Вариант 7. **Пасько Д. А. Группа 43.1**

Задание 3

А)

$$
\begin{gathered}
(\frac{1}{81})^{\cos x} = 9^{2\sin 2x} \\
9^{-2\cos x} = 9^{2\sin 2x} \\
\cos x = \sin 2x \\
\cos x = 2\sin x \cos x \\
\cos x(1 - 2\sin x) = 0
\end{gathered} \tag{1}
$$

Следовательно, $\cos x = 0$ или $1 - 2\sin x = 0$. Второе равенство равнозначно $\sin x = \frac{1}{2}$. Значит, решениями уравнения является множество $\{\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z\}$.

Б)

Отберём решения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$:

1) Из $-2\pi \leq \pi k \leq -\frac{\pi}{2}$ находим, что $k = -2, -1$;
2) Из $-2\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq -\frac{\pi}{2}$ находим, что $k = -1$;
3) Из $-2\pi \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq -\frac{\pi}{2}$ находим, что $k = -1$;

Ответ: $-2\pi, -\pi, \frac{\pi}{6} - 2\pi, \frac{5\pi}{6} - 2\pi$

Задание 4

Пусть x – количество положенных денег. В соответствии с условиями задачи ежегодно оставшаяся сумма увеличивается в 1.1 раз, а за три года она была истрачена выплатами в 880, 605 и 1331 (тысяч). Значит, имеем уравнение:

$$
\begin{gathered}
((x * 1.1 - 880) * 1.1 - 605) * 1.1 - 1331 = 0 \\
((1.21x - 968) - 605) * 1.1 - 1331 = 0 \\
1.331x - 1730.3 - 1331 = 0 \\
x = 2300
\end{gathered} \tag{2}
$$

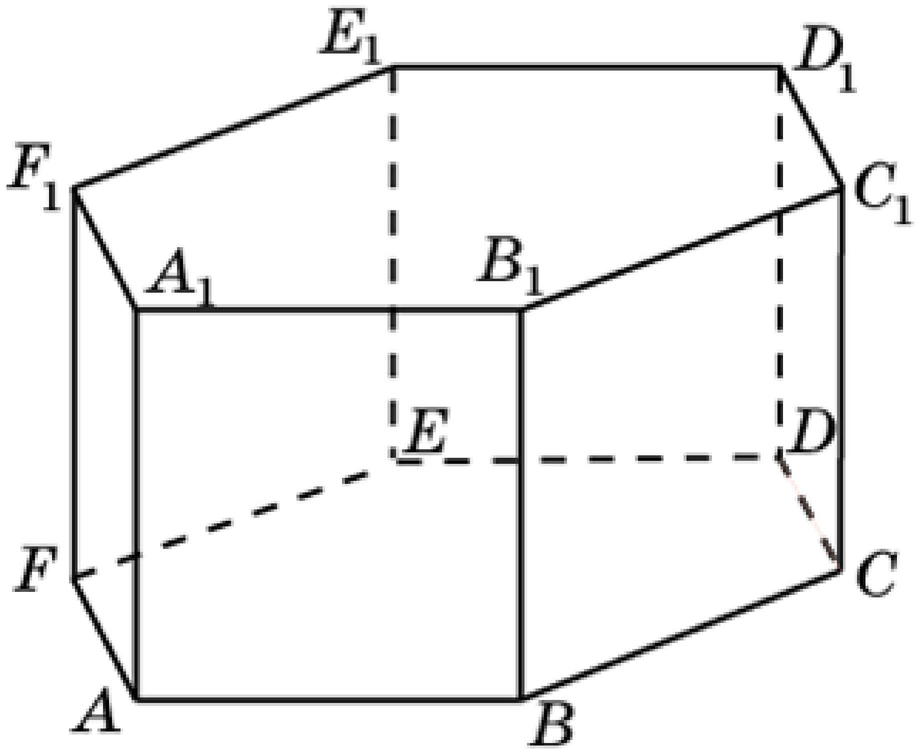
Ответ: 2 300 000

Задание 5

Заданная функция: $y = 2^{3x^2+12x+23}$. Так как функция $a^x, a > 1$ является монотонно возрастающей, то её минимум совпадает с минимумом функции под степенью. В нашем случае минимум y совпадает с минимумом $f(x) = 3x^2 + 12x + 23$. Как известно, минимум или максимум квадратного трёхчлена достигается в точке $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{6} = -2$. Тогда $f(-2) = 3 * 4 - 24 + 23 = 11$.

Ответ: 11

Задание 6



Решим задачу координатным способом. Пусть H – точка пересечения AD и BF. Так как призма правильная, то $ABCDEF$ – правильный шестиугольник. В таком случае $AD = 2BC, AH = AB\sin\angle ABF = AB\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}AB, BH = AB\cos\angle ABF = AB\frac{\sqrt{3}}{3}$. Проведём оси oX по AD, oY из A параллельно HB, oZ по AA_1. Учитывая, что $AB = 3, AA_1 = 4$, получаем координаты точек:

$$A(0,0,0)$$

$$D(6,0,0)$$

$$D_1(6,0,4)$$

$$B(AH,BH,0) \leftrightarrow B(1.5,\frac{3\sqrt{3}}{2},0)$$

$$C(4.5,\frac{3\sqrt{3}}{2},0)$$

$$C_1(4.5,\frac{3\sqrt{3}}{2},4)$$

Тогда:

$$\overrightarrow{AC_1} = \{4.5,\frac{3\sqrt{3}}{2},4\}$$

$$\overrightarrow{BD_1} = \{4.5,-\frac{3\sqrt{3}}{2},4\}$$

Значит:

$$\cos\widehat{\overrightarrow{AC_1}\overrightarrow{BD_1}} = \frac{(\overrightarrow{AC_1}*\overrightarrow{BD_1})}{|\overrightarrow{AC_1}||\overrightarrow{BD_1}|} = \frac{4.5^2-(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2+16}{4.5^2+(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2+16} =$$

$$= \frac{20.25+16-3\frac{9}{4}}{20.25+16+3\frac{9}{4}} = \frac{26.25-6.75}{26.25+6.75} = \frac{19.5}{33} \quad (3)$$

Следовательно, искомый угол равен $\arccos\frac{39}{65}$.

Ответ: $\arccos \frac{39}{65}$

Задание 7

$$\frac{\sin x - b\cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{b+2}$$

Поскольку знаменатель не должен обращаться в 0, получаем ограничения: $\sin x + \cos x \neq 0, b \neq -2$. Приводя к общиму знаменателю, получае уравнение:

$$(\sin x - b\cos x)(b+2) - \sin x - \cos x = 0$$

$$b + 2\sin x - b^2\cos x - 2b\cos x - \sin x - \cos x = 0$$

$$b\sin x + \sin x - \cos x(b^2 + 2b + 1) = 0$$

$$\sin x(b+1) = \cos x(b+1)^2$$

Если $b = -1$ решением являются все числа. В противном случае:

$$\operatorname{tg} x = b + 1$$

$$x = \operatorname{arctg}(b+1)$$

По условию задачи необходимо, чтобы на отрезке $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ имелось хотя бы одно решение. Значит:

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) \leq b + 1 \leq \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2})$$

$$1 \leq b + 1 \leq +\infty$$

$$b \geq 0$$

Ответ: $b \geq 0$ или $b = -1$

Задание 8

Пусть m_1, d_1 и m_2, d_2 – количество мальчиков и девочек, обучающихся бальным танцам и вокалу соответственно. По условиям задачи мы имеем неравенства:

$$\frac{d_1}{m_1 + d_1} \geq \frac{3}{5}$$

$$\frac{d_2}{m_1 + d_2} \geq \frac{4}{7}$$

Из этих неравенств следует:

$$d_1 \geq \frac{3}{2}m_1$$

$$d_2 \geq \frac{3}{3}m_2$$

или в другой форме:

$$m_1 \leq \frac{2}{3}d_1$$

$$m_2 \leq \frac{3}{4}d_2$$

Пусть m, d - количество мальчиков и девочек всего. Так как некоторые дети могу заниматься и бальными танцами, и вокалом, то $m \leq m_1 + m_2$ и $d \leq d_1 + d_2$. Зафиксируем также неравенства: $d_1 \leq d, d_2 \leq d, m_1 \leq m, m2 \leq m$. Теперь сравним m и d:

$$m \leq m_1 + m_2 \leq \frac{2}{3}d_1 + \frac{3}{4}d_2 \leq \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) d = \frac{17}{12}d$$

А) Фактически, требуется решить задачу: $d = 50 - m \to \min$, или $m \to \max$. Поскольку $m \to \max$ и $m \leq \frac{17}{12}d$, то $m = \frac{17}{12}d$. Следовательно, $1d + \frac{17}{12}d = 50 \leftrightarrow \frac{29}{12}d = 50 \leftrightarrow d \approx 20.69$. Так как d должно быть целым, его следует округлить в большую сторону. Ответ: 21.

Б) Очевидно, $m = 0$ не противоречит неравенствам задачи и является наименьшей долей из всех возможных. Если же требуется определить наибольшую долю мальчиков, то $m \to \max$ и $m \leq \frac{17}{12}d$ по логике предыдущего пункта. Тогда искомое число есть

$$\frac{m}{m+d} = \frac{\frac{17}{12}d}{\frac{29}{12}d} = \frac{17}{29}$$

Ответ: $\frac{17}{29}$ или 0