Индивидуальное задание №8 «Методика решения задач по элементам теории чисел»

Вариант 1. В целочисленной последовательности $a_1 = 3$, a_2, …, a_{n-1}, a_n=109, состоящей из целых чисел, сумма любых двух последовательных членов последовательности равна 1, или 3, или 13. А) Приведите пример такой последовательности. Б) Может ли такая последовательность состоять из 32 членов? В) Какое наименьшее число членов может быть в такой последовательности?

Вариант 2. На доске написано более 45, но менее 63 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел, равно 5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 18, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -9. А) Сколько чисел написано на доске? Б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? В) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Вариант 3. На доске написано более 50, но менее 60 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел, равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 5, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -10. А) Сколько чисел написано на доске? Б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? В) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Вариант 4. На доске написаны числа 10, 11, 12, 13, …, 50. За один ход разрешается стереть произвольные четыре числа таких, что их сумма больше 134, и не равна ни одной из сумм четверок чисел, стертых на предыдущих ходах. А) можно ли сделать 5 ходов по описанным правилам? Если да, то приведите пример этих ходов. Б) можно ли сделать 10 ходов по описанным правилам? В) Какое наибольшее число ходов можно делать?

Вариант 5. В музыкальной школе в классах фортепиано и скрипки обучается некоторое число детей, при этом кто-то из них обучается и в классе фортепиано, и в классе скрипки. Известно, что в классе фортепиано доля мальчиков составляет не более ¼, а в классе скрипки доля мальчиков составляет не более 5/14. А) Может ли в классах фортепиано и скрипки обучаться 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в этих классах обучается 25 детей? Б) какое наибольшее число мальчиков может обучаться в классах фортепиано и скрипки, если дополнительно известно, что всего в этих классах обучается 25 детей? В) какую наименьшую долю могут составлять девочки от числа обучающихся в классах фортепиано и скрипки при отсутствии дополнительного условия пунктов а) и б)?

Вариант 6. На доске написано 35 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. В место каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стерли. А) могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14? Б) могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13? В) найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Вариант 7. В центре детского творчества бальным танцам и вокалу обучается некоторое число детей, при этом кто-то из них обучается и бальным танцам, и вокалу. Известно, что среди обучающихся бальным танцам доля девочек составляет не менее 3/5, а среди обучающихся вокалу девочек составляет не менее 4/7. А) Какое наименьшее число девочек может обучаться бальным танцам и вокалу, если дополнительно известно, что бальным танцам и вокалу обучается 50 детей? В) какую наименьшую долю могут составлять мальчики от числа обучающихся бальным танцам и вокалу при отсутствии дополнительного условия пункта а) ?

Вариант 8. А) Приведите пример трехзначного числа, у которого ровно 7 натуральных делителей. Б) Существует ли такое трехзначное число, у которого ровно 21 натуральный делитель? В) Сколько существует таких трехзначных чисел, у которых ровно 18 натуральных делителей?

Вариант 9. В целочисленной последовательности $a_1 = 2$, a_2, …, a_{n-1}, $a_n=336$, состоящей из целых чисел, сумма любых двух последовательных членов последовательности равна 5, или 7, или 29. А) Приведите пример такой последовательности. Б) Может ли такая последовательность состоять из 812 членов? В) Какое наименьшее число членов может быть в такой последовательности?

Вариант 10. А) Приведите пример четырехзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа. Б) Существует ли такое четырехзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа? В) Найдите все натуральные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

Вариант 11. А) Приведите пример трехзначного числа, у которого ровно 5 натуральных делителей. Б) Существует ли такое трехзначное число, у которого ровно 15 натуральных делителей? В) Сколько существует таких трехзначных чисел, у которых ровно 20 натуральных делителей?

Вариант 12. На доске написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. В место каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стерли. А) могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14? Б) могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13? В) найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Вариант 13. На доске написано более 35, но менее 49 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел, равно 5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 14, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -7. А) сколько чисел написано на доске? Б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? В) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Вариант 14. Изначально на доске написаны числа 4 и 6. За один ход два числа, написанные на доске, стираются, а вместо них пишутся два других, одно из которых является суммой только что стертых чисел плюс один, а второе равно 2x+2, где x – одно из только что стертых чисел. А) может ли за несколько ходов на доске оказаться число 51? Б) может ли после 200 ходов одно из двух чисел, написанных на доске оказаться числом 1999? В) Сделали 719 ходов, причем на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

Вариант 15. На доске написаны числа 2, 5, 8, 11, …, 74. За один ход разрешается стереть произвольные три числа таких, что их сумма больше 137, и не равна ни одной из сумм троек чисел, стертых на предыдущих ходах. А) можно ли сделать 4 хода по описанным правилам? Если да, то приведите пример этих ходов. Б) можно ли сделать 8 ходов по описанным правилам? В) какое наибольшее число ходов можно делать?

Вариант 16. На доске написано более 55, но менее 65 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел, равно 7, среднее арифметическое всех положительных из них равно 15, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -5. А) сколько чисел написано на доске? Б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? В) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Вариант 17. Каждый из группы учащихся сходил в кино или театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, в театре мальчиков было не более 1/3 от общего числа группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более 7/19 от общего числа учащихся группы, посетивших кино. А) могло ли быть в группе 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 26 учащихся? Б) какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 26 учащихся? В) какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Вариант 18. А) Приведите пример натурального числа, которое в 15 раз больше суммы своих цифр. Б) Существует ли такое натуральное число, которое в 21 раз больше суммы своих цифр? В) Найдите все натуральные числа, которые в 15873 раза больше суммы своих цифр?

Вариант 19. На доске написано более 45, но менее 63 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел, равно 5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 18, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -9. А) Сколько чисел написано на доске? Б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? В) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Вариант 20. В целочисленной последовательности $a_1 = 3$, a_2, …, a_{n-1}, $a_n=109$, состоящей из целых чисел, сумма любых двух последовательных членов последовательности равна 1, или 3, или 13. А) Приведите пример такой последовательности. Б) Может ли такая последовательность состоять из 32 членов? В) Какое наименьшее число членов может быть в такой последовательности?

Вариант 21. На доске написано более 45, но менее 63 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел, равно 5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 18, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -9. А) Сколько чисел написано на доске? Б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? В) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Вариант 22. На доске написано более 50, но менее 60 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел, равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 5, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -10. А) Сколько чисел написано на доске? Б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? В) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?