1 Лабораторная 1

Дана задача:

$$\frac{\partial K(t)}{\partial t} = L(t) + 3K(t), K(0) = 2, 0 \le L < \infty, t \in [0, 2] \tag{1}$$

$$I(K, L) = \int_0^2 K(t) + L^2(t)dt - 2K(2) \to \min. \tag{2}$$

Решение:

Оптимальный процесс является решением вспомогательной задачи

$$H(K, L, p) = -(K + L^2) + p(L + 3K) \to \max_L, \tag{3}$$

то есть

$$\frac{\partial H}{\partial L} = -2L + p = 0 \Rightarrow L = \frac{p}{2}. \tag{4}$$

Сопряженная задача имеет вид:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial K} = 1 - 3p, \tag{5}$$

$$p(2) = -\frac{\partial(-2K(2))}{\partial K(2)} = 2. \tag{6}$$

Дифференциальное уравнение имеет решение $p = C_1 \frac{e^{-3t}}{3} + \frac{1}{3}$, причем $p(2) = 2$, поэтому $C_1 = 5e^6$, тогда

$$p(t) = \frac{1}{3}\left(5e^6 e^{-3t} + 1\right), \tag{7}$$

$$L(t) = \frac{1}{6}\left(5e^6 e^{-3t} + 1\right) > 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = 3K + \frac{5}{6}e^{-3t+6} + \frac{1}{6} \Rightarrow K = \left(C_1 - \frac{ce^{-3t}}{3} - \frac{ke^{-6t}}{6}\right)e^{3t}, c = \frac{1}{6}, k = \frac{5e^6}{6}. \tag{9}$$

Из условия $K(0) = 2$ находим $C_1 = 2\frac{1}{18} + \frac{5e^6}{36}$, откуда

$$K(t) = K = \left(2\frac{1}{18} + \frac{5e^6}{36} - \frac{e^{-3t}}{18} - \frac{5e^6 e^{-6t}}{36}\right)e^{3t}. \tag{10}$$

2 Лабораторная 2

Задача:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u, & x_2(0) = 1, t \in [0, 10] \end{cases} \tag{11}$$

$$I = \int_0^{10} u^2 - x_1 dt \to \min. \tag{12}$$

Решение:

Задача для функции Гамильтона

$$H = x_1 - u^2 + p_1 x_2 + p_2(x_1 + u) \to \max_u \tag{13}$$

имеет решение

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + p_2 = 0 \Rightarrow u = \frac{p_2}{2}. \tag{14}$$

Для сопряжённых переменных система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -1 - p_2, & p_1(10) = 0, \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1, & p_2(10) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

имеет решение в виде

$$\begin{cases} p_1 = C_1 e^t - C_2 e^{-t}, \\ p_2 = -C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1, \end{cases} \tag{16}$$

где $C_1 = -\dfrac{e^{-10}}{2}, C_2 = -\dfrac{e^{10}}{2}$. Тогда система для $\mathbf{x}$ имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + \dfrac{e^{-10}}{4} e^t + \dfrac{e^{10}}{4} e^{-t} - \dfrac{1}{2}, & x_2(0) = 1. \end{cases} \tag{17}$$

Введём константы $a = \dfrac{e^{-10}}{4}, b = \dfrac{e^{10}}{4}, c = -\dfrac{1}{2}$, тогда общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4}\left(ae^t(2t-1) - be^{-t}(2t+1) - 4c\right) + \dfrac{1}{2}C_1(e^t + e^{-t}) + \dfrac{1}{2}C_2(e^t - e^{-t}), \\ x_2 = \dfrac{1}{4}e^{-t}\left(ae^{2t}(2t+1) + b(2t-1)\right) + \dfrac{1}{2}C_1(e^t - e^{-t}) + \dfrac{1}{2}C_2(e^t + e^{-t}). \end{cases} \tag{18}$$

Из граничных условий находим: $C_1 = 1 + \dfrac{1}{4}(a + b + 4c), C_2 = 1 + \dfrac{1}{4}(b - a)$.

3 Лабораторная 3

Задача:

$$\dot{x} = x + u, 0 \le u \le 3, x(0) = 1, t \in [0, 4], \tag{19}$$

$$I = \int_0^4 3u dt - x(4) \to \min. \tag{20}$$

Решение:

Из задачи для функции Гамильтона

$$H = -3u + p(x + u) = u(p - 3) + px \to \max \tag{21}$$

следует

$$u = \begin{cases} 3, & p - 3 > 0, \\ 0, & p - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3, & p > 3, \\ 0, & p < 3 \end{cases} \tag{22}$$

Для p имеем задачу

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -p, p(4) = -\frac{\partial(-x(4))}{\partial x(4)} = 1, \tag{23}$$

откуда

$$p = C_1 e^{-t} \Rightarrow p(4) = C_1 e^{-4} = 1 \Rightarrow C_1 = e^4 \Rightarrow p = e^4 e^{-t}. \tag{24}$$

Тогда $p = 3$ при $t = 4 - \ln 3$. Поскольку функция p убывающая, функция u принимает вид

$$u = \begin{cases} 3, & t \in [0, 4 - \ln 3], \\ 0, & t \in [4 - \ln 3, 4] \end{cases} \tag{25}$$

Из уравнения $\dot{x} = x + u$ следует $x = C_1 e^t - u$. Тогда на отрезке $t \in [0, 4 - \ln 3]$ решается задача

$$x = C_1 e^t - 3, x(0) = 1 \Rightarrow C_1 - 3 = 1 \Rightarrow C_1 = 4 \Rightarrow x = 4e^t - 3, x(4 - \ln 3) = \frac{4}{3}e^4 - 3. \tag{26}$$

Аналогично для отрезка $t \in [4 - \ln 3, 4]$:

$$x = C_1 e^t, x(4 - \ln 3) = \frac{4}{3}e^4 - 3 \Rightarrow C_1 = e^{\ln 3 - 4}\left(\frac{4}{3}e^4 - 3\right) = 4 - 9e^{-4} \Rightarrow x = (4 - 9e^{-4})e^t. \tag{27}$$

В итоге для траектории:

$$\begin{cases} x = 4e^t - 3, & t \in [0, 4 - \ln 3], \\ x = (4 - 9e^{-4})e^t & t \in [4 - \ln 3, 4]. \end{cases} \tag{28}$$

4 Лабораторная 4

Задача:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, & x_2(0) = 2, t \in [0, 1], 0 \le u \le 2 \end{cases} \tag{29}$$

$$I = \int_0^1 x_2 + u dt + x_2(1) \to \min. \tag{30}$$

Решение:

Из задачи для функции Гамильтона:

$$H = -u - x_2 - p_1 x_2 + p_2(u - x_1) = (p_1 - 1)u - p_1 x_2 - p_2 x_1 - x_2 \to \max_u \tag{31}$$

следует

$$u = \begin{cases} 2, & p_2 > 1 \\ 0, & p_2 < 1 \end{cases}. \tag{32}$$

Задача для сопряженных переменных

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_2, & p_1(1) = 0 \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = p_1 + 1, & p_2(1) = -\frac{\partial (x_2(1))}{\partial x_2(1)} = -1 \end{cases} \tag{33}$$

имеет решение

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{2}C_1(e^t + e^{-t}) + \frac{1}{2}C_2(e^t - e^{-t}) - 1, \\ p_2 = \frac{1}{2}C_1(e^t - e^{-t}) + \frac{1}{2}C_2(e^t + e^{-t}) \end{cases}, \tag{34}$$

где $C_1 = e, C_2 = -e$. В сокращённом виде:

$$\begin{cases} p_1 = e \cdot e^{-t} - 1, \\ p_2 = -e \cdot e^{-t} \end{cases}. \tag{35}$$

Очевидно, что $p_2 < 0$ всегда, откуда $u = 0$. В этом случае система дифференциальных уравнений для $\mathbf{x}$ имеет решение

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \\ x_2 = -C_1 e^t + C_2 e^{-t} \end{cases}, \tag{36}$$

где $C_1 = -0.5$, $C_2 = 1.5$.