

МИНИСТЕРСТВО НАУК И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «КубГУ»)

Факультет математики и компьютерных наук
Кафедра математических и компьютерных методов

Допустить к защите
Заведующий кафедрой
канд. физ.-мат. наук, доцент
_____ Лежнёв А.В.
_____ 2019

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (БАКАЛАВРСКАЯ
РАБОТА)**

**МЕТОД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ
БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
ОБЪЁМНОГО ПОТЕНЦИАЛА**

Работу выполнил _____ Д.А. Пасько

Направление подготовки _____ 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) Математическое и компьютерное _____
моделирование _____

Научный руководитель
канд. физ.-мат. наук,
доцент каф. МКМ _____ М.И. Дроботенко

Нормоконтролер
старший лаборант _____ Ю.А. Кравченко

Краснодар
2019

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

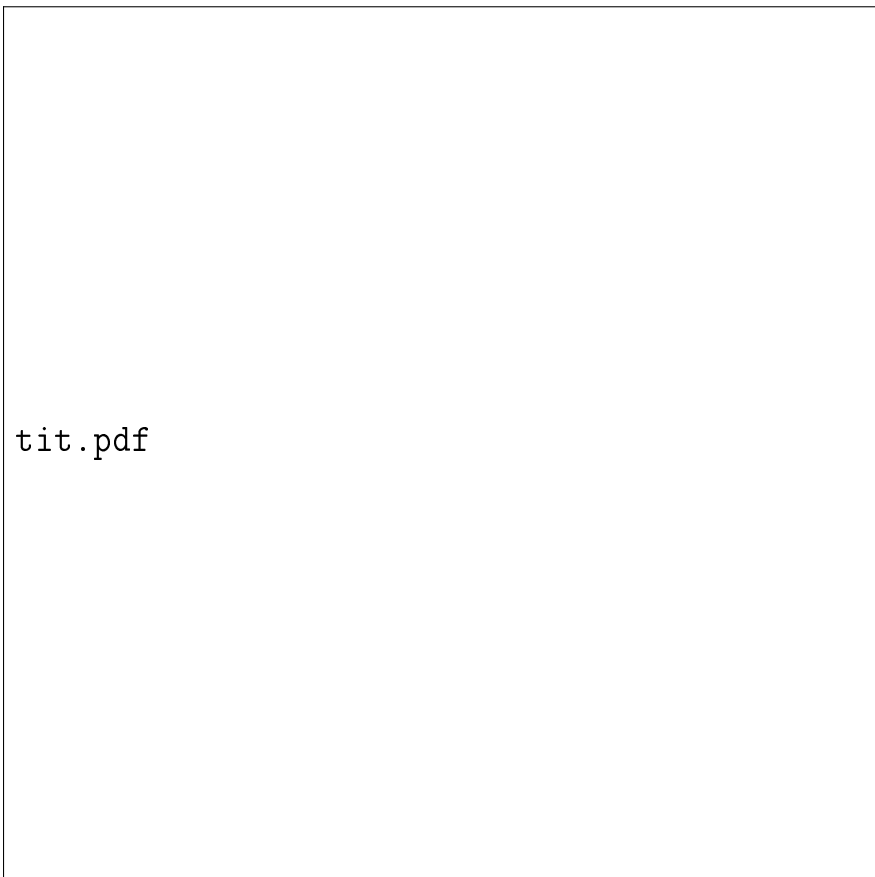
Одной из важнейших задач геофизики является обратная задача гравиметрии (ОЗГ) — задача нахождения плотности тела по известной информации о потенциале и/или напряжённости его гравитационного поля. Известно, что ОЗГ имеет бесконечно много решений, если не предполагать дополнительных ограничений на плотность тела. В 1938 году Новиков П.С. доказал [?], что по внешнему потенциалу тела можно однозначно восстановить гармоническую составляющую плотности тела. Более того, любая плотность ортогональная в L_2 подпространству гармонических функций дает нулевой внешний потенциал [?]. Таким образом, решая ОЗГ, естественно ограничиваться классом гармонических плотностей, что и делается в данной работе. Но при таком ограничении на класс плотностей остаются открытыми вопросы устойчивости ОЗГ.

В используемых обозначениях (рисунок ??) Q представляет собой некоторое тело, обладающее гравитационным полем, и требуется найти плотность ρ этого тела, имея информацию о значении φ потенциала поля на некоторой поверхности S или L .

Существуют методы [?, ?], использующие ОЗГ в качестве вспомогательной задачи для решения других практически важных задач. В частности, в данной работе представлено решение краевой задачи для бигармонического уравнения [?, ?]. Такие краевые задачи возникают в механике сплошных сред, гидродинамике, теории упругости. Для использования ОЗГ при решении бигармонического уравнения вопросы и вопросы устойчивости решения ОЗГ являются критически важными.

Основными целями данной работы являются:

1. Исследование ОЗГ, ограниченной на класс гармонических плотностей, на устойчивость относительно погрешностей в задании внешнего потенциала.



tit.pdf

Рисунок 1 — Геометрия задачи

2. Оценка влияния устойчивости решения ОЗГ на метод решения краевой задачи для бигармонического уравнения, предложенный в работе [?]

3. Сравнение метода метод решения краевой задачи для бигармонического уравнения из работы [?] с одной из модификаций метода фундаментальных решений.

Первая часть данной работы посвящена цели 1 и содержит постановку ОЗГ, доказательство неустойчивости ОЗГ в классе гармонических плотностей, описание одного из методов её решения из работы [?], детали его реализации и результаты тестов. Во второй части описывается краевая задач для бигармонического уравнения и два алгоритма её численного решения, один из которых использует ОЗГ, происходит сравнение методов и изучение их устойчивости.

1 Обозначения

Q — область в пространстве $\mathbb{R}^n, n \geq 2$,

S — поверхность в том же пространстве,

$\bar{Q} = Q \cup \partial Q$ — замыкание Q ,

$Q^+ = \mathbb{R}^n \setminus \bar{Q}$ — внешность Q ,

$G(Q)$ — подпространство гармонических в $L_2(Q)$ функций,

$N(Q)$ — подпространство плотностей нуль-потенциалов в $L_2(Q)$,

∇ — градиент,

Δ — оператор Лапласа,

$E(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|, x \in Q$ — фундаментальное решение оператора Лапласа в \mathbb{R}^2 ,

$\alpha_i = \alpha_i(z) = E(z - z_i)$ — базисный потенциал, связанный с точкой $z_i \in Q^+$,

$D^k(Q)$ — пространство функций, k раз дифференцируемых в Q .

2 Определения

Прежде чем описывать постановку ОЗГ и алгоритм её решения, требуется определиться с несколькими достаточно простыми конструкциями, упрощающими дальнейшее повествование. Кроме того, необходимо пояснить, по какому принципу будут решаться поставленные задачи и что будет пониматься под устойчивостью их решения.

2.1 Определение центра области, радиуса, подобных контуров

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с параметризуемой границей ∂Q , для простоты возьмём $n = 2$; сказанное значит, что ∂Q можно задать радиус-вектором $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in [t_0; t_{\max}]$. Для достаточно универсальной и легко обслуживаемой реализации алгоритма требуется иметь задание границы области с использованием параметра r : $\mathbf{r}(t, r) = (x(t, r), y(t, r)), t \in [t_0; t_{\max}]$, где r – так называемый *радиус кривой* либо *радиус области*. За радиус области можно взять расстояние от центра симметрии области (если такой имеется) до некоторой точки на границе, либо длину границы (периметр), либо какую-то другую характеристику; главное – сделать это так, чтобы при изменении параметра r получалось семейство вложенных друг в друга *подобных кривых* (контуров одинаковой формы). При этом при $r \rightarrow 0$ область с границей $\mathbf{r}(t, r)$ будет сжиматься в точку, называемую *центром области* либо *центром кривой*.

Примеры параметризации границ тестовых областей:

- 1) Круг радиуса r с центром в начале координат имеет границу с параметрическими функциями $x(\phi, r) = r \cos \phi, y(\phi, r) = r \sin \phi, \phi \in [0, 2\pi]$.
- 2) Внутренность квадрата со стороной a , у которого диагонали

пересекаются в точке $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a)$, а стороны параллельны осям координат, имеет границу с параметрическими функциями:

$$x(t, a) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in [0, a]; \\ a, & \text{если } t \in [a, 2a]; \\ 3a - t, & \text{если } t \in [2a, 3a]; \\ 0, & \text{если } t \in [3a, 4a]. \end{cases},$$

$$y(t, a) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, a]; \\ t - a, & \text{если } t \in [a, 2a]; \\ a, & \text{если } t \in [2a, 3a]; \\ 4a - t, & \text{если } t \in [3a, 4a]. \end{cases}$$

Такой квадрат при $a = 4$ изображён на рисунке ??.

3) Аналогично равносторонний треугольник со стороной a , расположенный в первом квадранте, имеющий сторону, параллельную OX , и вершину в начале координат, имеет границу:

$$x(t, a) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in [0, a]; \\ 3a - 2t, & \text{если } t \in [a, 1\frac{1}{2}a]. \end{cases},$$

$$y(t, a) = \begin{cases} t\sqrt{3}, & \text{если } t \in [0, \frac{1}{2}a]; \\ -t\sqrt{3} + a\sqrt{3}, & \text{если } t \in [\frac{1}{2}a, a]; \\ 0, & \text{если } t \in [a, 1\frac{1}{2}a]. \end{cases}$$

Такой треугольник при $a = 2$ изображён на рисунке ??.

4) Область, чья граница есть $S_1 \cup S_2 \cup S_3$, где $S_1 = \{(x, y) : y =$

01.pdf

Рисунок 2 — Квадрат при $a = 4$ и окружность при $r = 2$

$0, x \in [0, a]\}, S_2 = \{(x, y) : y = \sqrt{a^2 - x^2}, x \in [\frac{1}{2}a, a]\}, S_3 = \{(x, y) : y = \sqrt{a^2 - (x - a)^2}, x \in [0, \frac{1}{2}a]\},$ может определяться через функции:

$$x(t, a) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in [0, a]; \\ 2a - t, & \text{если } t \in [a, 2a]. \end{cases},$$

$$y(t, a) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - (t - a)^2}, & \text{если } t \in [0, \frac{1}{2}a]; \\ \sqrt{a^2 - t^2}, & \text{если } t \in [\frac{1}{2}a, a]; \\ 0, & \text{если } t \in [a, 2a]. \end{cases}$$

Такую область будем называть «острием». «Острие» при $a = 2$ изображено на рисунке ??.

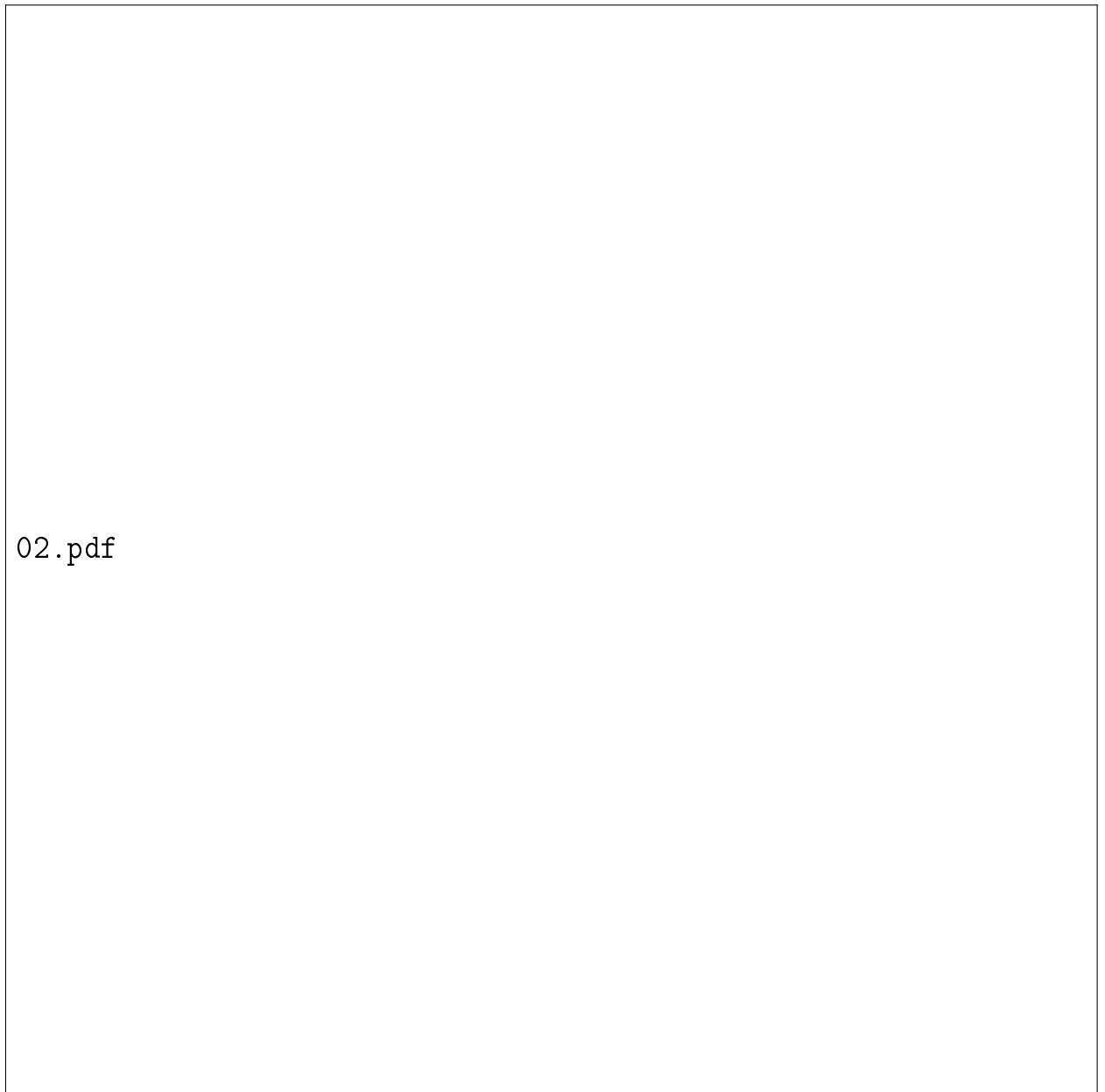


Рисунок 3 — Треугольник и «острие» при $a = 2$

Точно таким же образом особенно удобно задавать области, границы

которых суть кусочно-гладкие кривые вида $S_i = \{(x, y) : y = f_i(x), x \in [x_{i_0}; x_{i_{\max}}]\}, i = 1, 2, \dots, n$, причём на каждом куске не имеет значения, задаётся ли кривая в декартовой системе координат или в полярной.

Примечания

1) В указанных примерах используется простейшая параметризация, но её недостаток в том, что в некоторых примерах при изменении радиуса r кривой меняется и расположение её центра, из-за чего при разных параметрах r_1, r_2 кривые $\mathbf{r}(t, r_1), \mathbf{r}(t, r_2)$ имеют общие точки, что не подходит для алгоритма. Проблема исправляется фиксацией центра в некоторой точке и заданием кривых относительно этого центра. Например, квадрат с центром в $(x_0; y_0)$ и длиной стороны a имеет параметризацию:

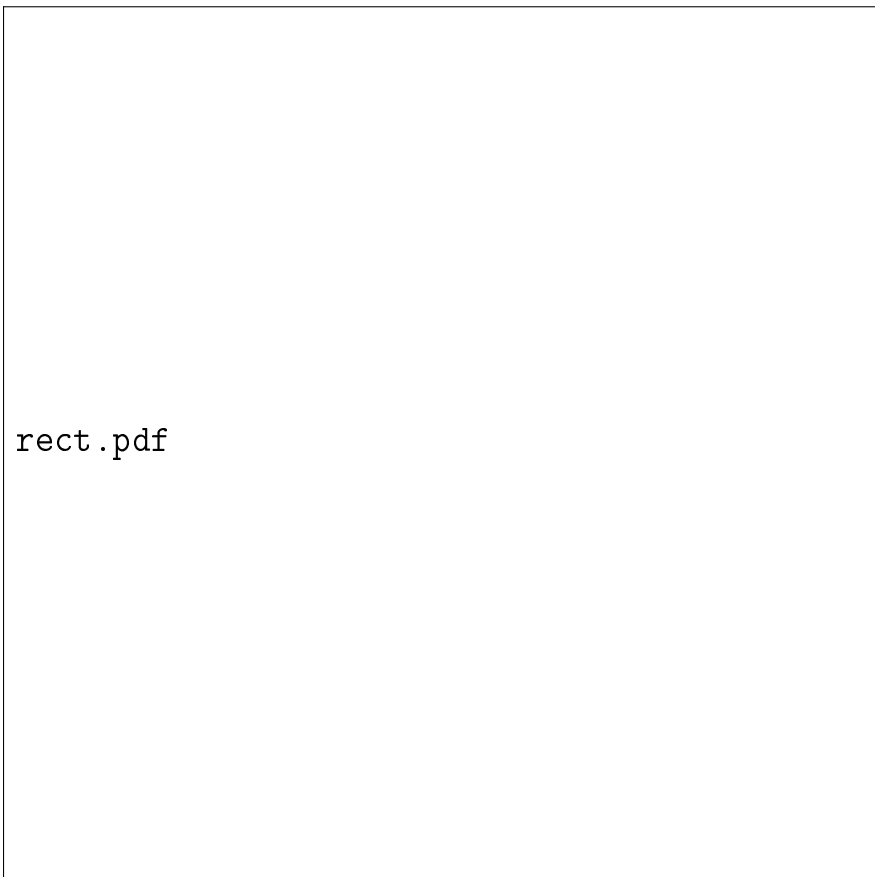
$$x(t, a) = \begin{cases} x_0 - \frac{1}{2}a + t, & \text{если } t \in [0, a]; \\ x_0 + \frac{1}{2}a, & \text{если } t \in [a, 2a]; \\ x_0 + \frac{1}{2}a - (t - 2a), & \text{если } t \in [2a, 3a]; \\ x_0 - \frac{1}{2}a, & \text{если } t \in [3a, 4a]. \end{cases},$$

$$y(t, a) = \begin{cases} y_0 - \frac{1}{2}a, & \text{если } t \in [0, a]; \\ y_0 - \frac{1}{2}a + (t - a), & \text{если } t \in [a, 2a]; \\ y_0 + \frac{1}{2}a, & \text{если } t \in [2a, 3a]; \\ y_0 + \frac{1}{2}a - (t - 3a), & \text{если } t \in [3a, 4a]. \end{cases}.$$

Теперь, меняя значение параметра a , мы получаем вложенные друг в друга квадраты с общим центром (рисунок ??).

2) Если кривая уже задана параметрическими функциями $x = x(t), y = y(t)$, чаще всего (кроме случаев, когда она проходит через некоторый центр, относительно которого задана¹) подобные вложенные

¹К примеру, для окружности естественным будет её геометрический центр, но если взять замкнутую



rect.pdf

Рисунок 4 — Вложенные квадраты с центром $(2; 2)$

кривые можно получить домножением x, y на радиус r . В этом случае даже не очевидно, что именно является "центром" кривой, но этот центр легко сдвигать прибавлением к x, y координат вектора переноса. На рисунке ?? это правило используется для базовой кривой, заданной формулами

$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cos\left(\frac{r}{R}t\right) + h \cos\left(t - \frac{r}{R}t\right), \\ y(t) = (R - r) \sin\left(\frac{r}{R}t\right) - h \sin\left(t - \frac{r}{R}t\right), \\ r = \frac{1}{3}, h = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

полуокружность (концы соединены друг с другом отрезком), то естественным будет задать эту полуокружность относительно центра окружности, но в этом случае она будет проходить через центр, поэтому такая параметризация не может использоваться, т. к. с уменьшением радиуса происходит сжатие не во внутрь фигуры. В нетривиальных случаях следует в качестве центра области использовать центр масс области.

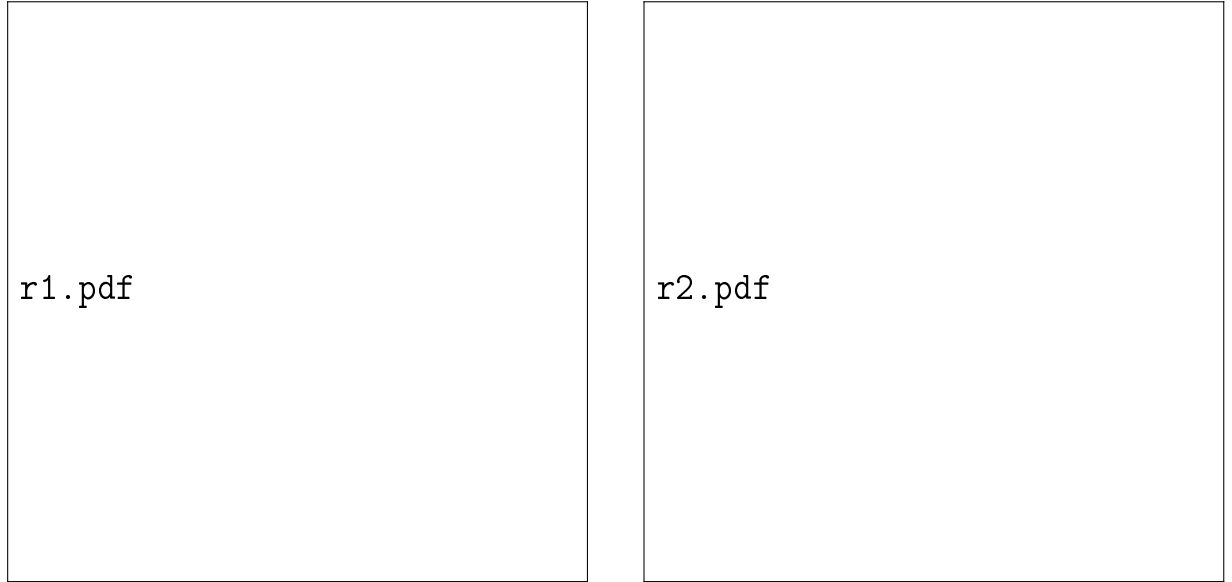


Рисунок 5 — Описанные наборы кривых при $R = 1$ (слева) и $R = 2$ (справа)

2.2 Определение целевой и побочной задачи, неустойчивости решения

Рассмотрим несколько важных определений на примере задачи интерполяции.

Пусть требуется решить некоторую задачу, например, приблизить сложную функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на отрезке $[x_{\min}; x_{\max}]$ более простой функцией $g = g(x, \mathbf{c})$, зависящей от параметров (вектора \mathbf{c}), которые и следует подобрать. Это значит, что нужно найти некоторый вектор $\tilde{\mathbf{c}}$, при котором

$$\|f - g(\tilde{\mathbf{c}})\| < \varepsilon,$$

где ε — некоторая приемлемая погрешность, а $\|\cdot\|$ — равномерная либо среднеквадратичная норма. Такую задачу будем называть *целевой*, *основной*.

Допустим, нельзя решить целевую задачу прямым образом (нельзя приближать f сразу по всем точкам отрезка), но можно приближать f на некотором наборе точек $x_i \in [x_{\min}; x_{\max}], i = 1, \dots, n$. Эту задачу будем называть *побочной*. Таким образом, мы будем искать решение

побочной задачи (в данном случае — задачи интерполяции), рассчитывая, что решение побочной задачи будет и решением целевой задачи (задачи аппроксимации).

Такой подход не всегда может дать эффективное решение. Например, задача интерполяции полиномами по определению решается точно, но для неё существует феномен Рунге (появление возрастающих осцилляций при интерполяции полиномами высокой степени, рисунок ??), из-за которого интерполирующая функция не обязательно будет приближать интерполируемую функцию на всём отрезке (более того, для примера Рунге доказано, что с ростом степени полинома погрешность устремляется к бесконечности²).

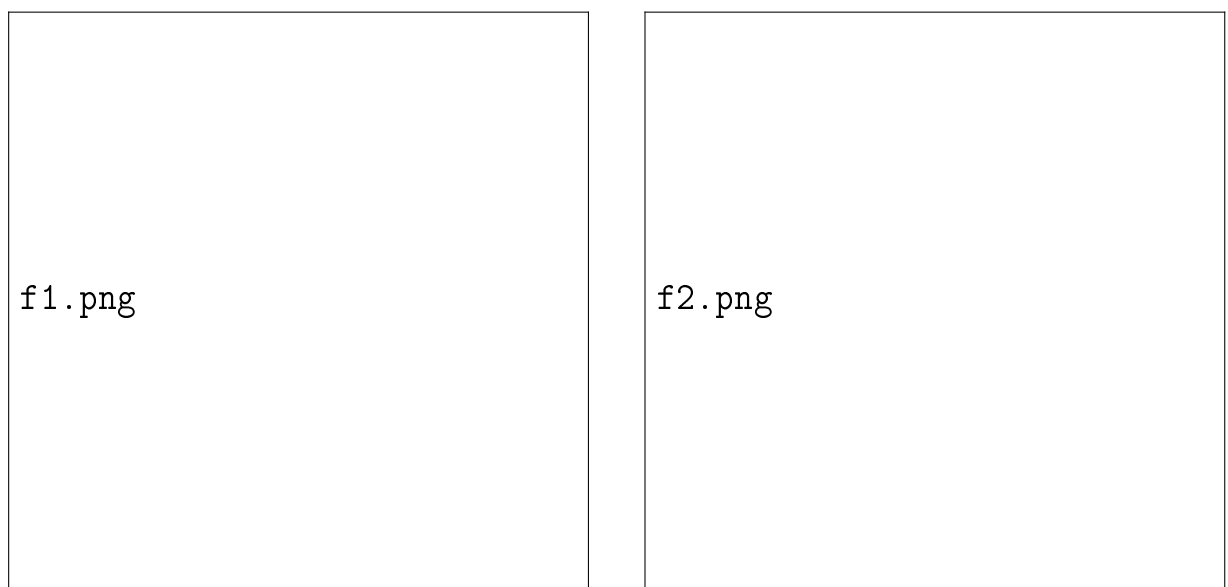
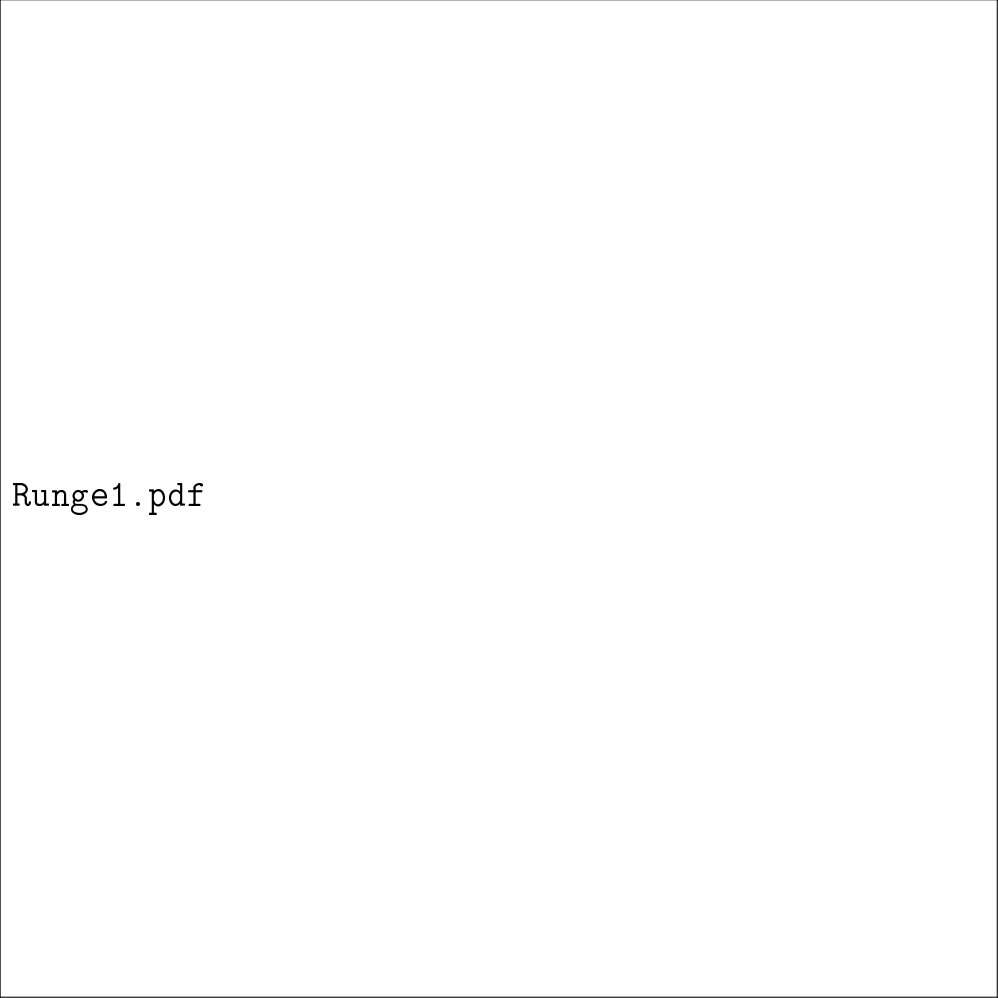


Рисунок 6 — Интерполяция функции $\frac{1}{1+x^2}$ полиномом степени 5 (слева) и степени 10 (справа), появление осцилляций

График зависимости погрешности аппроксимации от числа наблюдений (точек для интерполяции) будет иметь примерно такой же вид, как на рисунках ??-??, то есть сначала погрешность целевой задачи будет уменьшаться, затем поднимется до пика, затем опять уменьшится и т. д.

²См. https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_phenomenon



Runge1.pdf

Рисунок 7 — Неустойчивость интерполяции для $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на $[-9, 5]$

Такое поведение погрешности при увеличении числа наблюдений либо расширении аппроксимирующего подпространства будем называть *нестабильным*, *неустойчивым*; обратное поведение, т. е. невозрастание погрешности, будем называть *устойчивостью*. Неустойчивость какого-то алгоритма решения практически обнуляет его значимость, так при решении целевой задачи для любого числа k наблюдений нельзя быть уверенным, что полученное решение окажется лучше, чем, например, решение при $\frac{1}{2}k$ наблюдений, или вообще может считаться решением.

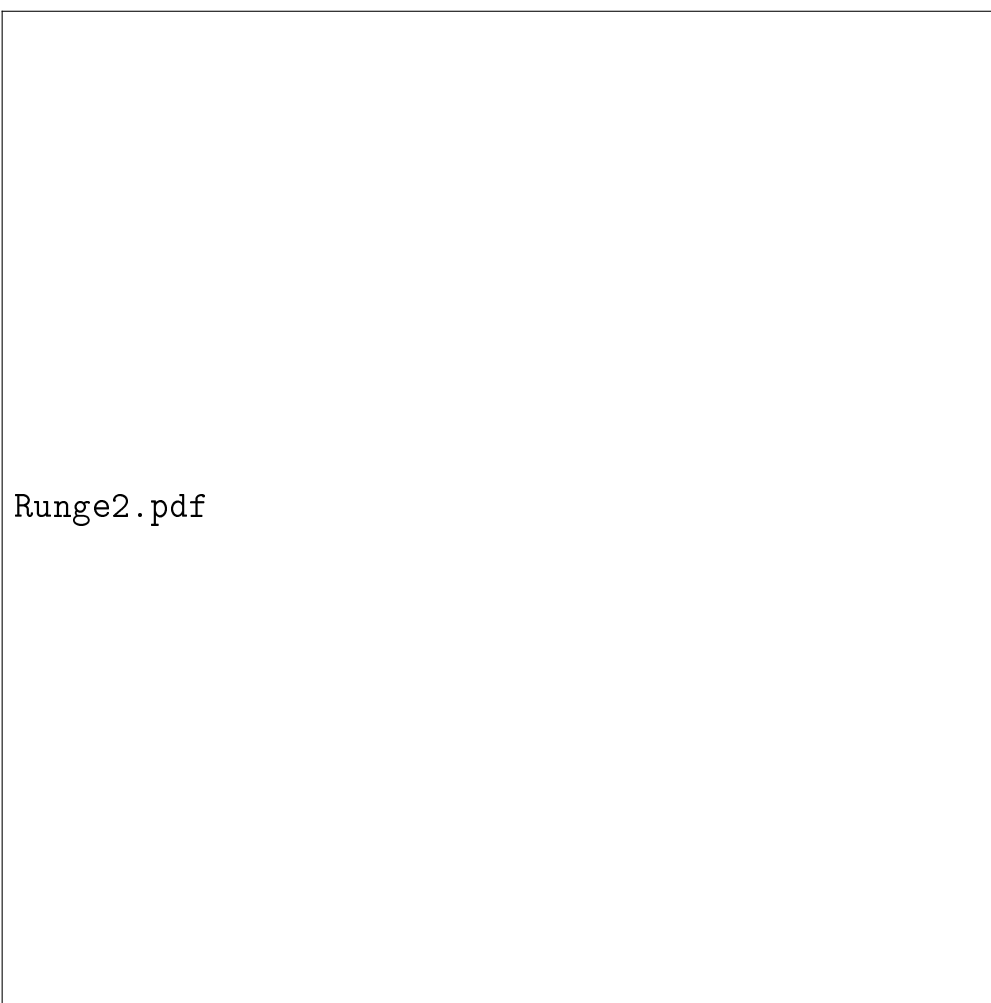


Рисунок 8 — Неустойчивость интерполяции для $f(x) = \sqrt{|x|}$ на $[-5, 10]$

3 Обратная задача гравиметрии (ОЗГ)

3.1 Постановка задачи

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$ — ограниченная область с ляпуновской границей, $S \subset \mathbb{R}^n \setminus Q$ — достаточно гладкая поверхность (расположенная произвольно относительно Q), $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ — действительная функция, заданная на S . Требуется найти плотность $\rho \in L_2(Q) \cap G(Q)$ из выражения

$$\forall x \in S : V_\rho(x) = \int_Q \rho(y) E(x - y) dy = \varphi(x). \quad (1)$$

Хорошо известно, что ОЗГ не является однозначно разрешимой, но Новиков П. С. в 1938 г. доказал следующий результат, позволяющий надеяться на частичное решение: по лемме Новикова ([?], стр. 56, [?], стр. 123-126) для любой области Q с ляпуновской границей пространство $L_2(Q)$ раскладывается в прямую сумму

$$L_2(Q) = G(Q) \oplus N(Q), \quad (2)$$

где $G(Q)$ — пространство гармонических на Q функций,

$N(Q)$ — пространство всех функций ψ , таких что

$$\int_Q \psi(y) E(x - y) dy = 0, \forall x \in Q^+, \quad (3)$$

называемое пространством плотностей нуль-потенциалов в $L_2(Q)$.

Описанный результат значит, что $\forall \beta \in L_2(Q) \quad \beta = \beta_1 + \beta_2, \beta_1 \in G(Q), \beta_2 \in N(Q), \int_Q \beta(y) E(x - y) dy = \int_Q \beta_1(y) E(x - y) dy$ независимо от β_2 , то есть для любой плотности ρ возможно найти только её гармоническую компоненту.

3.2 Алгоритм приближённого решения

Далее описывается один из алгоритмов решения ОЗГ, а также приводятся некоторые его детали реализации.

3.2.1 Описание алгоритма решения ОЗГ

Расположим в открытом множестве $Q^+ = \mathbb{R}^n \setminus \bar{Q}$ точки z_1, z_2, \dots, z_N (базисные точки). От положения этих точек будет зависеть точность решения, однако пока неизвестно, какое именно положение точек будет оптимальным. Известно, что во многих случаях существуют наборы точек, дающие наилучшее решение задачи вплоть до машинного нуля, как есть и крайне неоптимальные наборы точек, которые не будут давать точного решения даже в тривиальном случае. Во всяком случае, точки требуется располагать по какому-то правилу, чтобы результаты экспериментов можно было сравнивать. Пока будем располагать точки равномерно возле подобной S поверхности большего радиуса, при этом сами точки должны располагаться с небольшими случайными отклонениями в ту или другую сторону по нормали от S (рисунок ??).

Рисунок 9 — Образец расстановки базисных точек в \mathbb{R}^2

Расставив точки, будем искать приближённое решение ОЗГ $\tilde{\rho}_N$ в виде

$$\tilde{\rho}_N = \sum_{i=1}^N c_i \alpha_i, \quad (4)$$

где $\alpha_i = \alpha_i(z) = E(z - z_i)$, $c_i \in \mathbb{R}$ определяются из решения задачи минимизации функционала

$$F(\mathbf{c}) = F(c_1, \dots, c_N) = \left\| V_{\sum_{i=1}^N c_i \alpha_i} - \varphi \right\|_{L_2(S)} \rightarrow \min, \quad (5)$$

$$\varphi = V_\rho \equiv \int_Q \rho(y) E(x - y) dy.$$

Нетрудно показать, что F — квадратичный функционал, а задача его минимизации эквивалентна решению системы линейных алгебраических уравнений

[illegible]

где

$$\omega_i(x) = \int_Q \alpha_i(y) E(x-y) dy \quad (7)$$

и скобки (\cdot, \cdot) обозначают скалярное произведение:

$$(f, g) = (f, g)_{L_2(S)} = \int_S f(x)g(x)ds. \quad (8)$$

Заметим, что мы свели решение ОЗГ к решению задачи аппроксимации функции φ системой функций ω_j .

3.2.2 Детали реализации

Кратное интегрирование. Для интегрируемой функции f и области Q на прямоугольной области $D \supseteq Q$ определим функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}.$$

В программной реализации интеграл от функции f считается как интеграл от функции g методами библиотеки Math.NET Numerics (<https://numerics.mathdotnet.com>) по квадратурам Гаусса-Лежандра при числе узлов $n = 128$.

До этого автором использовались лично написанные методы интегрирования, которые не удовлетворяли либо в точности, либо по производительности, поэтому было решено использовать сторонние методы.

Устойчивое решение СЛАУ, связанной с задачей аппроксимации. Известно, что матрица системы (??) — это матрица Грама, а численное решение такой системы составляет отдельную задачу, поскольку классические методы решения и их простые комбинации дают неустойчивое решение. Наибольший вклад в неустойчивость аппроксимации вносят три причины:

Имеется алгоритм решения таких систем, дающий устойчивое решение, который и будет использован. Назовём его *ультра-гибридным*. Он заключается в следующем. Допустим, требуется минимизировать функционал вида

$$F(\mathbf{c}^M) = \left\| \varphi - \sum_{m=1}^M c_m \alpha_m \right\|_{L_2(\partial Q)}, \quad \mathbf{c}^M = (c_1, \dots, c_M), \quad (9)$$

где функции φ, α_m известны, причём его минимизация должна удовлетворять условию устойчивости

$$F(\mathbf{c}^{M-1}) \geq F(\mathbf{c}^M) \geq F(\mathbf{c}^{M+1}), \quad M \geq 2. \quad (10)$$

Такую минимизацию можно осуществить по индукции:

Если $M = 1$, решение очевидно: $\mathbf{c}^1 = c_1 = (\alpha_1, \varphi) / (\alpha_1, \alpha_1)$. В противном случае требуется искать решения для $\mathbf{c}^2, \mathbf{c}^3, \dots, \mathbf{c}^{M-1}$

последовательно; допустим, они найдены, тогда:

Шаг 1 («Точное» решение СЛАУ). Вектор $\mathbf{c}^M = (c_1, c_2, \dots, c_M)$ ищется решением известной СЛАУ каким-либо классическим методом (в том числе методом Гаусса или методом Гаусса с уточнением решения методом наискорейшего спуска и т. п., многие из таких методов описаны в [?]).

Шаг 2 (Миним. решения СЛАУ). Если $F(\mathbf{c}^{M-1}) < F(\mathbf{c}^M)$, то применить ко всем компонентам \mathbf{c}^M покомпонатную минимизацию (возможно, несколько раз) по формуле

$$c_k = \frac{(\alpha_k, \varphi) - \sum_{m=1, m \neq k}^N c_m (\alpha_k, \alpha_m)}{(\alpha_k, \alpha_k)}. \quad (11)$$

Шаг 3 (Миним. старого результата). Если снова $F(\mathbf{c}^{M-1}) < F(\mathbf{c}^M)$, то вектор \mathbf{c}^M заменить на вектор $(c_1^{M-1}, c_2^{M-1}, \dots, c_{M-1}^{M-1}, 0)$ и провести покомпонатную минимизацию по всем компонентам этого вектора.

Шаг 4 (Миним. посл. комп.). Если снова $F(\mathbf{c}^{M-1}) < F(\mathbf{c}^M)$, то вектор \mathbf{c}^M снова заменить на вектор $(c_1^{M-1}, c_2^{M-1}, \dots, c_{M-1}^{M-1}, 0)$ и применить покомпонатную минимизацию только для последнего элемента

$$\mathbf{c}^M = \left(c_1^{M-1}, c_2^{M-1}, \dots, c_{M-1}^{M-1}, \frac{(\alpha_M, \varphi) - \sum_{m=1}^{M-1} c_m (\alpha_M, \alpha_m)}{(\alpha_M, \alpha_M)} \right). \quad (12)$$

Шаг 5. Если и в таком случае $F(\mathbf{c}^{M-1}) < F(\mathbf{c}^M)$, то

$$\mathbf{c}^M = (c_1^{M-1}, c_2^{M-1}, \dots, c_{M-1}^{M-1}, 0) \rightarrow F(\mathbf{c}^{M-1}) = F(\mathbf{c}^M). \quad (13)$$

Практика показывает, что шаги 1-4 не являются равнозначными и в каждом конкретном случае любой из них может уменьшить погрешность аппроксимации там, где остальные не могут. Во многих случаях на каждом шаге точность аппроксимации увеличивается хотя бы на доли процента.

В следующей таблице (таблица 1) показан пример поведения ультра-гибрида, полученный из реального решения задачи ОЗГ на границе круга радиуса 0.5 при граничной функции $f(x, y) = x + y$. Пусть на нулевом шаге метода все коэффициенты c_i равны 0, тогда $\|f - \sum_i c_i \alpha_i\| = \|f\|$ — начальная погрешность.

Таблица 1 — Как точность аппроксимации изменяется при применении метода. k — это подразмерность задачи

При $k =$	точность улучшилась на	на шаге метода
1	77,9387892163706 %	«Точное» решение СЛАУ
2	84,9337396999316%	«Точное» решение СЛАУ
6	0,0131813672596741%	Миним. посл. комп.
7	22,9523377376523%	«Точное» решение СЛАУ
8	2,68164131277237E-05%	«Точное» решение СЛАУ
9	1,66694595002183%	«Точное» решение СЛАУ
10	0,00010090869733369%	Миним. старого результата
11	1,96385711795082%	«Точное» решение СЛАУ
14	5,46330664269579E-05%	Миним. посл. комп.
17	0,00018143331403764%	Миним. посл. комп.
18	4,24842896257656E-05%	Миним. посл. комп.
21	8,51067538277787%	Миним. старого результата
22	1,12311108019212%	Миним. решения СЛАУ
32	0,00370215728763344%	Миним. посл. комп.
36	11,4760683358568%	Миним. посл. комп.
37	10,0566903537115%	Миним. посл. комп.
38	7,80997025050057%	Миним. посл. комп.
39	15,6181909756738%	Миним. посл. комп.
40	0,0123664635283655%	Миним. посл. комп.
41	0,502578273639463%	Миним. посл. комп.
42	0,0823846153521963%	Миним. посл. комп.
43	0,118850502903311%	Миним. посл. комп.
44	50,2684017885662%	«Точное» решение СЛАУ
45	5,08710811927707%	Миним. посл. комп.

Следующие графики (рисунок ??-??) показывают, насколько метод устойчив; обратите внимание, что зачастую ультра-гибрид позволяет аппроксимировать не только устойчиво, но и точнее любого другого метода

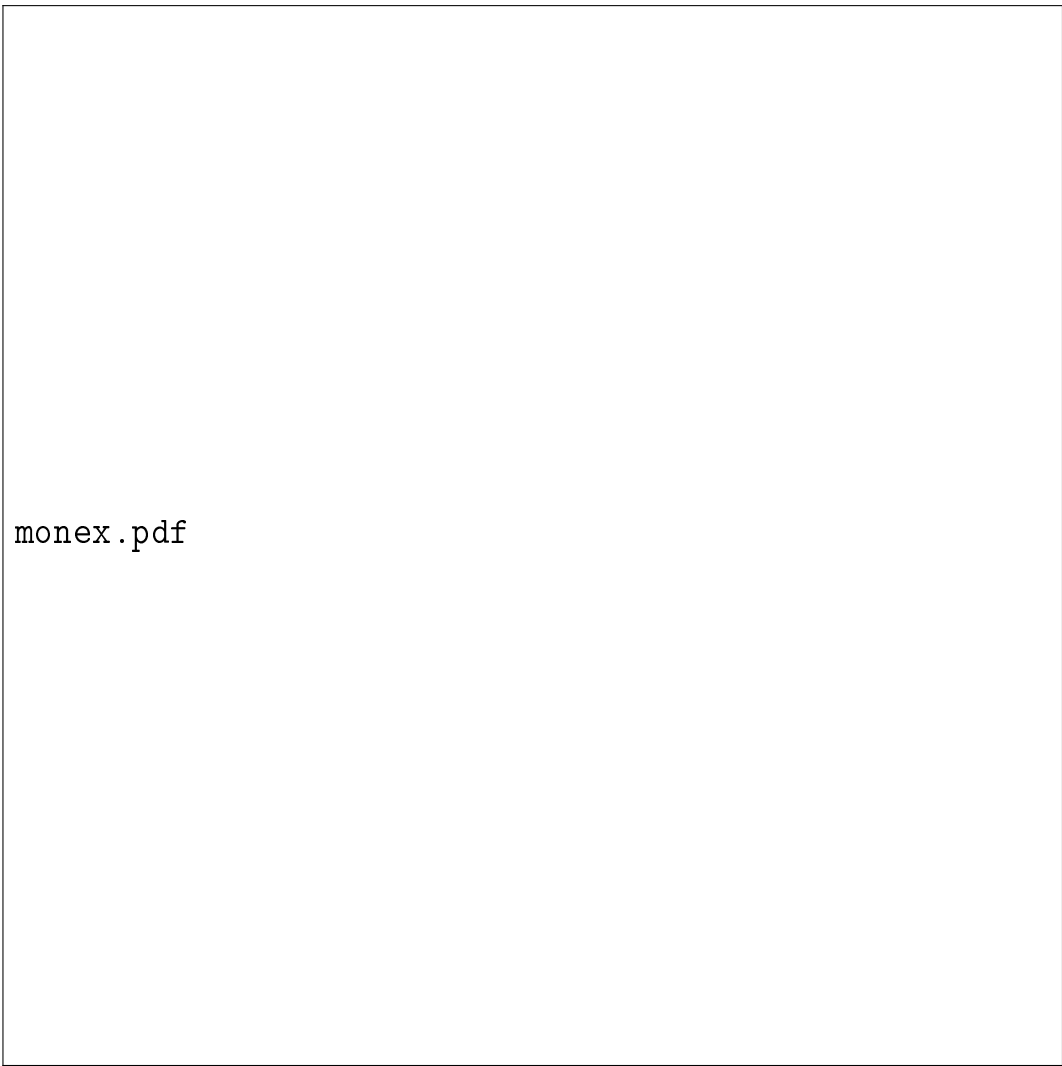
(в графиках о точности аппроксимации кривая ультра-гибрида опускается ниже минимального значения для другого метода). На приведённых графиках разные функции аппроксимировались несколькими системами (при разной размерности систем):

- Мономами: $1, x, x^2, \dots, x^k$
- Экспонентами: $1, e^x, e^{2x}, \dots$
- Дробями: $1, \frac{1}{1+x^2}, \dots, \frac{1}{1+kx^2}$
- Логарифмами: $\ln \left(0.01 + \left(x + 1 - \frac{k}{10} \right)^2 \right)$

Под неоптимизированной функцией (классическим решением) подразумевается результат аппроксимации, полученный при решении СЛАУ типа ?? методом Гаусса, другой вариант — ультрагибридным методом.

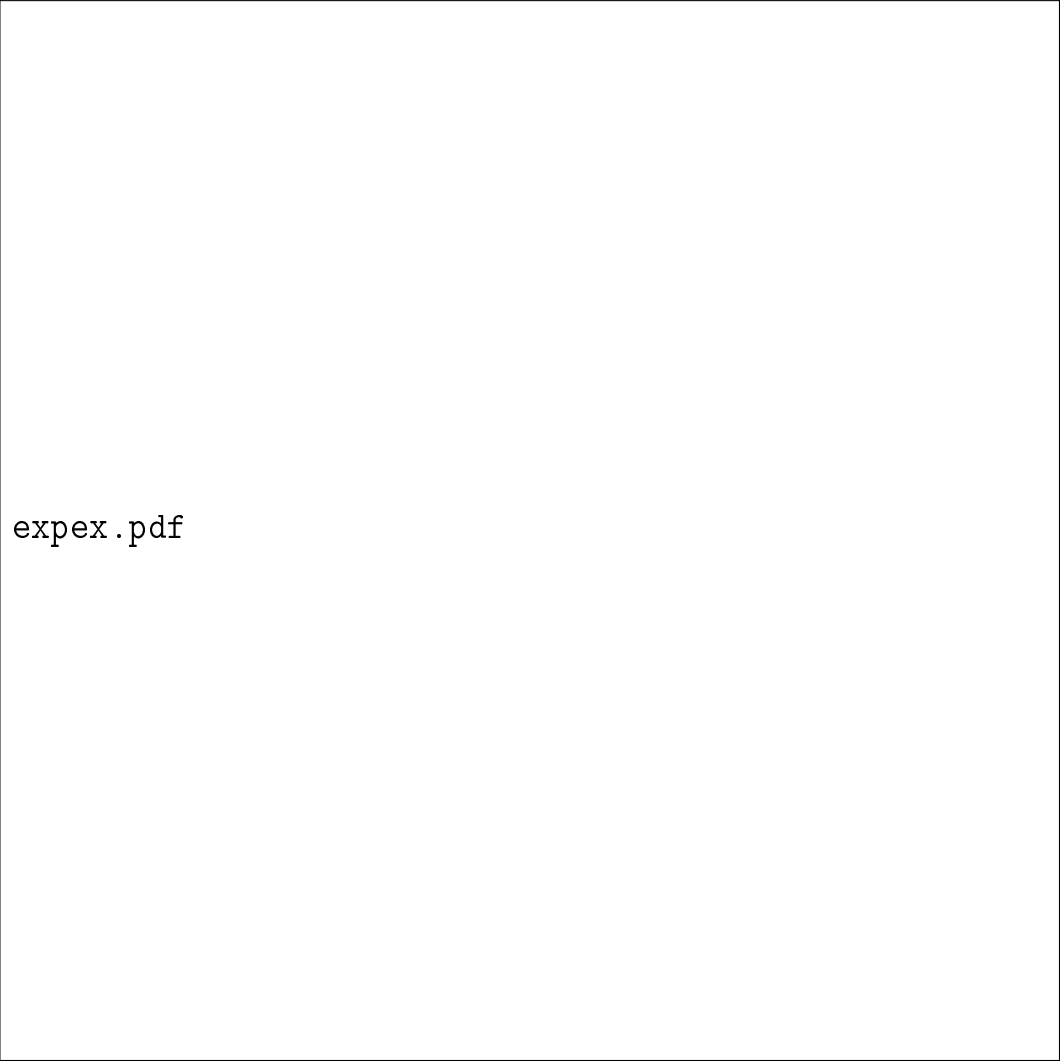
Алгоритм не гарантирует нахождения максимально точного решения системы, но гарантирует устойчивое невозрастание невязки при росте размерности системы. Сложность алгоритма равна $O(N^4)$, но это не вносит видимого отрицательного вклада в производительность, поскольку системы с плохо обусловленными матрицами, как правило, не используют слишком большими, вдобавок конкретно в исходной задаче на порядок дольше будут вычисляться коэффициенты СЛАУ.

Также следует отметить, что ещё не встречалось примера, когда ультра-гибрид приводил к значительно более точной аппроксимации в сравнении с классическим вариантом при наименьшей невязке (из графиков ??-?? видно, что минимальное значение ультра-гибрида не находится значительно ниже минимального значения классического метода). Подлинная ценность ультра-гибрида будет показана позже.



monex.pdf

Рисунок 10 — Аппроксимация мономами



expex.pdf

Рисунок 11 — Аппроксимация экспонентами

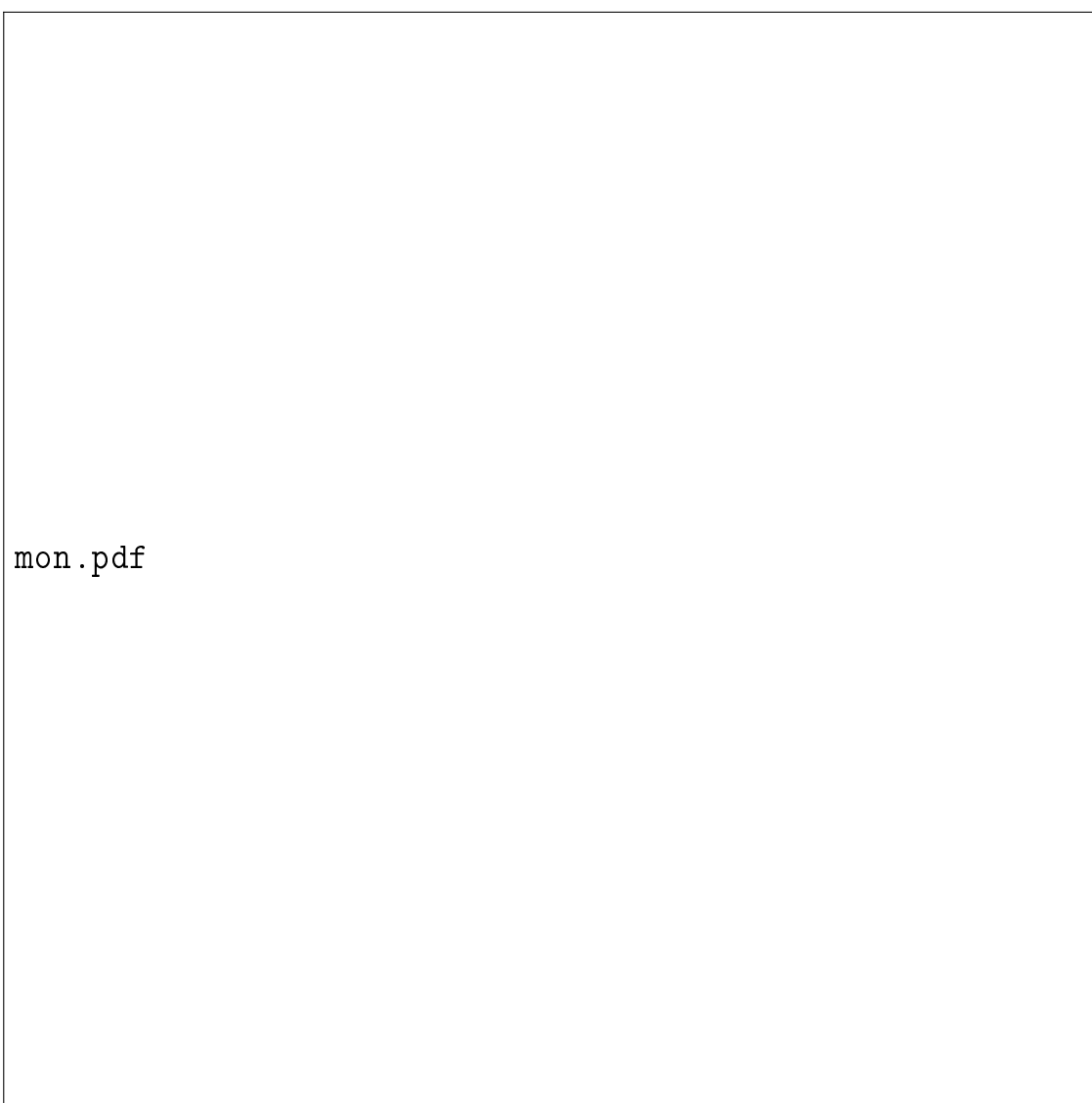
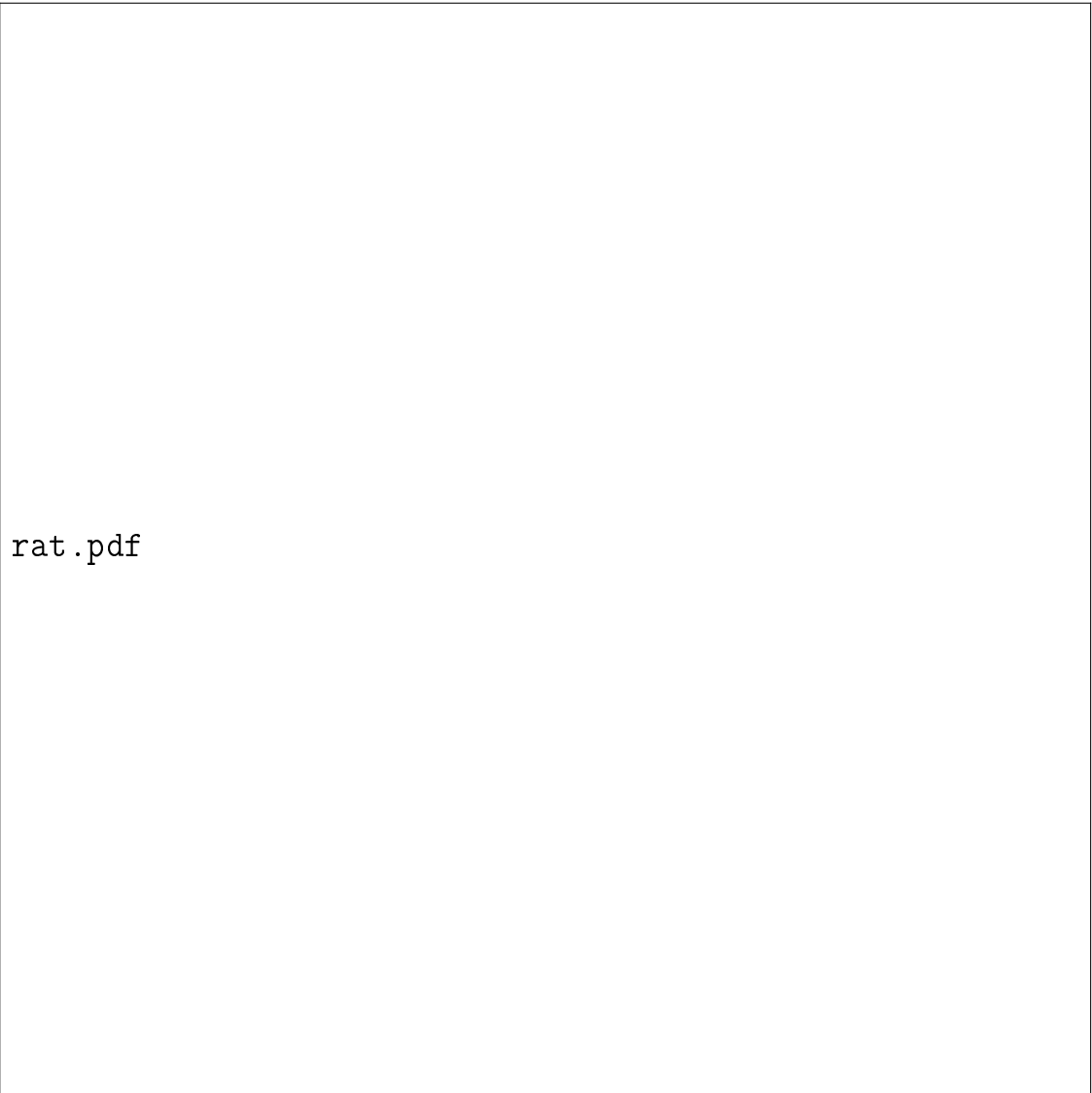


Рисунок 12 — Аппроксимация мономами



rat.pdf

Рисунок 13 — Аппроксимация дробями



Рисунок 14 — Аппроксимация логарифмами

3.3 Примеры решения ОЗГ

В этом разделе приводятся примеры решения ОЗГ для разных областей и плотностей. В качестве областей брались области, ограниченные кривыми из рисунков (??) и (??) (названия соответственно CIRCLE, TRIANGLE, SQUARE и EDGE) с той же параметризацией, возможно, слегка подкорректированной для возможности интегрирования описанным ранее методом; радиус кривых по умолчанию равен 0.5. В качестве граничных функций брались как гармонические, так и негармонические, чтобы продемонстрировать, как метод будет приближённо искать их гармоническую часть и как много найденная часть вносит в саму аппроксимируемую функцию; функции были следующими (x, y — координаты точки на плоскости, α — аргумент точки относительно начала координат):

$$f_1 = x + y,$$

$$f_2 = \sin(y) (e^x + e^{-x}),$$

$$f_3 = 3x + 6y + \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2}y^2,$$

$$f_4 = 1.5,$$

$$f_5 = x^2 - y^2,$$

$$f_6 = f_1(x, y) \cdot e^{x-y} = (x + y)e^{x-y},$$

$$f_7 = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & -\pi \leq \alpha < -\frac{2\pi}{3} \\ 0, & -\frac{2\pi}{3} < \alpha \leq -\frac{\pi}{3} \\ \frac{1}{2}, & -\frac{\pi}{3} < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{2}, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$f_8 = f_3 + f_7,$$

$$f_9 = e^x(\cos y + 3 \sin y),$$

$$ff_{10} = \sum_{i=1}^5 f_i,$$

$$f_{11} = -\ln(|x - z_1|).$$

3.3.1 Параметры численного метода

Контурь из рисунков (??) и (??) обозначаются за ∂Q , Q — область, ограниченная одним из этих контуров, L — подобный ∂Q контур радиуса r , причём Q содержится внутри области, им ограниченной. Радиус r может меняться от собственно радиуса ∂Q до некоторого фиксированного значения.

Приближённое значение плотности ρ равно

$$\tilde{\rho} = \sum_i c_i \alpha_i,$$

где α_i — базисный потенциал от i -й точки. Точек z_i выбрано некоторое количество и располагаются они равномерно по кривой L_p , подобной L , но большего радиуса (рисунок ??), с небольшими случайными отклонениями по нормали от L .

На кривой L известна функция $V_f(x) = \int_Q f(y)E(x - y)dy$, где f — одна из перечисленных ранее тестовых функций. Тогда коэффициенты c_i из $\tilde{\rho}$ находятся как компоненты решения задачи минимизации:

$$F(c_1, \dots, c_i, \dots, c_n) = \|V_f - V_{\tilde{\rho}}\|_{L_2(L)} \rightarrow \min.$$

Значение $\|V_f - V_{\tilde{\rho}}\|_{L_2(L)}$ есть точность аппроксимации потенциала на L . Значение $\|\rho - \tilde{\rho}\|_{L_2(Q)}$ есть точность аппроксимации плотности на области Q . Цель метода — осуществить аппроксимацию на Q .

3.3.2 Аппроксимация на границе области

По известному алгоритму для разных областей Q и разных плотностей $\rho = f_i, i = 1, 2, \dots, 10$ были найдены приближённые плотности $\tilde{\rho}$. На следующих графиках (рисунки ??-??) показаны функции $\rho, \tilde{\rho}$ (плотности) и $V_\rho, V_{\tilde{\rho}}$ (исходники) на кривых L , графики рисуются по отрезку параметризации L , число базисных потенциалов n зафиксировано. Под качеством аппроксимации имеются в виду значения $\|\rho - \tilde{\rho}\|_{L_2(Q)}$ и $\|V_f - V_{\tilde{\rho}}\|_{L_2(L)}$; в скобках обозначены те же значения для случая, когда L совпадает с ∂Q (когда радиус этих двух контуров одинаков).

Рассмотрев результаты тестирования (около сотни графиков), я сделал вывод, что в среднем аппроксимация по круговой области происходит немного лучше. Однако, некоторые функции лучше аппроксимировались на некруговых областях. Кроме этого, хорошая аппроксимация $\|V_f - V_{\tilde{\rho}}\|_{L_2(L)}$ не всегда означает хорошую аппроксимацию $\|\rho - \tilde{\rho}\|_{L_2(Q)}$.

d1.pdf

v1.pdf

d2.pdf

v2.pdf

d3.pdf

v3.pdf

d4.pdf

v4.pdf

d5.pdf

v5.pdf

d6.pdf


v6.pdf

d7.pdf

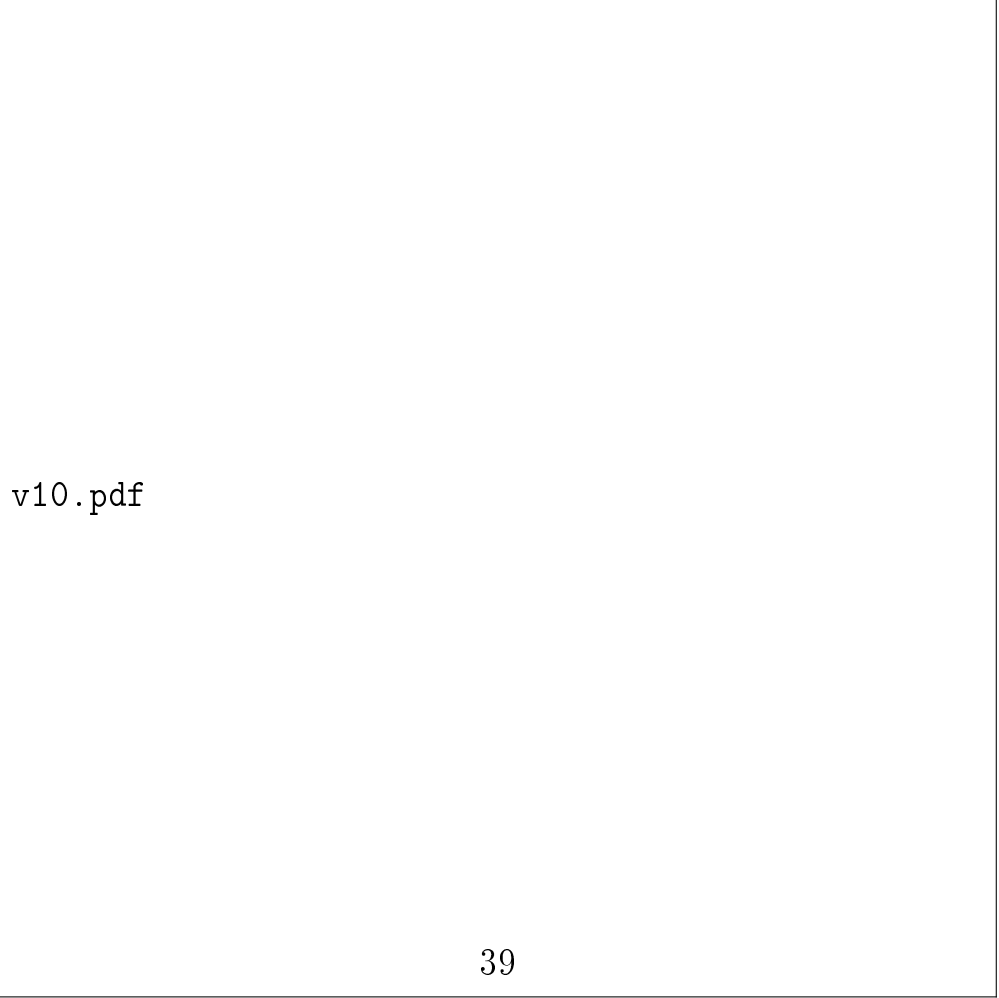
v7.pdf

d8.pdf

v8.pdf



d10.pdf



v10.pdf

3.3.3 Аппроксимация внутри области

Если двумерные графики из прошлого подраздела показывали особенности аппроксимации на границе области Q , то следующие графики показывают поведение погрешности по всей области в целом. В графиках (рисунки ??-??) число базисных потенциалов равно 20, под Density имеется в виду плотность ρ , под Density approx. — $\tilde{\rho}$, под Difference — функция $|\rho - \tilde{\rho}|$.



Рисунок 24 — Аппроксимация внутри области для f_1

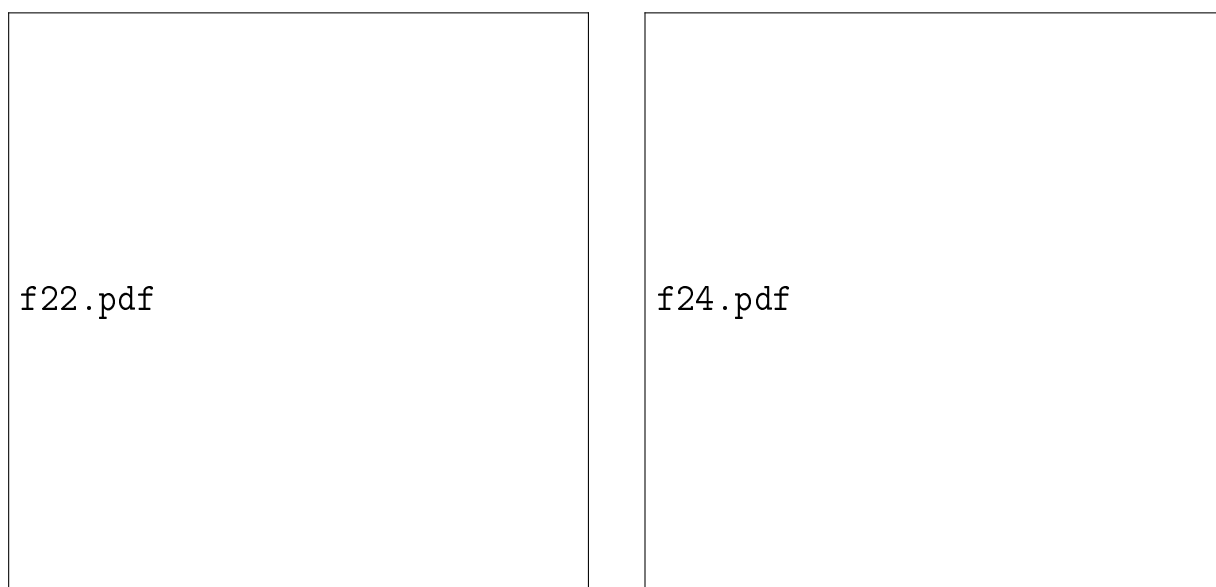


Рисунок 25 — Аппроксимация внутри области для f_2

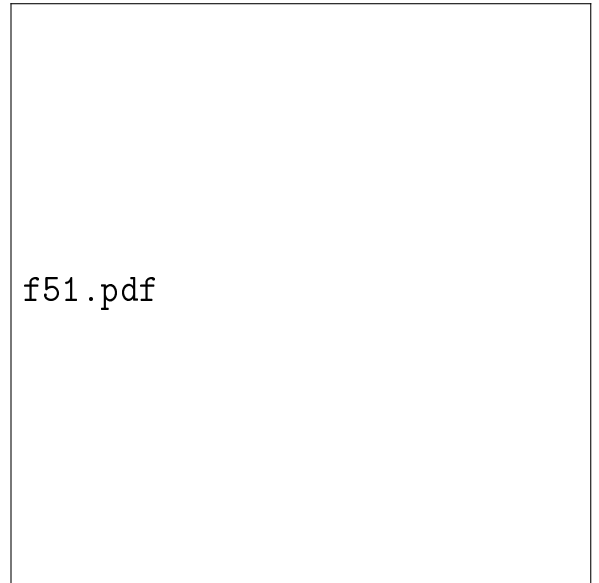
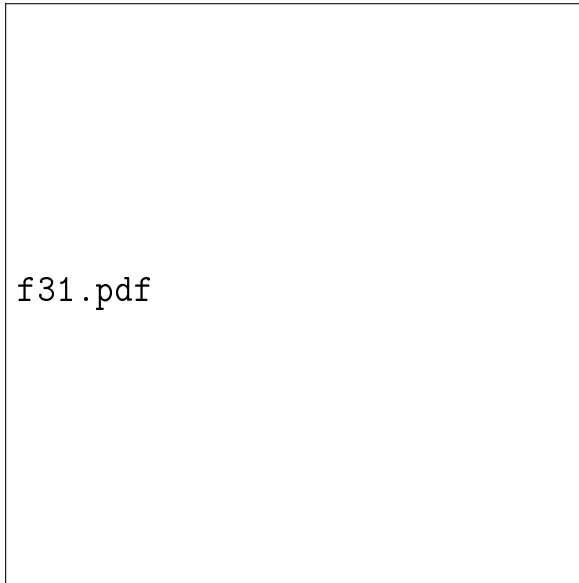


Рисунок 26 — Аппроксимация внутри области для f_3 (слева) и f_5 (справа)

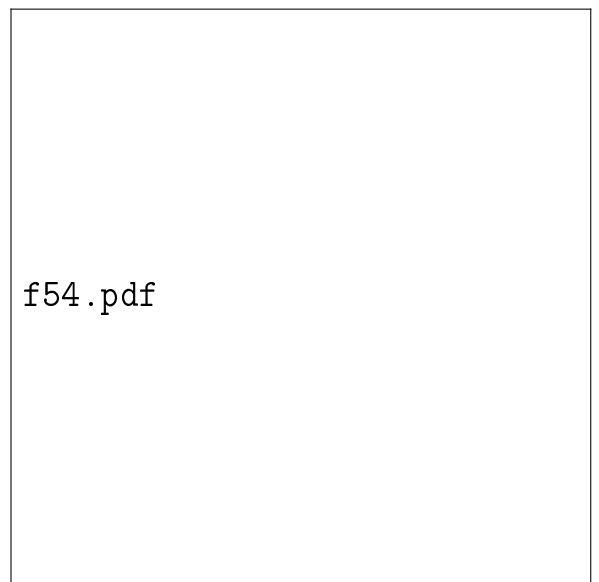
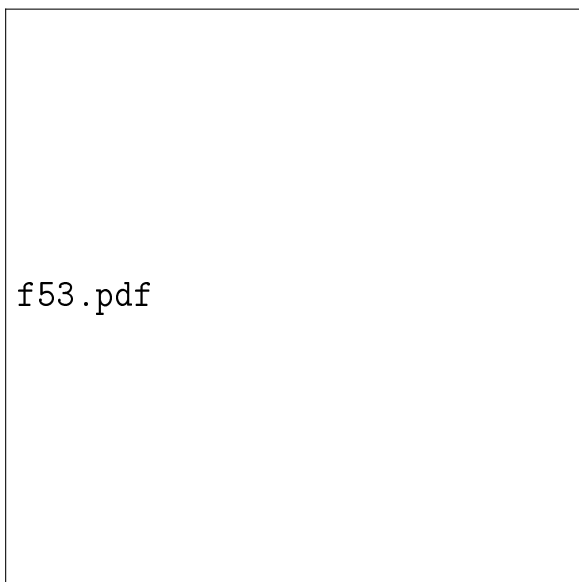


Рисунок 27 — Аппроксимация внутри области для f_5

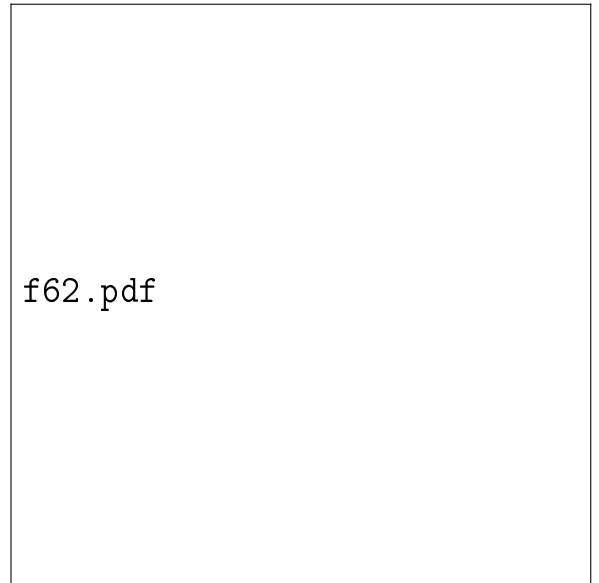
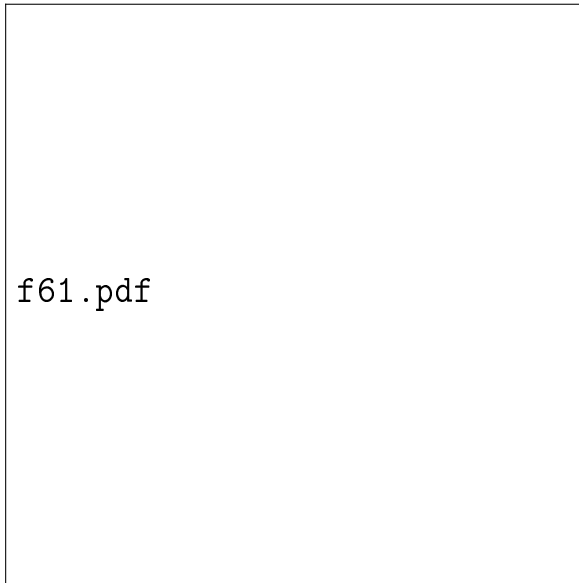


Рисунок 28 — Аппроксимация внутри области для f_6

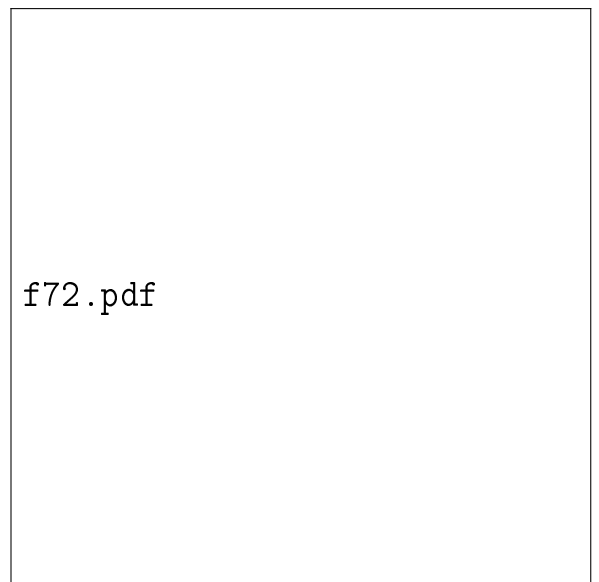
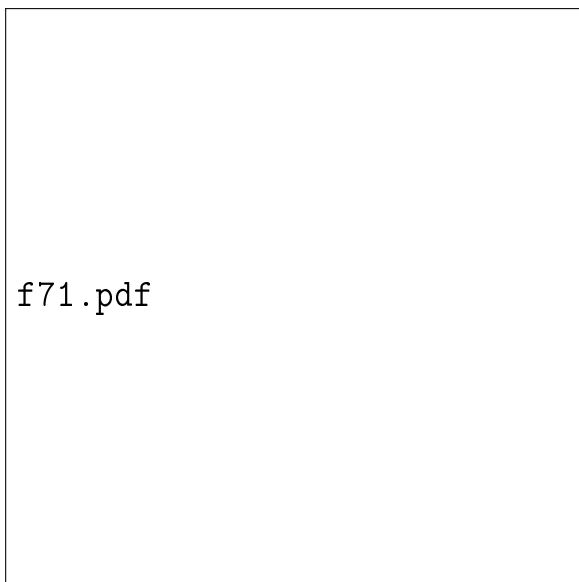


Рисунок 29 — Аппроксимация внутри области для f_7

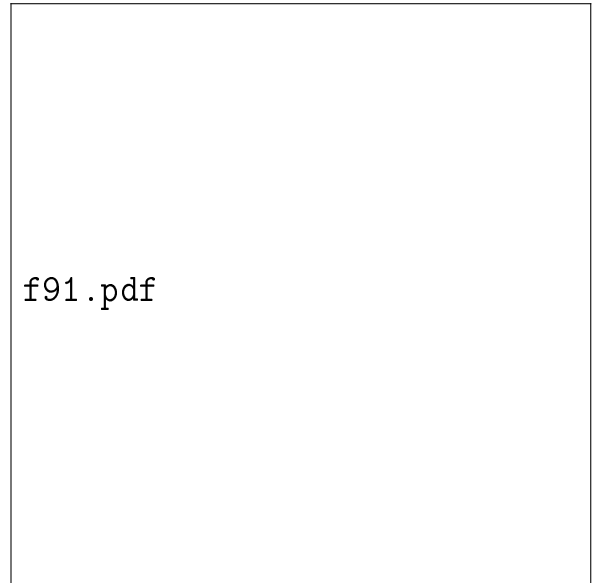
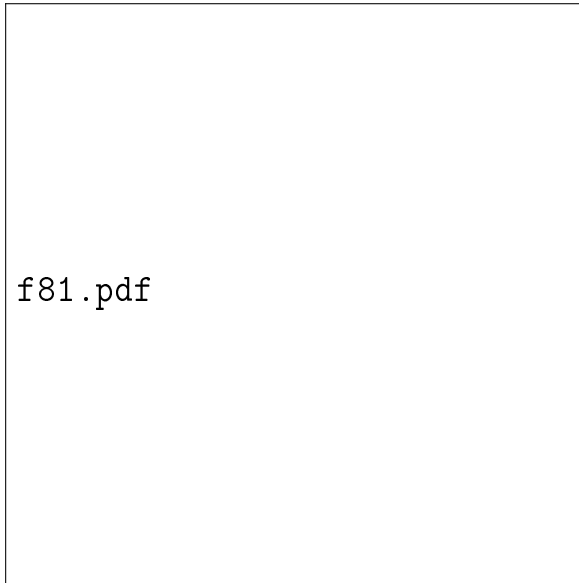


Рисунок 30 — Аппроксимация внутри области для f_8 (слева) и f_9 (справа)

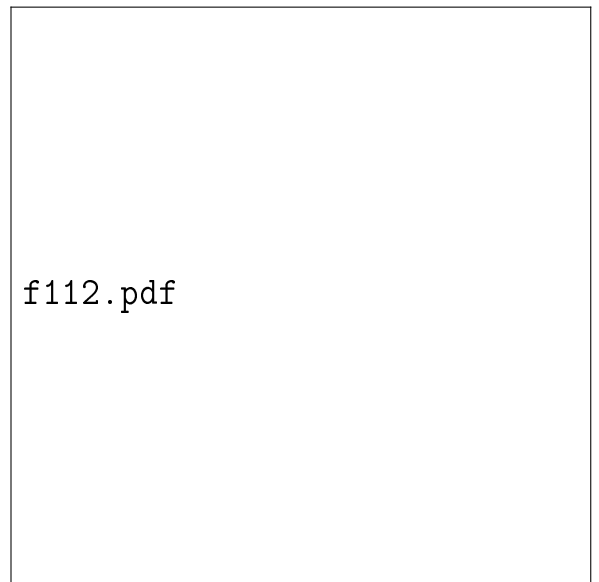
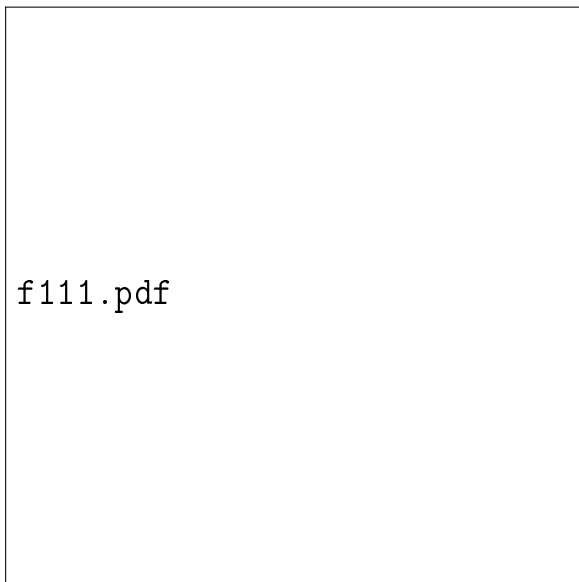


Рисунок 31 — Аппроксимация внутри области для f_{11}

3.4 Устойчивость решения ОЗГ в классе гармонических плотностей

В этом разделе доказывается некорректность обратной задачи гравиметрии на примере системы плотностей из $\rho_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$. Сначала формулируются понятие регулярного контура и относящиеся к нему утверждения, потом показывается оценка сверху для функций V_{ρ_k} , затем доказывается, что $V_{\frac{\rho_k}{\|\rho_k\|}} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, затем объясняется, почему это означает некорректность ОЗГ.

3.4.1 О регулярных контурах

Пусть $V = \{V_\rho \in L_2(Q)\}, V \in C(\mathbb{R}^2)$ — множество потенциалов, $V|_{\partial Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{V_\rho|_{\partial Q} : \rho \in L_2(Q)\}, V|_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{V_\rho|_\Gamma : \rho \in L_2(Q)\}$ — сужение этих потенциалов на ∂Q и некоторую кривую Γ , и пусть имеется отношение эквивалентности между этими сужениями:

$$a \in V|_{\partial Q} \simeq b \in V|_\Gamma : \exists \rho \in L_2(Q) : V|_{\partial Q} = a, V|_\Gamma = b.$$

По аналогии с результатами [?] выводятся следующие утверждения.

Утверждение 1. Ядро отображения $\rho \in L_2(Q) \rightarrow V_\rho|_\Gamma, \rho \in G(Q)$ не более чем одномерно.

Доказательство.

Пусть есть две разные функции из ядра: $V_{\rho_1}|_\Gamma = V_{\rho_2}|_\Gamma = 0$.

Случай А.

$$\rho_1 \perp 1 \text{ в } L_2(Q) \Rightarrow V_{\rho_1} \rightarrow 0, x \rightarrow \infty \Rightarrow V_{\rho_1} = 0 \text{ в } \Gamma^+ \Rightarrow V_{\rho_1} = 0 \text{ в } \mathbb{R}^2 \setminus Q,$$

поскольку V_{ρ_1} аналитическая и тогда все её производные равны 0 на

аналитических продолжениях, поэтому из леммы Новикова $\rho_1 \in N(Q)$.

Случай Б.

$$\rho_1 \not\in N(Q), \rho_2 \not\in N(Q) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \rho_3 = \rho_1 + c\rho_2 \perp 1 \text{ в } L_2(Q) \Rightarrow \rho_3 \in N(Q),$$

чего не может быть. ■

Утверждение 2. Ядро отображения $\rho \in L_2(Q) \cap G(Q) \rightarrow V_\rho|_\Gamma \cap, z_0 \in \Gamma^+$ – тривиально. Доказательство следует из усиленного принципа максимума (опираясь на факт, что z_0 не может быть экстремумом).

Следствие. Для двух контуров Γ_1, Γ_2 ядра не совпадают.

Определение. Будем называть Γ регулярным, если ядро отображения $\rho \rightarrow V_\rho|_\Gamma$ тривиально.

Суть этих утверждений в том, что все контуры L , подобные ∂Q , кроме одного, являются регулярными, то есть обеспечивают биективность отображения $\rho \rightarrow V_\rho|_\Gamma$.

3.4.2 Вывод V_{ρ_k}

Отождествим пока \mathbb{R}^2 с комплексной плоскостью \mathbb{C} и рассмотрим последовательность плотностей вида $\rho_k = \operatorname{Re} z^k = r^k \cos k\varphi$.

Вычислим V_{ρ_k} для $x = (z \cos \alpha, z \sin \alpha) \equiv z \cos \alpha + iz \sin \alpha$ вне области

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}:$$

$$\begin{aligned}
V_{\rho_k}(x) &= \int_Q \rho_k(y) E(x-y) dy = \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^k \cos k\varphi \ln |x - (r \cos \varphi, r \sin \varphi)| r d\varphi dr = \\
&= \left| \alpha = \text{Arg } x, z = |x| \right| = \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{k+1} \cos k\varphi \ln \sqrt{(z \cos \alpha - r \cos \varphi)^2 + (z \sin \alpha - r \sin \varphi)^2} d\varphi dr = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{k+1} \cos k\varphi \cdot \\
&\quad \cdot \ln(z^2 - 2zr \cos \varphi \cos \alpha + (r \cos \varphi)^2 - 2zr \sin \varphi \sin \alpha + (r \sin \varphi)^2) d\varphi dr = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{k+1} \cos k\varphi \ln(z^2 - 2zr(\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) + r^2) d\varphi dr = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 r^{k+1} \int_0^{2\pi} \cos k\varphi \ln(z^2 + r^2 - 2zr \cos(\varphi - \alpha)) d\varphi dr = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 r^{k+1} \int_0^{2\pi} \cos(k(\varphi - \alpha) + k\alpha) \ln(z^2 + r^2 - 2zr \cos(\varphi - \alpha)) d\varphi dr = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 r^{k+1} \int_0^{2\pi} (\cos(k(\varphi - \alpha)) \cos(k\alpha) - \sin(k(\varphi - \alpha)) \sin(k\alpha)) \cdot \\
&\quad \cdot \ln(z^2 + r^2 - 2zr \cos(\varphi - \alpha)) d\varphi dr = \dots \quad (14)
\end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{2\pi} \sin(k(\varphi - \alpha)) \sin(k\alpha) \ln(z^2 + r^2 - 2zr \cos(\varphi - \alpha)) d\varphi.$$

Поскольку функция $\sin(k(\varphi - \alpha))$ нечётна по φ , а $\cos(\varphi - \alpha)$ чётна по φ , то подинтегральная функция нечётна как произведение чётной и нечетной функций. А поскольку $\sin(k(\varphi - \alpha))$ $\frac{2\pi}{k}$ -периодична, $k \in \mathbb{N}$, $\cos(\varphi - \alpha) - 2\pi$ -периодична, то указанный интеграл обращается в ноль как интеграл от нечётной периодической функции на периоде. Искомый

интеграл упрощается:

$$\begin{aligned}
\cdots &= \frac{1}{2} \int_0^1 r^{k+1} \cos(k\alpha) \int_0^{2\pi} \cos(k(\varphi-\alpha)) \ln(z^2 + r^2 - 2zr \cos(\varphi-\alpha)) d\varphi dr = \\
&= \frac{1}{2} \cos(k\alpha) \int_0^1 r^{k+1} \int_0^{2\pi} \cos(k(\varphi-\alpha)) \ln(z^2 + r^2 - 2zr \cos(\varphi-\alpha)) d(\varphi-\alpha) dr = \\
&= \left| \text{выполняем замену } \tau = \varphi - \alpha \right| = \\
&= \frac{1}{2} \cos(k\alpha) \int_0^1 r^{k+1} \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} \cos(k\tau) \ln(z^2 + r^2 - 2zr \cos \tau) d\tau dr = \\
&= \left| \text{в силу периодичности} \right| = \\
&= \frac{1}{2} \cos(k\alpha) \int_0^1 r^{k+1} \int_0^{2\pi} \cos(k\tau) \ln(z^2 + r^2 - 2zr \cos \tau) d\tau dr = \\
&= \frac{1}{2} \cos(k\alpha) A_k(z), \quad (15)
\end{aligned}$$

где

$$A_k(z) = \int_0^1 r^{k+1} \int_0^{2\pi} \cos(k\tau) \ln(z^2 + r^2 - 2zr \cos \tau) d\tau dr. \quad (16)$$

Заметим, что $A_k(z)$ ограничена:

$$\begin{aligned}
|A_k(z)| &\leq \int_0^1 r^{k+1} \int_0^{2\pi} |\cos(k\tau)| |\ln(z^2 + r^2 - 2zr \cos \tau)| d\tau dr \leq \\
&\leq \int_0^1 r^{k+1} \int_0^{2\pi} |\ln(z^2 + r^2 - 2zr \cos \tau)| d\tau dr \leq \\
&\leq 2\pi \int_0^1 r^{k+1} \max \left(\left| \ln((z-r)^2) \right|, \left| \ln((z+r)^2) \right| \right) dr \leq \\
&\leq 2\pi \int_0^1 r^{k+1} \sup_{t \in S_r(z)} |\ln(t^2)| dr \leq 2\pi \sup_{t \in B_1(z)} |\ln(t^2)| \int_0^1 r^{k+1} dr = \\
&= 2\pi \frac{\sup_{t \in B_1(z)} |\ln(t^2)|}{k+2}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Здесь под $S_r(z) \subset \mathbb{R}$ подразумевается окружность радиуса r с центром в z , под $B_1(z) \subset \mathbb{R}$ — шар единичного радиуса с центром в z . Ясно, что это сокращённое обозначение для концов отрезка $[z-r, z+r]$ и самого отрезка

$[z - 1, z + 1]$ соответственно.

Из приведённых выкладок следует, что

$$|V_{\rho_k}(x)| \leq \pi \frac{\sup_{t \in B_1(z)} |\ln(t^2)|}{k+2}, \quad (18)$$

то есть для V_{ρ_k} найдена оценка сверху. На рисунке ?? эта оценка подтверждается численно.



Рисунок 32 — Разность $\pi \frac{\sup_{t \in B_1(z)} |\ln(t^2)|}{k+2} - |V_{\rho_k}(x)|$ для разных k

3.4.3 Некорректность ОЗГ

Пусть, как и в предыдущем пункте, Q — единичный шар, а потенциал считается на поверхности $S : \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 2\}$. В таком случае

$$\begin{aligned}
 \|\rho_k\|_{L_2(Q)} &= \sqrt{\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{2k} \cos^2(k\varphi) d\varphi dr} = \\
 &= \sqrt{\int_0^1 r^{2k} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2k\varphi) + 1}{2} d\varphi dr} = \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^1 r^{2k} \left(\frac{\sin(2k\varphi)}{2k} + \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} dr} = \\
 &= \sqrt{\pi \int_0^1 r^{2k} dr} = \sqrt{\frac{\pi}{2k+1}}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \left\| V_{\frac{\rho_k}{\|\rho_k\|}} \right\|_{C(S)} &= \frac{1}{\|\rho_k\|} \left\| V_{\rho_k} \right\|_{C(S)} \leq \\
 &\leq \sqrt{\frac{2k+1}{\pi}} \max_{x \in S} |V_{\rho_k}(x)| \leq \\
 &\leq \sqrt{\frac{2k+1}{\pi}} \pi |\cos(k\alpha)| \frac{\sup_{t \in B_1(2)} |\ln(t^2)|}{k+2} \leq \\
 &\leq \sqrt{\frac{2k+1}{\pi}} \pi \frac{\sup_{t \in B_1(2)} |\ln(t^2)|}{k+2} = \\
 &= \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2k+1}{k^2+4k+4}} \sup_{t \in B_1(2)} |\ln(t^2)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Итак, ранее доказано, что

$$\left\| V_{\frac{\rho_k}{\|\rho_k\|}} \right\|_{C(S)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Представим V как линейный оператор: $V : L_2(Q) \cap G(Q) \rightarrow C(S)$. Пусть S — такая поверхность, что $\text{Ker}(V) = \{0\}$ (то есть регулярный контур); тогда

существует обратный оператор V^{-1} . Рассмотрим образ V^{-1} на единичной сфере $\frac{V\left(\frac{\rho_k}{\|\rho_k\|}\right)}{\|V\left(\frac{\rho_k}{\|\rho_k\|}\right)\|}$:

$$V^{-1} \left(\frac{V\left(\frac{\rho_k}{\|\rho_k\|}\right)}{\|V\left(\frac{\rho_k}{\|\rho_k\|}\right)\|} \right) = \frac{\frac{\rho_k}{\|\rho_k\|}}{\|V\left(\frac{\rho_k}{\|\rho_k\|}\right)\|} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty, \quad (21)$$

поскольку $\left\| \frac{\rho_k}{\|\rho_k\|} \right\|_{L_2(Q)} = 1$ и $\left\| V \frac{\rho_k}{\|\rho_k\|} \right\|_{C(S)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Значит, оператор V^{-1} неограничен, что и означает некорректность³.

3.5 Демонстрация неустойчивости при численном решении

В этом разделе будут показаны примеры из практики, демонстрирующие неустойчивость ОЗГ в смысле неустойчивости поведения точности решения при расширении аппроксимирующего пространства.

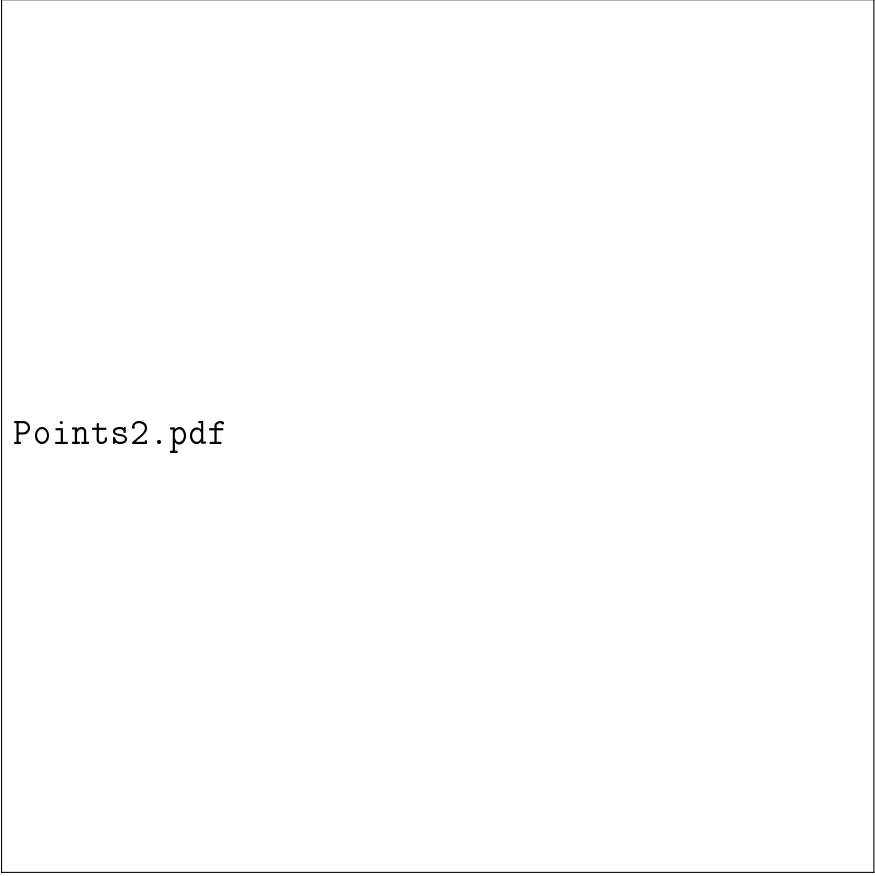
3.5.1 Реализация решения

Опираясь на пояснения из раздела 3.1, зафиксируем вблизи кривой L n базисных потенциалов (точек). Решив задачу минимизации функционала

$$F(c_1, \dots, c_k, \dots, c_n) = \|V_\rho - V_{\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i}\|_{L_2(L)},$$

получим некоторый набор $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k, \dots, c_n)$ и значение погрешности $\varepsilon_n = \varepsilon(\mathbf{c})$. Ясно, что ε должна не возрастать с ростом n , но только если рост n происходит за счёт добавления новых точек в исходных набор базисных потенциалов (рисунок ??), поскольку разные точки вносят разный вклад в качество аппроксимации.

³Из неограниченности обратного оператора следует, что из-за малых погрешностей на области значений оператора могут появляться огромные погрешности на его области определения.



Points2.pdf

Рисунок 33 — С ростом числа точек аппроксимация должна не ухудшаться, если только точки добавляются к уже зафиксированным

Если же при каждом новом n все точки пересчитываются, мы имеем дело уже с разными задачами, чьи результаты не подходят для сравнения.

Чтобы обеспечить выполнение указанного условия, я изначально фиксировал вблизи кривой максимальное количество n нужных для эксперимента точек, затем случайным образом смешивал их индексы, чтобы точки, взятые по порядку, располагались не рядом друг с другом на кривой. После этого сразу заполнялась система $n \times n$, причём для функций $\omega_i(x) = \int_Q \alpha_i(y)E(x - y)dy, i = 1, \dots, n$ производилась мемоизация (запоминание результатов), что ускоряло заполнение системы в десятки раз, так как фактически требовалось найти лишь n элементов вместо $n(n - 1)$. Далее к уже готовой системе применялся ультра-гибрид.

Поскольку ультра-гибрид гарантирует устойчивую аппроксимацию, действительно выполнялось условие $\varepsilon_k \geq \varepsilon_{k+1}, k = 1, \dots, n - 1$ (устойчива

аппроксимация V_ρ на $L_2(L)$), однако при подстановке коэффициентов решения $\mathbf{c}_k, k = 1, \dots, n$ в функционал

$$T(\mathbf{c}_k) = \left\| \rho - \sum_{i=1}^k c_i \alpha_i \right\|_{L_2(Q)} = \epsilon_k,$$

условие $\epsilon_k \geq \epsilon_{k+1}, k = 1, \dots, n - 1$ более чем в половине случаев не выполнялось, то есть ультра-гибрид находил такие наборы коэффициентов \mathbf{c}_k , при которых аппроксимация потенциала была устойчивой, а аппроксимация плотности — нет, что и означает неустойчивость ОЗГ. Кроме того, неустойчивость проявляется в том, что очень малые различия в начальных условиях (визуально прямые линии на графиках потенциалов — на самом деле они содержат спуски в доли процентов) обращаются в заметные колебания на решении (скачки на графиках аппроксимации плотности).

3.5.2 Примеры расчётов

На рисунках ??-?? показано, как ведёт себя погрешность аппроксимации потенциала и его плотности при росте числа базисных точек, когда аппроксимация ведётся на фиксированной кривой L (у L зафиксирован радиус) и аппроксимация потенциала устойчива. Во всех примерах радиус ∂Q равен 0.5, радиус L_p (около которой расположены базисные точки) равен 3.5. На трёхмерных графиках показаны поверхности, демонстрирующие зависимость аппроксимации потенциала и плотности от числа точек и радиуса L , меняющегося от радиуса ∂Q до 0.9 от радиуса L_p , также проведено масштабирование.

Графики приведены в логарифмической шкале. Поэтому, если на графиках пропущены значения (такие случаи встречались в 3D-графиках), это значит, что там аппроксимация достигает машинного нуля и логарифм

от нуля не высчитывается (пример кривых, на которых достигнут машинный ноль на аппроксимации потенциала, представлен на рисунке ??).

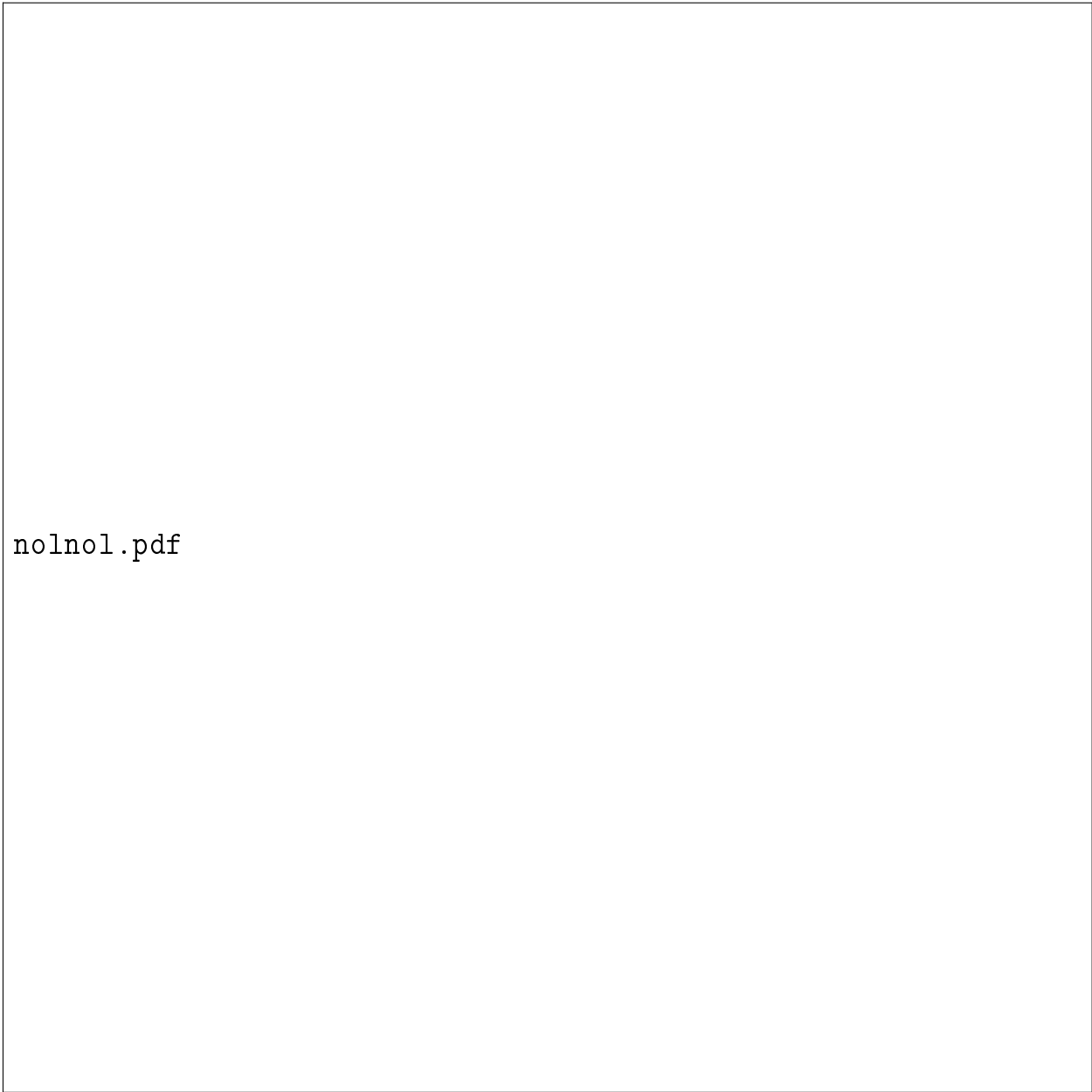
Кроме неустойчивости ОЗГ, из рисунков можно заметить, что сам потенциал достаточно плохо аппроксимируется, когда L почти совпадает с L_p или ∂Q , но существует некоторая L между этими двумя значениями, на которой аппроксимация будет намного лучше средней.

fix1.pdf

fix_1.pdf

fix2.pdf

fix_2.pdf



nolnol.pdf

Рисунок 36 — Кривые с нулевой аппроксимацией потенциала V_{f_4} (обозначены красным). Обычные кривые обозначены зелёным, желтым цветом обозначена ∂Q . Важно отметить, что нулевая аппроксимация потенциала не приводит к нулевой аппроксимации плотности и вообще не сказывается на аппроксимации плотности как-то особенно

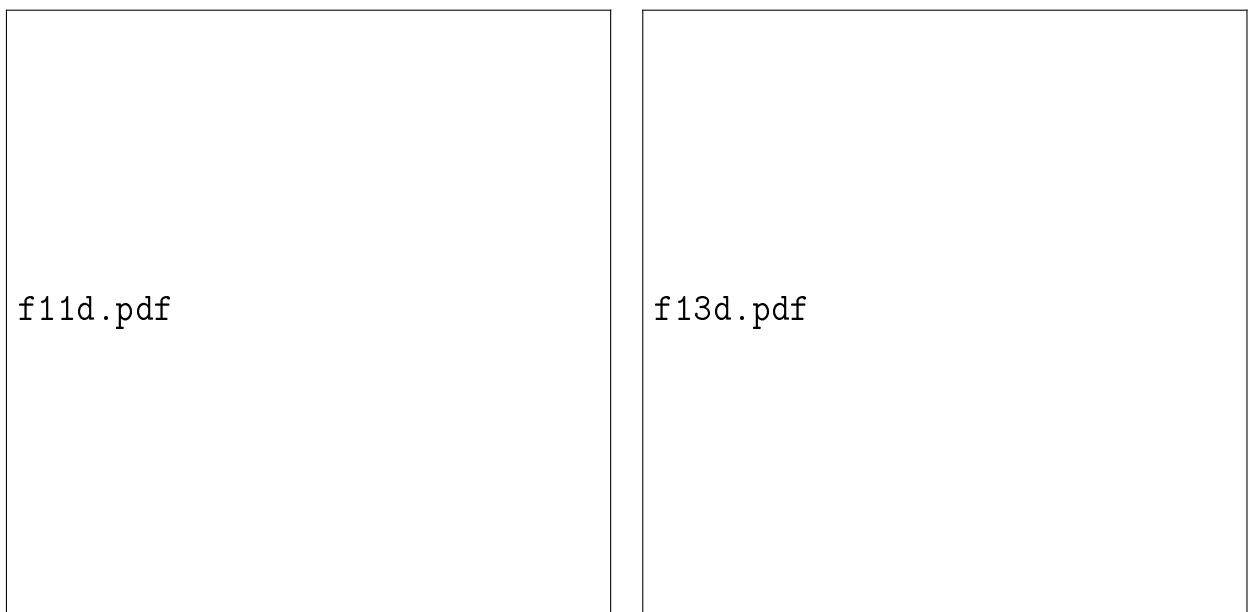


Рисунок 37 — Зависимость аппроксимации от радиуса L и числа базисных потенциалов для плотности f_1 и области CIRCLE (слева) и плотности f_1 и области TRIANGLE (справа)

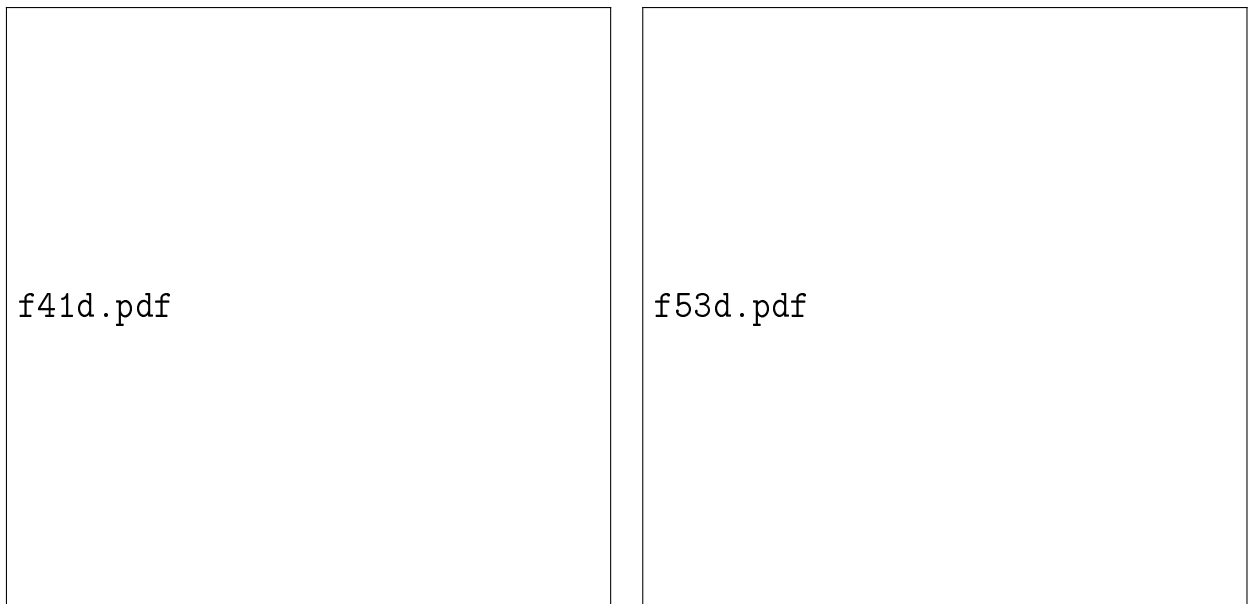


Рисунок 38 — Зависимость аппроксимации от радиуса L и числа базисных потенциалов для плотности f_4 и области CIRCLE (слева) и плотности f_5 и области TRIANGLE (справа)

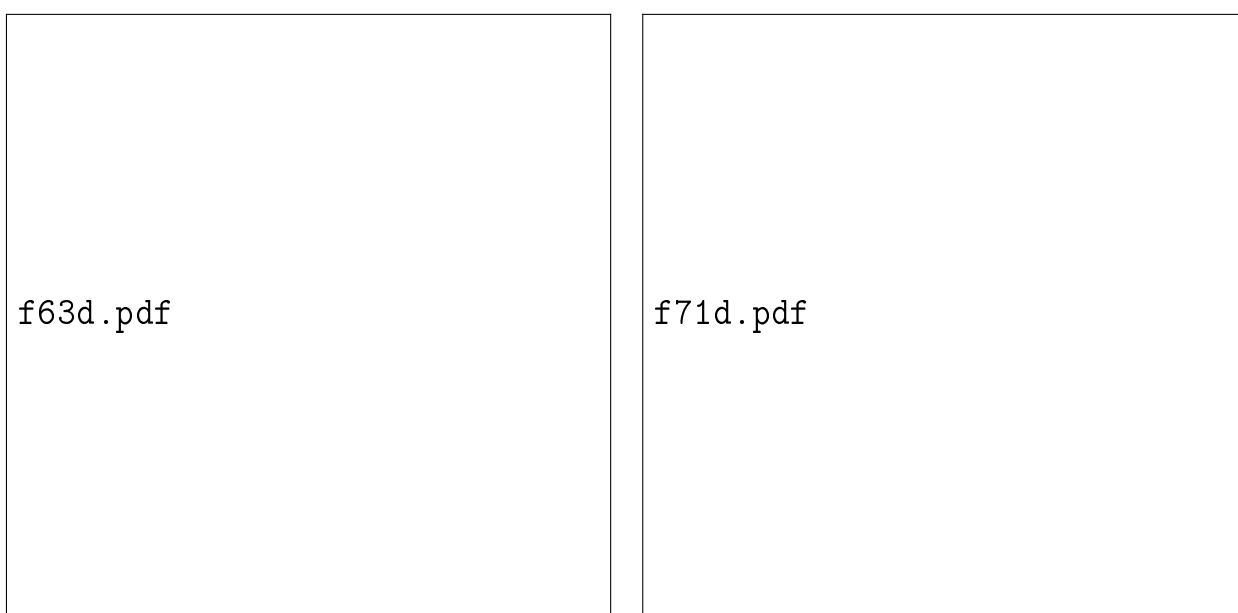


Рисунок 39 — Зависимость аппроксимации от радиуса L и числа базисных потенциалов для плотности f_7 и области CIRCLE (справа) и плотности f_6 и области TRIANGLE (слева)



Рисунок 40 — Зависимость аппроксимации от радиуса L и числа базисных потенциалов для плотности f_{10} и области EDGE

4 Краевая задача для бигармонического уравнения

4.1 Постановка задачи

Требуется найти функцию $u \in C^1(\bar{Q}) \cap D^4(Q)$, удовлетворяющую системе

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0, & \text{в } Q \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi_1, & \text{на } \partial Q, \\ u = \varphi_2, & \text{на } \partial Q \end{cases}$$

где $\varphi_1, \varphi_2 : \partial Q \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_1, \varphi_2 \in C(\partial Q)$ — заданные функции ([?], стр. 422-423),

$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ — производная по нормали к области Q .

4.2 Численное решение

4.2.1 Решение сведением к ОЗГ (метод 1)

Для любой функции $u \in C^2(\bar{Q}), Q \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ при любом $x \in Q$ имеет место равенство ([?], теорема 1 на стр. 159, [?], стр. 122, [?], стр. 7):

$$\tilde{\delta}(x)u(x) = \int_Q \Delta u(y)E(x-y)dy + \int_{\partial Q} \left(u(y)\frac{\partial E}{\partial \nu}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)E(x-y) \right) dy, \quad (22)$$

где

$$\tilde{\delta}(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ \frac{1}{2}, & x \in \partial Q \\ 0, & x \in Q^+ \end{cases}.$$

Первое слагаемое является объёмным потенциалом, второе — разностью потенциалов двойного и простого слоя соответственно ([?], [?]).

Приближённое решение \tilde{u} задачи будем искать в виде (??); учитывая краевую задачу, оно принимает вид:

$$\tilde{u}(x) = \int_Q \tilde{\rho}(y)E(x-y)dy + \int_{\partial Q} \left(\varphi_2(y)\frac{\partial E}{\partial \nu}(x-y) - \varphi_1(y)E(x-y) \right) dy. \quad (23)$$

Поскольку $\tilde{\delta}(x) = 0, x \in Q^+$, то поставленная задача сводится к поиску функции $\tilde{\rho} \forall x \in Q^+$ из уравнения

$$\int_Q \tilde{\rho}(y)E(x-y)dy + \int_{\partial Q} \left(\varphi_2(y)\frac{\partial E}{\partial \nu}(x-y) - \varphi_1(y)E(x-y) \right) dy = 0, \quad (24)$$

эквивалентного

$$\int_Q \tilde{\rho}(y)E(x-y)dy = \int_{\partial Q} \left(\varphi_1(y)E(x-y) - \varphi_2(y)\frac{\partial E}{\partial \nu}(x-y) \right) dy. \quad (25)$$

Раз правая часть уравнения может быть посчитана, $\tilde{\rho}$ может быть найдено как решение уже рассмотренной ОЗГ, когда x проходит по некоторой поверхности L . Затем найденная плотность подставляется в выражение (??) вместо Δu , в котором уже $x \in Q$, $u|_{\partial Q} \equiv \varphi_2$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv \varphi_1$.

4.2.2 Метод фундаментальных решений для бигармонического уравнения (метод 2)

В полярных координатах бигармоническое уравнение имеет вид⁴:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^2 \partial r^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^2 \partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (26)$$

Его сферически-симметричным решением v является такая функция $v = v(r)$, что $\Delta^2 v = 0$. Нетрудно показать, что общий вид такого решения следующий:

$$v = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r.$$

Идея данного метода заключается в том, чтобы искать приближённое решение \tilde{u} краевой задачи в виде

$$\tilde{u} = \sum_i c_i \alpha_i + \sum_i d_i \beta_i,$$

где $\alpha_i = E_1(x - z_i)$, $\beta_i = E_2(x - z_i)$, $E_1 = \ln r$, $E_2 = r^2 \ln r$, а коэффициенты c_i, d_i суть решения задачи минимизации функционала

$$F(c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n) = \left\| \varphi_2 - \sum_i c_i \alpha_i - \sum_i d_i \beta_i \right\|_{L_2(\partial Q)}^2 + \left\| \varphi_1 - \sum_i c_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \nu} - \sum_i d_i \frac{\partial \beta_i}{\partial \nu} \right\|_{L_2(\partial Q)}^2 \rightarrow \min.$$

Правомерность такой побочной задачи следует из оценки для решения бигармонического уравнения⁵:

$$\|u\|_{L_2(Q)} \leq C (\|\varphi_1\|_{L_2(\partial Q)} + \|\varphi_2\|_{L_2(\partial Q)}),$$

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Biharmonic_equation

⁵<http://www.mathnet.ru/links/b2bf1c32a849cca1276c8607179656b8/de8473.pdf>

где C — константа.

Раскрыв нормы через скалярные произведения и приведя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{aligned}
F = & (\varphi_1, \varphi_1) + (\varphi_2, \varphi_2) - \\
& - 2 \left(\sum_i c_i \left((\alpha_i, \varphi_2) + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \nu}, \varphi_1 \right) \right) + \sum_i d_i \left((\beta_i, \varphi_2) + \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial \nu}, \varphi_1 \right) \right) \right) + \\
& + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_i d_j \left((\alpha_i, \beta_j) + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \nu}, \frac{\partial \beta_j}{\partial \nu} \right) \right) + \sum_i c_i^2 \left((\alpha_i, \alpha_i) + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \nu}, \frac{\partial \alpha_i}{\partial \nu} \right) \right) + \\
& + \sum_{i \neq j} c_i c_j \left((\alpha_i, \alpha_j) + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \nu}, \frac{\partial \alpha_j}{\partial \nu} \right) \right) + \sum_i d_i^2 \left((\beta_i, \beta_i) + \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial \nu}, \frac{\partial \beta_i}{\partial \nu} \right) \right) + \\
& + \sum_{i \neq j} d_i d_j \left((\beta_i, \beta_j) + \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial \nu}, \frac{\partial \beta_j}{\partial \nu} \right) \right), \quad (27)
\end{aligned}$$

где скалярные произведения берутся в пространстве $L_2(\partial Q)$. Для нахождения стационарных точек функционала F требуется решить систему уравнений $F_{c_i} = 0, F_{d_i} = 0, 1 \leq i \leq n$, где F_* — производная по соответствующему аргументу. Для аргументов c_i :

$$\begin{aligned}
F_{c_i} = & -2 \left((\alpha_i, \varphi_2) + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \nu}, \varphi_1 \right) \right) + 2 \sum_j d_j \left((\alpha_i, \beta_j) + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \nu}, \frac{\partial \beta_j}{\partial \nu} \right) \right) + \\
& + 2 c_i \left((\alpha_i, \alpha_i) + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \nu}, \frac{\partial \alpha_i}{\partial \nu} \right) \right) + 2 \sum_{i \neq j} c_j \left((\alpha_i, \alpha_j) + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \nu}, \frac{\partial \alpha_j}{\partial \nu} \right) \right) = 0.
\end{aligned} \quad (28)$$

Тогда систему $F_{c_i} = 0, 1 \leq i \leq n$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & \dots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & \dots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{\partial \alpha_1}{\partial \nu}, \frac{\partial \alpha_1}{\partial \nu}) & \dots & (\frac{\partial \alpha_1}{\partial \nu}, \frac{\partial \alpha_n}{\partial \nu}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\frac{\partial \alpha_n}{\partial \nu}, \frac{\partial \alpha_1}{\partial \nu}) & \dots & (\frac{\partial \alpha_n}{\partial \nu}, \frac{\partial \alpha_n}{\partial \nu}) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} (\alpha_1, \varphi_2) + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \nu}, \varphi_1 \right) \\ (\alpha_2, \varphi_2) + \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial \nu}, \varphi_1 \right) \\ \vdots \\ (\alpha_n, \varphi_2) + \left(\frac{\partial \alpha_n}{\partial \nu}, \varphi_1 \right) \end{pmatrix} + \\
& \left[\begin{pmatrix} (\alpha_1, \beta_1) & \dots & (\alpha_1, \beta_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_n, \beta_1) & \dots & (\alpha_n, \beta_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{\partial \alpha_1}{\partial \nu}, \frac{\partial \beta_1}{\partial \nu}) & \dots & (\frac{\partial \alpha_1}{\partial \nu}, \frac{\partial \beta_n}{\partial \nu}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\frac{\partial \alpha_n}{\partial \nu}, \frac{\partial \beta_1}{\partial \nu}) & \dots & (\frac{\partial \alpha_n}{\partial \nu}, \frac{\partial \beta_n}{\partial \nu}) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Точно так же для F_{d_i} . В итоге получаем систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} (\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}_\nu) \mathbf{c} = \alpha_\varphi + (\tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}_\nu) \mathbf{d} \\ (\tilde{\beta} + \tilde{\beta}_\nu) \mathbf{d} = \beta_\varphi + (\tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}_\nu) \mathbf{c} \end{cases}, \tag{30}$$

где $\tilde{\alpha}$ — матрица произведений (α_i, α_j) ,
 $\tilde{\alpha}_\nu$ — матрица произведений $\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \nu}, \frac{\partial \alpha_j}{\partial \nu} \right)$,
 α_φ — вектор элементов $(\alpha_i, \varphi_2) + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \nu}, \varphi_1 \right)$,
 $\tilde{\gamma}$ — матрица произведений (α_i, β_j) ,
 $\tilde{\gamma}_\nu$ — матрица произведений $\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \nu}, \frac{\partial \beta_j}{\partial \nu} \right)$,
 $\tilde{\beta}$ — матрица произведений (β_i, β_j) ,
 $\tilde{\beta}_\nu$ — матрица произведений $\left(\frac{\partial \beta_i}{\partial \nu}, \frac{\partial \beta_j}{\partial \nu} \right)$,

β_φ — вектор элементов $(\beta_i, \varphi_2) + \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial \nu}, \varphi_1\right)$.

Введём обозначения $D_1 = \tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}_\nu, D_2 = \tilde{\beta} + \tilde{\beta}_\nu, R_1 = \alpha_\varphi, R_2 = \beta_\varphi, S = \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}_\nu$ и получим систему

$$\begin{aligned} \begin{cases} D_1 \mathbf{c} = R_1 + S \mathbf{d} \\ D_2 \mathbf{d} = R_2 + S \mathbf{c} \end{cases} &\equiv \begin{cases} \mathbf{c} = D_1^{-1}(R_1 + S \mathbf{d}) \\ \mathbf{d} = D_2^{-1}(R_2 + S D_1^{-1}(R_1 + S \mathbf{d})) \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} \mathbf{c} = D_1^{-1}(R_1 + S \mathbf{d}) \\ (E - D_2^{-1} S D_1^{-1} S) \mathbf{d} = D_2^{-1}(R_2 + S D_1^{-1} R_1) \end{cases} \equiv \\ &\begin{cases} \mathbf{c} = D_1^{-1}(R_1 + S \mathbf{d}) \\ (D_2 - S D_1^{-1} S) \mathbf{d} = R_2 + S D_1^{-1} R_1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (31)$$

Из рассуждений выше вполне очевидно, что исходный функционал имеет лишь одну стационарную точку, причём это — точка минимума. Однако, систему (??) практически невозможно решить даже относительно точно из-за наличия матриц D_1^{-1}, D_2^{-1} , обратных к плохо обусловленным матрицам, вдобавок вектор \mathbf{c} выражается через вектор \mathbf{d} и будет иметь сильные погрешности ввиду неточности всех остальных параметров системы. Решение этой проблемы заключается в использовании алгоритма роя частиц⁶.

Суть в следующем. Требуется минимизировать функционал в виде (??), который в новых обозначениях принимает вид:

$$F(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\varphi_1, \varphi_1) + (\varphi_2, \varphi_2) - 2(\mathbf{c} \cdot R_1 + \mathbf{d} \cdot R_2) + \mathbf{c}^T D_1 \mathbf{c} + \mathbf{d}^T D_2 \mathbf{d} + 2\mathbf{c}^T S \mathbf{d}. \quad (32)$$

Он представляет собой некоторый деформированный параболоид в гиперпространстве. Объединяем векторы \mathbf{c} и \mathbf{d} в один набор переменных и в гиперкубе $\Omega = [c_{\min}^1, c_{\max}^1] \times \cdots \times [d_{\min}^n, d_{\max}^n]$ расставляем случайным

⁶Описанного в <https://jenyay.net/Programming/ParticleSwarm&num=10>

образом большое число точек b_1, b_2, \dots . Далее эти точки двигаются по некоторому закону в дискретном времени (по итерациям). В конкретно нашем случае, если искомый минимум находится в Ω или достаточно близко, набор точек (частиц) почти наверняка сойдётся к нему (рисунок ??).

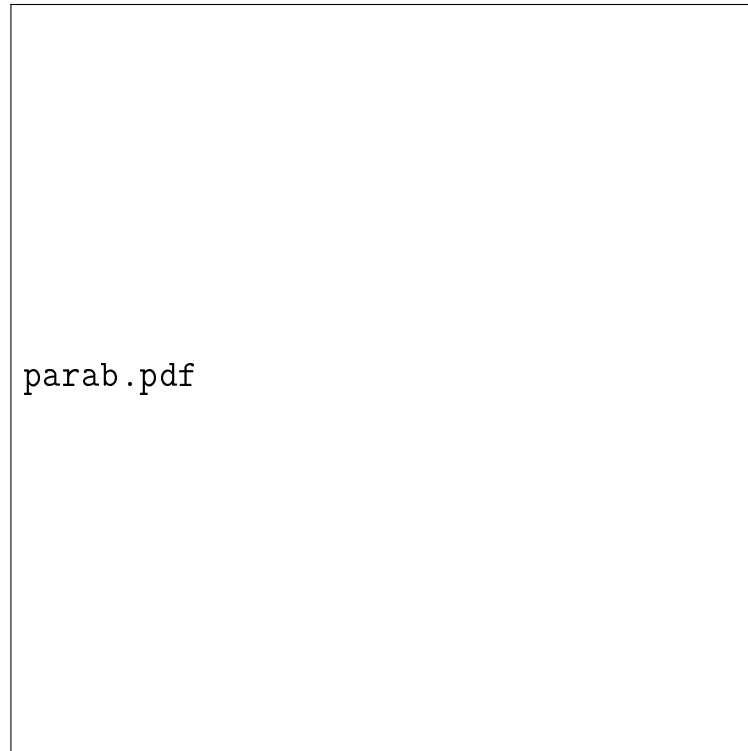


Рисунок 41 — Идея работы метода роя частиц для случая функции двух переменных с единственным минимумом

4.3 Аппроксимация граничных условий и точного решения внутри области 2-м методом

Минимизацию функционала (??) путём решения системы (??) тяжело адекватно (относительно временных ресурсов) проверить на устойчивость, используя алгоритм, подобный ультрагибридному для решения ОЗГ, поскольку тогда для каждой размерности придётся заново высчитывать матрицы D_1^{-1}, D_2^{-1} . Но алгоритм роя частиц легко подкорректировать под увеличение размерности задачи, вдобавок он сам

по себе гарантирует невозрастание невязки.

На рисунках ??-?? представлены пары графиков зависимости погрешности аппроксимации от числа k использованных точек z_1, \dots, z_k . На верхнем графике показаны значения для $\|u - \tilde{u}\|_{L_2(Q)}$ (целевая погрешность, погрешность реального решения краевой задачи), на нижнем — $F(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ (погрешность аппроксимации граничных условий).



S1.pdf

Рисунок 42 — Результат работы метода 2 для круга



Рисунок 43 — Результат работы метода 2 для треугольника



Рисунок 44 — Результат работы метода 2 для квадрата

4.4 Сравнение методов

Метод 2 в сравнении с методом 1 намного проще в реализации, так как не требует вычисления несобственных интегралов и не зависит от точности заполнения СЛАУ (так как никакой СЛАУ нет). Вдобавок, для метода 2 не требуется постоянно регулировать стабильность поведения погрешности, так как алгоритм роя частиц по своему определению даёт стабильные результаты.

Было проведено сравнение методов 1 и 2 на предмет точности решения при приблизительно одинаковых временных затратах на работу каждого алгоритма. Результаты сравнения представлены на рисунках ??-?? и в таблицах 2-3 (в таблицах дробные части погрешностей усечены).

Таблица 2 — Погрешность решения для $u = f_1$ разными методами на разных областях при разном числе функций

Область и метод		$n = 5$	$n = 10$	$n = 30$	$n = 40$
1	Метод 1 ($L = 0,81$)	0,3522478	0,3521968	0,3521968	0,3521968
	Метод 1 ($L = 3,14$)	11,6239313	11,6239295	11,6239295	11,6239295
	Метод 2	0,0246687	0,0069362	0,0051544	0,0027198
2	Метод 1 ($L = 1,75$)	0,6125370	0,6125370	0,6125233	0,6074520
	Метод 1 ($L = 3,34$)	2,2315009	2,2315009	2,2314973	2,2314973
	Метод 2	0,0117991	0,0036295	0,0026952	0,0025366
3	Метод 1 ($L = 2,82$)	3,8047554	3,8047554	3,8047554	3,8111539
	Метод 1 ($L = 0,87$)	0,5273033	0,5273033	0,5273033	0,5273033
	Метод 2	0,0102984	0,0085362	0,0109433	0,0106923

Таблица 3 — Погрешность решения для $u = f_2$ разными методами на разных областях при разном числе функций

Область и метод		$n = 5$	$n = 10$	$n = 30$	$n = 40$
1	Метод 1 ($L = 1,02$)	238,2395817	238,3438276	238,3438277	238,3438278
	Метод 1 ($L = 1,74$)	290,0432037	290,0708993	290,1292245	290,1311536
	Метод 2	0,0102425	0,0098423	0,0090942	0,0090942
2	Метод 1 ($L = 1,58$)	19,9393382	19,9511397	19,9511493	19,9511493
	Метод 1 ($L = 0,92$)	15,8790182	15,7583752	15,9278501	15,9278501
	Метод 2	0,0210393	0,0040080	0,0025977	0,0023779
3	Метод 1 ($L = 2,86$)	121,4509570	121,4521269	121,4521271	121,4521275
	Метод 1 ($L = 1,02$)	41,4362342	70,7213091	70,7213091	70,7213091
	Метод 2	0,0126201	0,0150668	0,0107903	0,0087096

Таблица 4 — Погрешность решения для $u = f_3$ разными методами на разных областях при разном числе функций

Область и метод		$n = 5$	$n = 10$	$n = 30$	$n = 40$
1	Метод 1 ($L = 3,41$)	2035,78190	2035,78978	2035,78978	2035,78978
	Метод 1 ($L = 2,87$)	1621,34862	1621,34745	1621,35152	1621,35152
	Метод 2	0,1609672	0,1545463	0,1495488	0,1492942
2	Метод 1 ($L = 2,68$)	94,552611	94,552611	94,552611	94,552613
	Метод 1 ($L = 0,7$)	53,589923	50,498462	50,498505	50,498515
	Метод 2	0,0291779	0,0203699	0,0215237	0,0199842
3	Метод 1 ($L = 0,52$)	102,916771	104,945878	103,995678	103,995678
	Метод 1 ($L = 3,31$)	245,609123	247,974469	247,974469	247,974469
	Метод 2	0,0353607	0,0516351	0,0736902	0,0626683

big1.pdf

pig1.pdf

big2.pdf

pig2.pdf

big3.pdf

pig3.pdf

big4.pdf

pig4.pdf

big5.pdf

pig5.pdf

big6.pdf

pig6.pdf

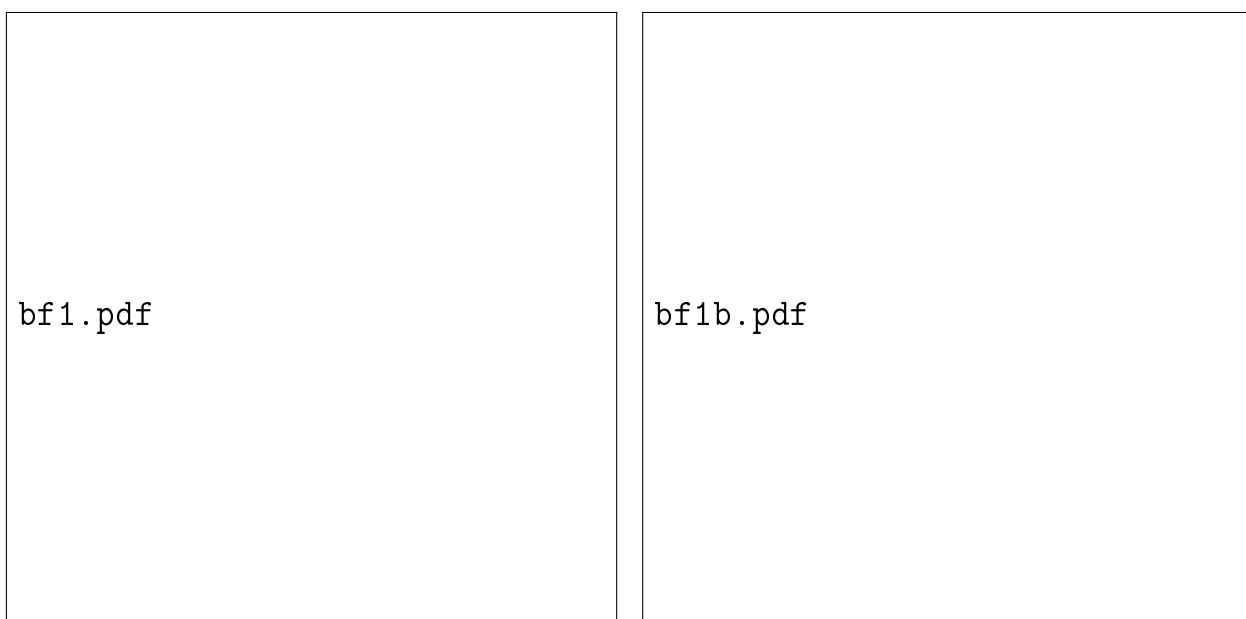


Рисунок 51 — Результат работы методов 1 и 2 для функции f_1 (слева) и f_2 (справа)

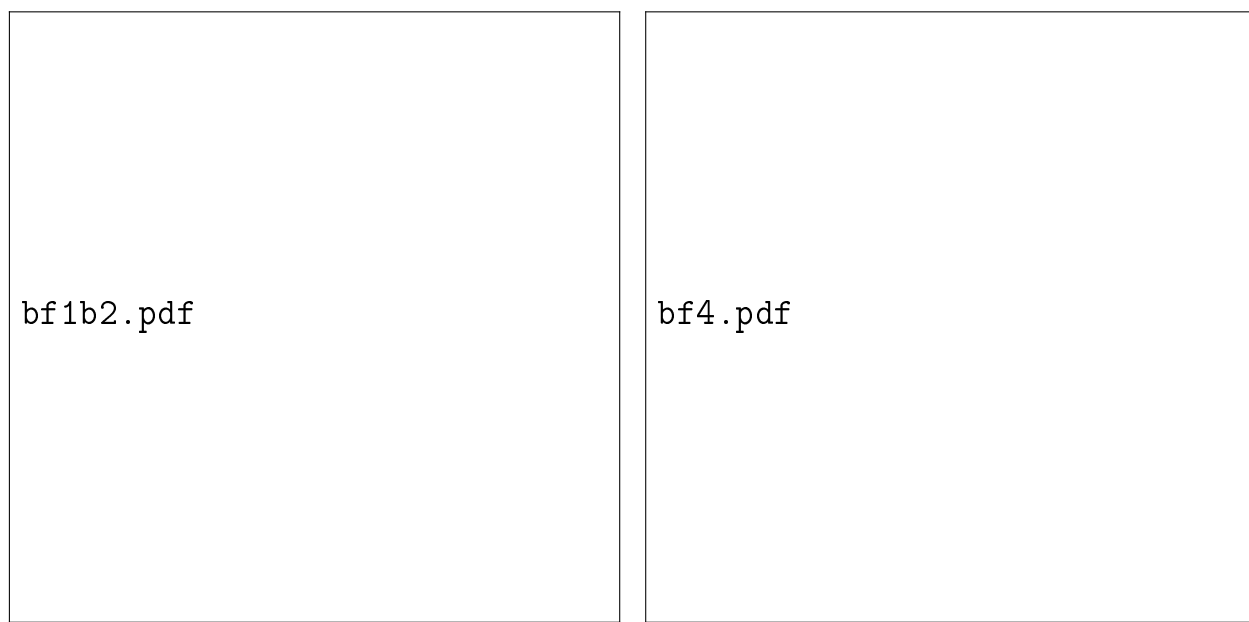


Рисунок 52 — Результат работы методов 1 и 2 для функции f_1 (слева) и f_4 (справа)

bf4best.pdf

Рисунок 53 — Результат работы методов 1 и 2 для функции f_4

Просмотрев все тестовые графики, я сделал следующие выводы об эффективности методов 1 и 2:

1) *Устойчивость обоих методов в каждой конкретной краевой задаче зависит от выбора точек z_1, \dots, z_k , которые в общем случае выбираются с некоторой долей случайности. При этом между устойчивостью метода 1 и метода 2 не наблюдается связи.*

2) *Конечное решение задачи методом 1 в большинстве случаев не сильно зависит от поверхности L , поскольку через некоторое число шагов при любой L погрешность начинает вести себя одинаково (обретает значения, очень близкие к константе, недостаточно малой для приемлемого решения задачи). И хоть на выходе всегда будут немного разные функции, искомую функцию они приближают одинаково плохо.*

3) *Функция, найденная методом 2, лучше аппроксимирует искомую функцию, чем функция, найденная методом 1.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование устойчивости ОЗГ показало, что решение ОЗГ в классе гармонических плотностей неустойчиво относительно погрешностей в задании внешнего потенциала. Даже очень малые погрешности в внешнем потенциале способны привести к огромным погрешностям при нахождении плотности. Это было продемонстрировано как аналитически, так и численно. Метод решения ОЗГ, предложенный в работе [?], при небольших количествах используемых базисных потенциалов и малых погрешностях дает приемлемую погрешность определения плотности.

Предложенная в данной работе модификация метода фундаментальных решений для решения краевой задачи для бигармонического уравнения оказалась намного лучше метода, основанного на ОЗГ [?], как по точности при одинаковом количестве базисных потенциалов, так и по скорости работы. Также к плюсам этой модификации необходимо отнести простоту реализации, которая не требует вычисления несобственных интегралов. К минусам модификации метода фундаментальных решений относится плохая обусловленность системы линейных уравнений, которую (систему) требуется решить численно (хотя этот шаг может быть заменён методом роя частиц). Впрочем, этот недостаток имеется и у метода работы [?].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Лежнев М. В.. Задачи и алгоритмы плоскопараллельных течений: учеб. пособие / М. В. Лежнев. – Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2009
- 2 Лежнев А. В., Лежнев В. Г. Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики: монография / А. В. Лежнев, В. Г. Лежнев. – Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2009
- 3 Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — 2-е изд. перераб. и дополн. — М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1983
- 4 Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. — 6-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во МГУ, 1999.
- 5 Новиков П. С. Избранные труды. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра. М.: Наука, 1979, 396
- 6 Свидлов А.А., Дроботенко М.И., Бирюк А.Э. Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2015. № 2. С. 77-81.
- 7 Ряжских В. И., Слюсарев М. И., Попов М. И. Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области. ВЕСТНИК САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. Сер. 10. 2013. Вып. 1
- 8 Вержбицкий В. М. Численные методы: Учеб. пособие для вузов / В. М. Вержбицкий. — 2-е изд., испр. — М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005. — 432 с.
- 9 Агошков В. И., Дубовский П. Б., Шутяев В. П. Методы решения задач математической физики / Под ред. Г. И. Марчука: Учеб. пособие. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 320 с.
- 10 Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики: Учебник для вузов. — М.: Физико-математическая литература,

2000. — 400 с.

Список литературы

- 1 Задачи и алгоритмы плоскопараллельных течений: учеб. пособие / М. В. Лежнев. – Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2009
- 2 Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики: монография / А. В. Лежнев, В. Г. Лежнев. – Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2009
- 3 Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — 2-е изд. перераб. и дополн. — М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1983
- 4 Уравнения математической физики: Учеб. пособие. — 6-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во МГУ, 1999.
- 5 Новиков П. С. Избранные труды. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра. М.: Наука, 1979, 396
- 6 Свидлов А.А., Дроботенко М.И., Бирюк А.Э. Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2015. № 2. С. 77-81.
- 7 Ряжских В. И., Слюсарев М. И., Попов М. И. Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области. ВЕСТНИК САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. Сер. 10. 2013. Вып. 1
- 8 Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учеб. пособие для вузов /В. М. Вержбицкий. — 2-е изд., испр. — М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005. — 432 с.

- 9 Агошков В. И., Дубовский П. Б., Шутяев В. П. Методы решения задач математической физики / Под ред. Г. И. Марчука: Учеб. пособие. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 320 с.
- 10 Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики: Учебник для вузов. — М.: Физико-математическая литература, 2000. — 400 с.