Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кубанский государственный университет»
Факультет математики и компьютерных наук

Л.К. Янковская

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Лабораторный практикум

для студентов специальности 27.03.03 «Системный анализ в экономике»,

02.04.01 (230105) – «Математика и компьютерные науки»

очной формы обучения

Краснодар 2018

Янковская Л. К. Оптимальное управление: лабораторный практикум для студентов специальности 27.03.03 «Системный анализ в экономике», 02.04.01 (230105) – «Математика и компьютерные науки», очной формы обучения - Краснодар.: КубГУ, 2019.- 54с.

Лабораторный практикум содержит задания к лабораторным работам, теоретический материал и предназначен для изучения косвенных методов оптимального управления по курсам «Оптимальное управление динамическими системами» и «Оптимальное управление экономическими системами».

Утвержден на заседании кафедры Математических и компьютерных методов
«__»_______2019 г., протокол № ____.

Рекомендован к изданию редакционно-издательским советом
КубГУ «__»_______2019 г., протокол № ____.

Оглавление

1 Основы работы в системе MathCAD

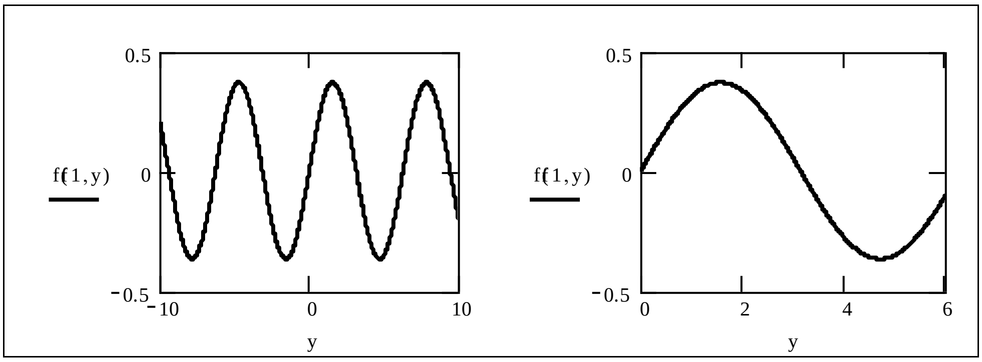
1.1 Арифметические вычисления

Простейшие операторы присвоения (<переменная>:=<арифметическое выражение>) и вывода (<переменная>=<содержимое переменной>) вместе со знаками арифметических операций и элементарными функциями находятся в палитре арифметических вычислений. Пример их использования (здесь и далее документ MathCAD выделен рамкой):

$$\boxed{a := 2.1\cdot\sqrt[3]{\sin(1)} \qquad a = 1.983}$$.

MathCAD имеет очень богатый набор стандартных функций, доступ к которым достигается нажатием кнопки $\boxed{f(x)}$, однако часто требуется написать свою функцию, например, такую $\boxed{ff(x,y) := e^{-x}\cdot\sin(y) \qquad ff(1,2) =}$. Слева от оператора (:=) должно стоять уникальное имя функции со списком формальных параметров, разделенных запятой, справа – арифметический оператор, связывающий эти параметры. Никакие вычисления по этой программе не будут производиться, пока не произойдет обращение к ней с фактическими параметрами.

Для построения графика функции нужно нажать кнопку декартовых функций в палитре графики. В шаблоне графика слева нужно вставит имя функции, внизу – аргумент функции:



Пределы аргументов и значений функции можно изменить прямо на графике (правый график).

Переменная (как и функция) может содержать не только одно значение. Оператор цикла имеет вид: <переменная>,..<нижнее значение переменной>,<следующее значение>..<верхнее значение.

$y := 0, 0.2 .. 1 \qquad i := 0 .. 5 \qquad j := 0 .. 5$

y =	i =	j =
0	0	0
0.2	1	1
0.4	2	2
0.6	3	3
0.8	4	4
1	5	5

Если шаг изменения переменной равен единице, следующее значение можно не указывать. Обратите внимание, что это не две точки, а отдельный оператор в палитре арифметических вычислений. С помощью целочисленных переменных (в данном случае i, j) можно формировать вектора и матрицы:

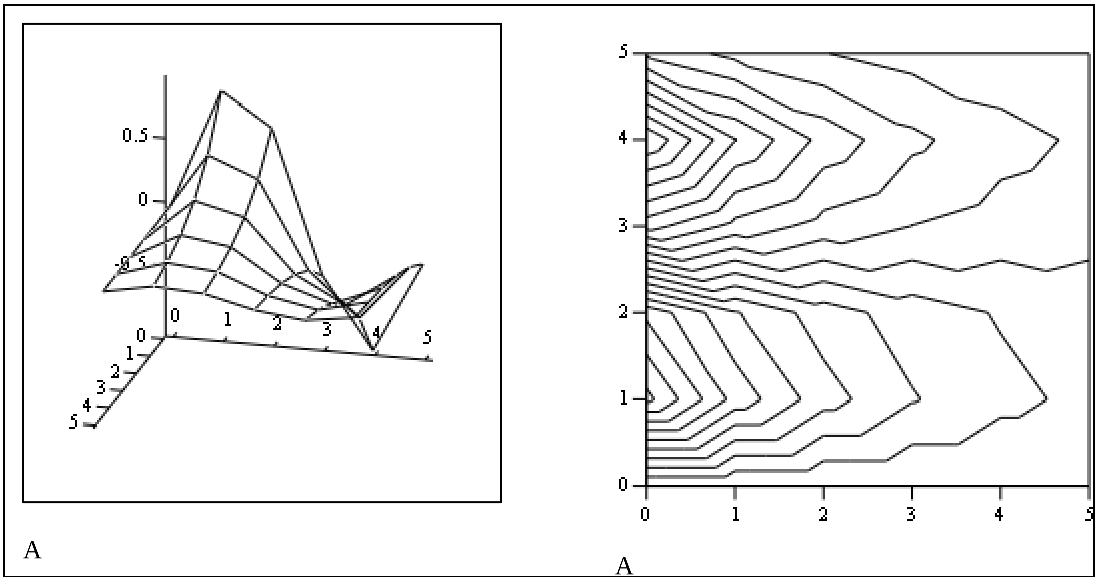
$$A_{i,j} := ff(i\cdot 0.5, j\cdot 1.2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0.932 & 0.675 & -0.443 & -0.996 & -0.279 \\ 0 & 0.565 & 0.41 & -0.268 & -0.604 & -0.169 \\ 0 & 0.343 & 0.248 & -0.163 & -0.366 & -0.103 \\ 0 & 0.208 & 0.151 & -0.099 & -0.222 & -0.062 \\ 0 & 0.126 & 0.091 & -0.06 & -0.135 & -0.038 \\ 0 & 0.077 & 0.055 & -0.036 & -0.082 & -0.023 \end{bmatrix} \qquad b_i := i^2 \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Операции с векторами и матрицами можно производить как с обычными переменными (учитывая их размерности):

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.932 & 0.565 & 0.343 & 0.208 & 0.126 & 0.077 \\ 0.675 & 0.41 & 0.248 & 0.151 & 0.091 & 0.055 \\ -0.443 & -0.268 & -0.163 & -0.099 & -0.06 & -0.036 \\ -0.996 & -0.604 & -0.366 & -0.222 & -0.135 & -0.082 \\ -0.279 & -0.169 & -0.103 & -0.062 & -0.038 & -0.023 \end{bmatrix} \qquad A\cdot b = \begin{bmatrix} -23.273 \\ -14.116 \\ -8.562 \\ -5.193 \\ -3.15 \\ -1.91 \end{bmatrix} \qquad |A| = 0 \quad |b| = 31.289$$

Первый оператор – транспонирование матрицы, второй – умножение матрицы на вектор, третий – вычисление определителя матрицы, последний – длина вектора.

Элементы матрицы представляют собой значения некоторой функции двух переменных (ff в данном случае). Построить график такой функции можно, нажав кнопку трехмерных графиков, и введя в шаблон в нижнем левом углу имя матрицы:



Поместив курсор в поле левого графика, и удерживая левую кнопку мыши, можно перемещением курсора изменить точку зрения на эту поверхность. Правый график представляет собой изолинии, т. е. линии равного уровня функции. Получить его можно, щелкнув дважды по исходному графику, что обеспечивает вызов редактора графики рисунков. В данном случае выбрана опция «Contour plot».

Палитра интегрирования и сумм позволяет вычислять определенные интегралы, суммы, произведения, пределы. Пример таких вычислений не требует особых пояснений.

$$\int_0^1 \tan\left(\sqrt[3]{\cos(x)\cdot\sin(x)}\right) dx = 0.834 \qquad x := 2 \quad \frac{d}{dx} ff(x,1) = -0.114 \qquad \sum_{i=1}^{10} i^2 = 385 \qquad \prod_{i=5}^{10} \sqrt{i} = 388.844$$

1.2 Символьные вычисления

Система MathCAD позволяет проводить и символьные вычисления. Оператор присвоения имеет тот же вид, а оператор вывода – стрелка вправо (→). Примеры символьных вычислений приведены ниже. Неопределенный интеграл вычисляется с помощью кнопки $\boxed{\int}$ в палитре интегрирования и суммирования:

$$\int \blacksquare\, d\blacksquare \qquad \int \sin(x)\,dx \rightarrow -\cos(x)$$.

В первый шаблон следует ввести подынтегральную функцию, во второй шаблон – переменную интегрирования, затем нажать →. Константа интегрирования в результате не присутствует. Вычисление определенного интеграла аналогично:

$$\int_0^a e^{-x}\cdot\sin(x)\,dx \rightarrow \left(\frac{-1}{2}\cdot\cos(a) - \frac{1}{2}\cdot\sin(a)\right)\cdot\exp(-a) + \frac{1}{2}$$.

Кнопка обратной операции интегрированию – дифференцирования – находится в той же палитре.

$$\frac{d}{da}\left[\left(\frac{-1}{2}\cdot\cos(a) - \frac{1}{2}\cdot\sin(a)\right)\cdot\exp(-a) + \frac{1}{2}\right] \rightarrow \left(\frac{1}{2}\cdot\sin(a) - \frac{1}{2}\cdot\cos(a)\right)\cdot\exp(-a) - \left(\frac{-1}{2}\cdot\cos(a) - \frac{1}{2}\cdot\sin(a)\right)\cdot\exp(-a$$

Результат отличается от записи подынтегральной функции, но его можно упростить с помощью оператора $\boxed{\blacksquare\ \text{simplify} \rightarrow}$, в шаблон которого следует ввести выражение для упрощения:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\sin(a) - \frac{1}{2}\cdot\cos(a)\right)\cdot\exp(-a) - \left(\frac{-1}{2}\cdot\cos(a) - \frac{1}{2}\cdot\sin(a)\right)\cdot\exp(-a)\ \text{simplify} \rightarrow \exp(-a)\cdot\sin(a)$$.

Для разложения в ряд Тейлора используют оператор $\boxed{\blacksquare\ \text{series}, \blacksquare \rightarrow}$, в левый шаблон вставляют функцию, в правый – точку разложения:

$$\left(\frac{-1}{2}\cdot\cos(a) - \frac{1}{2}\cdot\sin(a)\right)\cdot\exp(-a) + \frac{1}{2}\ \text{series}, a=0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot a^2 - \frac{1}{3}\cdot a^3 + \frac{1}{12}\cdot a^4$$.

Если уравнение имеет точное решение, можно попытаться найти его с помощью оператора $\boxed{\blacksquare\ \text{solve}, \blacksquare \rightarrow}$:

$$\frac{1}{2} - \left[\left(\frac{-1}{2}\cdot\cos(a) - \frac{1}{2}\cdot\sin(a)\right)\cdot\exp(-a) + \frac{1}{2}\right]\ \text{solve}, a \rightarrow \frac{-1}{4}\cdot\pi$$

1.3 Решение уравнений и систем

Большинство уравнений может быть решено лишь численно. Для численного решения алгебраических уравнений и в задачах оптимизации функций используется блок решения, начинающийся словом «Given» - дано. До этого ключевого слова должно быть определено начальное значение корня или оптимума функции, которое будет уточнено с требуемой точностью в блоке решения. Для формирования ограничений на аргументы функции можно использовать логические операторы. Для решения уравнений используются функции

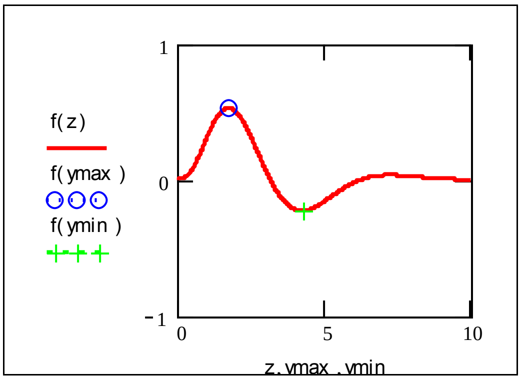
Find(x, y ...) и Minerr(x, y ...), где x, y ... – аргументы функций, составляющих систему уравнений. Первая программа пытается найти значения аргументов с нулевой невязкой левых и правых частей уравнений, вторая с минимальной квадратичной невязкой.

```
ôóíêöèÿ     íà÷àëüíîå çíà÷åíèå  ñëîâî     óðàâíåíèå  ðåøåíèå    àðãóìåíò  çíà÷åíèå ôóíêöèè

f(x) := x^2·sin(x) e^-x    y := 1  Given   f(y)=0.1    y := Find(y)    y = 0.572    f(y) = 0.1
                                   Given   f(y)=1      y := MinErr(y)  y = 1.727    f(y) = 0.524
```

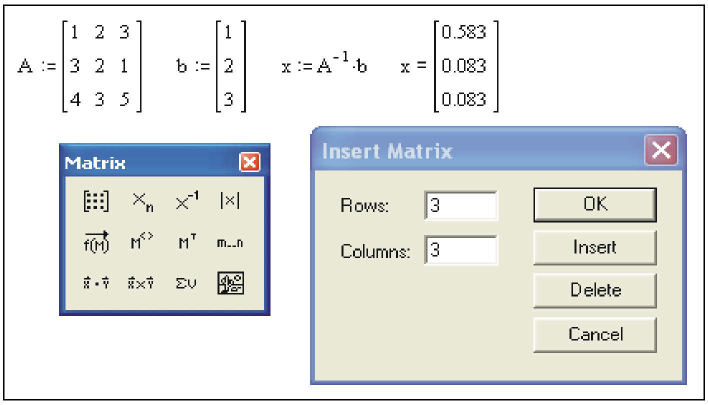
В первом случае уравнение решено точно, $f(0{,}572) = 0{,}1$, во втором случае найдено значение аргумента, при котором значение функции минимально отклонено от 1, т. е. фактически максимальное значение. Однако для задач оптимизации имеются функции Minimize(f, x, y, ...) и Maximize(f, x, y, ...), решающие задачи минимума и максимума соответственно, где f – оптимизируемая функция, остальные параметры – аргументы этой функции.

```
                  îïðåäåëåíèå íà àðãóìåíò

y := 1    Given   f(y)    y > 0     ymax := Maximize(f, y)   ymax = 1.727
y := 4     Given  f(y)    y > 0      ymin := Minimize(f, y)  ymin = 4.227
```

Отобразим результаты вычислений на графике нескольких функций. Для этого нужно охватить синим уголком имя первой функции $f(z)$, ввести символ <,> (запятая) и в следующий ниже шаблон ввести имя следующей функции $f(ymax)$.



Для решения систем уравнений целесообразно представлять функции и их аргументы в виде векторов. Так, для решения систем линейных алгебраических уравнений вида $Ax = b$ исходные данные можно представить в виде векторов и матриц. Пример решения такой системы:



Для создания вектора или матрицы нужно нажать кнопку матрицы в левом окне, затем в появившемся правом окне выбрать число строк и столбцов и нажать «ОК».

Такую же структуру исходных данных можно применить и для решения систем нелинейных уравнений. Пусть нужно найти корни следующей системы $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ e^{-x_2} + x_1 = 0. \end{cases}$

Программа для решения такой задачи может иметь следующий вид.

$$F(x) := \begin{bmatrix} (x_0)^2 + (x_1)^2 - 1 \\ e^{x_1} + x_0 \end{bmatrix} \quad x := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Given} \quad F(x) = 0 \quad x := \text{Find}(x) \quad x = \begin{bmatrix} -0.4 \\ -0.917 \end{bmatrix} \quad F(x) = \begin{bmatrix} 7.29210^{-7} \\ 1.23810^{-7} \end{bmatrix}$$

1. 4 Программирование

Рассмотренные ранее программируемые пользователем функции позволяют реализовать алгоритм вычисления функции лишь одним оператором. В более сложных случаях необходимо использовать операторы программирования из палитры программирования. Составление программы начинается с нажатия кнопки «Add line» - «Добавить линию», после чего в шаблоны можно вставлять операторы программирования. Реализуем поэтапно программу вычисления функции Хевисайда – единичный скачок в точке а:

```
f1(x,a) := | ■        f1(x,a) := | ■ if ■     f1(x,a) := | 1 if x ≥a     f1(x,a) := | 1 if x ≥a
           | ■                   | ■                     | ■                         | ■ otherwise

            f1(x,a) := | 1 if x ≥a          f1(0,1) = 0      f1(2,1) = 1
                       | 0 otherwise
```

В этом примере вначале набрано имя функции с двумя формальными параметрами, оператор присвоения и нажата кнопка «Add line». На втором этапе в первый шаблон вставлен оператор «if» – «если». На следующем этапе в шаблоны оператора «if» вставлено значение единичной функции при $x \geq a$. Затем была нажата кнопка «otherwise» – «иначе», и в шаблон этого оператора вставлено нулевое значение функции. Обращение к функции с фактическими параметрами дает требуемые значения функции.

В более сложных программах необходимо выполнять операции присвоения. Оператор присвоения имеет вид стрелки, направленной влево: $\boxed{\leftarrow}$. Рассмотрим пример использования оператора цикла «for» – «для».

```
f2(m,n) := | s←0          f2(m,n) := | s←0            f2(m,n) := | s←0          f2(3,10) = 380
           | for ■∈ ■                | for i∈ m..n              | for i∈ m..n
           |   ■                     |   ■                      |   s←s + i^2
                                                                | s
```

На первом этапе обнуляем переменную суммирования *s* и вводим во вторую строку программы оператор «for», получая в результате и третью строку – шаблон для тела цикла. Далее вставляем в шаблоны для оператора цикла имя циклической переменной и пределы ее изменения. На следующем этапе вставляем оператор тела цикла, осуществляющий суммирование квадратов целых чисел и, добавляя еще одну строку нажатием «Add line», в последнюю строку программы вводим имя переменной *s* как результат выполнения программы – суммы квадратов всех целых чисел от *m* до *n*.

Оператор «while» – «пока» используется для прерывания цикла при выполнении некоторых условий. Следующая программа иллюстрирует метод простой итерации для решения уравнения $f(x)=0$ по итерационной формуле $x_{x+1}=x_k+\tau f(x_k),\ x_0=x^0$, где τ - итерационный параметр, x^0 - начальное значение корня уравнения. Вычисления продолжаются до тех пор, пока не выполнится условие нахождения корня с заданной точностью по функции $f(x)\le\varepsilon$.

```
f3(x,f,ε,τ) := | a←x                       g(x) := e^(-x)·sin(x) − 0.2
               | while |f(a)| > ε
               |   a←a + τ·f(a)            f3(1, g, 0.0001, 0.1) = 1.60825
               | a
                                           g(1.60825) = 9.73·10^-5
```

1. 5 Интегрирование дифференциальных уравнений

Обыкновенные дифференциальные уравнения вида $dx/dt=f(x,t)$ с начальным условием $x(0)=x^0$ в общем виде могут быть проинтегрированы лишь численно. Для решения этой задачи можно применить как функции MathCAD, так и методы численного интегрирования, реализованные в своей программе. Один из наиболее простых методов – метод Эйлера, реализующий итерационную формулу $x_{k+1}=x_k+f(x_k,t_k)h,\ x_0=x^0$, где $t_k=kh, k=0,1,...;$ h – шаг интегрирования; $x_k=x(t_k)$. Например, дифференциальное уравнение $d^2x/dt^2+dx/dt+x^2=\sqrt{t},\ x(0)=1,\ d/dtx(0)=2$ сначала нужно преобразовать к нормальному виду – системе уравнений первого порядка, разрешенной относительно первых производных. Это можно сделать, введя новые переменные $x_1=x$, $x_2=dx_1/dt$. В новых переменных это уравнение будет следующим:

$d/dt\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\\sqrt{t}-x_1^2-x_2\end{bmatrix}$ с начальным условием $\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$. Приведем программу, реализующую схему Эйлера для такого уравнения на интервале (0, 1] с шагом $h=0{,}1$.

$$f(x,t) := \begin{bmatrix} x_1 \\ \sqrt{t} - (x_0)^2 - x_1 \end{bmatrix} \quad x^{\langle 0 \rangle} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad t0 := 0 \quad tk := 1 \quad h := 0.1 \quad N := \frac{tk - t0}{h} \qquad k := 0..N$$

$$x^{\langle k+1 \rangle} := x^{\langle k \rangle} + f\left(x^{\langle k \rangle}, k \cdot h\right) \cdot h \qquad x =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1.2	1.37	1.512	1.625	1.71	1.766	1.794	1.796	1.774
1	2	1.7	1.418	1.133	0.846	0.56	0.283	0.02	-0.22	-0.431

Схема Эйлера имеет невысокий (первый) порядок точности, ошибки в решении уравнения пропорциональны шагу интегрирования h. Интегрирование этого уравнения можно осуществить и с помощью программы MathCAD методом Рунге-Кутта, имеющей четвертый порядок точности (ошибки пропорциональны h^4), но и требующий вычислений правой части уравнения в 4 раза больше.

$$f(t,x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ \sqrt{t} - (x_0)^2 - x_1 \end{bmatrix} \quad x^{\langle 0 \rangle} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad t0 := 0 \quad tk := 1 \quad h := 0.1 \quad N := \frac{tk - t0}{h} \qquad k := 0..N$$

$$x := \mathrm{rkfixed}(x, t0, tk, N, f) \qquad x^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	1	1.186	1.343	1.473	1.574	1.649	1.697	1.721	1.722	1.704
2	2	1.714	1.435	1.156	0.881	0.613	0.358	0.122	-0.09	-0.274

Сравнивая полученное разными методами решение, можно сделать вывод о том, что численные методы обладают погрешностью метода, и для их корректного использования необходимо знание свойств конкретного метода и анализ возможных ошибок его использования.

2 Задания на выполнение лабораторных работ

Для приобретения практических навыков по решению экономико-математических задач оптимального управления необходимо выполнить один из вариантов задания по каждой из шести лабораторных работ. Параметры задания определяются из таблиц, приведенных в конце описания каждой лабораторной работы в соответствии с номером варианта, который совпадает с вашим номером в списке группы в алфавитном порядке.

Для самостоятельной работы в случае отсутствия навыков работы в системе MathCAD предлагается пройти тему «Основы работы в системе MathCAD».

Задание на каждую лабораторную работу состоит из двух частей. Первая часть выполняется на занятии в присутствии преподавателя и состоит в решении одной из задач оптимального управления одним из методов с помощью системы MathCAD. Постановочная часть задачи оформляется в документе Microsoft Word. В этот же документ копируется расчетная часть, выполненная в системе MathCAD. Вторая часть выполняется самостоятельно дома и заключается в решении той же задачи вручную. Решение оформляется в том же документе Microsoft Word и иллюстрируется скопированными из системы MathCAD графиками полученных функций. В результате весь материал в документе Microsoft Word должен быть оформлен как отчет по данной лабораторной работе в соответствии с образцом, приведенным в конце описания каждой лабораторной работы.

Кроме того, результаты по каждой лабораторной работе должны быть представлены в виде файла MathCADa.

Обучающийся получает оценку «зачтено» по изучаемому курсу при условии выполнения всех лабораторных работ, наличия отчетов по всем лабораторным работам, защите всех работ на оценку не ниже «удовлетворительно» и сдаче коллоквиума на оценку не ниже «удовлетворительно». Вопросы для подготовки к защите лабораторных работ и к коллоквиуму приведены в конце методических указаний перед списком рекомендуемой литературы.

2.1 Лабораторная работа 1.

РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫМ ПРОЦЕССОМ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА-ПОНТРЯГИНА.

Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), \quad \text{где } x(t) \text{ – траектория процесса, } \quad u(t) \text{ – управление,} \qquad (1)$$

на которые не наложено никаких ограничений, с начальными и конечными условиями:

$$\boldsymbol{x(t_0 = 0) = x_0,\ x(t = T) = x_k} \qquad (2)$$

и критерием эффективности

$$I = \int_0^T f_0(x,u,t)dt + F\big(x(T)\big) \to min\ . \qquad (3)$$

Требуется найти такой процесс $v^* = \{x^*(t), u^*(t)\}$, на котором бы критерий эффективности достигал своего минимального значения.

Описание метода

Введем в рассмотрение гамильтониан *H* и вектор сопряженных переменных Лагранжа *p(t)*:

$$H(x,u,p) = p \cdot f(x,u) - f_0(x,u) \qquad (4)$$

и уравнение трансверсальности:

$$p(T) = -\frac{\partial F(x(T))}{\partial x} \qquad (5)$$

Принцип максимума Понтрягина (формулировка):

Пусть $v^* = \{x^*(t), u^*(t)\}$ – оптимальный процесс в поставленной задаче оптимального управления. Тогда существует сопряженная функция *p(t)*, удовлетворяющая вместе с данным процессом следующим условиям:

$$1^0.\ H(x^*,u^*,p) = \max_u H(x,u,p) \text{ при } \forall t \in [0,T]$$

$$2^0.\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x} \text{ при } \forall t \in [0,T] \qquad (6)$$

$$3^0.\ p(T) = -\frac{\partial F(x(T))}{\partial x}.$$

Подход к решению

Таким образом, принцип максимума требует решения краевой двухточечной задачи

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u),$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

$$H(x^*,u^*,p) = \max_u H(x,u,p) \text{ при } \forall t \in [0,T]$$

для решения которой необходимо задать *2* начальных условия. Если рассматривается задача с фиксированным временем и закрепленными концами $\boldsymbol{x(t_0 = 0) = x_0,\ x(t = T) = x_k}$, то в такой задаче содержится необходимое число констант для определения решения краевой задачи. Исключая управление $u^0 = \arg\max_u H(x,p,u)$ из дифференциальных уравнений, получим замкнутую систему для неизвестных функций x и p.

Для линейных дифференциальных уравнений условия принципа максимума необходимы и достаточны.

Наибольшую трудность при применении принципа максимума вызывает решение двухточечной краевой задачи. Кроме того, решение ищется в виде программного управления, то есть функция $u(t)$ является функцией времени.

Динамическое программирование дает решение задачи в виде синтеза управления $u(x)$, которое является функцией координат динамической системы, что в непрерывной постановке приводит к решению задачи Коши для нелинейных уравнений в частных производных. Эта задача более сложная, чем решение обыкновенных дифференциальных уравнений, ее, как правило, решают на некоторой сетке, заменяя непрерывное время дискретными значениями.

В данном лабораторном практикуме предлагается проводить расчет в математическом пакете MATHCAD и для решения систем дифференциальных уравнений использовать функцию ***rkfixed***, реализующую метод Рунге-Кута для численного решения систем дифференциальных уравнений. Для нахождения значения сопряженной функции Лагранжа *p(0)* в начальной точке траектории рекомендуется использование функции ***sbval***.

Образец оформления лабораторной работы №1.

Задание: **методом Лагранжа-Понтрягина найти оптимальный процесс $v^* = \{K^*(t), L^*(t)\}$ накопления капитала от начального значения $K(0) = K^0$ до конечного значения $K(T) = K^1$ за фиксированное время T, если уравнение динамической системы имеет следующий вид:**

$$\frac{d}{dt}K(t) = \alpha Y(K,L) - \beta K,$$

где $K(t)$- величина капитала, причем $K(0) = 1$;

$L(t)$ – управление;

$Y(K,L) := a0 \cdot K^{a1} \cdot L^{a2}$;

$a0 = 1,\ a1 = 0,\ a2 = 1,\ \alpha = 1,\ \beta = 2$ - константы;

$t \in [0,1]$, т.е. T=1 год.

Критерий оптимальности имеет вид:

$$I = \int_0^T (L^2(t) + K^2(t))dt + F(K(T)).$$

Постановочная часть:

Составим для данной задачи Гамильтониан:

$$Ham(K,L,p) := p \cdot \left[\alpha \cdot \left(a0 \cdot K^{a1} \cdot L^{a2}\right) - \beta \cdot K\right] - L^2 - K^2,$$

Найдем частную производную Гамильтониана по переменной L:

$$\delta H\delta L(K,L,p) := \alpha\, p \cdot a2 \cdot a0 \cdot K^{a1} \cdot L^{a2-1} - 2 \cdot L,$$

Приравняем ее к нулю и найдем максимальное управление как функцию переменных K и p:

$$Lmax(K,p) = \left[\frac{2}{\left(\alpha\, p \cdot a2 \cdot a0 \cdot K^{a1}\right)}\right]^{\frac{1}{a2-2}}.$$

Найдем производную по времени сопряженной переменной как частную производную Гамильтониана по переменной K, взятой с противоположным знаком:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -p \cdot \left(\alpha \cdot a1 \cdot a0 \cdot K^{a1-1} \cdot Lmax(K,p)^{a2} - \beta\right) + 2 \cdot K$$

Из условия трансверсальности найдем, что $p(1) = 0$.
На управление L наложены ограничения $0 \le L \le Lm$.
Расчетная часть:

$a0 := 1.0$ $\quad a1 := 0$ $\quad a2 := 1$ $\quad Y(K, L) := a0 \cdot K^{a1} \cdot L^{a2}$ $\quad \alpha := 1$ $\quad \beta := 2$

$$Lmax(K, p) := a \leftarrow \left[\frac{2}{\left(\alpha\, p \cdot a2 \cdot a0 \cdot K^{a1}\right)}\right]^{\frac{1}{a2-2}}$$

$f(K, p) := \alpha \cdot Y(K, Lmax(K, p)) - \beta \cdot K$

$fs(K, p) := -p \cdot \left(\alpha \cdot a1 \cdot a0 \cdot K^{a1-1} \cdot Lmax(K, p)^{a2} - \beta\right) + 2 \cdot K$

$y_0 := 1$ $\quad f1(t1, v) := \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ $\quad t1 := 0$ $\quad t2 := 1$

$f2(t2, y) := y_1 - 0$ $\quad v_0 := 1$ $\quad fmax(t, y) := \begin{pmatrix} f(y_0, y_1) \\ fs(y_0, y_1) \end{pmatrix}$

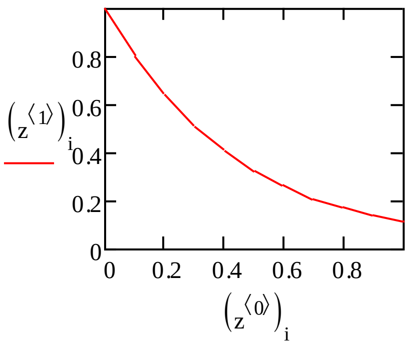
$a := sbval(y, t1, t2, fmax, f1, f2)$

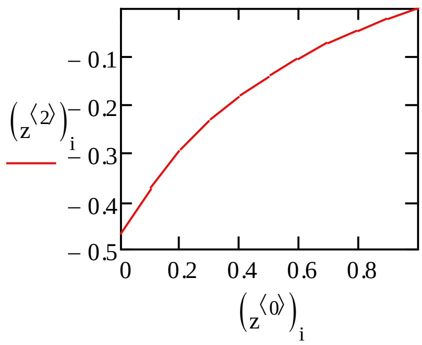
$y_1 := a_0$ $\quad w^{\langle 0 \rangle} := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $\quad w_1 = -0.466$

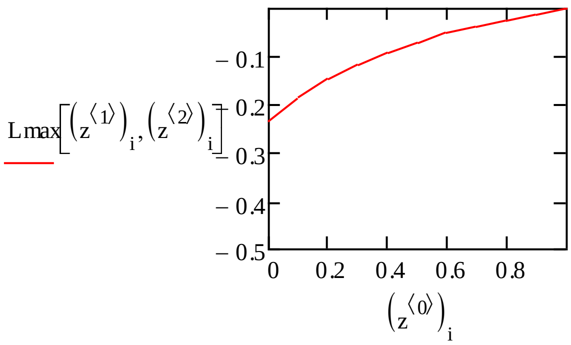
$N := 10$ $\quad i := 0..N$ $\quad z := rkfixed(w, 0, 10, N, fmax)$

$\left(z^{\langle 2 \rangle}\right)_0 = -0.466$ $\quad Lmax\left[\left(z^{\langle 1 \rangle}\right)_0, \left(z^{\langle 2 \rangle}\right)_0\right] = -0.233$

$\left(z^{\langle 1 \rangle}\right)_{10} = 0.113$ $\quad Lmax\left[\left(z^{\langle 1 \rangle}\right)_{10}, \left(z^{\langle 2 \rangle}\right)_{10}\right] = -2.391 \times 10^{-6}$







Решение вручную:

С учетом заданных значений коэффициентов перепишем дифференциальное уравнение системы:

$\frac{dK}{dt} = L - 2K.$

Составим для данной задачи Гамильтониан:

$H = p(L - 2K) - L^2 - K^2,$

Найдем частную производную Гамильтониана по переменной L:

$\frac{\partial H}{\partial L} = p - 2L = 0,$

Приравняем ее к нулю и найдем максимальное управление как функцию переменных K и p:

Lmax(K,p)= $\frac{p}{2}$ и подставим в уравнение системы.

Найдем производную по времени сопряженной переменной как частную производную Гамильтониана по переменной K, взятой с противоположным знаком:

$\frac{\partial p}{\partial t} = 2p + 2K$

$\frac{dK}{dt} = \frac{p}{2} - 2K.$

Из условия трансверсальности найдем, что $p(1) = 0$ и задано, что $K(0) = 1$.

Решим полученную систему дифференциальных уравнений с заданными краевыми условиями.

1) $K = \frac{\dot{p}}{2} - p$; $\ddot{p} = 2\dot{p} + 2\dot{K}$; $\ddot{p} = 2\dot{p} + p - 4K$; $\ddot{p} = 2\dot{p} + p - 2\dot{p} + 4p$; $\ddot{p} - 5p = 0$

$k^2 - 5 = 0$; $k^2 = 5$; $k_{1,2} = \pm\sqrt{5}$; $p = C_1 e^{\sqrt{5}t} + C_2 e^{-\sqrt{5}t}$

2) $\dot{p} = C_1\sqrt{5}e^{\sqrt{5}t} - C_2\sqrt{5}e^{-\sqrt{5}t}$; $K = C_1\frac{\sqrt{5}}{2}e^{\sqrt{5}t} - C_2\frac{\sqrt{5}}{2}e^{-\sqrt{5}t} - C_1 e^{\sqrt{5}t} - C_2 e^{-\sqrt{5}t}$;

$K = C_1\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right)e^{\sqrt{5}t} - C_2\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right)e^{-\sqrt{5}t}$

3) Найдем произвольные постоянные интегрирования при заданных краевых условиях

$$\begin{cases} p = C_1 e^{\sqrt{5}t} + C_2 e^{-\sqrt{5}t} \\ K = C_1\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right)e^{\sqrt{5}t} - C_2\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right)e^{-\sqrt{5}t} \end{cases}; \quad \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{5}} + C_2 e^{-\sqrt{5}} = 0 \\ C_1\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right) - C_2\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right) = 1 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{5}} & e^{-\sqrt{5}} \\ \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right) & -\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right) \end{vmatrix} = -\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right)e^{\sqrt{5}} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right)e^{-\sqrt{5}}\right)$$

$$\Delta_{C1} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-\sqrt{5}} \\ 1 & -\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right) \end{vmatrix} = -e^{-\sqrt{5}}; \quad \Delta_{C2} = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{5}} & 0 \\ \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right) & 1 \end{vmatrix} = e^{\sqrt{5}};$$

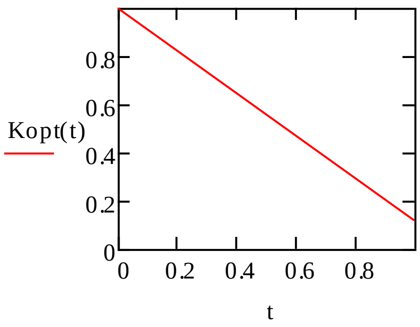
$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{e^{-\sqrt{5}}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)e^{\sqrt{5}} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}-1\right)e^{-\sqrt{5}}} \\ C_1 = -\dfrac{e^{\sqrt{5}}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)e^{\sqrt{5}} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}-1\right)e^{-\sqrt{5}}} \end{cases}; \quad \begin{cases} \boldsymbol{L}^* = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{e^{\sqrt{5}(t-1)} - e^{-\sqrt{5}(t-1)}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)e^{\sqrt{5}} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}-1\right)e^{-\sqrt{5}}} \\ \boldsymbol{K}^* = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-1\right)e^{\sqrt{5}(t-1)} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)e^{-\sqrt{5}(t-1)}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)e^{\sqrt{5}} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}-1\right)e^{-\sqrt{5}}} \end{cases};$$

Построение графиков полученного решения в MATHCAD

$t := 0$ $\quad xr0 := \sqrt{5}$ $\quad xr1 := xr0 \div 2 + 1$ $\quad xr2 := xr0 \div 2 - 1$ $\quad xr3 := e^{xr0}$ $\quad xr4 := 1 \div xr$

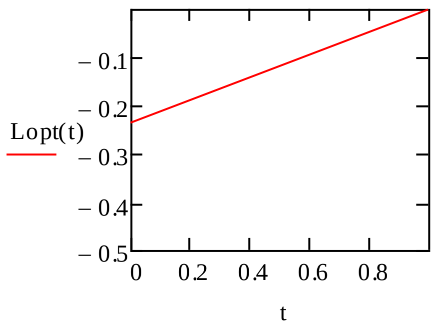
$$Kopt(t) := \left[xr2 \cdot e^{\sqrt{5}\cdot(t-1)} + xr1 \cdot \left[1 \div e^{\sqrt{5}\cdot(t-1)}\right]\right] \div (xr1 \cdot xr3 + xr2 \cdot xr4)$$

$t := 0..1$ $\quad Kopt(1) = 0.113$ $\quad Kopt(0) = 1$



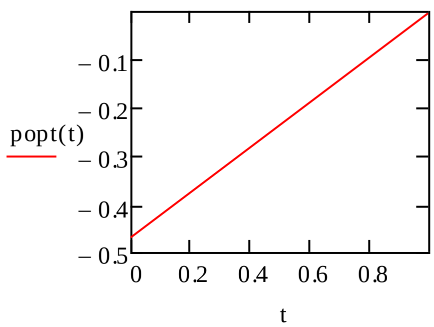
$$Lopt(t) := \left[e^{\sqrt{5}\cdot(t-1)} - \left[1 \div e^{\sqrt{5}\cdot(t-1)}\right]\right] \div [2(xr1 \cdot xr3 + xr2 \cdot xr4)]$$

$t := 0..1$ $\quad Lopt(0) = -0.233$ $\quad Lopt(1) = 0$



$popt(t) := 2 \cdot Lopt(t)$

$t := 0..1$ $\quad popt(0) = -0.466$ $\quad popt(1) = 0$



Задания к лабораторной работе №1 по вариантам

Методом Лагранжа-Понтрягина найти оптимальный процесс $v^* = \{K^*(t), L^*(t)\}$ накопления капитала от начального значения $K(0) = K^0$ до конечного значения $K(T) = K^1$ за фиксированное время T, если уравнение динамической системы имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}K(t) = \alpha Y(K,L) - \beta K$$

№ варианта	Уравнение системы Y(K,L)	α, β	Интервал времени	Начальные условия	Функционал качества	Ограничения на управление
1	L	α=1, β=1	[0,3]	K(0)=1	$I = 0{,}5\int_0^3 (K^2 + L^2)dt - 3K(3)$	[0;+∞]
2	L	α=1, β=-1	[0,4]	K(0)=0,5	$I = \int_0^4 (K^2 + L^2)dt + K(4)$	[0;+∞]
3	L	α=-1, β=1	[0,5]	K(0)=1	$I = \int_0^5 (-K + L^2)dt$	[0;+∞]
4	L	α=4, β=3	[0,3]	K(0)=0,1	$I = -2\int_0^3 (K^2 - L^2)dt + 2K(3)$	[0;+∞]
5	L	α=-1, β=-2	[0,1]	K(0)=-1	$I = \int_0^1 (K^2 - L^2)dt + 3K(1)$	[0;+∞]
6	L	α=-2, β=2	[0,10]	K(0)=0,2	$I = -\int_0^{10} (K^2 + L^2)dt - K(10)$	[0;+∞]
7	L	α=1, β=-3	[0,2]	K(0)=2	$I = 2\int_0^2 (K + L^2)dt - 2K(2)$	[0;+∞]
8	L	α=-3, β=2	[0,6]	K(0)=-0,5	$I = 0{,}5\int_0^6 (K^2 - L^2)dt + K(6)$	[0;+∞]
9	L	α=4, β=1	[0,9]	K(0)=1	$I = \int_0^9 (-K^2 + L^2)dt - 0{,}5K(9)$	[0;+∞]
10	L	α=-2, β=-4	[0,7]	K(0)=0,3	$I = -0{,}5\int_0^7 (K^2 + L^2)dt$	[0;+∞]

2.2 Лабораторная работа 2.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫМ ПРОЦЕССОМ С ДВУМЕРНЫМ ВЕКТОРОМ СОСТОЯНИЙ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА-ПОНТРЯГИНА.

Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x,u), \qquad \text{где } i=1,2; \tag{7}$$

$\vec{x}(t)$ – двумерный вектор траектории (состояния) процесса, $u(t)$ – управление, на которые не наложено никаких ограничений, с начальными и конечными условиями:

$$x_1(t_0=0)=x_{10}, x_2(t=0)=x_{20} \tag{8}$$

и критерием эффективности

$$I = \int_0^T f_0(x,u,t)dt + F\big(x(T)\big) \to min\ . \tag{9}$$

Требуется найти такой процесс $v^* = \{\overrightarrow{x^*}(t), u^*(t)\}$, на котором бы критерий эффективности достигал своего минимального значения.

Описание метода

Введем в рассмотрение гамильтониан H и вектор сопряженных переменных Лагранжа $p(t)$:

$$H(x,u,p) = p \cdot f(x,u) - f_0(x,u) \tag{10}$$

и уравнение трансверсальности:

$$p(T) = -\frac{\partial F(x(T))}{\partial x} \tag{11}$$

Принцип максимума Понтрягина (формулировка):

Пусть $v^* = \{\overrightarrow{x^*}(t), u^*(t)\}$ – оптимальный процесс в поставленной задаче оптимального управления. Тогда существует двумерный вектор сопряженных функций $\vec{p}(t)$, непрерывный и непрерывно дифференцируемый до 2-го порядка включительно, удовлетворяющий вместе с данным процессом следующим условиям:

1^0. $H\big(\overrightarrow{x^*}, u^*, \vec{p}\big) = \max\limits_u H(\vec{x}, u, \vec{p})$ при $\forall t \in [0,T]$

2^0. $\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ для $i = 1{,}2$ при $\forall t \in [0,T]$ (12)

3^0. $p_i(T) = -\frac{\partial F(x(T))}{\partial x_i}$ для $i = 1{,}2$.

Подход к решению

Таким образом, принцип максимума требует решения краевой двухточечной задачи

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x,u),$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \text{ для } i = 1{,}2$$

$$H\big(\overrightarrow{x^*}, u^*, \vec{p}\big) = \max_u H(\vec{x}, u, \vec{p}) \text{ при } \forall t \in [0,T]$$

для решения которой необходимо задать 4 начальных условия. Если рассматривается задача с фиксированным временем и закрепленными концами $x_1(t_0=0)=x_{10}, x_2(t=0)=x_{20}$, то в такой задаче содержится необходимое число констант для определения решения задачи. Исключая управление $u^0 = arg\max\limits_u H(\bar{x}, \bar{p}, u)$ из дифференциальных уравнений, получим замкнутую систему для неизвестных векторов $\bar{x}$ и $\bar{p}$.

Для линейных дифференциальных уравнений условия принципа максимума необходимы и достаточны.

Наибольшую трудность при применении принципа максимума вызывает решение двухточечной краевой задачи. Кроме того, решение ищется в виде программного управления, то есть функция $u(t)$ является функцией времени.

Динамическое программирование дает решение задачи в виде синтеза управления $u(x)$, которое является функцией координат динамической системы, что в непрерывной постановке приводит к решению задачи Коши для нелинейных уравнений в частных производных. Эта задача более сложная, чем решение обыкновенных дифференциальных уравнений, ее, как правило, решают на некоторой сетке, заменяя непрерывное время дискретными значениями.

В данном лабораторном практикуме предлагается проводить расчет в математическом пакете MATHCAD и для решения систем дифференциальных уравнений использовать функцию ***rkfixed***, реализующую метод Рунге-Кута для численного решения систем дифференциальных уравнений. Для нахождения значения сопряженной функции Лагранжа *p(0)* в начальной точке траектории рекомендуется использование функции ***sbval***.

Образец оформления лабораторной работы №2.

Задание: **методом Лагранжа-Понтрягина найти оптимальный процесс $v^* = \{\overrightarrow{x^*}(t), u^*(t)\}$ при начальных значениях $x_1(0)=0{,}0001$, $x_2(0)=1$ за фиксированное время [0,3], если система уравнений динамической системы имеет следующий вид:**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = x_1 + x_2 \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t} = u \end{cases}. \qquad (13)$$

Критерий оптимальности имеет вид:

$$I = \int_0^3 (x_1(t) + x_2(t) - 3u^2(t))dt + x_1(3).$$

Постановочная часть:

Составим для данной задачи Гамильтониан:

$H(t,\vec{x},u,\vec{p}) = p_1(x_1 + x_2) + p_2 \cdot u - x_1 - x_2 + 3u^2$,

Найдем частную производную Гамильтониана по переменной u:

$\frac{\partial H}{\partial u} = p_2 + 6u$,

Приравняем ее к нулю и найдем максимальное управление как функцию векторов $\vec{x}$ и $\vec{p}$:

umax($\vec{x},\vec{p}$)=$-\frac{p_2}{6}$.

Найдем производные по времени сопряженных переменных как частные производные Гамильтониана по переменным x_1, x_2, взятым с противоположным знаком:

$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -p_1 + 1$, $\frac{\partial p_2}{\partial t} = -p_1 + 1$.

Из условия трансверсальности найдем, что $p_1(3) = -1$, $p_2(3) = 0$.

На управление $\boldsymbol{u}$ не наложены никакие ограничения.

Расчетная часть:

В силу специфики системы MATHCAD заменим индекс переменных 1 на 0, а 2 на 1.

$$umax(x,p) := \frac{-p_1}{6}$$

$$f(x,p) := \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \\ umax(x,p) \end{pmatrix} \qquad fs(x,p) := \begin{pmatrix} -p_0 + 1 \\ -p_0 + 1 \end{pmatrix}$$

$$fmax(t,y) := \left[f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]_0 \; f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]_1 \; fs\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]_0 \; fs\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]_1 \right]^T$$

$y_0 := 0.000$ $\qquad y_1 := 1$ $\qquad f1(t1,v) := \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & v_0 & v_1 \end{pmatrix}^T$

$v_0 := 1$ $\qquad v_1 := 1$ $\qquad t1 := 0$ $\qquad t2 := 3$

$$f2(t2,y) := \begin{pmatrix} y_2 + 1 \\ y_3 - 0 \end{pmatrix} \qquad a := sbval(y, t1, t2, fmax, f1, f2)$$

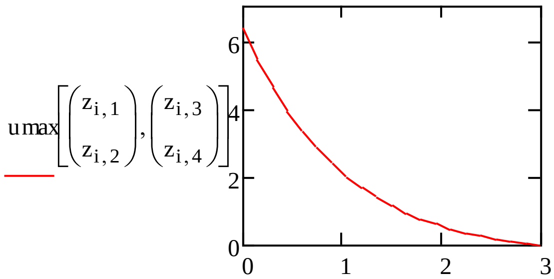
$y_2 := a_0$ $\qquad y_3 := a_1$ $\qquad i := 0..20$

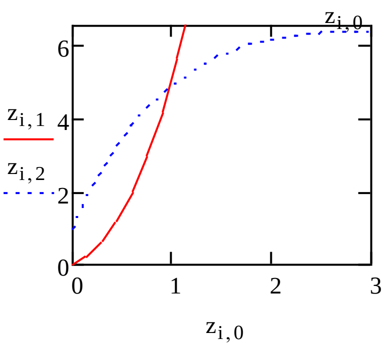
$z := rkfixed(y, t1, t2, 20, fmax)$

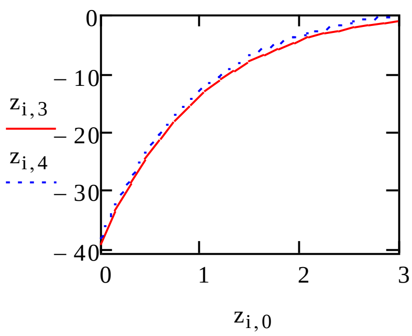
$z_{20,1} = 74.434$ $\qquad z_{20,2} = 6.362$

$z_{0,3} = -39.171$ $\qquad z_{0,4} = -38.171$

$$umax\left[\begin{pmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_{0,3} \\ z_{0,4} \end{pmatrix}\right] = 6.362 \qquad umax\left[\begin{pmatrix} z_{20,1} \\ z_{20,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_{20,3} \\ z_{20,4} \end{pmatrix}\right] = 4.781 \times 10^{-6}$$







Решение вручную:

Подставим найденное значение umax в уравнения системы (13).

В результате получим систему четырех дифференциальных уравнений с четырьмя краевыми условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = x_1 + x_2 \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} = u \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} = -p_1 + 1 \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} = -p_1 + 1 \end{cases}$$, где umax$(\vec{x}, \vec{p})$=$-\frac{p_2}{6}$.

при $x_1(0) = 0.0001,\ x_2(0) = 1,\ p_1(3) = -1,\ p_2(3) = 0.$

Решим полученную систему дифференциальных уравнений с заданными краевыми условиями.

1) $\int \frac{dp_1}{p_1 - 1} = -\int dt\,;\ \ln|p_1 - 1| = -t + \widetilde{C_1};\ p_1 = e^{-t + \widetilde{C_1}} + 1;\ e^{\widetilde{C_1}} = C_1;\ \ p_1 = C_1 e^{-t} + 1$

$C_1 e^{-3} + 1 = -1;\ C_1 = -2e^{\ 3}\ ;\ \ p_1 = -2e^{-(t-3)} + 1.$

2) $\int dp_2 = \int \left(1 + 2e^{-(t-3)} - 1\right) dt\,;\ \ \ p_2 = -2e^{-(t-3)} + C_2;\ \ \ C_2 = 2;\ \ \ p_2 = -2e^{-(t-3)} + 2$

3) $\ \ u = \frac{e^{-(t-3)} - 1}{3}.$

4) $\int dx_2 = \int \frac{e^{-(t-3)} - 1}{3} dt\,;\ \ \ x_2 = -\frac{1}{3} e^{-(t-3)} - \frac{t}{3} + C_3;\ -\frac{1}{3} e^3 + C_3 = 1;\ C_3 = \frac{1}{3} e^3 + 1;$

$x_2 = -\frac{1}{3} e^{-(t-3)} - \frac{t}{3} + \frac{1}{3} e^3 + 1.$

5) $\dot{x_1} - x_1 = -\frac{1}{3} e^{-(t-3)} - \frac{t}{3} + \frac{1}{3} e^3 + 1;\ \dot{u}v + u(\dot{v} - v) = -\frac{1}{3} e^{-(t-3)} - \frac{t}{3} + \frac{1}{3} e^3 + 1;$

$\int \frac{dv}{v} = \int dt\,;\ \ln|v| = t;\ v = e^t;\ \ \int du = \int e^{-t} \left(-\frac{1}{3} e^{-(t-3)} - \frac{t}{3} + \frac{1}{3} e^3 + 1\right) dt$

$\left\langle \begin{matrix} u = t & du = dt \\ e^{-t} dt = dv & v = -e^{-t} \end{matrix} \right\rangle;\ u = e^{-t} \left(\frac{1}{6} e^{-(t-3)} - t - \frac{1}{3} e^3 - 2\right) + C_4;$

$x_1 = \frac{1}{6} e^{-(t-3)} - t - \frac{1}{3} e^3 - 2 + C_4 e^t;\ \frac{1}{6} e^3 - \frac{1}{3} e^3 - 2 + C_4 = 0;\ C_4 = \frac{1}{6} e^3 + 2;$

6) Получим оптимальное решение:

$$\begin{cases} {x_1}^* = \frac{e^{t+3} + e^{-(t-3)} - 2e^3}{6} - t - 2 + 2e^t \\ {x_2}^* = -\frac{e^{-(t-3)} + t - e^3}{3} + 1 \\ u^* = \frac{e^{-(t-3)} - 1}{3}. \end{cases} ;$$

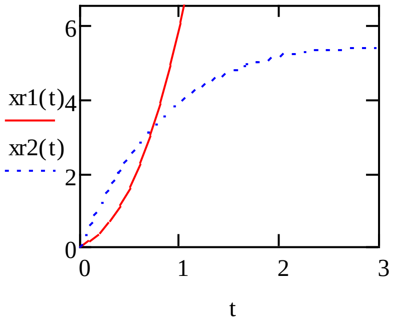
Построение графиков полученного решения в MATHCAD

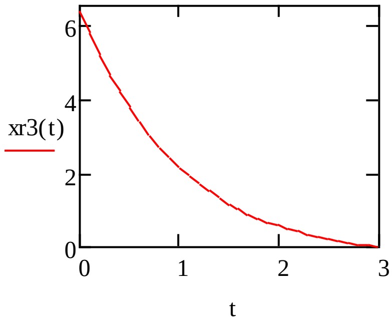
$xr1(t) := \left[e^{(t+3)} + \left[1 \div e^{(t-3)}\right] - 2 \cdot e^3\right] \div 6 + \left(2 \cdot e^t - t - 2\right)$

$xr2(t) := \frac{-\left[t + \frac{1}{e^{(t-3)}} - e^3\right]}{3}$ $\qquad t := 3 \qquad xr1(3) = 95.881$

$xr2(3) = 5.362$

$xr3(t) := \frac{\frac{1}{e^{(t-3)}} - 1}{3}$ $\qquad xr3(t) = 0 \qquad t := 0, 0.1..3$





Задания к лабораторной работе №2 по вариантам

Методом Лагранжа-Понтрягина найти оптимальный процесс $v^* = \{\overrightarrow{x^*}(t), u^*(t)\}$ при начальных значениях $x_1(0)$, $x_2(0)$ за фиксированное время [0,T], если система уравнений динамической системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = f_1(x_1, x_2, u) \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t} = f_2(x_1, x_2, u) \end{cases}$$

№ варианта	Уравнение системы $f_1(x_1,x_2,u)$	Уравнение системы $f_2(x_1,x_2,u)$	Интервал времени	Начальные условия	Функционал качества
1	x_2	$-x_1 + u$	[0,3]	$x_1(0)=1$, $x_2(0)=1$	$I = \int_0^3 (u^2)dt - x_1(3)$
2	$x_2 - u$	$x_1 + u$	[0,3]	$x_1(0)=2$, $x_2(0)=0$	$I = \int_0^3 (x_1 + x_2 + 2u^2)dt - x_2(3)$
3	x_2	u	[0,1]	$x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$	$I = \int_0^1 (x_1 - u^2)dt - 5x_1(1) + 3x_2(1)$
4	x_1	$-x_2 + u$	[0,2]	$x_1(0)=-1$, $x_2(0)=1$	$I = \int_0^2 (x_2 - u^2)dt + x_1(2)$
5	$x_1 - u$	$x_2 + u$	[0,4]	$x_1(0)=1$, $x_2(0)=-1$	$I = \int_0^4 (x_1 + u^2)dt - x_2(4)$
6	$-x_2$	$-x_1 + u$	[0,1]	$x_1(0)=1$, $x_2(0)=2$	$I = \int_0^1 (x_2 + u^2)dt + x_2(1)$
7	x_2	$x_1 + u$	[0,10]	$x_1(0)=1$, $x_2(0)=1$	$I = \int_0^{10} (u^2 - x_1)dt$
8	$-x_1$	$-x_2 + u$	[0,5]	$x_1(0)=-1$, $x_2(0)=0$	$I = \int_0^5 (u^2 - x_2)dt + 2x_1(5)$
9	$x_1 + u$	x_2	[0,7]	$x_1(0)=1$, $x_2(0)=3$	$I = \int_0^7 (u^2 - x_1 - x_2)dt - 2x_2(7)$
10	u	$-x_1$	[0,9]	$x_1(0)=3$, $x_2(0)=1$	$I = \int_0^9 (u^2 + x_1 - x_2)dt + x_2(9)$

2.3 Лабораторная работа 3.

РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫМ ПРОЦЕССОМ С ФУНКЦИЕЙ ГАМИЛЬТОНА, ЛИНЕЙНОЙ ПО УПРАВЛЕНИЮ, МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА-ПОНТРЯГИНА.

Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), \tag{14}$$

где $x(t)$ – траектория процесса, $u(t)$ – управление, $f(x,u)$- функция, линейная относительно управления, с начальными условиями:

$$x(t_0 = 0) = x_0, \tag{15}$$

и критерием эффективности

$$I = \int_0^T f_0(x,u,t)dt + F\big(x(T)\big) \to min\ . \tag{16}$$

где $f_0(x,u)$- функция, линейная относительно управления

На управление наложено следующее ограничение: $u_{min} \le u \le u_{max}$. (17)

Требуется найти такой процесс $v^* = \{x^*(t), u^*(t)\}$, на котором бы критерий эффективности достигал своего минимального значения.

Метод решения такой задачи полностью аналогичен методу решения задачи, постановка которой приведена в лабораторной работе №1.

Однако тут возникает один нюанс. Так как функции $f(x,u)$ и $f_0(x,u)$ линейны относительно управления, то и функция Гамильтона тоже будет линейной относительно управления, т.е. по сути будет иметь вид $H(x,u,p) = ku + b$, где k и b есть функции от x и p. В связи с этим найти значение u, при котором функция Гамильтона достигает максимума, нельзя путем приравнивания к нулю частную производную Гамильтониана по u.

Поэтому в задачах с такой постановкой ищут $umax$следующим образом. Так как линейная функция является монотонно возрастающей при $k > 0$, то функция Гамильтона будет достигать максимума по u при $u = u_{max}$. Аналогично, при $k < 0$ функция Гамильтона будет достигать максимума по u при $u = u_{min}$, т.к. линейная функция будет монотонно убывающей. Таким образом, необходимо разбить отрезок [0,T] на интервалы знакопостоянства k, на каждом из этих интервалов найти свое значение $umax$ и на каждом интервале в отдельности решить задачу оптимального управления.

Система MATHCAD позволяет решить эту задачу путем использования блока программирования с применением оператора выбора $\boldsymbol{if..otherwise}$.

Образец оформления лабораторной работы №3.

Задание: **методом Лагранжа-Понтрягина найти оптимальный процесс $v^* = \{x^*(t), u^*(t)\}$ при начальных значениях $x(0) = 1$ за фиксированное время [0,4], если уравнение динамической системы имеет следующий вид:**

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x - u \tag{18}$$

Ограничение на управление: $0 \le u \le 4$

Критерий оптимальности имеет вид:

$I = \int_0^4 (x+u)dt$..

Постановочная часть:

Составим для данной задачи Гамильтониан:
$H(t,x,u,p) = p(x-u) - x - u = -(p+1)u + (p-1)x.$

Тогда $k = -(p+1)$, т.е. $umax = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -(p+1) < 0 \\ 4 & \text{при} \quad -(p+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$umax = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p+1 > 0 \\ 4 & \text{при} \quad p+1 < 0 \end{cases}$$

Найдем производную по времени сопряженной переменной как частную производную Гамильтониана по переменной x, взятой с противоположным знаком:

$\frac{\partial p}{\partial t} = -(p+1) = 1 - p.$

Из условия трансверсальности найдем, что $p(4) = 0$.

Расчетная часть:

$umax(x,p) := \begin{vmatrix} 0 \ \text{if} \ p+1 \geq 0 \\ 4 \ \text{otherwise} \end{vmatrix}$

$f(x,p) := x - umax(x,p)$ $\qquad fs(x,p) := 1 - p$

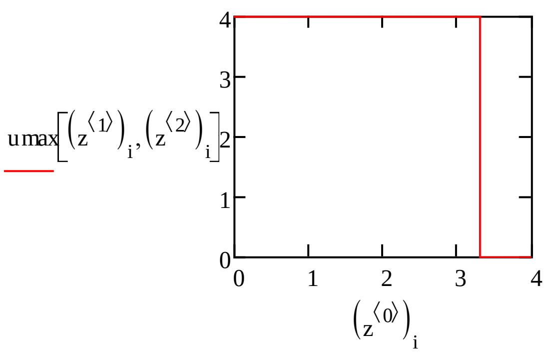
$fmax(t,y) := \begin{pmatrix} f(y_0, y_1) \\ fs(y_0, y_1) \end{pmatrix}$ $\qquad y_0 := 1$

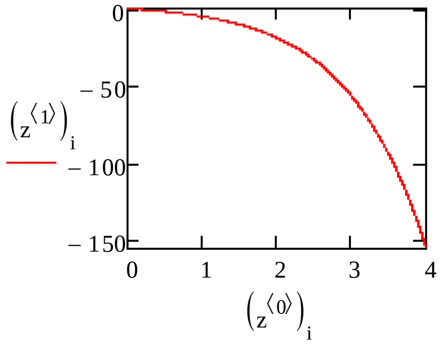
$f1(t1,v) := \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ $\qquad t1 := 0$ $\qquad t2 := 4$ $\qquad v_0 := y_0$

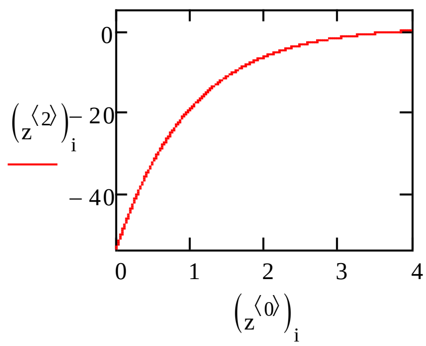
$f2(t2,y) := y_1 - 0$ $\qquad a := sbval(y, t1, t2, fmax, f1, f2)$

$y_1 := a_0$ $\qquad w^{\langle 0 \rangle} := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $\qquad N := 1000$ $\qquad i := 0..N$

$z := rkfixed(w, 0, t2, N, fmax)$ $\qquad \left(z^{\langle 1 \rangle}\right)_{1000} = -155.798$ $\qquad \left(z^{\langle 2 \rangle}\right)_0 = -53.598$







Решение вручную:

В результате получим систему двух

дифференциальных уравнений с двумя краевыми условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = x - umax \\ \frac{\partial p}{\partial t} = 1 - p \end{cases}$$, где umax - константа.

при $x(0) = 1,\ p(4) = 0$.

Решим полученную систему дифференциальных уравнений с заданными краевыми условиями.

1) $\int \frac{dp}{p-1} = -\int dt$; $\ln|p-1| = -t + \widetilde{C_1}$; $p = e^{-t+\widetilde{C_1}} + 1$; $e^{\widetilde{C_1}} = C_1$; $p = C_1 e^{-t} + 1$

$C_1 e^{-4} + 1 = 0$; $C_1 = -e^{\,4}$; $p = -e^{-(t-4)} + 1$.

2) $p + 1 = -e^{-(t-4)} + 2$; $t = 4 - \ln 2$; $p(0) + 1 = -e^{-(0-4)} + 2 = 2 - e^4 < 0$;

$p(4) + 1 = -e^{-(4-4)} + 2 = 1 > 0$;

Тогда $umax = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \in [4 - \ln 2\,; 4] \\ 4 & \text{при} \quad t \in [0; 4 - \ln 2] \end{cases}$.

3) $\int \frac{dx}{x - umax} = \int dt$; $\ln|x - umax| = t + \widetilde{C_2}$; $x = e^{t+\widetilde{C_2}} + umax$; $e^{\widetilde{C_2}} = C_2$;

$x = C_2 e^t + umax$

4) При $t \in [0; 4 - \ln 2]$ $x = C_2 e^t + 4$; т.к. $x(0) = 1$ $C_2 + 4 = 1$; $C_2 = -3$;

$x = -3e^t + 4$; найдем начальное условие на втором интервале:

$x(4 - \ln 2) = -3e^{4-\ln 2} + 4 = -\frac{3}{2}e^4 + 4$;

5) При $t \in [4 - \ln 2\,; 4]$ $x = C_2 e^t$; $C_2 e^{4-\ln 2} = -\frac{3}{2}e^4 + 4$; $C_2 = 8e^{-4} - 3$;

$x = (8e^{-4} - 3)e^t$.

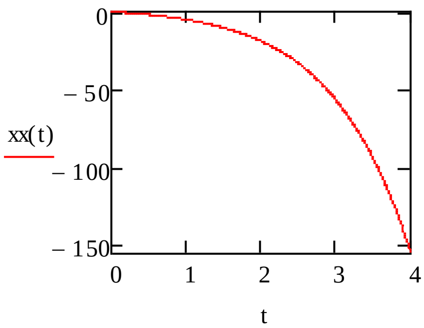
6) Получим оптимальное решение:

$$x^* = \begin{cases} (8e^{-4} - 3)e^t & \text{при} \quad t \in [4 - \ln 2\,; 4] \\ -3e^t + 4 & \text{при} \quad t \in [0; 4 - \ln 2] \end{cases}$$

Построение графиков полученного решения в MATHCAD

$$xx(t) := \begin{vmatrix} -3 \cdot e^t + 4 \ \text{ if } \ t \le 4 - \ln(2) \\ \left(8 \cdot e^{-4} - 3\right) \cdot e^t \ \text{ otherwise} \end{vmatrix}$$

$t := 0, 0.01 .. 4$



Задания к лабораторной работе №3 по вариантам

Методом Лагранжа-Понтрягина найти оптимальный процесс $v^* = \{x^*(t), u^*(t)\}$ при начальных значениях $x(0) = x_0$ за фиксированное время [0,T], если уравнение динамической системы имеет следующий вид:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x,u) \qquad (19)$$

Ограничение на управление: $u_{min} \le u \le u_{max}$

Критерий оптимальности имеет вид:

$I = \int_0^T f_0(x,u)dt - F(x(T))$.

№ варианта	Уравнение системы $f(x,u)$	Ограничение на управление $u_{min} \le u \le u_{max}$	Интервал времени	Начальные условия	Функционал качества
1	$x + 2u$	$0 \le u \le 1$	[0,3]	x(0)=1/2	$I = \int_0^3 (x - 6u)dt - 2x(3)$
2	$x + u$	$-2 \le u \le 2$	[0,1]	x(0)=1	$I = \int_0^1 (x + 2u)dt - 3x(1)$
3	$x + u$	$-1 \le u \le 1$	[0,3]	x(0)=1	$I = \int_0^3 (-4x + 2u)dt + x(3)$
4	u	$-1 \le u \le 1$	[0,4]	x(0)=0	$I = \int_0^4 (x)dt - 2x(4)$
5	$x - 2u$	$0 \le u \le 2$	[0,2]	x(0)=-1	$I = \int_0^2 (-x + u)dt + 2x(2)$
6	$x - u$	$1 \le u \le 2$	[0,1]	x(0)=-1/2	$I = \int_0^1 (-x - u)dt + 3x(1)$
7	$x + u$	$0 \le u \le 3$	[0,4]	x(0)=1	$I = \int_0^4 (3u)dt - x(4)$
8	$-x + 2u$	$-3 \le u \le 3$	[0,3]	x(0)=0.1	$I = \int_0^3 (x + u)dt + x(3)$
9	$-x + u$	$-1 \le u \le 0$	[0,2]	x(0)=2	$I = \int_0^2 (x - u)dt - 3x(2)$
10	$-x - u$	$-1 \le u \le 2$	[0,1]	x(0)=0	$I = \int_0^1 (2x + u)dt - x(1)$

2.4 Лабораторная работа 4.
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫМ ПРОЦЕССОМ С ДВУМЕРНЫМ ВЕКТОРОМ СОСТОЯНИЙ И ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УПРАВЛЕНИЕ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА-ПОНТРЯГИНА.

Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x,u), \quad \text{где } i=1,2; \tag{20}$$

$\vec{x}(t)$ – двумерный вектор траектории (состояния) процесса, $u(t)$ – управление, не являющееся вектором, с начальными условиями:

$$x_1(t_0=0)=x_{10}, x_2(t=0)=x_{20} \tag{21}$$

и критерием эффективности

$$I = \int_0^T f_0(x,u,t)dt + F\big(x(T)\big) \to min\,. \tag{22}$$

Однако, в отличие от второй лабораторной работы, на управление наложено ограничение $u_{min} \le u \le u_{max}$. (23)

Кроме того, аналогично тому, как это имело место в третьей лабораторной работе, функции $f_1(x,u)$, $f_2(x,u)$ и$f_0(x,u)$ линейны относительно управления.

Требуется найти такой процесс $v^* = \{\overrightarrow{x^*}(t), u^*(t)\}$, на котором бы критерий эффективности достигал своего минимального значения.

Подход к решению

Принцип максимума Понтрягина требует решения краевой двухточечной задачи

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x,u),$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \text{ для } i = 1,2 \tag{24}$$

для решения которой необходимо задать 4 краевых условия.

При этом подход к нахождению $u^* = arg\left(\max_u H(\vec{x},u,\vec{p})\right)$ при $\forall t \in [0,T]$ аналогичен тому, как это делалось в лабораторной работе №3.

Подставляя управление $u^0 = arg \max_u H(\bar{x},\bar{p},u)$ как константу в исходную систему дифференциальных уравнений, получим замкнутую систему для неизвестных векторов $\bar{x}$ и $\bar{p}$ и решаем ее отдельно на каждом интервале знакопостоянства k, доопределяя управление в точках конечного разрыва до непрерывности значением его левого одностороннего предела.

Для линейных дифференциальных уравнений условия принципа максимума необходимы и достаточны.

В данном лабораторном практикуме предлагается проводить расчет в математическом пакете MATHCAD и для решения систем дифференциальных уравнений использовать функцию ***rkfixed***, реализующую метод Рунге-Кута для численного решения систем дифференциальных уравнений. Для нахождения значений сопряженных функций Лагранжа $p_1(0), p_2(0)$ в начальной точке траектории рекомендуется использование функции ***sbval***.

Образец оформления лабораторной работы №4.

Задание: **методом Лагранжа-Понтрягина найти оптимальный процесс** $v^* = \{\overrightarrow{x^*}(t), u^*(t)\}$ **при начальных значениях** $x_2(0) = 1, x_1(0) = 0.0001$ **за фиксированное время [0,3], если система уравнений динамической системы имеет следующий вид:**

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = x_1 + x_2 \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} = u \end{cases}. \qquad (25)$$

где $0 \le u \le 1$.

Критерий оптимальности имеет вид:

$$\boldsymbol{I = \int_0^3 (x_1(t) + 2x_2(t) - 3u(t))dt + x_1(3)}.$$

Постановочная часть:

Составим для данной задачи Гамильтониан:

$H(t, \vec{x}, u, \vec{p}) = p_1(x_1 + x_2) + p_2 \cdot u - x_1 - 2x_2 + 3u,$

Тогда $k = (p_2 + 3)$, т.е. $umax = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad (p_2 + 3) < 0 \\ 1 & \text{при} \quad (p_2 + 3) > 0 \end{cases}$.

Найдем производные по времени сопряженных переменных как частные производные Гамильтониана по переменным x_1, x_2, взятым с противоположным знаком:

$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -p_1 + 1, \ \frac{\partial p_2}{\partial t} = -p_1 + 2.$

Из условия трансверсальности найдем, что $p_1(3) = -1, \ p_2(3) = 0$.

Расчетная часть:

$$umax(x,p) := \begin{vmatrix} 1 \ \text{ if } \ p_1 + 3 \ge 0 \\ 0 \ \text{ otherwise} \end{vmatrix}$$

$$f(x,p) := \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \\ umax(x,p) \end{pmatrix} \qquad fs(x,p) := \begin{pmatrix} -p_0 + 1 \\ -p_0 + 2 \end{pmatrix}$$

$$fmax(t,y) := \left[f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]_0 \ f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]_1 \ fs\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]_0 \ fs\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]_1 \right]^T$$

$y_1 := 1 \qquad y_0 := 0.000 \qquad f1(t1,v) := \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & v_0 & v_1 \end{pmatrix}^T$

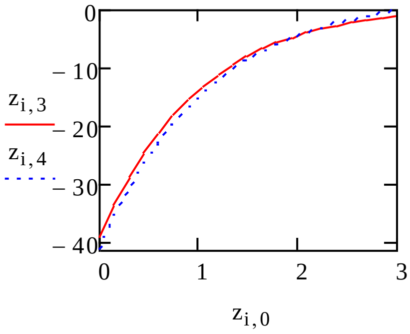
$v_0 := 0 \qquad v_1 := 0 \qquad t1 := 0 \qquad t2 := 3$

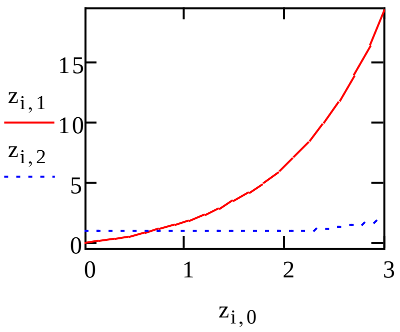
$$f2(t2,y) := \begin{pmatrix} y_2 + 1 \\ y_3 - 0 \end{pmatrix} \qquad a := sbval(y, t1, t2, fmax, f1, f2)$$

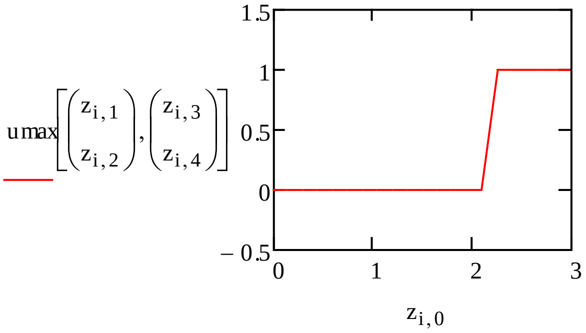
$y_2 := a_0 \qquad y_3 := a_1 \qquad i := 0..20 \qquad z := rkfixed(y, t1, t2, 20, fmax)$

$z_{20,1} = 19.482 \qquad z_{20,2} = 1.775 \qquad z_{0,3} = -39.171 \qquad z_{0,4} = -41.171$

$$umax\left[\begin{pmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_{0,3} \\ z_{0,4} \end{pmatrix}\right] = 0 \qquad umax\left[\begin{pmatrix} z_{20,1} \\ z_{20,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_{20,3} \\ z_{20,4} \end{pmatrix}\right] = 1$$







Решение вручную:

Подставим найденное значение umax в уравнения системы (20).

В результате получим систему четырех дифференциальных уравнений с четырьмя краевыми условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = x_1 + x_2 \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} = \mathrm{umax} \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} = -p_1 + 1 \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} = -p_1 + 2 \end{cases}, \text{ где } \mathrm{umax}=const.$$

при $x_1(0) = 0.0001,\ x_2(0) = 1,\ p_1(3) = -1,\ p_2(3) = 0.$

Решим полученную систему дифференциальных уравнений с заданными краевыми условиями.

2) $\int \frac{dp_1}{p_1-1} = -\int dt$; $\ln|p_1 - 1| = -t + \widetilde{C_1}$; $p_1 = e^{-t+\widetilde{C_1}} + 1$; $e^{\widetilde{C_1}} = C_1$; $p_1 = C_1e^{-t} + 1$

$C_1e^{-3} + 1 = -1$; $C_1 = -2e^{\,3}$; $p_1 = -2e^{-(t-3)} + 1.$

2) $\int dp_2 = \int\left(2+2e^{-(t-3)} - 1\right)dt$; $p_2 = -2e^{-(t-3)} + t + C_2$; $C_2 + 3 - 2 = 0$;

$C_2 = -1$; $p_2 = -2e^{-(t-3)} + t - 1$

3) $p_2 + 3 = -2e^{-(t-3)} + t + 2$; $t = 4 - \ln 2$;

$p_2(0) + 3 = -2e^{-(0-3)} + 0 + 2 = 2 - 2e^3 < 0$;

$p_2(3) + 3 = -2e^{-(3-3)} + 3 + 2 = 3 > 0$;

Тогда $umax = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \in [0; 2{,}25] \\ 1 & \text{при} \quad t \in [2{,}25; 3] \end{cases}$.

4) $\int dx_2 = umax \int dt$; $x_2 = umax \cdot t + C_3$;

5) $\dot{x_1} - x_1 = umax \cdot t + C_3$; $\dot{u}v + u(\dot{v} - v) = umax \cdot t + C_3$;

$\int \frac{dv}{v} = \int dt$; $\ln|v| = t$; $v = e^t$; $\int du = \int e^{-t}(umax \cdot t + C_3)dt$

$\left\langle \begin{matrix} u = umax \cdot t + C_3 & du = umaxdt \\ e^{-t}dt = dv & v = -e^{-t} \end{matrix} \right\rangle$; $u = -e^{-t}(umax \cdot t + C_3) + umax \int e^{-t}dt + C_4$;

$u = -e^{-t}(umax \cdot t + umax + C_3) + C_4;$;
$x_1 = -(umax \cdot t + umax + C_3) + C_4 e^t;$

6) При $t \in [0; 2{,}25]$ $umax = 0;$ $x_2 = C_3;$ $x_1 = -C_3 + C_4 e^t;$ т.к. $x_1(0) = 0.0001,$ $x_2(0) = 1,$ то $C_3 = 1;$ $C_4 = 1.0001;$ $x_2 = 1;$ $x_1 = -1 + 1.0001 e^t;$
найдем начальное условие на втором интервале:
$x_2(2{,}25) = 1;$ $x_1(2{,}25) = -1 + 1.0001 e^{2{,}25};$

7) При $t \in [2{,}25; 3]$ $umax = 1;$ $x_2 = t + C_3;$ $x_1 = -(t + 1 + C_3) + C_4 e^t;$ т.к. $x_2(2{,}25) = 1;$ $x_1(2{,}25) = -1 + 1.0001 e^{2{,}25}$, то $C_3 = -1{,}25;$ $C_4 = 1.0001 + e^{-2{,}25};$
$x_2 = t - 1{,}25;$ $x_1 = -(t - 0{,}25) + (1.0001 + e^{-2{,}25}) e^t;$

8) Получим оптимальное решение:

$$x_1^* = \begin{cases} -1 + 1.0001 e^t & \text{при} \quad t \in [0; 2{,}25] \\ -(t - 0{,}25) + (1.0001 + e^{-2{,}25}) e^t & \text{при} \quad t \in [2{,}25; 3] \end{cases}$$

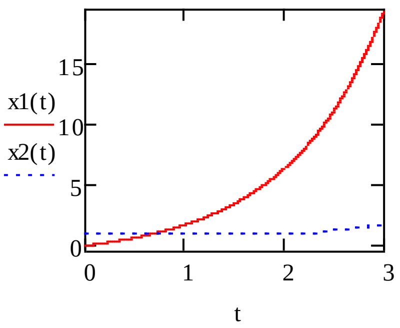
$$x_2^* = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in [0; 2{,}25] \\ t - 1{,}25 & \text{при} \quad t \in [2{,}25; 3] \end{cases}$$

Построение графиков полученного решения в MATHCAD

$$x1(t) := \left| \begin{array}{l} -1 + 1.0001 e^t \ \text{ if } t \le 2.25 \\ 0.25 - t + \left(1.0001 + e^{-2.25}\right) \cdot e^t \ \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

$$x2(t) := \left| \begin{array}{l} 1 \ \text{ if } t \le 2.25 \\ t - 1.25 \ \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

$t := 0, 0.001 .. 3$



Задания к лабораторной работе №4 по вариантам

Методом Лагранжа-Понтрягина найти оптимальный процесс $v^* = \{\overrightarrow{x^*}(t), u^*(t)\}$ при начальных значениях $x_1(0)$, $x_2(0)$ за фиксированное время [0,T], если система уравнений динамической системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = f_1(x_1, x_2, u) \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t} = f_2(x_1, x_2, u) \end{cases}$$

и на управление наложено ограничение $u_{min} \le u \le u_{max}$.

№ варианта	Уравнение системы $f_1(x_1, x_2, u)$	Уравнение системы $f_2(x_1, x_2, u)$	Интервал времени	Ограничение $[u_{min}, u_{max}]$	Начальные условия	Функционал качества
1	$x_2 - u$	$x_1 + u$	[0,3]	[-2,2]	$x_1(0)=2$, $x_2(0)=0$	$I = \int_0^3 (x_1 + x_2 + 2u)dt - x_2(3)$
2	x_2	u	[0,1]	[-2,2]	$x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$	$I = \int_0^1 (x_1)dt$
3	x_2	$x_1 - 2u$	[0,2]	[-1,2]	$x_1(0)=1$, $x_2(0)=2$	$I = \int_0^2 u dt - x_2(2)$
4	u	x_1	[0,1]	[-1,1]	$x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$	$I = \int_0^1 (x_2)dt$
5	$x_1 - u$	$x_2 + u$	[0,4]	[0,3]	$x_1(0)=1$, $x_2(0)=-1$	$I = \int_0^4 (x_1 + u)dt - x_2(4)$
6	u	$-x_1$	[0,9]	[0,1]	$x_1(0)=3$, $x_2(0)=1$	$I = \int_0^9 (u + x_1 - x_2)dt + x_2(9)$
7	$-x_2$	$-x_1 + u$	[0,1]	[0,2]	$x_1(0)=1$, $x_2(0)=2$	$I = \int_0^1 (x_2 + u)dt + x_2(1)$
8	x_2	$x_1 + u$	[0,10]	[-1,0]	$x_1(0)=1$, $x_2(0)=1$	$I = \int_0^{10} (u - x_1)dt$
9	$-x_1$	$-x_2 + u$	[0,5]	[0,1]	$x_1(0)=-1$, $x_2(0)=0$	$I = \int_0^5 (u - x_2)dt + 2x_1(5)$
10	$x_1 + u$	x_2	[0,7]	[-2,0]	$x_1(0)=1$, $x_2(0)=3$	$I = \int_0^7 (u - x_1 - x_2)dt - 2x_2(7)$

2.5 Лабораторная работа 5.

РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫМ ПРОЦЕССОМ МЕТОДОМ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ-БЕЛЛМАНА.

Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), \quad \text{где } x(t) \text{ – траектория процесса, } \quad u(t) \text{ – управление,} \tag{26}$$

на которые не наложено никаких ограничений, с начальными и конечными условиями:

$$\boldsymbol{x(t_0 = 0) = x_0, x(t = T) = x_k} \tag{27}$$

и критерием эффективности

$$I = \int_0^T f_0(x,u,t)dt + F\big(x(T)\big) \to min\,. \tag{28}$$

Требуется найти такой синтез оптимального управления $u^*(t,x)$ процесс $v^* = \{x^*(t), u^*(t)\}$, на котором бы критерий эффективности достигал своего минимального значения.

Описание метода

Введем в рассмотрение непрерывную и непрерывно дифференцируемую функцию *φ(t,x)*, которая вместе с процессом $v^* = \{x^*(t), u^*(t)\}$ удовлетворяет достаточным условиям оптимальности непрерывных процессов:

1^0. $R(x^*, u^*, t) = \max\limits_{v^* \in M} R(x,u,t)$ при $\forall t \in [0,T]$

2^0. $\Phi(x^*(T)) = \min\limits_{x} \Phi(x(T))$

где $R(x,u,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \cdot f_i(x,u) - f_0(x,u)$; (29)

$\Phi(x(T)) = \varphi(T,x) + F(x)$. (30)

Алгоритм метода Гамильтона-Якоби-Беллмана:

Решение задачи методом Гамильтона-Якоби-Беллмана начинается с отыскания такой функции *φ(t,x)*, которая должна удовлетворять двум априорным требованиям:

1^0. $P(x,t) = c(t)$ (31)

2^0. $\Phi(x(T)) = c_1$ (32)

где $P(x,t) = \max\limits_{u} H\left(t,x,u,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ при $\forall t \in [0,T]$.

Уравнение (31) называется уравнением Гамильтона-Якоби-Беллмана.

Функцию *φ(t,x)*подбираем в виде многочлена от x того же порядка, что и функция $F(x)$, с коэффициентами, являющимися функциями только от t. От нее находим $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и подставляем в уравнение (31). Далее группируем относительно различных степеней x и приравниваем полученные коэффициенты к нулю. В результате получаем систему дифференциальных уравнений.

Краевые условия получаем из уравнения (32), подставляя в функцию *φ(t,x)* $t = T$ и $c_1 = 0$.

Подход к решению

Таким образом, метод Гамильтона-Якоби-Беллмана требует решения краевой двухточечной задачи дважды:

1) Первый раз для отыскания коэффициентов функции *φ(t,x)*, которые позволят определить синтез оптимального управления $u^*(t,x)$. Динамическое программирование дает решение задачи в виде синтеза управления $u^*(t,x)$, которое является функцией координат динамической системы, что в непрерывной постановке приводит к решению задачи Коши для нелинейных уравнений в частных производных. Эта задача более сложная, чем решение обыкновенных дифференциальных уравнений, ее, как правило, решают на некоторой сетке, заменяя непрерывное время дискретными значениями.
2) Второй раз решается система дифференциальных уравнений процесса, в которую вместо u подставляется $u^*(t,x)$, с заданными начальными условиями.

Наибольшую трудность при применении метода Гамильтона-Якоби-Беллмана вызывает решение двухточечной краевой задачи.

В результате, окончательно решение ищется в виде программного управления, то есть функция $u(t)$ является функцией времени.

В данном лабораторном практикуме предлагается проводить расчет в математическом пакете MATHCAD и для решения систем дифференциальных уравнений использовать функцию ***rkfixed***, реализующую метод Рунге-Кута для численного решения систем дифференциальных уравнений. Для нахождения значения коэффициентов функции *φ(t,x)* в начальной точке траектории рекомендуется использование функции ***sbval***.

Образец оформления лабораторной работы №5.

Задание: **методом Гамильтона-Якоби-Беллмана найти синтез оптимального управления** $u^*(t,x)$ и **оптимальный процесс** $v^* = \{x^*(t), u^*(t)\}$ **при начальном значении** $x(0) = -1$ **за фиксированное время [0,4], если уравнение динамической системы имеет следующий вид:**

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -u. \qquad (33)$$

Критерий оптимальности имеет вид:

$$I = \int_0^4 (2x + u^2)dt + 3x(4)$$

Постановочная часть:

Составим для данной задачи функцию:

$$R(x,u,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot (-u) - 2x - u^2;$$

Найдем частную производную этой функции по переменной u:

$$\frac{\partial R(x,u,t)}{\partial u} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2u.$$

Приравняем ее к нулю и найдем синтез оптимального управления $u^*(t,x)$:

$$u^*(t,x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}.$$

Так как терминальная функция $F(x) = 3x$ – многочлен 1-го порядка по x, то функцию *φ(t,x)* будем искать также в виде многочлена 1-го порядка по x:

$\varphi(t,x) = p(t) \cdot x;$ тогда $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \cdot x;\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = p.$

Найдем функцию $P(x,t)$:

$$P(x,t) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - 2x - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - 2x + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{4} \cdot p^2 - 2x + \frac{\partial p}{\partial t} \cdot x.$$

Составим уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} - 2\right) \cdot x + \frac{1}{4} \cdot p^2 = c(t),$$

из которого получаем дифференциальное уравнение для отыскания коэффициента p функции $\varphi(t,x)$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 2.$$

Подставляя t=4 во второе априорное требования метода Гамильтона-Якоби-Беллмана, найдем, что:

$p(4) \cdot x + 3x = 0$, откуда $p(4) = -3$.

Добавим полученное дифференциальное уравнение с краевым условием к уравнению динамической системы:

$\frac{\partial x}{\partial t} = -u$ с начальным условием $x(0) = -1$.

Далее решаем полученную краевую двухточечную задачу в пакете MATHCAD.

Расчетная часть:

$umax(x,p) := -(0.5p)$

$f(x,p) := -umax(x,p)$

$fs(x,p) := 2$

$$fmax(t,y) := \begin{pmatrix} f(y_0, y_1) \\ fs(y_0, y_1) \end{pmatrix}$$

$y_0 := -1$ $\qquad f1(t1,v) := \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

$v_0 := -11$

$t1 := 0 \qquad t2 := 4$

$f2(t2,y) := y_1 + 3$

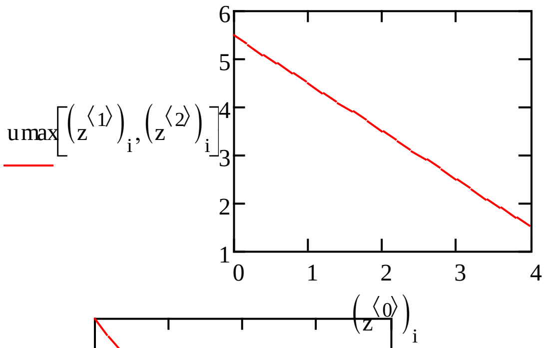
$a := sbval(y, t1, t2, fmax, f1, f2)$

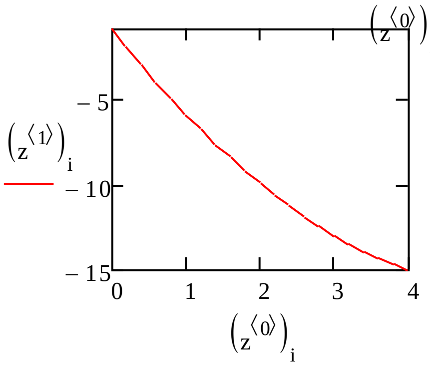
$y_1 := a_0 \qquad i := 0..20$

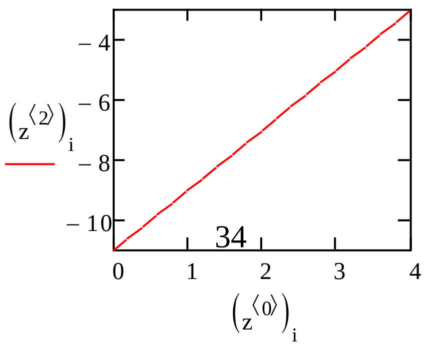
$z := rkfixed(y, t1, t2, 20, fmax)$

$\left(z^{\langle 2\rangle}\right)_0 = -11 \qquad umax\left[\left(z^{\langle 1\rangle}\right)_0, \left(z^{\langle 2\rangle}\right)_0\right] = 5.5$

$\left(z^{\langle 1\rangle}\right)_{20} = -15 \qquad umax\left[\left(z^{\langle 1\rangle}\right)_{20}, \left(z^{\langle 2\rangle}\right)_{20}\right] = 1.5$







Решение вручную:

В результате получим систему двух дифференциальных уравнений с двумя краевыми условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = -umax \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} = 2 \end{cases}$$, где umax=$u^*(t, x)$.

при $x(0) = -1,\ p(4) = -3$.

Решим полученную систему дифференциальных уравнений с заданными краевыми условиями.

1) $\int dp = 2\int dt\,;\ p = 2t + C_1;\ C_1 + 8 = -3;\ \ C_1 = -11;\ \ p = 2t - 11.$

2) $u^*(t, x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{2}\cdot p = -\frac{1}{2}(2t - 11) = -t + 5{,}5.$

3) $\frac{\partial x}{\partial t} = t - 5{,}5;\ \int dx = \int t dt - 5{,}5\int dt\,;\ x = \frac{t^2}{2} - 5{,}5t + C_2;\ C_2 = -1.$

4) Получим оптимальное решение:

4) $x^* = \frac{t^2}{2} - 5{,}5t - 1;\ \ u^* = -t + 5{,}5.$

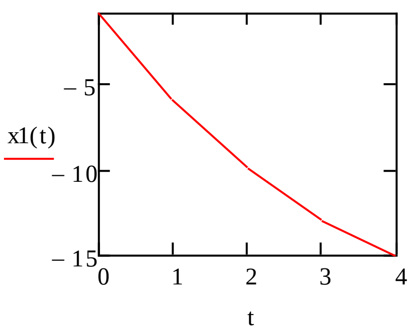
Построение графиков полученного решения в MATHCAD

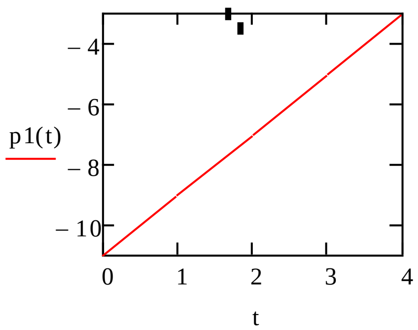
$x1(t) := 0.5\cdot\left(t^2 - 11\cdot t - 2\right)$ $\qquad x1(4) = -15$

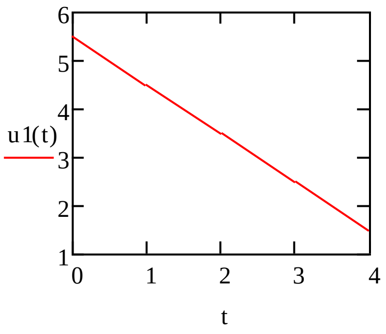
$p1(t) := 2\cdot t - 11$ $\qquad p1(0) = -11$

$u1(t) := 5.5 - t$ $\qquad u1(0) = 5.5 \qquad u1(4) = 1.5$

$t := 0..4$







Задания к лабораторной работе №5 по вариантам

Методом Гамильтона-Якоби-Беллмана найти синтез оптимального управления $u^*(t,x)$ и оптимальный процесс $v^* = \{x^*(t), u^*(t)\}$ при начальном значении $x(0)$ за фиксированное время [0,T], если уравнение динамической системы имеет следующий вид:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x,u)$$

№ варианта	Уравнение системы $f(x,u)$	Интервал времени	Начальные условия	Функционал качества
1	$-x+u$	[0,5]	x(0)=-1	$\mathrm{I} = \int_0^5 (\mathrm{u}^2 - x)\mathrm{dt} + 2x(5)$
2	$x+u$	[0,7]	x(0)=1	$\mathrm{I} = \int_0^7 (\mathrm{u}^2 - x)\mathrm{dt} - 2x(7)$
3	u	[0,9]	x(0)=3	$\mathrm{I} = \int_0^9 (\mathrm{u}^2 + x)\mathrm{dt} + x(9)$
4	$x-u$	[0,4]	x(0)=1	$\mathrm{I} = \int_0^4 (x + \mathrm{u}^2)\mathrm{dt} - x(4)$
5	$-x-u$	[0,1]	x(0)=2	$\mathrm{I} = \int_0^1 (x + \mathrm{u}^2)\mathrm{dt} + x(1)$
6	$-u$	[0,10]	x(0)=0	$\mathrm{I} = \int_0^{10} (\mathrm{u}^2 - x)\mathrm{dt} + 3x(1)$
7	u	[0,3]	x(0)=-1	$\mathrm{I} = \int_0^3 (\mathrm{u}^2 + x)\mathrm{dt} - x(3)$
8	$-u+x$	[0,3]	x(0)=-2	$\mathrm{I} = \int_0^3 (x + 2\mathrm{u}^2)\mathrm{dt} - x(3)$
9	u	[0,1]	x(0)=0	$\mathrm{I} = \int_0^1 (x - \mathrm{u}^2)\mathrm{dt} - 5x(1)$
10	$u+x$	[0,2]	x(0)=-1	$\mathrm{I} = \int_0^2 (-\mathrm{u}^2)\mathrm{dt} + x(2)$

2.6 Лабораторная работа 6.

РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫМ ПРОЦЕССОМ С ФУНКЦИЕЙ ГАМИЛЬТОНА, ЛИНЕЙНОЙ ПО УПРАВЛЕНИЮ, МЕТОДОМ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ-БЕЛЛМАНА.

Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), \qquad (34)$$

где $x(t)$ – траектория процесса, $u(t)$ – управление, $f(x,u)$- функция, линейная относительно управления, с начальными условиями:

$$x(t_0 = 0) = x_0, \qquad (35)$$

и критерием эффективности

$$I = \int_0^T f_0(x,u,t)dt + F\big(x(T)\big) \to min\ . \qquad (36)$$

где $f_0(x,u)$- функция, линейная относительно управления.

На управление наложено следующее ограничение: $u_{min} \leq u \leq u_{max}$. (37)

Требуется найти такой процесс $v^* = \{x^*(t), u^*(t)\}$, на котором бы критерий эффективности достигал своего минимального значения.

Метод решения такой задачи полностью аналогичен методу решения задачи, постановка которой приведена в лабораторной работе №5.

Однако тут возникает один нюанс. Так как функции $f(x,u)$ и $f_0(x,u)$ линейны относительно управления, то и функция $R(x,u,t)$ тоже будет линейной относительно управления, т.е. по сути будет иметь вид $R(x,u,t,p) = ku + b$, где k и b есть функции от x и p. В связи с этим найти значение u, при котором функция $R(x,u,t)$ достигает максимума, нельзя путем приравнивания к нулю частную производную этой функции по u.

Поэтому в задачах с такой постановкой ищут $umax$следующим образом. Так как линейная функция является монотонно возрастающей при $k > 0$, то функция $R(x,u,t)$ будет достигать максимума по u при $u = u_{max}$. Аналогично, при $k < 0$ функция $R(x,u,t)$ будет достигать максимума по u при $u = u_{min}$, т.к. линейная функция будет монотонно убывающей. Таким образом, необходимо разбить отрезок [0,T] на интервалы знакопостоянства k, на каждом из этих интервалов найти свое значение $umax$ и на каждом интервале в отдельности решить задачу оптимального управления.

Система MATHCAD позволяет решить эту задачу путем использования блока программирования с применением оператора выбора $\boldsymbol{if..otherwise}$.

Образец оформления лабораторной работы №6.

Задание: **методом Гамильтона-Якоби-Беллмана оптимальный процесс** $v^* = \{x^*(t), u^*(t)\}$ **при начальных значениях** $x(0) = 1$ **за фиксированное время [0,4], если уравнение динамической системы имеет следующий вид:**

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{x}{2} + u \qquad (38)$$

Ограничение на управление: $-2 \leq u \leq 2$

Критерий оптимальности имеет вид:

$I = \int_0^4 u dt - 3x(4).$

Постановочная часть:

Составим для данной задачи функцию:

$R(x,u,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\left(\frac{x}{2}+u\right) - u = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - 1\right)u + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{x}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t};.$

Тогда $k = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - 1$, т.е. $umax = \begin{cases} -2 & \text{при} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} - 1 < 0 \\ 2 & \text{при} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} - 1 > 0 \end{cases}$.

Так как в этом случае $umax$ есть константа, то синтез оптимального управления $u^*(t,x)$ мы не получим, а получим программное управление $u^* = \boldsymbol{const}$.

Так как терминальная функция $F(x) = -3x$ – многочлен 1-го порядка по x, то функцию $\varphi(t,x)$ будем искать также в виде многочлена 1-го порядка по x:

$\varphi(t,x) = p(t)\cdot x;$ тогда $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}\cdot x;$ $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = p$. Тогда:

$$umax = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad p-1>0 \\ -2 & \text{при} \quad p-1<0 \end{cases}$$

Найдем функцию $P(x,t)$:

$P(x,t) = \frac{\partial p}{\partial t}\cdot x + \frac{x}{2}\cdot p + (p-1)umax.$

Составим уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p}{2}\right)\cdot x + (p-1)umax = c(t),$

из которого получаем дифференциальное уравнение для отыскания коэффициента p функции $\varphi(t,x)$:

$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{p}{2}.$

Подставляя t=4 во второе априорное требования метода Гамильтона-Якоби-Беллмана, найдем, что:

$p(4)\cdot x - 3x = 0,$ откуда $p(4) = 3.$

Добавим полученное дифференциальное уравнение с краевым условием к уравнению динамической системы:

$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{x}{2} + u$ с начальным условием $x(0) = 1.$

Далее решаем полученную краевую двухточечную задачу в пакете MATHCAD.

Расчетная часть:

$umax(x,p) := \begin{vmatrix} 2 \ \text{if} \ (p-1 \ge 0) \\ -2 \ \text{otherwise} \end{vmatrix}$

$f(x,p) := 0.5x + umax(x,p)$ $\qquad$ $fs(x,p) := -0.5p$

$fmax(t,y) := \begin{pmatrix} f(y_0,y_1) \\ fs(y_0,y_1) \end{pmatrix}$

$y_0 := 1$ $\qquad$ $f1(t1,v) := \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

$v_0 := 27$

$t1 := 0$ $\qquad$ $t2 := 4$

$f2(t2,y) := y_1 - 3$

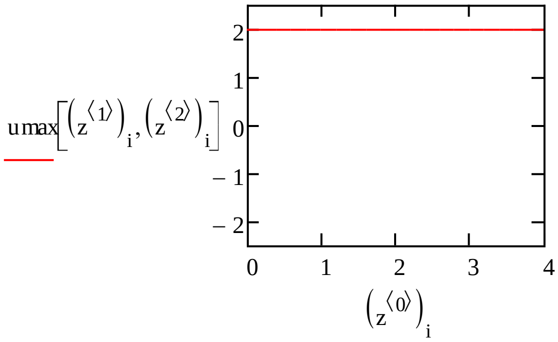
$a := sbval(y,t1,t2,fmax,f1,f2)$

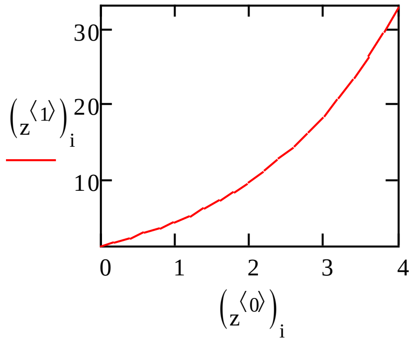
$y_1 := a_0$ $\qquad$ $i := 0..20$

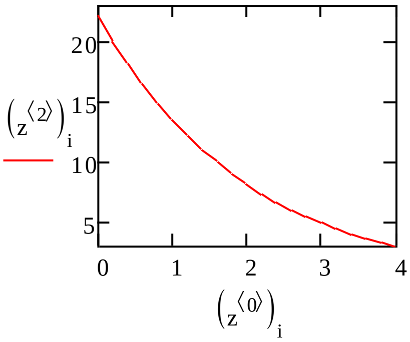
$z := rkfixed(y,t1,t2,20,fmax)$

$\left(z^{\langle 2\rangle}\right)_0 = 22.167$ $umax\left[\left(z^{\langle 1\rangle}\right)_{20}, \left(z^{\langle 2\rangle}\right)_{20}\right] = 2$

$\left(z^{\langle 1\rangle}\right)_{20} = 32.945$ $umax\left[\left(z^{\langle 1\rangle}\right)_{0}, \left(z^{\langle 2\rangle}\right)_{0}\right] = 2$







Решение вручную:

В результате получим систему двух дифференциальных уравнений с двумя краевыми условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{x}{2} + umax \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{p}{2} \end{cases}$$, где umax=$u^*(t, x)$.

при $x(0) = 1,\ p(4) = 3$.

Решим полученную систему дифференциальных уравнений с заданными краевыми условиями.

1) $\int \frac{dp}{p} = -\frac{1}{2}\int dt$; $\ln|p| = -\frac{t}{2} + \widetilde{C_1}$; $p = e^{-\frac{t}{2}+\widetilde{C_1}} + 1$; $e^{\widetilde{C_1}} = C_1$; $p = C_1 e^{-\frac{t}{2}}$;

$C_1 e^{-2} = 3$; $C_1 = 3e^{2}$; $p = 3e^{-\frac{t}{2}+2}$.

2) $p - 1 = 3e^{-\frac{t}{2}+2} - 1$; $t = 4 + 2\ln 3 > 4$; $p(0) - 1 = 3e^2 - 1 > 0$;
$p(4) - 1 = 3 - 1 = 2 > 0$;

3) Тогда $umax = 2$ при $t \in [0; 4]$.

4) $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{x}{2} + 2$; $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{2}(x + 4)$; $\int \frac{dx}{x+4} = \frac{1}{2}\int dt$; $\ln|x + 4| = \frac{t}{2} + \widetilde{C_2}$; $x = e^{\frac{t}{2}+\widetilde{C_2}} - 4$;

$e^{\widetilde{C_2}} = C_2$; $x = C_2 e^{\frac{t}{2}} - 4$;

5) $C_2 - 4 = 1$; $C_2 = 5$; $x = 5e^{\frac{t}{2}} - 4$.

6) Получим оптимальное решение:

$$x^* = 5e^{\frac{t}{2}} - 4; \quad u^* = 2.$$

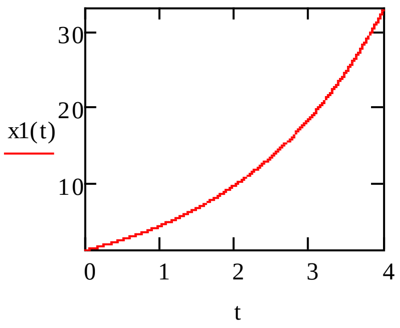
Построение графиков полученного решения в MATHCAD

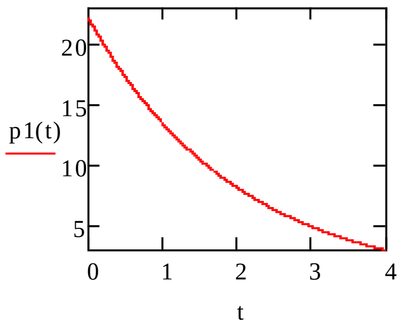
$x1(t) := 5e^{0.5\cdot t} - 4$ $\qquad x1(4) = 32.945$

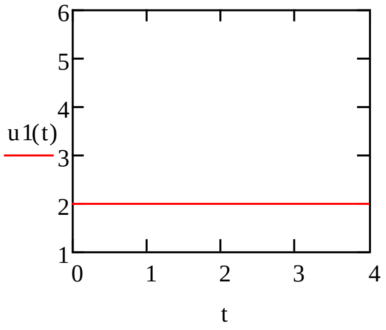
$p1(t) := 3\cdot e^{-0.5\cdot t+2}$ $\qquad p1(0) = 22.167$

$u1(t) := 2$ $\qquad u1(0) = 2 \qquad u1(4) = 2$

$t := 0, 0.001..4$







Задания к лабораторной работе №6 по вариантам

Методом Гамильтона-Якоби-Беллмана найти оптимальный процесс $v^* = \{x^*(t), u^*(t)\}$ **при начальных значениях** $x(0) = x_0$ **за фиксированное время [0,T], если уравнение динамической системы имеет следующий вид:**

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x,u) \tag{19}$$

Ограничение на управление: $u_{min} \le u \le u_{max}$

Критерий оптимальности имеет вид:

$I = \int_0^T f_0(x,u)dt - F(x(T))$.

№ варианта	Уравнение системы $f(x,u)$	Ограничение на управление $u_{min} \le u \le u_{max}$	Интервал времени	Начальные условия	Функционал качества
1	$x - u$	$1 \le u \le 2$	[0,1]	x(0)=-1/2	$\mathrm{I} = \int_0^1 (-x - \mathrm{u})\mathrm{dt} + 3x(1)$
2	$x - 2u$	$0 \le u \le 2$	[0,2]	x(0)=-1	$\mathrm{I} = \int_0^2 (-x + \mathrm{u})\mathrm{dt} + 2x(2)$
3	$x + u$	$0 \le u \le 3$	[0,4]	x(0)=1	$\mathrm{I} = \int_0^4 (3u)\mathrm{dt} - x(4)$
4	u	$-1 \le u \le 1$	[0,4]	x(0)=0	$\mathrm{I} = \int_0^4 (x)\mathrm{dt} - 2x(4)$
5	$-x + 2u$	$-3 \le u \le 3$	[0,3]	x(0)=0.1	$\mathrm{I} = \int_0^3 (x + \mathrm{u})\mathrm{dt} + x(3)$
6	$x + u$	$-1 \le u \le 1$	[0,3]	x(0)=1	$\mathrm{I} = \int_0^3 (-4x + 2\mathrm{u})\mathrm{dt} + x(3)$
7	$-x + u$	$-1 \le u \le 0$	[0,2]	x(0)=2	$\mathrm{I} = \int_0^2 (x - \mathrm{u})\mathrm{dt} - 3x(2)$
8	$x + u$	$-2 \le u \le 2$	[0,1]	x(0)=1	$\mathrm{I} = \int_0^1 (x + 2\mathrm{u})\mathrm{dt} - 3x(1)$
9	$x + 2u$	$0 \le u \le 1$	[0,3]	x(0)=1/2	$\mathrm{I} = \int_0^3 (x - 6\mathrm{u})\mathrm{dt} - 2x(3)$
10	$-x - u$	$-1 \le u \le 2$	[0,1]	x(0)=0	$\mathrm{I} = \int_0^1 (2x + \mathrm{u})\mathrm{dt} - x(1)$

3 Список вопросов для самостоятельной подготовки

3.1 Вопросы для самостоятельной подготовки к защите лабораторных работ

1. Роль методов теории оптимальных процессов
2. Математическая модель задачи оптимизации
3. Классификация методов теории оптимальных процессов
4. Переменные состояния (фазовые координаты) управляющего процесса
5. Программное управление и закон управления
6. Критерий управления качеством
7. Допустимое программное управление, допустимый закон управления, допустимые траектории и процессы
8. Граничные условия и краевая задача
9. Постановка основных задач оптимального управления
10. Свойства оптимальных управлений и оптимальных траекторий
11. Геометрическая интерпретация основной задачи оптимального управления
12. Краткая формулировка задачи и вспомогательные построения для применения принципа максимума Понтрягина
13. Принцип максимума Понтрягина
14. Обобщенные условия трансверсальности
15. Принцип оптимальности динамического программирования и уравнение Гамильтона-Беллмана
16. Ослабленное необходимое условие
17. Последовательность действий при использовании метода динамического программирования
18. Необходимые условия оптимальности особого управления
19. Необходимые условия оптимальности управления в задачах с ограничениями типа неравенств, содержащими только фазовые координаты
20. Типы возможных оптимальных траекторий в задачах с ограничениями на фазовые координаты.

3.2 Вопросы для самостоятельной подготовки к зачету и коллоквиуму

1. Некоторые математические понятия (множество пар элементов, его подмножества, проекции и сечения, функционал).
2. Общая задача оптимизации.
3. Теорема о существовании решения задачи нахождения точной нижней (верхней) границы функционала.
4. Основные понятия управляемого процесса (траектория системы, вектор управляющих воздействий, ограничения на состояние системы, процесс, модель управляемой системы, начальные условия, краевые условия, время протекания процесса, функционал качества, терминальная функция).
5. Постановка задачи оптимизации управляемого процесса в непрерывной управляемой системе.
6. Постановка задачи оптимизации многошагового управляемого процесса в дискретной управляемой системе.
7. Построение траекторий управляемых процессов для случая, когда управление представляет собой разрывную функцию времени.
8. Постановка задачи оптимального управления для модели Леонтьева.
9. Постановка задачи оптимального распределения ресурсов между отраслями.
10. Постановка задачи оптимального распределения капитальных вложений между предприятиями.
11. Постановка задачи о линии наименьшей длины и сведение ее к задаче оптимального управления.
12. Вспомогательные математические конструкции для формулировки достаточных условий оптимальности.
13. Достаточные условия оптимальности для непрерывных процессов.
14. Достаточные условия оптимальности для многошаговых процессов.
15. Обобщенная теорема о достаточных условиях оптимальности.
16. Вывод уравнений метода Лагранжа-Понтрягина.
17. Принцип максимума Понтрягина.
18. Сведение задачи оптимального управления к краевой задаче.
19. Принцип максимума как достаточное условие оптимальности.
20. Уравнения метода Лагранжа-Понтрягина для многошагового процесса с неограниченным управлением.
21. Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для непрерывного варианта.
22. Синтез оптимального управления.
23. Алгоритм метода Гамильтона-Якоби-Беллмана.

4 Перечень рекомендованной учебной литературы

4.1 Основная литература

1. Теория оптимального управления: учебное пособие / И.П. Болодурина, Т.А. Огурцова, О.С. Арапова, Ю.П. Иванова. - Оренбург: ОГУ, 2016. - 147 с.: - ISBN 978-5-7410-1505-6; То же [Электронный ресурс]. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=469724.

2. Першин, И.М. Управление в технических системах. Введение в специальность: учебное пособие / И.М. Першин, В.А. Кришталь, В.В. Григорьев; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Северо-Кавказский федеральный университет». - Ставрополь: СКФУ, 2014. - 146 с.: - ISBN 978-5-905989-49-0; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=457553 .

3. Оптимальное управление в технических системах. Практикум: учебное пособие / Е.А. Балашова, Ю.П. Барметов, В.К. Битюков, Е.А. Хромых; науч. ред. В.К. Битюков; Министерство образования и науки РФ, Воронежский государственный университет инженерных технологий. - Воронеж: Воронежский государственный университет инженерных технологий, 2017. - 289 с.: - ISBN 978-5-00032-307-6; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=482037.

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья используются специальные сервисы в электронно-библиотечных системах (ЭБС), доступ к которым организует Научная библиотека КубГУ.

4.2. Дополнительная литература

1. Оптимальное управление / под ред. Н.П. Осмоловского, В.М. Тихомирова. - Москва: МЦНМО, 2008. - 320 с. - ISBN 978-5-94057-367-8; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63270

2. Специальные разделы теории управления. Оптимальное управление динамическими системами / Ю.Ю. Громов, О.Г. Иванова, В.В. Алексеев и др.; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов: Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. - 108 с.: ил. - Библиогр. в кн.; То же [Электронный ресурс]. - URL:http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=277799.