



На правах рукописи

Захаров Михаил Юрьевич

**РАЗВИТИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БАЗИСНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ К
ИССЛЕДОВАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, ПРЕДСТАВЛЕН-
НЫХ ДВУМЕРНЫМИ КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ**

**05.13.18. – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Краснодар 2011

Работа выполнена в Государственном образовательном
учреждении высшего профессионального образования
«Кубанский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
СЕМЕНЧИН Евгений Андреевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
ЗОТОВ Владимир Александрович

доктор физико-математических наук, профессор
ТОЛПАЕВ Владимир Александрович

Ведущая организация: Кубанский государственный технологический уни-
верситет (г. Краснодар)

Защита состоится 26 мая 2011 г. в 14 час. на заседании диссертационного сове-
та Д 212.101.17 при ГОУ ВПО «Кубанский государственный университет» по
адресу: 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, КубГУ, ауд. 231.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУ ВПО «Кубанский госу-
дарственный университет».

Автореферат разослан «25» апреля 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к. ф.-м. н, доцент



Барсукова В.Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математические модели многих процессов представляют собой краевые задачи, в которых используются гармонический и бигармонический операторы. Например, в теории упругости линейная задача с бигармоническим оператором моделирует распределение напряжений в деформируемом теле, в гидродинамике линейная задача с гармоническим оператором представляет собой модель плоскопараллельного течения несжимаемой жидкости. В экологии математические модели диффузии примеси в атмосфере и в жидкости представляют собой линейную и нелинейную задачи со старшим гармоническим оператором. В большинстве случаев решения указанных задач можно построить: 1) численно – сеточными, 2) приближенно – вариационными (Ритца, конечных элементов, граничных элементов) или проекционными (Галеркина, фундаментальных решений, базисных потенциалов) методами. Приближенные решения обладают рядом преимуществ по сравнению с решениями, полученными численно. Их более удобно использовать в прикладных исследованиях, они позволяют наглядно продемонстрировать основные свойства точного решения (а значит, и исследуемого процесса).

Построению приближенных решений таких краевых задач посвящены многочисленные исследования как у нас в стране: Галеркин Б.Г., Бубнов И.Г., Канторович Л.В., Михлин С.Г., Купрадзе В.Д., Алексидзе М.А., современные работы – Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Мозолевский И. и др., так и за рубежом: Ритц В., Сьярле Ф., Зенкевич О.К., Бреббия К., Уокер С. и др.

Однако, до настоящего времени остается актуальной задача разработки и обоснования методов построения приближенных решений рассматриваемых краевых задач для областей сложной формы, не требующих больших вычислительных ресурсов.

Одним из таких методов является метод фундаментальных решений, предложенный в работах Купрадзе В.Д. и Алексидзе М.А. В работах Лежнева В.Г. этот метод был обоснован и расширен (введено необходимое в этом методе понятие множества единственности гармонических функций, исследованы свойства потенциала Робена, получен широкий набор полных систем потенциалов – базисных потенциалов), и в расширенном контексте стал называться методом базисных потенциалов. Однако, для последнего метода остались малоисследованными вопросы сходимости приближенного решения к точному при невозмущенных входных данных, устойчивости приближенного решения при возмущенных входных данных. Не использовался метод базисных потенциалов ранее и при решении широкого класса краевых задач (в том числе, нелинейных) со старшим по порядку производных гармоническим оператором.

Модификация, теоретическое обоснование и развитие метода базисных потенциалов для двумерного случая в указанных выше задачах, разработка на его основе методики построения приближенных решений имеют важное прикладное значение. Это позволяет, в частности, исследовать вышеуказанные математические модели с помощью ограниченных по ресурсам и быстродействию распределенных или локальных вычислительных средств.

Следовательно, исследования по теме диссертационной работы, направленные на решение указанных задач, находятся в русле современных проблем математического моделирования, тема диссертационной работы является актуальной и практически значимой.

Диссертационная работа выполнена в рамках Проекта 2.1.1/3828 программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 г.г.)» Министерства образования и науки РФ.

Объект исследования – математические модели процессов, описываемых плоскими краевыми задачами с гармоническим, старшим по порядку производных, либо бигармоническим оператором.

Предмет исследования – приближенные решения рассматриваемых краевых задач, содержащих гармонический, либо бигармонический оператор, методы построения и программная реализация таких решений.

Цель работы – а) модифицировать и продолжить теоретическое обоснование метода базисных потенциалов, разработать на его основе методику исследования определенного класса плоских математических моделей со старшим гармоническим оператором; б) построить с помощью этой методики приближенное решение типичной краевой задачи из указанного класса; построить и исследовать с помощью модифицированного метода базисных потенциалов и указанной методики приближенные решения некоторых линейных и нелинейных краевых задач, содержащих гармонический, либо бигармонический оператор; в) разработать программное обеспечение и провести вычислительные эксперименты, позволяющие выполнить численный анализ построенных приближенных решений указанных краевых задач.

Научная новизна

1. Модифицирован метод *базисных* потенциалов, используемый при построении приближенных решений плоских краевых задач для уравнения Пуассона и бигармонического уравнения.

2. Предложена новая методика построения приближенных решений для определенного класса плоских краевых задач (математических моделей) со старшим гармоническим оператором.

3. Построены для областей сложной геометрической формы (в частности, круг с вырезанным сектором) приближенные решения следующих краевых задач: первой и второй внутренних краевых задач для уравнения Пуассона, внутренних краевых задач для однородного и неоднородного бигармонического уравнения, типичной краевой задачи из рассматриваемого класса задач со старшим гармоническим оператором и частных случаев этой задачи: внутренних начально-граничных задач диффузии субстанции в атмосфере и в жидкости.

Научная значимость

1. Построенные приближенные решения краевых задач имеют простой аналитический вид, с большой точностью аппроксимируют точные решения при незначительном числе базисных функций.

2. Предложенная методика построения приближенных решений краевых задач со старшим гармоническим оператором применима к моделям диффузии примеси в атмосфере и в жидкости (нелинейная модель).

3. Доказана равномерная сходимость построенных приближенных решений к точным для следующих краевых задач: первой краевой задачи для уравнения Пуассона и краевых задач для однородного и неоднородного бигармонического уравнения.

4. Доказана устойчивость построенных семейств приближенных решений следующих краевых задач: первой краевой задачи для уравнения Пуассона и начально-граничной задачи распространения субстанций в атмосфере, к возмущениям правой части уравнения и, соответственно, граничного или начального условия.

Практическая значимость

Полученные результаты позволяют:

1. Для математических моделей, основанных на построении и вычислении значений приближенных решений рассматриваемых краевых задач, применять ограниченные по ресурсам и быстродействию обычные персональные компьютеры, бортовые компьютеры транспортных средств, компьютеры (контроллеры), управляющие приборами, механизмами в различных процессах. В большинстве современных пакетов прикладных программ, в том числе в пакетах ANSYS, Inc., в которых решения краевых задач находятся численно, требования к вычислительным ресурсам выше.

2. Разработать программное обеспечение для решения динамических нелинейных задач плоской диффузии ([15]).

3. Разработать методику расчета концентрации метанола в водометанольной смеси для мелкоуровневых резервуаров (основанную на построении приближенного решения нелинейной задачи диффузии примеси в жидкости) и использовать ее в технологических процессах добычи и подготовки газа к транспорту.

4. Моделировать распределение интегральной по приземному слою атмосферы концентрации аллергена – пыльцы амброзии (с помощью построения приближенного решения линейной задачи диффузии примеси в атмосфере).

Основные положения, выносимые на защиту

1. Модифицированный метод базисных потенциалов построения приближенных решений плоских внутренних краевых задач для уравнения Пуассона и бигармонического уравнения, основанный на полноте систем специальных потенциалов и приближенном решении обратных задач восстановления плотности логарифмических потенциалов. С помощью данного метода можно построить приближенные решения указанных задач для односвязных областей сложной геометрической формы.

2. Методика исследования определенного класса плоских линейных и нелинейных математических моделей со старшим гармоническим оператором, основанная на модифицированном методе базисных потенциалов. Данная методика позволяет свести построение приближенных решений рассматриваемых

задач к построению приближенных решений более простых краевых задач для уравнения Пуассона.

3. Результаты вычислительного эксперимента, реализующие построение и исследование приближенных решений указанных линейных и нелинейных краевых задач со старшим гармоническим и бигармоническим операторами и программное обеспечение (программа для ЭВМ «Решение динамических нелинейных задач плоской диффузии»).

Апробация работы

Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Международных и Всероссийских конференциях по математике и экологии:

на Международной конференции «Обратные и некорректно поставленные задачи» (г. Москва, 1998 г.);

на XVI Международной конференции «Математическое моделирование в механике деформируемых тел. Методы конечных и граничных элементов» (г. С.-Петербург, 1998 г.);

на XII Всероссийской конференции «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики» (г. Новороссийск, 1998 г.);

на XIV Международной конференции «Актуальные проблемы экологии, экономики, социологии и пути их решения» (Краснодарский край, п. Шепси, 2009 г.)

Публикации

Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 14 научных работах (6 статьях, 4 научных докладах, 1 материалах и 3 тезисах докладов на международных и всероссийских научных конференциях), из которых 7 работ опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации в них основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук. Кроме того, получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ и 3 акта использования результатов научных исследований.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка основных обозначений, списка используемой литературы, содержащего 111 наименований и 4 приложений. Работа изложена на 118 страницах машинописного текста, содержит 24 рисунка и 6 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В диссертационной работе используются следующие математические обозначения и понятия: Q - ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей ∂Q , $Q \subset R^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $n = 2, 3$; $Q^+ = R^n \setminus \overline{Q}$ - внешняя область; $\frac{\partial}{\partial n}$ - дифференцирование по направлению внешней нормали к ∂Q в точке $\mathbf{y} \in \partial Q$; $\Sigma_1(Q^+)$ - множество гармонических в Q^+ регулярных при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$

функций, имеющих на ∂Q след, принадлежащий $L_2(\partial Q)$; $L_2^\perp = \{f(x) : f \in L_2(\partial Q), (f, 1)_{L_2(\partial Q)} = 0\}$ - подпространство функций, ортогональных единице; $E(x)$ - фундаментальное решение уравнения Лапласа; $\alpha_k(x), \alpha_k^+(x), \beta_k(x), \gamma_k(x), \bar{\gamma}_k(x)$ - полные системы точечных потенциалов; Δ - оператор Лапласа.

Ограниченная последовательность $\{x^k\}_1^\infty \subset Q^*$, отделенная от ∂Q , называется множеством единственности для гармонических функций, если для любых гармонических в Q^* функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из равенств $f_1(x^k) = f_2(x^k), k=1,2,\dots$, следует их тождественность, $f_1(x) \equiv f_2(x)$ в Q^* .

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы научная задача, на решение которой были направлены исследования, приведенные в диссертационной работе, цель работы, основные положения, выносимые на защиту, указаны объект и предмет исследования, отмечены научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

Первая глава - вводная. В ней приведены постановки и известные результаты, посвященные методу базисных потенциалов, математическим моделям и задачам, которые исследованы в последующих главах: обратным задачам восстановления плотности потенциалов, математическим моделям, представляющим собой краевые задачи для уравнения Пуассона, бигармонического уравнения, уравнений со старшим гармоническим оператором. Указаны возможные физические интерпретации решений и входных функций этих краевых задач при моделировании процессов.

1. Рассматривается задача представления функции $W(x) \in \Sigma_1(Q^*) \cap C(\partial Q)$ в виде объемного потенциала:

$$W(x) = \int_Q g_0(y) E(x-y) dy, \quad x \in Q^*. \quad (1)$$

Приведены результаты исследований **задачи D₁**: найти гармоническую функцию $g_0(y)$ в представлении (1) функции $W(x)$, если заданы значения $W^m = W(x^m)$, $m=1,2,\dots$; точки $x^m \in Q^*$ являются множеством единственности для гармонических функций в Q^* .

2. Приводится задача представления функции $W(x) \in \Sigma_1(Q^*)$ в виде потенциала простого слоя:

$$W(x) = \int_{\partial Q} q_0(y) E(x-y) ds_y, \quad x \in Q^*. \quad (2)$$

Указаны результаты исследований **задачи D₂**: найти функцию $g_0(y)$ в представлении (2) функции $W(x) \in \Sigma_1(Q^*)$, если заданы значения $W^m = W(x^m)$, $m=1,2,\dots$, точки $x^m \in Q^*$ являются множеством единственности для гармонических функций в Q^* .

3. Рассмотрена задача представления функции $U(\mathbf{x}) \in \Sigma_1(Q^*)$ в виде потенциала двойного слоя:

$$U(\mathbf{x}) = \int_{\partial Q} g_0(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} E(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{s}_y, \quad \mathbf{x} \in Q^*. \quad (3)$$

Приведены результаты исследований **задачи D₃**: найти функцию $g_0(\mathbf{y})$ в представлении (3) функции $U(\mathbf{x}) \in \Sigma_1(Q^*)$, если заданы значения $U^m = U(\mathbf{x}^m)$, $m = 1, 2, \dots$, точки $\mathbf{x}^m \in Q^*$ являются множеством единственности для гармонических функций в Q^* .

В задачах D₁-D₃ используются соответственно базисные системы следующих функций:

$$\bar{\gamma}_n(\mathbf{y}) = E(\mathbf{x}^n - \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in Q, \{\mathbf{x}^n\}_1^\infty \subset Q^*; \quad (4)$$

$$\alpha_n^*(\mathbf{y}) = E(\mathbf{x}^n - \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \partial Q, \{\mathbf{x}^n\}_1^\infty \subset Q^*; \quad (5)$$

$$\beta_n(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial n_y} E(\mathbf{x}^n - \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \partial Q, \{\mathbf{x}^n\}_1^\infty \subset Q^*. \quad (6)$$

Для задач D₁-D₃ приводятся теоретические результаты и алгоритмы построения приближенных решений в виде:

$$g_N(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(\mathbf{y}), \quad (7)$$

где базисные потенциалы f_i представляются соответственно формулами (4)-(6), а коэффициенты c_i - определяются минимизацией функции

$$F(c_1, \dots, c_N) = \sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N c_i f_i(\mathbf{y}) F(\mathbf{x}^m - \mathbf{y}) d\Omega - W(\mathbf{x}^m) \right]^2, \quad (8)$$

где Ω соответственно задачам D₁-D₃ является областью Q , либо границей ∂Q , $d\Omega$ - соответственно обозначает $d\mathbf{y}$ либо $d\mathbf{s}_y$, $F(\mathbf{x}^m - \mathbf{y})$ - обозначает соответственно $E(\mathbf{x}^m - \mathbf{y})$ либо $\frac{\partial}{\partial n_y} E(\mathbf{x}^m - \mathbf{y})$.

Приведено описание метода базисных потенциалов построения приближенных решений краевых задач для уравнения Пуассона:

$$\Delta U_1(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q, U_1(\mathbf{x})|_{\partial Q} = g_1(\mathbf{x}), \quad (9)$$

$$\Delta U_2(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q, \frac{\partial U_2(\mathbf{x})}{\partial n} \Big|_{\partial Q} = g_2(\mathbf{x}), \quad (10)$$

и для однородного и неоднородного бигармонического уравнения:

$$\Delta^2 W_1(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q, \frac{\partial W_1}{\partial n} \Big|_{\partial Q} = h_1(\mathbf{x}), W_1|_{\partial Q} = k_1(\mathbf{x}), \quad (11)$$

$$\Delta^2 W_2(\mathbf{x}) = f_3(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q, \frac{\partial W_2}{\partial n} \Big|_{\partial Q} = h_2(\mathbf{x}), W_2|_{\partial Q} = k_2(\mathbf{x}). \quad (12)$$

Решения и входные функции задач (9), (10) и (11), (12) можно интерпретировать, в частности, следующим образом: $U_1(\mathbf{x})$, $U_2(\mathbf{x})$ - функции тока течений в

области Q , $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$ - завихренности, а $g_2(\mathbf{x})$ - скорость на границе области плоскопараллельных вязких течений (например, при производстве полимеров); $W_1(\mathbf{x})$, $W_2(\mathbf{x})$ - функции напряжений, $f_3(\mathbf{x})$ - плотность внешних сил, а $h_1(\mathbf{x})$, $h_2(\mathbf{x})$, $k_1(\mathbf{x})$, $k_2(\mathbf{x})$ - характеризуют напряжения на краях деформируемых пластин.

Для построения алгоритмов и решения задач (9) – (12) используется интегральное тождество, справедливое для любой достаточно гладкой функции (например, $U(\mathbf{x}) \in C^2(\bar{Q})$ [*, **])

$$AU(\mathbf{x}) = - \int_Q \Delta U(\mathbf{y}) E(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\partial Q} \left[U(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n} E(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \frac{\partial U(\mathbf{y})}{\partial n} E(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] ds_{\mathbf{y}}, \quad (13)$$

где $A=1$, $\mathbf{x} \in Q$; $A=0,5$, $\mathbf{x} \in \partial Q$; $A=0$, $\mathbf{x} \in Q^+$.

(В частности, для того, чтобы решение $U_1(\mathbf{x})$ задачи (9) принадлежало $C^2(\bar{Q})$ по теореме Шаудера [***] достаточно, чтобы $\partial Q \in C^{2+\alpha}$, $f_1(\mathbf{x}) \in C^\alpha(\bar{Q})$, $g_1(\mathbf{x}) \in C^{2+\alpha}(\partial Q)$, $0 < \alpha < 1$).

Для каждой из рассматриваемых моделей одна из плотностей в потенциалах из (13) является неизвестной. Неизвестную плотность необходимо приближенно восстановить, используя метод базисных потенциалов решения задач D_1 – D_3 , полные системы функций (4) – (6) и, при необходимости, – алгоритм выделения гармонической составляющей произвольной функции. После подстановки в (13) приближенно восстановленной неизвестной плотности, получим приближенное решение соответствующей задачи в области Q .

Описана общая схема построения приближенных решений для данных краевых задач и алгоритмы получения этих решений. Приводятся соответствующие теоретические результаты.

Приведена типичная математическая модель из рассматриваемого класса моделей со старшим гармоническим оператором:

$$\begin{cases} (\mu(\varphi, \mathbf{x}, t) D + A) \varphi(\mathbf{x}, t) = \bar{f}, \mathbf{x} \in Q \subset R^2, t > 0; \varphi = \varphi_0 \text{ при } t = 0; \\ \varphi = \varphi_s \text{ на } \partial Q, \left(\text{либо } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \phi_s \text{ на } \partial Q \right), \end{cases} \quad (14)$$

где $D = a \partial^2 / \partial x_1^2 + b \partial^2 / \partial x_2^2$, a и b - константы одного знака; $\mu(\varphi, \mathbf{x}, t) \geq c > 0$, $c = \text{const}$; A - дифференциальный оператор с производными не выше первого порядка (в частности, нелинейный), Q - ограниченная область с достаточно гладкой границей ∂Q .

Предполагается, что решение (14) существует, единственно и входные данные в (14) имеют требуемую для дальнейших рассуждений гладкость.

* Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука. 1976. 391 с.

** Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1977. 735 с.

*** Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука. 1973. 576 с.

Рассмотрены следующие математические модели, являющиеся ((16)-(18)) важными частными случаями модели (14).

Модель распространения субстанции в атмосфере:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \psi + \sigma \psi = D\psi + f, \mathbf{x} \in Q \subset R^3, t > 0, \\ \psi = \psi_0 \text{ при } t = 0, \psi = \psi_s \text{ на } \partial Q, \frac{\partial \psi}{\partial z} = \alpha \psi \text{ на } \partial Q_0, \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \text{ на } \partial Q_H. \end{cases} \quad (15)$$

где $\psi = \psi(t, x_1, x_2, x_3)$ - плотность аэрозольной субстанции, мигрирующей вместе с потоком воздуха в атмосфере; $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x_1, x_2, x_3)$ - вектор скорости воздуха с компонентами u_1, u_2, u_3 , $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, $u_3(t, x_1, x_2, 0) = u_3(t, x_1, x_2, H) = 0$; Q - цилиндр с границей, состоящей из боковой поверхности ∂Q , нижнего ∂Q_0 (при $x_3 = 0$) и верхнего ∂Q_H (при $x_3 = H > 0$) оснований; $f = f(t, x_1, x_2, x_3)$ - функция, аналитически описывающая источник субстанции; $D = \mu(\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2) + \partial/\partial x_3 \nu \partial/\partial x_3$, $\mu = \mu(t, x_1, x_2) \geq 0$ и $\nu = \nu(t, x_1, x_2, x_3) \geq 0$ - соответственно горизонтальный и вертикальный коэффициенты диффузии, $(\nabla_{x_1 x_2} \mu, \nabla_{x_1 x_2} \psi) = 0$; $\alpha = \alpha(t, x_1, x_2) \geq 0$ - функция, характеризующая взаимодействие субстанции с подстилающей поверхностью; $\sigma = \sigma(t, x_1, x_2) \geq 0$ - функция, характеризующая поглощение субстанции или ее распад.

Известно, что модель (15) можно преобразовать к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} \varphi + \bar{\sigma} \varphi = \mu \Delta \varphi + \bar{f}, \mathbf{x} \in Q' \subset R^2, t > 0, \\ \varphi = \varphi_0 \text{ при } t = 0, \varphi = \varphi_s \text{ на } \partial Q', \end{cases} \quad (16)$$

где: $\varphi = \varphi(t, x_1, x_2) = \int_0^H \psi(t, x_1, x_2, x_3) dx_3$; $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(t, x_1, x_2) = (u_1(t, x_1, x_2), u_2(t, x_1, x_2))$;

$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(t, x_1, x_2) = \sigma + \frac{\alpha \nu|_{x_3=0}}{H}$; $\bar{f} = \bar{f}(t, x_1, x_2) = \int_0^H f(t, x_1, x_2, x_3) dx_3$; Q' - круг (проекция Q из (15) на плоскость $x_1 O x_2$) с границей $\partial Q'$;

$\varphi_0 = \varphi_0(x_1, x_2) = \int_0^H \psi_0(x_1, x_2, x_3) dx_3$; $\varphi_s = \varphi_s(t, x_1, x_2) = \int_0^H \psi_s(t, x_1, x_2, x_3) dx_3$.

Модели диффузии в жидкости:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = f(\omega) \Delta \omega + f_\omega(\omega) \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 \right], \mathbf{x} \in Q \subset R^2, t > 0, \\ \omega = \omega_0(\mathbf{x}) \text{ при } t = 0, \omega = \omega_s(t, \mathbf{x}) \text{ на } \partial Q; \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = f(\omega)\Delta\omega + f_{\omega}'(\omega)\left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)^2\right] + g(\omega), \mathbf{x} \in Q \subset R^2, t > 0, \\ \omega = \omega_0(\mathbf{x}) \text{ при } t = 0, \quad f(\omega)\frac{\partial \omega}{\partial n} = \omega_s(t, \mathbf{x}) \text{ на } \partial Q, \end{cases} \quad (18)$$

где: $\omega = \omega(t, \mathbf{x})$ - концентрация диффундирующего вещества, $c \geq \omega \geq a > 0$, $a = \text{const}$, $c = \text{const}$; $f(\omega)$ - коэффициент диффузии, $d \geq f(\omega) \geq b > 0$, $b = \text{const}$, $d = \text{const}$; $g(\omega)$ - функция источника, $e \geq g(\omega) > 0$, $e = \text{const}$; в (18) $\omega_s(0, \mathbf{x}) = 0$ на ∂Q .

Приведены методы решения задач (моделей) (15)-(18).

Приведено обоснование постановки задачи исследования.

На основании анализа результатов, изложенных в первой главе, были сделаны следующие выводы.

1. Поскольку обратные задачи восстановления плотности потенциалов при исследовании рассматриваемых моделей являются некорректно поставленными (не выполняются условия единственности и устойчивости решения), то для рассматриваемого двумерного случая необходимо построить классы (подпространства) единственности решения, а также улучшить устойчивость приближенных решений этих задач.

2. В связи с неустойчивостью решений обратных задач восстановления плотности потенциалов, необходимо исследовать на устойчивость построенные методом базисных потенциалов семейства приближенных решений рассматриваемых краевых задач.

3. Необходимо исследовать сходимость построенных методом базисных потенциалов приближенных решений рассматриваемых краевых задач к точным.

4. Необходимо разработать методику, алгоритм и программное обеспечение, реализующие построение приближенных решений задач вида (14) (в частности, задач (моделей) диффузии примеси в атмосфере и в жидкости).

В доступных литературных источниках отсутствует методика построения приближенных решений задач вида (14), позволяющая находить решение для областей сложной геометрической формы.

Во второй главе рассматривается класс гармонических в области $Q^+ \subset R^2$ функций, удовлетворяющих условию на бесконечности: для $u_1(\mathbf{x})$ и $u_2(\mathbf{x})$ из этого класса выполняется соотношение

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} (u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})) = 0.$$

В главе доказывается, что для такого класса функций множеством единственности будет являться счетное плотное на любой замкнутой кривой $L \supset \supset \bar{Q}$ множество.

Для регулярного на бесконечности логарифмического потенциала площади сформулирована внешняя обратная задача восстановления плотности этого потенциала (задача D_1). Определяется следующая система точечных потенциа-

лов, ортогональных единице в $L_2(Q)$:

$$\gamma_n(y) = \ln |x^n - y|^{-1} - J_n, \quad y \in Q,$$

где

$$J_n = \int_Q \ln |x^n - y|^{-1} dy / |Q|, \quad \{x^n\}_1^\infty \subset Q^+;$$

доказана ее линейная независимость и полнота в подпространстве гармонических в Q функций, ортогональных константе. Сформулирована и доказана теорема единственности решения обратной задачи. Доказано существование, единственность, сходимость к точному решению построенного по методу базисных потенциалов приближенного решения этой задачи.

Теорема 2.1.2. Приближенное решение $g_{0N}(y) = \sum_{i=1}^N c_i \gamma_i(y)$ задачи D_1 существует и единственно, при $N \rightarrow \infty$ оно сходится в $L_2(Q)$ к $g_0(y)$.

Приведен алгоритм построения такого приближенного решения ((7), (8)).

Для регулярного на бесконечности логарифмического потенциала простого слоя рассматривается внешняя обратная задача восстановления плотности (задача D_2). Определяется следующая система точечных потенциалов, ортогональных единице в $L_2(\partial Q)$:

$$\alpha_m(y) = \ln |x^m - y|^{-1} - I_m, \quad y \in \partial Q,$$

где

$$I_m = |\partial Q|^{-1} \int_{\partial Q} \ln |x^m - y|^{-1} ds_y, \quad \{x^m\}_1^\infty \subset Q^+,$$

доказана ее линейная независимость и полнота в подпространстве L_2^c .

Лемма 2.2.1. Система функций

$$\alpha_m(y) = \ln \frac{1}{|x^m - y|} - I_m, \quad y \in \partial Q, \quad m=1, \dots, N$$

является линейно независимой при любом наборе точек $x^m \in Q^+, m=1, 2, \dots, N$.

Лемма 2.2.2. Если точки $x^m \in Q^+$, являются множеством единственности для гармонических функций в Q^+ , то система функций

$$\alpha_m(y) = \ln \frac{1}{|x^m - y|} - I_m, \quad y \in \partial Q, \quad m=1, 2, \dots,$$

является полной в подпространстве L_2^c .

Доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи. Доказано существование, единственность, сходимость к точному решению построенного по методу базисных потенциалов приближенного решения этой задачи. Приведен алгоритм метода базисных потенциалов построения приближенного решения обратной задачи ((7), (8)).

Исследуется внешняя обратная задача восстановления плотности логарифмического потенциала двойного слоя (задача D_3). Определяется следующая система точечных потенциалов:

$$\beta_m(y) = \frac{\partial}{\partial n_y} \ln |x^m - y|^{-1} = (x^m - y, n_y) |x^m - y|^{-2}, \quad y \in \partial Q, \quad \{x^m\}_1^\infty \subset Q^+,$$

где n_y - единичная внешняя нормаль к ∂Q в точке $y \in \partial Q$.

Доказана линейная независимость и полнота системы $\beta_m(y)$ в подпространстве L_2^c . Доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи. Доказано существование, единственность, сходимость к точному решению построенного по методу базисных потенциалов приближенного решения этой задачи. Приведен алгоритм метода базисных потенциалов построения приближенного решения обратной задачи ((7), (8)).

В третьей главе сформулирован модифицированный метод базисных потенциалов построения приближенных решений рассматриваемых в ней краевых задач.

Построено приближенное решение первой краевой задачи для уравнения Пуассона (9). Доказана равномерная сходимость приближенного решения к точному и устойчивость приближенных решений к возмущениям правой части уравнения, либо функции из граничного условия.

Обозначим: $\left(\frac{\partial U_1(y)}{\partial n}\right)^{(0)}$ - проекция $\frac{\partial U_1(y)}{\partial n}$ на подпространство L_2^c ,
 $\left(\frac{\partial U_1(y)}{\partial n}\right)_N^{(0)} = \sum_{k=1}^N c_k \alpha_k(y).$

Теорема 3.1.2. Если $\left(\frac{\partial U_1(y)}{\partial n}\right)^{(0)} \in L_2(\partial Q)$ и граница $\partial Q \in C^{2+\alpha}$, то приближенное решение $U_{1N}(x)$, полученное методом базисных потенциалов, равномерно сходится при $N \rightarrow \infty$ к точному решению $U_1(x)$ задачи (9) в \bar{Q} . В теореме получена условная асимптотическая оценка сходимости $U_{1N}(x)$ к $U_1(x)$ вида:

$$\max_{x \in \bar{Q}} |U_1(x) - U_{1N}(x)| \leq B_1 \frac{1}{\pi} \left\| \left(\frac{\partial U_1(y)}{\partial n}\right)^{(0)} - \left(\frac{\partial U_1(y)}{\partial n}\right)_N^{(0)} \right\|_{L_2(\partial Q)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

где $B_1 = \max_{x \in \bar{Q}} \left\| \ln |x - y|^{-1} \right\|_{L_2(\partial Q)}.$

Приведены примеры построения приближенного решения для различных областей. Проведен анализ сходимости приближенного решения в области Q (например, таблица 1, где Q - круг $\{x: |x| < 1\}$ с вырезанным сектором $0 \leq \phi \leq \pi/2$, точное решение $U(x_1, x_2) = 3/2 x_1^2 - x_2^2$).

Таблица 1. - Абсолютная погрешность приближенного решения в Q .

Расстояние от начала координат до контрольных точек	Количество базисных функций a_m	
	40	60
0,1	$10^{-2} - 10^{-3}$	$10^{-3} - 10^{-4}$
0,5	$10^{-3} - 10^{-4}$	$10^{-4} - 10^{-5}$
1,0 (граница)	$10^{-3} - 10^{-5}$	$10^{-3} - 10^{-6}$

Построено приближенное решение второй краевой задачи для уравнения Пуассона (10). Приведены примеры построения приближенного решения для различных областей. Проведен анализ точности приближенного решения.

Построено приближенное решение краевой задачи для однородного бигармонического уравнения (11). Доказана равномерная сходимость приближенного решения к точному. Приведены примеры построения приближенного решения для различных областей. Проведен анализ сходимости приближенного решения в области Q (например, таблица 2, где Q - круг $\{x: |x| < 1\}$ с вырезанным сектором $0 \leq \phi \leq \pi/2$, точное решение $U(x_1, x_2) = x_1^4 - x_2^4 + x_1^2 + x_2^2$).

Таблица 2. Абсолютная погрешность приближенного решения в Q .

Расстояние от начала координат до контрольных точек	Количество базисных функций γ_m	
	30	40
0,0	10^{-5}	10^{-6}
0,5	$10^{-5} - 10^{-7}$	$10^{-6} - 10^{-8}$
1,0 (граница)	$10^{-6} - 10^{-7}$	$10^{-6} - 10^{-8}$

Построено приближенное решение $U_N(x)$ краевой задачи для неоднородного бигармонического уравнения (12):

$$U_N(x) = U_1(x) + U_{2N}(x),$$

$$\text{где } U_1(x) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_Q \int f_3(x) \ln|y-x|^{-1} dx \ln|x-y|^{-1} dy,$$

$U_{2N}(x)$ является приближенным решением задачи

$$\Delta^2 V(x) = 0, x \in Q, \quad V|_{\partial Q} = k_2(x) - g_1(x), \quad \frac{\partial V}{\partial n}|_{\partial Q} = h_2(x) - h_1(x),$$

$$\text{где } g_1(x) = U_1|_{\partial Q}, \quad h_1(x) = \frac{\partial U_1}{\partial n}|_{\partial Q}.$$

Доказана равномерная в \bar{Q} сходимость приближенного решения $U_N(x)$ к точному.

В главе 4 исследована математическая модель (14) и ее важные частные случаи: модели распространения субстанций в атмосфере (16) и диффузии в жидкости (17), (18). С помощью нижеприведенной методики построены приближенные решения рассматриваемых задач. Показана единственность решения (16). Доказана устойчивость приближенного решения (16) к возмущениям правой части уравнения и функции из начального условия. Для задач (моделей) (17), (18) указаны достаточные для дальнейшего требования на входные данные. Приведены результаты вычислительных экспериментов по построению с помощью нижеприведенной методики и исследованию сходимости и устойчивости приближенных решений задач (16)-(18). На основании результатов главы разработано программное обеспечение, реализующее построение приближенных решений задач (17), (18) для различных областей – программа для ЭВМ «Решение динамических нелинейных задач плоской диффузии».

Рассмотрим задачу (14) с граничными условиями первого рода. Процесс построения приближенного решения задачи (14) разобьем на два этапа.

1. Заменяем исходную задачу (14) на ее дискретный по времени аналог.

Пусть $\Psi_k(\mathbf{x})$ - приближение решения (14) в момент времени t_k , $k = 0, 1, \dots$, $t_0 = 0$, $\Psi_0(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x})$, $t_{k+1} - t_k = \tau_k$, $\bar{f}_k = \bar{f}(t_k, \mathbf{x})$, $\mu_k = \mu(\Psi_k(\mathbf{x}), \mathbf{x}, t_k)$, A_k - дискретный аналог оператора A . Используя неявную аппроксимационную схему, запишем для определения $\Psi_{k+1}(\mathbf{x})$, $k = 0, 1, \dots$, следующие задачи:

$$\begin{cases} (\mu_{k+1} \Delta + A_{k+1}) \Psi_{k+1}(\mathbf{x}) = \bar{f}_{k+1}, \mathbf{x} \in Q \subset R^2, \\ \Psi_{k+1}(\mathbf{x}) = \varphi_S(t_{k+1}, \mathbf{x}) \text{ на } \partial Q. \end{cases} \quad (19)$$

2. Построим приближенное решение задачи (19).

Введем вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} \Delta \Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}) = \Phi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in Q, \\ \Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x})|_{\partial Q} = \varphi_i(t_{k+1}, \mathbf{x}), \end{cases} \quad (20)$$

где $k = 0, 1, \dots$

Приближенное решение задачи (20) можно построить методом базисных потенциалов.

1. Начальное приближение $\Phi_{k+1}^{(1)}(\mathbf{x})$ правой части уравнения в (20) выбирается так, чтобы при заданной $\varphi_i(t_{k+1}, \mathbf{x})$ в (20) выполнялись условия: решение (20) при $i = 1$ существует и принадлежит $C^{2+\alpha}(\bar{Q})$.

2. Последующие приближения $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$ в правой части уравнения в (20) определяются из соотношения:

$$\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x}) = (-A_{k+1} \Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}) + \bar{f}_{k+1}(\mathbf{x})) \frac{1}{\mu(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}), \mathbf{x}, t_{k+1})}, \quad \mathbf{x} \in Q \quad (21)$$

Предполагаем, что для $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$ из (21), при заданной $\varphi_i(t_{k+1}, \mathbf{x})$ из (20) и $\mu(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}), \mathbf{x}, t_{k+1})$, решение (20) также существует и принадлежит $C^{2+\alpha}(\bar{Q})$.

3. Процесс построения приближенных решений $\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x})$ задачи (20) для приближений в правой части уравнения в (20), определяемых (21), завершаем для заданного $\varepsilon > 0$ на t_{k+1} - й итерации, если выполнится неравенство

$$\|\Phi_{k+1}^{(i,i)}(\mathbf{x}) - \Phi_{k+1}^{(i,i+1)}(\mathbf{x})\|_{C(\bar{Q})} < \varepsilon.$$

В этом случае полагаем

$$\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) \approx \Psi_{k+1}^{(i,i)}(\mathbf{x}).$$

Аналитический вид приближенного решения задачи (19):

$$\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{A} \left[\int_Q \Phi_{k+1}^{(k+1)}(\mathbf{y}) \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} - \int_{\partial Q} \varphi_S(t_{k+1}, \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \left(\sum_{j=1}^N c_j^{(k+1)} \alpha_j(\mathbf{y}) + C \right) \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \right],$$

где $A = 2\pi$, $\mathbf{x} \in Q$; π , $\mathbf{x} \in \partial Q$; $c_j^{(k+1)}$ - коэффициенты, определяющие аппроксимацию неизвестной плотности

$$\frac{\partial \Psi_{k+1}(\mathbf{y})}{\partial n}.$$

$$\frac{\partial \Psi_{k+1}(y)}{\partial n} \approx \left(\sum_{j=1}^N c_j^{(k+1)} \alpha_j(y) + C \right), \quad y \in \partial Q;$$

$$\Phi_{k+1}^{(j_k)}(y) \approx \Delta \Psi_{k+1}(y), \quad k=0,1,\dots; \quad \alpha_j(y) = \ln |x^j - y|^{-1} - J_j,$$

где $J_j = |\partial Q|^{-1} \int_{\partial Q} \ln |x^j - y|^{-1} ds_y$, $x^j \in Q^+$, $j=1,2,\dots,N$; $C = |\partial Q|^{-1} \int_{\partial Q} \Phi_{k+1}^{(j_k)}(y) dy$, $|\partial Q|$ - мера ∂Q .

Аналогично можно построить приближенное решение задачи (14) с граничными условиями второго рода.

Результаты вычислительного эксперимента по задаче (16) для области $Q' = \{x: |x| < 1\}$ при известном точном ее решении $\varphi(t, x_1, x_2) = \exp(-(x_1^2 + x_2^2 + t))$, $\bar{f}(t, x_1, x_2) = \exp(-(x_1^2 + x_2^2 + t))(\bar{\sigma} - 1 - 2(u_1 x_1 + u_2 x_2) - 4\mu(x_1^2 + x_2^2 - 1))$, $\bar{f}_{\text{возм}}(t, x_1, x_2) = 1,01 \bar{f}(t, x_1, x_2)$, $\varphi_0(x_1, x_2) = \exp(-(x_1^2 + x_2^2))$, $\varphi_{0 \text{ возм.}}(x_1, x_2) = 1,03 \varphi_0(x_1, x_2)$, $\varphi_5(t, x_1, x_2) = \exp(-(1+t))$, $u_1 = 2,5$, $u_2 = 0$, $\bar{\sigma} = 0,005$, $\mu = 2,5$, $t \in [0, 1]$, шаг дискретизации по времени $\tau = 0,1$, $\|\varphi(t_{k+1}, x) - \Psi_{k+1}(x)\|_{C(\bar{Q})} < \varepsilon$, $k=0,1,\dots,9$, $\varepsilon = 10^{-3}$, приведены на рисунках 1, 2:



Рис. 1. Погрешность приближенных решений (16) при $t = 0,1$

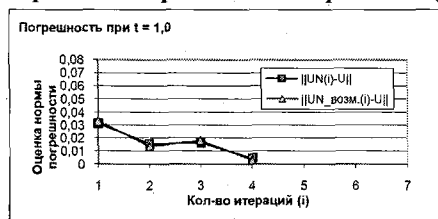


Рис. 2. Погрешность приближенных решений (16) при $t = 1,0$

Результаты вычислительного эксперимента по задаче (17) для области $Q = \{x: |x| < 1\}$, $f(\omega) = \omega$, известного точного ее решения

$$\omega(t, x_1, x_2) = -x_2^2(6(t+1))^{-1} + x_1(t+1)^{-1/3} + 1,5(t+1)^{1/3}, \quad \omega(0, x_1, x_2) = \omega_0(x_1, x_2) = -x_2^2/6 + x_1 + 1,5,$$

$\omega(t, x_1, x_2)|_{\partial Q} = \omega_S(t, x_1, x_2) = \tilde{\omega}_S(t, r, \varphi)|_{r=1, \varphi \in [0, 2\pi]} =$
 $-\sin^2 \varphi (6(t+1))^{-1} + \cos \varphi (t+1)^{-1/3} + 1, 5(t+1)^{1/3}, t \in [0, 1], \tau = 0, 1, \|\omega(t_{k+1}, \mathbf{x}) - \Psi_{k+1}(\mathbf{x})\|_{C(\bar{Q})} < \varepsilon,$
 $k = 0, 1, \dots, 9, \varepsilon = 10^{-2}$ приведены на рисунках 3, 4.

(Норма в $C(\bar{Q})$ абсолютной погрешности: 0,008)

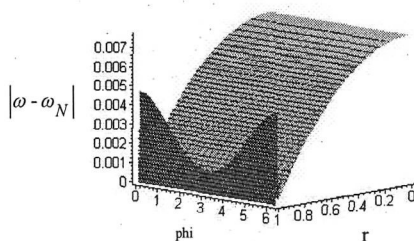


Рис. 3. Абсолютная погрешность приближенного решения (17) для $t=0,1$

(Норма в $C(\bar{Q})$ абсолютной погрешности: 0,009)

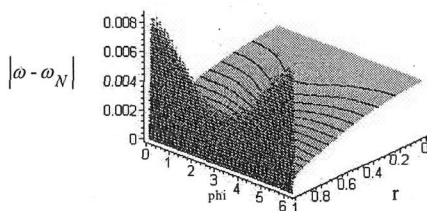


Рис. 4. Абсолютная погрешность приближенного решения (17) для $t=1,0$

Предполагаем, что в задаче (18) $\omega_S|_{\partial Q} = 0$, тогда ее приближенное решение для $t = t_{k+1}$ имеет вид:

$$\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{A} \left[- \int_{\bar{Q}} \Phi_{k+1}^{(k+1)}(\mathbf{y}) \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} - \int_{\partial Q} \left(\sum_{j=1}^N c_j^{(k+1)} \beta_j(\mathbf{y}) \right) \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{y}}} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} ds_{\mathbf{y}} \right],$$

где $A = 2\pi$, $\mathbf{x} \in Q$, $\mathbf{x} \in \partial Q$; $c_j^{(k+1)}$ - коэффициенты, определяющие приближенно восстановленную плотность $\Psi_{k+1}(\mathbf{y})$ логарифмического потенциала двойного слоя;

$\Phi_{k+1}^{(1)}(\mathbf{x})$ - произвольная функция требуемой гладкости,

$$\begin{cases} \Delta \Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}) = \Phi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in Q, \\ \left. \frac{\partial \Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x})}{\partial n} \right|_{\partial Q} = 0, \end{cases}$$

корректировка приближенного решения $(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N$, исходя из условия изменения массы примеси: $\int_Q ((\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N - \Psi_k(\mathbf{x}) - \tau g(\Psi_k(\mathbf{x}))) d\mathbf{x} = 0$,

$$\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N - \Psi_k(\mathbf{x})}{\tau} - f'(\Psi_k(\mathbf{x})) \left((\Psi_{k+1}^{(i)})_N \right) \left[\left(\frac{\partial (\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial (\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}))_N}{\partial x_2} \right)^2 \right] - g((\Psi_{k+1}^{(i)})_N) \right\} / f((\Psi_{k+1}^{(i)})_N), \mathbf{x} \in Q,$$

проверка: $\|\Phi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}) - \Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})\|_{C(\bar{Q})} < \varepsilon$, корректировка $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$, исходя из условия:

$$\int_Q \Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, i = 1, 2, \dots, l_{k+1}, l_{k+1}: \|\Phi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{x}) - \Phi_{k+1}^{(l_{k+1}+1)}(\mathbf{x})\|_{C(\bar{Q})} < \varepsilon, k = 0, 1, \dots$$

Результаты вычислительного эксперимента по задаче (18) для области $Q = \{\mathbf{x}: |\mathbf{x}| < 1\}$, $f(\omega) = \omega$; $g(\omega) = 1/(\omega^2 + 1)$; $\omega_0(x_1, x_2) = (1 - x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 + 2$; $\omega_s(t, x_1, x_2) = 0$; $t \in [0, 1]$, $\tau = 0, 1$; $\|\Phi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{x}) - \Phi_{k+1}^{(l_{k+1}+1)}(\mathbf{x})\|_{C(\bar{Q})} < \varepsilon$, $k = 0, 1, \dots, 9$, $\varepsilon = 10^{-1}$ приведены на рисунках 5, 6:

$t=0,1$, количество итераций: 7;
норма в $C(\bar{Q})$ невязки: 0,07

$t=0,2$, количество итераций: 7;
норма в $C(\bar{Q})$ невязки: 0,06

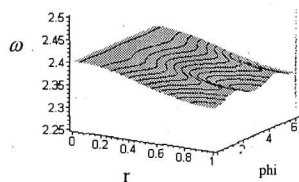
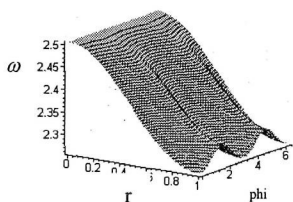


Рис. 5. Приближенное решение (18) для $t=0,1$, $t=0,2$

$t=0,4$, количество итераций: 2;
норма в $C(\bar{Q})$ невязки: 0,04

$t=1,0$, количество итераций: 1;
норма в $C(\bar{Q})$ невязки: 0,03

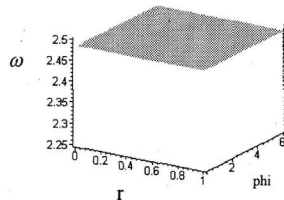
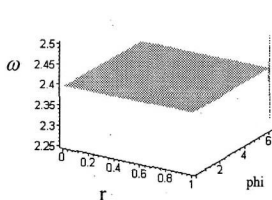


Рис. 6. Приближенное решение (18) для $t=0,4$, $t=1,0$

Рисунки 5-6 иллюстрируют сходимость концентрации к постоянной

функции и рост последней при равномерной интенсивности источников с течением времени.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В ходе подготовки диссертационной работы были получены следующие основные результаты.

1. Модифицирован метод базисных потенциалов построения приближенных решений плоских краевых задач для уравнения Пуассона и бигармонического уравнения, основанный на интегральном представлении решений и приближенном решении обратных задач восстановления плотности логарифмических потенциалов:

- построены модифицированные системы точечных потенциалов $\gamma_m(x)$, $\alpha_m(x)$, доказана их линейная независимость и полнота соответственно в подпространстве гармонических функций, ортогональных константе в Q , либо в L_2^0 ;

- выделен класс гармонических в области $Q^+ \subset R^2$ функций, удовлетворяющих условию на бесконечности: для $u_1(x)$ и $u_2(x)$ из этого класса выполняется соотношение $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (u_1(x) - u_2(x)) = 0$, и для таких функций предложен простой и быстрый способ конструктивного построения множества единственности;

- доказаны существование, единственность точных и построенных методом базисных потенциалов приближенных решений обратных задач восстановления плотности логарифмических потенциалов;

- доказана сходимость приближенных решений обратных задач восстановления плотности логарифмических потенциалов к точным, получены алгоритмы построения приближенных решений;

- в интегральном представлении приближенных решений первой краевой задачи для уравнения Пуассона и краевой задачи для бигармонического уравнения получены точные проекции искомых плотностей логарифмических потенциалов соответственно простого слоя и площади на подпространства констант соответственно в $L_2(\partial Q)$ и $L_2(Q)$ и приближения по модифицированным системам базисных потенциалов проекций искомых плотностей на подпространства, ортогональные константам;

- предложен простой алгоритм построения приближенного решения краевой задачи для неоднородного бигармонического уравнения.

2. Разработана методика исследования определенного класса математических моделей со старшим гармоническим оператором (в частности, моделей диффузии субстанций в атмосфере и в жидкости (нелинейная модель)).

3. Построены приближенные решения следующих краевых задач: первой и второй внутренних краевых задач для уравнения Пуассона, внутренних краевых задач для однородного и неоднородного бигармонического уравнения, а также типичной краевой задачи из класса задач (моделей) вида (14) со старшим гармоническим оператором и частных случаев этой задачи: внутренних начально-граничных задач диффузии субстанции в атмосфере и в жидкости.

4. Доказана равномерная сходимость построенных методом базисных потенциалов приближенных решений первой краевой задачи для уравнения Пуас-

сона и краевых задач для однородного и неоднородного бигармонического уравнения.

5. Доказана устойчивость построенных приближенных решений первой краевой задачи для уравнения Пуассона и начально-граничной задачи распространения субстанций в атмосфере, к возмущениям правой части уравнения и граничного или начального условия.

6. Разработано программное обеспечение (программа для ЭВМ «Решение динамических нелинейных задач плоской диффузии») и получены результаты вычислительного эксперимента по построению и исследованию приближенных решений линейных и нелинейных краевых задач со старшим гармоническим оператором и с бигармоническим оператором.

На основании результатов, полученных в работе, были сделаны следующие выводы.

1. Представленная модификация метода базисных потенциалов упрощает и ускоряет процесс построения базисных систем потенциалов и улучшает, вообще говоря, сходимость построенных приближенных решений краевых задач к точным.

2. Разработанная методика построения приближенных решений краевых задач со старшим гармоническим оператором позволяет единообразно строить приближенные решения (в простой аналитической форме) для широкого класса линейных и нелинейных задач (моделей) в областях сложной геометрической формы.

3. Разработанное программное обеспечение (программа для ЭВМ «Решение динамических нелинейных задач плоской диффузии») и результаты вычислительного эксперимента подтверждают полученные теоретические результаты и адекватность применения модифицированного метода базисных потенциалов и разработанной методики к исследованию рассматриваемых математических моделей.

Основное содержание диссертации изложено в следующих публикациях.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации в них основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук

1. Захаров М.Ю., Семенчин Е.А. О методе точечных потенциалов решения плоской краевой задачи для бигармонического уравнения // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2009. Т.16. ВВ.1. С. 144-145.

2. Захаров М.Ю., Семенчин Е.А. О построении приближенного решения плоской задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом точечных потенциалов // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2009. Т.16. ВВ.3. С. 463-464.

3. Захаров М.Ю., Семенчин Е.А. О построении приближенного решения плоской краевой задачи для неоднородного бигармонического уравнения // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2009. Т.16. ВВ.3. С. 464-465.

4. Захаров М.Ю., Семенчин Е.А. Построение приближенного решения

краевой задачи, описывающей рассеяние примеси в атмосфере, методом точечных потенциалов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. № 4. С. 20-27.

5. Семенчин Е.А., Захаров М.Ю. Приближенное решение плоской краевой задачи для уравнения диффузии с зависящими от концентрации коэффициентами и функцией источника // Научный журнал КубГАУ [Электронный ресурс]. Краснодар: КубГАУ, 2010. №06(60). Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2010/06/pdf/08.pdf>

6. Захаров М.Ю., Семенчин Е.А. Приближенное решение плоских краевых задач с нелинейным уравнением диффузии в изотропной среде // Вестник МГОУ серия «Физика-математика». 2010. № 2. С. 35-46.

7. Захаров М.Ю., Семенчин Е.А. О построении приближенных решений плоских краевых задач для уравнений со старшим гармоническим оператором // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2010. Т.17. ВВ.4. С. 555-556.

Публикации в других изданиях

8. Захаров М.Ю. Обратная задача определения плотности логарифмического потенциала двойного слоя и применение к решению краевой задачи // Численный анализ: теория, приложения, программы. М.: МГУ, 1999. С. 113-120.

9. Захаров М.Ю. Определение плотности логарифмического потенциала простого слоя // Проблемы физико-математического моделирования. Краснодар: КубГТУ, 1998. С. 83-87.

10. Лежнев В.Г., Захаров М.Ю. О бигармонической составляющей плотности ньютонова потенциала // Обратные и некорректно поставленные задачи: Тезисы докладов Междунар. конф., Москва, 1998. С. 49.

11. Захаров М.Ю. Определение плотности логарифмического потенциала двойного слоя // Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики: Тезисы докладов XII Всеросс. конф., Новороссийск, 1998. С. 32-33.

12. Захаров М.Ю. Внешняя обратная задача определения плотности логарифмического потенциала простого слоя // Численный анализ: методы и алгоритмы. М.: МГУ, 1998. С. 45-52.

13. Захаров М.Ю., Лежнев В.Г. Метод решения краевых задач для уравнения Пуассона // Математическое моделирование в механике деформируемых тел. Методы конечных и граничных элементов: Тезисы XVI Междунар. конф. С.-Петербург, 1998. Т.2. С. 60-61.

14. Захаров М.Ю., Семенчин Е.А. О построении приближенного решения краевой задачи, описывающей диффузию примеси в атмосфере // Актуальные проблемы экологии, экономики, социологии и пути их решения: Мат-лы XIV Междунар. конф. Краснодарский край, п. Шепси, 2009. С. 57-60.

15. Семенчин Е.А., Захаров М.Ю. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Решение динамических нелинейных задач плоской диффузии». Свидетельство № 2010616300, дата регистрации 22.09.2010 г.

Захаров Михаил Юрьевич
РАЗВИТИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БАЗИСНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ ДВУМЕРНЫМИ КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ
Автореферат

Подписано в печать 22.04.2011.
Печать цифровая. Формат бумаги 210х297
Тираж 100 экз.

Центр Копий
350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 151