

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «КубГУ»)

Факультет математики и компьютерных наук

Гиперболические функции

Тест по дисциплине «Элементарная математика»

Выполнил
Пасько Д. А.
группа 43.1

Краснодар 2018

Инструкция по выполнению работы для тестируемых

Тест направлен на проверку знаний по дисциплине «Элементарная математика», тема «Гиперболические функции».

Тест состоит из 25 заданий. На выполнение отводится 90 минут.

В заданиях № 1 – 9 необходимо обвести в кружок номера правильных ответов. В случае ошибки при выборе ответа, зачеркните выбранный вариант и отметьте нужный. За каждое верное задание начисляется 1 балл.

В заданиях № 10 – 20 полученный в ходе решения ответ надо записать в отведённом для этого месте в виде числа или последовательности чисел. В случае ошибки ответ следует зачеркнуть и вписать рядом новый. За каждое верно решённое задание начисляется 2 балла.

Задания №21 – 25 предполагают краткий ход решения и выписанный ответ. Это задания повышенного уровня сложности, за каждое верное засчитывается 3 балла.

Максимальное количество баллов – 46.

Оценка «Отлично» – 39-46 баллов, «Хорошо» – 31-38, «Удовлетворительно» – 23-30.

Хорошо подумайте, внимательно читая каждое задание.

Желаем успеха!

Задание №1. Найдите значение выражения $2 \operatorname{sh} z$ при $z = 0$.

- 1) 2
- 2) 0
- 3) 1
- 4) $2(e^1 - \frac{1}{e})$

Задание №2. Выберите верное утверждение:

- 1) $\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = 1$
- 2) $\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = 1 - \operatorname{sh}^2 z$
- 3) $\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 z$
- 4) $\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = 0$

Задание №3. Среди перечисленных функций выберите чётные. Запишите номера этих функций в порядке возрастания

- 1) $\operatorname{ch} z$
- 2) $\operatorname{sh}(z + 1)$
- 3) $\operatorname{sh} z^2$
- 4) $|\operatorname{th} z| + z^2$

Задание №4. Закончите утверждение: "Гиперболические функции $w = \operatorname{sh} z$, $w = \operatorname{ch} z$ определяются как..."

- 1) решения дифференциального уравнения $w'' - w = 0$
- 2) решения дифференциального уравнения $w' - w = 0$
- 3) решения дифференциального уравнения $2w''(z) - w(z) = e^z$

Задание №5. Используя основные соотношения для гиперболических функций, найдите значение выражения $2(\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z) - (e^z + 4)'$.

- 1) 1
- 2) $e^z + 4$
- 3) $\operatorname{sh}(2z)$
- 4) 0

Задание № 6. Чему равно значение выражения $\frac{(\operatorname{ch} z + 1)(\operatorname{th} z - \frac{1}{\operatorname{sh} z})}{\operatorname{ch} z}$?

- 1) $\operatorname{th} z$
- 2) $\operatorname{cth} z$
- 3) 1
- 4) $\operatorname{th}(2z)$

Задание №7. Укажите правильное выражение $\operatorname{th} z$ через $\operatorname{ch} z$:

- 1) $\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{ch} z + 1}$
- 2) $\operatorname{ch} z + \sqrt{\operatorname{ch}^2 z - 1}$
- 3) $\frac{\operatorname{ch} z}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 z - 1}}$

$$4) \frac{\operatorname{ch} z}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 z + 1}}$$

$$5) \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 z - 1}}{\operatorname{ch} z}$$

Задание №8. Укажите множество всех значений z , при которых верно выражение $\operatorname{sh} z = 0$.

- 1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
- 2) $2\pi ki, k \in \mathbb{Z}$
- 3) $\pi ki, k \in \mathbb{Z}$
- 4) $\frac{\pi ki}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Задание №9. Укажите область аналитичности функции $\operatorname{cth} z$.

- 1) расширенная комплексная плоскость
- 2) вся комплексная плоскость
- 3) \mathbb{C} без $\pi i(k + \frac{1}{2}), k \in \mathbb{Z}$
- 4) \mathbb{C} без $\pi ik, k \in \mathbb{Z}$

В заданиях № 10 – 20 полученный в ходе решения ответ надо записать в отведённом для этого месте в виде числа или последовательности чисел.

Задание №10. Установите соответствие между гиперболическими функциями и формулами, которые их определяют.

- | | |
|---------------------------|--|
| 1) $\operatorname{th} z$ | 1. $\frac{e^z - e^{-z}}{2}$ |
| 2) $\operatorname{cth} z$ | 2. $\frac{e^z + e^{-z}}{2}$ |
| 3) $\operatorname{ch} z$ | 3. $\frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$ |
| 4) $\operatorname{sh} z$ | 4. $\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$ |

Ответ: _____

Задание №11. Укажите номера тождеств в порядке убывания.

- 1) $\operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta$
- 2) $\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{2}}$
- 3) $\operatorname{th} 2\alpha = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \alpha}{2 \operatorname{th} \alpha}$
- 4) $\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \beta = 2 \operatorname{sh} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha - \beta}{2}$
- 5) $2 \operatorname{sh}^2 \alpha = 1 + \operatorname{sh} 2\alpha$

Ответ: _____

Задание №12. Найдите значение выражения $2(\operatorname{ch} z)'' - (\operatorname{ch} z)^{(5)} + \operatorname{ch} z$ при $z = 0$.

Ответ: _____

Задание №13. Найдите значение выражения $(\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z)' - 2 \operatorname{sh} z (\operatorname{ch} z)'$ при $z = 17$.

Ответ: _____

Задание №14. Найдите значение выражения $(\operatorname{th} z \frac{\operatorname{sh} 2z}{\operatorname{ch} 2z - 1} z)' + z$ при $z = 5 + 3i$.

Ответ: _____

Задание №15. Найдите значение предела $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 5z}{5z^2}$.

Ответ: _____

Задание №16. Найдите значение предела $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 5z - \operatorname{sh} 3z}{\operatorname{sh} z}$.

Ответ: _____

Задание №17. Найдите максимальное значение функции $\operatorname{sh} z \frac{2 + \frac{1}{4}}{\operatorname{sh} 5} - 3 \operatorname{ch}(z - 5)$ на отрезке $[-2, 5]$.

Ответ: _____

Задание №18. Найдите минимальное по модулю значение функции $|\operatorname{ch} z| + 3i + \operatorname{sh} z + |\operatorname{sh} z|$ в круге $K(0, 4)$.

Ответ: _____

Задание 19. Найдите с точностью до десятых значение функции $f(z) = \int_0^z 8 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z dz + 2$ при $z = \frac{\pi}{2}$, считая, что $e^\pi = 23.14$.

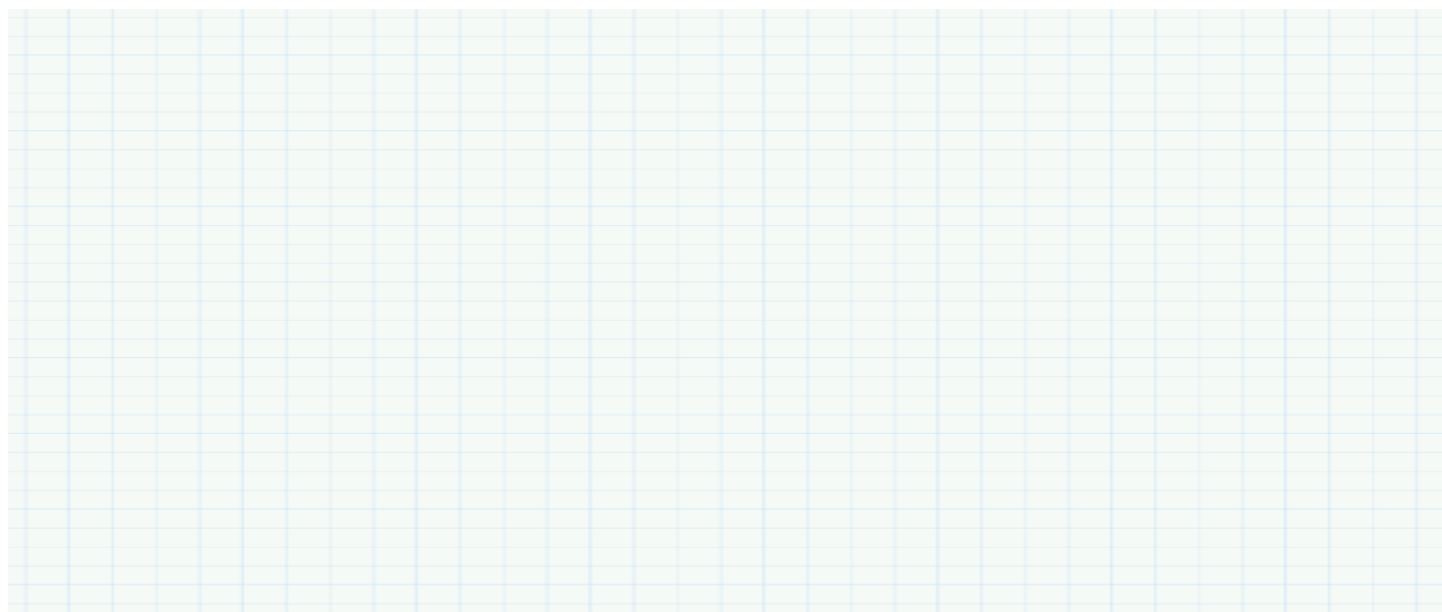
Ответ: _____

Задание 20. Найдите вычет функции $\operatorname{th} z$ в точке $\frac{\pi i}{2}$.

Ответ: _____

Задания №21 – 25 предполагают краткий ход решения и выписанный ответ

Задание 21. Вычислите интеграл $\int \operatorname{sh}^3 z dz$.



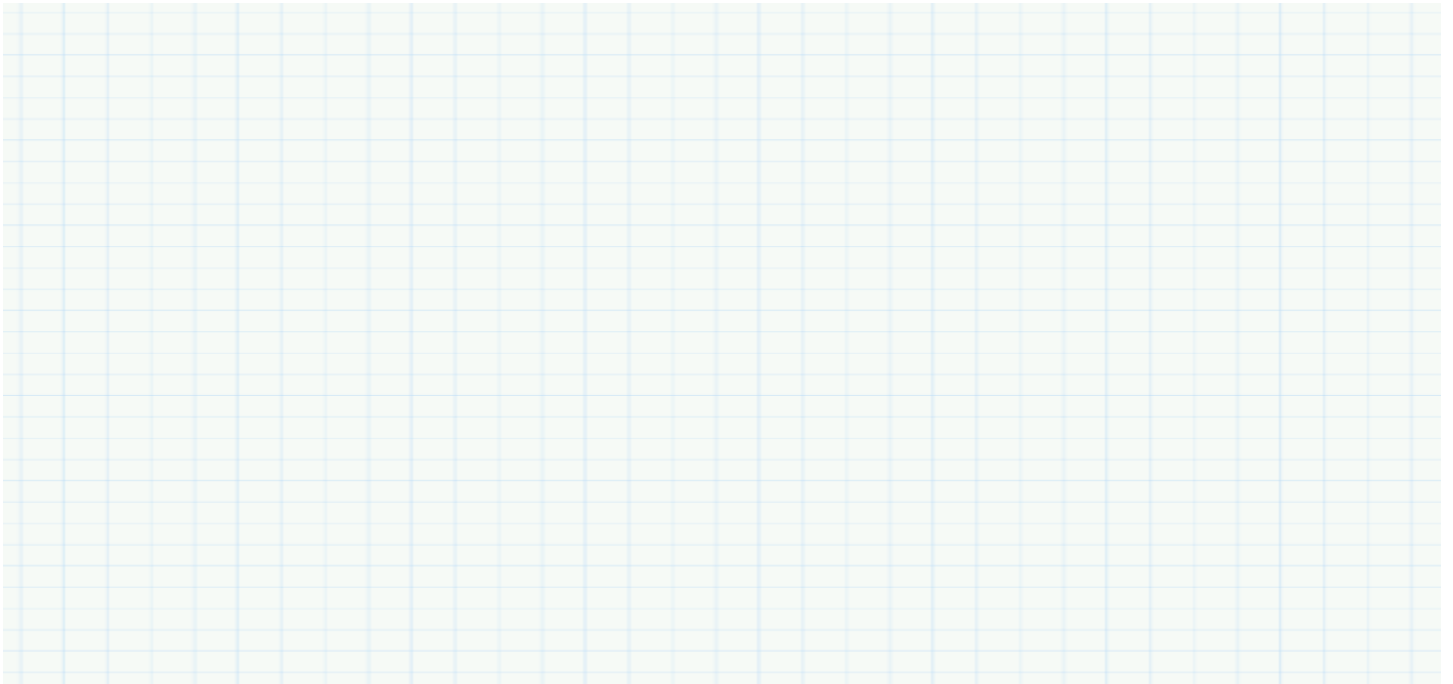
Ответ: _____

Задание 22. Вычислите интеграл $\int \frac{dz}{1 + \operatorname{ch} z}$.



Ответ: _____

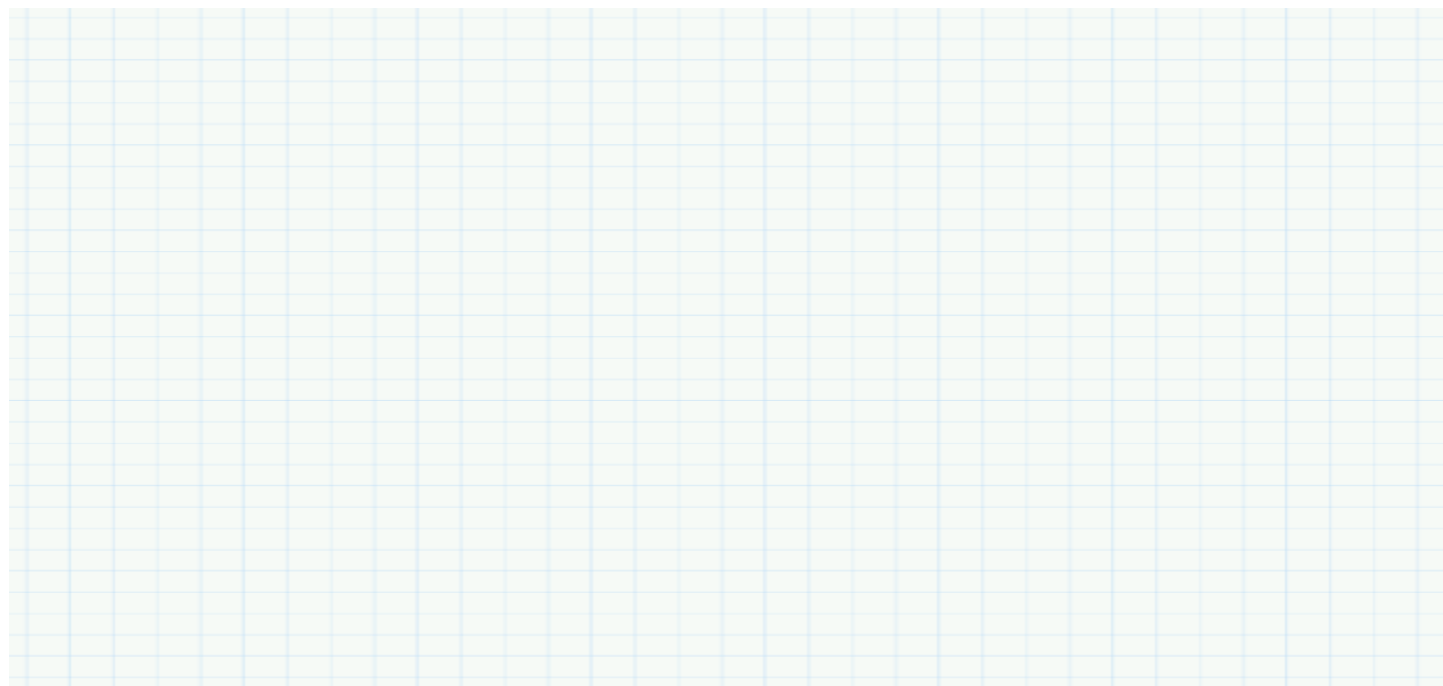
Задание 23. Найдите значение функции $\operatorname{th} z$ в точке $z = 1$ с точностью до $o(z^6)$.



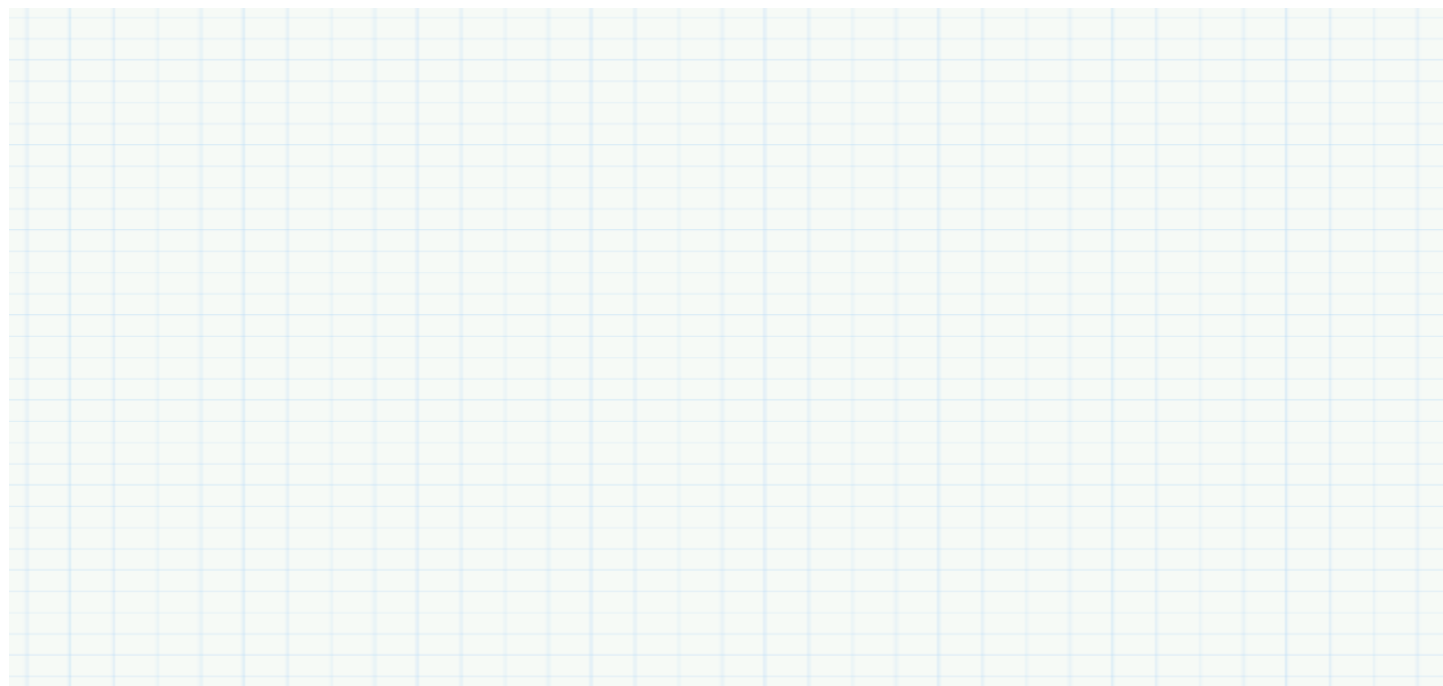
Ответ: _____

Задание 24. Вычислите якобиан отображения $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2 u_1 \\ \operatorname{sh} u_1 + \operatorname{th} u_2 \end{pmatrix}$ в точке $(0, 4)$.

Ответ: _____



Задание 25. Определить все значения параметра b , при которых уравнение $\frac{\operatorname{sh} iz - bi \operatorname{ch} iz}{\operatorname{sh} iz + i \operatorname{ch} iz} = \frac{1}{b+2}$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$.



Ответ: _____

Инструкция для проверяющего тест

Тест состоит из 25 заданий. Время выполнения – 90 минут. С 1-го по 9 задания оцениваются в 1 балл, с 10 по 20 – 2 балла, 21-25 – 3 балла. Максимальное количество баллов – 46. Оценка «Отлично» – 39-46 баллов, «Хорошо» – 31-38, «Удовлетворительно» – 23-30.

Пояснение. Задания 21-25 подлежат полной проверке. Баллы по этим заданиям зачисляются по критерию: 3 балла за полное решение и правильный ответ, 2 балла за верный ход решения с несущественными ошибками вычислений, 1 балл за верный ход решения без правильного ответа.

Ключ к тесту

Номер задания	Ответ
1	2
2	3
3	134
4	1
5	4
6	2
7	5
8	3
9	4
10	4321
11	42
12	3
13	1
14	$6 + 3i$
15	5
16	2
17	2.25
18	3
19	23.2
20	1
21	$\frac{\operatorname{ch}^3 z}{3} - \operatorname{ch} z + C$
22	$-\frac{2}{e^z + 1} + C$
23	0.8
24	0
25	$b \geq 0$ или $b = -1$

Решение заданий на 3 балла

Задание 21

Учитывая основное тригонометрическое тождество для гиперболических функций, получаем:

$$\int \operatorname{sh}^3 z dz = \int (\operatorname{ch}^2 z - 1) \operatorname{sh} z dz = \int (\operatorname{ch}^2 - 1) d \operatorname{ch} z = \frac{\operatorname{ch}^3 z}{3} - \operatorname{ch} z + C$$

Ответ: $\frac{\operatorname{ch}^3 z}{3} - \operatorname{ch} z + C$

Задание 22

По определению гиперболического косинуса получаем:

$$\int \frac{dz}{1 + \operatorname{ch} z} = \int \frac{2dz}{2 + e^z + e^{-z}} = 2 \int \frac{e^z dz}{e^{2z} + 2e^z + 1} = 2 \int \frac{d(e^z + 1)}{(e^z + 1)^2} = -\frac{2}{e^z + 1} + C$$

Ответ: $-\frac{2}{e^z + 1} + C$

Задание 23

Учитывая формулу разложения гиперболического тангенса в ряд Маклорена

$$\operatorname{th} z = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 - \frac{17}{315}z^7 + \dots,$$

получаем:

$$\operatorname{th} 1 \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = 0.8$$

Ответ: 0.8

Задание 24

Значение матрицы Якоби исходного отображения в точке $(0, 4)$:

$$\begin{pmatrix} 2 \operatorname{ch} u_1 \operatorname{sh} u_1 & 0 \\ \operatorname{ch} u_1 & \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u_2} \end{pmatrix} ((0, 4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\operatorname{ch}^2 4} \end{pmatrix},$$

откуда очевидно, что якобиан отображения равен 0.

Ответ: 0

Задание 25

Используя формулы $\cos z = \operatorname{ch} iz$, $\sin z = -i \operatorname{sh} iz = \frac{\operatorname{sh} iz}{i}$, сводим исходное уравнение к следующему:

$$\frac{\sin x - b \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{b + 2}$$

Далее будем решать его относительно действительной переменной, так как условие требует существование корня на отрезке действительной оси.

Поскольку знаменатель не должен обращаться в 0, получаем ограничения: $\sin x + \cos x \neq 0, b \neq -2$. Приводя к общему знаменателю, получаем уравнение:

$$(\sin x - b \cos x)(b + 2) - \sin x - \cos x = 0$$

$$b + 2 \sin x - b^2 \cos x - 2b \cos x - \sin x - \cos x = 0$$

$$b \sin x + \sin x - \cos x(b^2 + 2b + 1) = 0$$

$$\sin x(b + 1) = \cos x(b + 1)^2$$

Если $b = -1$ решением являются все числа. В противном случае:

$$\operatorname{tg} x = b + 1$$

$$x = \operatorname{arctg}(b + 1)$$

По условию задачи необходимо, чтобы на отрезке $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ имелось хотя бы одно решение. Значит:

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) \leq b + 1 \leq \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2})$$

$$1 \leq b + 1 \leq +\infty$$

$$b \geq 0$$

Ответ: $b \geq 0$ или $b = -1$

Технологическая матрица

Гиперб. функции	Всего заданий	Закрытых	Открытых	Всего баллов	Баллов в процентах
Определения	6	3	3	10	22
Тождества	8	4	4	12	26
Корни	2	1	1	4	9
Экстр. свойства	3	1	2	5	11
Производные	3	1	2	7	15
Интегралы	3	0	3	8	17
Всего	25	10	15	46	100

Особенности проведения тестирования

При проведении тестирования важно обеспечить тестируемых всем необходимым: проверить наличие достаточного числа распечатанных тестов, снабдить всех листами и ручками. Ученики должны сидеть таким образом, чтобы возможность списывания была минимальной.

Вследствие ограниченности времени проведения теста необходимо проследить, чтобы все тестируемые начали и закончили выполнение заданий в одинаковое время. Тест рассчитан на 90 минут. Помимо этого выделяется время на организационный момент, когда идёт ознакомление с инструкциями и правилами (3-5 минут).