2. Задача оптимального управления. Принцип максимума.

Пусть имеется некоторая динамическая система, *состояние* которой в каждый момент времени t описывается вектор-функцией $x(t)\in \mathrm{R}^n$. На состояние системы можно воздействовать, изменяя управляемые параметры $u(t)\in \mathbf{U}_t \subseteq \mathrm{R}^r$. Будем рассматривать класс куусочно-непрерывных управлений $u(t)$.

При заданном *управлении* $u(t)$ состояние системы изменяется во времени согласно закону:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)). \quad (2.1)$$

Рассмотрим *задачу оптимального управления* данной системой: определить управление $u^*(t)$, доставляющее экстремум *критерию качества* вида:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt + \Phi_0(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) \to \max. \quad (2.2)$$

При этом первое слагаемое (*интегральная часть* критерия) характеризует качество функционирования системы на всем промежутке управления $[t_0, t_1]$, тогда как второе слагаемое (*терминальный член*) – только конечный результат воздействия управления, определяемый начальным $x(t_0)$ и конечным $x(t_1)$ состояниями и, возможно, моментами начала и окончания управления t_0 и t_1. В зависимости от физического смысла задачи интегральная или терминальная часть критерия может быть равна нулю.

На процесс функционирования системы могут накладываться дополнительные ограничения в форме краевых условий:

$$\Phi_i(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad i = 1..m. \quad (2.3)$$

задающие множества допустимых начальных и конечных состояний системы и моментов начала и окончания управления.

Важным частным случаем (2.3) являются условия вида:

$$x(t_0) - x_0 = 0; \quad x(t_1) - x_1 = 0, \quad (2.4)$$

соответствующие *закрепленному* левому или правому концу фазовой траектории.

Моменты времени начала и окончания управления, t_0 и t_1, могут полагаться как известными, тогда говорят о задаче с *фиксированным* временем управления, или неизвестными (задача с *нефиксированным* моментом начала или окончания управления).

Необходимые условия оптимальности в данной задаче, точнее, необходимые условия сильного локального максимума даются принципом максимума Понтрягина.

Теорема. Пусть ($x^*(t)$, $u^*(t)$, t_0^*, t_1^*) – оптимальный процесс в задаче (2.1) – (2.3). Тогда найдутся одновременно не равные нулю множители λ и ψ : $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathrm{R}^{m+1}$, $\lambda_0 \ge 0$ и $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)) \in \mathrm{R}^n$, такие, что выполнены следующие условия:

а). *Функция Понтрягина* задачи

$$H(t, x, u, \psi, \lambda_0) = \lambda_0 F(t, x, u) + (\psi, f(t, x, u)) \tag{2.5}$$

при каждом $t \in [t_0, t_1]$ достигает максимума по u в т. $u^*(t)$, когда $x = x^*(t)$, $\psi = \psi(t)$.

б). Вектор-функция $\psi(t)$ удовлетворяет *сопряженной системе* дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t), \psi(t), \lambda_0)}{\partial x_i}; \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.6}$$

с краевыми условиями (*условия трансверсальности*)

$$\psi_i(t_0^*) = -(\lambda, \frac{\partial \Phi(t_0^*, t_1^*, x^*(t_0), x^*(t_1))}{\partial x_i(t_0)});$$

$$\psi_i(t_1^*) = (\lambda, \frac{\partial \Phi(t_0^*, t_1^*, x^*(t_0), x^*(t_1))}{\partial x_i(t_1)}). \tag{2.7}$$

в). Выполнены условия на подвижные концы:

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \psi(t), \lambda_0)\,|_{\,t = t_0} = (\lambda, \frac{\partial \Phi(t_0^*, t_1^*, x^*(t_0), x^*(t_1))}{\partial t_0}); \tag{2.8}$$

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \psi(t), \lambda_0)\,|_{\,t = t_1} = -(\lambda, \frac{\partial \Phi(t_0^*, t_1^*, x^*(t_0), x^*(t_1))}{\partial t_1}). \tag{2.9}$$

Замечания.

1. Множитель Лагранжа λ_0 определяет чувствительность оптимального решения задачи к виду интегральной части функционала. В *вырожденном случае* совокупность ограничений задачи такова, что оптимальное управление $u^*(t)$ не зависит от вида интегранта $F(t, x(t), u(t))$. При этом из условий принципа максимума следует, что $\lambda_0 = 0$. В *невырожденном случае* $\lambda_0 > 0$, поэтому ее можно положить равной 1 (разделив функцию H на λ_0). При этом условия принципа максимума не изменятся.

Как правило, из физического смысла задачи понятно, допускаются ли в ней вырожденные решения. При исследовании таких решений необходимо обращать внимание на выполнение условия теоремы о том, что множители λ и $\psi(t)$ не могут одновременно быть равными 0.

2. Для задачи с закрепленными концами (2.4) сопряженная функция $\psi(t)$ имеет свободные концы, т.е. соответствующие условия трансверсальности отсутствуют.

   Обратно, для задачи со свободными концами, не содержащей ограничений (2.3), сопряженная функция имеет закрепленные концы, определяемые соотношениями:

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial \Phi_0(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1))}{\partial x_i(t_0)}; \quad \psi_i(t_1) = \frac{\partial \Phi_0(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1))}{\partial x_i(t_1)}. \qquad (2.7')$$

Примеры

1. Найти оптимальное управление в задаче:

$$J(u, x) = \int_0^4 (u^2 + x)dt \to \min; \quad \dot{x} = u; x(0) = 0; |u| \le 1$$

Р е ш е н и е . Перепишем данную ее в виде задачи на максимум

$$-\int_0^4 (u^2 + x)dt \to \max$$

и воспользуемся теоремой о необходимых условиях.

Функция Понтрягина (рис. 2.1):

$$H = -\lambda_0(u^2 + x) + \psi u;$$

Сопряженная система:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda_0;$$

Условие трансверсальности:

$$\psi(4) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x(1)} = 0$$

(т.к. правый конец фазовой траектории свободен).

Исследуем вырожденный случай: положим $\lambda_0 = 0$.

Тогда $\dot{\psi} \equiv 0$, откуда следует, что $\psi = \mathrm{const}$. Но из условия трансвер-

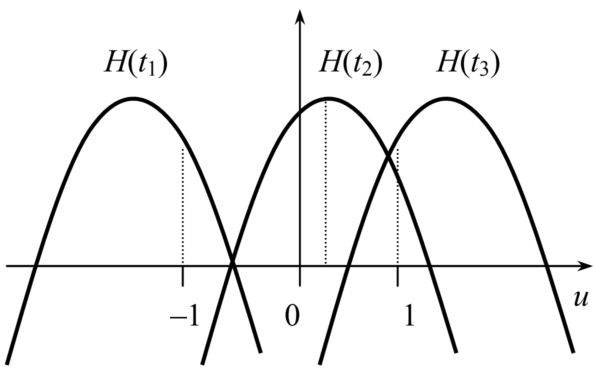

Рис. 2.1

сальности следует, что $\psi \equiv 0$. Таким образом получили, что множители λ_0 и ψ одновременно равны 0, что противоречит условию теоремы. Следовательно, вырожденных решений задача не имеет.

Положим $\lambda_0 = 1$. Тогда:

$$H = \psi u - u^2 - x \to \max_u ;$$

$$\dot{\psi} = 1; \quad \psi(4) = 0.$$

H является квадратичной отрицательно определенной функцией u. Вершина параболы отыскивается из условия экстремума I порядка:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi - 2u = 0$$

Если она лежит внутри отрезка изменения управления [–1, 1], то она и является точкой максимума. В противном случае максимум H достигается на правой либо левой границе отрезка (см. рис. 2.1).

Таким образом, получаем:

$$u^*(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \psi(t), & |\psi(t)| > 2 \\ \dfrac{\psi(t)}{2} & |\psi(t)| \le 2 \end{cases}$$

Оптимальное управление зависит от величины $\psi(t)$. Решая сопряженную систему, получаем $\psi(t) = t - 4$. Видно, что $-4 \le \psi(t) \le -2$ при $0 \le t \le 2$ и $-2 \le \psi(t) \le 0$ при $2 \le t \le 4$. Тогда

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t-4}{2} & 2 \le t \le 4 \end{cases}.$$

Определим теперь фазовую траекторию $x^*(t)$, соответствующую оптимальному управлению:

$$\dot{x} = u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t-4}{2} & 2 \le t \le 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^*(t) = \begin{cases} -t + c_1, & 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t^2}{4} - 2t + c_2, & 2 \le t \le 4 \end{cases}.$$

Для участка траектории при $t \in [0, 2]$, постоянная интегрирования c_1 находится из начального условия $x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. Для участка при $t \in [2, 4]$ воспользуемся условием непрерывности фазовой траектории $x(t)$ в точке $t = 2$:

$$\lim_{t \to 2-} x(t) = \lim_{t \to 2+} x(t).$$

Из этого условия получаем $c_2 = 1$. Итак, окончательно:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t-4}{2} & 2 \le t \le 4 \end{cases}, \qquad x^*(t) = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t^2}{4} - 2t + 1, & 2 \le t \le 4 \end{cases}.$$

2. Найти траекторию $x(t)$, доставляющую минимум функционалу:

$$J(u, x) = \int_0^2 |\,\ddot{x}\,|\,dt,$$

при ограничениях:

$$\ddot{x} \le 2, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 1, \quad \dot{x}(2) = 2.$$

Р е ш е н и е . Введем обозначения $x(t) = x_1(t)$, $\dot{x}(t) = x_2(t)$, $\ddot{x}(t) = u(t)$. Тогда исходная задача запишется в следующем виде:

$$J(u, x) = \int_0^2 |\,u\,|\,dt \to \min, \quad u(t) \le 2,$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(2) = 1,$$

$$\dot{x}_2 = u, \quad x_2(2) = 2,$$

Выпишем необходимые условия оптимальности для этой задачи:

$$H = -\lambda_0 |\,u\,| + \psi_1 x_2 + \psi_2 u \to \max; \tag{2.10}$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1; \quad \psi_2(0) = 0.$$

Рассмотрим вырожденный случай $\lambda_0 = 0$. Тогда $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u$ и максимум достигается, когда:

$$u(t) = \begin{cases} -\infty, & \psi_2(t) < 0 \\ (-\infty, 2], & \psi_2(t) = 0 \\ 2, & \psi_2(t) > 0 \end{cases}.$$

Управление $u(t) = -\infty$ при $\psi_2(t) < 0$ нереализуемо. При $\psi_2(t) = 0$ получаем $\psi_1(t) = 0$, что противоречит условиям принципа максимума. При $u(t) = 2$ траектория движения имеет следующий вид:

$$\dot{x}_2 = 2 \;\Rightarrow\; x_2(t) = 2t + a, \tag{2.11}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \;\Rightarrow\; x_1(t) = t^2 + at + b.$$

Тогда из краевых условий получаем: $a = -2$, $a = -3/2$, $b = 0$. Таким образом, для $u(t) = 2$ при $\psi_2(t) > 0$ допустимых экстремалей нет.

Рассмотрим теперь невырожденный случай $\lambda_0 = 1$. Условие оптимальности по $u(t)$ принимает вид

$$H = -\,|\,u\,| + \psi_1 x_2 + \psi_2 u \to \max,\quad u \le 2.$$

Решением этой задачи максимизации (2.10) в этом случае является управление

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \psi_2(t) < 1 \\ 2, & \psi_2(t) \ge 1 \end{cases}.$$

Из сопряженной системы получаем

$$\psi_1(t) = c_1;\quad \psi_2(t) = -\,c_1 t + c_2.$$

Учитывая условие трансверсальности $\psi_2(0) = 0$, находим $c_2 = 0$, откуда $\psi_2(t) = -\,c_1 t$. Для такой функции $\psi_2(t)$ величина $(\psi_2(t) - 1)$ может менять знак не более одного раза, поэтому оптимальное управление будет иметь вид:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \tau \\ 2, & \tau \le t \le 2 \end{cases}.$$

Определим момент переключения управления τ. На отрезке $[0, \tau]$ траектория подчиняется системе уравнений:

$$\dot x_2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x_2(t) = a,$$

$$\dot x_1 = x_2 \;\;\Rightarrow\;\; x_1(t) = at + b.$$

Из начального условия $x_1(0) = 0$ находим $b = 0$, т.е. $x_1(t) = at$.

На отрезке $[\tau, 2]$ основная система уравнений имеет вид (2.11), при это из краевых условий получаем $a = -2$, $b = 1$.

Из условия непрерывности фазовой траектории в точке τ получаем систему уравнений для определения параметров τ и a:

$$x_1(\tau^-) = at = \tau^2 - 2\tau + 1 = x_1(\tau^+);\qquad x_2(\tau^-) = a = 2\tau - 2 = x_2(\tau^+).$$

Отсюда $\tau = 1$, $a = 0$.

Итак, оптимальный процесс в данной задаче имеет вид:

$$x^*(t) = x_1^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1 \\ t^2 - 2t + 1, & 1 \le t \le 2 \end{cases}.$$

3. П р о с т е й ш а я   з а д а ч а   о п т и м а л ь н о г о   у п р а в л е н и я   д л я   п о т р е б и т е л я .

Рассматривается модель потребителя:

$$\max \int_0^T ce^{-\beta t}\, dt$$

$$\dot{W} = rW - c, \ \ t \in [0, T].$$

Граничные условия имеют вид: $W(0) = W_0$, $W(T) = W_T$ и ограничение на объем мгновенного потребления c: $0 \le c \le 1$. Здесь W - реальное богатство потребителя, которое прирастает с темпом r, это фазовая координата. Часть его потребитель тратит на потребление c - это управление, а другая часть идет на приращение богатства. Для определенности будем считать, что $\beta < r$, а также, что $W_0\, e^{rt} > W_T$.

Функция Понтрягина H и сопряженная система имеют вид:

$$H = \psi_0\, ce^{-\beta t} + \psi_1\, (rW - c),$$

$$\dot{\psi}_1 = -\, r\psi_1\,,$$

где $\psi_0 = const \ge 0$ и одновременно ψ_0 и ψ_1 не обращаются тождественно в ноль. Уравнение можно сразу проинтегрировать: $\psi_1(t) = \psi_1(0)\ e^{-rt}$. Условие максимума H по c дает соотношение:

$$(\psi_0\, e^{-\beta t} - \psi_1(0)\, e^{-rt})\, c \to \max \ \text{ по } c\text{: } 0 \le c \le 1.$$

Отсюда заключаем, что если $\psi_1(0) \le 0$, то получаем режим $c \equiv 1$, который будет оптимальным при некотором достаточно высоком $W(0)_{\max}$. Если наше W_0 меньше, то отрицательное $\psi_1(0)$ не годится, значит $\psi_1(0) > 0$. В этом случае, если $\psi_0 = 0$, то реализуется режим $c \equiv 0$, который также будет оптимальным при некотором достаточно низком $W(0)_{\min}$. Если наше W_0 выше, то нулевое ψ_0 не годится, значит $\psi_0 > 0$. В таком случае его можно считать равным 1, воспользовавшись тем, что сопряженный вектор $\psi = (\psi_0, \psi_1)$ определен с точностью до положительного множителя. Условие максимума H по c запишем в более удобном виде:

$$(1 - \psi_1(0)\, e^{-(r - \beta)\, t})\, c \to \max \ \text{ по } c\text{: } 0 \le c \le 1.$$

Отсюда видно, что режимы, для которых $W(0)_{\min} < W(0) < W(0)_{\max}$ проходят с переключением: $\psi_1(0) > 1$, $c(t) = 0$ на начальном отрезке, затем в некоторый момент t наступает равенство: $\psi_1(0)e^{-(r - \beta)\, t} = 1$ и затем $c(t) = 1$ до конца интервала управления.

То, что описанные режимы действительно доставляют максимум функционалу, следует из вогнутости функции Понтрягина по совокупности фазовой координаты и управления, W и c, такая теорема будет доказана впереди. Картина фазовых траекторий представлена на рисунке.

Аналогичный анализ можно провести для случая, когда $\beta > r$. Тогда переключения будут с $c = 1$ на $c = 0$. Результаты приведены на рисунке 2.2.

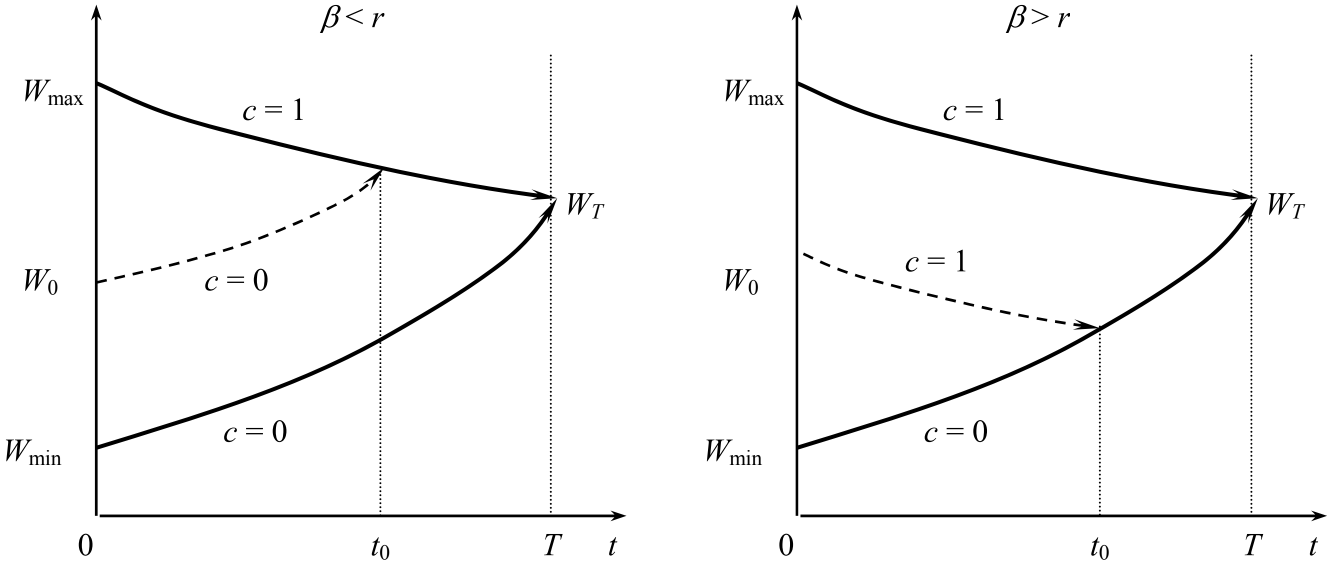

Рис. 2.2.

4. Задача оптимального управления со свободным правым концом. Рассматривается модель потребителя:

$$\max \int_0^T ce^{-\beta t} dt + \Phi(W_T)$$

$$\dot{W} = rW - c, \ \ t \in [0, T].$$

Граничные условия имеют вид: $W(0) = W_0$, W_T – свободно, ограничение на объем мгновенного потребления c: $0 \le c \le 1$. Функция Φ – определена и дифференцируема на R_+, $\Phi' > 0$, $\Phi'' < 0$. Для определенности будем считать, что $\beta < r$.

Функция Понтрягина H и сопряженная система имеют вид:

$$H = \psi_0 \, ce^{-\beta t} + \psi_1 (rW - c),$$

$$\dot{\psi}_1 = - r\psi_1,$$

с граничным условием (условием трансверсальности)

$$\psi_1(T) = \psi_0 \Phi'(W_T),$$

где $\psi_0 = const \ge 0$ и одновременно ψ_0 и ψ_1 не обращаются тождественно в ноль. Отсюда следует, что $\psi_0 > 0$, $\psi_1 > 0$. Положим $\psi_0 = 1$. Сопряженное уравнение можно проинтегрировать: $\psi_1(t) = \psi_1(0)\, e^{-rt}$.Тогда условие трансверсальности принимает вид:

Условие максимума H по c дает соотношение:

$$(1 - \psi_1(0)\, e^{-(r-\beta)t})\, c \to \max \ \text{ по } c\text{: } 0 \le c \le 1.$$

Возможны следующие режимы:

$$\psi_1(0)\, e^{-(r--\beta)t} > 1 \Rightarrow c = 0,$$
$$\psi_1(0)\, e^{-(r-\beta)t} < 1 \Rightarrow c = 1.$$

При этом возможно не более одного переключения с режима $c = 0$ на режим $c = 1$. В частности, при $t = T$, учитывая условие трансверсальности, можно разбить терминальное множество $\{(t, W)\colon\ t = T,\ W \geq 0\}$ на плоскости (t, W) на две части:

$$\Phi'(W_T)\, e^{\beta T} > 1, \text{ где } c = 0 \text{ и}$$
$$\Phi'(W_T)\, e^{\beta T} < 1, \text{ где } c = 1.$$

Точка $W_T^* : \Phi'(W_T^*)\, e^{\beta T} = 1$ разграничивает эти области. Из условия максимума H по c видно, что если $W(T) = W_T^*$, то при всех $t < T$ $c(t) = 0$. Этому режиму соответствует траектория $W(t) = W_0^* e^{rt}$. В силу вогнутости Φ неравенство $\Phi'(W_T)\, e^{\beta T} > 1$ сохранится для всех начальных условий $W_0 < W_0^*$. Таким образом для всех $W_0 < W_0^*$ получаем экстремали $W(t) = W_0\, e^{rt}$ с управлением $c \equiv 0$.

При $W_0 > W_0^*$ возможно переключение. Построим кривую переключения в координатах (t, W). На оси $t = T$ кривая начинается в т. W_T^*. Чтобы определить ее при $t < T$ заметим, что момент переключения t находится из условия:

$$\psi_1(0)\, e^{-(r-\beta)t} = 1.$$

Выразим $\psi_1(0)$ из условия трансверсальности и подставим в последнее уравнение. Получим:

$$\Phi'(W_T)\, e^{rT} e^{-(r-\beta)t} = 1 \text{ или}$$
$$\ln \Phi'(W_T) + r(T - t) + \beta t = 0. \tag{2.12}$$

Зная, что при $W_T > W_T^*$ на последнем участке траектории $c = 1$ проинтегрируем уравнение $\dot{W} = rW - 1$ в пределах от t до T, считая, что $W(T) = W_T$, а в момент t имеем X :

$$W(T)\, e^{-rT} - X\, e^{-rt} = (e^{-rT} - e^{-rt})/r \text{ , или}$$
$$W(T) = e^{rT}(X\, e^{-rt} + (e^{-rT} - e^{-rt})/r\ ).$$

Подставим это выражение для $W(T)$ в уравнение (2.12):

$$\ln \Phi'(r^{-1} - (r^{-1} - X)\, e^{r(T-t)}) + rT - (r - \beta)\, t = 0. \tag{2.13}$$

Неявная функция $X(t)$ из соотношения (2.13) описывает кривую переключения. Легко проверить, что кривая $X(t)$ убывает (с темпом, большим, чем r) с ростом t от $t = 0$ до $t = T$. Любая траектория, начинающаяся

$\beta < r$

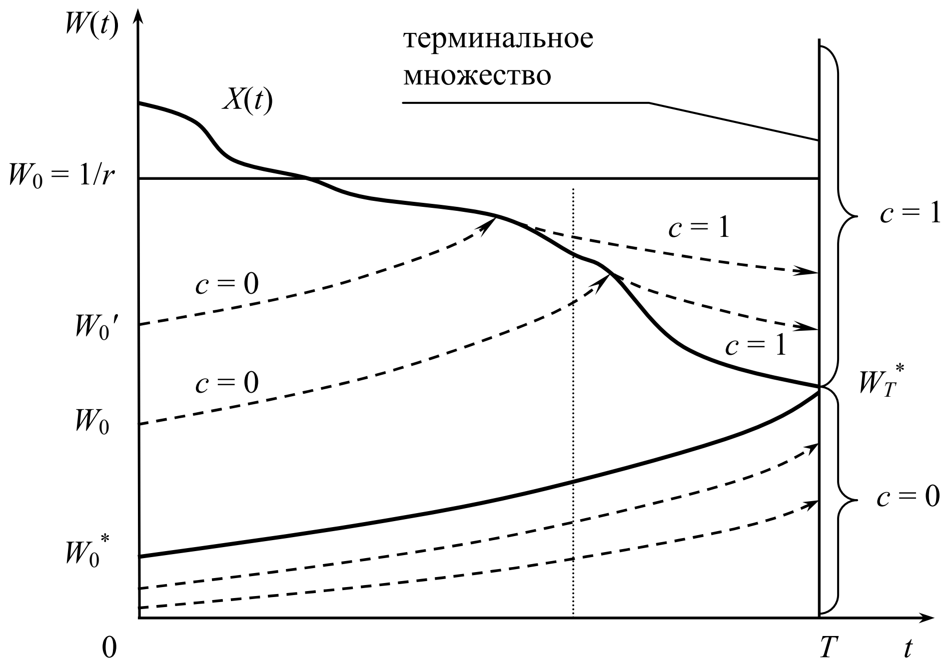

Рис. 2.3.

с $W_0 < X(0)$ переключается с $c = 0$ на $c = 1$ на кривой $X(\cdot)$. На этом задача синтеза оптимального управления завершена.

Полученные результаты проиллюстрированы на рисунке 2.3.

5. З а д а ч а   н а   б ы с т р о д е й с т в и е . Имеется динамическая система, характеризуемая координатой x и скоростью v. Параметром управления является ускорение системы, выбираемое из отрезка [–1, 1]. Требуется за минимальное время T перевести систему из начального состояния (x_0, v_0) в состояние (0, 0). Фиксируем время начала процесса. Время окончания, очевидно, свободное.

Р е ш е н и е . Запишем условие задачи в формальном виде:

$$T \to \min;$$
$$\dot{x} = v; \quad x(0) = x_0; \quad x(T) = 0;$$
$$\dot{v} = u; \quad v(0) = v_0; \quad v(T) = 0;$$
$$|\, u \,| \le 1.$$

Функционал задачи может быть преобразован к интегральному виду:

$$-\int_0^T 1dt \to \max.$$

I. Выпишем условия принципа максимума:

$$H = -\lambda_0 + \psi_1 v + \psi_2 u \to \max_u ;$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0; \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\psi_1; \; H(t_1) = 0.$$

Так как и правый и левый конец фазовой траектории – закрепленные, то условия трансверсальности на сопряженные функции отсутствуют.

Так как функция Понтрягина линейна по u, то максимум H может достигаться только на концах отрезка изменения управления (за исключением случая, когда $\psi_2 = 0$). Таким образом оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \psi_2(t), & \psi_2(t) \neq 0 \\ [-1, 1], & \psi_2(t) = 0 \end{cases}$$

где запись $[-1, 1]$ означает, что $u(t)$ в этом случае не определяется из условий принципа максимума.

Из сопряженной системы могут быть найдены $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$:

$$\psi_1(t) = c; \quad \psi_2(t) = ct + d.$$

Кроме того, $\lambda_0 = \psi_2 u \, |_{t=T}$. Видно, что в зависимости от значений постоянных интегрирования c и d может иметь место несколько различных типов поведения $\psi_2(t)$:

а). $c \equiv 0$. В этом случае $\psi_2(t) = d$. Тогда $u^*(t) = \operatorname{sgn} d$ – постоянна на $[0, T]$.

б). $c < 0$. Тогда $\psi_2(t)$ – убывающая линейная функция. При этом знак $\psi_2(t)$ может изменяться не более одного раза, причем только с '+' на '–'. Таким образом:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau) \\ -1, & t \in (\tau, T] \end{cases}, \tag{2.14}$$

где $\tau \in [0, T]$ – момент переключения управления. $u(\tau)$ может быть определено произвольным образом, так как переопределение функции в одной точке не повлияет на значение интегрального функционала.

в). $c > 0$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получим, что оптимальное управление может иметь вид:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \tau) \\ 1, & t \in (\tau, T] \end{cases}. \tag{2.15}$$

Вырожденный случай возможен только при $\psi_2(T) = 0$. Это происходит, когда начальные состояния $(x(0), v(0))$ переводятся в точку $(0, 0)$ управлением $u^* \equiv +1$ или $u^* \equiv -1$.

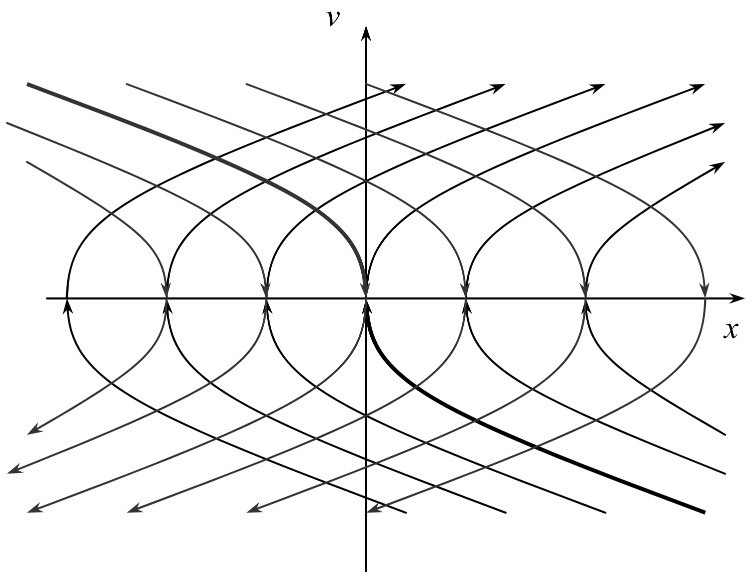

Рис. 2.4

Таким образом, выделены все возможные типы управлений при различных значениях сопряженных функций. Рассмотрим теперь поведение системы для этих управлений.

а). $u(t) = 1$. Тогда основная система имеет вид:

$$\dot{x} = v; \quad \dot{v} = 1,$$

откуда получаем:

$$v(t) = t + c_1; \quad x(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2.$$

Построим фазовую диаграмму поведения системы. Для этого выразим $x(t)$ через $v(t)$:

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 = (\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_1^2) - c_1^2 + c_2 = \frac{1}{2} v(t)^2 + d_1$$

Таким образом возможные фазовые траектории системы в этом случае представляют собой семейство квадратичных парабол, ориентированных вправо (см. рис. 2.4).

Движение системы вдоль этих траекторий будет происходить снизу вверх (т.к. v – возрастающая функция от t).

Видно, что достижение конечной точки (0, 0) при помощи управления $u(t) \equiv 1$ возможно только для некоторых начальных условий, а именно, точек, лежащих на нижней ветви параболы $x_0 = \frac{1}{2} v_0^2$ (выделена жирным на рис. 2.4).

б). $u(t) = -1$. В этом случае:

$$\dot{x} = v; \quad \dot{v} = -1,$$

$$v(t) = -t + c_3; \quad x(t) = -\frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4.$$

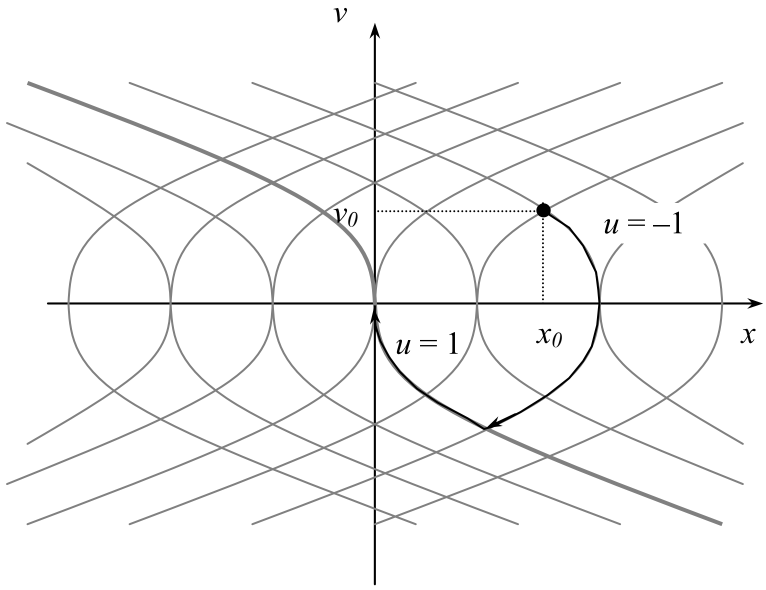

Рис. 2.5

Выражая $x(t)$ через $v(t)$ аналогично предыдущему случаю, получаем:

$$x(t) = -\frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4 = -(\frac{t^2}{2} - c_3 t + c_3^2) + c_3^2 + c_4 = -\frac{1}{2}v(t)^2 + d_2$$

Фазовые траектории системы при $u(t) = -1$ представляют семейство квадратичных парабол, ориентированных влево, движение вдоль траекторий происходит сверху вниз. Достижение конечной точки при $u(t) \equiv -1$ возможно только для точек, лежащих на верхней ветви параболы $x_0 = -\frac{1}{2}v_0^2$.

Таким образом, для точек, лежащих на *линии переключения*

$$x_0 = \begin{cases} \frac{1}{2}v_0^2, & v_0 \le 0 \\ -\frac{1}{2}v_0^2, & v_0 > 0 \end{cases}$$

оптимальное управление будет постоянным на всем отрезке $[0, T]$: $u^*(t) \equiv \operatorname{sgn} x_0$. Здесь мы имеем вырожденный случай $\lambda_0 = 0$.

Для точек, лежащих над данной кривой, оптимальное управление будет иметь вид (2.15). Действительно, в противном случае система будет перемещаться под действием управления $u(t) = 1$ вправо вверх, и никогда не достигнет начала координат.

Аналогично, для точек, лежащих ниже линии переключения управление будет иметь вид (2.14).

Определим момент переключения управления τ. Пусть начальное состояние (x_0, v_0) находилось над линией переключения (см. рис. 2.5). Тогда траектория движения системы на отрезке времени $[0, \tau]$ описывается уравнениями:

$$v(t) = v_0 - t; \quad x(t) = -\frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

С другой стороны, на отрезке $[\tau, T]$ система движется под действием управления $u(t) = 1$ и конечное ее состояние равно (0, 0). Тогда:

$$v(t) = t - T; \quad x(t) = \frac{t^2 + T^2}{2} - Tt.$$

Тогда из условий непрерывности фазовой траектории в момент времени τ

$$v_0 - \tau = \tau - T; \quad -\frac{\tau^2}{2} + v_0\tau + x_0 = \frac{\tau^2 + T^2}{2} - T\tau.$$

Решая эту систему относительно переменных τ и T, получаем:

$$\tau = v_0 + \sqrt{\frac{v_0^2}{2} + x_0}; \quad T = v_0 + 2\sqrt{\frac{v_0^2}{2} + x_0}.$$

Моменты переключения и окончания управления для начальных условий, лежащих ниже линии переключения, определяются аналогичным образом.

II. Приведем также решение, использующее функцию Лагранжа. В рассматриваемой задаче она имеет следующий вид

$$\mathcal{L} = \int_0^T \psi_1(t)(v - \dot{x}) + \psi_2(t)(u - \dot{v})dt - \lambda_0 T + \lambda_1(x(0) - x_0) + \lambda_2(v(0) - v_0) + \lambda_3 x(T) + \lambda_4 v(T).$$

Необходимые условия оптимальности состоят в том, что $\exists\ \lambda_0, \lambda_0, \ldots, \lambda_4, \psi_1(t), \psi_1(t)$, такие, что выполнено:

a). Уравнение Эйлера для лагранжиана $L = \psi_1(t)(v - \dot{x}) + \psi_2(t)(u - \dot{v})$:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0; \quad -\frac{d}{dt}L_{\dot{v}} + L_v = 0,$$

что приводит к сопряженной системе:

$$\dot{\psi}_1 = 0; \quad \dot{\psi}_2 + \psi_1 = 0.$$

Условия трансверсальности по x для терминанта

$$\Phi(x(0), x(T), v(0), v(T), T) = -\lambda_0 T + \lambda_1(x(0) - x_0) + \lambda_2(v(0) - v_0) + \lambda_3 x(T) + \lambda_4 v(T):$$

$$\psi_1(0) = -\lambda_1\Phi'_{x(0)} = -\lambda_1; \quad \psi_1(T) = -\lambda_3\Phi'_{x(T)} = -\lambda_3;$$

$$\psi_2(0) = -\lambda_2\Phi'_{v(0)} = -\lambda_2; \quad \psi_2(T) = -\lambda_4\Phi'_{v(T)} = -\lambda_4;$$

b). Оптимальность лагнажиана L по u (выписаны только слагаемые, зависящие от u):

$$\max_{u\in[-1,1]}\{\psi_2(t)u\} \quad \Rightarrow \quad u^*(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\psi_2(t), & \psi_2(t) \neq 0 \\ [-1,1], & \psi_2(t) = 0 \end{cases}.$$

c). Стационарность функции Лагранжа по T:

$$\ell'_T = 0 \quad \Rightarrow \; -\lambda_0 T + \lambda_3 \dot{x}(T) + \lambda_4 \dot{v}(T) = 0.$$

Видно, что условия (a) и (b) соответствуют условиям принципа максимума и приводят к аналогичным решениям. Условие (c) возникает для задач с нефиксированным временем окончания процесса и представляет собой дополнительное уравнение для определения оптимального T.

6. Еще одна модель поведения потребителя. Рассматривается динамическая модель потребителя, максимизирующего дисконтированную полезность от потребления $U(c)$ на фиксированном отрезке времени $[0, T]$:

$$\max \int_0^T U(c)e^{-\beta t}\, dt. \qquad (2.16)$$

Выбор потребления c подчиняется бюджетному ограничению

$$\dot{k} + \dot{b} + c = f(k) + rb, \quad t \in [0, T], \qquad (2.17)$$

при граничных условиях $k_0 + b_0 = W_0$, и условии на правом конце

$$k(T) + b(T) \geq W_T, \qquad (2.18)$$

где T, r и β –фиксированные положительные числа.

Дифференциальное ограничение (2.17), записанное в реальных переменных, означает, что в каждый момент времени потребитель выбирает, куда вкладывать выпуск производства $f(k)$, которым он владеет: инвестировать в капитал $\dot{k}$, инвестировать в актив $\dot{b}$, приносящий поток процентного дохода rb, или пустить в потребление c. В начале планового периода реальное богатство потребителя ($k_0 + b_0$) составляет W_0, а в конце потребитель хочет, чтобы его реальное богатство ($k(T) + b(T)$) было не меньше определенной величины W_T. Предполагается, что функции U и f определены на R_+, дифференцируемы, причем $U'(0) = f'(0) = \infty$, вогнуты и монотонно возрастают.

Решение. Проанализируем эту задачу, как задачу оптимального управления, с помощью принципа максимума. Для этого приведем ограничение (2.17) к нормальной форме, введя новую переменную $u = \dot{k}$.

Тогда дифференциальные связи будут иметь вид:

$$\dot{k} = u,$$
$$\dot{b} = f(k) + rb - c - u.$$

Как фазовые координаты k и b (запас капитала и актива), так и управления c и u, являются неизвестными функциями времени.

Рассмотрим случай, когда на изменение c и u не накладывается никаких ограничений. По смыслу задачи c не может быть отрицательным, т.к. в этом случае не определена полезность потребителя U. Отрицательное u допустимо, и соответствует проеданию капитала. Предположим, что решение задачи в этом случае существует.

Запишем функцию Понтрягина:

$$H = \psi_0 U(c) e^{-\beta t} + \psi_1 u + \psi_2 \,(f(k) + rb - c - u)\,.$$

Тогда сопряженная система имеет вид:

$$\dot{\psi}_1 = -\,\psi_2 f'(k), \qquad \dot{\psi}_2 = -\,\psi_2\, r.$$

Максимизируя H по c и u получаем уравнения

$$\psi_0 U'(c) e^{-\beta t} = \psi_2, \qquad \psi_1 = \psi_2 \tag{2.19}$$

(здесь мы воспользовались существованием решения).

Отсюда следует, что $\psi_0 \neq 0$ (обратное приводит к обнулению вектора $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2)$, что противоречит предположению о существовании решения и принципу максимума). Так как вектор ψ определен в условиях оптимальности с точностью до положительного множителя, то можно положить $\psi_0 = 1$. Кроме того, так как $U' > 0$, заключаем, что $\psi_1 = \psi_2 > 0$. Из сопряженной системы получаем, что

$$f'(k(t)) = r \quad \forall\, t \in [0, T], \tag{2.20}$$

откуда находим $k(t) \equiv k^*$.

Сопряженная система сводится к одному уравнению

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_1 r,$$

которое имеет решение $\psi_1(t) = \psi_2(t) = \psi_1(0)\, e^{-rt}$. Тогда

$$U'_c = \psi_1(0)\, e^{(\beta - r)t},$$

откуда можно выразить $c = C(t,\, \psi_1(0))$.

Заметим, что из вогнутости функции U следует, что c убывает, если $\beta > r$, и возрастает, если $\beta < r$.

Ограничения на левом и правом концах дают нам условия трансверсальности:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \text{ и } \psi_1(T) = \psi_2(T),$$

указывающие, что вектор $(\psi_1(T),\, \psi_2(T))$ должен быть коллинеарен градиенту ограничения $k(T) + b(T) \geq W_T$. Это равенство уже обеспечено условиями (2.19).

Кроме того, так как $\psi_i > 0$, то из условия дополняющей нежесткости на правом конце следует, что концевое ограничение выполняется со знаком равенства:

$$k(T) + b(T) = k^* + b(T) = W_T\,.$$

Тогда значения актива $b(t)$ на концах:

$$b(0) = W_0 - k^*, \quad b(T) = W_T - k^*\,.$$

Полученные значения $b(0)$ и $b(T)$ позволяют найти $\psi_1(0)$. Для этого рассмотрим исходное ограничение задачи

$$\dot{b} = rb + [f(k_0) - C(t,\ \psi_1(0)],\ \ b(0) = W_0 - k^*\,. \tag{2.21}$$

Проинтегрируем его от 0 до t:

$$b(t) = e^{rt}\,(W_0 - k^* + \int\limits_0^t [f(k_0) - C(\tau,\ \psi_1(0)]d\tau.$$

При $t = T$ получаем соотношение для нахождения $\psi_1(0)$

$$\int\limits_0^T [f(k_0) - C(t,\psi_1(0)]\, e^{-rt} d\tau = (W_T - k^*)e^{-rt} - (W_0 - k^*). \tag{2.22}$$

Затем находим $c(t) = C(t,\psi_1(0))$ и $b(t)$ по формуле (2.21).

Мы установили, что $c(t)$ ведет себя монотонно. Осталось исследовать поведение функции $b(t)$. Обозначим $A(t) = f(k_0) - c(t)$.

Предположим, что функция $b(t)$ имеет стационарную точку t^*: $\dot{b}\,(t^*) = 0$. Выясним характер экстремума в точке t^*. Вычислим ее первую и вторую производные:

$$\dot{b}\,(t^*) = r\,e^{rt^*}\,[\,b_0 + \int\limits_0^{t^*} A(t)\,e^{-rt}\,dt\,] + A(t^*) = 0,$$

$$\ddot{b}\,(t^*) = r^2\,e^{rt^*}\,[b_0 + \int\limits_0^{t^*} A(t)\,e^{-rt}\,dt\,] + \dot{A}\,(t^*) + r\,A(t^*) =$$

$$= -\,r\,A(t^*) + A(t^*) + r\,A(t^*) = \dot{A}\,(t^*).$$

Таким образом, если $\beta > r$, то $c(t)$ убывает, а $A(t)$ возрастает, следовательно, $\ddot{b}\,(t^*) > 0$, то есть, t^* – точка минимума $b(t)$ и, очевидно, единственная. Если же $\beta < r$, то t^* – единственная точка максимума $b(t)$. Если внутри нет стационарной точки, то $b(t)$ изменяется монотонно.

Поведение $b(t)$ изображено на рисунках 2.6 и 2.7.

Выписанные выше условия принципа максимума являются необходимыми.

Предположим, что уравнения (2.20) и (2.22) имеют решения, по которым определяются переменные k^*, $b^*(t)$, $c^*(t)$ и $u^*(t)$. Мы утверждаем, что это и есть решение исходной задачи. Это следует из того, что функция Понтрягина

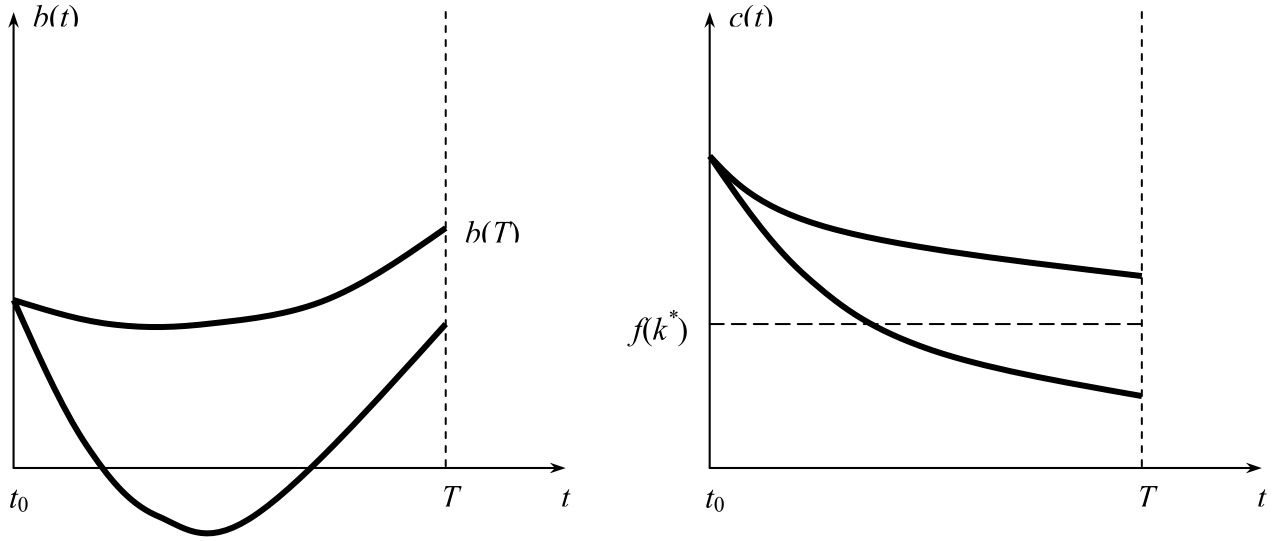

Рис. 2.6. Случай $\beta > r$

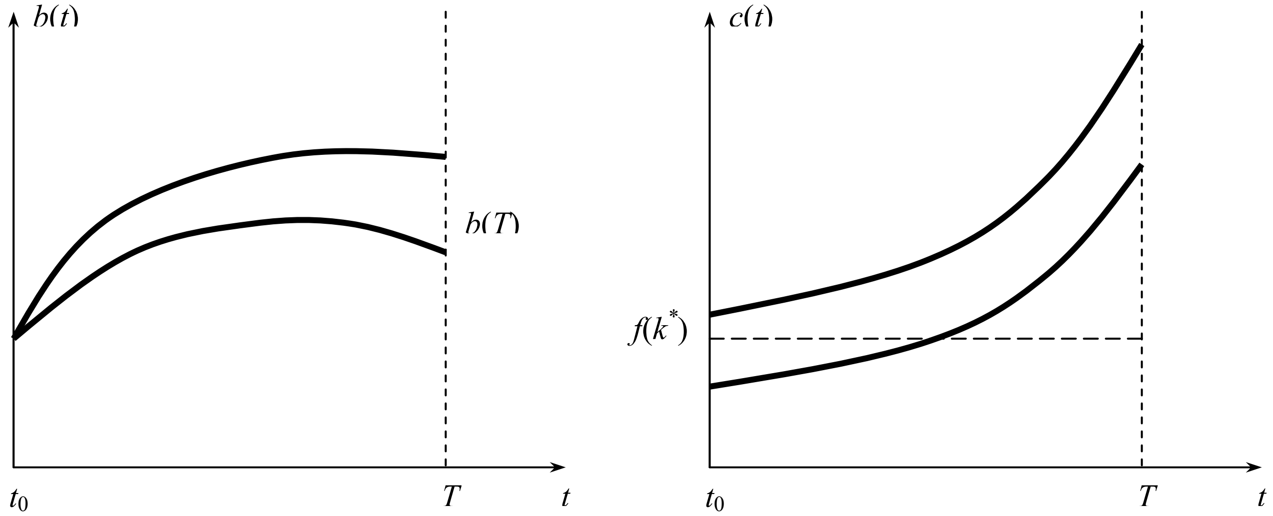

Рис. 2.7. Случай $\beta < r$

вогнута по совокупности переменных k, b, c, u (вспомним, что ψ_1 и ψ_2 положительны). Это свойство является достаточным условием того, что найденная из принципа максимума экстремаль является решением задачи.

Рассмотрим теперь более сложный случай.

7. Модель поведения потребителя с ограничениями на управление. Рассматривается та же модель, что и в примере 4:

$$\max \int_0^T U(c) e^{-\beta t}\, dt,$$

$$\dot{k} = u,$$

$$\dot{b} = f(k) + rb - c - u, \quad t \in [0, T].$$

Граничные условия теперь имеют вид:

$$k(0) = k_0, \quad b(0) = b_0, \quad k(T) + b(T) \geq W_T,$$

где $k_0 > 0$, $b_0 > 0$, $W_T > k_0 + b_0$.

Задано ограничение на управление u: $|u| \leq 1$, означающее, что рост капитала, как и его преобразование в потребительский продукт, не может быть мгновенным. Для определенности будем считать, что $\beta > r$.

Функция Понтрягина H и сопряженная система имеют тот же вид, что и в предыдущем случае:

$$H = \psi_0 U(c) e^{-\beta t} + \psi_1 u + \psi_2 (f(k) + rb - c - u)\ .$$

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2 f'(k)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_2 r$$

Условие максимума H по c и u дает соотношения

$$\psi_0 U'(c)\, e^{-\beta t} = \psi_2\,,$$

$$(\psi_1 - \psi_2)u \to \max_{u:|u|\leq 1}\ .$$

Отсюда заключаем, что ψ_0 можно считать равным 1,

$$\psi_2(t) = \psi_2(0)\, e^{-rt}, \quad c = C(t, \psi_2(0)),$$

и, кроме того,

$$u = \mathrm{sgn}(\psi_1 - \psi_2),$$

где при $\psi_1 = \psi_2$ значение $u \in [-1, 1]$.

Условие трансверсальности на правом конце дает: $\psi_1(T) = \psi_2(T) \geq 0$, причем, очевидно, неравенство выполняется строго.

Рассмотрим закон изменения разности $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$:

$$\dot{(\psi_1 - \psi_2)} = \psi_2(0)\, e^{(\beta - r)t}\, (r - f'(k(t))). \tag{2.23}$$

Пусть k^* – такое, что $r = f'(k^*)$. Покажем, что:

- при $k_0 < k^*$ применяется управление $u = 1$, пока $k(t) < k^*$,
- при $k_0 > k^*$ применяется управление $u = -1$, пока $k(t) > k^*$,
- при $k_0 = k^*$ применяется управление $u = 0$, пока $k(t) = k^*$.

Пусть $k_0 < k^*$. Утверждаем, что тогда $\psi_1(0) > \psi_2(0)$. Допустим обратное, т.е. $\psi_1(0) \leq \psi_2(0)$. Так как $f'(k_0) > f'(k^*) = r$, а фазовая переменная $k(t)$ непрерывна, то в окрестности точки $t = 0$ разность $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$ убывает в силу (2.23), а $u = -1$. Уменьшение капитала приведет только к дальнейшему уменьшению отрицательной разности $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$ и сохранению управления $u = -1$. Такая траектория $(\psi_1(t), \psi_2(t))$, будучи продолженной до $t = T$, не удовлетворяет условию трансверсальности на правом конце: $\psi_1(T) = \psi_2(T)$. Поэтому, если оптимальная траектория существует, а мы это предполагаем, то $\psi_1(0) > \psi_2(0)$.

Управление $u = 1$ применяется до тех пор, пока $(\psi_1(t) - \psi_2(t)) > 0$, при этом $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$ убывает. Представляются две возможности, согласующиеся с условием трансверсальности: разность достигает нуля либо в момент $t = T$, либо при некотором $t = t^* < T$.

В первом случае получаем экстремаль:

$$k(t) = k_0 + t, \qquad b(t) = e^{rt}(b_0 + \int_0^t [f(k_0 + \tau) - C(\tau, \psi_2(0))]d\tau,$$

где $\psi_2(0)$ находится из условия $b(T) = W_T - (k_0 + T)$.

При этом $k(T) = k_0 + T \le k^*$. Действительно, если $k(t') = k^*$ при $t' < T$, то на отрезке $[t', T]$ разность $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$ будет возрастать и условие трансверсальности не будет выполнено.

Во втором случае $\psi_1(t^*) = \psi_2(t^*)$, $t^* < T$. Мы утверждаем, что в этот момент и капитал достигает значения $k(t^*) = k_0 + t^* = k^*$. Действительно, это не могло произойти раньше, так как тогда бы изменился на положительный знак скорости $(\dot{\psi_1 - \psi_2})$ и равенство $\psi_1(t^*) = \psi_2(t^*)$ было бы невозможно. Также не могло это произойти позже (или вовсе не произойти), так как тогда в момент t^* изменится знак разности $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$, капитал начнет убывать, увеличивая по абсолютной величине разность и, тем самым, исключая выполнение равенств $k(t') = k'$ при $t' > t^*$ или $\psi_1(T) = \psi_2(T)$.

Как только достигаются равенства $k_0 + t^* = k^*$, $\psi_1(t^*) = \psi_2(t^*)$, при $t > t^*$ они должны сохраняться. Действительно, если, например, на каком-то интервале, ближайшем к точке t^* разность $(\psi_1(t) - \psi_2(t)) > 0$, то k вырастет по сравнению с k^* и, значит, $(\dot{\psi_1 - \psi_2}) > 0$ на этом интервале. Возрастание разности будет поддерживать управление $u = 1$, что приведет к еще большему возрастанию разности. В результате будет нарушено условие трансверсальности.

Во втором случае получаем экстремаль, состоящую из двух участков:

$$k(t) = k_0 + t,\ \ b(t) = e^{rt}(b_0 + \int_0^t [f(k_0 + \tau) - C(\tau,\ \psi_2(0))]\,d\tau \ \text{ при } t \in [0, t^*],$$

$$k(t) \equiv k^*,\ \ b(t) = e^{rt}(b(t^*) + \int_{t^*}^t [f(k^*) - C(\tau,\ \psi_2(0))]\,d\tau \ \text{ при } t \in [t^*, T].$$

Неизвестные $\psi_2(0)$ и t^* находятся из условий $k_0 + t^* = k^*$ и $b(T) = b_T$. Неизвестное $\psi_1(0)$ находится из условия $\psi_1(T) = \psi_2(T)$ путем интегрирования уравнения (2.23).

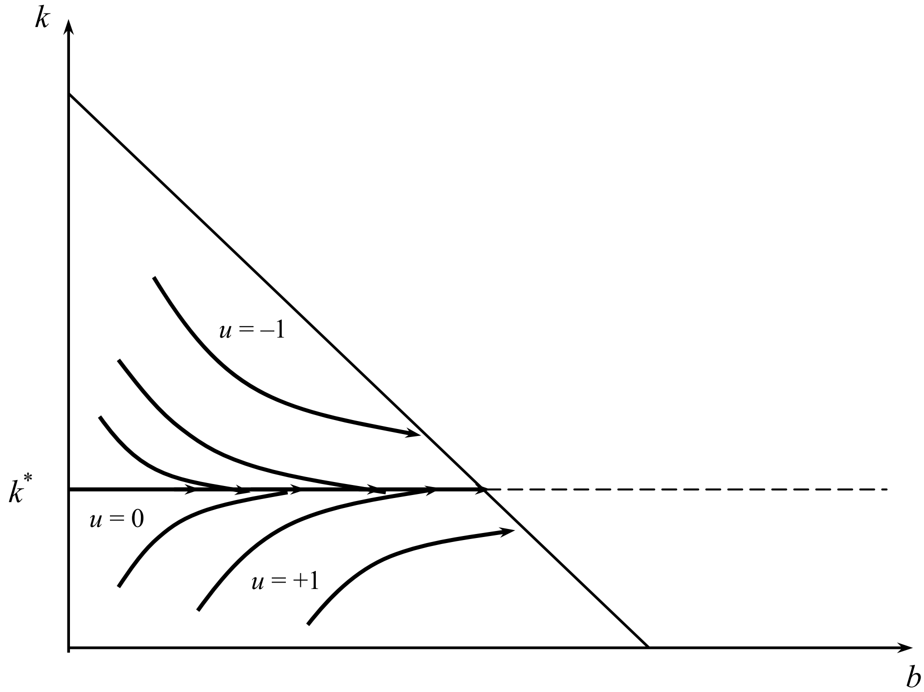

Рис. 2.8.

Легко определить, какой из двух случаев реализуется: если $k_0 + T \le k^*$, то имеем экстремаль первого типа, если $k_0 + T > k^*$, то имеем экстремаль второго типа, причем точкой переключения управления с $u = 1$ на $u = 0$ является $t^* = k^* - k_0$.

Аналогичный анализ можно провести для случая $k_0 > k^*$.

Результирующие фазовые траектории $(b(t), k(t))$ приведены на рисунке 2.8.

8. Синтез оптимальных управлений. Рассмотрим задачу:

$$\max\int_0^{t_1} (ux + u^2/2)\, dt$$

$$\dot{x} = -\frac{x}{4} + u, \quad t\in[0, t_1], \quad t_1 = 4\ln 2,$$

$$u\colon |\, u\,| \le 1,\; x(0) = x_0,\; x(t_1) - \text{свободно}.$$

Функция Понтрягина H и сопряженная система имеют вид:

$$H = \psi_0 (ux + u^2/2) + \psi_1 \left(-\frac{x}{4} + u\right),$$

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_0 u + \psi_1/4, \qquad \psi_1(t_1) = 0,$$

где $\psi_0 = const \le 0$.

Исследуем вырожденный случай. Если $\psi_0 = 0$, то из сопряженной системы получаем $\psi_1(t) \equiv 0$, что невозможно. Поэтому $\psi_0 < 0$.

Положим далее $\psi_0 = -1$. Условие максимума функции H по u дает соотношение (опустим индекс 1 у ψ_1):

$$-ux - u^2/2 + \psi u \to \max.$$

Получаем, что

$$u = 1, \text{ если } \psi - x \ge 1,$$
$$u = -1, \text{ если } \psi - x \le -1,$$
$$u = \psi - x, \text{ если } -1 < \psi - x < 1.$$

В частности, при $t = t_1$ условие трансверсальности позволяет разбить терминальное множество $\{(t, x)\colon t = t_1, x \in R\}$ на три части:

$$A = \{x\colon x \le -1\},\ u(t_1) = +1,$$
$$B = \{x\colon x \ge 1\},\ u(t_1) = -1,$$
$$C = \{x\colon -1 < x < 1\},\ u(t_1) = -x(t_1).$$

Переключение с одного режима на другой происходит на линиях

$$X_+\colon\ \psi - x = 1 \text{ и } X_-\colon\ \psi - x = -1.$$

Чтобы выписать эти условия и построить линии X_+ и X_- положим $u = \psi - x$ и проинтегрируем систему :

$$\dot\psi = 5\psi/4 - x, \tag{2.24}$$
$$\dot x = \psi - 5x/4$$

с граничными значениями $x(t_1) = x_1 \in C,\ \psi(t_1) = 0$.

Собственные числа и собственные векторы матрицы системы равны:

$$\lambda_1 = 3/4,\ h_1 = (2, 1);\ \lambda_2 = -3/4;\ h_2 = (1, 2).$$

Тогда общее решение системы имеет вид

$$\psi(t) = 2C_1\, e^{3t/4} + C_2\, e^{-3t/4},$$
$$x(t) = C_1\, e^{3t/4} + 2C_2\, e^{-3t/4},$$

откуда, с учетом условия трансверсальности получаем

$$\psi(t) = 2C_1\, e^{\frac{3}{4}t}(1 - e^{\frac{6}{4}(t_1 - t)}),$$
$$x(t) = C_1\, e^{\frac{3}{4}t}(1 - 4e^{\frac{6}{4}(t_1 - t)}).$$

Из условия $x(t_1) = x_1$ находим C_1: $C_1 = -x_1 e^{-\frac{3}{4}t_1}/3$.

Разность $(\psi - x)$ при этом равна:

$$\psi - x = C_1\, e^{3t/4} + 2C_1\, e^{3t/4} e^{\frac{6}{4}(t_1 - t)} = -x_1 e^{-\frac{3}{4}(t_1 - t)}(1 + 2e^{\frac{6}{4}(t_1 - t)})/3. \tag{2.25}$$

Обозначим для простоты $z = e^{-\frac{3}{4}(t_1 - t)}$ – "новое время". Тогда $z = 1$ при $t = t_1$ и

$$z = e^{-3\ln 2} = 2^{-3} \text{ при } t = 0.$$

Решение для $x(t)$ и для разности $\psi - x$ при этом можно записать в виде:

$$X = -x_1(z - 4z^{-1})/3,$$
$$\psi - x = -x_1(z + 2z^{-1})/\,3.$$

Выразим из первого соотношения x_1 и подставим во второе, затем приравнивая его + 1 и – 1, получим линии переключения:

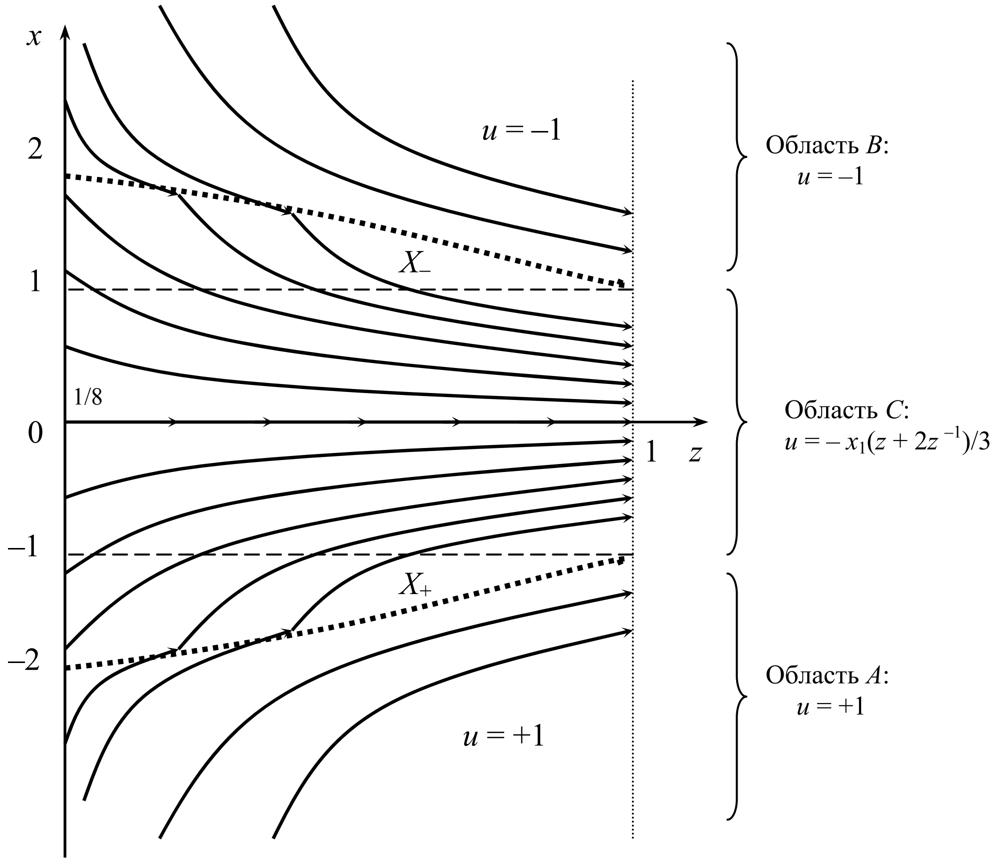

Рис. 2.9.

$$X_+ = (z^2 - 4)/\,(z^2 + 2),\ \ X_- = (-\,z^2 + 4)/\,(z^2 + 2).$$

Как видим, $X_- = -\,X_+$.

Теперь может быть построена картина фазовых траекторий (рис. 2.9).

1. Если $x_1 = 0$, то из системы (2.24) с граничными значениями

$$x(t_1) = 0,\ \psi(t_1) = 0$$

получаем решение $\psi(t) \equiv 0, x(t) \equiv 0, u(t) \equiv 0$.

2. В зоне C при малых $|x_1|$ малы будут и значения $|X|$, поэтому траектории $x(t)$, выходящие (попятным движением) из точки x_1, не достигают линий переключения X_- и X_+; управление будет определяться из (2.25) как

$$u(t) = -\,x_1(z + 2z^{-1})/3.$$

3. Если значения x_1 лежат в зоне C, но $|x_1|$ достаточно велико, точка пересечения траектории $x(t) = -x_1(z - 4z^{-1})/3$ и линии переключения X_+, например (при $x_1 < 0$), находится из равенства:

$$-\,x_1(z^2 - 4)/3z = (z^2 - 4)/\,(z^2 + 2),$$

откуда $z^2 + 3z/x_1 + 2 = 0$. Корни этого уравнения

$$z_{1,2} = -\frac{3}{2x_1} \pm \sqrt{\frac{9}{4x_1^2} - 2}\,.$$

Выбор конкретной точки переключения определяется краевым условием. Например, при $x_1 = -1$ допустимой является только $z = 1$. При $x_1 = -0.9$ годится корень $z \sim 0.8$. Знак x_1 определяет знак точки переключения X, а момент z не зависит от знака x_1.

4. Выше и ниже оси z картина симметричная. Переключения имеют только траектории выходящие из зоны C.
5. Ниже линии X_+ имеем $\psi - x > 1$, откуда $u \equiv +1$. При этом траектории $x(t)$ идут согласно уравнению $\dot{x} = -\dfrac{x}{4} + 1$ до момента переключения или до конца.

   Выше линии X_- $\psi - x < -1$ и там $u \equiv -1$. Траектории идут согласно уравнению $\dot{x} = -\dfrac{x}{4} - 1$ до момента переключения или до конца.
6. Наконец, заметим, что переключение возможно не более одного раза, так как величина $(\psi - x)$ монотонна, причем ее производная по времени имеет такой же знак, как и x_1. Например, если $x_1 < 0$ в зоне C и $\psi - x = +1$, то точка находится на линии X_+. Но в силу монотонности $(\psi - x)$ становится далее меньше 1, то есть, траектория $x(t)$ остается в области, порождаемой множеством C.

Упражнения

1. Найти оптимальное управление в задачах:

а). $\int_0^1 (\dot{x}^2 - x)dt + x^2(1) \to \min.$

б). $\int_0^T u^2 dt + T \to \min;$ $\dot{x} = u$; $x(0) = 1$; $x(T) = 0$; T – не фиксировано.

в). $\int_0^T (1-u)xdt \to \max;$ $\dot{x} = (u - \beta)x$; $x(0) = a$; $0 \le u \le 1$; $\beta \le 1$; T – фиксировано.

г). $\int_0^T (u^2 + x^2)dt + \dfrac{x^2(T)}{2} \to \min;$ $\dot{x} = u - x$; $x(0) = 0$; T – фиксировано.

д). $\int_0^T (u-x)^2 dt \to \min;$ $\dot{x} = \rho(u - x)$; $x(0) = x_0$; $x(T) = x_1$; T – фиксировано.

е). $\int_0^{2\pi} udt + x_2(2\pi) \to \min;$ $-1 \le u \le 2$; $\dot{x}_1 = -x_2$; $\dot{x}_2 = x_1 + u$; $x_1(0) = -2$; $x_2(0) = -1$.

2. В задаче

$$\int_0^2 (2x - 3u - au^2)dt \to \max; \quad \dot{x} = x + u;\ x(0) = 5;\ 0 \le u \le 2;$$

исследовать оптимальный процесс при различных значениях параметра $a \in [0, 1]$.

3. Найти оптимальное управление в задаче на быстродействие

$$T \to \min; \quad x(0) = x_{01};\ \dot{x}(0) = x_{02};\ x(T) = 0;\ \dot{x}(T) = 0;\ |u| \le 1,$$

если изменение состояния системы происходит согласно закону:

а). $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = u$;

б). $\ddot{x} + \pi^2 x = \pi u$;

в). $\ddot{x} = x + u$;

4. Найти оптимальное потребление $c(t)$ в модели Рамсея в непрерывном времени:

$$\int_0^T e^{-\beta t} U(c) dt \to \max; \quad \dot{s} = \rho s - c;\ s(0) = s_0 > 0;\ s(T) = 0;$$

$0 \le c \le s$; $\beta < \rho$; $\rho > 1$; T – фиксировано, если:

а). $U(c) = \ln c$;

б). $U(c) = c^{1-\mu}$; $\mu < 1$.

3. Фазовые ограничения в задаче оптимального управления.

В рассмотренной нами выше постановке задачи оптимального управления предполагалось, что область изменения фазовой координаты $x(t)$ неограничена и совпадает со всем пространством R^n. Однако на практике часто встречаются задачи, в которых имеются ограничения на множество допустимых состояний системы. Особенно это актуально в экономических задачах, где часто накладываются ограничения на неотрицательность фазовых переменных (например, объема выпуска, величины производственной мощности и т.д.). Поэтому рассмотрим далее постановку задачи оптимального управления, учитывающую наличие фазовых ограничений. Моменты t_0, t_1, а также начальное состояние x_0 будем считать фиксированными.

Пусть требуется найти максимум функционала:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt + \Phi_0(x(t_1)) \to \max, \tag{3.1}$$

если закон изменения состояния системы имеет вид:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{3.2}$$

и дополнительно наложены фазовые ограничения:

$$g(t, x(t)) \geq 0;\ t \in [t_0, t_1], \tag{3.3}$$

где $g : \mathrm{R} \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^s$ – непрерывно-дифференцируема по совокупности аргументов.

Рассмотрим *лагранжиан* данной задачи:

$$L(t, x(t), u(t), \psi(t), \mu(t), \lambda_0) = H(t, x(t), u(t), \psi(t), \lambda_0) + (\mu(t), g(t, x(t))) \tag{3.4}$$

где $H(t, x(t), u(t), \psi(t), \lambda_0)$ – функция Понтрягина; $\mu(t) = (\mu_1(t), \ldots, \mu_s(t)) \in \mathrm{R}^n$ – множитель Лагранжа, соответствующий ограничению (3.3) .

Тогда для данной задачи справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $(x^*(t), u^*(t))$ – оптимальный процесс в задаче (3.1) – (3.3). Тогда найдутся не равные одновременно нулю множитель $\lambda_0 \geq 0$ и вектор-функции $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)) \in \mathrm{R}^n$ и $\mu(t) = (\mu_1(t), \ldots, \mu_s(t)) \in \mathrm{R}^s$ такие, что:

а). всюду на $[t_0, t_1]$ выполнено условие принципа максимума:

$$u^*(t) \in \operatorname{Arg\,max}\,(H(t, x^*(t), u(t), \psi(t), \lambda_0)); \tag{3.5}$$

б). сопряженная функция $\psi(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial L}{\partial x_i(t)}; \quad i = 1,\ldots, n\ , \tag{3.6}$$

(где L – лагранжиан задачи) и условия трансверсальности на правом конце (2.7), в данной постановке имеющие вид:

$$\psi_i(t_1) = \lambda_0 \frac{\partial \Phi_0(x^*(t_1))}{\partial x_i(t_1)};$$

в). выполнены условия дополняющей нежесткости и неотрицательности множителя Лагранжа $\mu(t)$:

$$\mu_i(t)\, g_i(t, x(t)) = 0; \quad \mu_i(t) \geq 0; \quad i = 1,\ldots, s. \tag{3.7}$$

Примеры

1. Найти оптимальное управление в задаче [1]:

$$J(u, x) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u^2 + x^2)dt \ \to \min;$$

$$\dot{x} = u; \quad x(0) = 1; \quad u \in \mathrm{R};$$

$$x(t) \geq c \quad \forall t \in [0, 1].$$

Р е ш е н и е . При отсутствии фазового ограничения оптимальное управление в данной задаче можно найти, используя принцип максимума для задачи со свободным правым концом, описанный в предыдущем разделе. Оптимальным решением задачи будет являться :

$$x^*(t) = \frac{e^t + e^{2-t}}{e^2 + 1}; \qquad u^*(t) = \dot{x}^*(\mathrm{t}). \tag{3.8}$$

Функция $x^*(t)$ монотонно убывает и достигает минимального значения при $t = 1$:

$$x^*(1) = \frac{2e}{e^2 + 1}.$$

Очевидно, что при $c \leq \frac{2e}{e^2+1}$, решение задачи с фазовым ограничением будет совпадать с (3.8). Предположим, что $c > \frac{2e}{e^2+1}$. Применим необходимые условия экстремума. Функция Понтрягина будет иметь вид:

$$H = -\lambda_0 \frac{u^2 + x^2}{2} + \psi u,$$

а лагранжиан задачи запишется как

$$L = H + \mu(x - c) = -\lambda_0 \frac{u^2 + x^2}{2} + \psi u + \mu(x - c).$$

Видно, что в вырожденном случае ($\lambda_0 = 0$) функция H является линейной по u, поэтому ее максимум достигается на конечных u только при $\psi(t) \equiv 0$. Но тогда и $\mu \equiv 0$ (в силу (3.6)), что противоречит условиям теоремы. Поэтому далее можно положить $\lambda_0 = 1$.

Из условия (а) теоремы вытекает, что

$$u^*(t) = \psi(t).$$

Сопряженная функция $\psi(t)$ является решением следующего уравнения:

$$\dot{\psi} = x - \mu, \quad \mu \geq 0, \quad \mu(x - c) = 0.$$

Подставляя данные выражения в основную систему, получим, что $x(t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\ddot{x} = x - \mu, \quad x(0) = 1.$$

Из условия дополняющей нежесткости, при $x(t) > c$ $\mu(t) = 0$, и $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x} = x, \quad x(0) = 1,$$

общим решением которого является

$$x(t) = Ae^{t} + Be^{-t}.$$

Далее, в силу непрерывности сопряженной функции $\psi(t)$, в первой точке контакта траектории $x(t)$ с фазовым ограничением τ выполнено условие:

$$\psi(\tau^-) = \psi(\tau^+) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(\tau^-) = \dot{x}(\tau^+) \text{ (так как } u^*(t) = \psi(t)),$$

откуда следует, что $\dot{x}(\tau) = 0$.

Таким образом, начальное условие, условие выхода на фазовое ограничение и условие непрерывности сопряженной функции дают систему уравнений для определения параметров A, B и τ:

$$x(0) = A + B = 1$$

$$x(\tau) = Ae^{\tau} + Be^{-\tau} = c$$

$$\dot{x}(\tau) = Ae^{\tau} - Be^{-\tau} = 0.$$

Решая данную систему, получаем:

$$A = \frac{1 \pm \sqrt{1-c^2}}{2}; \quad B = \frac{1 \mp \sqrt{1-c^2}}{2}; \quad \tau = \ln \frac{c}{1 \pm \sqrt{1-c^2}}.$$

Далее необходимо показать, что коснувшись ограничения $x(t) = c$ траектория останется на нем.

Заметим, что $\ddot{x} \geq 0$ при всех t. Поэтому траектория $x(t)$ выпукла вниз. Допустим, что она сошла с ограничения. Тогда далее до конца $x(t) > c$, причем правый конец свободен. Следовательно, $\psi(t_1) = 0$. Получаем, что $\psi(\tau) = \psi(t_1) = 0$, тогда как $\psi(t)$ строго возрастает вне ограничения. Противоречие показывает, что допущение неверно.

2. [3] Найти оптимальное потребление $c(t)$ в модели Рамсея:

$$J(c, s) = \int_0^T U(c)e^{-\alpha t}dt \to \max; \quad T \text{ – фиксировано};$$

$$U' > 0; \quad U'' < 0; \quad U(0) = 0;$$

$$\dot{s} = \rho s - c; \quad s(0) = s_0; \quad s(T) = s_T; \quad c \geq 0;$$

при ограничении на величину сбережений $s(t)$:

$$s(t) \geq a > 0; \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Р е ш е н и е . Наряду с функцией Понтрягина задачи, имеющей вид

$$H = \lambda_0 U(c)e^{-\alpha t} + \psi(\rho s - c),$$

выпишем лагранжиан:

$$L = H + \mu(s - a).$$

Функция Понтрягина достигает максимума при конечных значениях $c(t)$ только при $\psi(t) > 0$. Нетрудно видеть, что в этом случае она является вогнутой по $c(t)$ (рис. 3.1), и условие максимума дает следующий вид

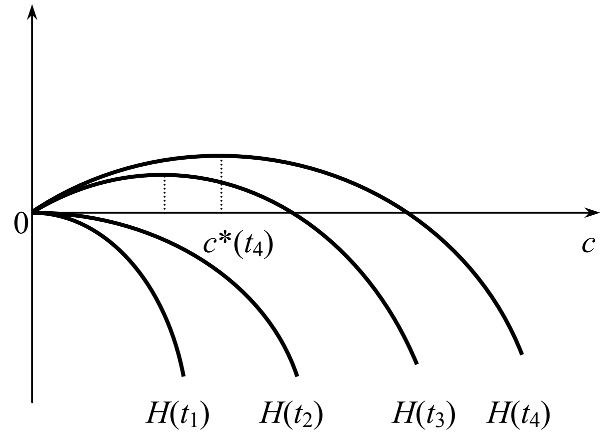

Рис. 3.1

оптимального управления

$$c^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } U'(0) \le \psi(t)e^{\alpha t} \\ (U')^{-1}(\psi(t)e^{\alpha t}), & \text{при } U'(0) > \psi(t)e^{\alpha t} \end{cases}$$

Уравнение для сопряженной переменной имеет вид:

$$\dot{\psi} = -\rho\psi - \mu, \quad \mu(s - a) = 0, \quad \mu \ge 0.$$

Так как концы фазовой траектории $s(t)$ закреплены, то граничные условия для $\psi(t)$ неопределены.

Рассмотрим два случая:

1. Пусть $\alpha < \rho$. Покажем, что в этом случае $s^*(t) > a$ $\forall$ $t \in [0, T]$.

Предположим, что $s^*(\tau) = a$ для некоторого $\tau \in [0, T]$. Так как $c^*(t)$ непрерывна в точке τ и

$$\dot{s}^* = \rho s^* - c^*,$$

то $s^*(t)$ – непрерывно-дифференцируема в точке τ. Кроме того, в силу фазового ограничения τ – точка минимума траектории $s^*(t)$ на $[0, T]$, поэтому $\dot{s}^*(\tau) = 0$. Вычислим $\ddot{s}^*(\tau)$:

$$\ddot{s}^*(\tau) = \rho\dot{s}^*(\tau) - \dot{c}^*(\tau) = -\dot{c}^*(\tau),$$

где $\dot{c}^*(\tau)$ может быть найдено из соотношения $U'(c(t)) = \psi(t)e^{\alpha t}$ как

$$\dot{c}^*(\tau) = \frac{-\dot{\psi}(t)e^{\alpha t} - \alpha\psi(t)e^{\alpha t}}{U''(c(t))} = -\frac{\psi(t)(\rho - \alpha)e^{\alpha t} + \mu(t)e^{\alpha t}}{U''(c(t))}. \tag{3.9}$$

Так как $\alpha < \rho$ и $U'' < 0$, то $\dot{c}^*(\tau) > 0$, откуда следует, что $\ddot{s}^*(\tau) < 0$. Это противоречит тому, что τ – внутренняя точка минимума траектории $s^*(t)$.

Таким образом, при $\alpha < \rho$ траектория $s^*(t)$ не имеет внутренних минимумов, а следовательно, не выходит на фазовое ограничение $s(t) = a$ (рис. 3.2).

2. Рассмотрим теперь случай $\alpha > \rho$. Из (3.9) следует, что в этом случае над ограничением $s(t) = a$ нет внутренних максимумов. Это означает, что $\mu(\tau) = 0$, $\dot{c}^*(\tau) < 0$ и $\ddot{s}^*(\tau) > 0$ в любой точке $\tau \in [0, T]$, такой, что $\dot{s}^*(\tau) = 0$ и $s(t) > a$.

Траектории $s(t)$ в этом случае могут выходить на фазовое ограничение или все время оставаться выше его, описывая выпуклую кривую, в зависимости от начальных условий и T (рис. 3.3).

На отрезке $[t_1, t_2]$ имеем $\dot{s}^*(\tau) = 0$ и $s(t) \equiv a$. Тогда $c(t) \equiv \rho\alpha > 0$.

Из условия максимума H по $c(t)$:

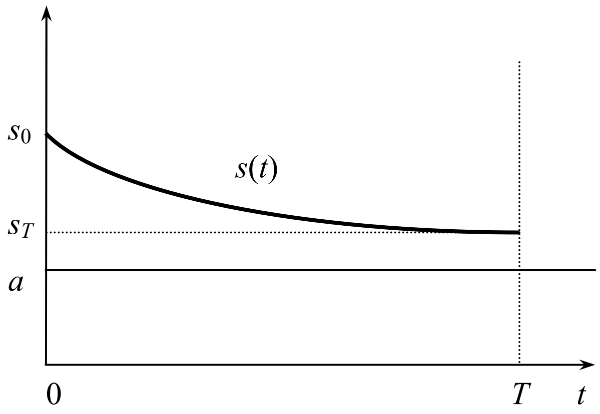

Рис. 3.2

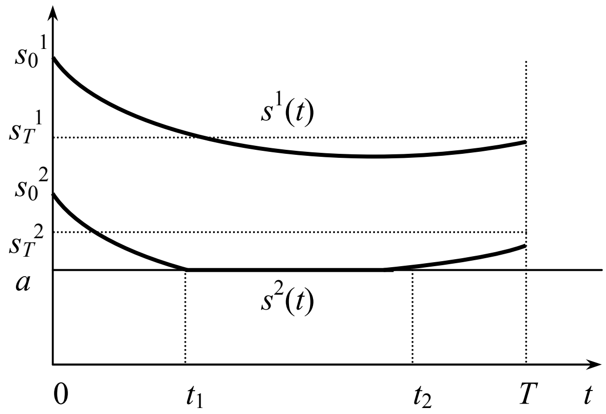

Рис. 3.3

$$U'(\rho\alpha) = \psi(t)e^{\alpha t},$$

откуда

$$\psi(t) = U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t}.$$

Тогда

$$\dot{\psi} = -\alpha\, U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t}.$$

С другой стороны, из сопряженной системы:

$$\dot{\psi} = -\rho\psi - \mu = -\rho\, U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t} - \mu.$$

Из последних двух равенств получаем выражение для множителя Лагранжа μ:

$$\mu(t) =(\alpha - \rho)\, U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t} > 0.$$

Определим моменты выхода и схода с фазового ограничения t_1 и t_2.

Из условий непрерывности фазовой переменной $s(t)$ и сопряженной переменной $\psi(t)$ в точке t_1 имеем:

$$s(t_1^-) = s(t_1^+), \qquad \psi(t_1^-) = \psi(t_1^+), \tag{3.10}$$

где $s(t_1^-) = e^{\rho t_1}(s_0 - \int_0^{t_1} e^{-\rho\tau}c(\tau)d\tau) = e^{\rho t_1}(s_0 - \int_0^{t_1} e^{-\rho\tau}(U')^{-1}(\psi_0 e^{(\alpha-\rho)\tau})d\tau)$; $s(t_1^+) = a$;

$\psi(t_1^-) = \psi_0 e^{-\rho t_1}$; $\psi(t_1^+) = U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t_1}$.

Для определения момента t_2 воспользуемся краевым условием:

$$s(T) = e^{\rho(T - t_2)}(a - \int_{t_2}^{T} e^{-\rho\tau}(U')^{-1}(\psi(t_2)e^{(\alpha-\rho)\tau})d\tau) = s_T \tag{3.11}$$

где $\psi(t_2) = U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t_2}$.

Таким образом, соотношения (3.10) и (3.11) позволяют определить все параметры оптимальной траектории $s^*(t)$.

Заметим, что специфика этой простой задачи позволила в явном виде выписать вид сопряженной функции $\psi(t)$ на границе $s(t) = a$, а затем независимо определить параметры ψ_0, t_1 и t_2. Неразрешимость соотношений (3.10) и (3.11) относительно t_1 и t_2 говорит о том, что оптимальная траектория $s^*(t)$, если она существует, не выходит на фазовое ограничение $s(t) = a$ (т.е. соответствует случаю $s^1(t)$ на рис. 3.3). В этом случае параметры фазовой траектории отыскиваются аналогично задаче без фазовых ограничений.

Краевое условие будет иметь вид

$$s(T) = e^{\rho(T-t_2)}(s_0 - \int_0^T e^{-\rho\tau}(U')^{-1}(\psi_0 e^{(\alpha-\rho)\tau})d\tau) = s_T$$

откуда может быть получена константа ψ_0.

Подставив ее в выражения для $c^*(t)$ и $s^*(t)$:

$$c^*(t) = (U')^{-1}(\psi_0 e^{(\alpha-\rho)t});$$

$$s^*(t) = e^{\rho t}(s_0 - \int_0^T e^{-\rho\tau}c^*(\tau)d\tau).$$

получим явный вид оптимального процесса.

Если задача нахождения ψ_0 в данном случае также неразрешима, то исходная задача является неразрешимой, например, если отсутствуют допустимые траектории, переводящие систему из состояния s_0 в s_T.

Построим фазовый портрет движения системы в осях (s, c). Для этого воспользуемся выражением (3.9) для $\dot{c}(t)$. Подставив в него

$$\psi(t) = U'(c(t))e^{-\alpha t},$$

получим:

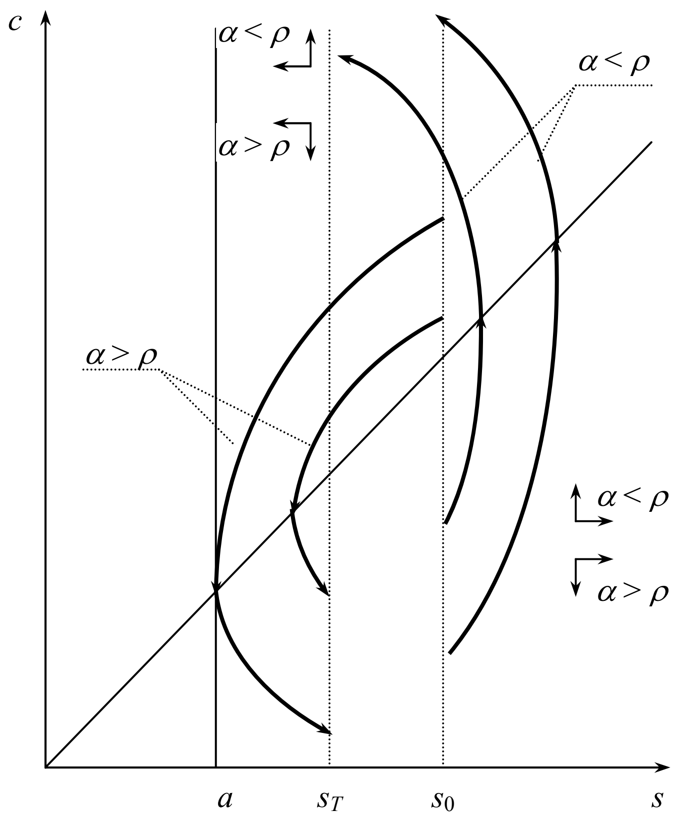

Рис. 3.4

$$\dot c(t) = \frac{(\alpha-\rho)U'(c(t)) - \mu(t)e^{\alpha t}}{U''(c(t))}; \quad \dot s(t) = \rho s(t) - c(t).$$

На рис. 3.4 приведены соответствующие данной системе фазовые траектории.

Упражнения

1. Определить минимум функционала

$$J(u, x) = \int_0^3 2x_1 dt,$$

$$\dot x_1 = x_2, \quad \dot x_2 = u, \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 0, \quad |u| \le 2,$$

при фазовом ограничении

$$x_1(t) \ge \alpha, \quad \alpha \le 0.$$

2. Найти максимум функционала

$$J(u, x) = -\int_0^3 x dt,$$

$$\dot x = u, \quad x(0) = 1, \quad x(3) = 1, \quad |u| \le 1,$$

при фазовом ограничении

$$x(t) \ge 0.$$

3. Проанализировать с помощью принципа максимума с фазовыми ограничениями, а также построить и прокомментировать фазовые диаграммы в координатах (s, c) для следующей задачи оптимального управления:

$$J(c, s) = \int_0^T \ln(1+c)e^{-\beta t} dt \to \max, \quad T - \text{фиксировано},$$

$$\dot s = \rho s - c, \quad s(0) = s_0, \quad s(T) = s_T, \quad c \ge 0, \quad s \ge a > 0.$$

Рассмотреть случаи $\beta > \rho$ и $\rho > \beta$.