задание 18
пример 1

1 **Задание 18 № 500411**

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^4+(a-3)^2=|x-a+3|+|x+a-3|$ либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.

Решение.

Введём обозначения: $a-3=b$, $f(x)=x^4+b^2$, $g(x)=|x-b|+|x+b|$.
В этих обозначениях исходное уравнение принимает вид $f(x)=g(x)$.

Если некоторое число x_0 является решением этого уравнения, то и число $-x_0$ также является его решением, поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ — чётные. Значит, если уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственное решение, то это решение $x=0$.

Решим уравнение $f(0)=g(0)$ относительно b:

$$b^2=2|b| \Leftrightarrow |b|\cdot(|b|-2)=0,$$

значит, $x=0$ является решением уравнения $f(x)=g(x)$ при $b=0$ или $|b|=2$.

При $b=0$ уравнение принимает вид $x^4=2|x|$ и имеет три различных решения: $x=-\sqrt[3]{2}, x=0, x=\sqrt[3]{2}$.

Заметим, что $g(x)=2|x|$ при $|x|\geq|b|$, $g(x)=2|b|$ при $|x|<|b|$.

Рассмотрим случай $|b|=2$.
Если $|x|\geq|b|=2$, то $f(x)=x^4+b^2\geq x^4\geq|x|\cdot x^2\cdot|x|\geq 2x^2\cdot|b|>2|x|=g(x)$, то есть уравнение решений не имеет.
Если $|x|<|b|=2$, то $f(x)=x^4+b^2\geq b^2=2|b|=g(x)$, причём равенство возможно только при $x=0$.
Значит, при $|b|=2$ уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственное решение.

Рассмотрим случай $|b|>2$.
Если $|x|\geq|b|>2$, то $f(x)=x^4+b^2\geq x^4\geq|x|\cdot x^2\cdot|x|\geq 2x^2\cdot|b|>2|x|=g(x)$, то есть уравнение решений не имеет.
Если $|x|<|b|$, то $f(x)=x^4+b^2\geq b^2>2|b|=g(x)$, то есть уравнение решений не имеет.

Рассмотрим случай $0<|b|<2$.
В этом случае верны неравенства $f(0)<g(0)$ и $f(2)>g(2)$, так как $b^2<2|b|$ и $16+b^2>4$. Значит, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет решения отличные от нуля, а значит решений больше одного.

Таким образом, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственное решение или не имеет решений при $b\leq-2$ и $b\geq2$, то есть при $a\leq1$ и $a\geq5$.
Ответ: $a\leq1, a\geq5$.

пример 2

Задание 18 № 514451

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4-x^2+a^2}=x^2+x-a$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Имеем:

$$\sqrt{x^4-x^2+a^2}=x^2+x-a \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-a\geq0, \\ x^4-x^2+a^2=x^4+x^2+a^2+2x^3-2ax^2-2ax \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\leq x^2+x, \\ x^3+(1-a)x^2-ax=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\leq x^2+x, \\ \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x^2+(1-a)x-a=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ a\leq0, \end{cases} \\ \begin{cases} a\leq x^2+x, & (*) \\ x^2+(1-a)x-a=0. & (**) \end{cases} \end{array}\right.$$

Уравнение имеет три решения тогда и только тогда, когда $x=0$, $a\leq0$ и уравнение $(**)$ имеет два различных отличных от нуля решения, удовлетворяющих условию $(*)$.

Заметим, что сумма корней уравнения $(**)$ равна $a-1$, и произведение равно $-a$, значит, его корни a и -1, причём $a\neq-1$.
Найденные корни удовлетворяют условию (*), если:

1) $a\leq a^2+a \Leftrightarrow a^2\geq0$, a — любое число.
2) $a\leq(-1)^2+(-1)\Leftrightarrow a\leq0$,
3) $a\neq0$.

Итак, $a<0$, $a\neq-1$.

Ответ: $a<0$, $a\neq-1$.

пример 4-5

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$$

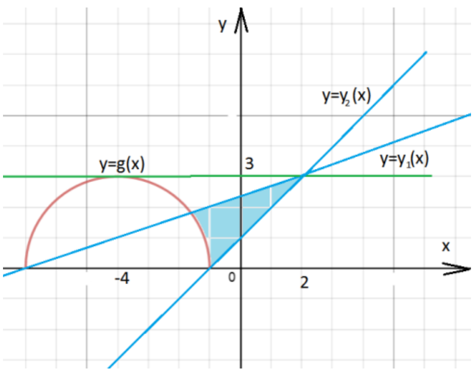
имеет единственный корень.

РЕШЕНИЕ ОТ SOVA ✪ ЛУЧШЕЕ РЕШЕНИЕ

Пусть $y=\sqrt{-7-8x-x^2}$, тогда
$ax+y=2a+3$
Решаем графически.
Сначала разберемся, что представляет из себя график функции
$y=\sqrt{-7-8x-x^2}$.
Возводим в квадрат
$y^2=-7-8x-x^2$
$x^2+8x+y^2=-7$
Выделяем полный квадрат
$(x^2+2\cdot 4\cdot x+16)+y^2=16-7$
$(x+4)^2+y^2=9$ – уравнение окружности $(-4;0)$ $R=3$
$y=\sqrt{-7-8x-x^2}$– уравнение полуокружности, расположенной выше оси ох.

$ax+y=2a+3$
$y=-a(x-2)+3$ – пучок, семейство прямых, проходящих через точку $(2;3)$.

Осталось найти угловые коэффициенты этих прямых
1) $y=g(x)$
$a=0$
2)$y=y1(x)$
Уравнение прямой, проходящей через точки $(2;3)$ и $(-1;0)$.
$y=x+1$
$x+1=-a(x-2)+3 \Rightarrow a=-1$
$y=y2(x)$– уравнение прямой проходящей через точки$(2;3)$ и $(-7;0)$
$y=(1/3)x+(7/3)$
$(1/3)x+(7/3)=-a(x-2)+3$
$a=-1/3$
Все прямые, расположенные между $y=y1(x)$ и $y=y2(x)$ пересекаются с полуокружностью в одной точке.
О т в е т. $[-1;-1/3)\cup\{0\}$



пример 6

Задание 18 № 484644

Найти все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$$

имеет более двух точек экстремума.

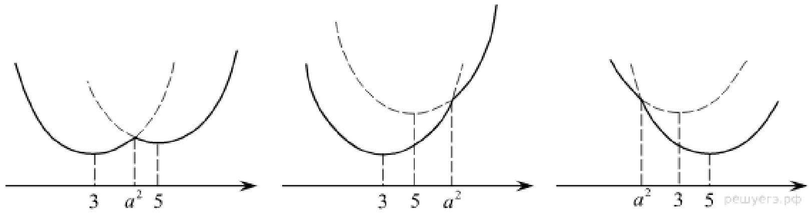
Решение.

1. Функция $f(x)$ имеет вид

а) при $x \geq a^2$: $f(x) = x^2 - 10x + 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 5$;

б) при $x \leq a^2$: $f(x) = x^2 - 6x - 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 3$.

2. Все возможные виды графиков функции показаны на рисунках:



Графики обеих квадратичных функции проходят через точку $(a^2, f(a^2))$.

3. Функция $y = f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно три, в единственном случае (рис. 1):

$$3 < a^2 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}.$$

Ответ: $-\sqrt{5} < a < -\sqrt{3};\ \sqrt{3} < a < \sqrt{5}.$

пример 7

Задание 18 № 519674

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y|, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим четыре случая:

1) Если $x^2 - 2x \leq 0$ и $y^2 - 2y \leq 0$, то получаем уравнение

$$x^2 + 2x - x^2 = y^2 + 2y - y^2 \Leftrightarrow y = x.$$

Полученное уравнение задаёт прямую $y = x$. Случаю удовлетворяют отрезок внутри квадрата 2×2 с вершиной в начале координат.

2) Если $x^2 - 2x \leq 0$ и $y^2 - 2y \geq 0$, то получаем уравнение

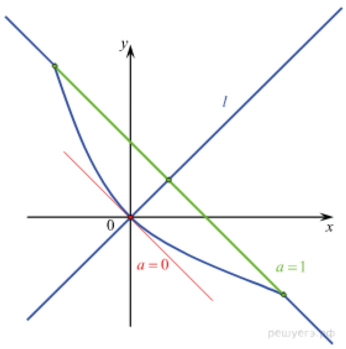
$$x^2 + 2x - x^2 = y^2 - 2y + y^2 \Leftrightarrow x = y^2 - y.$$

Полученное уравнение задаёт параболу $x = y^2 - y$. Случаю удовлетворяет только дуга ниже оси Ox.

3) Если $x^2 - 2x \geq 0$ и $y^2 - 2y \leq 0$, то получаем уравнение

$$x^2 - 2x + x^2 = y^2 + 2y - y^2 \Leftrightarrow y = x^2 - x.$$

Полученное уравнение задаёт параболу $x = x^2 - x$. Случаю удовлетворяет только дуга левее оси Oy.



4) Если $x^2 - 2x \geq 0$ и $y^2 - 2y \geq 0$, то получаем уравнение

$$x^2 - 2x + x^2 = y^2 - 2y + y^2 \Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y - x)(y - 1 + x).$$

Полученное уравнение задаёт пару прямых $y = x$ и $x + y = 1$. Случаю удовлетворяют лучи вне квадрата 2×2 с вершиной в начале координат.

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m с коэффицентом наклона -1.

При $a = 1$ прямая m совпадает с частью графика из первой строчки, то есть исходная система имеет бесконечное число решений.

При $a = 0$ прямая m касается части графика из первой строчки, то есть исходная система имеет одно решение.

При $0 < a < 1$ прямая m пересекает график в трех точках точках, то есть исходная система имеет три решения.

При $a < 0$ или при $a > 1$ прямая m пересекает график в одной точке.

Значит, исходная система имеет более двух решений при $0 < a \leq 1$.

Ответ: $0 < a \leq 1$.

пример 8

Задание 18 № 519672

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

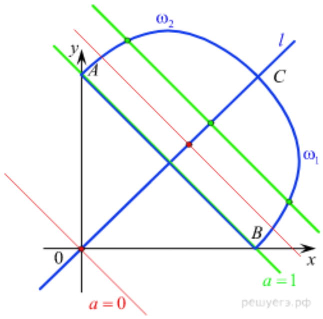
$$\begin{cases} |x^2-1|+2x-x^2=|y^2-1|+2y-y^2, \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим четыре случая:



1) Если $x^2-1\le 0$ и $y^2-1\le 0$, то получаем уравнение

$$2y^2-2x^2+2x-2y=0 \Leftrightarrow \left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Полученное уравнение задаёт пару прямых $y=x$ и $y=1-x$. Случаю удовлетворяют отрезки внутри квадрата 2×2 с центром в начале координат.

2) Если $x^2-1\le 0$ и $y^2-1\ge 0$, то получаем уравнение

$$1-x^2-x^2+2x=y^2-1+2y-y^2 \Leftrightarrow y=-x^2+x+1.$$

Полученное уравнение задаёт параболу $y=-x^2+x+1$. Случаю удовлетворяет только дуга выше прямой $y=1$.

3) Если $x^2-1\ge 0$ и $y^2-1\le 0$, то получаем уравнение

$$x^2-1+2x-x^2=1-y^2+2y-y^2 \Leftrightarrow x=-y^2+y+1.$$

Полученное уравнение задаёт параболу $x=-y^2+y+1$. Случаю удовлетворяет только дуга правее прямой $x=1$.

4) Если $x^2-1\ge 0$ и $y^2-1\ge 0$, то получаем уравнение

$$x^2-1+2x-x^2=y^2-1+2y-y^2 \Leftrightarrow y=x.$$

Полученное уравнение задаёт прямую $y=x$. Случаю удовлетворяют лучи вне квадрата 2×2 с центром в начале координат.

Точки $A(0;1)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$ являются точками пересечения полученных парабол с полученными прямыми и лежат на прямых $x=1$ и/или $y=1$, поэтому искомое множество состоит из прямой l, задаваемой уравнением $y=x$, отрезка AB прямой $x+y=1$, дуги ω_1 параболы $x=-y^2+y+1$ с концами в точках B и C и дуги ω_2 параболы $y=-x^2+x+1$ с концами в точках A и C (см. рис.).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, параллельную прямую AB или совпадающую с ней.

Заметим, что при $a = 0$ прямая m пересекает прямую l в одной точке и не пересекает дуги ω_1 и ω_2 и отрезок AB, то есть исходная система имеет одно решение..

При $a = 1$ прямая m содержит отрезок AB, то есть исходная система имеет бесконечное число решений.

При $1<a<2$ прямая m не пересекает отрезок AB, пересекает прямую l в точке, отличной от точки C, и пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в одной точке, отличной от точки C, то есть исходная система имеет три решения.

При $a<1$ или $a>2$ прямая m пересекает прямую l в одной точке и не пересекает дуги ω_1 и ω_2 и отрезок AB, то есть исходная система имеет одно решение.

Значит, исходная система имеет более двух решений при $1\le a<2$.

Ответ: $1\le a<2$.

Задание 18 № 513110

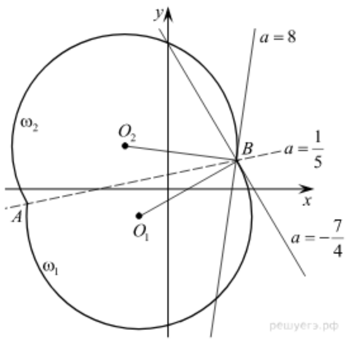
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-|x-5y+5|=52, \\ y-2=a(x-5). \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.



Рассмотрим два случая:

1) Если $x-5y+5\geq 0$, то получаем уравнение

$$x^2+5x+y^2-y-x+5y-5=52 \Leftrightarrow x^2+4x+y^2+4y-57=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+2)^2=65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(-2;\ -2)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

2) Если $x-5y+5\leq 0$, то получаем уравнение

$$x^2+5x+y^2-y+x-5y+5=52 \Leftrightarrow x^2+6x+y^2-6y-47=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-3)^2=65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2(-3;\ 3)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

Полученные окружности пересекаются в двух точках $A(-10;\ -1)$ и $B(5;\ 2)$, лежащих на прямой $x-5y+5=0$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B, во втором — дугу ω_2 с концами в тех же точках (см. рис.).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, которая проходит через точку B и угловой коэффициент которой равен a.

При $a=\frac{1}{5}$ прямая m проходит через точки A и B, то есть исходная система имеет два решения.

При $a=-\frac{7}{4}$ прямая m перпендикулярна прямой O_1B, угловой коэффициент которой равен $\frac{4}{7}$, значит, прямая m касается дуги ω_1 в точке B и пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых — точка B), то есть исходная система имеет два решения.

При $a=8$ прямая m перпендикулярна прямой O_2B, угловой коэффициент которой равен $-\frac{1}{8}$, значит, прямая m касается дуги ω_2 в точке B и пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых — точка B), то есть исходная система имеет два решения.

При $a<-\frac{7}{4}$ или $a>8$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке B и ещё в одной точке, отличной от точки A, то есть исходная система имеет три решения.

При $-\frac{7}{4}<a<\frac{1}{5}$ прямая m пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых — точка B) и не пересекает дугу ω_1 в точках, отличных от точки B, то есть исходная система имеет два решения.

При $\frac{1}{5}<a<8$ прямая m пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых — точка B) и не пересекает дугу ω_2 в точках, отличных от точки B, то есть исходная система имеет два решения.

Значит, исходная система имеет ровно два решения при $-\frac{7}{4}\leq a\leq 8$.

Ответ: $-\frac{7}{4}\leq a\leq 8$.

пример 10

Задание 18 № 519670

Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2|, \\ x - y = a \end{cases}$$

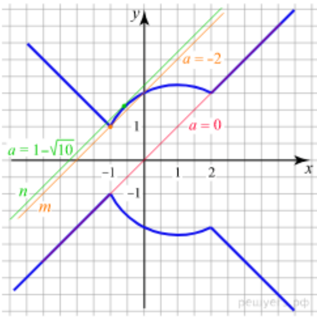
имеет более двух решений.

Решение.

Раскроем модуль: при $x > 2$ или $x < -1$, уравнение $y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2|$ принимает вид $y^2 = x^2$ $(*)$, при $-1 \le x \le 2$, его можно записать в виде $(x-1)^2 + y^2 = 5$ $(**)$.

На координатной плоскости уравнение (*) задает прямые $y = x$ или $y = -x$. Уравнение (**) задает окружность с центром в точке (1; 0) и радиусом $\sqrt{5}$. Тем самым, график первого уравнения исходной системы имеет вид, приведенный на рисунке синим цветом.

Графиком второго уравнения является семейство прямых $y = x - a$, получаемых сдвигом прямой $y = x$ на a единиц вдоль оси ординат. Система имеет более двух решений тогда и только тогда, когда графики построенных уравнений имеют более двух общих точек. Возможны два случая: графики уравнений имеют бесконечно много общих точек, что возможно при $a = 0$ (выделено на рисунке красным) или прямые $y = x - a$ лежат между прямыми m и n (см. рис.). Здесь прямая m проходит через точку (-1; 1), а прямая n является касательной к окружности.



Определим уравнение касательной, подставив $y = x - a$ в $(**)$.

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 2xa + a^2 = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 2(1+a)x + a^2 - 4 = 0.$$

Очевидно, что дискриминант этого уравнения должен равняться 0:

$$\frac{D}{4} = 1 + 2a + a^2 - 2a^2 + 8 = -a^2 + 2a + 9,$$

$$-a^2 + 2a + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 - \sqrt{10}, \\ a = 1 + \sqrt{10}. \end{array}\right.$$

Нам подходит меньший корень, так как больший корень сдвинет нашу прямую вниз. Это происходит потому, что знак перед a отрицательный. Подставив координаты точки (-1; 1) в уравнение прямой из второй строчки системы, получим, что $a = -2$.

Таким образом, получаем окончательный ответ $1 - \sqrt{10} < a < -2$; $a = 0$.

Ответ: $\left(1 - \sqrt{10}; -2\right) \cup \{0\}$.

пример 11

Задание 18 № 511415

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{4}{x}-2\right|=ax-1$$

на промежутке $(0,+\infty)$ имеет более двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x)=ax-1$ и $g(x)=\left|\frac{4}{x}-2\right|$. Исследуем уравнение $f(x)=g(x)$ на промежутке $(0,+\infty)$.

При $a\le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(0,+\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a\le 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет решений на промежутке $(0,+\infty)$.

При $a>0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $(0,2]$, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $(0,2]$, причем решение будет существовать тогда и только тогда, когда, $f(2)\ge g(2)$, откуда получаем $a\cdot 2-1\ge 0$, то есть $a\ge\frac{1}{2}$.

На промежутке $(2,+\infty)$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $ax-1=2-\frac{4}{x}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2-3x+4=0$. Будем считать, что $a>0$, поскольку случай $a\le 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D=9-16a$, поэтому при $a>\frac{9}{16}$ это уравнение не имеет корней, при $a=\frac{9}{16}$ уравнение имеет единственный корень, при $0<a<\frac{9}{16}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2, то есть $0<a<\frac{9}{16}$, то больший корень $x_2=\frac{3+\sqrt{D}}{2a}>\frac{3}{2a}>2$, поэтому он принадлежит промежутку $(2,+\infty)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $(2,+\infty)$ тогда и только тогда, когда

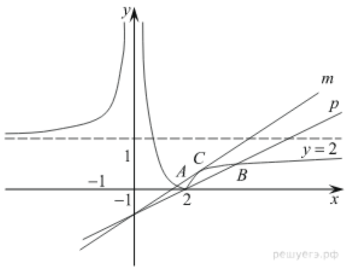
$$a(x_1-2)(x_2-2)=a\cdot(2)^2-3\cdot 2+4=4a-2>0,\text{ то есть } a>\frac{1}{2}.$$

Таким образом, исходное уравнение $\left|\frac{4}{x}-2\right|=ax-1$ имеет больше трех корней при $\frac{1}{2}<a<\frac{9}{16}$.

Ответ: $\frac{1}{2}<a<\frac{9}{16}$.

Приведем графическое решение.

Отметим, что при $a\le 0$ уравнение не имеет положительных корней, так как его левая часть неотрицательна, а правая отрицательна. Определим, для каких положительных a графики функций $y=\left|\frac{4}{x}-2\right|$ и $y=ax-1$ имеют более двух точек пересечения на области $x>0$.



Уравнение $y=ax-1$ задаёт семейство прямых, проходящих через точку $(0;\ -1)$. Если их угловой коэффициент меньше чем у прямой p или больше чем у прямой m (см. рис.), то на промежутке $(0;\ +\infty)$ графики будут иметь ровно одну общую точку. Если прямая совпадает с прямой p или с прямой m, то графики будут иметь ровно две общие точки. Графики имеют три общие точки, а исходное уравнение имеет три положительных решения, если прямые $y=ax-1$ лежат внутри острого угла, образованного прямыми p и m.

Найдём граничные значения параметров, соответствующие этим прямым.

Для прямой p:

$$y(2)=0\Leftrightarrow a\cdot 2-1=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Найдём значение параметра, соответствующее касанию. Имеем:

$$2-\frac{4}{x}=ax-1\Leftrightarrow 2x-4=ax^2-x\Leftrightarrow ax^2-3x+4=0.$$

Касательная к гиперболе имеет с ней единственную общую точку, поэтому дискриминант полученного квадратного уравнения должно быть равен нулю:

$$9-4\cdot a\cdot 4=0\Leftrightarrow a=\frac{9}{16}.$$

Итак, касанию соответствует значение параметра $a=\frac{9}{16}$.

При найденных значениях параметров прямая m пересекается с графиком функции $y=\left|\frac{4}{x}-2\right|$ в точках $A(2;\ 0)$ и $B(4;\ 1)$, а прямая p касается графика в точке $C\left(\frac{8}{3};\ \frac{1}{2}\right)$. Заметим, что точка C действительно лежит левее точки B, в силу того, что график выпукл вверх, и что ордината точки C положительна, иначе оказалось бы, что наш рисунок неверен и потребовалось рассмотреть соответствующую конфигурацию.

Тем самым, искомыми значениями параметра являются $\frac{1}{2}<a<\frac{9}{16}$.

Ответ: $\frac{1}{2}<a<\frac{9}{16}$.