

0.0.1 Кратное интегрирование по областям с параметризуемой границей

Пусть Q – область, по которой ведётся интегрирование, причём она имеет параметризуемую границу; f – функция под интегралом. Область можно разбить на сетку, например, следующим классическим способом (Рис. ??, для простоты Q – круг).

Замечания:

1. На самом деле при интегрировании можно брать любой контур внутри кольца, но при специальном задании границ кольца в виде $\mathbf{r}(t, r)$ (на что рассчитывает метод) удобнее брать именно подобную кривую.
2. Если нет возможности выразить функцию площади кольца $S_i = S(\tau_y, (i + 0.5)\tau_y)$, в качестве площади при достаточно малых τ_y можно взять $S_i = \pi((i + 1)\tau_y)^2 - \pi(i\tau_y)^2 = \pi\tau_y^2(2i + 1)$
3. Как правило, при параметризации $t_0 = 0$, но t_{\max} зависит от радиуса кривой $r = (i + 0.5)\tau_y$, поэтому $\frac{1}{t_{\max} - t_0}$ не всегда является константным выражением и может быть вынесено за знак суммирования.
4. Для возможности равномерного интегрирования указанных криволинейных интегралов следует использовать естественную параметризацию.
5. Для круговой области вычислять кратный интеграл можно и классическими способами, однако если область имеет более сложную форму, классические методы будет чрезвычайно тяжело использовать.

Тесты. На следующих рисунках (рисунки ??-1) показаны результаты использования описанного метода интегрирования для разных областей и разных подинтегральных функций. Области и функции взяты простыми, так как для сложных областей и функций трудно аналитически найти интеграл, с которым требуется провести сравнение. Замечено два типа поведения погрешности в зависимости от числа колец в интеграле: логарифмическое убывание и малое приближённо константное значение (на самом деле очень медленное логарифмическое убывание); при этом произведение *погрешность интегрирования · время вычислений* в первом случае логарифмически убывает, во втором — логарифмически растёт. Требуется также отметить, что графики рисовались в логарифмической шкале, поэтому точки с погрешностью не больше машинного нуля либо временем вычисления меньше машинного минимума — не изображались.

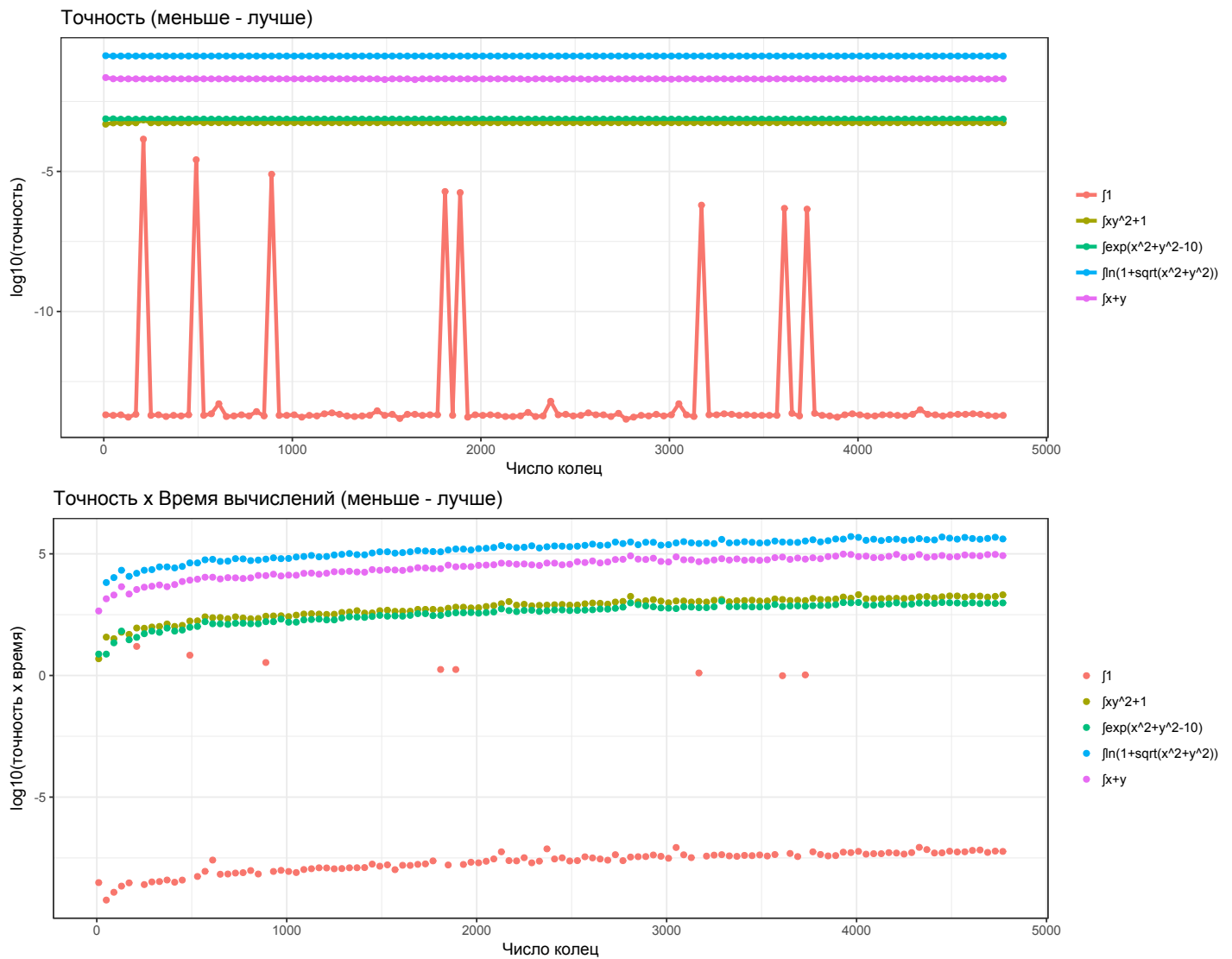
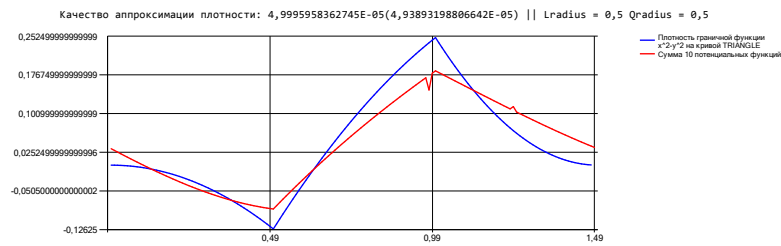
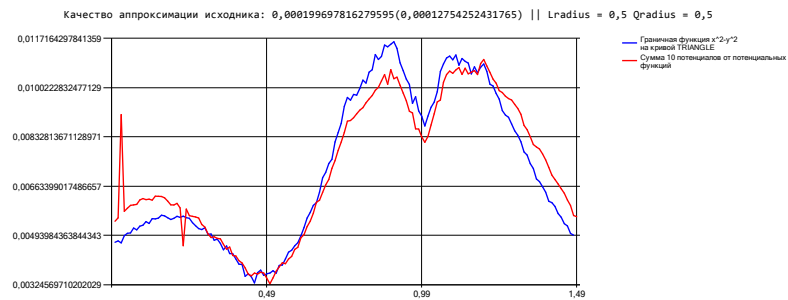


Рис. 1: Точность и отношение точность-время от интегрирования для верхнего полукруга радиуса $r = 2$

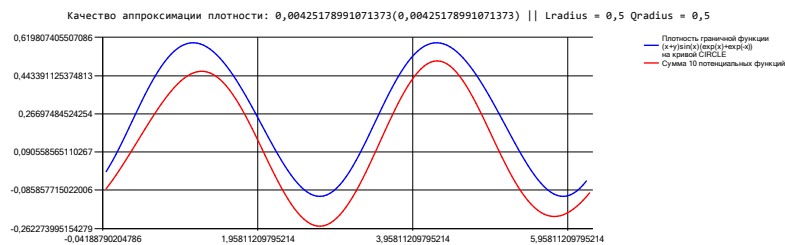


для плотности

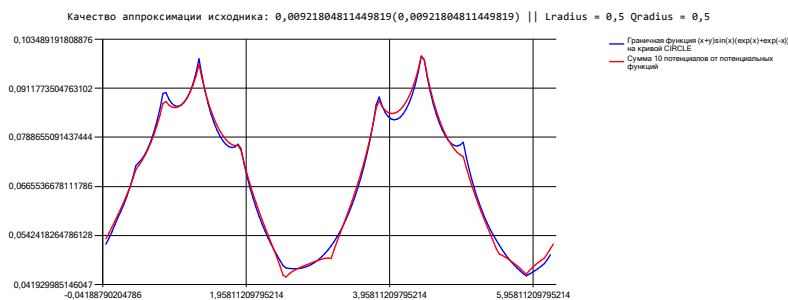


для потенциала

Рис. 2: Один из результатов работы алгоритма

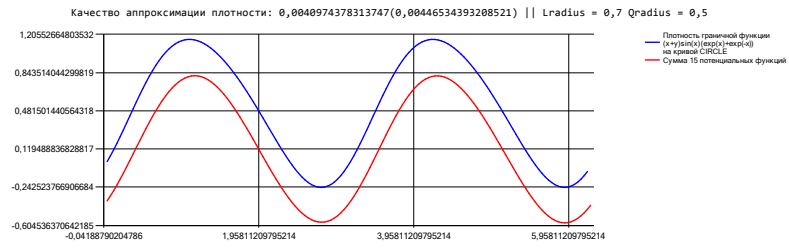


для плотности

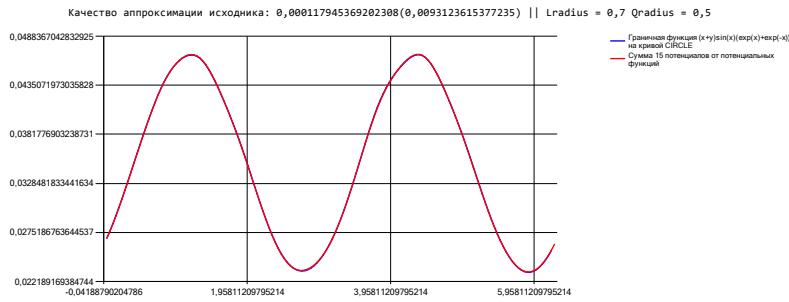


для потенциала

Рис. 3: Один из результатов работы алгоритма

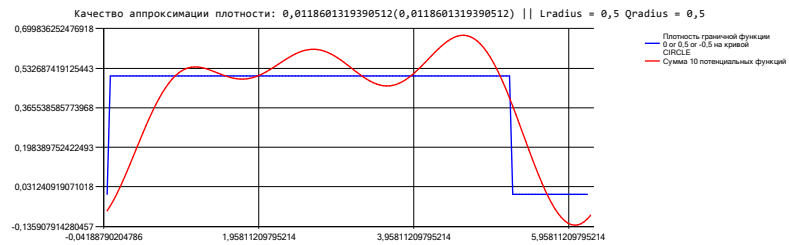


для плотности

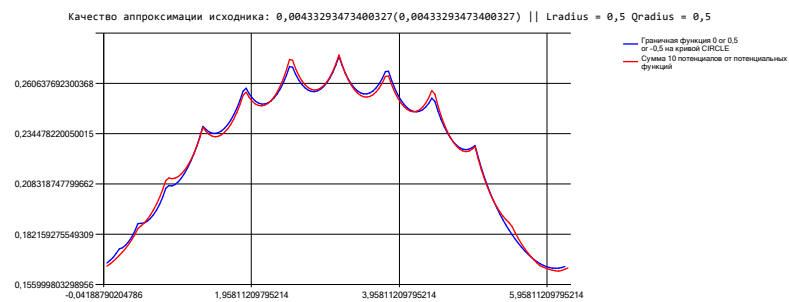


для потенциала

Рис. 4: Один из результатов работы алгоритма



для плотности



для потенциала

Рис. 5: Один из результатов работы алгоритма