_1\omega_1 + \dots + \lambda_n\omega_n = 0$$

с некоторыми целыми, не всеми равными нулю  $\lambda_k$ .

## § 75. Метод Биркгофа нормализации гамильтонианов

Рассмотрим гамильтонову систему, описываемую аналитическим гамильтонианом

$$\mathcal{H}(q, p) = \mathcal{H}_0(q, p) + \mathcal{H}_*(q, p),$$

где  $\mathcal{H}_0$  — квадратичная часть функции Гамильтона, определяющая линейную часть системы, а  $\mathcal{H}_*$  — конечный или бесконечный полином, не содержащий членов ниже третьей степени.

Будем также предполагать, что  $\mathcal{H}_0$  определяет линейную колебательную систему с  $n$  собственными частотами  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Тогда в нормальных координатах (см. § 41)  $\mathcal{H}_0$  запишется в виде

$$\mathcal{H}_0(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (p_k^2 + \lambda_k^2 q_k^2).$$

Функцию  $\mathcal{H}_0$  можно привести к более удобной для дальнейшего форме, выполнив каноническое преобразование  $(q, p) \rightarrow (\tilde{q}, \tilde{p})$ :

$$p_k = \sqrt{\lambda_k} \tilde{p}_k, \quad q_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \tilde{q}_k.$$

Тогда функция Гамильтона  $\mathcal{H}_0$  в новых переменных запишется так:

$$\mathcal{H}_0(\tilde{q}, \tilde{p}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k (\tilde{q}_k^2 + \tilde{p}_k^2).$$

Будем считать, что с самого начала имеем дело в этих переменных, так что в дальнейшем тильду над буквой опускаем.

Существует еще одно удобное представление для функции  $\mathcal{H}_0$ . Для этого рассмотрим комплексные комбинации обобщенных координат и импульсов

$$x = p + iq, \quad y = p - iq.$$

Эти соотношения можно рассматривать как каноническую замену  $(q, p) \rightarrow (x, y)$  с валентностью  $2i$ . В этих переменных гамильтониан  $\mathcal{H}_0$

принимает вид (сохраним для функции, зависящей от новых переменных, старые обозначения):

$$\mathcal{H}_0(x, y) = i \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k y_k.$$

Таковы две наипростейшие формы рассматриваемой линейной системы.

Возникает вопрос, к какой наипростейшей форме можно привести нелинейную часть системы, представленную функцией  $\mathcal{H}_*(x, y)$ . При этом преобразования переменных, решающие эту задачу, должны удовлетворять трем условиям: они должны быть каноническими, они не должны менять квадратичную часть гамильтониана, т. е.  $\mathcal{H}_0$ , и, наконец, они должны быть в классе полиномиальных функций. Последнее означает, что искомые замены переменных не должны иметь никаких особенностей в нуле.

Такая, неупрощаемая никакими полиномиальными заменами, форма гамильтониана называется нормальной формой Биркгофа. Ниже будет дано более конкретное определение для этой формы.

Будем искать каноническую замену, приводящую гамильтониан к нормальной форме Биркгофа, поставив целью уничтожить как можно больше членов в разложении возмущенной части гамильтониана:

$$\mathcal{H}_*(x, y) = \sum a_{l_1, \dots, l_n, s_1, \dots, s_n} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} y_1^{s_1} \dots y_n^{s_n}.$$

Сумма в этом выражении распространяется на все  $l$  и  $s$ , такие, что  $l_1 + \dots + l_n + s_1 + \dots + s_n > 2$ .

Выясним, какие же из членов этой суммы могут быть уничтожены, а какие нет. Рассмотрим некоторый член этого ряда

$$x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} y_1^{s_1} \dots y_n^{s_n}.$$

Этот член может быть уничтожен посредством канонической замены  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  с производящей функцией  $S(x, v)$  при наличии в ней точно такого же члена

$$S = \sum_k x_k v_k + h x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} v_1^{s_1} \dots v_n^{s_n}.$$

При подстановке соответствующей замены

$$\begin{aligned} y &= \frac{\partial S}{\partial x} = v + h \frac{\partial}{\partial x}(x^l v^s) = v + h \frac{\partial}{\partial u}(u^l v^s) + \dots, \\ u &= \frac{\partial S}{\partial v} = x + h \frac{\partial}{\partial v}(x^l v^s) = x + h \frac{\partial}{\partial y}(u^l v^s) + \dots, \end{aligned}$$

для которой запишем и обратные выражения

$$\begin{aligned} v &= y - h \frac{\partial}{\partial x}(x^l v^s) + \dots = y - h \frac{\partial}{\partial x}(x^l y^s) + \dots, \\ x &= u - h \frac{\partial}{\partial v}(x^l v^s) + \dots = u - h \frac{\partial}{\partial v}(u^l v^s) + \dots, \end{aligned}$$

в функцию Гамильтона  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_*$  получаем

$$\tilde{\mathcal{H}} = i \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k v_k + i h \sum_{k=1}^n \lambda_k \left( u_k \frac{\partial}{\partial u_k} - v_k \frac{\partial}{\partial v_k} \right) (u^l v^s) + \mathcal{H}_*.$$

Возникший дополнительный член  $i h \sum \lambda_k (u_k \partial / \partial u_k - v_k \partial / \partial v_k) (u^l v^s)$  имеет ту же самую структуру, что и подлежащий уничтожению во всех случаях, за исключением того, когда выражение

$$u^l v^s \equiv u_1^{l_1} \dots u_n^{l_n} v_1^{s_1} \dots v_n^{s_n}$$

является первым интегралом системы линейных дифференциальных уравнений, порождаемой гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ . В последнем случае оператор линейной системы

$$U = i \sum \lambda_k \left( u_k \frac{\partial}{\partial u_k} - v_k \frac{\partial}{\partial v_k} \right)$$

обращает подобные выражения в ноль:  $U(u^l v^s) = 0$ .

Таким образом, выясняется, что полиномиальными заменами можно уничтожить в линейной части гамильтониана  $\mathcal{H}_*$  все члены, кроме первых интегралов линейной части системы. Линейная часть системы имеет простой вид, и структуру ее первых интегралов установить нетрудно.

У системы с гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ , которая имеет вид

$$\dot{u}_k = i \lambda_k u_k, \quad \dot{v}_k = -i \lambda_k v_k \quad (k = 1, \dots, n),$$

имеется  $2n - 1$  независимых первых интегралов

$$G_1(u, v), \dots, G_{2n-1}(u, v).$$

Из них  $n$  первых интегралов всегда имеют полиномиальный вид:

$$G_k = u_k v_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Среди других первых интегралов в полиномиальной форме нет, если система нерезонансная, т. е. если

$$k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n \neq 0 \quad (k_1^2 + \dots + k_n^2 \neq 0)$$

ни при каких целых  $k_1, \dots, k_n$ .

Если же резонансы есть, то число независимых полиномиальных первых интегралов превышает  $n$  на число резонансных соотношений  $\sum k_i \lambda_i = 0$ . Например, если имеется резонанс  $\lambda_1 = 3\lambda_2$ , то полиномиальным интегралом, дополнительным к уже указанным, будет и такой:

$$G_{n+1} = u_1 v_2^3, \quad G_{n+2} = u_2^3 v_1.$$

В этом примере нормальная форма Биркгофа может зависеть только от таких аргументов:

$$u_1 v_1, \dots, u_n v_n, u_1 v_2^3, u_2^3 v_1,$$

т. е.  $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}(u_1 v_1, \dots, u_n v_n, u_1 v_2^3, u_2^3 v_1)$ .

*Определение.* Гамильтониан имеет нормальную форму Биркгофа, когда он зависит только от полиномиальных первых интегралов (от инвариантов) невозмущенной части.

Более короткое определение таково: гамильтониан  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_*$  имеет нормальную форму Биркгофа, если  $\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_*\} = 0$ . Через  $\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_*\}$  обозначена скобка Пуассона, равенство нулю которой и есть условие первого интеграла.

Описанный метод приведения к нормальной форме, основанный на использовании производящих функций, называется *методом Биркгофа*. Он удобен для выяснения структуры нормальной формы. Для проведения вычислений в конкретных задачах удобен другой метод, основанный на привлечении однопараметрических групп Ли.

Необходимые канонические преобразования будем строить не с помощью производящей функции, а с помощью функции Гамильтона некоторой вспомогательной системы, фазовый поток которой и задает однопараметрическую группу преобразований, используемых для нормализации исходного гамильтониана.

Пусть искомым гамильтониан этой вспомогательной системы есть  $Q(x, y)$ . Это означает, что уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{dy}{d\tau} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

с начальными условиями  $x(0) = u$ ,  $y(0) = v$  определяют искомые преобразования по формулам

$$x = x(\tau, u, v), \quad y = y(\tau, u, v),$$

представляющим собой решение этой начальной задачи Коши.

Эти преобразования и обратные к ним могут быть записаны с помощью следующих рядов Ли (см. § 49 и 69):

$$\begin{aligned} x &= u + \tau\{u, Q\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{u, Q\}, Q\} + \dots, \\ y &= v + \tau\{v, Q\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{v, Q\}, Q\} + \dots, \\ u &= x - \tau\{x, Q\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{x, Q\}, Q\} + \dots, \\ v &= y - \tau\{y, Q\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{y, Q\}, Q\} + \dots \end{aligned}$$

Здесь в случае прямых преобразований обозначения аргументов  $x$  и  $y$  в функции  $Q$  заменены обозначениями  $u$  и  $v$ . Сама функция  $Q$  во всех случаях одна и та же.

Преобразованный гамильтониан связан с исходным также рядом Ли:

$$\tilde{\mathcal{H}}(u, v) = \mathcal{H}(u, v) + \tau\{\mathcal{H}, Q\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{\mathcal{H}, Q\}, Q\} + \dots$$

Эта формула является основной для формируемого ниже алгоритма приведения гамильтониана к нормальной форме Биркгофа.

Формализуем признак, определяющий порядок нелинейных членов, посредством введения масштаба  $x \rightarrow \varepsilon x$ ,  $y \rightarrow \varepsilon y$  где  $\varepsilon$  — скалярный параметр, рассматриваемый в окрестности нуля. Тогда гамильтониан  $\mathcal{H}(x, y) = \mathcal{H}_0(x, y) + \mathcal{H}_*(x, y)$  с учетом валентности этой замены, равной  $1/\varepsilon^2$ , запишется так:

$$\mathcal{H}(x, y, \varepsilon) = \mathcal{H}_0(x, y) + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{H}_*(\varepsilon x, \varepsilon y) \equiv \mathcal{H}_0(x, y) + \mathcal{H}_*(x, y, \varepsilon).$$

Назовем асимптотикой  $k$ -го порядка для гамильтониана  $\mathcal{H}$  любую функцию  $\mathcal{H}_k$ , отличающуюся от точного гамильтониана членами более высокого порядка малости, чем  $\varepsilon^k$ :

$$\mathcal{H}_k = \mathcal{H} + O(\varepsilon^{k+1}).$$

Заметим, что асимптотики заданного фиксированного порядка образуют кольцо: сумма двух асимптотик есть асимптотика того же порядка для суммы соответствующих им функций и произведение двух асимптотик есть асимптотика этого же порядка для произведения. Для элементов кольца асимптотик имеет место также и такое очевидное свойство:

$$(\varepsilon^l \mathcal{H}_k)_k = \varepsilon^l \mathcal{H}_{k-l} \quad (l < k).$$

Иными словами, асимптотика  $k$ -го порядка от произведения  $\varepsilon^l$  на  $\mathcal{H}_k$  равна произведению  $\varepsilon^l$  на асимптотику  $(k-l)$ -го порядка.

Гамильтониан вспомогательной производящей системы также будем искать в форме асимптотик:

$$Q_k = Q + O(\varepsilon^{k+1}).$$

Ряд Ли, представляющий новый гамильтониан, может быть записан для асимптотик в следующем виде после отождествления  $\varepsilon = \tau$ :

$$\tilde{\mathcal{H}}_0(u, v) = \mathcal{H}_0(u, v),$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_1(u, v) = \mathcal{H}_1(u, v) + \tau \{ \mathcal{H}_0, Q_0 \},$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_2(u, v) = \mathcal{H}_2(u, v) + \tau \{ \mathcal{H}_1, Q_1 \} + \frac{\tau^2}{2!} \{ \{ \mathcal{H}_0, Q_0 \}, Q_0 \},$$

...

$$\tilde{\mathcal{H}}_k(u, v) = \mathcal{H}_k(u, v) + \tau \{ \mathcal{H}_{k-1}, Q_{k-1} \} + \dots + \frac{\tau^k}{k!} \underbrace{\{ \dots \{ \mathcal{H}_0, Q_0 \}, Q_0 \} \dots }_{k \text{ раз}}.$$

При получении этих соотношений использованы приведенные выше свойства кольца асимптотик.

В выражении для  $\tilde{\mathcal{H}}_k(u, v)$  представим скобку Пуассона  $\{\mathcal{H}_k, Q_k\}$  в асимптотически эквивалентной форме:

$$\{\mathcal{H}_k, Q_k\} = \{\mathcal{H}_0, Q_k\} + \{\mathcal{H}_k - \mathcal{H}_0, Q_k\} = \{\mathcal{H}_0, Q_k\} + \{\mathcal{H}_k - \mathcal{H}_0, Q_{k-1}\}.$$

Эта эквивалентность имеет место, поскольку  $\mathcal{H}_k - \mathcal{H}_0 = O(\tau)$ .

С учетом этого представления перепишем выражения для асимптотик гамильтониана  $\tilde{\mathcal{H}}$  так:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}_0 &= \mathcal{H}_0, \\ \tilde{\mathcal{H}}_1 &= \tau\{\mathcal{H}_0, Q_0\} + \mathcal{H}_1, \\ &\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}_k &= \tau\{\mathcal{H}_0, Q_{k-1}\} + \tau\{\mathcal{H}_{k-1} - \mathcal{H}_0, Q_{k-2}\} + \\ &\quad + \sum_{i=2}^k \frac{\tau^i}{i!} \underbrace{\{\dots\{\mathcal{H}_{k-i}, Q_{k-i}\}, Q_{k-i}\}, \dots\}_{i \text{ раз}}}.\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_k &= \tau\{\mathcal{H}_{k-1} - \mathcal{H}_0, Q_{k-2}\} + \\ &\quad + \sum_{i=2}^k \frac{\tau^i}{i!} \{\dots\{\mathcal{H}_{k-i}, Q_{k-i}\}, Q_{k-i}\}, \dots\} + \mathcal{H}_k \quad (k \geq 2), \\ \mathcal{L}_1 &= \mathcal{H}_1.\end{aligned}$$

Тогда формулу для искомой асимптотики  $k$ -го порядка преобразованного гамильтониана можно записать следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{H}}_k = \tau\{\mathcal{H}_0, Q_{k-1}\} + \mathcal{L}_k \quad (k \geq 1).$$

Это уравнение называется *гомологическим*. Будем использовать его для последовательного увеличения порядка найденной асимптотики искомого гамильтониана  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Асимптотика нулевого порядка совпадает с порождающим гамильтонианом  $\tilde{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{H}_0$ . В дальнейшем в каждом искомом порядке  $\tilde{\mathcal{H}}_k$  функция  $\mathcal{L}_k$  оказывается известной функцией  $u$  и  $v$ , поскольку она зависит лишь от уже найденных на предыдущих шагах асимптотик. Неизвестными и подлежащими определению из гомологического уравнения являются функции  $\tilde{\mathcal{H}}_k(u, v)$  и  $Q_{k-1}(u, v)$ .

Для решения гомологического уравнения относительно этих функций заметим, что скобка Пуассона  $\{\mathcal{H}_0, Q_{k-1}\}$  представляет собой полную производную по  $t$  от функции  $Q_{k-1}(u, v)$ , взятую вдоль траекторий вырожденной системы, т.е. вдоль семейства отображений  $u \rightarrow u \exp(i\lambda t)$ ,  $v \rightarrow v \exp(-i\lambda t)$  (см. § 49):

$$UQ_{k-1} \equiv \{\mathcal{H}_0, Q_{k-1}\} = \frac{dQ_{k-1}}{dt}.$$

Кроме того, по определению  $\tilde{\mathcal{H}}_k$  состоит только из инвариантов этой же линейной системы. Проинтегрировав правую и левую части гомологического уравнения вдоль траекторий вырожденной системы, находим

$$\int_0^t \tilde{\mathcal{H}}_k dt = \tau \int_0^t \{\mathcal{H}_0, Q_{k-1}\} dt + \int_0^t \mathcal{L}_k dt.$$

Или, учитывая все сказанное, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathcal{L}_k[u \exp(i\lambda t), v \exp(-i\lambda t)] dt = \\ = t\tilde{\mathcal{H}}_k + \tau\{Q_{k-1}(u, v) - Q_{k-1}[u \exp(i\lambda t), v \exp(-i\lambda t)]\}. \end{aligned}$$

Таким образом, проинтегрировав по времени известную функцию  $\mathcal{L}_k(u, v)$  вдоль траекторий вырожденной системы, получаем искомую асимптотику нормальной формы гамильтониана  $\tilde{\mathcal{H}}_k$  в виде коэффициента при  $t$ , а искомую асимптотику производящего гамильтониана  $Q_{k-1}$  в виде не зависящего от времени коэффициента при  $t$ .

*Свойства нормальной формы Биркгофа.* 1) Асимптотика каждого конкретного порядка нормальной формы содержит минимальное число нелинейных членов соответствующего порядка, уже не уменьшаемое никакими полиномиальными преобразованиями. Поэтому и любой анализ свойств системы по ее нормальной форме является наиболее простым.

2) Поскольку в нормальной форме возмущение  $\mathcal{H}_*$  и невозмущенная часть системы  $\mathcal{H}_0$  коммутируют, то для всей системы верен принцип суперпозиции (см. §53), в силу которого для построения решения системы с гамильтонианом  $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_*$  достаточно знать решения с гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$  и  $\mathcal{H}_*$  в отдельности. Решение системы с гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$  известно. Остается найти решение с гамильтонианом  $\mathcal{H}_*$ , что доставляет дополнительные упрощения.

3) Уравнение Гамильтона в нормальной форме всегда допускает понижение порядка, поскольку решения вырожденной системы являются группой симметрий для возмущенной части системы (см. §52).

*Пример.* Уравнение Дуффинга:  $\ddot{q} + q + q^3 = 0$ .

Соответствующий этому уравнению гамильтониан  $\mathcal{H} = [p^2 + q^2 + q^4/2]/2$  заменой  $x = q - ip$ ,  $y = q + ip$  приводится к виду  $\mathcal{H} = i[xy + (x + y)^4/32]$ .

В гамильтониане нет членов третьей степени, поэтому параметр  $\varepsilon$ , отделяющий друг от друга члены разных порядков, можно взять как  $x = \sqrt{\varepsilon} x'$ , в результате чего гамильтониан запишется в виде (штрихи опускаем)  $\mathcal{H} = i[xy + \varepsilon(x + y)^4/32]$ .

*Первое приближение нормальной формы.* Траектории вырожденной системы с гамильтонианом  $\mathcal{H} = ixy$  имеют вид  $x = u \exp(it)$ ,  $y = v \exp(-it)$ . Интегрируя вдоль них гамильтониан, находим:



$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathcal{H}_1 dt &\equiv \int_0^t \mathcal{H} dt = i \int_0^t \left[ uv + \frac{\tau}{32} (ue^{it} + ve^{-it})^4 \right] dt = \\
&= ituv + \frac{\tau}{32} \left( \frac{1}{4} u^4 e^{4it} + 2u^3 v e^{2it} + 6iu^2 v^2 t - 2uv^3 e^{-2it} - \frac{1}{4} v^4 e^{-4it} \right) - \\
&\quad - \frac{\tau}{32} \left( \frac{1}{4} u^4 + 2u^3 v - 2uv^3 - \frac{1}{4} v^4 \right).
\end{aligned}$$

Асимптотика первого порядка нормальной формы есть коэффициент при  $t$ :

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = i \left( uv + \frac{3\tau}{16} u^2 v^2 \right).$$

Первое приближение для производящего гамильтониана есть не зависящий от времени коэффициент при  $\tau$ :

$$Q_0 = -\frac{1}{32} \left( \frac{1}{4} u^4 + 2u^3 v - 2uv^3 - \frac{1}{4} v^4 \right).$$

*Второе приближение нормальной формы.* Вычислим функцию  $\mathcal{L}_2$ :

$$\mathcal{L}_2 = \tau \{ \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_0, Q_0 \} + \frac{\tau^2}{2} \{ \{ \mathcal{H}_0, Q_0 \}, Q_0 \} + \mathcal{H}_2.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_0 &= \frac{i\tau}{32} (x + y)^4, \\
\{ \mathcal{H}_0, Q_0 \} &= \frac{1}{\tau} (\tilde{\mathcal{H}}_1 - \mathcal{H}_1) = -\frac{i}{32} (x^4 + 4x^3 y + 4xy^3 + y^4), \\
\mathcal{H}_2 &= \mathcal{H}.
\end{aligned}$$

Вычислив скобки Пуассона и подставив  $x = ue^{it}$ ,  $y = ve^{-it}$  и проинтегрировав  $\mathcal{L}_2$  по  $t$ , выделяем необходимый коэффициент при  $t$ :

$$\tilde{\mathcal{H}}_2 = i \left( uv + \frac{3\tau}{16} u^2 v^2 - \frac{17\tau^2}{256} u^3 v^3 \right).$$

Поскольку мы этим приближением и ограничиваемся, то функцию  $Q$ , необходимую для построения третьего приближения, приводить не будем.

# Приложение

## Теория скользящих векторов

**1. Определения и свойства.** Вектор в механике определяется величиной, направлением, ориентацией и точкой приложения. Такой вектор называется *закрепленным*, или *приложенным*. В трехмерном евклидовом пространстве, отнесенном к некоторой декартовой системе координат, закрепленный вектор может быть определен заданием трех чисел, определяющих радиус-вектор точки приложения —  $(x, y, z) = \mathbf{r}$ , и трех чисел, представляющих собой проекции закрепленного вектора на оси координат —  $(F_x, F_y, F_z) = \mathbf{F}$ . Будем записывать закрепленный вектор так:  $(\mathbf{r}; \mathbf{F})$ .

Вектор, точка приложения которого интереса не представляет, называется *свободным*. Для его задания достаточно трех чисел —  $\mathbf{F}$ .

Закрепленный вектор определяет в пространстве единственную прямую, проходящую в направлении этого вектора через точку его приложения. Такая прямая называется *линией действия закрепленного вектора*, или *основанием вектора*.

Вектор, точка приложения которого на заданной линии действия интереса не представляет, называется *скользящим*. Скользящий вектор представляет собой семейство закрепленных векторов, имеющих общую линию действия.

Каждой точке в пространстве (обозначим такую точку буквой  $O$ , а ее радиус-вектор  $\mathbf{r}_O$ ) и каждому закрепленному вектору  $(\mathbf{r}; \mathbf{F})$  поставим в соответствие закрепленный вектор  $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$  с точкой приложения  $O$  по следующему правилу:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{F}.$$

Такой вектор называется *моментом* вектора  $(\mathbf{r}; \mathbf{F})$  относительно точки  $O$ .

Поскольку при изменении точки приложения закрепленного вектора вдоль линии его действия величина и направление момента не меняются, то приведенное определение позволяет говорить и о моменте скользящего вектора относительно точки  $O$ . Такой момент тоже при необходимости может считаться скользящим вектором.

Рассмотрим теперь систему закрепленных векторов  $\{(\mathbf{r}_i; \mathbf{F}_i)\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Для этой системы введем две основные характеристики. *Главным вектором* системы закрепленных векторов называется свободный вектор, равный сумме свободных частей этих векторов:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i.$$

Главным моментом относительно точки  $O$  системы закрепленных векторов называется свободный вектор, равный сумме свободных частей моментов этих векторов относительно той же точки, называемой полюсом:

$$\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i).$$

Если осуществить переход к новому полюсу, то главный вектор от этого никак не зависит, а главный момент изменится так:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{O'} &= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{O'}) \times \mathbf{F}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_O + \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{F}, \\ \mathbf{r}_O &= \mathbf{r}_{O'} + \boldsymbol{\rho}. \end{aligned}$$

Умножим это равенство скалярно на главный вектор  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{M}_{O'} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{F} + \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}.$$

Поскольку последнее слагаемое равно нулю, заключаем: проекция главного момента на главный вектор не зависит от выбора полюса. Эта проекция называется *скалярным инвариантом* вычисления главного момента системы векторов.

Выясним, к какой наипростейшей форме может быть приведен главный момент за счет подходящего подбора полюса. Для этого представим главный момент, вычисленный относительно произвольно выбранной точки  $O$ , в виде суммы

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O + \mathbf{M}''_O,$$

где  $\mathbf{M}'_O \parallel \mathbf{F}$ , а  $\mathbf{M}''_O \perp \mathbf{F}$ .

Переместим теперь полюс в точку  $O'$ , стараясь выбором  $\boldsymbol{\rho}$  добиться, чтобы

$$\mathbf{M}_{O'} \parallel \mathbf{F}.$$

Если это можно сделать, то, в силу наличия скалярного инварианта,  $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}'_O$ , и для нахождения  $\boldsymbol{\rho}$  получаем уравнение

$$\mathbf{M}''_O + \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{F} = 0.$$

Искать решение этого уравнения будем в виде

$$\boldsymbol{\rho} = a(\mathbf{M}''_O \times \mathbf{F}) + k\mathbf{F},$$

где  $a$  и  $k$  — неизвестные скаляры. При подстановке  $\boldsymbol{\rho}$  в этой форме в исходное уравнение имеем

$$\mathbf{M}''_O + a(\mathbf{M}''_O \times \mathbf{F}) \times \mathbf{F} + k\mathbf{F} \times \mathbf{F} = 0.$$

Последнее слагаемое равно нулю, а раскрытие двойного векторного произведения дает

$$\mathbf{M}''_O - a\mathbf{M}''_O(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}) = 0,$$

откуда

$$a = \frac{1}{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}}.$$

Таким образом, общее решение поставленной задачи имеет вид

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{M}_O'' \times \mathbf{F}}{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}} + k\mathbf{F},$$

где  $k$  — произвольно.

Получилась прямая линия, параллельная  $\mathbf{F}$ , представляющая собой геометрическое место полюсов, относительно которых главный момент совпадает по направлению с главным вектором и имеет минимальный модуль, равный скалярному инварианту. Такая линия называется *центральной осью* системы закрепленных векторов. Она существует для любой системы, для которой главный вектор не равен нулю:  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} \neq 0$ .

Если главный вектор  $\mathbf{F}$  равен нулю, то главный момент не зависит от выбора полюса.

**2. Эквивалентные системы векторов.** Будем рассматривать преобразования системы закрепленных векторов, при которых меняются точки приложения векторов, некоторые векторы удаляются из системы и некоторые в систему вводятся.

Из всех возможных подобных преобразований выделим два, которые называются *элементарными*.

*Первое элементарное преобразование* состоит в присоединении к системе двух закрепленных векторов  $(\mathbf{r}_1; \mathbf{F}_1)$  и  $(\mathbf{r}_2; \mathbf{F}_2)$ , таких, что

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2, \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \parallel \mathbf{F}_1.$$

(Эти два вектора равны по величине, имеют общую линию действия и противоположно ориентированы.)

*Второе элементарное преобразование* состоит в замене двух векторов  $(\mathbf{r}; \mathbf{F}_1)$  и  $(\mathbf{r}; \mathbf{F}_2)$ , имеющих общую точку закрепления, вектором  $(\mathbf{r}; \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$ , называемым их равнодействующей.

Введем отношение эквивалентности: две системы векторов называются эквивалентными, если одна получается из другой элементарными преобразованиями.

Рассмотрим теперь четыре простейшие системы закрепленных векторов.

- 1) Система, в которой все векторы равны нулю (векторный нуль).
- 2) Система, состоящая из одного, не равного нулю вектора.
- 3) Система, состоящая из двух векторов  $(\mathbf{r}_1; \mathbf{F}_1)$  и  $(\mathbf{r}_2; \mathbf{F}_2)$ , таких, что  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ , и  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  неколлинеарно  $\mathbf{F}_1$  (равные по модулю силы имеют одинаковое направление, но противоположно ориентированы; линии действия не совпадают). Такая система называется *парой*.
- 4) Система, состоящая из одного, не равного нулю, вектора и одной пары, расположенной в ортогональной к нему плоскости. Такая система называется *винтом*.

**Теорема 1.** Система закрепленных векторов  $\{(\mathbf{r}_i; \mathbf{F}_i)\}$  эквивалентна векторному нулю тогда и только тогда, когда главный вектор и главный момент равны нулю.

**Доказательство.** В формулировке теоремы уточнять, относительно какого полюса главный момент равен нулю, не надо, поскольку из формулы  $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{F}$  следует, что при  $\mathbf{F} = 0$  главный момент не зависит от выбора полюса.

Проведем плоскость так, чтобы она не проходила ни через одну из точек  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

В выбранной плоскости фиксируем произвольно три точки  $\mathbf{r}_A$ ,  $\mathbf{r}_B$  и  $\mathbf{r}_C$  так, чтобы никакие три вектора  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_A$ ,  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_B$  и  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C$  не были компланарны. Каждый из векторов  $(\mathbf{r}_i; \mathbf{F}_i)$  разложим по этим трем направлениям:  $(\mathbf{r}_i; \mathbf{F}_i) = (\mathbf{r}_i; \mathbf{F}_{iA}) + (\mathbf{r}_i; \mathbf{F}_{iB}) + (\mathbf{r}_i; \mathbf{F}_{iC})$ . Эта операция является, очевидно, элементарной. Каждый вектор  $(\mathbf{r}_i; \mathbf{F}_{iA})$  переместим вдоль линии действия в точку  $\mathbf{r}_A$  (вторая элементарная операция), после чего все их сложим:  $\mathbf{F}_A = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{iA}$ . Так же поступим и с векторами  $(\mathbf{r}_i; \mathbf{F}_{iB})$  и  $(\mathbf{r}_i; \mathbf{F}_{iC})$ . Мы получили, что произвольную систему закрепленных векторов элементарными преобразованиями можно привести к трем векторам  $(\mathbf{r}_A; \mathbf{F}_A)$ ,  $(\mathbf{r}_B; \mathbf{F}_B)$ ,  $(\mathbf{r}_C; \mathbf{F}_C)$ .

Покажем, что из условия равенства нулю главного вектора и главного момента следует, что эти три вектора компланарны, от противного. Пусть, например,  $F_{AZ} \neq 0$ . Тогда момент этой силы вокруг основания перпендикуляра из точки  $A$  на отрезок  $BC$  не равен нулю. Поскольку этот момент лежит вдоль прямой  $BC$ , а моменты вокруг этой же точки сил  $F_{BZ}$  и  $F_{CZ}$  лежат на рассматриваемом перпендикуляре, то он ничем уравновешен быть не может. Следовательно,  $F_{AZ} = 0$ .

Векторы  $\mathbf{F}_A$ ,  $\mathbf{F}_B$ ,  $\mathbf{F}_C$  компланарны. Тогда, например, вектор  $\mathbf{F}_C$  можно разложить по двум направлениям  $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C$  и  $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ :

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{F}_{CA} + \mathbf{F}_{CB}.$$

Вектор  $(\mathbf{r}_C; \mathbf{F}_{CA})$  вдоль линии действия перемещаем в точку  $\mathbf{r}_A$ , а вектор  $(\mathbf{r}_C; \mathbf{F}_{CB})$  — в точку  $\mathbf{r}_B$  и складываем их соответственно с векторами  $(\mathbf{r}_A; \mathbf{F}_A)$  и  $(\mathbf{r}_B; \mathbf{F}_B)$ . Таким образом, система закрепленных векторов с нулевыми главным вектором и главным моментом оказалась эквивалентной двум векторам, приложенным в точках  $\mathbf{r}_A$  и  $\mathbf{r}_B$ , а эти два вектора обязаны быть равны и прямо противоположны, т. е. сводимы к векторному нулю. Теорема доказана.

**Теорема 2.** Две системы закрепленных векторов  $\{(\mathbf{r}_i; \mathbf{F}_i)\}$  и  $\{(\mathbf{r}_k; \mathbf{G}_k)\}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, m$ ) эквивалентны тогда и только тогда, когда их главные векторы и главные моменты равны.

**Доказательство.** В одну сторону утверждение очевидно: если две системы эквивалентны, то их главные векторы и главные моменты равны, поскольку при элементарных преобразованиях эти характеристики не меняются.

Пусть теперь у двух систем равны главные векторы и главные моменты. Покажем, что системы эквивалентны.

Рассмотрим новую систему  $\{(\mathbf{r}_k; -\mathbf{G}_k)\}$  (все векторы заменены на обратные). Тогда у системы  $\{(\mathbf{r}_i; \mathbf{F}_i), \{(\mathbf{r}_k; -\mathbf{G}_k)\}$  главный вектор и главный момент равны нулю. Но по предыдущей теореме такая система эквивалентна нулю. А это значит, что

$$\{(\mathbf{r}_k; \mathbf{G}_k)\} \sim \{(\mathbf{r}_k; \mathbf{G}_k)\} + \{(\mathbf{r}_i; \mathbf{F}_i), (\mathbf{r}_k; -\mathbf{G}_k)\} \sim \{(\mathbf{r}_i; \mathbf{F}_i)\}.$$

Теорема доказана.

**Теорема 3.** Любая система закрепленных векторов эквивалентна одной из четырех простейших.

**Доказательство.** Произвольная система закрепленных векторов удовлетворяет одному из четырех условий:

- 1)  $\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{M}_O = 0;$
- 2)  $\mathbf{F} \neq 0, \quad \mathbf{M}_O = 0;$
- 3)  $\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{M}_O \neq 0;$
- 4)  $\mathbf{F} \neq 0, \quad \mathbf{M}_O \neq 0.$

Именно такими и являются эти характеристики для введенных ранее четырех простейших систем: векторный нуль, вектор, пара, винт.

Опираясь на теорему 2, и получаем утверждаемое. Теорема доказана.

Поскольку введенное выше отношение эквивалентности любой закрепленный вектор переводит в скользящий, то доказанные три теоремы составляют основу теории скользящих векторов.

В механике теория скользящих векторов используется в двух ситуациях.

1) Система закрепленных векторов представляет собой систему сил, приложенных к абсолютно твердому телу. Поскольку абсолютно твердое тело не деформируется, то приложение к нему двух равных по модулю, но противоположно ориентированных сил, действующих вдоль одной прямой, не меняет его состояния равновесия. Это означает, что равновесие твердого тела не изменяется при эквивалентных преобразованиях приложенной к нему системы сил. Следовательно, *для равновесия твердого тела необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю главный вектор и главный момент приложенных к нему сил.*

2) Система векторов — угловые скорости составляющих движений сложного движения твердого тела. Момент угловой скорости относительно точки определяет линейную скорость этой точки,

В общем случае, следовательно, произвольное движение твердого тела есть мгновенный винт: вращение вокруг некоторой оси плюс поступательное движение вдоль этой оси.

## Предметный указатель

**Абсолютное пространство** 11  
**Автоколебания** 191  
**Аксиома** 7, 8  
**Алгебра Ли** 200  
**Амплитудно-частотная характеристика** 166  
**Асимптотическая устойчивость** 149

**Вектор закрепленный** 298  
— свободный 298  
— скользящий 298  
**Винт** 300  
**Вириал** 66  
**Виртуальные перемещения** 73, 108  
**Волчок Лагранжа** 89  
**Вращение** 23  
**Время** 9

**Геометрическая интерпретация**  
  **Мак-Куллага** 84  
— — Пуансо 86  
**Герполодия** 86  
**Гиперкомплексные числа** 35  
**Гироскоп** 90  
**Главные направления** 173  
**Группа аффинная** 199  
— вращений 28, 199  
— Галилея 11, 251  
— движений 199  
— Ли 196  
— Лоренца 199  
— проективная 199  
— растяжений 199  
— симметрий 217, 235  
— трансляций 199

**Движение** 9  
**Динамические уравнения Эйлера** 82  
**Дробно-линейные преобразования** 39

**Задача двух тел** 75  
— Суслова 241  
**Законы Кеплера** 78

**Импульс силы** 66

**Инвариантность** 10  
**Инварианты** 207  
— дифференциальные 227  
— интегральные 228  
— Пуанкаре 271  
— Пуанкаре – Картана 274  
**Инерциальные системы отсчета** 9, 248  
**Интеграл Пенлеве–Якоби** 119  
— полный 282  
**Инфинитезимальный оператор группы** 200

**Калибровочная инвариантность** 113  
**Канонические координаты группы** 213

**Канонические преобразования** 275  
**Кватернионы** 32  
**Кинематика относительного движения** 59

**Кинематические уравнения Пуассона** 54  
— — Эйлера 53

**Кинетическая энергия** 65  
**Кинетический момент** 65  
**Ковариантность** 10  
**Колебания вынужденные** 174  
— главные 173  
— свободные 172

**Количество движения** 64  
**Конфигурационное многообразие** 29  
**Координатные линии** 18  
**Координаты обобщенные** 107  
— ортогональные 18  
— циклические 124

**Корректность понятия устойчивости** 150

**Коэффициенты Ляме** 18  
**Критерий Михайлова** 158  
— Рауса–Гурвица 154

**Лемма Гроноулла** 160

**Мера движения** 66  
**Метод Биркгофа** 290

- нормальной формы 186
- Пуанкаре–Цейделя 287
- Метрика 19
- Механическая система консервативная 119
- Момент вектора 298
  - инерции 79
  - количеств движения 65
- Ньютона** первый закон 248
  - второй закон 251
- Обобщенные** силы 110
- Ортогональные матрицы 26
- Оси инерции главные 80
  - центральные 80
- Параметризация** глобальная 107
  - локальная 107
- Параметры Кейли–Клейна 38
  - Родрига–Гамильтона 37
- Первые интегралы 70
- Переменные «действие–угол» 286
- Полодия 86
- Положение 14
- Потенциальная энергия 70
- Преобразования Лежандра 122
- Принцип Даламбера–Лагранжа 74
  - наименьшего действия 114
- Присоединенное отображение 36
- Проблема минимальности 7
  - непротиворечивости 7
  - полноты 7
- Производящие функции 278
- Работа** силы 66
- Реактивное движение 91
- Регулярная прецессия 89
- Связи** голономные 73, 126
  - кинематические 73, 126
  - неудерживающие 128
- Сила 9
- Силы внутренние 64
  - гироскопические 170
  - диссипативные 170
  - потенциальные 171
  - циркулярные 171
- Симметрия 12
- Скобка Пуассона 268
- Скорость 14
  - переносная 60
- Спиновые матрицы Паули 37
- Таблица** Кейли 197
- Твердое тело 23
- Тензор инерции 81
- Теорема Карно 96
  - Кёнига 71
  - Лагранжа 163
  - Лиувилля 270, 284
  - Ляпунова 160
  - Нётер 265
  - о вириале 72
  - о телесном угле 55
  - Пуанкаре–Дюлака 189
- Угловая** скорость 50
- Углы конечного вращения 23
- Угол нутации 23
  - прецессии 23
  - собственного вращения 23
- Удар 93
- Уравнение Ван-дер-Поля 191
  - Гамильтона–Якоби 282
  - гомологическое 295
  - Дуффинга 296
- Уравнения Аппеля 131
  - Гамильтона 262
  - кинематические 15
  - Лагранжа 111
  - Лиувилля 207
  - Максвелла 255
  - Рауса 123
  - Пуанкаре 245
- Ускорение 14
  - абсолютное 61
  - кориолисово 61
  - нормальное 16
  - относительное 61
  - переносное 60
  - тангенциальное 16
- Устойчивость по Ляпунову 149
- Формула** Резерфорда 103
  - Хаусдорфа 215
- Функция Грина 168
  - Лагранжа 112
- Эллипсоид** инерции 81