1 Лабораторная 1

Дана задача:

$$\frac{\partial K(t)}{\partial t} = L(t) + 3K(t), K(0) = 2, 0 \leq L < \infty, t \in [0, 2] \tag{1}$$

$$I(K, L) = \int_0^2 K(t) + L^2(t)dt - 2K(2) \to \min. \tag{2}$$

Решение:

Оптимальный процесс является решением вспомогательной задачи

$$H(K, L, p) = -(K + L^2) + p(L + 3K) \to \max_L, \tag{3}$$

то есть

$$\frac{\partial H}{\partial L} = -2L + p = 0 \Rightarrow L = \frac{p}{2}. \tag{4}$$

Сопряженная задача имеет вид:

$$\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial K} = 3p - 1, \tag{5}$$

$$p(2) = -\frac{\partial(-2K(2))}{\partial K(2)} = 2. \tag{6}$$

Дифференциальное уравнение имеет решение $p = C_1\frac{e^{3t}}{3} + \frac{1}{2}$, причем $p(2) = 2$, поэтому $C_1 = 5e^{-6}$, тогда

$$p(t) = \frac{1}{3}\left(e^{-6}e^{3t} + 1\right), \tag{7}$$

$$L(t) = \frac{1}{6}\left(e^{-6}e^{3t} + 1\right) > 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = 3K + \frac{5}{6}e^{3t-6} + \frac{1}{6} \Rightarrow K = \left(C_1 - \frac{ce^{-3t}}{3} + kt\right)e^{3t}, c = \frac{1}{6}, k = \frac{5e^{-6}}{6}. \tag{9}$$

Из условия $K(0) = 2$ находим $C_1 = 2 + \frac{5e^{-6}}{18}$, откуда

$$K(t) = K = \left(2 + \frac{5e^{-6}}{18} - \frac{e^{-3t}}{18} + \frac{5e^{-6}}{6}t\right)e^{3t}. \tag{10}$$

2 Лабораторная 2