**Вопросы для самостоятельной подготовки к зачету и коллоквиуму**

1. Некоторые математические понятия (множество пар элементов, его подмножества, проекции и сечения, функционал).
2. Общая задача оптимизации.
3. Теорема о существовании решения задачи нахождения точной нижней (верхней) границы функционала.
4. Основные понятия управляемого процесса (траектория системы, вектор управляющих воздействий, ограничения на состояние системы, процесс, модель управляемой системы, начальные условия, краевые условия, время протекания процесса, функционал качества, терминальная функция).
5. Постановка задачи оптимизации управляемого процесса в непрерывной управляемой системе.
6. Постановка задачи оптимизации многошагового управляемого процесса в дискретной управляемой системе.
7. Построение траекторий управляемых процессов для случая, когда управление представляет собой разрывную функцию времени.
8. Постановка задачи оптимального управления для модели Леонтьева.
9. Постановка задачи оптимального распределения ресурсов между отраслями.
10. Постановка задачи оптимального распределения капитальных вложений между предприятиями.
11. Постановка задачи о линии наименьшей длины и сведение ее к задаче оптимального управления.
12. Вспомогательные математические конструкции для формулировки достаточных условий оптимальности.
13. Достаточные условия оптимальности для непрерывных процессов.
14. Достаточные условия оптимальности для многошаговых процессов.
15. Обобщенная теорема о достаточных условиях оптимальности.
16. Вывод уравнений метода Лагранжа-Понтрягина.
17. Принцип максимума Понтрягина.
18. Сведение задачи оптимального управления к краевой задаче.
19. Принцип максимума как достаточное условие оптимальности.
20. Уравнения метода Лагранжа-Понтрягина для многошагового процесса с неограниченным управлением.
21. Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для непрерывного варианта.
22. Синтез оптимального управления.
23. Алгоритм метода Гамильтона-Якоби-Беллмана.

**5. Постановка задачи оптимизации управляемого процесса в непрерывной управляемой системе**.

**1-ый вид (может не иметь решений).** Пусть имеем: $\bar{x}(t) \in X$ (n-мерный), координаты которого непрерывные и кусочно-дифференцируемые функции, вектор $\bar{u}(t) \in U$, координаты которого кусочно-непрерывные функции. Пусть эта пара образует процесс $\bar{v} = \{\bar{x}(t), \bar{u}(t)\} \in M$. При этом $t \in [0; T]$. Пусть вектор состояния и вектор управления связаны системой ДУ: $\dot{\bar{x}} = \mathrm{f}(\mathrm{t}, \bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{u}})$ и указано н.у. $\bar{x}(0) = \{x1(0), \dots, xn(0)\}$. Требуется найти такой оптимальный процесс $\hat{v}$, состоящий из оптимальной траектории и оптимального управления ($\hat{v} = \{\hat{x}(t), \hat{u}(t)\}$, что $I(\hat{v}) = \min I(v), v \in M$, где $I(v)$ вида $\int_0^T f_0(\mathrm{t}, \bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{u}})\mathrm{dt} + \mathrm{F}\big(\bar{\mathrm{x}}(\mathrm{T})\big)$.

**2-ой вид.** Требуется найти минимизирующую последовательность процессов $\{v_s\}$ (состоящую из $\{x_s, u_s\}$; при каждом таком значении функционал все меньше и меньше), при этом $I(v_s) \rightarrow infI(v), v_s \in M$ (стремится к своей точной нижней границе).

**6. Постановка задачи оптимизации многошагового управляемого процесса в дискретной управляемой системе**.

**1-ый вид.** Пусть имеем: $\bar{x}(t) \in X$ (n-мерный), координаты которого непрерывные и кусочно-дифференцируемые функции, вектор $\bar{u}(t) \in U$, координаты которого кусочно-непрерывные функции. Пусть эта пара образует процесс $\bar{v} = \{\bar{x}(t), \bar{u}(t)\} \in M$. При этом $t \in \{0; 1; \dots; T\}$. Пусть вектор состояния и вектор управления связаны системой ДУ: $\dot{x}(t+1) = f(\mathrm{t}, \bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{u}})$ и указано н.у. $\dot{\bar{x}}(0) = \{x1(0), \dots, xn(0)\}$. Требуется найти такой оптимальный процесс $\hat{v}$, состоящий из оптимальной траектории и оптимального управления ($\hat{v} = \{\hat{x}(t), \hat{u}(t)\}$, что $I(\hat{v}) = \min I(v), v \in M$, где $I(v)$ вида $\sum_0^{T-1} f_0(\mathrm{t}, \bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{u}}) + \mathrm{F}(\mathrm{T})$.

**2-ой вид.** Требуется найти минимизирующую последовательность процессов $\{v_s\}$ (состоящую из $\{x_s, u_s\}$; при каждом таком значении функционал все меньше и меньше), при этом $I(v_s) \rightarrow infI(v), v_s \in M$ (стремится к своей точной нижней границе).

**10. Постановка задачи оптимального распределения капитальных вложений между предприятиями**

Планируется распределение начальной суммы средств $X_0$ между $n$ предприятиями $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$, причем средства выделяются только в размерах, кратных определенному и заданному числу. Предполагается, что выделенные предприятию $\Pi_k$ в начале планового периода средства $x$ приносят доход $f_k(x)$.

Будем считать, что:

1) доход, полученный от вложения средств в предприятие, не зависит от вложения средств в другие предприятия;

2) доход, полученный от разных предприятий, выражается в одинаковых единицах;

3) общий доход равен сумме доходов, полученных от распределения средств по всем предприятиям.

Определить, какое количество надо выделить каждому предприятию, чтобы суммарный доход был максимальным.

Обозначим через $x_k$ количество средств, выделяемых предприятию $\Pi_k$. Тогда математическая модель данной задачи имеет вид:

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n) \to \max_{x_k}$$

при условиях

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = X_0,$$

где $x_k$ – натуральное, $k = 1,\ 2, \cdots,\ n$.

Вложим сформулированную задачу в схему динамического программирования. Для этого надо построить управляемую динамическую систему и показать, что целевая функция является аддитивной. Для этого введем искусственно дискретное время. Будем условно считать, что вначале выделяем средства предприятию $\Pi_1$, затем $\Pi_2, \ldots, \Pi_n$. Тогда под $k$-м шагом будем понимать выделение средств предприятию $\Pi_k$. Получим $n$ шагов.

Под состоянием $\xi_k$ будем понимать остаток денежных средств по завершению $k$-го шага или их наличие к началу $k+1$-го шага.

Под управлением на $k$-м шаге $u_k$ будем понимать количество средств $x_k$, выделяемых на $k$-м шаге (т.е. предприятию $\Pi_k$). Формулы (1) для нашей задачи имеют вид

$$\xi_k = \xi_{k-1} - u_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Под величиной дохода на $k$-м шаге, очевидно, будем понимать заданные функции дохода $f_k(u_k)$, причем

$$S = \sum_{k=1}^{n} f_k(u_k),$$

что означает аддитивность целевой функции.

Начальное и конечное состояния жестко закреплены, а именно:

$$\xi_0 = X_0, \quad \xi_n = 0.$$

Получили задачу динамического программирования, решить которую означает найти оптимальный набор управлений на каждом шаге, т.е. такой набор управлений $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*$, на котором $S = \max$.

Теперь к решению задачи можно применить общую схему решения задачи динамического программирования. Формулы (6), (7) для нашей задачи имеют вид:

$$S_n^*(\xi_{n-1}) = \max_{0 \le u_n \le \xi_{n-1}} f_n(u_n) = f_n(\xi_{n-1}), \tag{9}$$

$$S_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{0 \le u_k \le \xi_{k-1}} [f_k(u_k) + S_{k+1}^*(\xi_{k-1} - u_k)], \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{10}$$

Здесь учтено соотношение (8), из которого также вытекает ограничение на $u_k$:

$$0 \le u_k \le \xi_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Кроме того, очевидно, что $0 \le \xi_k \le X_0$.

## 9. Постановка задачи оптимального распределения ресурсов между отраслями

Имеется определенное начальное количество средств $K_0$ (необязательно в денежной форме), которые мы должны распределять в течение $m$ лет между двумя отраслями производства I и II. Средства, вложенные в каждую отрасль, приносят за год определенный доход, зависящий от объема вложений. Если мы вложим средства $X$ в отрасль I, то за год получим доход, равный $f(X)$; при этом вложенные средства частично уменьшаются (амортизируются, тратятся), так что к концу года от них остается какая-то часть:

$$\varphi(X) < X.$$

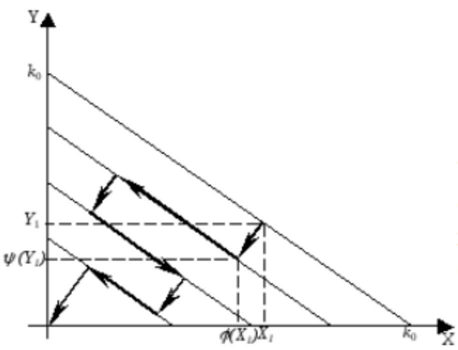
Аналогично, средства $Y$, вложенные в отрасль II, приносят за год доход $g(Y)$ и уменьшаются до

$$\psi(Y) < Y.$$

По истечении года, оставшиеся от $K_0$ средства заново распределяются между отраслями I и II. Новых средств извне не поступает, и в производство вкладываются все оставшиеся в наличии средства; доход в производство не вкладывается, а накапливается отдельно. Требуется найти такой способ управления ресурсами (какие средства, в какие годы и в какую отрасль вкладывать), при котором суммарный доход от обеих отраслей за $m$ лет будет максимальным.

Это едва ли не самая распространённая операция. Под ресурсом в общем случае понимают физическую или абстрактную величину, которую система использует для производства полезного продукта. Например: горючее, деньги, время, объём склада. Как правило – ресурс ограничен, поэтому встаёт задача так распределить ресурс между отдельными элементами системы, чтобы суммарный эффект был максимальным. Рассмотрим классическую задачу распределения ресурсов.

Имеется начальное количество ресурсов $k_0$, которые необходимо распределить между двумя отраслями. Каждая отрасль работает в течении $m$ лет. Если в первую отрасль в $i$ - ый год вкладываются средства $X_i$, то доход $f(X_i)$, если же во вторую вкладываются $Y_i$, тогда доход $g(Y_i)$. Средства тратятся, принося доход, а новых средств не поступает и полученный доход не вкладывается.




Нас интересует суммарный доход: $W = \sum_{i=1}^{m} f(X_i) + g(Y_i)$. Суммарный выигрыш равен сумме выигрышей на каждом шаге. Состоянием системы является количество средств перед $i$ - ым шагом. Так как новых средств не поступает, то ресурсы «тают».

Управление $Y_i$ может быть записано как $Y_i = k - X_i$. После $i$ - го шага в первой отрасли остаются средства $\phi(X_i)$, а во второй $\psi(Y_i) = \psi(k - X_i)$. Эти функции называются функциями траты. Мы можем составить уравнение Беллмана. В этой задаче на *i*-ом шаге одно управление $X_i$ и одно состояние $k$

$$W_i(k) = \max_{X_i}\left[ f(X_i) + g(k - X_i) + W_{i+1}\left[\phi(X_i) + \psi(k - X_i)\right]\right]$$

$$i = m:\ W_m(k) = \max_{X_m}\left[ f(X_m) + g(k - X_m)\right] \text{ и ттд.}$$

$$W_1(k), k = k_0, W_1(k_0) = W_{\max};\quad X_1(k_0) = X_1^*, Y_1^* = k_0 - X_1^*$$

Исследуя функции траты, получим количество средств после $i$ - го шага:

$$\phi(X_1^*) + \psi(Y_1^*) = k_1^*;\ \ X_2(k_1^*) = X_2^* \text{ и ттд.}$$

Задача о распределении ресурсов допускает геометрическую интерпретацию.

$$X_1 + Y_1 = k_0$$

Распределение на первом шаге – указание точки на гипотенузе. После этого средства тратятся. Распределение средств – движение внутрь треугольника. Рассмотрим частные случаи задач о распределении ресурсов.