РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАМИЛЬТОНА-КЕЛИ

Л.Р. Родкина, доцент кафедры электроники ИИИБС ВГУЭС
А.Ф. Родкин, к.ф.-м.н., доцент АИ ДВГУ

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, Владивосток

"Задача решения систем линейных алгебраических уравнений возникает очень часто и привлекает внимание многих исследователей ... Имеется множество методов ... и на эту тему можно написать целую книгу."

Р.В. Хемминг [1].

В данной работе рассматривается метод решения систем линейных алгебраических уравнений, основанный на теореме Гамильтона-Кели.

Изучение математики в ВУЗе обычно начинается с изучения систем линейных алгебраических уравнений и методов их решения.

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛУ) представляют собой, очевидно, самую простую и изученную математическую модель, вместе с тем, большое число различных (приближенных) методов решения СЛУ и литературы, посвященной этим методам, косвенно указывают на возникающие при их реализации проблемы. Кратко напомним суть этих проблем.

Для простоты рассмотрим определенную (имеющую единственное решение [2]) систему линейных уравнений

$$A\,X = B, \tag{1}$$

где $A = (a_{ij})$ квадратная матрица порядка n (число уравнений равно числу неизвестных),

$$X = (x_i), \quad B = (b_i)\,, \quad i = 1,..., n \tag{2}$$

- матрицы-столбцы неизвестных и свободных членов.

Будем предполагать вначале, что все коэффициенты системы (1) (элементы матриц A и B) - целые числа. Если матрица A - невырожденная ($\det A \neq 0$), то решение системы (1) может быть получено по методу Крамера:

$$x_i = \det A_i / \det A, \quad i = 1,..., n, \tag{3}$$

где $\det A$ - главный определитель системы (1),

$\det A_i$ - определители, получаемые из главного заменой i-го столбца столбцом свободных членов B.

Определитель n-го порядка detA является суммой n! различных членов, для получения каждого из которых требуется n-1 умножений. Для решения системы (1) методом Крамера, т.е. вычисления n + 1 определителей $\det A$, $\det A_i$, требуется $(n - 1)(n + 1)!$ умножений. Основным препятствием использования метода Крамера в таком виде является рост объема вычислений с увеличением n. Поэтому метод Крамера удобен для практических применений при n = 2 или 3, или же как критерий существования решения системы (1) в теоретических исследованиях. Отметим особо, что для вычисления определителей по определению используются только умножение и сложение, поэтому метод Крамера является точным.

Самый простой метод решения СЛУ – метод Гаусса (метод исключения неизвестных) – является и наиболее экономичным, приблизительно $n^3 / 3$ операций [3]. В стандартных алгоритмах метода Гаусса используется деление, поэтому он является приближенным методом и при больших n накопление ошибок округления приводит к большим погрешностям и искажению результата. Авторами разработана модификация алгоритма метода Гаусса преобразования целочисленных матриц, не использующая деления, и получены реализации этих алгоритмов для отыскания точных решений систем линейных уравнений и вычисления определителей [5-7].

Можно рассмотреть еще один способ вычисления точных решений СЛУ, использующий теорему Гамильтона-Кели. Суть его заключается в том, что любую невырожденную матрицу n-го порядка A и ее обратную матрицу A^{-1} можно представить в виде линейной комбинации степеней матрицы A^k и, следовательно, получить решение системы (1) без операции деления.

В теореме Гамильтона-Кели утверждается, что любая квадратная матрица A n-го порядка удовлетворяет своему собственному характеристическому уравнению:

$$A^n + c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + \ldots + c_{n-1} A + c_n E = \tilde{O}\,, \tag{4}$$

где E, Õ - единичная и нулевая матрицы n-го порядка,

c_k - коэффициенты характеристического уравнения.

Характеристическим уравнением матрицы A называется уравнение

$$|\,A - \lambda E\,| = 0 \tag{5}$$

для определения собственных значений λ матрицы A.

Преобразование определителя (5) по степеням λ дает характеристическое уравнение

$$\varphi(\lambda) \equiv \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0, \tag{6}$$

где $\varphi(\lambda)$ - характеристический многочлен,

c_k - коэффициенты характеристического уравнения (6) выражаются через элементы матрицы A в виде [2]:

$$c_k = (-1)^k S_k\,, \tag{7}$$

S_k - сумма главных (симметричных относительно главной диагонали матрицы A) миноров k-го порядка, причем

$$c_1 = -(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) = -\,\mathrm{Tr}(A)\,, \tag{8}$$

$$c_n = (-1)^n \det A,$$

Tr(A) - след матрицы A - сумма диагональных элементов матрицы A ,

c_n - с точностью до знака ее определитель.

Вычисление коэффициентов характеристического уравнения c_k (7) в виде сумм главных миноров всех порядков представляет собой нетривиальную задачу, но существует и другой более простой способ.

Обозначая через

$$T_1 = \mathrm{Tr}\,A,\quad T_2 = \mathrm{Tr}\,A^2, \ldots,\quad T_k = \mathrm{Tr}\,A^k \tag{9}$$

следы степеней матрицы A и вычисляя следы в матричном уравнении (4) с учетом того, что

$$\mathrm{Tr}\,E = n,$$

$$\mathrm{Tr}\,\tilde{O} = 0,$$

получим:

$$T_n + c_1 T_{n-1} + c_2 T_{n-2} + \ldots + c_{n-1} T_1 + c_n n = 0. \tag{10}$$

Отсюда коэффициент c_n может быть выражен через все предыдушие коэффициенты c_k и следы степеней матрицы T_k:

$$c_n = - (c_{n-1}T_1 + c_{n-2}T_2 + \ldots + c_1T_{n-1} + T_n) / n$$

Такая связь между коэффициентом c_n характеристического уравнения и следами степеней матрицы A справедлива для всех коэффициентов c_k [4]:

$$\begin{aligned} c_1 &= - T_1 , \\ c_2 &= - (c_1T_1 + T_2) / 2 , \\ c_3 &= - (c_2T_1 + c_1T_2 + T_3) / 3 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n &= - (c_{n-1}T_1 + c_{n-2}T_2 + \ldots + c_1T_{n-1} + T_n) / n . \end{aligned} \tag{11}$$

Для невырожденной матрицы A непосредственно из теоремы Гамильтона-Кели получим обратную матрицу A^{-1}

$$A^{-1} = -\{A^{n-1} + c_1A^{n-2} + \ldots + c_{n-2}A + c_{n-1}E\}/ c_n , \tag{12}$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой (с точностью до знака) присоединенную матрицу A^* ($A^{-1} = A^* / \det A$). Для целочисленной матрицы A все коэффициенты c_k и степени A^k - целочисленные. Таким образом, A^* (и A^{-1} , оставляя $1/c_n$ множителем) можно вычислить точно с использованием только операций умножения и сложения. Для вычисления степени матрицы $A^{k+1} = A * A^k$ требуется n^3 умножений и $n^3 - n^2$ сложений [3].

Решение системы (1) в этом случае получим в виде: $X = A^{-1}B$

или $X = A^* B / \det A$.

Такой способ решения СЛУ является очевидным следствием теоремы Гамильтона-Кели [4], но ни в учебной литературе, ни в практических применениях ссылок на него нет.

Если же нас интересует только решение СЛУ (а не обратная матрица A^{-1}), то этот подход можно в некоторой степени оптимизировать.

Запишем систему (1) в виде:

$$AX_0 = X_1 , \tag{13}$$

X_0 - неизвестное решение системы (13), X_1 - правая часть, A – невырожденная матрица. Предположим еще, что вектор X_0 не является собственным вектором матрицы A: $AX_0 \neq \lambda X_0$. Обозначая $X_k = AX_{k-1}$ и умножая (13) слева на матрицу A, получим систему векторов:

$$\begin{aligned} &X_0 , \\ &X_1 = AX_0, \\ &X_2 = AX_1 = A^2X_0, \\ &X_3 = AX_2 = A^3X_0, \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &X_k = AX_{k-1} = A^kX_0 , \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &X_n = AX_{n-1} = A^nX_0 . \end{aligned} \tag{14}$$

Система n+1 векторов $X_n , X_{n-1}, \ldots , X_2 , X_1, X_0$ линейно-зависима, поэтому должно выполняться равенство

$$k_0X_n + k_1X_{n-1} + \ldots + k_{n-1}X_1 + k_nX_0 = O$$

или

$$(k_0A^n + k_1A^{n-1} + \ldots + k_{n-1}A + k_nE) X_0 = O$$

не при всех k_i равных нулю. Из теоремы Гамильтона-Кели (4) следует, что в качестве k_i можно взять коэффициенты характеристического уравнения c_i :

$$X_n + c_1X_{n-1} + \ldots + c_{n-1}X_1 + c_nX_0 = O,$$

отсюда решение системы (13)

$$X_0 = -\{X_n + c_1X_{n-1} + \ldots + c_{n-1}X_1\}/ c_n . \qquad (15)$$

Для вычисления векторов $X_{k+1} = AX_k = A(A^kX_0)$ в (14) по сравнению с вычислением степеней матриц $A^{k+1} = A*A^k$ по теореме Гамильтона-Кели (4) требуется в n раз меньше операций: n^2 умножений и $n^2 - n$ сложений.

Итак, для отыскания решения X_0 системы (13)

$$AX_0 = X_1$$

надо вычислить коэффициенты характеристического уравнения c_k по формулам (11), т.е. вычислить все степени (до n) матрицы A^k $(k = 1,\ldots, n)$, их следы $T_k = Tr\, A^k$ и затем c_k. Еще раз вычислить все степени матрицы A^k (если рассчитывать A^{-1} по теореме Гамильтона-Кели) или

$$X_k = AX_{k-1} = A^kX_0 .$$

Этот алгоритм был реализован в среде Excel, VBA (Visual Basic for Application). Численные зксперименты показывают, что главным препятствием при таком подходе является не большое число операций, а огромные величины вычисляемых значений элементов матриц (или компонент векторов). Для переменных заданных типом целый удвоенной точности (Long Integer) – (диапазон изменения от -2^{31} до $2^{31}-1$ или от -2147483648 до 2147483647) программа для вычисления по матричному уравнению теоремы Гамильтона-Кели (4) работает безупречно для $n \le 10$ (при $|a_{ij}| \le 10$). Вычисляются решения систем (или матричное уравнение (4)) для $n \le 15$ для матриц разреженных приблизительно на 25% и с величинами элементов $|a_{ij}| \le 5$.

Литература

1. Хемминг Р.В. Численные методы. М., Наука, 1972 г. 400 с.
2. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. Справочная математическая библиотека. М., Физматиз, 1962 г., 300 с.
3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. М., Наука, 1976 г.
4. Пайпс Л. Матрицы в технике. Современная математика для инженеров, под ред. Э.Ф. Беккенбаха. М., ИЛ., 1958 г., 500 с.
5. Родкин А.Ф. Алгоритм метода Гаусса преобразования матриц в кольце целых чисел. 40-я Всероссийская межвузовская научно-техническая конференция "Фундаментальные и прикладные вопросы физики и математики". Сб.докл., т.1, ч. 2, Владивосток, Изд. ТОВВМУ им. С.О. Макарова, 1997 г., с.163-165.
6. Родкина Л.Р., Родкин А.Ф. Алгоритм вычислений определителей целочисленных матриц по методу Гаусса. Всероссийская НТК, посвященная 150-летию со дня рождения С.О. Макарова. Сб. д., т.2, Владивосток, изд. ТОВМИ им. С.О. Макарова 1998 г., с.190-192.
7. Родкина Л.Р., Родкин А.Ф. Вычисление определителей целочисленных матриц по методу Гаусса. Концепции методики преподавания - 2002 в сфере высшего образования. Материалы научно- методической конференции, сентябрь 2002, г. Артем, изд. ДВГУ, Владивосток, 2002 г., с. 49-52.