УДК 519.63

Множество единственности потенциала простого слоя

Свидлов А. А., Дроботенко М. И., Бирюк А. Э.

1. Обозначения

Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, которая либо представляет собой многогранник, либо имеет в качестве границы ляпуновскую поверхность; $\bar{Q}$ — замыкание области Q; $Q^+ = \mathbb{R}^2 \backslash \bar{Q}$; $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}$; $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)$; ν — внешняя нормаль к границе области Q; $E(x) = \dfrac{1}{2\pi} \ln |x|$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа.

2. Введение

Настоящая работа посвящена изучению полноты системы точечных потенциалов, используемых в методе точечных потенциалов для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Метод точечных потенциалов (МТП) — это частный случай метода фундаментальных решений для краевых задач уравнения Лапласа. Опишем этот метод.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } Q, \\ u|_{\partial Q} = \varphi, \ \varphi \in L_2(\partial Q). \end{cases} \tag{2.1}$$

Приближенное решенние задачи методом точечных потенциалов ищется в виде

$$u^N = \sum_{i=1}^{N} c_i^N \alpha_i,$$

где α_i, $i = \overline{1, N}$ — первые N функций системы точечных потенциалов (определение системы точечных потенциалов приведено ниже), коэффициенты $c_i^N \in \mathbb{R}, i = \overline{1, N}$ определяются решением задачи минимизации функции:

$$F(c_1^N,\dots,c_N^N)=\|\varphi-u_N\|^2_{L_2(\partial Q)}=\left\|\varphi-\sum_{i=1}^{N}c_i^N\alpha_i\right\|^2_{L_2(\partial Q)}.$$

Определение 1. *Пусть $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное подмножество множества Q^+. Системой точечных потенциалов с базисными точками $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ называется система функций $\alpha_i(x) = E(x-z_i)$, $i=\overline{1,\infty}$.*

Для того, чтобы метод точечных потенциалов сходился, требуется чтобы базисные точки $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ системы точеных потенциалов были выбраны так, чтобы система точечных потенциалов была полна в $L_2(\partial Q)$.

Существование полных в $L_2(\partial Q)$ систем точечных потенциалов впервые было показано еще в работах Купрадзе В.Д., Алексидзе М.А. [1,2]. В работах Лежнева В.Г. [3] исследование полноты системы точечных потенциалов получило дальнейшее развитие: было показано, что если множество базисных точек системы точечных потенциалов является множеством единственности гармонических функций, то система точечных потенциалов полна в $L_2(\partial Q)$.

В данной работе приводятся новые, связанные с понятием множества единственности потенциала простого слоя, более общие признаки полноты системы точечных потенциалов. В частности, приводятся примеры множеств базисных точек, не являющихся множествами единственности гармонических функций, для которых система точечных потенциалов полна в $L_2(\partial Q)$. С помощью понятия множества единственности потенциала простого слоя сформулировано и доказано необходимое и достаточное условие полноты системы точечных потенциалов, которое сводит изучение вопроса полноты системы точечных потенциалов к изучению геометрии линий уровня потенциала простого слоя.

Приводится ряд простых достаточных признаков полноты, которые удобны при численном решении таких краевых задач, как, например, краевые задачи для уравнения Россби [4,5].

3. Потенциал простого слоя (ППС) и его свойства

В дальнейшем нам понадобятся изложенные ниже определние и свойства потенциала простого слоя.

Определение 2. *Потенциалом простого слоя называется функция вида*

$$V_\rho(x) = \int_{\partial Q} \rho(y) E(x-y)dy, \tag{3.1}$$

где $\rho \in L_2(\partial Q)$ — некоторая функция, называемая плотностью потенциала простого слоя.

Напомним известные свойства потенциала простого слоя [6].

Лемма 1. *Потенциал простого слоя $V_\rho \in C^\infty(Q)$ и $V_\rho \in C^\infty(Q^+)$. Кроме этого, V_ρ — гармоническая функция как в Q, так и в Q^+.*

Лемма 2. *Потенциал простого слоя V_ρ непрерывен в $\mathbb{R}^2$.*

Лемма 3. [6] *Справедливы следующие утверждения:*

1. Интеграл $\overline{\dfrac{\partial}{\partial \nu} V_\rho(x)} = \displaystyle\int_{\partial Q} \rho(y) \frac{\partial}{\partial \nu_x} E(x-y)dy$ существует почти для всех $x \in \partial Q$.

2. Потенциал простого слоя V_ρ почти для всех $x \in \partial Q$ имеет нормальную производную извне области Q – $\left(\dfrac{\partial V_\rho}{\partial \nu}\right)_e$ и изнутри – $\left(\dfrac{\partial V_\rho}{\partial \nu}\right)_i$.

3. Почти всюду на ∂Q выполняются равенства

$$\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial \nu}\right)_e = \frac{1}{2}\rho + \overline{\frac{\partial}{\partial \nu} V_\rho}, \tag{3.2}$$

$$\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial \nu}\right)_i = -\frac{1}{2}\rho + \overline{\frac{\partial}{\partial \nu} V_\rho}. \tag{3.3}$$

Лемма 4. *Пусть $\rho \in L_2(\partial Q)$.*

1. Если $(\rho,1)_{L_2(\partial Q)} > 0$, то $V_\rho(x)$ равномерно стремится к $+\infty$ при $x \to \infty$.

2. Если $(\rho,1)_{L_2(\partial Q)} < 0$, то $V_\rho(x)$ равномерно стремится к $-\infty$ при $x \to \infty$.

3. Если $(\rho,1)_{L_2(\partial Q)} = 0$, то $V_\rho(x)$ равномерно стремится к 0 при $x \to \infty$.

Для доказательства полноты системы точечных потенциалов в $L_2(\partial Q)$ важна следующая теорема.

Теорема 1. *Потенциал простого слоя $V_\rho \equiv 0$ в Q^+ тогда и только тогда, когда его плотность $\rho \equiv 0$.*

Доказательство. Очевидно, что если $\rho \equiv 0$, то $V_\rho \equiv 0$ в Q^+. Докажем, что из $V_\rho \equiv 0$ в Q^+ следует, что $\rho \equiv 0$.

В силу того, что $V_\rho \equiv 0$ в Q^+, имеем $\left(\dfrac{\partial V_\rho}{\partial \nu}\right)_e \equiv 0$ на ∂Q. Используя лемму 3, получим, что всюду на ∂Q справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\rho + \overline{\frac{\partial}{\partial \nu} V_\rho} = 0.$$

Это интегральное уравнение имеет только тривиальное решение в $L_2(\partial Q)$ [7, гл. IV, §37]. Доказательство завершено. □

4. Множества единственности потенциала простого слоя

В настоящем разделе рассмотрено понятие множества единственности потенциала простого слоя, которое является ключевым при рассмотрении вопроса о полноте системы точечных потенциалов в $L_2(\partial Q)$.

Определение 3. *Множество $A \subset Q^+$ будем называть множеством единственности потенциала простого слоя (множеством единственности ППС), если из равенства $V_\rho(x) = 0$ для всех $x \in A$ следует равенство $V_\rho(x) = 0$ для всех $x \in Q^+$.*

Непосредственно из определения следует, что если два потенциала простого слоя совпадают на множестве единственности ППС, то они совпадают всюду в Q^+.

Из теоремы 1 следует справедливость следующей леммы.

Лемма 5. *Потенциал простого слоя $V_\rho \equiv 0$ на множестве единственности ППС тогда и только тогда, когда его плотность $\rho \equiv 0$.*

Приведем несколько простых утверждений о множествах единственности потенциала простого слоя:

1) Множества единственности ППС существуют, так как Q^+ является множеством единственности ППС.
2) В силу непрерывности потенциала простого слоя в Q^+, любое множество, всюду плотное в некотором множества единственности ППС, в свою очередь является множеством единственности ППС.
3) Существуют счетные множества единственности ППС, например, множество точек Q^+ с рациональными координатами.
4) В силу аналитичности потенциала простого слоя в Q^+, любое открытое подмножество множества Q^+, является множеством единственности потенциала простого слоя.

Существуют множества, не являющиеся множествами единственности ППС. Например, легко видеть, что любое конечное множество не является множеством единственности ППС. Еще одним примером является *множество нулевого уровня ППС* V_ρ:

$$N(\rho) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \int_{\partial Q} \rho(y) E(x-y) dy = 0 \right\}, \ \rho \in L_2(\partial Q), \ \rho \neq 0.$$

Множество $N(\rho)$ является замкнутым в силу непрерывности V_ρ (лемма 2). Более того, справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Множество $B \subset Q^+$ является множеством единственности ППС тогда и только тогда, когда оно не содержится в множестве $N(\rho)$ ни для какой $\rho \in L_2(\partial Q)$, кроме $\rho \equiv 0$.*

Доказательство леммы тривиально.

Интересный пример множества нулевого уровня ППС дает следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть $Q = \left\{ x : |x| < q \le \frac{1}{2} \right\}$, на ∂Q задана функция $\rho \in L_2(\partial Q)$, принимающая лишь положительные значения . Множе-*

ство $N(\rho)$ является гладкой кривой, ограничивающей некоторую область Q_1, такую что $\bar{Q} \subset Q_1$.

Доказательство. Исследуем поведение ППС V_ρ на луче, исходящем из точки с координатой $(q,0)$ в направлении вектора $(1,0)$:

1) $V_\rho(q,0) < 0$, так как $\rho(y) > 0$ и $E((q,0) - y) < 0$ при $y \in \partial Q$;
2) $V_\rho(2+q,0) > 0$, так как $\rho(y) > 0$ и $E((2+q,0) - y) > 0$ при $y \in \partial Q$;
3) $\dfrac{\partial}{\partial x_1} V_\rho(x_1,0) > 0$ при $x_1 \in (q, +\infty)$, так как имеют место неравенства $\rho(y) > 0$ и $\dfrac{\partial}{\partial x_1} E((x_1,0) - y) > 0$ при $x_1 \in (q, +\infty)$ и $y \in \partial Q$;
4) $V_\rho(x_1,0) = 0$ только в одной точке $x_1 \in (q, +\infty)$.

Аналогичные рассуждения справедливы для любого луча, который можно получить из рассмотренного поворотом вокруг точки $(0,0)$.

Таким образом, доказано существовании функции

$$\varphi : [0, 2\pi] \to (q,2 + q),$$

такой что $N(\rho) = \{(\varphi(\theta)\cos(\theta), \varphi(\theta)\sin(\theta)) : \theta \in [0, 2\pi]\}$. Из замкнутости множества $N(\rho)$ следует непрерывность φ. Так как градиент $V_\rho(x)$ в точках $N(\rho)$ отличен от нуля, то, по теореме о неявной функции, кривая $N(\rho)$ является гладкой. Рассмотрим область $Q_1 = \{x : V_\rho(x) < 0\}$. Очевидно, что $Q_1 \supset \bar{Q}$, граница Q_1 есть в точности $N(\rho)$. Доказательство завершено. $\square$

5. Полнота в $L_2(\partial Q)$ системы точечных потенциалов

Понятие множества единственности ППС тесно связано с полнотой системы точечных потенциалов, что устанавливается следующей леммой.

Лемма 8. *Система точечных потенциалов $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ полна в $L_2(\partial Q)$ тогда и только тогда, когда множество ее базисных точек $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ является множеством единственности ППС.*

Доказательство. Для любой функции $\rho \in L_2(\partial Q)$ выполнены равенства

$$(\rho, \alpha_i)_{L_2(\partial Q)} = \int_{\partial Q} \rho(y) E(y - z_i) dy = V_\rho(z_i), \; i = \overline{1, \infty}. \tag{5.1}$$

Из равенств (5.1) следует, что функция $\rho \in L_2(\partial Q)$ ортогональна всем функциям системы $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда ППС V_ρ обращается в нуль на множестве $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Рассмотрим два случая: когда множество базисных точек $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ является и не является множеством единственности ППС.

1. Если множество базисных точек $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ является множеством единственности ППС, то, согласно лемме 5, только для функции $\rho \equiv 0$ ППС V_ρ равен нулю на множестве $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$. Следовательно, система $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ замкнута и полна в $L_2(\partial Q)$.

2. Если множество базисных точек $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ не является множеством единственности ППС, то найдется такая функция $\rho \in L_2(\partial Q)$, отличная от тождественного нуля, что ППС V_ρ равен нулю на множестве $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$. Следовательно, все функции системы $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ ортогональны этой функции ρ, т.е. система $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ не полна в $L_2(\partial Q)$. Доказательство окончено. □

6. Признаки и примеры множеств единственности ППС

Лемма 8 сводит вопрос о полноте системы точечных потенциалов к вопросу о геометрии множеств нулевого уровня ППС и множеств единственности ППС. Результаты настоящего параграфа получены с помощью анализа этой геометрии.

Лемма 9. *Пусть Q_1 — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, такая что $\bar{Q} \subset Q_1$. Для любой точки $z_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}_1$ множество $\partial Q_1 \cup \{z_0\}$ является множеством единственности ППС.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда по лемме 6 найдется отличная от тождественного нуля функция $\rho \in L_2(\partial Q)$, такая что $\partial Q_1 \cup \{z_0\} \subset N(\rho)$. Покажем, что ППС $V_\rho(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}_1$.

Если $(\rho,1)_{L_2(\partial Q)} = 0$, то $V_\rho(x)$ равномерно стремится к нулю при $x \to \infty$ (лемма 4). Тогда в силу принципа максимума для гармонической функции ППС $V_\rho(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}_1$.

Если $(\rho,1)_{L_2(\partial Q)} > 0$, то $V_\rho(x)$ равномерно стремится к $+\infty$ при $x \to \infty$ (лемма 4). Тогда $V_\rho(x) \geq 0$ при $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}_1$. Гармоническая функция $V_\rho(x)$ имеет экстремум в внутренней точке z_0 области $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}_1$, так как $V_\rho(z_0) = 0$. Следовательно, $V_\rho(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}_1$.

Если $(\rho,1)_{L_2(\partial Q)} < 0$, то заменой ρ на $-\rho$ получим уже рассмотренный случай.

Так как $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}_1$ — множество единственности ППС, то выполняется равенство $\rho \equiv 0$. Противоречие получено. Доказательство завершено. $\square$

Лемма 10. *Пусть Q_1 — область в $\mathbb{R}^2$, такая что $\bar{Q} \subset Q_1$, $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}_1$ — непустая область и ∂Q_1 — неограниченное множество. Множество ∂Q_1 является множеством единственности ППС.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует отличная от тождественного нуля функция $\rho \in L_2(\partial Q)$, такая что $\partial Q_1 \subset N(\rho)$. Заметим, что $V_\rho(x) \to 0$ при $x \to \infty$ по ∂Q_1, следовательно, по лемме 4 $\rho \perp 1$ в $L_2(\partial Q)$, а тогда $V_\rho(x)$ равномерно стремится к нулю при $x \to \infty$ уже без условия принадлежности x поверхности ∂Q_1. Из принципа максимума для гармонической функции имеем, что $V_\rho(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}_1$. В силу того, что $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}_1$ является множеством единственности ППС, выполняется равенство $\rho \equiv 0$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Приведем пример множества единственности ППС, которое не является множеством единственности гармонических функций.

Лемма 11. *Пусть L — прямая не пересекающая ∂Q. Тогда любое счетное множество точек $\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \subset L$, имеющее предельную точку z_0 ($|z_0| < +\infty$), является множеством единственности ППС.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует отличная от тождественного нуля функция $\rho \in L_2(\partial Q)$, такая что $\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \subset N(\rho)$. Легко показать, что производные всех порядков по прямой L потенциала простого слоя V_ρ в точке z_0 обращаются в ноль. В силу аналитичности V_ρ в Q^+ для любой точки $x \in L$ выполняется равенство $V_\rho(x) = 0$. Из предыдущей леммы следует, что $\rho \equiv 0$. Получено противоречие. Доказательство завершено. □

Замечание. Вместо прямой можно было рассматривать любую аналитическую кривую разбивающую $\mathbb{R}^2$ на две открытые бесконечные области, одна из которых содержит $\bar{Q}$.

Следствие из леммы 11. *Граница любого выпуклого многогранника содержащего область Q является множеством единственности ППС.*

Литература

1. *Купрадзе В. Д.* О приближенном решении задач математической физики // УМН. 1967. т. XXII. № 2(134). С. 59–107.
2. *Купрадзе В. Д., Алексидзе М. А.* Метод функциональных уравнений для приближенного решения некоторых граничных задач. // ЖВМиМФ. 1964. № 4. С. 683–715.
3. *Лежнев А. В., Лежнёв В. Г.* Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики.Краснодар: Издательство КубГУ, 2009. 111 с.
4. *Свидлов А. А.* Решение линейного уравнения Россби в ограниченной области // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2013. т. 155.№ 3. С. 142-149.
5. *Свидлов А. А., Бирюк А. Э., Дроботенко М. И.* Негладкое решение уравнения Россби // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2013. № 2. С. 89-94.

6. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Издательство иностранной литературы, 1957. 451 с.
7. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 1959. 233 с.

References

1. Kupradze V. D. *O priblizhennom reshenii zadach matematicheskoi fiziki* [About approximate solution of mathematical physics problems]. *UMN* [Russian Mathematical Surveys], 1967, vol. XXII, no 2(134), pp. 59–107. (In Russian)
2. Kupradze V. D., Aleksidze M. A. *Metod funkzionalnih uravnenii dlja priblizhennogo reshenija nekotorih granichnih zadach*[Functiol equations method for approximate solition boundary value problems]. *ZhVMiMF* [Computational mathematics and mathematical physics], 1964, no 4, pp. 683–715. (In Russian)
3. Lezhnev A. V., Lezhnev V. G. *Metod bazisnih potenzialov v zadachah matematicheskoi fiziki i gidrodinamiki*[Basis potentials method for mathematical physics and hydrodynamics problems] Krasnodar: KubSU publishing, 2009. 111 p.
4. Svidlov A. A. *Reshenie lineinogo uravnenija Rossbi v ogranichennoi oblasti*[Solving the Linear Rossby Equation ia a finite domain]. *Uchenie zapiski Kazanskogo universiteta: Serija: Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific notes Kazan University.Series: Physics and mathematics], 2013, vol. 155, № 3, pp. 142-149.(In Russian)
5. Svidlov A. A., Biryuk A. E., Drobotenko M. I.*Negladkoe reshenie uravnenija Rossbi*[Unsmooth solution of Rossby equation]. *Ekologicheskii vestnik nauchnih zentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of reseach centers of the Black Sea economic cooperation (BSEC)], 2013, № 2, pp. 89-94. (In Russian)

6. Miranda K. *Uravnenija s chastnimi proizvodnimi implicit ellipticheskogo tipa*[Partial differential equations of elliptic type] Moscow, Inostrannaja Literatura Publ., 1957, 451 p.
7. Mihlin S. G. *Lekzii po lineinim integralnim uravnenijam*[Lections on linear integral equations] Moscow, Fizmatlit Publ., 1959. 233 p.

Дата отсылки статьи 1 августа 2014 г.

УДК 519.63

Множество единственности потенциала простого слоя

Свидлов А. А.[*], Дроботенко М. И.[*], Бирюк А. Э.[*]

[*] Кубанский государственный университет, г. Краснодар, Россия
e-mail: svidlov@mail.ru

Краткий реферат. Работа посвящена рассмотрению вопроса полноты системы точечных (базисных) потенциалов. Введено понятие множества единственности потенциала простого слоя и доказано, что система точечных потенциалов полна тогда и только тогда, когда множество базисных точек (сингулярностей) потенциалов является множеством единственности потенциала простого слоя. Изучены свойства множеств единственности потенциала простого слоя. Установлено, что понятие множества единственности потенциала простого слоя расширяет понятие множества единственности гармонических функций. Приведены примеры множеств являющихся множествами единственности потенциала простого слоя и таковыми не являющимися. Приведен пример множества базисных точек не являющегося множеством единственности гармонических функций, для которого система точечных потенциалов полна, т.е. являющегося множеством единственности потенциала простого слоя.

Ключевые слова: метод фундаментальных решений, метод точечных потенциалов, метод базисных потенциалов

Библиогр. 7 назв. — 11 стр.

Uniqueness set for the single-layer potential

Svidlov A. A.[*], Drobotenko M. I.[*], Biryuk A. E.[*]

[*] Kuban State University, Krasnodar, Russia
e-mail: svidlov@mail.ru

Abstract. The work is devoted to the question of completeness of the system of point potentials. We introduce the concept of a uniqueness set for the single-

layer potential and prove that the system of point potential is complete if and only if the set of basis points (singularities) of potentials is a uniqueness set for the single-layer potential. We study properties of the introduced uniqueness sets (for the single layer potential) and give examples of sets that are uniqueness sets and those are not. We show that the new concept extends the concept of uniqueness set of harmonic functions. We give an example of a set of points, which is not a set of uniqueness of harmonic functions, however the corresponding system of point potential is complete. This set is a uniqueness set for the single-layer potential.
Keywords: fundamental solutions method, point potentials method, basis potentials method

Перевод расширенной аннотации. Работа посвящена рассмотрению вопроса полноты системы точечных (базисных) потенциалов. Введено понятие множества единственности потенциала простого слоя и доказано, что система точечных потенциалов полна тогда и только тогда, когда множество базисных точек (сингулярностей) потенциалов является множеством единственности потенциала простого слоя. Изучены свойства множеств единственности потенциала простого слоя. Установлено, что понятие множества единственности потенциала простого слоя расширяет понятие множества единственности гармонических функций. Приведены примеры множеств являющихся множествами единственности потенциала простого слоя и таковыми не являющимися. Приведен пример множества базисных точек не являющегося множеством единственности гармонических функций, для которого система точечных потенциалов полна, т.е. являющегося множеством единственности потенциала простого слоя.

Информация об авторах

Свидлов Александр Анатольевич, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры теории функций Кубанского государственного университета; e-mail: svidlov@mail.ru; 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149; тел.8(903)4510350. Можно вести переписку.

Дроботенко Михаил Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математических и компьютерных методов Кубанского государственного университета; e-mail: mdrobotenko@mail.ru; 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149; тел. 8(903)4510350.

Бирюк Андрей Эдуардович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теории функций Кубанского государственного университета; e-mail: abiryuk@gmail.ru; 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149; тел.8(903)4510350.