

ДИНАМИКА

Динамика изучает движение точки (или системы точек) в зависимости от причин вызывающих это движение или изменяющих его. Такими причинами являются силы. Подразделяется на динамику материальной точки и динамику системы материальных точек.

Материальной точкой называется материальный объект, размерами которого в данной задаче можно пренебречь, считать геометрической точкой с определённой массой. Например, при изучении траектории движения искусственного спутника вокруг Земли размером спутника можно пренебречь и рассматривать его как материальную точку. Если же нас интересует еще и ориентация спутника (например, его антенна должна быть всегда направлена в сторону Земли) то необходимо будет учесть еще размеры и форму и тогда считать спутник материальной точкой уже нельзя.

Глава 12. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

12.1. Аксиомы динамики. Изучение динамики точки базируется на законах Ньютона, опубликованные им в 1686 г. В этих законах содержатся утверждения полученные обобщением многовековых наблюдений над движением и взаимодействием материальных тел. В современном изложении теоретической механики законы Ньютона кладутся в основу, являются аксиомами.

Аксиома 1 (1-ый закон Ньютона, аксиома инерции). Материальная точка, изолированная от действия других точек, или же находящаяся под действием уравновешенной системы сил, сохраняет состояние прямолинейного равномерного движения, в частности, покоя.

Изучая движение данной точки относительно различных систем отсчёта, движущихся ускоренно друг относительно друга (рис. 12.1), легко прийти к заключению, что данная аксиома не может выполняться в любых системах отсчёта.

Системы отсчёта, в которых справедлива данная аксиома, называются инерциальными. Таким образом, первый закон Ньютона постулирует возможность существования тел и связанных с ними систем отсчёта, движущихся без ускорения. Любую из таких систем отсчёта можно условно принять за неподвижную.

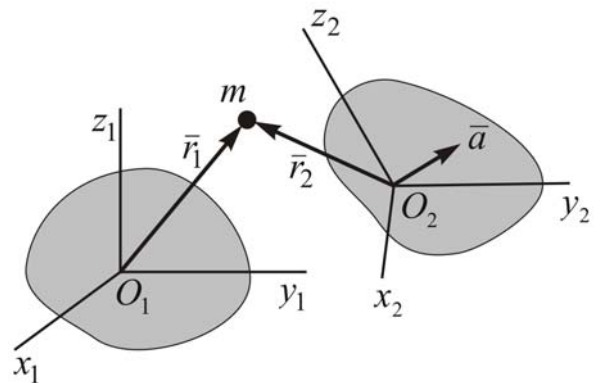


Рис. 12.1

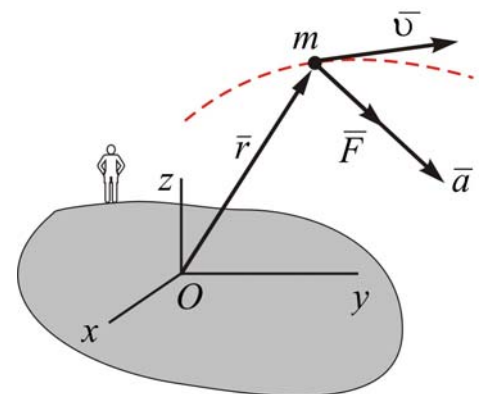


Рис. 12.2

Аксиома 2 (2-ой закон Ньютона). Ускорение точки пропорционально действующей силе и совпадает с ней по направлению (рис. 12.2):

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F}.$$

Здесь m – масса точки. Масса точки характеризует её инерционные свойства.

Так как ускорение равно второй производной по времени от радиус-вектора \bar{r} точки, то последнее уравнение можно записать в виде

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F},$$

откуда видно, что с позиции математики второй закон Ньютона представляет дифференциальное уравнение. Уместно привести высказывание И.Ньютона по этому поводу, цитируемое здесь в вольном переводе: «Законы природы выражаются дифференциальными уравнениями».

Аксиома 3 (3-ий закон Ньютона). Две точки взаимодействуют с силами направленными вдоль прямой соединяющей точки, равными по модулю и противоположными по направлению (рис. 12.3).

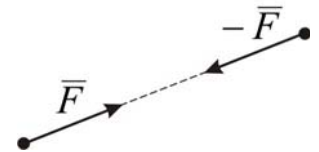


Рис. 12.3.

Аксиома 4 (аксиома независимости действия сил). Пусть на точку массой m по отдельности действуют силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N$ заставляя точку совершать движения согласно уравнениям $m\bar{a}_1 = \bar{F}_1, m\bar{a}_2 = \bar{F}_2, \dots, m\bar{a}_N = \bar{F}_N$ соответственно. Пусть, теперь, эта же точка движется под действием суммы сил $\sum_{k=1}^N \bar{F}_k$ с ускорением \bar{a} , вычисляемым из уравнения

$m\bar{a} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k$. Согласно данной аксиоме $\bar{a} = \sum_{k=1}^N \bar{a}_k$. Т. е. ускорение, сообщаемое точке несколькими силами равно сумме ускорений от действия каждой силы по отдельности.

12.2. Задачи динамики точки. Итак, движение материальной точки массы m под действием сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N$ подчиняется уравнению

$$m \cdot \bar{a} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k. \quad (12.1)$$

Какие задачи могут ставиться в динамике точки? Их две. Первая задача называется *прямой*. В ней задаются масса точки m и кинематические уравнения движения $x(t), y(t), z(t)$. Необходимо вычислить силу, действующую на точку (или одну из сил при заданных остальных).

Решение такой задачи проводится в следующей последовательности. Вычисляются проекции ускорения точки $a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y}, a_z = \ddot{z}$ и тогда, согласно второму закону Ньютона, $F_x = m \cdot a_x, F_y = m \cdot a_y, F_z = m \cdot a_z$. При необходимости можно в дальнейшем вычислить модуль силы $F = (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{0,5}$ и направляющие косинусы $\cos(\overline{Ox} \wedge \bar{F}) = F_x / F, \cos(\overline{Oy} \wedge \bar{F}) = F_y / F, \cos(\overline{Oz} \wedge \bar{F}) = F_z / F$. Таким образом,

решение прямой задачи сводится к дифференцированию известных функций и принципиальных трудностей не вызывает.

Вторая задача динамики точки называется *обратной*, еще она называется основной, потому что именно эта задача встречается в инженерной практике и её решение представляет значительные математические трудности. В этой задаче задаются масса точки m , проекции силы $F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$, $F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$, $F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$, начальные значения координат точки x_0 , y_0 , z_0 , начальные значения скорости точки \dot{x}_0 , \dot{y}_0 , \dot{z}_0 и начальное значение времени t_0 (обычно принимается $t_0 = 0$). Необходимо найти кинематические уравнения движения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Для решения этой задачи необходимо составить дифференциальные уравнения движения точки согласно второму закону Ньютона в проекциях на оси координат

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m \cdot \ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m \cdot \ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{cases} \quad (12.2)$$

и проинтегрировать их. В результате интегрирования найдём

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned} \quad (12.3)$$

Постоянные интегрирования C_1, \dots, C_6 вычисляются по начальным условиям. Для этого необходимо от функций (12.3) вычислить производные по времени

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{aligned} \quad (12.4)$$

и записать, далее, соотношения (12.3) и (12.4) в начальном положении точки, заменяя переменные $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ и t их начальными значениями $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t_0$. Из полученных уравнений постоянные интегрирования выразятся через начальные условия.

Пример 1 (на обратную задачу). В плоскости Oxy движется точка M массы $m = 1$ кг под действием силы притяжения направленной к неподвижному центру O (рис. 12.4). Модуль силы пропорционален расстоянию от точки до неподвижного центра: $F = c \cdot |OM|$, $c = 400$ Н/м. В начальный момент времени $t_0 = 0$ точка имела координаты $x_0 = 0,5$ м, $y_0 = 0$, проекции вектора скорости $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 2$ м/с.

Найти уравнения движения точки $x(t)$, $y(t)$ и траекторию.

Решение. Обратные задачи динамики точки решаются в следующей последовательности.

1) Нужно показать точку в произвольном положении и охарактеризовать (описать) это положение координатами и скоростью. Т. е. считаем, что в произвольном положении координаты точки имеют некоторые значения x, y , и проекции скорости равны соответственно \dot{x}, \dot{y} .

2) Показать все действующие на точку силы. В данном примере действует лишь одна сила \vec{F} направленная к началу координат O .

3) Следующим шагом нужно записать дифференциальное уравнение движения точки в векторном виде, а затем спроецировать на оси координат. В векторной форме в данной задаче дифференциальное уравнение запишется как $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$. Из векторного выражения силы $\vec{F} = -c \cdot \vec{r}$ следует $F_x = -c \cdot x$, $F_y = -c \cdot y$. Тогда в проекциях на декартовы оси координат дифференциальные уравнения запишутся в виде совокупности двух уравнений

$$m\ddot{x} = -cx,$$

$$m\ddot{y} = -cy.$$

4) Далее нужно проинтегрировать полученную систему дифференциальных уравнений. В данном примере каждое из уравнений независимо от другого и, кроме того, имеют одинаковый вид. Следовательно, общий вид решений этих уравнений одинаков. Различными будут лишь значения произвольных постоянных интегрирования.

Дифференциальное уравнение $m\ddot{x} = -cx$ есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Запишем его в каноническом виде $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где $\omega = \sqrt{c/m} = 20 \text{ с}^{-1}$. Из теории дифференциальных уравнений известно его решение: $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$. Для координаты y решение аналогично: $y(t) = C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t$. Вычислим производные по времени от координат: $\dot{x} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$, $\dot{y} = -C_3 \omega \sin \omega t + C_4 \omega \cos \omega t$. Для вычисления произвольных постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 перепишем уравнения для x, y, \dot{x}, \dot{y} в начальный момент времени $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} 0,5 = C_1 \\ 0 = C_3 \\ 0 = C_2 \omega \\ 2 = C_4 \omega \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 0,5$, $C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = 0,1$. Тогда уравнения движения точки $x(t) = 0,5 \cos 20t$ м, $y(t) = 0,1 \sin 20t$ м.

Для определения траектории движения точки необходимо из двух последних уравнений исключить время. В данном случае это проще сделать так. Первое уравнение преобразуем к виду $\frac{x}{0,5} = \cos 20t$, второе – к виду $\frac{y}{0,1} = \sin 20t$. Теперь эти уравнения возведем в квадрат и почленно

сложим. В итоге приходим к следующему уравнению траектории: $\frac{x^2}{0,5^2} + \frac{y^2}{0,1^2} = 1$.

$$\text{Ответ: } x(t) = 0,5 \cos 20t \text{ м, } y(t) = 0,1 \sin 20t \text{ м, } \frac{x^2}{0,5^2} + \frac{y^2}{0,1^2} = 1.$$

Не всегда проецирование векторного уравнения $m\ddot{\vec{a}} = \sum \vec{F}$ на декартовы оси координат является самым удачным решением. В частности, если траектория движения точки известна, например окружность, то уравнение (1) рациональнее записывать в проекциях на оси естественной системы координат (касательную τ , нормаль n и бинормаль b):

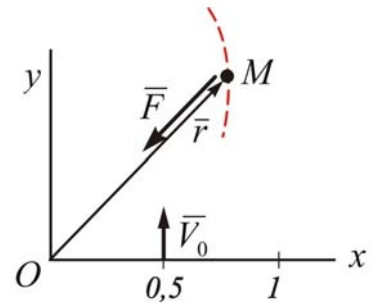


Рис. 12.4

$$\begin{cases} ma_\tau = \sum_{k=1}^N F_{k\tau}, \\ ma_n = \sum_{k=1}^N F_{kn}, \\ ma_b = \sum_{k=1}^N F_{kb}. \end{cases} \quad (12.5)$$

Здесь $a_\tau = \dot{v}$ – касательное ускорение, $a_n = v^2/\rho$ – нормальное ускорение, $a_b = 0$.

Пример 2. Материальная точка M массы m скользит по гладкой неподвижной цилиндрической поверхности радиуса R (рис. 12.5). В начальном момент времени точка находилась в положении M_0 и имела скорость равную нулю.

Найти силу давления точки на поверхность в её крайне нижнем положении.

Решение. Покажем точку в произвольном положении и охарактеризуем это положение углом φ (рис. 1.5).

Покажем все силы, действующие на точку в этом произвольном положении: сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция опорной поверхности \vec{N} .

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$.

Так как в данной задаче траектория движения точки известна, то проецировать векторное уравнение будем на касательную и нормаль к траектории:

$$\begin{cases} ma_\tau = mg \cos \varphi, \\ ma_n = -mg \sin \varphi + N. \end{cases}$$

Далее необходимо касательное и нормальное ускорения выразить через производные от координаты φ , определяющей положение точки: $a_\tau = \dot{v} = \ddot{\varphi} R$, $a_n = v^2/\rho = \dot{\varphi}^2 R$. Тогда дифференциальные уравнения можно будет переписать в виде

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{R} \cos \varphi, \quad (12.6)$$

$$m\dot{\varphi}^2 R = -mg \sin \varphi + N. \quad (12.7)$$

Обсудим дальнейшую последовательность решения. В задаче необходимо найти силу давления точки (обозначим её P). Но сила давления по модулю равна нормальной реакции N , которую, в свою очередь, сможем вычислить из уравнения (12.7), если будет известна зависимость $\dot{\varphi}(\varphi)$. На поиске этой зависимости и сосредоточим внимание.

Выполним в левой части уравнения (12.6) следующее преобразование: $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \frac{d\varphi}{d\varphi} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$. После этого уравнение (12.6) запишем в виде $\dot{\varphi} d\dot{\varphi} = \frac{g}{R} \cos \varphi d\varphi$. Получе-

но уравнение с разделёнными переменными $\dot{\varphi}$ и φ . Интегрируем его: $\int \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = \int \frac{g}{R} \cos \varphi d\varphi + C_1 \Rightarrow$

$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{R} \sin \varphi + C_1$. Записав последнее соотношение в начальном положении, $0 = 0 + C_1$, находим

значение произвольной постоянной интегрирования $C_1 = 0$. Тогда $\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{R} \sin \varphi$.

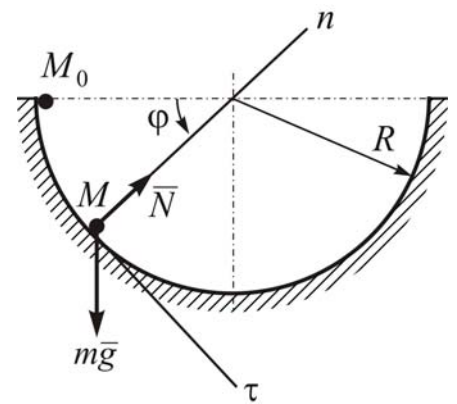


Рис 12.5.

Подставив найденную зависимость $\dot{\varphi}(\varphi)$ в уравнение (12.7), находим нормальную реакцию $N = 3mg \sin \varphi$, $N|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 3mg$.

Ответ: сила давления точки в крайне нижнем положении $P = 3mg$ и не зависит от радиуса R .

12.3. Динамика относительного движения точки. Теперь нам известно, что для того, чтобы изучить движение материальной точки относительно инерциальной системы отсчёта $Oxyz$ (рис. 12.6), условно считающейся неподвижной, необходимо составить дифференциальное уравнение движения точки в форме второго закона Ньютона $m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ и проинтегрировать его. Но, часто встречаются задачи, в которых необходимо изучить движение точки относительно неинерциальной системы отсчёта $O_1x_1y_1z_1$, движущейся относительно неподвижной системы отсчёта $Oxyz$ известным образом. Для этого нужно вывести дифференциальное уравнение, в котором искомой функцией был бы радиус-вектор $\vec{\rho}$ точки относительно подвижной системы отсчёта $O_1x_1y_1z_1$. Для вывода такого уравнения воспользуемся кинематической теоремой Кориолиса, согласно которой абсолютное ускорение точки равно векторной сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k$. Тогда, второй закон Ньютона можно переписать в виде

$$m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k) = \vec{F},$$

или,

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + (-m \cdot \vec{a}_e) + (-m \cdot \vec{a}_k).$$

Обозначим

$$\vec{\Phi}_e = -m \cdot \vec{a}_e, \quad \vec{\Phi}_k = -m \cdot \vec{a}_k. \quad (12.8)$$

$\vec{\Phi}_e$ и $\vec{\Phi}_k$ называются соответственно переносной и кориолисовой силами инерции и формулы (12.8) служат их определением. Тогда дифференциальное уравнение движения точки относительно подвижной системы отсчёта запишется в виде

$$m \frac{\tilde{d}^2 \vec{\rho}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k. \quad (12.9)$$

Полученное уравнение называется **динамической теоремой Кориолиса**.

Напомним, что волна над оператором производной означает локальную производную, учитывающую изменение вектора лишь относительно подвижных осей.

Таким образом, уравнение (12.9) есть дифференциальное уравнение, описывающее движение материальной точки относительно подвижной системы отсчёта. Читается: *для относительного движения масса точки, умноженная на вектор ускорения равна действующей на точку силе плюс переносная и кориолисова силы инерции.*

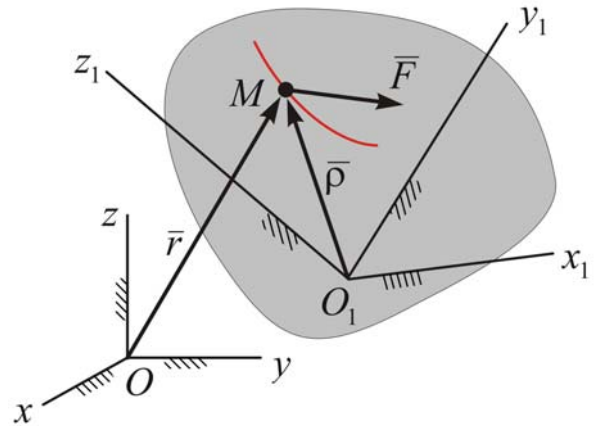


Рис. 12.6.

Таким образом, переносной и кориолисовой силами инерции вводится в дифференциальное уравнение поправка на неинерциальность системы отсчета.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Если подвижные оси перемещаются поступательно, равномерно и прямолинейно, то $\overline{\Phi}_e = \overline{\Phi}_k = 0$ и дифференциальное уравнение относительного движения (12.9) будет иметь такой же вид, как и дифференциальное уравнение движения по отношению к неподвижным осям. Следовательно, такая система отсчета также будет инерциальной.

Из полученного результата следует, что никаким механическим экспериментом нельзя обнаружить, находится ли данная система отсчета в покое или совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение. В этом состоит открытый еще Галилеем **принцип относительности классической механики**.

2) Если точка по отношению к подвижным осям находится в покое, то для нее $\overline{\rho} = \text{const}$, $\overline{v}_r = d\overline{\rho}/dt = 0$, а, следовательно, и $\overline{\Phi}_k = -m\overline{a}_k = -m2(\overline{\omega}_e \times \overline{v}_r) = 0$. Тогда равенство (12.7) принимает вид

$$\sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}_e = 0. \quad (12.10)$$

Уравнение (12.10) представляет собой уравнение относительного равновесия (покоя) точки. Из него следует, что уравнения относительного равновесия составляются также, как и уравнения равновесия в неподвижных осях, если при этом к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами добавить переносную силу инерции.

12.4. Равновесие и движение материальной точки относительно Земли. Система отсчета связанная с Землей, вследствие её движения, не является инерциальной. Необходимо оценить «степень неинерциальности» такой системы отсчета. Необходимо рассмотреть, как сказывается движение Земли на равновесии точки и её движении вблизи земной поверхности.

Земля обращается вокруг Солнца по близкой к круговой орбите радиусом около 150 млн км совершая один оборот за 365 суток и вращается вокруг собственной оси с практически постоянной угловой скоростью, совершая один оборот в сутки.

Из кинематики известно, что, в общем случае, переносное ускорение

$$\overline{a}_e = \overline{a}_O + \overline{a}_{ep} + \overline{a}_{oc}.$$

Ускорение \overline{a}_O центра Земли от её движения по орбите вокруг Солнца составляет $5,9 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$. Влияние сил инерции от такого ускорения может оказаться заметным лишь для весьма долговременных движений точки и в технических задачах этим влиянием пренебрегают, не внося при этом заметных погрешностей.

Вращательное ускорение $\overline{a}_{ep} = \overline{\varepsilon} \times \overline{\rho} = \dot{\overline{\omega}} \times \overline{\rho} = 0$, так как угловая скорость $\overline{\omega}$ суточного вращения Земли практически постоянна. Тогда осестремительное ускорение $\overline{a}_{oc} = \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{\rho})$ есть не что иное как нормальное ускорение \overline{a}_e^n точки на поверхности Земли. Его модуль $a_e^n = \omega^2 R_3 \cos \varphi$, где φ – широта местности. Учитывая, что угловая скорость суточного вращения Земли $\omega = 2\pi/(24 \cdot 60 \cdot 60) = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, а

радиус Земли $R_3 = 6370$ км, находим максимальное значение переносного нормального ускорения точки (находящейся на экваторе) $(a_e^n)_{\max} = \omega^2 R_3 = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$.

С суточным вращением Земли связано понятие о силе тяжести.

Рассмотрим равновесие точки на земной поверхности (рис. 12.7). На точку действуют силы: сила гравитационного притяжения \vec{G} , направленная к центру Земли; реакция \vec{N} поверхности Земли; переносная сила инерции $\vec{\Phi}_e$, направленная от оси суточного вращения. Равнодействующая сил \vec{G} и $\vec{\Phi}_e$ называется силой тяжести $m\vec{g}$. В повседневной практике человек учитывает именно эту силу. Введение понятия силы тяжести избавляет от необходимости всякий раз учитывать переносную силу инерции и дополнительных поправок на вращение Земли вводить не нужно. Уравнения равновесия точки составляются как в инерциальной системе отсчёта.

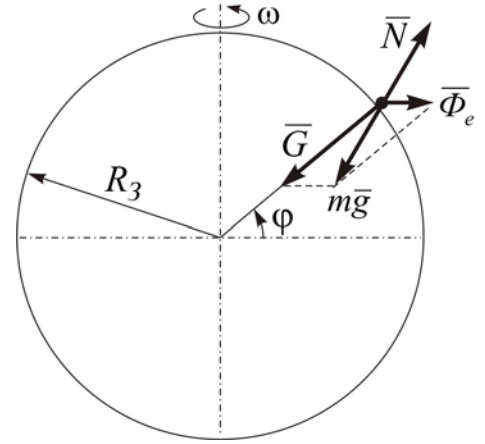


Рис. 12.7

Направление силы $m\vec{g}$ определяет направление вертикали в данном пункте земной поверхности (таким будет направление неподвижной относительно Земли нити, на которой подвешен какой-нибудь груз; натяжение нити при этом равно mg), а плоскость, перпендикулярная силе $m\vec{g}$, является горизонтальной плоскостью. Так как $(\Phi_e)_{\max} = m\omega^2 R_3$, где ω^2 очень мало, то сила $m\vec{g}$ и численно, и по направлению мало отличается от силы гравитации \vec{G} .

Если же рассматривается не равновесие, а движение точки вблизи земной поверхности, то необходимо учесть ещё действие кориолисовой силы инерции $\vec{\Phi}_k = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r)$. Модуль кориолисова ускорения зависит не только от модуля относительной скорости точки, но и от взаимных направлений вектора $\vec{\omega}$ суточного вращения Земли и вектора \vec{v}_r относительной скорости точки. При относительной скорости $72 \text{ км/час} = 20 \text{ м/с}$ и $\vec{v}_r \perp \vec{\omega}$ $a_k = 2,92 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$, т.е. незначительно. Поэтому в большинстве инженерных расчетов при изучении движения тел систему отсчета, связанную с Землей, можно действительно считать инерциальной (неподвижной), пренебрегая при этом кориолисовой силой инерции.

Проявление кориолисовой силы инерции будет тем заметнее, чем больше относительная скорость и масса тела (снаряды, баллистические ракеты) или (и) время движения (течения рек, воздушные и морские течения).

Рассмотрим, в чем качественно сказывается влияние вращения Земли на движение тел по земной поверхности. При движении точки по меридиану в северном полушарии с севера на юг кориолисово ускорение \vec{a}_k направлено на восток, а $\vec{\Phi}_k$ - на запад. При движении с юга на север $\vec{\Phi}_k$ будет направлена на восток. В обоих случаях, как видим, точка вследствие вращения Земли отклоняется вправо от направления ее движения.

Если точка движется по параллели на восток, то ускорение \bar{a}_k будет направлено вдоль радиуса параллели, а сила $\bar{\Phi}_k$ - в противоположную сторону. Вертикальная составляющая этой силы вызовет незначительное изменение веса тела, а горизонтальная составляющая, направленная к югу, вызовет отклонение точки вправо от направления ее движения. Аналогичный результат получится при движении по параллели на запад.

Отсюда заключаем, что в северном полушарии тело, движущееся вдоль земной поверхности по любому направлению, будет вследствие вращения Земли отклоняться вправо от направления движения. В южном полушарии отклонение будет происходить влево.

Этим обстоятельством объясняется то, что реки, текущие в северном полушарии, подмывают правый берег (закон Бэра). В этом же причина отклонений ветров постоянного направления (пасаты) и морских течений, а также воздушных масс в циклоне и антициклоне, где вместо движения к центру циклона (область повышенного давления) возникает циркуляционное движение воздуха вокруг центра циклона (антициклона).

Глава 13. ГЕОМЕТРИЯ МАСС

Для обоснования необходимости данной главы рассмотрим следующий пример, решение которого на качественном уровне всем нам хорошо известно исходя из повседневного опыта.

К горизонтальному валу, перпендикулярно ему, прикреплены два стержня одинаковой длины, на концах которых размещены два одинаковых груза массой m (рис. 13.1). Данную механическую систему необходимо раскрутить из состояния покоя до некоторой угловой скорости ω_1 . Массы вала и соединительных стержней пренебрежимо малы по сравнению с массами грузов.

Спрашивается, в каком случае достичь цели «легче», когда длина l соединительных стержней мала (рис. 13.1а) или же напротив, когда эта длина значительна (рис. 13.1б)?

Думается, что подавляющее большинство читателей дадут правильный ответ, что в случае а) «легче и быстрее» можно достичь поставленной задачи, система «менее инерционна», чем в случае б).

Точный количественный расчёт показывает, что при увеличении длины l в n раз, затраченная работа увеличится в n^2 раз.

Даже на этом примере видно, что в динамике механической системы порой имеют значение не только массы материальных точек, но и их взаимное расположение, или же их расположение относительно какого – либо центра, или какой – либо оси.

В главе геометрия масс вводятся и изучаются физические величины, характеризующие распределение материальных точек в пространстве, без которых невозможно дальнейшее изучение динамики.

13.1. Центр масс механической системы. Понятие центра масс механической системы вводилось в статике. Здесь лишь ещё раз воспроизведём результаты.

Пусть механическая система состоит из N материальных точек, массы которых равны m_k , ($k=1, 2, \dots, N$), а их положение определено радиус-векторами $\vec{r}_k = \vec{i}x_k + \vec{j}y_k + \vec{k}z_k$.

Центром масс механической системы называется геометрическая точка, положение которой определяется радиус-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k}{M}, \quad (13.1)$$

где $M = \sum_{k=1}^N m_k$ – *масса всей системы*.

Проецируя выражение (13.1) на оси декартовой системы координат, получим формулы для вычисления координат центра масс

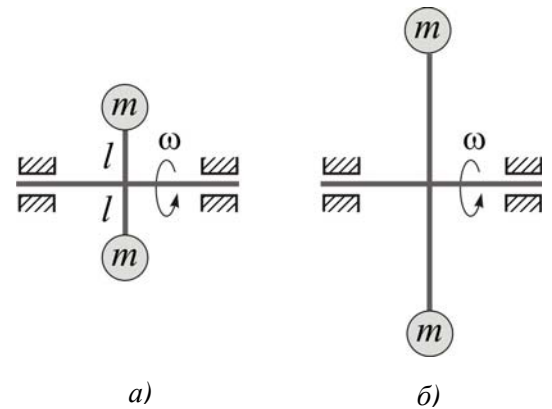


Рис. 13.1

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k y_k}{M}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k z_k}{M}.$$

Если начало системы координат совпадает с центром масс механической системы, то $\bar{r}_C = 0$ и из (13.1) следует векторное равенство $\sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_k = 0$, которое эквивалентно трём скалярным $\sum_{k=1}^N m_k x_k = 0$, $\sum_{k=1}^N m_k y_k = 0$, $\sum_{k=1}^N m_k z_k = 0$.

Для тел с непрерывным распределением масс вместо формулы (13.1) используют интегральную формулу $\bar{r}_C = \frac{\iiint (M) \bar{r} dm}{M}$.

13.2. Осевые и полярный моменты инерции. Моментом инерции системы материальных точек относительно оси называется сумма произведений масс этих точек на квадрат их расстояний до данной оси

(рис. 13.2): $J_l = \sum_{k=1}^N m_k h_k^2$. Для сплошных тел

$$J_l = \iiint_{(M)} h^2 dm.$$

Величина $\rho_l = \sqrt{\frac{J_l}{M}}$ называется радиусом инерции тела относительно оси Ol . Если радиус инерции и масса системы заданы, то осевой момент инерции $J_l = M\rho_l^2$.

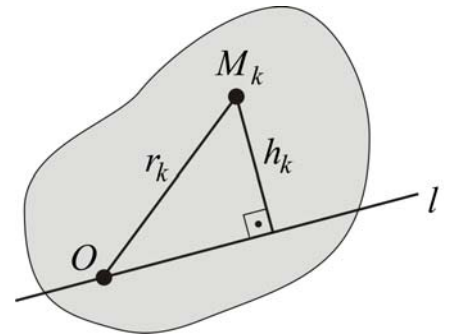


Рис. 13.2

Относительно декартовых осей моменты инерции вычисляются по формулам

$$J_x = \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad J_y = \sum_{k=1}^N m_k (z_k^2 + x_k^2), \quad J_z = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2). \quad (13.2)$$

Моментом инерции относительно полюса O (полярным моментом инерции) называется сумма произведений масс этих точек на квадрат их расстояний до данного полюса: $J_O = \sum_{k=1}^N m_k r_k^2$.

Через декартовы координаты полярный момент инерции будет вычисляться по формуле

$$J_O = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \quad (13.3)$$

Размерность осевых и полярного моментов инерции в СИ – кгм^2 .

Вычислив сумму $J_x + J_y + J_z = \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2) + \sum_{k=1}^N m_k (z_k^2 + x_k^2) + \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2) =$
 $= 2 \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)$ и сравнив результат с определением полярного момента инерции (13.3), приходим к соотношению

$$J_x + J_y + J_z = 2J_O. \quad (13.4)$$

13.3. Зависимость моментов инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса-Штейнера). Пусть для задания положения механической системы введена система координат $Oxyz$. Введём ещё одну систему координат $Cx'y'z'$ с началом в центре масс и осями параллельными соответствующим осям предыдущей системы координат (рис. 13.3). Тогда координаты произвольной точки M_k в указанных системах отсчёта будут связаны соотношениями $x_k = x_C + x'_k$, $y_k = y_C + y'_k$, $z_k = z_C + z'_k$, где x_C , y_C , z_C – координаты центра масс C в системе отсчёта $Oxyz$.

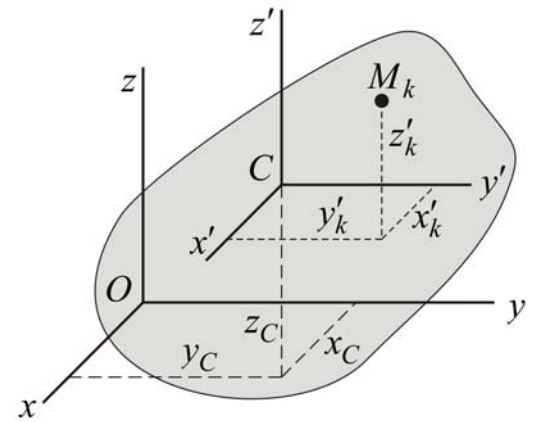


Рис. 13.3

Вычислим моменты инерции относительно двух параллельных осей, Cz' и Oz .

$$J_{z'} = \sum_{k=1}^N m_k (x_k'^2 + y_k'^2).$$

$$J_z = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2) = \sum_{k=1}^N m_k [(x_C + x'_k)^2 + (y_C + y'_k)^2] =$$

$$= \sum_{k=1}^N m_k x_C^2 + 2 \sum_{k=1}^N m_k x_C x'_k + \sum_{k=1}^N m_k x_k'^2 + \sum_{k=1}^N m_k y_C^2 + 2 \sum_{k=1}^N m_k y_C y'_k + \sum_{k=1}^N m_k y_k'^2.$$

Здесь $\sum_{k=1}^N m_k x_C^2 = x_C^2 \sum_{k=1}^N m_k = Mx_C^2$, $2 \sum_{k=1}^N m_k x_C x'_k = 2x_C \sum_{k=1}^N m_k x'_k = 2x_C \cdot 0 = 0$,

$$\sum_{k=1}^N m_k y_C^2 = y_C^2 \sum_{k=1}^N m_k = My_C^2, \quad 2 \sum_{k=1}^N m_k y_C y'_k = 2y_C \sum_{k=1}^N m_k y'_k = 2y_C \cdot 0 = 0.$$

Тогда $J_z = \sum_{k=1}^N m_k (x_k'^2 + y_k'^2) + M(x_C^2 + y_C^2) = J_{z'} + Md^2$, где $d = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}$ – расстояние между осями Oz и Cz' .

Получено следующее соотношение между моментами инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс системы:

$$J_z = J_{z'} + Md^2. \quad (13.5)$$

Последнее уравнение выражает теорему Штейнера (Гюйгенса-Штейнера): *момент инерции системы относительно некоторой оси равен сумме момента инерции*

ции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и произведения массы системы на квадрат расстояния между осями.

13.4. Моменты инерции однородных тел простейшей формы.

Однородный тонкий стержень (рис. 13.4). Вычислим моменты инерции однородного тонкого стержня массой M и длиной l . Термин «тонкий стержень» означает, что его толщиной пренебрегаем.

Относительно оси Oz

$$J_z = \int x^2 dm = \int_0^l x^2 \rho dx = \int_0^l x^2 \frac{M}{l} dx = \frac{M}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{Ml^2}{3},$$

где $\rho = M/l$ – линейная плотность (масса единицы длины стержня), $dm = \rho dx$ – масса элементарного отрезка стержня длиной dx .

Для оси Cz' проходящей через середину стержня из теоремы Штейнера следует

$$J_{z'} = J_z - Md^2 = \frac{Ml^2}{3} - M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{12}.$$

Однородное тонкое кольцо. Заданы масса кольца M и радиус R .

Выберем систему осей $Oxyz$ с началом в центре масс и так, чтобы координатная плоскость Oxy совпадала бы с плоскостью кольца (рис. 13.5). В этом случае координата z любой точки кольца равна нулю.

Вычислим, вначале, момент инерции относительно оси Oz . Так как все точки кольца находятся на одинаковом расстоянии R от оси Oz , то

$$J_z = \sum_{k=1}^N m_k h_k^2 = \sum_{k=1}^N m_k R^2 = R^2 \sum_{k=1}^N m_k = MR^2.$$

Вычислим, далее, полярный момент инерции, воспользовавшись его определением (13.3):

$$J_O = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) =$$

$$= \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2) = \sum_{k=1}^N m_k R^2 = MR^2 = J_z.$$

Для вычисления осевых моментов инерции J_x и J_y учтём, что для кольца они будут равны, и воспользуемся соотношением (13.4), которое, для данного случая, можем записать в виде $2J_x + MR^2 = 2MR^2$, откуда следует

$$J_x = \frac{MR^2}{2}.$$

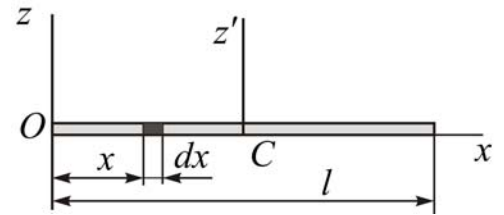


Рис.13.4

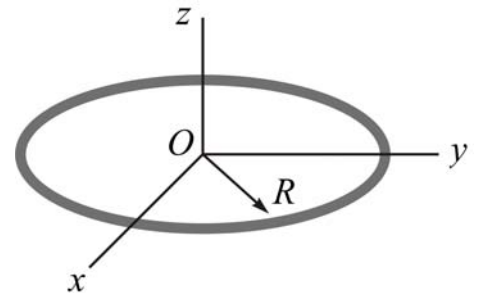


Рис. 13.5

Однородный тонкий диск. Систему координат $Oxyz$ выберем с началом в центре масс диска и осью Oz направленной перпендикулярно его плоскости (рис. 13.6). По заданной массе M и радиусу R необходимо вычислить осевые моменты инерции J_x , J_y , J_z пренебрегая толщиной (на рисунке толщина диска показана лишь для наглядности).

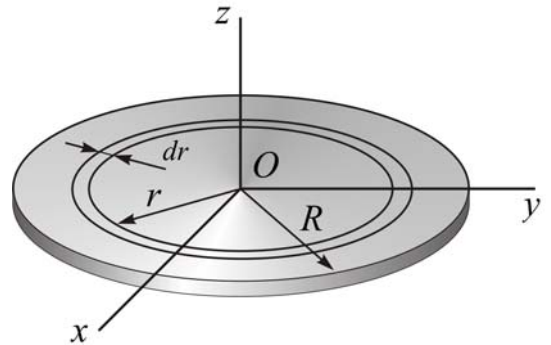


Рис. 13.6

Применим интегральное исчисление. Для этого представим диск как совокупность концентрических колец сколь угодно малой ширины dr . Момент инерции выделенного на рисунке 13.6 элементарного кольца относительно оси Oz $dJ_z = r^2 dm$,

где масса элементарного кольца $dm = \rho_S dS = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr$. Здесь $\rho_S = \frac{M}{\pi R^2}$ – поверхностная плотность (масса 1 м^2 поверхности), $dS = 2\pi r dr$ – площадь элементарного кольца. Тогда

$$J_z = \int dJ_z = \int_0^R r^2 \frac{M}{R^2} 2r dr = \frac{MR^2}{2}.$$

Для вычисления оставшихся моментов инерции учтём, что

$$J_O = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2 + 0) = J_z = \frac{MR^2}{2}$$

и что для диска $J_x = J_y$. Тогда, из соотношения (13.4) найдём $J_x = \frac{MR^2}{4}$.

Однородная тонкая прямоугольная пластина (рис. 13.7). По заданным массе пластины M и размерам сторон a и b вычислить J_x , J_y , J_z .

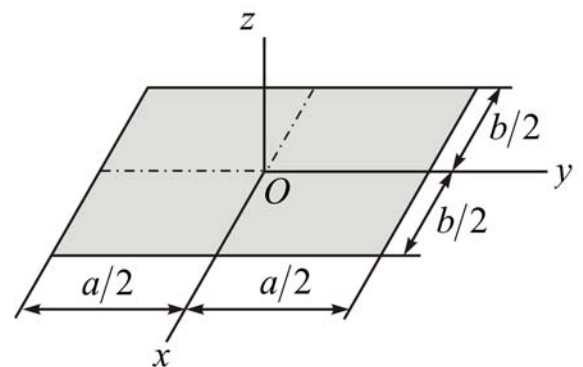


Рис. 13.7

Выберем систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс пластины, ось Oz направим перпендикулярно плоскости пластины, а оси Ox и Oy направим параллельно рёбрам пластины.

Самостоятельно доказать, что $J_x = \frac{Ma^2}{12}$, $J_y = \frac{Mb^2}{12}$, $J_z = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}$.

13.5. Момент инерции относительно оси проходящей через заданную точку в заданном направлении. В разделе 13.4 были выведены формулы для осевых моментов инерции симметричных твердых тел. В данном разделе такое ограничение снято.

Рассмотрим произвольную совокупность из N материальных точек (рис. 13.8). Выберем некоторую точку O и проведём проходящую через эту точку прямую Ol . Поставим задачу: по известным массам m_k ($k=1, \dots, N$) точек и их положению определить момент инерции J_l относительно оси Ol .

Выберем систему декартовых координат $Oxyz$ с началом в точке O . Направление прямой Ol определим углами α , β , γ , образуемыми данной прямой с осями координат, а положение точек M_k радиус-векторами $\vec{r}_k = \bar{i}x_k + \bar{j}y_k + \bar{k}z_k$ ($k=1, \dots, N$). Тогда тему данного раздела можно ещё раз сформулировать уже следующим образом.

Дано: m_k , x_k , y_k , z_k ($k=1, \dots, N$), α , β , γ . Найти: J_l .

Для вывода искомой формулы выделим на рисунке произвольную точку M_k . Её расстояние до оси Ol обозначим h_k .

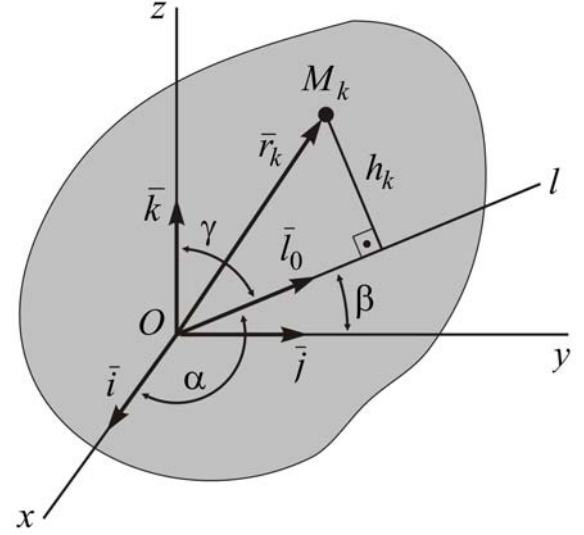


Рис. 13.8

По определению моментом инерции относительно оси называется сумма произведений масс точек на квадрат их расстояний до этой оси: $J_l = \sum_{k=1}^N m_k h_k^2$. В этой формуле

расстояние h_k необходимо выразить через заданные координаты x_k , y_k , z_k и углы α , β , γ . Для этого введём в рассмотрение единичный вектор оси Ol , который обозначим \bar{l}_0 . Через базис \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} осей координат этот вектор выражается в виде $\bar{l}_0 = \bar{i} \cos \alpha + \bar{j} \cos \beta + \bar{k} \cos \gamma$. Тогда $h_k = |\vec{r}_k| \sin(\vec{r}_k \wedge \bar{l}_0) = |\vec{r}_k \times \bar{l}_0| =$

$$= |\bar{i}(y_k \cos \gamma - z_k \cos \beta) + \bar{j}(z_k \cos \alpha - x_k \cos \gamma) + \bar{k}(x_k \cos \beta - y_k \cos \alpha)|,$$

$$\begin{aligned} h_k^2 &= (y_k \cos \gamma - z_k \cos \beta)^2 + (z_k \cos \alpha - x_k \cos \gamma)^2 + (x_k \cos \beta - y_k \cos \alpha)^2 = \\ &= (y_k^2 + z_k^2) \cos^2 \alpha + (z_k^2 + x_k^2) \cos^2 \beta + (x_k^2 + y_k^2) \cos^2 \gamma - \\ &\quad - 2x_k y_k \cos \alpha \cos \beta - 2y_k z_k \cos \beta \cos \gamma - 2z_k x_k \cos \gamma \cos \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_l &= \sum_{k=1}^N m_k h_k^2 = \cos^2 \alpha \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2) + \cos^2 \beta \sum_{k=1}^N m_k (z_k^2 + x_k^2) + \cos^2 \gamma \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2) - \\ &\quad - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum_{k=1}^N m_k y_k z_k - 2 \cos \gamma \cos \alpha \sum_{k=1}^N m_k z_k x_k. \end{aligned}$$

Здесь встречаются выражения трёх осевых моментов инерции, $\sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2) = J_x$, $\sum_{k=1}^N m_k (z_k^2 + x_k^2) = J_y$, $\sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2) = J_z$.

Введём обозначения:

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k, \quad J_{yz} = \sum_{k=1}^N m_k y_k z_k, \quad J_{zx} = \sum_{k=1}^N m_k z_k x_k. \quad (13.6)$$

Величина J_{xy} называется центробежным моментом инерции относительно осей x, y . Величина J_{yz} называется центробежным моментом инерции относительно осей y, z и величина J_{zx} – центробежным моментом инерции относительно осей z, x . Для твёрдого тела центробежные моменты инерции относительно заданных осей – величины постоянные.

Окончательно выражение для момента инерции твёрдого тела относительно оси Ol запишем в виде

$$J_l = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha. \quad (13.7)$$

Шесть величин, три осевых и три центробежных момента инерции, записывают обычно в виде симметричной матрицы

$$J = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix} \quad (13.8)$$

называемой тензором инерции. Элементы матрицы, симметричные относительно главной диагонали, равны.

Таким образом, если будет известен тензор инерции тела для точки O , то по формуле (13.7) легко вычисляется момент инерции относительно любой оси, проходящей через эту точку.

13.6. Эллипсоид инерции. Пусть с некоторым твёрдым телом скреплена система координат $Oxyz$ и вычислен тензор инерции (13.8). Представляет интерес зависимость значения осевого момента инерции J_l от направления прямой Ol .

Другими словами, в данном разделе ставится задача подробного изучения функции $J_l = J_l(\alpha, \beta, \gamma)$. И желательно было бы эту зависимость представить графически. Это можно осуществить следующим образом.

Для фиксированных значений α, β, γ вычислим $J_l(\alpha, \beta, \gamma)$ и на оси Ol отложим отрезок $OK = 1/\sqrt{J_l}$ (рис. 13.9). Изменим значения α, β, γ и вновь проделаем то же самое. Представим, что такие вычисления и построения проведены для боль-

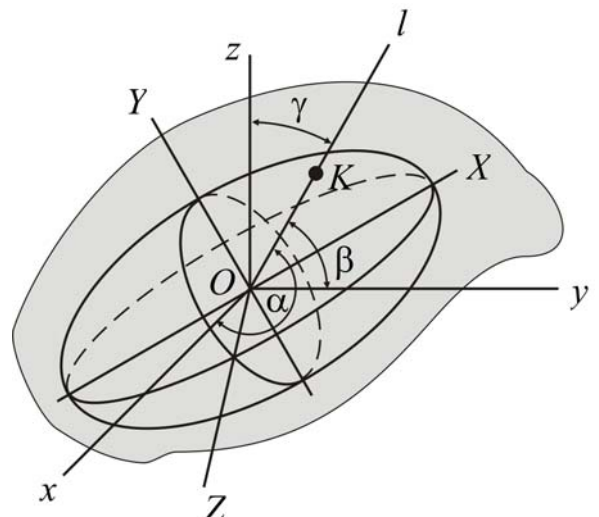


Рис. 13.9

шого числа комбинаций углов α , β , γ и через концы отрезков OK проведена поверхность. Что это за поверхность?

Для ответа на этот вопрос необходимо найти уравнение (или систему уравнений), которому удовлетворяют координаты текущей точки поверхности. Пусть точка K имеет координаты x , y , z . Тогда $\cos \alpha = x/OK = x/\sqrt{J_l}$, $\cos \beta = y/OK = y/\sqrt{J_l}$, $\cos \gamma = z/OK = z/\sqrt{J_l}$. Подставив найденные выражения косинусов углов в уравнение (13.7), получим

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx = 1 \quad (13.9)$$

Из аналитической геометрии известно, что уравнение (13.9) есть уравнение эллипсоида. В данном случае эта поверхность характеризует распределение моментов инерции твёрдого тела в зависимости от направления оси, относительно которой вычисляется момент инерции и называется **эллипсоидом инерции**. Для каждой точки тела существует свой эллипсоид инерции.

Оси координат направленные вдоль осей симметрии эллипсоида инерции (OX , OY и OZ на рис. 13.9) называются **главными осями инерции**, а уравнение эллипсоида инерции в таких осях будет иметь следующий вид

$$J_X X^2 + J_Y Y^2 + J_Z Z^2 = 1, \quad (13.10)$$

что доказывается в аналитической геометрии. Отсюда следует, что центробежные моменты инерции относительно главных осей инерции равны нулю:

$$J_{XY} = J_{YZ} = J_{ZX} = 0 \quad (13.11)$$

Справедливо и обратное утверждение: чтобы оси прямоугольной системы координат были главными осями инерции, необходимо и достаточно выполнение условия (13.11).

Эллипсоид инерции, построенный для центра масс тела, называется центральным эллипсоидом инерции, а его главные оси – главными центральными осями инерции тела.

Если в качестве осей координат взяты главные оси инерции, то формула (13.7) упрощается:

$$J_l = J_X \cos^2 \alpha + J_Y \cos^2 \beta + J_Z \cos^2 \gamma. \quad (13.12)$$

13.7. Свойства главных осей инерции. *Если одна из осей координат, проведенная в точке, является главной осью инерции тела для этой точки, то два центробежных момента инерции, которые содержат индекс главной оси инерции, равны нулю.*

Доказательство. Пусть ось OZ является главной осью инерции для точки O , т.е. является осью симметрии эллипсоида инерции, построенного для этой точки тела. Дополним ось OZ двумя другими Ox и Oy , так чтобы получилась прямоугольная система координат $OxyZ$.

Так как ось OZ – ось симметрии эллипсоида инерции, то найдутся точки $M(x, 0, Z)$ и $M_1(-x, 0, Z)$ лежащие на поверхности эллипсоида. Следовательно, их координаты удовлетворяют уравнению (13.9):

$$J_x x^2 + J_z Z^2 - 2J_{zx} Zx = 1;$$

$$J_x x^2 + J_z Z^2 + 2J_{zx} Zx = 1.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим $4J_{zx} Zx = 0$. Так как Z и x не равны нулю, то $J_{zx} = 0$. Аналогичными рассуждениями доказывается, что $J_{yz} = 0$.

Если тело имеет ось материальной симметрии, то эта ось является главной осью инерции этого тела.

Доказательство. Если ось Cz – ось материальной симметрии, то для любой точки этого тела с массой m_k и координатами x_k, y_k, z_k существует симметричная относительно рассматриваемой оси точка такой же массы, координаты которой равны $-x_k, -y_k, z_k$. Так как всё тело разбивается на пары симметричных точек и для каждой пары $m_k y_k z_k + m_k (-y_k) z_k = 0$, то и $J_{yz} = \sum_{k=1}^N m_k y_k z_k = 0$. Аналогично доказывается равенство $J_{zx} = 0$.

Если тело имеет плоскость материальной симметрии, то любая прямая, перпендикулярная этой плоскости, является главной осью инерции тела в точке пересечения прямой с плоскостью симметрии.

Доказательство. Выберем систему прямоугольных осей $Oxyz$ так, чтобы координатная плоскость Oxy совпала с плоскостью симметрии тела. Тогда, для произвольной точки с массой m_k и координатами x_k, y_k, z_k существует симметричная относительно плоскости Oxy точка с такой же массой, координаты которой равны $x_k, y_k, -z_k$. Для каждой такой пары точек $m_k y_k z_k + m_k y_k (-z_k) = 0$, а, следовательно, и всего тела $J_{yz} = \sum_{k=1}^N m_k y_k z_k = 0$. Аналогично доказывается равенство $J_{zx} = 0$.

Пример 1. Вычислить момент инерции однородной прямоугольной пластины массой m относительно оси Cl расположенной в плоскости пластины и проходящей через центр масс C , если известны, также, размеры a, b и угол φ (рис. 13.10).

Решение. Введём в рассмотрение систему осей $CXYZ$ с началом в центре масс пластины и направленными вдоль главных осей инерции пластины (вдоль осей симметрии). По формуле (13.12)

$$J_l = J_X \cos^2 \alpha + J_Y \cos^2 \beta + J_Z \cos^2 \gamma.$$

$$\text{Здесь } J_X = \frac{mb^2}{12}, \quad J_Y = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}, \quad J_Z = \frac{ma^2}{12}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \varphi. \quad \text{Тогда } J_l = \frac{m}{12} (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)$$

Пример 2. Вычислить момент инерции однородной прямоугольной пластины массой m относительно оси Oz , если известны, также, величины a, b, d, φ (рис. 13.11). Плоскость пластины совпадает с координатной плоскостью Oxz .

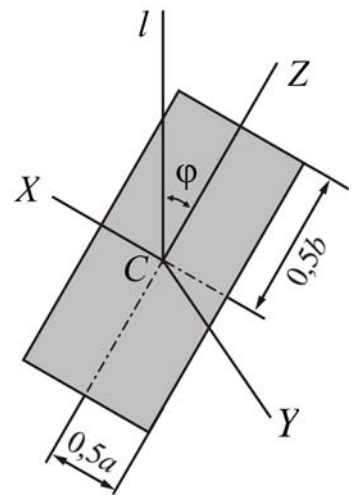


Рис. 13.10

Решение. Вначале вычислим момент инерции пластины $I_{Cz'}$ относительно оси Cz' проходящей через центр масс параллельно оси Oz , для чего воспользуемся результатами решения предыдущего примера:

$$J_{Cz'} = \frac{m}{12}(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi).$$

Теперь, по теореме Гюйгенса-Штейнера, момент инерции относительно оси Oz

$$J_z = J_{Cz'} + m \cdot (d + 0,5b \sin \varphi)^2.$$

13.8. Техника вычисления центробежных моментов инерции. В этом разделе рассмотрим практические способы вычисления центробежных моментов инерции.

Пусть для однородной прямоугольной пластины, расположенной в координатной плоскости Oxy , нужно вычислить центробежный момент инерции J_{xy} (рис. 13.12). Введём в рассмотрение ещё две системы осей. Одна из них, $Cx'y'z'$, имеет начало в центре масс тела, а оси параллельны соответствующим осям исходной системы координат $Oxyz$. Другая, $Cx''y''z''$, получена из системы осей $Cx'y'z'$ положительным поворотом вокруг оси Cz' на угол φ до совпадения осей Cx'' и Cy'' с осями симметрии пластины, являющимися главными осями инерции.

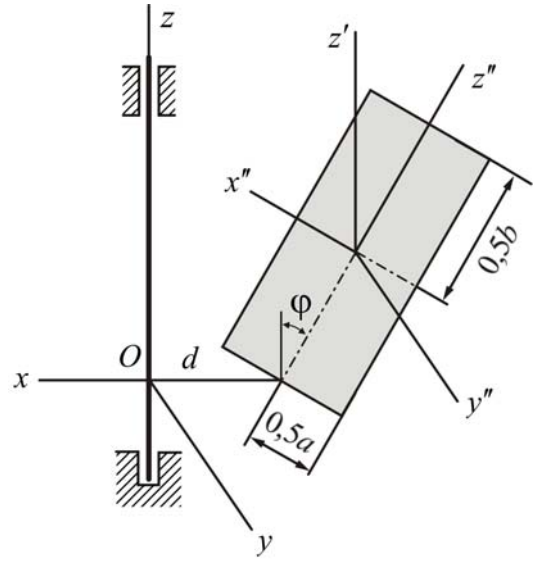


Рис. 13.11

По определению центробежного момента инерции $J_{xy} = \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k$. Перейдём в этой формуле от исходных координат к штрихованным: $x_k = x_C + x'_k$, $y_k = y_C + y'_k$. Тогда,

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^N m_k (x_C + x'_k)(y_C + y'_k) = \sum_{k=1}^N m_k x_C y_C + \sum_{k=1}^N m_k x_C y'_k + \sum_{k=1}^N m_k x'_k y_C + \sum_{k=1}^N m_k x'_k y'_k =$$

$$= x_C y_C \sum_{k=1}^N m_k + x_C \sum_{k=1}^N m_k y'_k + y_C \sum_{k=1}^N m_k x'_k + \sum_{k=1}^N m_k x'_k y'_k = M x_C y_C + J_{x'y'}.$$

В полученном выражении второе и третье слагаемые равны нулю, так как для штрихованной системы координат с началом в центре масс $\sum_{k=1}^N m_k y'_k = M y'_C = 0$, $\sum_{k=1}^N m_k x'_k = M x'_C = 0$. Здесь M – масса всего твёрдого тела. Следовательно $J_{xy} = M x_C y_C + J_{x'y'}$.

Для того чтобы вычислить центробежный момент $J_{x'y'}$, перейдём к дважды штрихованным координатам.

$$x'_k = x''_k \cos \varphi - y''_k \sin \varphi,$$

$$y'_k = x''_k \sin \varphi + y''_k \cos \varphi.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } J_{x'y'} &= \sum_{k=1}^N m_k x'_k y'_k = \\ &= \sum_{k=1}^N m_k (x''_k \cos \varphi - y''_k \sin \varphi)(x''_k \sin \varphi + y''_k \cos \varphi) = \sin \varphi \cos \varphi \sum_{k=1}^N m_k (x''_k^2 - y''_k^2) + \\ &(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sum_{k=1}^N m_k x''_k y''_k. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в полученном выражении равно нулю, так как оси Cx'' , Cy'' – главные оси инерции и потому

$$\sum_{k=1}^N m_k x''_k y''_k = J_{x''y''} = 0. \text{ Над оставшимся}$$

слагаемым выполним преобразование:

$$\begin{aligned} J_{x'y'} &= \sin \varphi \cos \varphi \sum_{k=1}^N m_k (x''_k^2 - y''_k^2) = \\ &= \frac{\sin 2\varphi}{2} \sum_{k=1}^N m_k [(x''_k^2 + z''_k^2) - (y''_k^2 + z''_k^2)] = \\ &= \frac{\sin 2\varphi}{2} (J_{y''} - J_{x''}). \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$J_{xy} = Mx_C y_C + \frac{\sin 2\varphi}{2} (J_{y''} - J_{x''}). \quad (13.13)$$

Из формулы (13.13) следует целесообразность перехода к главным центральным осям инерции. Выигрыш такого перехода в том, что вычисление центробежных моментов инерции заменяется вычислением осевых моментов инерции относительно главных центральных осей инерции являющихся справочными величинами.

Пример. Вычислить центробежные моменты инерции в примере 2 раздела 13.7.

Решение. Пластина расположена в координатной плоскости Oxz . Следовательно, координаты y_k всех точек равны нулю. Отсюда заключаем, что два центробежных момента инерции равны нулю: $J_{xy} = \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k = 0$, $J_{yz} = \sum_{k=1}^N m_k y_k z_k = 0$. Остаётся вычислить J_{zx} . Для этого двойным преобразованием осей перейдём к главным центральным осям инерции $Cx''y''z''$ (рис. 13.11). Аналогично формуле (13.13)

$$J_{zx} = Mz_C x_C + \frac{\sin 2(-\varphi)}{2} (J_{x''} - J_{z''}). \quad (13.14)$$

Знак минус перед углом φ поставлен потому, что поворот на угол φ вокруг оси Oy' при переходе от штрихованных осей к дважды штрихованным – отрицателен.

По рисунку (13.11) находим: $z_C = 0,5b \cos \varphi$, $x_C = -(d + 0,5b \sin \varphi)$, $J_{x''} = \frac{mb^2}{12}$, $J_{z''} = \frac{ma^2}{12}$. Тогда, по формуле (13.14)

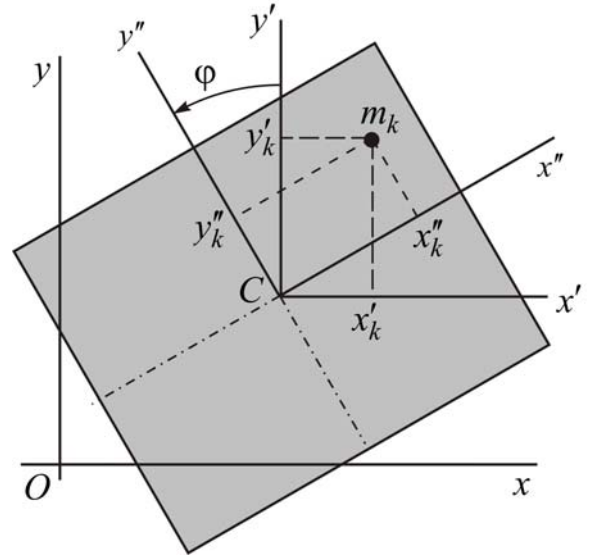


Рис. 13.12

$$J_{zx} = -0,5mb \cos \varphi (d + 0,5b \sin \varphi) - \frac{\sin 2\varphi}{2} \left(\frac{mb^2}{12} - \frac{ma^2}{12} \right).$$

Глава 14. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

14.1. Динамика механической системы. Силы внешние и внутренние. Механической системой называется совокупность точек взаимодействующих между собой и с точками других механических систем. Т.е. исследователь мысленно очерчивает совокупность точек, движение которых собирается изучить, и абстрагируется от всех остальных точек (рис. 14.1). Но действие точек не входящих в круг рассмотрения на точки рассматриваемой механической системы, конечно же, учитывается.

Задача динамики механической системы заключается в определении кинематических уравнений движения каждой из точек входящих в механическую систему (например $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$) при заданных силах и начальных условиях. Как решить такую проблему? Каким научным багажом к настоящему времени мы обладаем?

Мы знаем, как решать такую задачу для одной отдельно взятой точки. Нужно составить дифференциальное уравнение согласно второму закону

Ньютона $m\ddot{\vec{r}} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k$ и проинтегрировать его.

Следовательно, для механической системы необходимо составить дифференциальные уравнения для каждой из точек входящих в систему и их интегрировать.

В правую часть второго закона Ньютона входят силы. Их можно классифицировать по разным признакам. Сейчас нам понадобится подразделение сил на внешние и внутренние.

Внешними силами называются силы, действующие на точки рассматриваемой механической системы со стороны точек других механических систем. Обозначаются индексом (e) сверху: $\vec{F}^{(e)}$.

Внутренними силами называются силы взаимодействия между точками данной механической системы. Обозначаются индексом (i) сверху: $\vec{F}^{(i)}$.

Вся совокупность внутренних сил разбивается на пары, как сила действия и сила противодействия. Для каждой такой пары равна нулю векторная сумма сил и векторная сумма моментов этих сил относительно произвольного центра O . Например, для точек A_1 и A_2 (рис. 14.1)

$$\vec{F}_{12}^{(i)} + \vec{F}_{21}^{(i)} = 0, \quad \vec{M}_O(\vec{F}_{12}^{(i)}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{21}^{(i)}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}^{(i)} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}^{(i)} = 0.$$

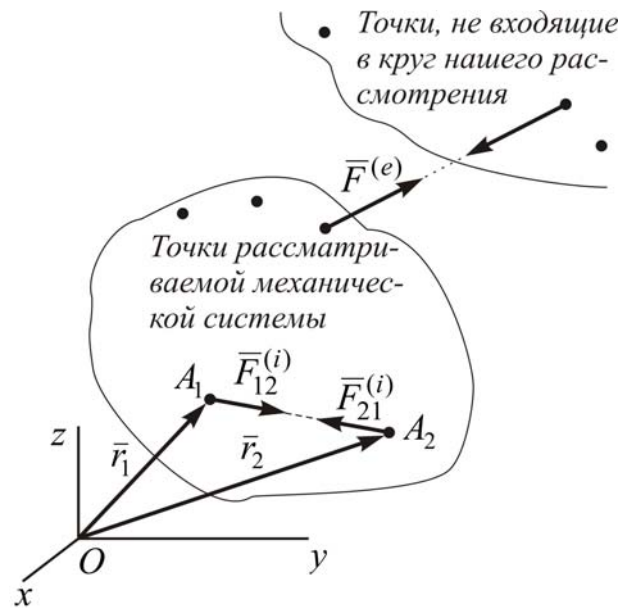


Рис. 14.1

Отсюда вытекает следующее свойство внутренних сил. Главный вектор и главный момент относительно произвольного центра O всех внутренних сил равны нулю:

$$\bar{R}^{(i)} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(i)} = 0, \quad \bar{L}_O = \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} = 0.$$

Здесь через $\bar{F}_k^{(i)}$ обозначена равнодействующая всех внутренних сил приложенных к k -ой точке, а индекс k ($k = 1, 2, \dots, N$) нумерует точки механической системы.

14.2. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Рассмотрим движение некоторой механической системы состоящей из N материальных точек. Пусть индекс k нумерует точки, принимая значения от 1 до N . На каждую из точек в общем случае может действовать несколько внутренних сил. Можно их по правилу параллелограмма заменить одной равнодействующей $\bar{F}_k^{(i)}$. Точно так же все действующие на k -ю точку внешние силы заменяем равнодействующей $\bar{F}_k^{(e)}$. Согласно второму закону Ньютона составим дифференциальное уравнение движения каждой из точек

[illegible]

Уравнения (14.1) представляют собой дифференциальные уравнения движения механической системы. При необходимости их можно спроецировать на любые оси координат. Силы $\bar{F}_k^{(i)}$, $\bar{F}_k^{(e)}$ могут зависеть от координат точек, проекций скоростей точек и времени.

Составить дифференциальные уравнения движения системы – это первый шаг в исследовании. Следующий шаг состоит в интегрировании дифференциальных уравнений для нахождения кинематических уравнений $x_k(t)$, $y_k(t)$, $z_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Именно на этом этапе поджидают нас наибольшие математические трудности. Потому что из теории дифференциальных уравнений известно, что лишь немногие системы дифференциальных уравнений могут быть аналитически проинтегрированы. В подтверждение сказанного можно привести пример из небесной механики, в котором рассматривается движение трех небесных тел (например, Солнце, Земля и Луна) принимаемых за материальные точки. Учитываются лишь силы взаимного притяжения (силы гравитации) вычисляемые по закону всемирного тяготения. Если точек только две, например Солнце и Земля, то дифференциальные уравнения интегрируются и из их решений можно вывести законы Кеплера (с небольшим уточнением). Но уже для трех взаимно притягивающихся точек, как доказано великим французским математиком Анри Пуанкаре в конце 19 века, дифференциальные уравнения не могут быть аналитически проинтегрированы.

Из-за невозможности, в общем случае, аналитического интегрирования уравнений (14.1) совсем не следует их бесполезность. Во-первых, можно их численно ин-

тегрировать на компьютере, а во-вторых, из этих уравнений можно получить следствия, проясняющие некоторые характеристики (свойства) движений механической системы. Эти следствия называются общими теоремами динамики. К ним относятся:

- 1) теорема о движении центра масс механической системы;
- 2) теорема об изменении количества движения;
- 3) теорема об изменении кинетического момента;
- 4) теорема об изменении кинетической энергии.

14.3. Теорема о движении центра масс механической системы. Просуммируем почленно уравнения (14.1) по всем точкам системы:

$$\sum_{k=1}^N (m_k \bar{a}_k) = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(i)} + \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}. \quad (14.2)$$

Так как внутренние силы существуют парами, как сила действия и сила противодействия, то главный вектор всех внутренних сил $\bar{R}^{(i)} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(i)} = 0$.

Преобразуем левую часть уравнения (14.2). Для этого формулу для радиус-вектора центра масс механической системы $\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^N (m_k \bar{r}_k)}{M}$ продифференцируем по

времени дважды: $\frac{d^2}{dt^2} \bar{r}_C = \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^N (m_k \bar{r}_k) \right]$. Результат дифференцирования пред-

ставим выражением $M \bar{a}_C = \sum_{k=1}^N (m_k \bar{a}_k)$, используя которое уравнение (14.2) запишем в виде

$$M \bar{a}_C = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}. \quad (14.3)$$

Уравнение (14.3) внешне похоже на второй закон Ньютона и выражает теорему о движении центра масс обычно формулируемую так: *центр масс механической системы движется как материальная точка в которой сосредоточена масса всей системы и к которой приложены все внешние силы.*

Приведём пример, иллюстрирующий качественные эффекты, следующие из теоремы о движении центра масс.

Из школьного курса физики хорошо известно, что точка, брошенная под углом к горизонту, будет двигаться по параболе (если пренебречь сопротивлением воздуха). Из уравнения (14.3) следует, что и центр масс гимнаста также будет двигаться по параболе, когда гимнаст, разбежавшись и подпрыгнув, совершает сальто.

В развитие этой темы приведём негуманный, милитаристский пример. Если брошенная граната взорвётся в воздухе, то, несмотря на то, что осколки будут разлетаться в разные стороны, центра масс этих осколков по-прежнему будет двигаться по той же параболе, как если бы разрыва гранаты не было.

Рассмотрим некоторые частные случаи рассмотренной теоремы.

1. Если главный вектор всех внешних сил $\bar{R}^{(e)} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}$, действующих на меха-

ническую систему, равен нулю, то из (14.3) следует, что $\bar{a}_C = \frac{d\bar{v}_C}{dt} = 0$, откуда после

интегрирования получаем $\bar{v}_C = \frac{d\bar{r}_C}{dt} = \bar{C}_1 = \bar{v}_{C0}$. Интегрируя последнее уравнение ещё раз, находим $\bar{r}_C = \bar{v}_{C0}t + \bar{C}_2 = \bar{v}_{C0}t + \bar{r}_{C0}$, т.е. центр масс системы будет совершать прямолинейное равномерное движение (или находиться в состоянии покоя, если $\bar{v}_{C0} = 0$).

2. Если главный вектор внешних сил не равен нулю, но равна нулю его проекция на какое-либо направление, например, направление оси Ox , то из проекции уравне-

ния (14.3) на ось Ox $M \frac{dv_x}{dt} = \sum_{k=1}^N F_{kx} = 0$ следует $\dot{x}_C = \frac{dx_C}{dt} = C_1 = \dot{x}_{C0}$,

$x_C = \dot{x}_{C0}t + C_2 = \dot{x}_{C0}t + x_{C0}$. В этом случае координата x центра масс системы изменится равномерно (или сохраняет неизменное значение x_{C0} при $\dot{x}_{C0} = 0$).

Пример. На рисунке 14.2 показана механическая система, состоящая из четырёх звеньев, находящаяся в начальный момент времени в покое.

Определить на сколько и в какую сторону переместится призма 3, если, опускаясь под действием силы тяжести, первое звено переместится вниз на h_1 .

Массой нити и блока 4 пренебречь. Массы остальных звеньев равны соответственно m_1 , m_2 , m_3 . Коэффициент трения между звеном 3 и опорной плоскостью равен нулю.

Решение. Внешними силами, действующими на рассматриваемую систему, являются силы тяжести $m_1\bar{g}$, $m_2\bar{g}$, $m_3\bar{g}$ и реакция \bar{N} гладкой опорной плоскости. Следовательно, теорема о движении центра масс, в проекции на ось Ox , в данной задаче имеет вид $M \frac{dv_{Cx}}{dt} = 0$, откуда следует

$$Mv_{Cx} = C_1. \quad (14.4)$$

Чтобы вычислить произвольную постоянную интегрирования C_1 запишем уравнение (14.4) в начальный момент времени: $0 = C_1$. Поэтому уравнение (14.4) можно переписать в виде

$M \frac{dx_C}{dt} = 0$, откуда следует $Mx_C = C_2$, или,

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = C_2, \quad (14.5)$$

где x_i – координата x центра тяжести i -го звена.

Уравнение (14.5) справедливо в любом положении системы. Запишем его в двух частных положениях, начальном

$$m_1x_{10} + m_2x_{20} + m_3x_{30} = C_2 \quad (14.6)$$

и конечном

$$m_1(x_{10} + s_3) + m_2(x_{20} + s_3 + h_1) + m_3(x_{30} + s_3) = C_2. \quad (14.7)$$

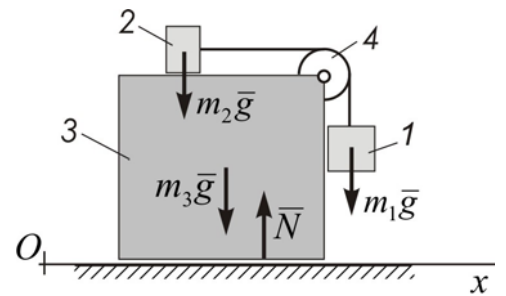


Рис. 14.2

Здесь s_3 – перемещение призмы 3, для которого было сделано предположение, что оно произошло в положительном направлении оси x .

Правые части уравнений (14.6) и (14.7) равны. Тогда, приравняв левые части этих уравнений, найдём $s_3 = -\frac{m_2 h_1}{m_1 + m_2 + m_3}$.

Знак минус указывает на то, что на самом деле призма переместится влево, противоположно ранее сделанному предположению.

Ответ: $s_3 = -\frac{m_2 h_1}{m_1 + m_2 + m_3}$.

Теорема об изменении количества движения

14.4. Количество движения точки и системы. *Количеством движения материальной точки называется вектор, равный произведению массы точки на вектор её скорости*

$$\bar{q} = m\bar{v}. \quad (14.8)$$

Количеством движения механической системы называется векторная сумма количеств движения всех точек системы

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^N \bar{q}_k = \sum_{k=1}^N (m_k \bar{v}_k). \quad (14.9)$$

Количество движения системы можно выразить через массу всей системы и скорость центра масс. Из формулы радиус-вектора \bar{r}_C центра масс механической системы

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^N (m_k \bar{r}_k)}{M} \quad \text{следует} \quad \sum_{k=1}^N (m_k \bar{r}_k) = M\bar{r}_C.$$

Продифференцируем по времени обе части последнего соотношения $\frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^N (m_k \bar{r}_k) \right] = \frac{d}{dt} M\bar{r}_C$, или $\sum_{k=1}^N (m_k \bar{v}_k) = M\bar{v}_C$. Тогда из определения (14.9) получаем

$$\bar{Q} = M\bar{v}_C. \quad (14.10)$$

При необходимости можно найти проекции на декартовы оси координат количества движения точки $q_x = m\dot{x}$, $q_y = m\dot{y}$, $q_z = m\dot{z}$ и количества движения системы $Q_x = \sum m_k \dot{x}_k = M\dot{x}_C$, $Q_y = \sum m_k \dot{y}_k = M\dot{y}_C$, $Q_z = \sum m_k \dot{z}_k = M\dot{z}_C$.

В физике количество движения точки называют импульсом точки.

Размерность количества движения – $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \text{Н} \cdot \text{с}$.

14.5. Импульс силы. *Элементарным импульсом силы называется произведение вектора силы \bar{F} на элементарный промежуток времени dt*

$$d\bar{S}(\bar{F}) = \bar{F}dt. \quad (14.11)$$

Импульсом силы \bar{F} , действующей в течение промежутка времени t , называется вектор

$$\bar{S}(\bar{F}) = \int_0^t \bar{F} dt. \quad (14.12)$$

Можно вычислить проекции на оси координат элементарного импульса $dS_x = F_x dt$, $dS_y = F_y dt$, $dS_z = F_z dt$ и полного импульса силы $S_x = \int_0^t F_x dt$, $S_y = \int_0^t F_y dt$, $S_z = \int_0^t F_z dt$.

14.6. Теорема об изменении количества движения точки. Выведем уравнение, которому подчиняется изменение количества движения точки. Для этого второй закон Ньютона запишем в виде $m \frac{d\bar{v}_C}{dt} = \bar{F}$ или, так как масса точки постоянна,

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{q}}{dt} = \bar{F}. \quad (14.13)$$

Уравнение (14.13) выражает теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме: *производная по времени от вектора количества движения точки равна равнодействующей всех сил, действующих на материальную точку.*

В проекциях на оси координат $\frac{dq_x}{dt} = F_x$, $\frac{dq_y}{dt} = F_y$, $\frac{dq_z}{dt} = F_z$.

Умножив обе части уравнения (14.13) на dt , его можно переписать в другой форме

$$d(m\bar{v}) = d\bar{q} = \bar{F} dt. \quad (14.14)$$

Дифференциал количества движения точки равен элементарному импульсу равнодействующей всех сил, действующих на материальную точку.

В проекциях на оси координат получаем $dq_x = F_x dt$, $dq_y = F_y dt$, $dq_z = F_z dt$.

Проинтегрируем обе части уравнения (14.14): $\int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}} d(m\bar{v}) = \int_0^t \bar{F} dt$, или

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \bar{S}(\bar{F}). \quad (14.15)$$

Уравнение (14.15) выражает теорему об изменении количества движения точки в интегральной форме: *изменение количества движения точки за промежуток времени от 0 до t равно полному импульсу равнодействующей всех сил, действующих на точку за тот же промежуток времени.*

В проекциях на декартовы оси координат $m\dot{x} - m\dot{x}_0 = S_x$, $m\dot{y} - m\dot{y}_0 = S_y$, $m\dot{z} - m\dot{z}_0 = S_z$.

14.7. Теорема об изменении количества движения системы. Выведем уравнение, которому подчиняется изменение количества движения механической системы. Для этого теорему о движении центра масс механической системы перепишем в ви-

де $M \frac{d\bar{v}_C}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}$, или, с учётом постоянства массы M системы,

$$\frac{d(M \bar{v}_C)}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}, \text{ или}$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}. \quad (14.16)$$

Здесь $\bar{Q} = M\bar{v}_C$ – количество движения механической системы (см. формулу (14.10)).

Уравнение (14.16) выражает теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения системы равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему.*

При решении задач уравнение (14.16) записывают в проекциях на оси координат:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^N F_{kx}, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^N F_{ky}, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^N F_{kz}. \quad (14.17)$$

Если умножить обе части уравнения (14.16) на dt , то данную теорему можно записать и в другой форме

$$d\bar{Q} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} \cdot dt = \sum_{k=1}^N d\bar{S}(\bar{F}_k^{(e)}). \quad (14.18)$$

Дифференциал количества движения системы равен сумме элементарных импульсов всех внешних сил, действующих на систему.

Интегрируя обе части уравнения (14.18) получаем

$$\int_{\bar{Q}_0}^{\bar{Q}} d\bar{Q} = \int_0^t \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} dt = \sum_{k=1}^N \int_0^t \bar{F}_k^{(e)} dt \Rightarrow$$

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^N \bar{S}(\bar{F}_k^{(e)}) \quad (14.19)$$

Уравнение (14.19) выражает теорему об изменении количества движения механической системы в интегральной форме: *изменение количества движения системы равно сумме импульсов всех внешних сил.*

В проекциях на оси координат имеем

$$Q_x - Q_{0x} = \sum_{k=1}^N S_x(\bar{F}_k^{(e)}), \quad Q_y - Q_{0y} = \sum_{k=1}^N S_y(\bar{F}_k^{(e)}), \quad Q_z - Q_{0z} = \sum_{k=1}^N S_z(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Пример. Из бытовой практики хорошо известно, что если из трубы, изогнутой под некоторым углом, вытекает под напором вода (рис. 14.3), то на трубу начинает действовать сила, направленная противоположно скорости истечения воды.

Найдём зависимость этой силы от скорости истечения воды и других параметров.

Пусть труба, изогнутая под прямым углом, неподвижна и по ней течёт вода со скоростью v (будем считать, что скорости всех частиц одинаковы). В произвольный момент времени t выделим некоторый объём жидкости $ABCD$ (на рисунке 14.3 он выделен серым фоном) и будем сле-

дуть за его перемещением. За сколь угодно малый промежуток времени dt сечения жидкости AB и CD переместятся на расстояние $dl = vdt$ и займут положения $A'B'$ и $C'D'$ соответственно.

Подсчитаем изменение проекции количества движения жидкости на ось Ox за указанный промежуток времени dt . Для частиц в объёме $A'B'CD$ количество движения в проекции на ось Ox не изменилось. Произошло увеличение Q_x лишь на количество движения частиц жидкости в объёме $CC'D'D$, т.е.

$$dQ_x = m_{CC'D'D} \cdot v = \rho S dl v = \rho S v^2 dt,$$

где $m_{CC'D'D}$ – масса частиц жидкости в объёме $CC'D'D$, ρ – плотность жидкости, S – площадь поперечного сечения трубы. Тогда, $\frac{dQ_x}{dt} = \rho S v^2$.

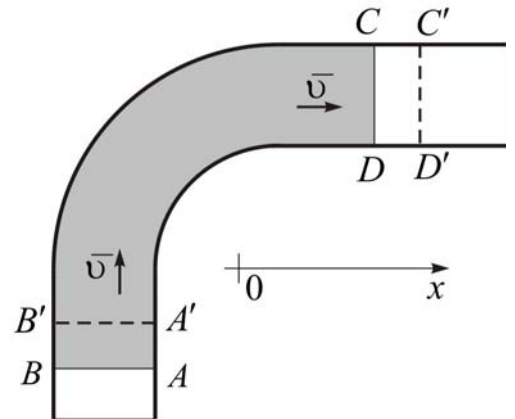


Рис. 14.3

Согласно уравнениям (14.17) $\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^N F_{kx}$. Следова-

тельно, проекция на ось Ox главного вектора сил действующих со стороны стенок трубы $R_x = \rho v^2 S$. По третьему закону Ньютона частицы жидкости действуют на стенки трубы в противоположном направлении с такой же по модулю силой.

14.8. Законы сохранения количества движения механической системы. Рассмотрим теорему об изменении количества движения системы в некоторых частных случаях.

1) Пусть главный вектор всех внешних сил равен нулю: $\bar{R}^{(e)} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} = 0$. Тогда

из уравнения (14.16) следует, что количество движения системы не меняется, $\bar{Q} = \bar{C} = \text{const}$. В скалярной форме это векторное равенство эквивалентно трём скалярным $Q_x = C_1$, $Q_y = C_2$, $Q_z = C_3$

2) Может случиться, что главный вектор внешних сил отличен от нуля, но равна нулю его проекция на некоторое направление, например направление оси Ox . Тогда, как следует из равенств (14.17), $Q_x = \text{const}$

Теорема об изменении кинетического момента

14.9. Момент количества движения точки. Кинетический момент механической системы. Моментом количества движения точки относительно центра O называется векторное произведение радиус-вектора точки, проведённого из этого центра, на количество движения точки:

$$\bar{k}_O = \bar{r} \times \bar{q} = \bar{r} \times m \bar{v}. \quad (14.20)$$

Вектор момента количества движения точки строят в точке O (рис. 14.4).

Из формулы вычисления векторного произведения через координаты переменных векторов

$$\bar{k}_O = \bar{r} \times m\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \bar{i}(ym\dot{z} - zm\dot{y}) + \bar{j}(zm\dot{x} - xm\dot{z}) + \bar{k}(xm\dot{y} - ym\dot{x})$$

следует, что проекции вектора момента количества движения на оси координат вычисляются по формулам

$$k_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \quad k_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \quad k_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (14.21)$$

Как следует из определения (14.20), единица измерения момента количества движения в СИ – $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$

Кинетическим моментом механической системы относительно центра O называется её главный момент количества движения относительно того же центра:

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^N \bar{k}_{Ok} = \sum_{k=1}^N (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) \quad (14.22)$$

(не следует здесь путать индекс суммирования k с вектором момента количества движения \bar{k}).

С учётом (14.21) запишем формулы для проекций кинетического момента системы на оси координат:

$$K_x = \sum_{k=1}^N m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k), \quad K_y = \sum_{k=1}^N m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k), \quad K_z = \sum_{k=1}^N m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k). \quad (14.23)$$

Понятие кинетического момента используется при исследовании динамики вращательного движения механической системы относительно центра, либо относительно оси. Например, планета вращается вокруг Солнца, колесо вращается вокруг оси.

14.10. Проекция кинетического момента твёрдого тела на неподвижную ось вращения этого тела. Рассмотрим твёрдое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью $\bar{\omega}$, и вычислим проекцию кинетического момента на ось вращения (рис. 14.4).

Выделим в твёрдом теле произвольную точку A_k массы m_k . Её положение определим радиус-вектором $\bar{r}_k = \bar{i}x_k + \bar{j}y_k + \bar{k}z_k$ с началом в центре O на оси вращения. Проекция момента количества движения \bar{k}_O указанной точки на ось Oz , согласно (14.21)

$$k_z = m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k).$$

По формуле Эйлера

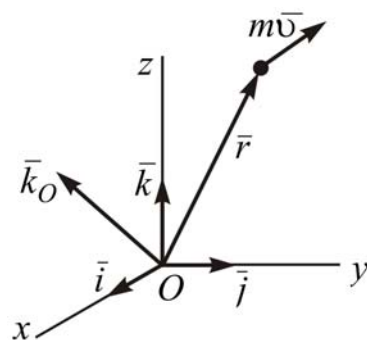


Рис. 14.4

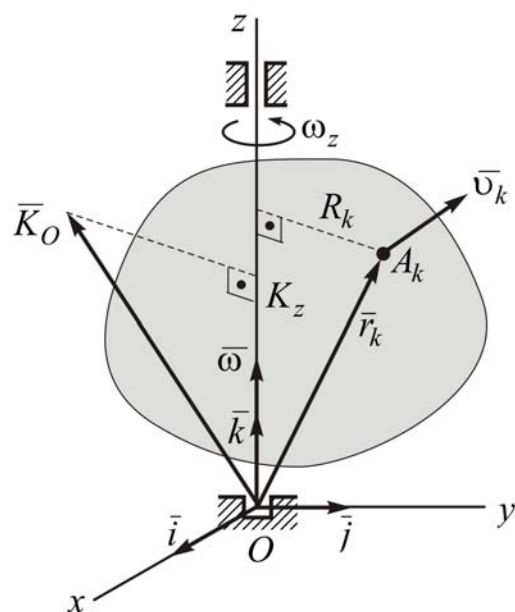


Рис. 14.4

$$\bar{v}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} = \bar{i}(-\omega_z y_k) + \bar{j}(\omega_z x_k).$$

Следовательно, проекции вектора скорости точки на оси Ox и Oy вычисляются по формулам $\dot{x}_k = v_{kx} = -\omega_z y_k$, $\dot{y}_k = v_{ky} = \omega_z x_k$. Тогда

$$k_z = m_k [x_k(\omega_z x_k) - y_k(-\omega_z y_k)] = \omega_z m_k (x_k^2 + y_k^2). \quad (14.24)$$

Геометрический смысл величины $(x_k^2 + y_k^2)$ – квадрат расстояния от точки A_k до оси вращения Oz : $R_k^2 = x_k^2 + y_k^2$.

Просуммировав выражения (14.24) по всем точкам, получим

$$K_z = \sum_{k=1}^N \omega_z m_k R_k^2 = \omega_z \sum_{k=1}^N m_k R_k^2 = \omega_z J_z, \text{ где величина } J_z = \sum_{k=1}^N m_k R_k^2 \text{ – момент инерции}$$

тела относительно оси Oz . Окончательно имеем

$$K_z = J_z \omega_z. \quad (14.25)$$

Знак величины K_z определяется знаком проекции угловой скорости ω_z .

Замечание. Следует обратить внимание, что в данной механической системе вектор кинетического момента относительно центра O $\bar{K}_O = K_x \bar{i} + K_y \bar{j} + K_z \bar{k}$ не направлен по оси вращения тела. Проекции кинетического момента на оси Ox и Oy , как будет доказано ниже, вычисляются в рассматриваемой задаче по формулам: $K_x = -J_{zx} \omega_z$, $K_y = -J_{yz} \omega_z$. И лишь в случае если ось Oz – главная ось инерции, то $J_{yz} = J_{zx} = 0$ и, следовательно, $K_x = K_y = 0$, $\bar{K}_O = K_z \bar{k}$ и вектор \bar{K}_O окажется направленным вдоль оси вращения. В этом частном случае для вектора кинетического момента будет справедливой формула

$$\bar{K}_O = J_z \bar{\omega}. \quad (14.26)$$

14.11. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Момент количества движения точки величина переменная, что вытекает из определения $\bar{k}_O = \bar{r}(t) \times m \bar{v}(t)$. Выведем уравнение, которому подчиняется изменение вектора \bar{k}_O , для чего вычислим производную по времени $d\bar{k}_O/dt$:

$$\frac{d\bar{k}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m \bar{v}) = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m \bar{v} + \bar{r} \times \frac{d(m \bar{v})}{dt} = \bar{v} \times m \bar{v} + \bar{r} \times \bar{F} = 0 + \bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_O(\bar{F}).$$

Таким образом, получили

$$\frac{d\bar{k}_O}{dt} = \bar{M}_O(\bar{F}) \quad (14.27)$$

Уравнение (14.27) выражает теорему об изменении момента количества движения материальной точки: *производная по времени от момента количества движения точки относительно неподвижного центра O равна векторному моменту равнодействующей силы относительно того же центра O .*

В проекциях на декартовы оси координат

$$\frac{dk_x}{dt} = M_x(\bar{F}), \quad \frac{dk_y}{dt} = M_y(\bar{F}), \quad \frac{dk_z}{dt} = M_z(\bar{F}). \quad (14.28)$$

14.12. Теорема об изменении кинетического момента механической системы.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек, и для каждой из них запишем теорему об изменении момента количества движения относительно неподвижного центра O :

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (14.29)$$

Здесь $\bar{F}_k^{(e)}$ – равнодействующая всех внешних, а $\bar{F}_k^{(i)}$ – равнодействующая всех внутренних сил действующих на k -ю точку.

Просуммируем равенства (14.29) по всем точкам

$$\sum_{k=1}^N \frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)}.$$

Проанализируем полученное уравнение. В левой его части стоит производная по времени от кинетического момента механической системы вычисленного относительно неподвижного центра O . Действительно,

$$\sum_{k=1}^N \frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \frac{d}{dt} \bar{K}_O.$$

Первое слагаемое в правой части есть главный момент всех внешних сил: $\sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)}) = \bar{L}_O^{(e)}$. Второе слагаемое в правой части равно нулю по свойству внутренних сил. Поэтому уравнение можно записать в виде

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)}) \quad (14.30)$$

и выражает оно теорему об изменении кинетического момента механической системы: *производная по времени от кинетического момента относительно неподвижного центра O равна главному моменту внешних сил относительно того же центра O .*

В проекциях на оси координат

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^N M_x(\bar{F}_k^{(e)}), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{k=1}^N M_y(\bar{F}_k^{(e)}), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^N M_z(\bar{F}_k^{(e)}). \quad (14.31)$$

14.13. Законы сохранения кинетического момента. 1. Если главный момент

внешних сил равен нулю, $\bar{L}_O^{(e)} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)}) = 0$, то из уравнения (14.30) следует,

что вектор кинетического момента не меняется $\bar{K}_O = \text{const}$.

Это векторное равенство эквивалентно трём скалярным

$$K_x = C_1, \quad K_y = C_2, \quad K_z = C_3. \quad (14.32)$$

Пример. Рассмотрим движение планеты (например, Земля) под действием силы гравитации \bar{G} к Солнцу, считая его неподвижным (рис. 14.5) и пренебрегая притяжением других планет. В этом случае

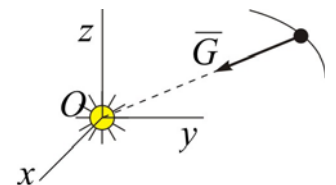


Рис. 14.5

момент силы притяжения относительно центра O $\vec{M}_O(\vec{G}) = \vec{r} \times \vec{G} = 0$ так как перемножаемые векторы коллинеарны и, следовательно, имеет место только что рассмотренный закон сохранения кинетического момента. Уравнения (14.32), с учётом (14.21), запишем в виде

$$m(y\ddot{z} - z\ddot{y}) = C_1, \quad m(z\ddot{x} - x\ddot{z}) = C_2, \quad m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) = C_3.$$

Если первое из полученных уравнений умножить на x , второе на y и третье на z и после этого почленно сложить, то придём к соотношению $0 = C_1x + C_2y + C_3z$, из которого следует, что движение планеты будет происходить в неподвижной плоскости проходящей через Солнце.

2. Может случиться, что главный момент внешних сил относительно центра O не равен нулю, но равна нулю его проекция на одно из направлений, например, направление оси Oz . Тогда из (14.31) следует, что $K_z = \text{const}$.

Пример. Скамья Жуковского представляет диск, который достаточно легко может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси (оси Oz на рисунке 14.6). Исследователь встаёт на диск, разводит руки в стороны и ему сообщается угловая скорость ω_0 . Затем исследователь руки опускает, максимально прижимая их к туловищу. При этом угловая скорость вращения ω заметно возрастает: $\omega > \omega_0$. Необходимо объяснить данный эффект.

Решение. Внешними силами, действующие на систему исследователь–диск, являются силы тяжести и реакция \vec{R}_O подпятника O . Момент каждой из указанных сил относительно оси Oz равен нулю. Следовательно, имеет место закон сохранения $K_z = C_1$.

По формуле (14.25), для твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz , проекция кинетического момента на ось вращения равна произведению осевого момента инерции на угловую скорость вращения: $K_z = J_z \omega_z$. В начальном положении, когда руки разведены в стороны, момент инерции, обозначим его J_{z0} , максимален. Когда же руки прижаты к туловищу, то момент инерции J_z минимален. По закону сохранения $J_{z0}\omega_{z0} = J_z\omega_z$, откуда

следует $\omega_z = \omega_{z0} \frac{J_{z0}}{J_z} > \omega_{z0}$, так как $\frac{J_{z0}}{J_z} > 1$.

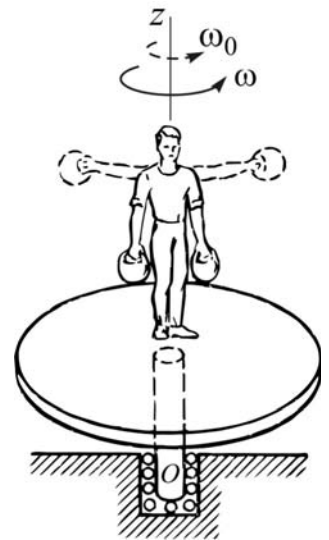


Рис. 14.6

14.14. Дифференциальное уравнение вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Как известно из кинематики, положение твёрдого тела при его вращательном движении вокруг неподвижной оси определяется одной координатой – углом поворота φ вокруг этой оси (рис. 14.7).

При вращении тела под действием сил и моментов угол поворота меняется.

Какому уравнению (какому закону) подчиняется изменение угла поворота?

Для вывода такого уравнения воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы в проекции

на ось вращения Oz (14.31): $\frac{d\vec{K}_z}{dt} = \sum_{k=1}^N M_z(\vec{F}_k^{(e)})$. Для твёр-

дого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси враще-

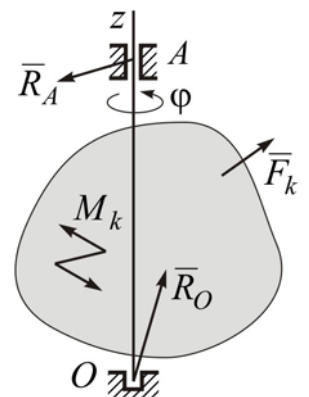


Рис. 14.7

ния, кинетический момент в проекции на эту ось $K_z = J_z \omega_z$, где осевой момент инерции $J_z = \text{const}$. Тогда указанную выше теорему можно записать в виде

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^N M_z(\bar{F}_k^{(e)}). \quad (14.33)$$

Уравнение (14.33) есть уравнение вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

Пример. Однородный диск массы $m = 4 \text{ кг}$ и радиуса $r = 0,2 \text{ м}$ может свободно (без трения) вращаться вокруг неподвижной оси Oz совпадающей с осью симметрии диска (рис. 14.8). К вращающемуся с угловой скоростью $\omega_0 = 2 \text{ с}^{-1}$ диску прикладывают пару сил с моментом $M_z = 0,1t \text{ Нм}$.

Найти кинематическое уравнение движения $\varphi = \varphi(t)$.

Массой вала, удерживающего диск, пренебречь. В начальном положении угол поворота диска принять равным нулю.

Решение. Рассмотрим вращательное движение твёрдого тела диск–вал и укажем действие на него внешних сил и моментов: пара сил с моментом M_z , сила тяжести $m\bar{g}$, реакция \bar{R}_A подшипника A и реакция \bar{R}_B подшипника B . Момент каждой из сил $m\bar{g}$, \bar{R}_A , \bar{R}_B относительно оси Oz равен нулю. Следовательно, с учётом того, что для диска момент инерции $J_z = \frac{mr^2}{2}$, дифференциальное уравнение (14.33) вращательного движения твёрдого вокруг неподвижной оси в данной задаче можно записать в виде $\frac{mr^2}{2} \ddot{\varphi} = M_z$. После подстановки числовых значений и сокращений, получим $\ddot{\varphi} = 1,25t$.

Следующим шагом в решении задачи является интегрирование полученного дифференциального уравнения: $\frac{d\omega}{dt} = 1,25t \Rightarrow d\omega = 1,25tdt \Rightarrow \int d\omega = \int 1,25tdt + C_1 \Rightarrow \omega = 1,25\frac{t^2}{2} + C_1 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = 1,25\frac{t^2}{2} + C_1 \Rightarrow d\varphi = (1,25\frac{t^2}{2} + C_1)dt \Rightarrow \int d\varphi = \int (1,25\frac{t^2}{2} + C_1)dt + C_2 \Rightarrow \varphi = 1,25\frac{t^3}{6} + C_1t + C_2$.

Запишем соотношения $\omega = 1,25\frac{t^2}{2} + C_1$ и $\varphi = 1,25\frac{t^3}{6} + C_1t + C_2$ в начальном положении твёрдого тела: $\begin{cases} 2 = 0 + C_1, \\ 0 = 0 + 0 + C_2. \end{cases}$

Следовательно, произвольные постоянные интегрирования имеют значения $C_1 = 2$, $C_2 = 0$ и угол поворота диска изменяется по закону $\varphi = 1,25\frac{t^3}{6} + 2t$.

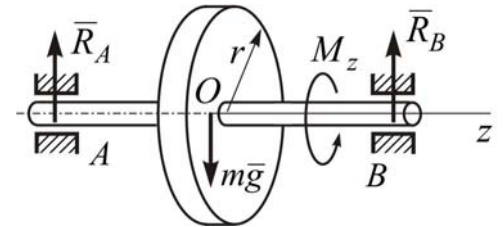


Рис. 14.8

14.15. Кинетический момент механической системы при сложном её движении. Рассмотрим движение некоторой совокупности материальных точек относительно неподвижной системы отсчёта $Oxyz$ (рис. 14.9). Введём в рассмотрение ещё

одну систему координат $Sx'y'z'$ с началом в центре масс механической системы и осями параллельными соответствующим осям неподвижной системы координат. В этом случае система отсчёта $Sx'y'z'$ будет совершать поступательное движение и называют её кёниговой системой отсчёта.

Можно вычислить кинетический момент механической системы относительно неподвижного центра O и относительно подвижного центра масс C . Нас будет интересовать связь между этими величинами.

Положение произвольной точки A_k относительно неподвижного центра определим радиус-вектором \vec{r}_k , относительно подвижного центра масс радиус-вектором $\vec{\rho}_k$. Очевидно соотношение

$$\vec{r}_k = \vec{r}_C + \vec{\rho}_k, \quad (14.34)$$

где \vec{r}_C – радиус-вектор центра C .

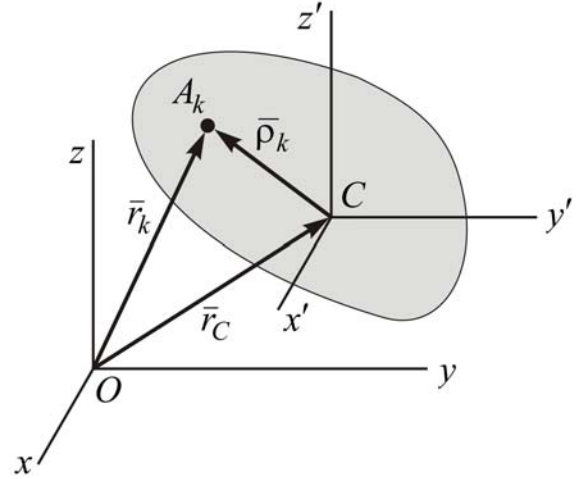


Рис. 14.9

Вычислим производную по времени от равенства (14.33) $\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d\vec{r}_C}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_k}{dt}$, или,

$$\vec{v}_k = \vec{v}_C + \frac{d\vec{\rho}_k}{dt}.$$

Так как радиус-вектор $\vec{\rho}_k$ задан в подвижной системе координат, то производную от этого вектора нужно вычислять по формуле Бура: $\frac{d\vec{\rho}_k}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{\rho}_k}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}_k$. Здесь локальная производная определяет скорость движения точки относительно подвижной системы отсчёта, $\frac{\tilde{d}\vec{\rho}_k}{dt} = \vec{v}_k^r$, а угловая скорость ω_e поворота подвижных осей, движущихся поступательно, равна нулю. Следовательно, имеем следующее соотношение между векторами скоростей

$$\vec{v}_k = \vec{v}_C + \vec{v}_k^r. \quad (14.35)$$

Подставим соотношения (14.34) и (14.35) в формулу (14.22) для кинетического момента системы относительно неподвижного центра O и преобразуем её.

$$\begin{aligned} \vec{K}_O &= \sum_{k=1}^N (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^N [(\vec{r}_C + \vec{\rho}_k) \times m_k (\vec{v}_C + \vec{v}_k^r)] = \\ &= \sum_{k=1}^N (\vec{r}_C \times m_k \vec{v}_C) + \sum_{k=1}^N (\vec{r}_C \times m_k \vec{v}_k^r) + \sum_{k=1}^N (\vec{\rho}_k \times m_k \vec{v}_C) + \sum_{k=1}^N (\vec{\rho}_k \times m_k \vec{v}_k^r). \end{aligned}$$

Упростим, насколько возможно, каждое из слагаемых правой части последнего выражения.

Первое слагаемое: $\sum_{k=1}^N (\bar{r}_C \times m_k \bar{v}_C) = \bar{r}_C \times \left[\left(\sum_{k=1}^N m_k \right) \bar{v}_C \right] = \bar{r}_C \times M \bar{v}_C$. Здесь $M = \sum_{k=1}^N m_k$

– масса всей системы.

Второе слагаемое: $\sum_{k=1}^N (\bar{r}_C \times m_k \bar{v}_k') = \bar{r}_C \times \frac{\tilde{d}}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \bar{\rho}_k = \bar{r}_C \times \frac{\tilde{d}}{dt} M \bar{\rho}_C = 0$. Здесь $\bar{\rho}_C = 0$,

так как начало отсчёта подвижной системы координат взято в центре масс системы.

По той же причине обращается в нуль третье слагаемое:

$$\sum_{k=1}^N (\bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_C) = \left(\sum_{k=1}^N m_k \bar{\rho}_k \right) \times \bar{v}_C = M \bar{\rho}_C \times \bar{v}_C = 0 \times \bar{v}_C = 0.$$

Четвёртое слагаемое не упрощается, так как все сомножители зависят от индекса суммирования k . Следовательно, это есть определение некоторой физической величины. А именно, так вычисляется кинетический момент системы относительно подвижного центра масс, который обозначим \bar{K}_C^r .

Окончательно приходим к следующему результату:

$$\bar{K}_O = \bar{r}_C \times M \bar{v}_C + \bar{K}_C^r. \quad (14.36)$$

Кинетический момент системы при сложном её движении равен моменту количества движения центра масс, считая, что в нём сосредоточена масса всей системы, плюс кинетический момент относительно подвижного центра масс.

Пример. По неподвижному горизонтальному рельсу катится без проскальзывания однородный диск массы $M = 2$ кг и радиуса $R = 0,6$ м. Скорость центра масс диска $v_C = 4$ м/с.

Вычислить кинетический момент диска относительно произвольной точки рельса.

Решение. Введём в рассмотрение две правых прямоугольных системы координат, неподвижную $Oxyz$ с началом в произвольной точке O рельса и поступательно движущуюся $Cx'y'z'$ с началом в центре масс C диска (рис. 14.10). В этом случае оси Oz и Cz' будут направлены перпендикулярно плоскости рисунка (на нас).

Диск совершает сложное движение, а именно плоское, состоящее из поступательного вместе с центром масс C и вращательного вокруг оси Cz' . Потому для вычисления кинетического момента диска воспользуемся формулой (14.36).

Вектор $\bar{r}_C \times M \bar{v}_C$ направлен в положительном направлении оси Oz а его модуль $|\bar{r}_C \times M \bar{v}_C| = |\bar{r}_C| \cdot |M \bar{v}_C| \cdot \sin \alpha = MR v_C = 4,8 \text{ кгм}^2/\text{с}$, так как $|\bar{r}_C| \sin \alpha = R$.

Определим вектор \bar{K}_C^r . Относительным движением диска по отношению к подвижным осям $Cx'y'z'$ будет его вращение в положительном направлении вокруг оси Cz' . Поэтому, кинетический момент относительно движения \bar{K}_C^r нужно вычислять как кинетический

момент твёрдого тела вращающегося как бы вокруг неподвижной оси Cz' совпадающей с осью материальной симметрии диска. В этом случае $\bar{K}_C^r = J_z \bar{\omega}$ (см. формулу 14.26). Здесь вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ направлен в положительном направлении оси Cz' или, всё равно, что оси Oz , по модулю равен v_C/R , а $J_z = MR^2/2$. Следовательно, направлен вектор \bar{K}_C^r в положительном на-

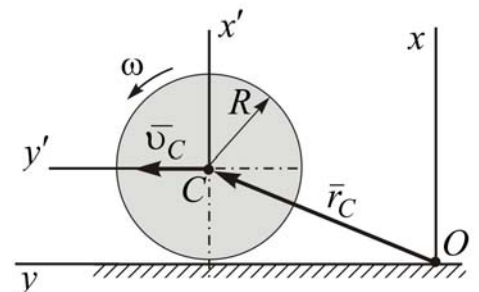


Рис. 14.10

правлении оси Oz и по модулю $|\bar{K}_C^r| = MRv_C/2$. Окончательно приходим к выводу, что направлен вектор кинетического момента диска в положительном направлении оси Oz и по модулю равен $\frac{3}{2}MRv_C$.

14.16. Теорема об изменении кинетического момента относительно подвижного центра масс. Ранее было получено уравнение (14.30), определяющее закон изменения кинетического момента относительно неподвижного центра. Но, как увидим ниже, для решений задач динамики важным является также знание закона, которому удовлетворяет изменение кинетического момента относительно подвижного центра масс системы. К выводу такого уравнения сейчас приступаем.

Итак, рассмотрим движение механической системы состоящей из точек A_1, A_2, \dots, A_N массы которых соответственно равны m_1, m_2, \dots, m_N . Введём в рассмотрение две системы отсчёта, неподвижную $Oxyz$ и подвижную $Cx'y'z'$ с началом в центре масс системы и осями параллельными соответствующим неподвижным осям. Для геометрической иллюстрации наших рассуждений будем использовать рисунок 14.9.

В уравнении, выражающем теорему об изменении кинетического момента относительно неподвижного центра O

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^N (\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}),$$

заменяем \bar{K}_O согласно (14.36) и \bar{r}_k согласно (14.34)

$$\frac{d}{dt} (\bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \bar{K}_C^r) = \sum_{k=1}^N [(\bar{r}_C + \bar{\rho}_k) \times \bar{F}_k^{(e)}]$$

и раскроем скобки:

$$\frac{d\bar{r}_C}{dt} \times M\bar{v}_C + \bar{r}_C \times \frac{dM\bar{v}_C}{dt} + \frac{d\bar{K}_C^r}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar{r}_C \times \bar{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^{(e)}. \quad (14.37)$$

В полученном выражении: $\frac{d\bar{r}_C}{dt} \times M\bar{v}_C = \bar{v}_C \times M\bar{v}_C = 0$ как векторное произведение коллинеарных векторов; $\bar{r}_C \times \frac{dM\bar{v}_C}{dt} = \bar{r}_C \times \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}$ с учётом теоремы о движении центра масс механической системы; $\sum_{k=1}^N \bar{r}_C \times \bar{F}_k^{(e)} = \bar{r}_C \times \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}$ – не зависящая от индекса суммирования величина \bar{r}_C вынесена за знак суммы; $\sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^{(e)} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_C(\bar{F}_k^{(e)})$ – по определению векторного момента силы относительно центра C .

Тогда, уравнение (14.37) преобразуется к виду

$$\frac{d\bar{K}_C^r}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_C (\bar{F}_k^{(e)}). \quad (14.38)$$

В проекции на оси подвижной системы координат

$$\begin{aligned} \frac{dK_{Cx'}^r}{dt} &= \sum_{k=1}^N M_{Cx'} (\bar{F}_k^{(e)}), \\ \frac{dK_{Cy'}^r}{dt} &= \sum_{k=1}^N M_{Cy'} (\bar{F}_k^{(e)}), \\ \frac{dK_{Cz'}^r}{dt} &= \sum_{k=1}^N M_{Cz'} (\bar{F}_k^{(e)}). \end{aligned} \quad (14.39)$$

Уравнение (14.38) выражает теорему об изменении кинетического момента относительно подвижного центра масс: *производная по времени от вектора кинетического момента системы, вычисленного в кёниговой системе отсчёта, равна векторной сумме моментов всех внешних сил относительно центра масс.*

14.17. Дифференциальные уравнения плоского движения твёрдого тела. Определим положение твёрдого тела при плоском его движении координатами x_C, y_C , определяющими положение центра масс C тела, и углом поворота φ , определяющим поворот тела вокруг центра масс (рис. 14.11). При движении тела эти координаты меняются. Каким уравнениям подчиняется их изменение?

По теореме о движении центра масс системы в проекции на оси Ox и Oy

$$Ma_{Cx} = \sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)}, \quad Ma_{Cy} = \sum_{k=1}^N F_{ky}^{(e)} \quad (14.40)$$

где M – масса тела, a_{Cx} и a_{Cy} – проекции ускорения центра масс тела на соответствующие оси.

Согласно теореме об изменении кинетического момента относительно подвижного центра масс (14.39) в проекции на подвижную ось Cz'

$$\frac{dK_{Cz'}^r}{dt} = \sum_{k=1}^N M_{Cz'} (\bar{F}_k^{(e)}). \quad (14.41)$$

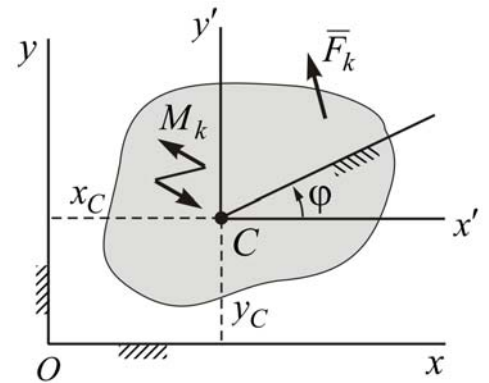


Рис. 14.11

Учтём, что $a_{Cx} = \ddot{x}_C$, $a_{Cy} = \ddot{y}_C$, $K_{Cz'}^r = J_{Cz'} \dot{\varphi}$. Тогда уравнения (14.40) и (14.41) можно переписать в виде следующей системы уравнений

$$\begin{cases} M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)}, \\ M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^N F_{ky}^{(e)}, \\ J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^N M_{Cz}(\overline{F}_k^{(e)}) \end{cases} \quad (14.42)$$

которые представляют собой дифференциальные уравнения плоского движения твёрдого тела.

Не обязательно для определения положения центра масс тела использовать декартовы координаты x_C , y_C . Можно теорему о движении центра масс (14.3) спроецировать, например, на оси естественной системы координат. Тогда, первые два уравнения из системы (14.42) будут иметь вид $M\ddot{s}_C = \sum_{k=1}^N F_{k\tau}^{(e)}$, $M \frac{(\dot{s}_C)^2}{\rho} = \sum_{k=1}^N F_{kn}^{(e)}$, где

s_C – дуговая координата центра масс тела.

Пример. Ведущее колесо автомашины начинает движение из состояния покоя с пробуксовкой под действием вращающего момента $M_{вр} = 50$ Нм.

Коэффициент трения скольжения между колесом и дорогой $f = 0,5$. Масса колеса $m = 20$ кг, его радиус $R = 0,2$ м.

Найти уравнения движения колеса, приняв его за однородный диск и пренебрегая трением качения.

Решение. Колесо совершает плоское движение. Покажем его в произвольном положении (рис. 14.12) и обозначим действующие на него внешние силы и моменты внешних сил: сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция \vec{N} опорной поверхности, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и момент $M_{вр}$. Дифференциальные уравнения (14.42) для данной задачи имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = F_{тр}, & (a) \\ 0 = N - mg, & (б) \\ \frac{mR^2}{2}(-\ddot{\varphi}) = -M_{вр} + F_{тр}R. & (в) \end{cases}$$

Из уравнения (б) следует $N = mg = 20 \cdot 9,81 = 196,2$ Н.

По условию задачи колесо катится с проскальзыванием. В этом случае сила трения достигает своего максимально возможного значения $F_{тр} = fN = 0,5 \cdot 196,2 = 98,1$ Н и из уравнения (а) следует

$$\ddot{x}_C = \frac{F_{тр}}{m} = \frac{98,1}{20} = 4,905 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \text{ а из уравнения (в) следует}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{2}{mR^2}(M_{вр} - F_{тр}R) = \frac{2}{20 \cdot 0,2^2}(50 - 98,1 \cdot 0,2) = 75,95 \text{ с}^{-2}.$$

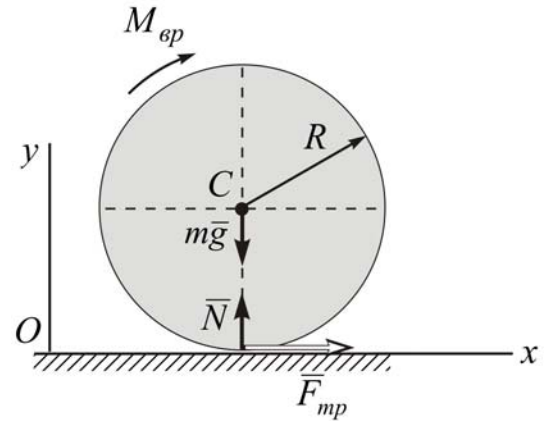


Рис. 14.12

Перейдя от постоянных ускорений к координатам, имеем $x_C = 4,905 \frac{t^2}{2} + v_{0x}t + x_{C0}$,
 $\varphi = 75,95 \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0$. Здесь $v_{0x} = \omega_0 = 0$ по условию задачи (движение начинается из состояния покоя). Пользуясь произвольностью выбора начала отсчёта координат, принимаем $x_{C0} = \varphi_0 = 0$.

Окончательно, уравнения движения колеса имеют вид

$$x_C = 2,45t^2 \text{ м}, \quad y_C = R = 0,2 \text{ м}, \quad \varphi = 37,96t^2 \text{ рад}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии

14.18. Кинетическая энергия точки и системы. Теорема Кёнига. Кинетическую энергию материальной точки массой m , движущейся с абсолютной скоростью \bar{v} , определяют по формуле

$$T = m\bar{v}^2 / 2.$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий точек этой системы:

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{m_k \bar{v}_k^2}{2}. \quad (14.43)$$

Кинетическая энергия – положительная скалярная величина. Единицей измерения кинетической энергии в системе СИ является джоуль (Дж).

Как может вычисляться кинетическая энергия системы при сложном её движении? Для ответа на данный вопрос дополнительно к неподвижной системе отсчёта $Oxyz$ (рис. 14.13) введём в рассмотрение ещё подвижную систему отсчёта $Cx'y'z'$ с началом в центре масс – точке C , движущуюся поступательно с центром масс (кёнигову систему отсчёта). Абсолютное движение системы при этом можно рассматривать как совокупность переносного (вместе с центром масс) и относительного (по отношению к центру масс) движений системы.

Для любого момента времени положение произвольной точки M_k системы по отношению к неподвижному центру O определяет радиус-вектор

$$\bar{r}_k = \bar{r}_C + \bar{\rho}_k,$$

где $\bar{\rho}_k$ – радиус-вектор точки A_k по отношению к центру масс C . Продифференцировав это равенство по времени, найдём абсолютную скорость точки системы

$$\bar{v}_k = \bar{v}_C + \bar{v}_k^r,$$

где $\bar{v}_k^r = d\bar{\rho}_k / dt$ – относительная скорость точки (см. вывод (14.35)).

Учитывая, что квадрат вектора равен квадрату его модуля, преобразуем выражение кинетической энергии системы к виду

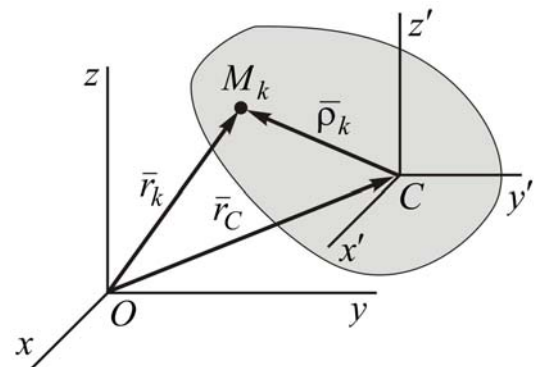


Рис. 14.13

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_C^2 + \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_C \bar{v}_k^r + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k (\bar{v}_k^r)^2.$$

Здесь

$$\sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_C \cdot \bar{v}_k^r = \bar{v}_C \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k^r = \bar{v}_C \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\bar{\rho}_k}{dt} = \bar{v}_C \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^N m_k \bar{\rho}_k \right) = 0,$$

поскольку $\sum_{k=1}^N m_k \bar{\rho}_k = M \bar{\rho}_C = 0$.

Таким образом,

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T_C^r, \quad (14.44)$$

где $M = \sum_{k=1}^N m_k$ – масса механической системы, $T_C^r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k (v_k^r)^2$ – кинетическая

энергия системы в её движении относительно кёниговой системы отсчёта.

Формула (14.44) выражает теорему Кенига: *кинетическая энергия механической системы в её абсолютном движении равна сумме кинетической энергии центра масс, в предположении, что в нём сосредоточена вся масса системы, и кинетической энергии системы относительно центра масс.*

14.19. Кинетическая энергия твёрдого тела при поступательном, вращательном и плоском его движениях. При поступательном движении твёрдого тела скорости всех его точек одинаковы и равны скорости центра масс, поэтому

$$T_{пост} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_C^2}{2} = \frac{v_C^2}{2} \sum_{k=1}^N m_k = \frac{1}{2} M v_C^2,$$

где M – масса твёрдого тела.

При вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω скорость его произвольной точки

$$v_k = \omega h_k,$$

где h_k – кратчайшее расстояние от точки M_k до оси вращения.

Тогда

$$T_{вр} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k (\omega h_k)^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^N m_k h_k^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2,$$

где $J_z = \sum_{k=1}^N m_k h_k^2$ – момент инерции тела относительно оси вращения Oz .

Плоское движение твёрдого тела можно рассматривать как совокупность поступательного движения вместе с центром масс со скоростью v_C и вращательного движения с угловой скоростью ω вокруг подвижной оси Cz' , движущейся поступательно вместе с центром масс. Тогда кинетическая энергия относительного движения $T_C^r = T_{вр} = \frac{1}{2} J_{Cz'} \omega^2$ и по теореме Кёнига

$$T_{пл} = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega^2.$$

14.20. Элементарная и полная работа силы и момента силы. *Элементарной работой силы называется скалярное произведение вектора силы на вектор элементарного перемещения точки приложения силы* (рис. 14.14):

$$dA = \vec{F} d\vec{r}. \quad (14.45)$$

Скалярное произведение векторов можно вычислить как произведение модулей перемножаемых векторов на косинус угла между ними. Тогда получается следующая формула для вычисления элементарной работы силы:

$$dA = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos(\vec{F} \wedge d\vec{r}).$$

Если известны разложения вектора силы $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ и радиус-вектора $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ по базисным векторам, то скалярное произведение можно вычислить как сумму попарных произведений координат и для элементарной работы силы получается формула, называемая аналитической:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (14.46)$$

Может быть полезной ещё одна формула для вычисления элементарной работы силы. Из определения вектора скорости $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ следует $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$. Тогда

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \vec{v} dt.$$

Мощностью силы называется производная работы по времени $W = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \vec{v}$. Характеризует быстроту совершения работы.

Работой силы (полной работой силы) на перемещении точки из положения M_0 в положение M_1 называется интеграл от элементарной работы силы вдоль криволинейной дуги $M_0 M_1$ (рис. 14.14):

$$A(\vec{F}) = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \vec{v} dt.$$

Получим, далее, формулу для вычисления элементарной и полной работы момента силы. Пусть на некоторую точку твёрдого тела имеющего возможность вращаться вокруг неподвижной оси Oz действует сила \vec{F} (рис. 14.15). Элементарная работа силы $dA = \vec{F} \vec{v} dt$. По формуле Эйлера $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Тогда

$$\begin{aligned} dA &= \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) dt = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O(\vec{F}) dt = \omega \cdot np_{\vec{\omega}}(\vec{M}_O(\vec{F})) \cdot dt = \\ &= \frac{d\varphi}{dt} \cdot M_{\omega} \cdot dt = M_{\omega} d\varphi. \end{aligned}$$

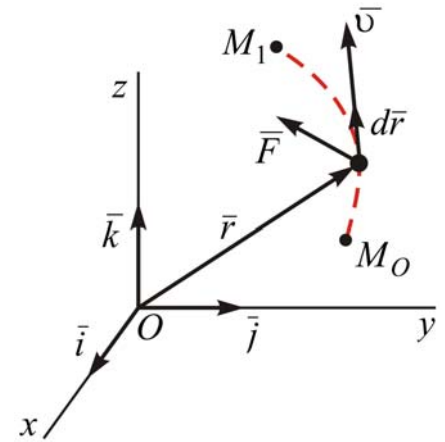


Рис. 14.14

Здесь через M_{ω} обозначена проекция векторного момента силы на направление вектора $\bar{\omega}$ угловой скорости.

Полученный результат может быть истолкован ещё и в такой форме. Действие силы на твёрдое тело, имеющее возможность вращаться вокруг неподвижной оси, характеризуется её вращающим действием, что количественно оценивается моментом этой силы. При повороте тела момент силы M_z совершает элементарную работу

$$dA(M_z) = M_z d\varphi. \quad (14.47)$$

Работа будет положительной, если направления момента $M_z(\bar{F})$ и приращения угла $d\varphi$ совпадают. В противном случае работа отрицательна.

Работа момента силы $A(M_z) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_z d\varphi$. Если мо-

мент постоянен, то его можно вынести за знак интеграла и, для этого частного случая, получается формула $A(M_z) = M_z(\varphi_1 - \varphi_0)$.

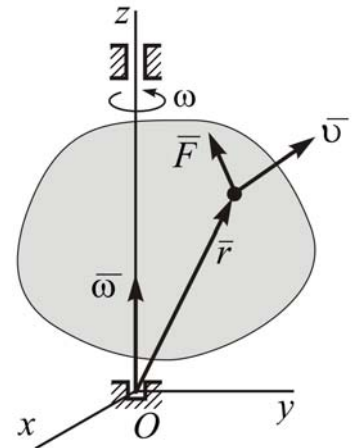


Рис. 14.15

14.21. Работа силы при свободном движении твёрдого тела. В кинематике было доказано, что свободное движение твёрдого тела можно представить как совокупность поступательного движения вместе с некоторой точкой называемой полюсом (точка A на рисунке 14.16) и сферического движения вокруг полюса. В этом случае скорость произвольной точки M складывается из переносной скорости вместе с полюсом и относительной вокруг полюса

$$\bar{v} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r},$$

где $\bar{\omega}$ – вектор мгновенной угловой скорости сферического движения. Тогда

$$\begin{aligned} dA &= \bar{F} \cdot \bar{v} dt = \bar{F} \cdot \bar{v}_A dt + \bar{F} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) dt = \\ &= \bar{F} \cdot d\bar{r}_A + \bar{\omega} \cdot \bar{M}_A(\bar{F}) dt = \bar{F} \cdot d\bar{r}_A + M_{\omega}(\bar{F}) d\varphi. \end{aligned}$$

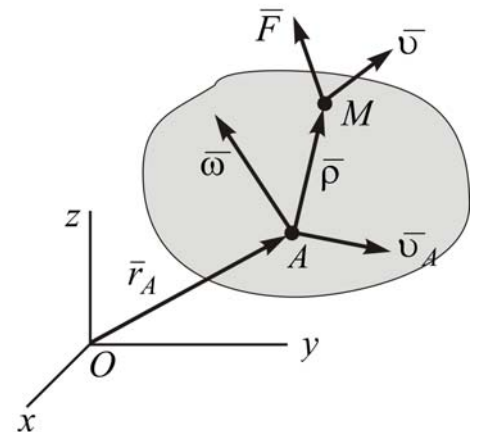


Рис. 14.16

Таким образом, *элементарная работа силы, приложенной к точке твёрдого тела совершающего свободное движение, равна сумме элементарных работ на элементарном поступательном перемещении вместе с полюсом и элементарном вращательном перемещении вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс.*

14.22. Работа внутренних сил твёрдого тела. Выделим в твёрдом теле (рис.14.17) две произвольные точки и вычислим сумму элементарных работ сил взаимодействия этих точек.

$$dA(\bar{F}_1^{(i)}) + dA(\bar{F}_2^{(i)}) = \bar{F}_1^{(i)} \cdot \bar{v}_A dt + \bar{F}_2^{(i)} \cdot \bar{v}_B dt = (F_1^{(i)} v_A \cos \alpha + F_2^{(i)} v_B \cos \beta) dt =$$

$= (F_1^{(i)} v_A \cos \alpha - F_2^{(i)} v_B \cos \beta') dt$. С учётом равенства модулей сил взаимодействия двух точек, а также равенства проекций скоростей двух точек на ось, проходящую через эти точки,

$$(F_1^{(i)} v_A \cos \alpha - F_2^{(i)} v_B \cos \beta') dt = \\ = F_1^{(i)} (v_A \cos \alpha - v_B \cos \beta') dt = F_1^{(i)} \cdot 0 \cdot dt = 0.$$

Следовательно, для сил взаимодействия двух любых точек твёрдого тела сумма работ на всяком элементарном, следовательно, и конечном перемещении равна нулю. А так как вся совокупность внутренних сил разбивается на попарные силы действия и противодействия, то и сумма работ всех внутренних сил твёрдого тела равна нулю.

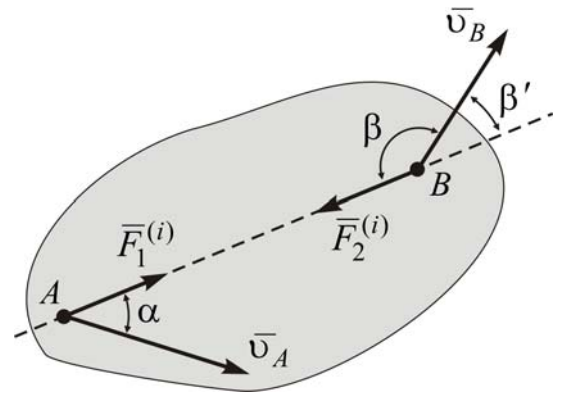


Рис. 14.17

14.23. Работа силы тяжести. Если для системы координат $Oxyz$ ось Oz направить вертикально вверх, то вектор силы тяжести $m\bar{g}$ через орты \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} осей координат запишется в виде $m\bar{g} = -mg\bar{k}$. Элементарная работа $dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -mg dz$. Работа силы, при перемещении точки из положения M_0 в положение M (рис. 14.18)

$$A(m\bar{g}) = \int_{M_0}^M dA(m\bar{g}) = \int_{z_0}^z -mg dz = -mg(z - z_0).$$

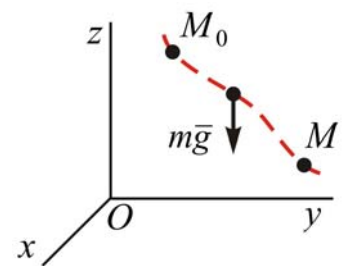


Рис. 14.18

Часто этот результат записывают в форме $A(m\bar{g}) = \pm mgh$, где h – перепад высот (который считаем всегда положительным). В последней формуле нужно взять знак «+», если материальная точка переместилась с большей высоты на меньшую.

14.24. Работа силы упругости. Рассмотрим пружину, работающую на растяжение (или сжатие). Длину пружины в недеформированном состоянии обозначим l_0 . При изменении длины такой пружины до значения l возникает сила упругости, модуль которой, в соответствии с законом Гука, вычисляется по формуле $|\bar{F}_{упр}| = c \cdot |\lambda|$, где c – коэффициент жесткости, $\lambda = (l - l_0)$ – деформация пружины.

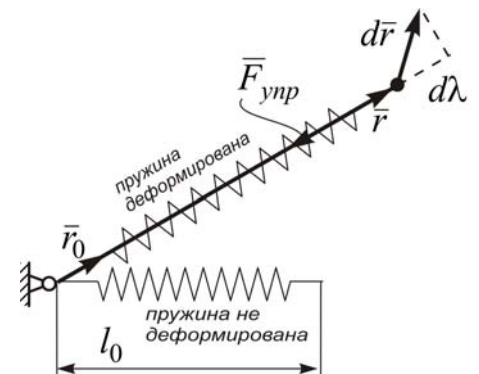


Рис. 14.19

Пусть длина деформации пружины изменена от значения λ_0 до λ . Необходимо вычислить работу, которую совершила сила упругости. Для этого рассмотрим пружину в произвольном деформированном состоянии (рис. 14.19). Вектор силы упру-

гости можно выразить формулой $\bar{F}_{ynp} = -c \cdot (l - l_0) \bar{r}_0 = -c \cdot \lambda \cdot \bar{r}_0$, где \bar{r}_0 - орт радиус-вектора точки приложения силы. Следовательно,

$$A(\bar{F}_{ynp}) = \int dA(\bar{F}_{ynp}) = \int \bar{F}_{ynp} \cdot d\bar{r} = \int (-c \cdot \lambda \cdot \bar{r}_0) \cdot d\bar{r}.$$

Скалярное произведение $\bar{r}_0 \cdot d\bar{r}$ равно элементарному удлинению $d\lambda$ пружины при изменении радиус-вектора от значения \bar{r} до $\bar{r} + d\bar{r}$. Действительно, $\bar{r}_0 \cdot d\bar{r} = |\bar{r}_0| \cdot |d\bar{r}| \cdot \cos(\bar{r}_0 \wedge d\bar{r}) = 1 \cdot |d\bar{r}| \cdot \cos(\bar{r}_0 \wedge d\bar{r}) = d\lambda$. Тогда,

$$A(\bar{F}_{ynp}) = -c \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda d\lambda = -\frac{c}{2} (\lambda^2 - \lambda_0^2). \quad (14.48)$$

14.25. Теорема об изменении кинетической энергии точки. При движении точки её кинетическая энергия $T(\bar{v}) = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$, в общем случае, меняется. Какому закону подчиняется это изменение? Для ответа на этот вопрос обе части уравнения

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F},$$

выражающего второй закон Ньютона, умножим скалярно на вектор $d\bar{r}$ элементарного перемещения точки:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{r} = \bar{F} \cdot d\bar{r}. \quad (14.49)$$

В правой части полученного равенства стоит элементарная работа силы, действующая на точку. Преобразуем левую часть: $m \frac{d\bar{v}}{dt} d\bar{r} = m \bar{v} d\bar{v} = d\left(\frac{m \bar{v}^2}{2}\right) = dT$. Следовательно, уравнение (14.49) имеет вид

$$dT = dA \quad (14.50)$$

и выражает теорему об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме: *дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе силы, действующей на точку.*

Если обе части уравнения (14.50) поделить на dt , то получим ещё одну запись той же теоремы: $\frac{dT}{dt} = W$.

Проинтегрируем уравнение (14.50) вдоль траектории движения точки при её перемещении из положения M_0 в положение M $\int_{T_0}^T dT = \int_{M_0}^M dA$, или

$$T - T_0 = A|_{M_0}^M \quad (14.51)$$

Уравнение (14.51) выражает теорему об изменении кинетической энергии точки в интегральной форме: *изменение кинетической энергии точки равно работе силы, действующей на точку.*

14.26. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

На каждую точку механической системы действуют, в общем случае, равнодействующая внешних сил $\bar{F}_k^{(e)}$ и равнодействующая внутренних сил $\bar{F}_k^{(i)}$. Тогда, уравнение (14.50) для произвольной точки можно записать в виде

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = dA(\bar{F}_k^{(e)}) + dA(\bar{F}_k^{(i)}), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (14.52)$$

Просуммировав это уравнение по всем точкам системы и вынося в левой части знак дифференциала за знак суммы, получим $d\left(\sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^N dA(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^N dA(\bar{F}_k^{(i)})$, или

$$dT = \sum_{k=1}^N dA(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^N dA(\bar{F}_k^{(i)}). \quad (14.53)$$

Формула (14.53) выражает теорему об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме: *дифференциал кинетической энергии механической системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему.*

Поделив уравнение (14.53) на dt , получим ещё одну запись той же теоремы:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^N W(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^N W(\bar{F}_k^{(i)}).$$

Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей всех внешних и внутренних сил, действующих на систему.

Проинтегрируем каждое из уравнений (14.52) по соответствующей траектории и после этого почленно просуммируем по всем точкам системы. Получим

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^N A(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^N A(\bar{F}_k^{(i)}). \quad (14.54)$$

Уравнение (14.54) выражает теорему об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной форме: *изменение кинетической энергии механической системы при её перемещении из начального положения в конечное равно сумме работ всех внешних и внутренних сил на этом перемещении.*

Потенциальное силовое поле

14.27. Потенциальное силовое поле и его войства. *Силовым полем называется часть пространства, в котором на материальную точку действует сила, зависящая от координат точки и времени:*

$$\bar{F} = \bar{F}(x, y, z, t).$$

Если сила явно не зависит от времени, то силовое поле называется стационарным. В частном случае, сила может быть постоянной. Силовое поле в этом случае называется однородным.

Стационарное силовое поле называется потенциальным, если существует такая скалярная функция $U(x, y, z)$, называемая силовой функцией, через которую проекции силы на оси координат вычисляются по формулам

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (14.55)$$

Эти три скалярных равенства можно записать в виде одного векторного

$$\vec{F} = \overline{\text{grad}}U, \quad (14.56)$$

$$\text{где } \overline{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}.$$

Как следует из определения (14.55), если вместо силовой функции $U(x, y, z)$ взять $U(x, y, z) + C$, где C – любая постоянная, то значение силы не изменится. Математики этот факт выражают так: силовая функция определяется с точностью до аддитивной постоянной. Для инженеров и физиков, может быть, более ценным является иная формулировка этого свойства: начало отсчёта силовой функций можно выбирать от любого положения механической системы.

Свойства потенциального силового поля. 1. Элементарная работа силы потенциального силового поля равна дифференциалу силовой функции:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU.$$

2. Работа силы потенциального силового поля равна разности значений силовой функции в конечном и начальном положениях:

$$A = \int_{M_0}^M dA = \int_{M_0}^M dU = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0). \quad (14.57)$$

В частности, если начальная и конечная точки совпадают, то работа равна нулю.

3. Условие потенциальности силового поля выражается системой уравнений

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0.$$

Докажем первое из этих равенств. Согласно определению (14.55) имеем

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}.$$

Для дважды дифференцируемой функции U , что предполагается, значение смешанных производных не зависит от порядка дифференцирования. Поэтому, если полученные равенства почленно вычесть, то убедимся, что $\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0$. Аналогично доказываются два других равенства.

14.28. Потенциальная энергия. Для потенциального поля сил наряду с силовой функцией U используется так же несколько иная функция, характеризующая запас энергии в данной точке силового поля, – потенциальная энергия Π .

Потенциальной энергией потенциального силового поля в данной точке называется работа силы поля действующей на материальную точку при перемещении её из данного положения M в начальное M_0 :

$$П = A|_M^{M_0} = \int_M^{M_0} dA = \int_M^{M_0} dU = U_0 - U$$

Как видно из этого определения, потенциальная энергия с точностью до несущественной постоянной U_0 отличается от силовой функции лишь знаком.

14.29. Примеры вычисления силовой функции и потенциальной энергии.

Для однородного поля силы тяжести (рис. 14.16) $dU = dA = -mgdz$. Следовательно,

$$U = \int dU = -mgz + C_1, \quad (14.58)$$

$$П = mgz + C_2.$$

Для работы силы упругости пружины ранее была получена формула (14.48)

$$A(\bar{F}_{\text{упр}}) = \int_{M_0}^M dA(\bar{F}_{\text{упр}}) = -c \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda d\lambda = -\frac{c}{2} (\lambda^2 - \lambda_0^2).$$

Следовательно, для силовой функции справедлива формула $U = -\frac{c}{2} \lambda^2 + C_1$, а для потенциальной энергии $П = \frac{c}{2} \lambda^2 + C_2$. Здесь деформация пружины λ должна быть выражена через координаты x, y, z . Если начало осей выбрано в положении, при котором $\lambda = 0$, то

$$U = -\frac{c}{2} (x^2 + y^2 + z^2) + C_1, \quad П = \frac{c}{2} (x^2 + y^2 + z^2) + C_2. \quad (14.59)$$

14.30. Поверхности уровня силовой функции. Для привлечения языка рисунков при изучении свойств потенциального силового поля вводится понятие поверхности уровня силовой функции.

Поверхностью уровня силовой функции называется множество точек пространства, удовлетворяющее уравнению $U(x, y, z) = C = \text{const}$.

Придавая постоянной C различные значения получим семейство поверхностей, разбивающее пространство. По виду этих поверхностей и их взаимному расположению можно судить об особенностях потенциального поля. Этот анализ основан на следующих свойствах.

Свойство 1. Сила, действующая на материальную точку со стороны поля, направлена перпендикулярно поверхности уровня в сторону возрастания силовой функции.

Свойство 2. Сила, действующая на материальную точку со стороны поля, имеет больший модуль в тех точках поля, где поверхности уровня расположены гуще (ближе друг к другу).

Эти два свойства следуют из уравнения (14.56).

Свойство 3. Работа силы, действующей на материальную точку со стороны поля равна нулю, если начальное и конечное положение точки расположены на одной и той же поверхности уровня.

Последнее свойство следует из формулы (14.57) и определения поверхности уровня силовой функции.

Для однородного поля силы тяжести поверхности уровня силовой функции, как следует из (14.58), описываются уравнением $-mgz = C$, т.е. являются горизонтальными плоскостями.

Из (14.59) следует, что для поля силы упругости поверхности уровня силовой функции представляют собой концентрические сферы, так как описываются уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = C$.

14.31. Закон сохранения механической энергии. Пусть на механическую систему действуют лишь потенциальные силы, т.е. силы, значение которых можно вычислить через силовую функцию по формулам

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

По теореме об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме

$$dT = \sum_{k=1}^N (F_{kx} dx_k + F_{ky} dy_k + F_{kz} dz_k) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial U}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial U}{\partial z_k} dz_k \right) = dU$$

Если перейти от силовой функции к потенциальной энергии, то последний результат можно записать в виде $d(T + \Pi) = 0$, откуда следует, что

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0.$$

Левая часть полученного уравнения представляет полную механическую энергию в конечном положении: $T + \Pi = E$. Правая часть представляет полную механическую систему в начальном положении: $T_0 + \Pi_0 = E_0$. Следовательно, *при движении механической системы лишь под действием потенциальных сил полная механическая энергия остаётся неизменной.*

Глава 15. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

15.1. Принцип Даламбера. Сила инерции. Принцип Даламбера сформулирован в 1743 г. и первоначально, в отличие от законов Ньютона, был предназначен для изучения движения несвободных механических систем. В настоящее время этот принцип и вытекающий из него метод кинестатики рассматривают как удобный приём, позволяющий дифференциальные уравнения динамики сводить к форме уравнений равновесия статики.

Рассмотрим, вначале, этот принцип применительно к точке. В соответствии с аксиомами динамики основное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}, \quad (15.1)$$

где \bar{F} - равнодействующая активных сил; \bar{R} - равнодействующая реакций связей;

$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$ - абсолютное ускорение точки.

Уравнение (15.1) можно также записать в виде

$$\bar{F} + \bar{R} + (-m\bar{a}) = 0.$$

Слагаемое $(-m\bar{a})$ обозначают $\bar{\Phi}$ и называют **даламберовой силой инерции** (или просто силой инерции). Основное уравнение динамики материальной точки при использовании силы инерции принимает следующий вид:

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0. \quad (15.2)$$

Так как указанные выше силы образуют систему сходящихся сил, то уравнение (15.2) можно рассматривать как условие равновесия системы сил $(\bar{F}, \bar{R}, \bar{\Phi})$. В этом и состоит принцип Даламбера для материальной точки. Формулируется он так: *при движении материальной точки в любой момент времени приложенные к ней активные силы и реакции связей вместе с силой инерции образуют систему сил, эквивалентную нулю (уравновешенную систему сил)*, т. е.

$$(\bar{F}, \bar{R}, \bar{\Phi}) \sim 0 \quad (15.3)$$

Отметим, что в формулировке принципа Даламбера речь идёт об уравновешенности определённой системы сил, а не о равновесии (покое) материальной точки.

Таким образом, дополняя систему активных сил и реакций связей, приложенных к точке, силой инерции, получаем уравновешенную систему сходящихся сил, для которой должно выполняться условие (15.2). В проекциях на оси декартовой системы координат имеем:

$$F_x + R_x + \Phi_x = 0; F_y + R_y + \Phi_y = 0; F_z + R_z + \Phi_z = 0,$$

где $\Phi_x = -m\ddot{x}$, $\Phi_y = -m\ddot{y}$, $\Phi_z = -m\ddot{z}$.

15.2. Принцип Даламбера для механической системы. Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек. Применяя принцип Даламбера к каждой точке системы, получаем

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0, \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (15.4)$$

где $\bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k$; \bar{F}_k и \bar{R}_k - равнодействующие активных сил и реакций связей, приложенных к k -ой точке. Условие (15.4) можно представить в виде

$$(\bar{F}_k, \bar{R}_k, \bar{\Phi}_k) \oslash 0, \quad k=1, 2, \dots, N,$$

Таким образом, для системы материальных точек принцип Даламбера формулируется так: *при движении механической системы в любой момент времени приложенные к каждой точке активные силы и реакции связей вместе с силами инерции образуют систему сил, эквивалентную нулю.*

Суммируя левые части уравнений (15.4) по всем точкам системы, получаем

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k + \sum_{k=1}^N \bar{R}_k + \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k = 0. \quad (15.5)$$

Умножив каждое уравнение в (15.4) векторно слева на радиус-вектор \bar{r}_k k -ой точки и просуммировав их, получим

$$\sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{F}_k + \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{R}_k + \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{R}_k) + \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{\Phi}_k) = 0, \quad (15.6)$$

Из (15.5) и (15.6) следует, что равны нулю главный вектор и главный момент относительно произвольного центра приведения O активных сил, реакций связей, приложенных ко всем точкам механической системы, и сил инерции. В проекциях на оси декартовой системы координат, начало которых совпадает с центром O , эти условия принимают вид известных уравнений равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N F_{kx} + \sum_{k=1}^N R_{kx} + \sum_{k=1}^N \Phi_{kx} &= 0; \\ \sum_{k=1}^N F_{ky} + \sum_{k=1}^N R_{ky} + \sum_{k=1}^N \Phi_{ky} &= 0; \\ \sum_{k=1}^N F_{kz} + \sum_{k=1}^N R_{kz} + \sum_{k=1}^N \Phi_{kz} &= 0; \\ \sum_{k=1}^N M_x(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^N M_x(\bar{R}_k) + \sum_{k=1}^N M_x(\bar{\Phi}_k) &= 0; \\ \sum_{k=1}^N M_y(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^N M_y(\bar{R}_k) + \sum_{k=1}^N M_y(\bar{\Phi}_k) &= 0; \\ \sum_{k=1}^N M_z(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^N M_z(\bar{R}_k) + \sum_{k=1}^N M_z(\bar{\Phi}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Если силы, приложенные к k -ой точке системы, разложить не на активные и реакции связей, а на внешнюю \bar{F}_k^e и внутреннюю \bar{F}_k^i , то уравнение примет вид

$$\bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)} + \bar{\Phi}_k = 0.$$

Так как главный вектор и главный момент внутренних сил системы относительно произвольного центра приведения равны нулю, то для (15.5) и (15.6) имеем соответственно

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{\Phi}_k) = 0. \quad (15.8)$$

Проецируя (15.8) на оси декартовой системы координат, получаем шесть уравнений равновесия системы сил, аналогичных уравнениям (15.7). Особенность этих уравнений состоит в том, что в них не входят внутренние силы.

Понятие о силе инерции и принцип Даламбера составляют основу метода *кинестатики*, который ставит своей целью применение методов статики, в частности, к задачам динамики машин и механизмов.

15.3. Главный вектор и главный момент сил инерции. В применении уравнений (15.7) предвидятся следующие трудности. Так как точек в механической системе может быть сколь угодно много, то необходимо будет учитывать столь же большое число сил инерции $\bar{\Phi}_k$, приложенные к каждой из точек. Но, из статики известно, что произвольную систему сил всегда можно заменить двумя величинами: главным вектором и главным моментом. Относительно произвольного неподвижного центра O главный вектор сил инерции

$$\bar{R}^\Phi = \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k = \sum_{k=1}^N (-m_k \ddot{\bar{r}}_k) = -\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_k \right) = -\frac{d^2}{dt^2} M \bar{r}_C = -M \ddot{\bar{r}}_C = -M \bar{a}_C,$$

а главный момент сил инерции

$$\bar{L}_O^\Phi = \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{\Phi}_k) = \sum_{k=1}^N (\bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k) = -\sum_{k=1}^N \left(\bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \right) = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = -\frac{d\bar{K}_O}{dt}.$$

Таким образом, *при любом движении механической системы главный вектор сил инерции равен взятому со знаком минус произведению массы системы на вектор ускорения центра масс, а главный момент сил инерции относительно произвольного центра O равен взятой со знаком минус производной по времени от кинетического момента системы относительно того же центра.*

Формулу для главного момента сил инерции можно было вывести из теоремы об изменении кинетического момента системы $\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)})$. Если переписать

последнее уравнение в виде $\sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)}) + \left(-\frac{d\bar{K}_O}{dt} \right) = 0$ и сравнить результат с принципом Даламбера для механической системы (15.8), то получим ту же формулу, что и выше.

У изучающих принцип Даламбера впервые иногда возникает вопрос: будет ли правильным, если всю совокупность сил инерций заменить её главным вектором \bar{R}^Φ приложенным в центре масс системы? Чтобы ответить на данный вопрос, запишем формулу (14.36) вычисления кинетического момента при сложном движении

механической системы $\bar{K}_O = \bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \bar{K}_C^r$. Из данной формулы следует, что если кинетический момент \bar{K}_C^r относительного движения по отношению к центру масс равен нулю, то ответ положителен. Действительно, в этом случае $\bar{L}_O^\Phi = -\frac{d\bar{K}_O}{dt} = -\frac{d}{dt}(\bar{r}_C \times M\bar{v}_C) = \bar{r}_C \times (-M\bar{a}_C)$, т.е. главный вектор сил инерции $\bar{R}^\Phi = -M\bar{a}_C$ приложен в центре масс. Этот случай реализуется, например, при поступательном движении твёрдого тела. Если же $\bar{K}_C^r \neq 0$, то ответ отрицателен.

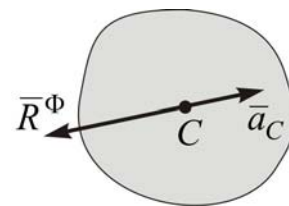


Рис. 15.1

При решении задач на семинарских занятиях наиболее часто встречаются следующие типы движений твёрдого тела: поступательное; вращательное вокруг неподвижной оси; плоское. Могут быть предложены следующие рекомендации по учёту сил инерций в этих случаях.

1. При поступательном движении силы инерции заменяем главным вектором сил инерций, приложенным в центре масс (рис. 15.1), что обосновано только что.

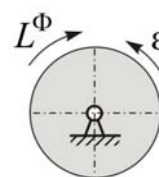


Рис. 15.2

2. Для твёрдого тела совершающего вращение вокруг неподвижной оси Oz , совпадающей с осью материальной симметрии тела (ось Oz главная центральная ось инерции), главный вектор сил инерции равен нулю, а главный момент сил инерции $\bar{L}_O^\Phi = -\frac{d\bar{K}_O}{dt} = -\frac{d}{dt}(J_z\bar{\omega}) = -J_z\bar{\varepsilon}$ (рис. 15.2).

3. При плоском движении твёрдого тела, в случае если подвижная ось Cz' главная центральная ось инерции, кинетический момент относительного движения $\bar{K}_C^r = J_{Cz'}\bar{\omega}$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{L}_O^\Phi &= -\frac{d\bar{K}_O}{dt} = -\frac{d}{dt}(\bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \bar{K}_C^r) = \\ &= \bar{r}_C \times \bar{R}^\Phi - J_{Cz'}\bar{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Следовательно, совокупность сил инерций заменяем главным вектором \bar{R}^Φ , приложенным в центре масс и парой сил с моментом $J_{Cz'}\bar{\varepsilon}$ (рис. 15.3).

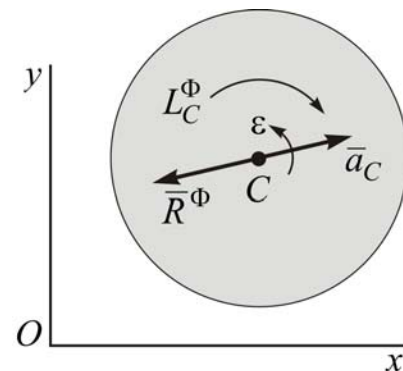


Рис. 15.3

Глава 16. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В аналитической механике изучаются различные виды движений механических систем (а также их равновесие) по единым алгоритмам.

Например, в предыдущей главе было доказано, что для вывода дифференциальных уравнений поступательного движения твёрдого тела необходимо воспользоваться теоремой о движении центра масс, а для вывода дифференциального уравнения вращательного движения твёрдого тела совсем другой теоремой – теоремой об изменении кинетического момента. В аналитической же механике, как убедимся позже, эти разные задачи решаются по единой методике.

16.1. Связи и их классификация. *Связями в аналитической механике называются ограничения на положение точек или тел и их скорости.* Например, небольшой предмет (материальная точка) находящийся на столе не может быть перемещён ниже поверхности стола. Этот факт из словесной формулировки можно перевести в математическую. Для этого введём систему координат $Oxyz$ с координатной плоскостью Oxy совпадающей с поверхностью стола и осью Oz направленной вверх. Тогда указанное ограничение может быть выражено неравенством

$$z \geq 0. \quad (16.1)$$

Связи физически реализуются в виде различных устройств или тел (стержни, нити, шарниры и т.д.). Математически связь описывается, в общем случае, уравнением

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_N, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{z}_N, t) = 0$$

либо неравенством

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_N, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{z}_N, t) \geq 0.$$

Не обязательно функция f будет зависеть от всех перечисленных аргументов. В некоторых простых случаях эта зависимость может быть всего от одной переменной, как в неравенстве (16.1).

Ограничивая движение механической системы, связи действуют на её точки посредством сил, которые называются реакциями связей. При изучении равновесия и движения механических систем применяется аксиома освобождаемости от связей: *систему с наложенными связями можно рассматривать как свободную (без связей), приложив к её точкам реакции, соответствующие (мысленно) отброшенным связям.*

Перейдём к классификации связей. Здесь необходимо иметь ввиду, что одна и та же связь классифицируется по нескольким признакам.

Связь называется голономной, если уравнение связи не содержит скоростей точек:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_N, t) = 0. \quad (16.2)$$

В противном случае связь называется неголономной.

В качестве примера рассмотрим сферический маятник (рис. 16.1). Точка A закреплена на конце стержня длины l . Стержень закреплён в неподвижной точке O с помощью сферического шарнира. В этом случае точка A не может занимать произвольное положение. Её координаты удовлетворяют соотношению $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = l^2$, или

$$x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - l^2 = 0. \quad (16.3)$$

В уравнение (16.3) не входят проекции скорости \dot{x}_A , \dot{y}_A , \dot{z}_A . Следовательно, движение точки подчинено голономной связи.

Геометрический образ голономной связи – поверхность в пространстве соответствующего числа измерений. В частности, уравнение (16.2) есть уравнение сферы с центром в начале координат радиуса l .

Конечно же, если продифференцировать по времени уравнение (16.2), то получим другое уравнение, в которое будут входить скорости. Например, если в рассмотренном выше примере сферического маятника вычислить производную по времени от обеих частей уравнения (15.3), то получим уравнение

$$x_A \dot{x}_A + y_A \dot{y}_A + z_A \dot{z}_A = 0. \quad (16.4)$$

Но, в этом случае, от уравнения (16.4) обратно, интегрированием, можно перейти к исходному уравнению, не содержащему скоростей. Уравнение же не голономной связи неинтегрируемо.

Связь называется стационарной, если уравнение связи не содержит времени. В противном случае связь называется нестационарной.

Уравнение (16.3) описывает голономную, стационарную связь. Приведём пример голономной нестационарной связи. Для этого несколько модернизируем предыдущий пример. Предположим, что в потолке имеется отверстие, через которое втягивается нить с постоянной скоростью v , а к нижнему концу нити привязан небольшой груз A (рис. 16.2). В этом случае, с учётом, что нить может быть и в ненапряжённом состоянии, груз может занимать любое положение внутри сферы переменного радиуса $l = (l_0 - vt)$,

где l_0 – длина свисающей части нити при $t = 0$. Следовательно, координаты груза удовлетворяют неравенству $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 \leq (l_0 - vt)^2$, которое перепишем в виде

$$(l_0 - vt)^2 - (x_A^2 + y_A^2 + z_A^2) \geq 0. \quad (16.5)$$

Уравнение (16.5) является уравнением голономной нестационарной связи.

Связь называется удерживающей (двухсторонней), если она выражается равенством, например (16.3). Неудерживающая связь выражается неравенством, например (16.5). Вообразим, что точка движется в зазоре между двумя близко расположенными поверхностями. Так можно представлять себе удерживающую связь. Если имеется лишь одна поверхность, то точка может перемещаться по этой поверхности, а может и покинуть её. Таков геометрический образ неудерживающей связи.

В данном курсе теоретической механики будем изучать механические системы, которые подчинены голономным удерживающим связям.

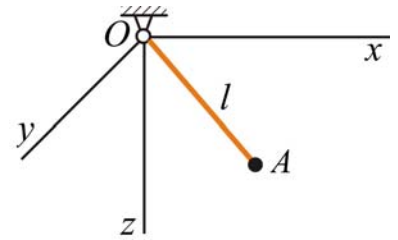


Рис. 16.1

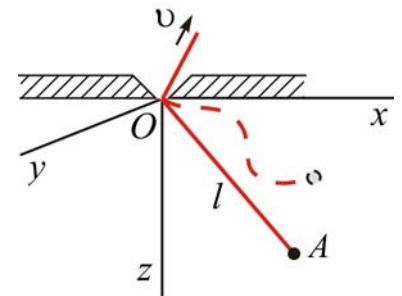


Рис. 16.2

16.2. Обобщённые координаты. Пусть механическая система состоит из N материальных точек. Её положение в пространстве определяется $3N$ декартовыми координатами. Если на систему наложено m голономных удерживающих связей, то независимых между собой будут не $3N$, а $n = 3N - m$ координат. Число n называют числом степеней свободы механической системы. Выбрав n декартовых координат системы в качестве независимых, остальные m координат можно найти при помощи уравнений связей. Выбор декартовых координат в качестве независимых для ряда задач механики оказывается нерациональным, так как приводит к громоздким выкладкам. Поэтому целесообразно использовать и другие независимые координаты.

Независимые между собой параметры, однозначно определяющие положение механической системы в пространстве в любой момент времени называются обобщёнными координатами. Их обозначают $q_i(t)$, где $i = 1, 2, \dots, n$. В качестве обобщённых координат можно использовать длины прямолинейных отрезков, длины дуг, углы, площади и т.д. В частности, обобщёнными координатами могут быть и декартовы координаты. Для одной и той же механической системы может быть несколько вариантов выбора обобщённых координат.

Для системы, состоящей из N точек, на которые наложено m голономных удерживающих связей, через обобщённые могут быть выражены $n = 3N - m$ независимых декартовых координат. Остальные декартовы координаты выражаются через те же обобщённые координаты с помощью m уравнений связей. Следовательно, и радиус-векторы всех точек выражаются через обобщённые координаты:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Пример. Пусть механическая система состоит лишь из одной точки A . Её движение подчинено двум связям:

$$z_A = 0, \quad x_A^2 + y_A^2 - R^2 = 0. \quad (16.6)$$

Первая связь принуждает точку оставаться в координатной плоскости Oxy , а вторая связь предписывает точке оставаться в указанной плоскости на окружности радиуса R с центром в начале координат (рис. 16.3). Тогда $N = 1$, $m = 2$ и число степеней свободы $n = 3N - 2 = 1$. Следовательно, лишь одна декартова координата будет независимой. В качестве таковой можно выбрать, например, x_A . Но, в качестве координаты, определяющую положение точки в данной задаче, можно выбрать не декартову координату, а угол φ , указанный на рисунке, или длину дуги s_A .

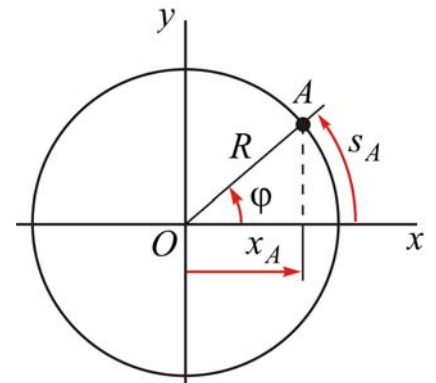


Рис. 16.3

Примем за обобщённую координату угол φ . Независимая декартова координата x_A выражается через обобщённую формулой $x_A = R \cos \varphi$. Зависимая декартова координата y_A выражается вначале через независимую декартову координату x_A из уравнений связей (16.6) по формуле $y_A = \pm \sqrt{R^2 - x_A^2}$, а затем и через обобщённую координату $y_A = \pm \sqrt{R^2 - x_A^2} = \pm \sqrt{R^2 - (R \cos \varphi)^2} = R \sin \varphi$. В итоге, радиус-вектор точки A оказался выраженным через обобщённую координату:

$$\bar{r}_A = R \cos \varphi \bar{i} + R \sin \varphi \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}.$$

16.3. Возможные перемещения. Действительные перемещения. *Возможным перемещением называется мыслимое, бесконечно малое перемещение точки, допускаемое связями в данный момент времени.* Обозначается вектор возможного перемещения точки $\delta\vec{r}$ и называется вариацией радиус-вектора.

Действительным перемещением точки называется её бесконечно малое перемещение совместимое со связями, совершаемое за сколь угодно малый промежуток времени dt под действием заданных сил при заданных начальных условиях. Обозначается вектор действительного перемещения – $d\vec{r}$.

Возможное перемещение – одно из основных понятий аналитической механики. Но, чтобы лучше его уяснить, вначале найдём условие на вектор действительного перемещения точки, на движение которой наложена голономная нестационарная связь

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (16.7)$$

В некоторый момент времени t точка имеет координаты x, y, z и принадлежит этой поверхности. Через элементарный промежуток времени dt координаты $x + dx, y + dy, z + dz$ точки также должны удовлетворять уравнению связи, т.е.

$$f(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = 0. \quad (16.8)$$

Разложим функцию, стоящую в левой части последнего равенства в ряд Тейлора.

$$f(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = f(x, y, z, t) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \dots$$

Если в этом разложении ограничиться лишь членами до первого порядка малости включительно и учесть (16.7), то из уравнения (16.8) получим, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \quad (16.9)$$

Выражение (16.9) есть условие, которому должны удовлетворять координаты вектора $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ действительного перемещения точки.

При рассмотрении возможного перемещения время t фиксируется (замораживается). Тогда, координаты $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ нового положения точки удовлетворяют уравнению $f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = 0$. Если, как и выше, левую часть этого уравнения разложить в ряд Тейлора, ограничиться в разложении членами до первого порядка малости включительно и учесть равенство (16.7), то получим, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0. \quad (16.10)$$

Выражение (16.10) есть условие на вариацию (изменение) координат вектора $\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}$ возможного перемещения точки.

На языке геометрии уравнение (16.7) есть уравнение, изменяемой с течением времени, поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве (рис. 16.4). Если вре-

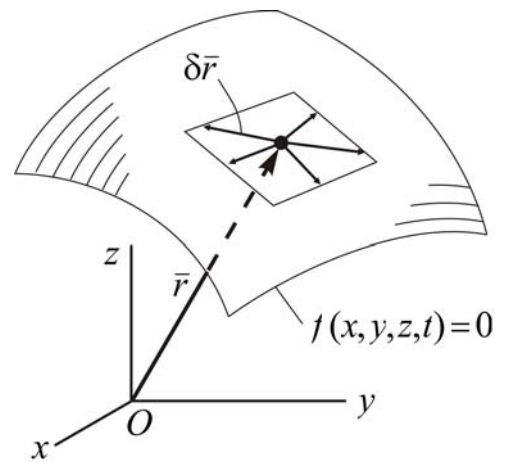


Рис. 16.4

мя фиксируется, то эта поверхность «замораживается». Из математического анализа известно, что вектор $\overline{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k}$ перпендикулярен этой поверхности, а условие (16.10) указывает на ортогональность векторов $\overline{grad} f$ и $\delta \bar{r}$. Следовательно, вектор возможного перемещения $\delta \bar{r}$ всегда лежит в плоскости, касательной к поверхности $f(x, y, z, t) = 0$ (рис. 16.4).

Вектор $d\bar{r}$ действительного перемещения можно представить состоящим из относительного перемещения по поверхности и переносного вместе с этой поверхностью (рис. 16.5) и для стационарной связи $f(x, y, z) = 0$ он совпадёт с одним из возможных $\delta \bar{r}$.

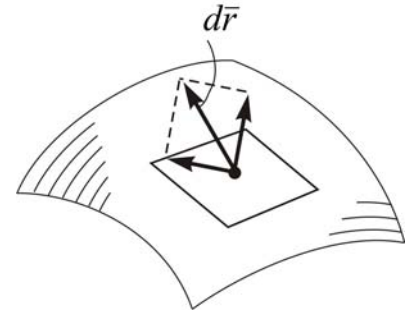


Рис. 16.5

Возможным перемещением системы называется любая совокупность возможных перемещений всех её точек. Для свободной системы, состоящей из N точек, возможны $3N$ вариаций обобщённых координат. При наложении на систему m голономных удерживающих связей вариации координат точек системы должны удовлетворять условиям, аналогичным (16.10):

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial f_j}{\partial z_k} \delta z_k \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Если положение системы определяется обобщёнными координатами q_i ($i = 1, 2, \dots, n$), и, следовательно, связи уже учтены, то вектор возможного перемещения через вариации δq_i обобщённых координат можно вычислить как полный дифференциал функции $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q, t)$ при фиксированном времени:

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n} \delta q_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (16.11)$$

Здесь $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \bar{i} + \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \bar{j} + \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \bar{k}$.

Элементарное действительное перемещение точки определяется как полный дифференциал функции $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q, t)$, но время при этом не фиксируется:

$$d\bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} dt.$$

Пример. Точка движется в координатной плоскости Oxy . В качестве обобщённых координат приняты полярные координаты (рис. 16.6): $q_1 = R = |OM|$, $q_2 = \varphi$. Найти вектор действительного перемещения точки, если $dR = 0,005$ м, $d\varphi = 0,1$ рад.

Решение. Выразим декартовы координаты через обобщённые: $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$. Тогда, $d\bar{r} = dx \bar{i} + dy \bar{j}$, где

$$dx = \frac{\partial x}{\partial R} dR + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = \cos \varphi dR - R \sin \varphi d\varphi = 0,005 \cos \varphi - 0,1 R \sin \varphi,$$

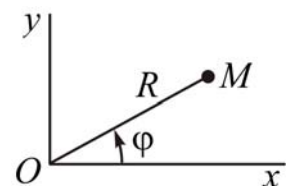


Рис. 16.6

$$dy = \frac{\partial y}{\partial R} dR + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \sin \varphi dR + R \cos \varphi d\varphi = 0,005 \sin \varphi + 0,1R \cos \varphi.$$

Примечание. Если будет указано частное положение точки, то дифференциалы декартовых координат примут числовые значения. Например, при $R = 0,1 \text{ м}$, $\varphi = \pi/3 \text{ рад}$,

$$dx = -0,00616 \text{ м}, \quad dy = 0,00933 \text{ м}, \quad d\vec{r} = -0,00616\vec{i} + 0,00933\vec{j}.$$

16.4. Возможная работа силы. Идеальные связи. *Возможной работой силы называется работа силы на возможном перемещении точки приложения силы:*

$$\delta A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}.$$

Возможная работа момента силы, приложенного к твёрдому телу, вращающемуся вокруг оси Oz , будет вычисляться по формуле (см. 14.47)

$$\delta A(M_z) = M_z \cdot \delta \varphi.$$

Связь называется идеальной, если равна нулю сумма возможных работ реакций связи на любом возможном перемещении системы (из занимаемого в данный момент положения).

Если реакции связей обозначить, как обычно, \vec{R}_k , то определение идеальной связи можно записать в виде формулы $\sum_{k=1}^N (\vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k) = 0$.

Приведём примеры идеальных связей.

1. Гладкая поверхность (плоскость) для материальной точки. В этом случае реакция поверхности состоит лишь из нормальной составляющей перпендикулярной поверхности, $\vec{R} = \vec{N}$, а вектор возможного перемещения $\delta \vec{r}$ располагается в плоскости, касательной к этой поверхности (рис. 16.4). Следовательно, $\vec{R} \perp \delta \vec{r}$ и $\delta A(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \delta \vec{r} = 0$.

2. Нерастяжимая нить. Реакция нити – сила её натяжения – направлена вдоль нити, а вектор $\delta \vec{r}$ перпендикулярен нити.

3. Цилиндрические и сферические шарниры, если их поверхности считаются идеально гладкими. Реакции приложены в неподвижных точках. Поэтому $\delta \vec{r} = 0$.

4. Качение без скольжения твёрдого тела по твёрдой поверхности (рис. 16.7). В этом случае реакция \vec{R} приложена в мгновенном центре скоростей (МЦС) – точке P , а бесконечно малое перемещение тела можно представить как поворот на бесконечно малый угол $\delta \varphi$ вокруг МЦС. Следовательно, на всяком возможном перемещении $\delta \vec{r}_P = 0$ и $\delta A(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \delta \vec{r}_P = 0$.

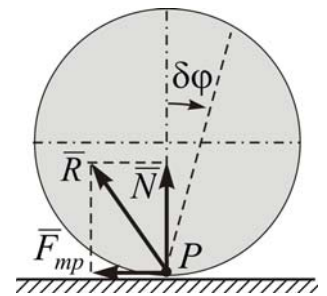


Рис. 16.7

16.5. Обобщённые силы. Пусть положение механической системы из N материальных точек определяется обобщёнными координатами q_1, q_2, \dots, q_n . Вычислим сумму возможных работ всех сил, действующих на точки системы, на каком-либо её возможном перемещении:

$$\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k.$$

Согласно (16.11), вектор возможного перемещения $\delta \bar{r}_k$ выражается через вариации обобщённых координат $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ по формуле $\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$. Следовательно, $\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i$.

Скалярную величину

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^N \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \quad (16.12)$$

называют обобщённой силой, соответствующей i -ой обобщённой координате. Она может зависеть от обобщённых координат q_1, q_2, \dots, q_n , обобщённых скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ и времени t .

С введением понятия обобщенной силы, возможную работу можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n. \quad (16.13)$$

Как следует из последней формулы, размерность обобщённой силы зависит от размерности соответствующей обобщённой координаты: $[Q_i] = \frac{[A]}{[q_i]}$. Если размерность координаты q_i – метр, то размерность Q_i – ньютон (Н). Если же размерность q_i – радиан, то размерность Q_i – ньютон умноженный на метр (Нм).

16.6. Способы вычисления обобщённых сил. Существуют несколько способов вычисления обобщённых сил.

1. Первый способ следует из определения (16.12) обобщённой силы. Наиболее эффективен этот метод в применении к системам с одной степенью свободы.

Пример. Кривошипно-ползунный механизм, состоящий из кривошипа 1, шатуна 2 и ползуна 3 движется в вертикальной плоскости (рис. 16.8). Массы звеньев соответственно равны $m_1 = 4 \text{ кг}$, $m_2 = 3 \text{ кг}$, $m_3 = 1 \text{ кг}$. Кривошип и шатун, представляющие собой однородные стержни, имеют одинаковую длину: $OA = AB = l = 0,2 \text{ м}$. Кроме сил тяжести на механизм действует сила $F = 20 \text{ Н}$ как показано на рисунке.

Приняв за обобщённую координату угол φ поворота кривошипа, вычислить обобщённую силу Q_φ .

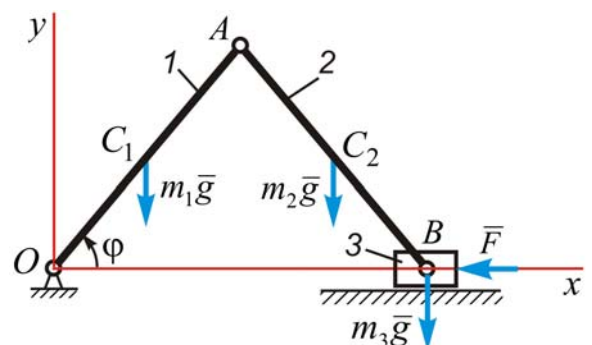


Рис. 16.8

Решение. Выразим декартовы координаты точек приложения сил через обобщённую координату. Сила $m_1\bar{g}$ приложена посередине стержня 1, в точке C_1 . Координаты этой точки $x_{C_1} = \frac{l}{2}\cos\varphi$, $y_{C_1} = \frac{l}{2}\sin\varphi$. Координаты точки C_2 приложения силы $m_2\bar{g}$: $x_{C_2} = \frac{3l}{2}\cos\varphi$, $y_{C_2} = \frac{l}{2}\sin\varphi$. Координаты точки B приложения сил $m_3\bar{g}$ и \bar{F} : $x_B = 2l\cos\varphi$, $y_B = 0$.

Запишем значения проекций действующих сил: $(m_1g)_x = (m_2g)_x = (m_3g)_x = F_y = 0$, $(m_1g)_y = -4g$, $(m_2g)_y = -3g$, $(m_3g)_y = -g$, $F_x = -20$.

По формуле (16.12) $Q_\varphi = \sum_{k=1}^N \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial \varphi} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial \varphi} \right) = -0,7g \cos\varphi + 8 \sin\varphi$.

2. Если задать системе такое возможное перемещение, при котором лишь одна из обобщённых координат q_i получает приращение δq_i , то из (16.13) следует

$$Q_i = \frac{\left[\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) \right]_{q_i}}{\delta q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (16.14)$$

Индекс q_i в числителе (16.14) как раз означает, что работа сил определяется на таком перемещении системы, при котором изменяется лишь i -я обобщённая координата получает бесконечно малое изменение δq_i , а остальные обобщённые координаты не меняются. Данный способ наиболее употребителен, поскольку всегда эффективен.

Пример. Ползун 1 массы m_1 может без трения перемещаться по плоскости, наклонённой под углом α к горизонту. С ползунком шарниром связан невесомый стержень OA длины l , на конце которого закреплена материальная точка массы m_2 (рис. 16.9).

Полагая, что механизм совершает движение в вертикальной плоскости, выбрать обобщённые координаты и вычислить соответствующие им обобщённые силы.

Решение. Система имеет две степени свободы. Координатой s определим положение ползуна. Координатой φ определим отклонение стержня OA относительно вертикали.

Для вычисления обобщённой силы Q_s полагаем, что система совершила из произвольного положения такое перемещение, при котором координата s возросла на сколь угодно малую величину δs , а координата φ не изменилась, $\delta\varphi = 0$. Тогда,

$$Q_s = \frac{\left[\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) \right]_s}{\delta s} = \frac{m_1 g \cdot \delta s \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + m_2 g \cdot \delta s \cdot \cos(90^\circ - \alpha)}{\delta s} = (m_1 + m_2) g \sin \alpha.$$

Для вычисления Q_φ представим, что система совершила из произвольного положения такое перемещение, при котором координата s не изменилась, $\delta s = 0$, а координата φ изменилась на сколь угодно малую величину $\delta\varphi$. Тогда

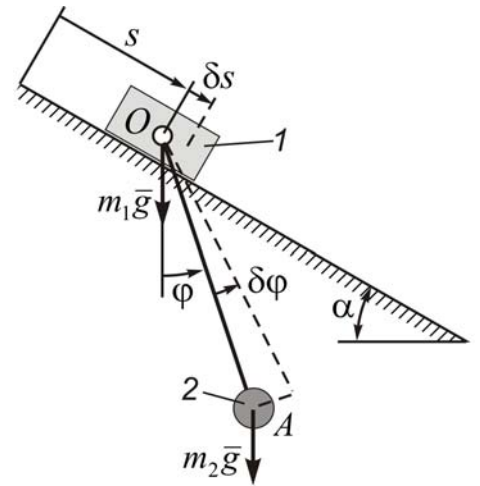


Рис. 16.9

$$Q_\varphi = \frac{\left[\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) \right]_\varphi}{\delta \varphi} = \frac{m_2 g \cdot l \delta \varphi \cdot \cos(90^\circ + \varphi)}{\delta \varphi} = -m_2 g l \sin \varphi.$$

3. Если все силы потенциальны, то их проекции, согласно (14.55), вычисляются по формулам $F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}$, $F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}$, $F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k}$. Подставив эти значения проекций в формулу (16.12) определения обобщённой силы, получим

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Таким образом, если все силы потенциальны и известна силовая функция U (или потенциальная энергия Π), то обобщённые силы могут быть вычислены как частные производные от силовой функции по соответствующим обобщённым координатам:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Пример. На рисунке 16.10 изображён математический маятник, т.е. невесомый стержень OA длины l , закреплённый концом O с помощью неподвижного цилиндрического шарнира, на другом конце которого прикреплена материальная точка массы m .

Найти обобщённую силу, применив третий способ её вычисления.

Решение. Система имеет одну степень свободы. За обобщённую координату примем угол φ отклонения маятника от вертикали. При движении маятника работу будет совершать лишь сила тяжести, которая относится к потенциальным. Вычислим потенциальную энергию как работу сил при перемещении системы из произвольного положения в положение равновесия:

$$\Pi = A|_M^{M_0} = mgh = mg(l - l \cos \varphi).$$

Тогда,

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi.$$

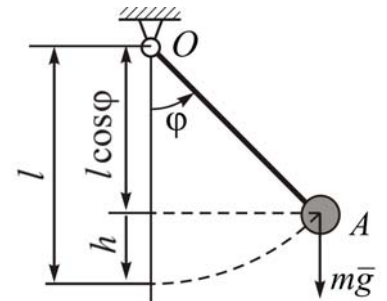


Рис. 16.10

16.7. Принцип возможных перемещений. Данный принцип устанавливает **условие равновесия** механических систем, подчинённых идеальным, стационарным связям.

Чтобы данное положение механической системы с идеальными стационарными связями было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы из этого положения была равна нулю:

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (16.15)$$

Доказательство необходимости. Пусть механическая система, состоящая из N материальных точек, находится в равновесии. Тогда приложенные к произвольной точке активные силы и реакции связей составляют уравновешенную систему сил,

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (16.16)$$

Умножив скалярно каждое из уравнений (16.16) на вектор $\delta \bar{r}_k$ возможного перемещения k -ой точки и просуммировав по всем уравнениям, получим

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

С учётом определения идеальных связей последнее уравнение эквивалентно уравнению (16.15). Тем самым доказана необходимость.

Доказательство достаточности проведём методом от противного. Пусть для некоторого положения системы выполняется равенство (16.15). Но, помещённая в это положение система с нулевыми скоростями точек, пришла в движение. Значит, найдётся точка системы, которая за промежуток времени dt совершит действительное перемещение $d\bar{r}_k$, которое будет направлено по равнодействующей $\bar{F}_k + \bar{R}_k$ и, следовательно, $(\bar{F}_k + \bar{R}_k) \cdot d\bar{r}_k > 0$. Для стационарных связей действительное перемещение $d\bar{r}_k$ совпадает с одним из возможных $\delta \bar{r}_k$. Учитывая это и суммируя последние неравенства по всем точкам системы, получим

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{R}_k) \cdot \delta \bar{r}_k > 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k > 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k > 0.$$

Полученный результат противоречит равенству (16.15). Это указывает на то, что предположение о нарушении равновесия системы ошибочно и, тем самым, достаточность принципа доказана.

Примечание. Для изучающих принцип возможных перемещений впервые, кажется парадоксальным, что одно уравнение (16.15) описывает всё состояние равновесия механической системы, помня из статики, что равновесие пространственной системы сил описывается шестью скалярными уравнениями. «Разгадка парадокса» в том, что уравнений (16.15) можно получить столько, сколько необходимо, вычисляя сумму работ на различных возможных перемещениях системы.

16.8. Условие равновесия механической системы в обобщённых силах. Если положение механической системы из N материальных точек, в силу наложенных на неё голономных стационарных удерживающих связей, определено обобщёнными координатами q_1, q_2, \dots, q_n , то радиус-вектор каждой точки будет функцией этих координат: $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n)$. Вариация радиус-вектора через вариации обобщённых

координат определяется по формуле $\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$ (см. 16.11). Тогда уравнение

принципа возможных перемещений (16.15) можно преобразовать к виду

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = 0.$$

Так как вариации обобщённых координат взаимно независимы, то последнее уравнение будет выполняться лишь в случае, если все обобщённые силы равны нулю:

$$Q_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16.17)$$

Полученная система из n уравнений есть условия равновесия механической системы в обобщённых силах: *для того, чтобы некоторое положение механической системы, подчинённой идеальным голономным стационарным связям было положением равновесия, необходимо и достаточно равенства нулю в этом положении всех обобщённых сил.*

Пример. Для математического маятника, показанного на рисунке 16.10, была вычислена обобщённая сила $Q = -mgl \sin \varphi$. Согласно (16.17), положения равновесия маятника определяются из уравнения $-mgl \sin \varphi = 0$, которое даёт два очевидных решения: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$.

Если все силы потенциальны, то обобщённые силы, как было доказано выше, можно выразить через силовую функцию (либо потенциальную энергию) по формуле $Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$. В этом случае условие равновесия (16.17) преобразуются к виду

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad \text{либо} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

16.9. Принцип Даламбера-Лагранжа. Общее уравнение динамики. Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек. В соответствии с принципом Даламбера, приложенные к каждой точке активные силы, реакции связей и силы инерции в любой момент времени образуют уравновешенную систему сходящихся сил:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0. \quad (16.18)$$

Здесь \bar{F}_k и \bar{R}_k - равнодействующие активных сил и реакций связей, приложенных к k -ой точке, $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k$ - сила инерции.

Умножим обе части уравнения (16.18) скалярно на возможное перемещение $\delta \bar{r}_k$ k -ой точки и просуммируем полученные для всех точек системы произведения. В результате имеем

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (16.19)$$

Это уравнение выражает принцип Даламбера-Лагранжа: *при движении механической системы в любой момент времени сумма работ активных сил, сил реакций связей и сил инерции на любом возможном перемещении из занимаемого положения равна нулю.* Ещё это уравнение называют общим уравнением динамики, потому что из него могут быть выведены все другие уравнения, описывающие движения механическим систем.

Если связи, наложенные на систему, идеальные, то $\sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$ и общее урав-

нение примет вид $\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0$, что можно записать и в несколько иной фор-

ме: $\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^N \delta A(\bar{\Phi}_k) = 0$.

При движении системы с идеальными связями в любой момент времени должна быть равна нулю сумма возможных работ активных сил и сил инерции.

Если для изучения движения системы применяют обобщённые координаты, то

$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ и $\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$. Подставив выражение для возможного пере-

мещения $\delta \bar{r}_k$ в (16.19) и изменив порядок суммирования, получим

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0. \quad (16.20)$$

Так как $\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{R}_k) \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = Q_i$ - обобщённая сила, соответствующая i -й координате, то

$\sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = Q_i^{IH}$ - обобщённая сила инерции, соответствующая той же координате.

Вследствие независимости между собой вариаций обобщённых координат, условие (16.20) принимает вид

$$Q_i + Q_i^{IH} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Последнее выражение называется общим уравнением динамики в обобщённых силах.

При изучении движения твёрдого тела силы инерции нужно привести к какому-либо центру, например центру масс тела. Тогда сумму возможных работ сил инерции можно вычислить следующим образом:

$$\sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \bar{R}_{IH} \cdot \delta \bar{r}_C + L_{\omega}^{IH} \cdot \delta \varphi,$$

где \bar{R}_{IH} , L_{ω}^{IH} - главный вектор и главный момент сил инерции относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс; $\delta \bar{r}_C$ - возможное перемещение центра масс; $\delta \varphi$ - возможный угол поворота тела вокруг мгновенной оси вращения.

16.10. Уравнения Лагранжа второго рода. Уравнения Лагранжа второго рода представляют собой дифференциальные уравнения движения несвободной механической системы, составленные в обобщённых координатах.

Пусть на движение механической системы из N материальных точек наложены m идеальных голономных удерживающих связей. Общее уравнение динамики для такой системы имеет вид

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k - m_k \ddot{\bar{r}}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (16.21)$$

Определим положение системы обобщёнными координатами q_1, q_2, \dots, q_n , где $n = 3N - m$. Тогда радиус-вектор каждой точки будет функцией указанных координат и времени, $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, а возможное перемещение k -ой точки вычисляется по формуле

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (16.22)$$

Подставив (16.22) в (16.21) и поменяв порядок суммирования, получим

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\dot{\bar{r}}_k}{dt} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i = 0. \quad (16.23)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках есть обобщённая сила соответствующая i -ой обобщённой координате: $\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = Q_i$. Преобразуем выражение $\frac{d\dot{\bar{r}}_k}{dt} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right)$:

$$\frac{d\dot{\bar{r}}_k}{dt} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) - \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right). \quad (16.24)$$

Выведем теперь два вспомогательных тождества. Так как $\dot{\bar{r}}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}$, то

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}. \quad (16.25)$$

Равенство (16.25) называется **первым тождеством Лагранжа**. Заменяя на основании этого тождества производную $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$ на $\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i}$ в первом слагаемом выражения (16.24), получим

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\dot{\bar{r}}_k^2}{2} \right) \right].$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^N m_k \frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{k=1}^N \frac{m_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad (16.26)$$

где T - кинетическая энергия механической системы.

Преобразуем теперь производную $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right)$. Так как $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, то

$\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right)$ - функция обобщённых координат и времени. Поэтому, с одной стороны,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_2 \partial q_i} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_n \partial q_i} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial t \partial q_i}. \quad (16.27)$$

С другой стороны,

$$\dot{\bar{r}}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}$$

и

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial t}. \quad (16.28)$$

Сопоставляя (16.27) и (16.28), заключаем, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}.$$

Это **второе тождество Лагранжа**. С учётом данного тождества, получаем

$$\sum_{k=1}^N m_k \dot{\bar{r}}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \sum_{k=1}^N m_k \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{k=1}^N \frac{m_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_i}. \quad (16.29)$$

С учётом (16.24), (16.26), (16.29) и определения обобщённой силы общее уравнение динамики (16.23) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^n \left[Q_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0. \quad (16.30)$$

Вследствии независимости между собой вариаций δq_i обобщённых координат, уравнение (16.30) будет выполняться лишь в случае, если равны нулю выражения в квадратных скобках, т.е. если

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (16.31)$$

Уравнения (16.31) называются уравнениями Лагранжа второго рода. Число этих уравнений равно числу степеней свободы.

16.11. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Циклические координаты и циклические интегралы. Если все силы, действующие на точки системы потенциальны, то обобщённые силы вычисляются через потенциальную энергию $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ по формуле $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$. Тогда уравнения Лагранжа (16.31)

могут быть записаны в виде $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$.

Функция, равная разности кинетической и потенциальной энергий механической системы, называется функцией Лагранжа:

$$L = T - \Pi.$$

Так как потенциальная энергия не зависит от обобщённых скоростей, $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} \equiv 0$, то

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$. При использовании функции Лагранжа уравнения (16.31) имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Обобщённая координата, которая явно не входит в выражение функции Лагранжа, называется циклической координатой. Если q_j – циклическая координата, то

$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ и из последнего уравнения следует $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$, откуда, в свою очередь,

получаем, что функция $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ не меняется: $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = C_j = \text{const}$.

Функция координат, скоростей и времени, которая не меняется на решениях дифференциальных уравнений, называется первым интегралом. Значение первых интегралов в том, что они упрощают интегрирование дифференциальных уравнений. Таким образом, если удаётся выбрать циклические координаты, то это гарантирует существование первых интегралов, называемых в этом случае циклическими интегралами.

16.12. Структура уравнений Лагранжа второго рода. Кинетическая энергия механической системы, состоящей из N материальных точек, определяется по формуле $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \dot{\bar{r}}_k^2$. Если данная система с голономными нестационарными связями

имеет n степеней свободы, то $\dot{\bar{r}}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}$ и кинетическую энергию системы

можно записать так:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n B_i \dot{q}_i + \frac{1}{2} C, \quad (16.32)$$

где введены обозначения

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}, \quad B_i = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}, \quad C = \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} \right)^2.$$

Если наложенные на систему связи стационарные, то $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} = 0$ и тогда $B_i = 0$, $C = 0$. В этом случае кинетическая энергия системы является однородной квадратичной формой обобщённых скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (16.33)$$

Производные от кинетической энергии (16.33), соответствующие левой части уравнений Лагранжа, равны

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^n A_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{dA_{ij}}{dt} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n A_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \dot{q}_j,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Подставляя эти выражения в уравнения Лагранжа, получаем

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16.34)$$

Обобщённые силы Q_i есть функции обобщённых координат, времени и, возможно, обобщённых скоростей. Тогда из (16.34) следует, что наивысший порядок производных по времени от обобщённых координат – второй. Порядок уравнений не изменится и при нестационарных связях.

Таким образом, уравнения Лагранжа второго рода для механической системы с голономными связями представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$ относительно обобщённых координат.

Последовательность действий при использовании уравнений Лагранжа второго рода при решении задач следующая:

- 1) определить число степеней свободы системы и выбрать наиболее удобные обобщённые координаты;
- 2) вычислить кинетическую энергию системы в её абсолютном движении и выразить эту энергию через обобщённые скорости и, возможно, обобщённые координаты;
- 3) вычислить производные от кинетической энергии, входящие в левую часть уравнений Лагранжа;
- 4) определить обобщённые силы, соответствующие обобщённым координатам;
- 5) подставить все вычисленные величины в уравнения Лагранжа.

Пример. Планетарный механизм, состоящий из вала 1 массы m_1 , сателлита 2 массы m_2 и неподвижной солнечной шестерни 3 движется в горизонтальной плоскости под действием постоянного вращающего момента $M_{вр}$ приложенного к валу (рис. 16.11).

Приняв звено 1 за однородный стержень, а звено 2 за однородный диск, составить дифференциальное уравнение движения данной механической системы.

Радиусы второго и третьего звеньев одинаковы и равны r . Проскальзывание между звеньями 2 и 3 отсутствует.

Решение. Система имеет одну степень свободы. За обобщённую координату примем угол поворота φ звена 1. Следовательно, движение механизма будет описываться уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q.$$

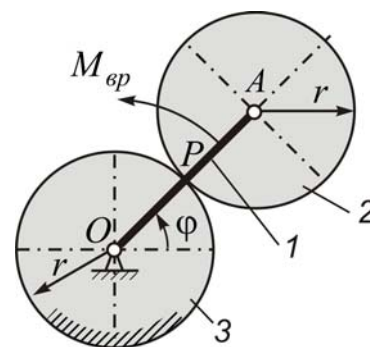


Рис. 16.11

Считаем, что кривошип вращается с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ в положительном направлении отсчёта угла φ . Кинетическая энергия системы $T = T_1 + T_2$. Первое звено совершает вращательное

движение вокруг неподвижной оси. Следовательно $T_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 (2r)^2}{3} \dot{\varphi}^2$. Второе звено совершает плоское движение. Его кинетическая энергия $T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_A^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$. Скорость точки A $v_A = \omega_1 OA = 2r\dot{\varphi}$. Угловая скорость звена 2 при плоском его движении $\omega_2 = \frac{v_A}{AP} = \frac{2r\dot{\varphi}}{r} = 2\dot{\varphi}$. Тогда $T_2 = \frac{1}{2} m_2 (2r\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 r^2}{2} (2\dot{\varphi})^2 = 3m_2 r^2 \dot{\varphi}^2$, $T = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} m_1 + 6m_2 \right) r^2 \dot{\varphi}^2$.

Вычислим производные от кинетической энергии.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left(\frac{4}{3} m_1 + 6m_2 \right) r^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \left(\frac{4}{3} m_1 + 6m_2 \right) r^2 \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Обобщённую силу вычислим по формуле $Q = \frac{\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k)}{\delta \varphi}$, для чего представим, что угол φ увеличился на сколь угодно малую величину $\delta \varphi$. На таком перемещении системы лишь момент сил M_{ep} совершит работу. Тогда $\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) = M_{ep} \delta \varphi$, $Q = M_{ep}$. Подставляя найденные величины в уравнение Лагранжа, получим

$$\left(\frac{4}{3} m_1 + 6m_2 \right) r^2 \ddot{\varphi} = M_{ep}.$$

Последнее уравнение является ответом в задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дронг В.И. и др. Курс теоретической механики. Под ред. Колесникова. - М.: МГТУ, 2002. - 736 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 2002. - 416 с.