Обозначения:

$$u(x,y,z) = \{u,v,w\}$$

$$u_{i,j} = u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$(x_1,x_2,x_3) = (x,y,z)$$

$$U = \{U \quad V \quad W\} = \mathcal{F}[u]$$

$$Q = \mathcal{F}[q]$$

Формулы:

3.1

3.2.2. Математическая постановка

Установившийся режим колебаний означает, что зависимость всех характеристик задачи (перемещения, напряжения и др.) от времени t описывается множителем () . В силу линейности задачи данный множитель можно сократить и в дальнейшем работать только с комплексными амплитудами соответствующих величин, не оговаривая этого особо. Например, Re[u.(ic,y,2)e~U,t] – вектор перемещений точек среды. В дальнейшем работаем только с вектором $u(x,y,z) = \{u,v,w\}$, называя его также вектором перемещений (подробнее эти вопросы см. в КЗ).

Вектор перемещений характеризует отклонение каждой точки тела от начального положения, компоненты его и,у, ЬХ являются непрерывными функциями координат. Векторные величины здесь и далее обозначаются чертой сверху; предполагается, что векторы являются векторами-столбцами. Наряду с традиционными обозначениями в тех случаях, когда необходима тензорная запись, мы будем пользоваться цифровой индексацией координатных осей и соответствующих компонент векторов и тензоров: а={ае0а:а,ге3}, й.={цА,и.г,из} и т. п.

Механическое состояние упругого тела характеризуется компонентами тензоров деформаций и напряжений бу /9/, которые в линейной теории упругости связаны уравнениями движения

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = F_i + \sum_j \vartheta_{ij,j}\,, i = 1,2,\ldots \quad (3.1)$$

соотношениями обобщённого закона Гука

$$\vartheta_{ij} = c_{ij}^{mn} \varepsilon_{mn} \quad (3.2)$$

и геометрическими соотношениями Коши

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad (3.3)$$

Здесь F = 1^, Fj} - вектор объёмных сил, Р — плотность, - коэффициенты упругости материала. Как обычно в тензорной записи предполагается суммирование по одинаковым индексам и используется обозначение для производных по координатам в виде

Вектор напряжений Т={*£,: ,Та/Е“3^ f возникающих в упругом теле на некоторой элементарной площадке с нормалью η·={.η1,π»»π3}» выражается через компоненты тензора напряжений

$$\tau_i = \sum_j \vartheta_{ij} n_j\,, i, j = 1,2,3 \quad (3.4)$$

В изотропном случае, когда упругие свойства тела одинаковы во всех направлениях, закон Гука (3.2) выражается только через две независимые константы \ f и, (константы Ляме):

$$\boxed{\vartheta_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\lambda(2u_{11} + 2u_{22} + 2u_{33})\delta_{ij} + 2\mu\frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \boxed{= \lambda\delta_{ij} * div(u) + \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)} \quad (3.5)$$

Учитывая (3.3)-(3,5), напряжения Т можно выразить через перемещения f ZL в виде É « T· ű. , где Т - линейный дифференциальный оператор. В изотропном случае

$$\boxed{\tau_i = \sum_j \vartheta_{ij} n_j} = \sum_j \left(\lambda \delta_{ij} * div(u) + \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)\right) n_j = \lambda * div(u) n_i + \mu \sum_j \left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) n_j$$

Так как

$$\tau_i - \lambda * div(u) n_i - 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} - \mu * \left(n \times rot(u)\right)_i = \lambda * div(u) n_i + \mu \sum_j \left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) n_j - \lambda * div(u) n_i - 2\mu \begin{matrix} (\nabla u, n) \\ (\nabla v, n) \\ (\nabla w, n) \end{matrix} - \mu \begin{pmatrix} & u_{32} - u_{23} \\ n \times & u_{13} - u_{31} \\ & u_{21} - u_{12} \end{pmatrix}_i = \mu \sum_j \left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) n_j - 2\mu \begin{pmatrix} u_{11} n_1 + u_{12} n_2 + u_{13} n_3 \\ u_{21} n_1 + u_{22} n_2 + u_{23} n_3 \\ u_{31} n_1 + u_{32} n_2 + u_{33} n_3 \end{pmatrix}_i -$$

$$\mu \begin{pmatrix} n_2(u_{21} - u_{12}) - n_3(u_{13} - u_{31}) \\ -n_1(u_{21} - u_{12}) + n_3(u_{32} - u_{23}) \\ n_1(u_{13} - u_{31}) - n_2(u_{32} - u_{23}) \end{pmatrix}_i = \mu \left(\sum_j \left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) n_j - 2 \begin{pmatrix} u_{11} n_1 + u_{12} n_2 + u_{13} n_3 \\ u_{21} n_1 + u_{22} n_2 + u_{23} n_3 \\ u_{31} n_1 + u_{32} n_2 + u_{33} n_3 \end{pmatrix}_i - \begin{pmatrix} n_2 u_{21} - n_2 u_{12} - n_3 u_{13} + n_3 u_{31} \\ -n_1 u_{21} + n_1 u_{12} + n_3 u_{32} - n_3 u_{23} \\ n_1 u_{13} - n_1 u_{31} - n_2 u_{32} + n_2 u_{23} \end{pmatrix}_i \right) = \mu \begin{pmatrix} u_{12} n_2 + u_{21} n_2 + u_{13} n_3 + u_{31} n_3 + 2u_{11} n_1 \\ u_{12} n_1 + u_{21} n_1 + u_{23} n_3 + u_{32} n_3 + 2u_{22} n_2 \\ u_{13} n_1 + u_{31} n_1 + u_{23} n_2 + u_{32} n_2 + 2u_{33} n_3 \end{pmatrix}_i -$$

$$2\mu \begin{pmatrix} u_{11} n_1 + u_{12} n_2 + u_{13} n_3 \\ u_{21} n_1 + u_{22} n_2 + u_{23} n_3 \\ u_{31} n_1 + u_{32} n_2 + u_{33} n_3 \end{pmatrix}_i - \mu \begin{pmatrix} n_2 u_{21} + n_3 u_{31} \\ n_1 u_{12} + n_3 u_{32} \\ n_1 u_{13} + n_2 u_{23} \end{pmatrix}_i + \mu \begin{pmatrix} n_2 u_{12} + n_3 u_{13} \\ n_1 u_{21} + n_3 u_{23} \\ n_1 u_{31} + n_2 u_{32} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Поэтому

$$\boxed{\tau = Tu \equiv \lambda * div(u)n + 2\mu\frac{\partial u}{\partial n} + \mu * \left(n \times rot(u)\right)} = \lambda n(u_{11} + u_{22} + u_{33}) + 2\mu\begin{pmatrix} u_{11}n_1 + u_{12}n_2 + u_{13}n_3 \\ u_{21}n_1 + u_{22}n_2 + u_{23}n_3 \\ u_{31}n_1 + u_{32}n_2 + u_{33}n_3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} n_2u_{21} - n_2u_{12} - n_3u_{13} + n_3u_{31} \\ -n_1u_{21} + n_1u_{12} + n_3u_{32} - n_3u_{23} \\ n_1u_{13} - n_1u_{31} - n_2u_{32} + n_2u_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \left| e = div(u) = u_{11} + u_{22} + u_{33} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right| = \lambda en + \mu\begin{pmatrix} 2u_{11}n_1 + u_{12}n_2 + u_{13}n_3 + n_2u_{21} + n_3u_{31} \\ u_{21}n_1 + 2u_{22}n_2 + u_{23}n_3 + n_1u_{12} + n_3u_{32} \\ u_{31}n_1 + u_{32}n_2 + 2u_{33}n_3 + n_1u_{13} + n_2u_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda e + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} n + \mu\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} n = \left| \begin{cases} \vartheta_x = \lambda e + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ \vartheta_y = \lambda e + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ \vartheta_z = \lambda e + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}, \begin{cases} \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \end{cases} \right|$$

$$= \begin{pmatrix} \vartheta_x & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta_y & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_z \end{pmatrix} n + \begin{pmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & 0 \end{pmatrix} n \boxed{= \begin{pmatrix} \vartheta_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \vartheta_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \vartheta_z \end{pmatrix} n}$$

Для установившихся гармонических колебаний инерционный членР w в (3.1) принимает вид — рогй. Подстановка соотношений(3.5), (3.3) в уравнения (3.1) приводит к уравнениям относительно вектора перемещений ΰ , называемым уравнениями Ляме /9/

Учитывая, что $\boxed{\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = -\rho\omega^2 u}$, подставим 3.3 и 3.5 в 3.1:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=F_i+\sum_j \vartheta_{ij,j}\sim-\rho\omega^2 u=F+\sum_j\frac{\partial\left(\lambda\delta_{ij}*div(u)+\mu\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)\right)}{\partial x_j}=F+\mu\sum_j\frac{\partial\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)}{\partial x_j}+\lambda\begin{pmatrix}\frac{\partial div(u)}{\partial x}\\ \frac{\partial div(u)}{\partial y}\\ \frac{\partial div(u)}{\partial z}\end{pmatrix}=F+\lambda\nabla\, div(u)+\mu\begin{pmatrix}2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}\end{pmatrix}=$$

$$F+(\mu+\lambda)\nabla div(u)+\mu\Delta u\sim\boxed{F+(\mu+\lambda)\nabla div(u)+\mu\Delta u+\rho w^2 u=0}\sim\begin{cases}F_x+(\mu+\lambda)*\frac{\partial e}{\partial \mathrm{x}}\quad+\mu\Delta u+\rho\omega^2 u=0\\ F_y+(\mu+\lambda)*\frac{\partial e}{\partial \mathrm{y}}\quad+\mu\Delta v+\rho\omega^2 v=0\\ F_z+(\mu+\lambda)*\frac{\partial e}{\partial \mathrm{z}}\quad+\mu\Delta w+\rho\omega^2 w=0\end{cases}\sim|F\equiv$$

$$0|\sim\boxed{\begin{cases}(\mu+\lambda)*\frac{\partial e}{\partial \mathrm{x}}\quad+\mu\Delta u+\rho\omega^2 u=0\\ (\mu+\lambda)*\frac{\partial e}{\partial \mathrm{y}}\quad+\mu\Delta v+\rho\omega^2 v=0\\ (\mu+\lambda)*\frac{\partial e}{\partial \mathrm{z}}\quad+\mu\Delta w+\rho\omega^2 w=0\end{cases}}(3.9)$$

+граничные условия 3.10, 3.11:

$$\boxed{\tau=\{\tau_{xz}\quad\tau_{zy}\quad\vartheta_z\}|_{z=0}=\begin{cases}q(x,y),(x,y)\in C\\ 0,(x,y)\notin C\end{cases}}$$

$u\to 0$ при $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty$

Итак, относительно неизвестных перемещений й имеем краевую задачу (3.9)-(3.п).

3.2

Применим преобразование Фурье к 3.9 и 3.10:

$$\begin{cases}\mathcal{F}\left[(\mu+\lambda)*\dfrac{\partial e}{\partial \mathrm{x}}+\mu\Delta u+\rho\omega^2 u\right]=0\\ \mathcal{F}\left[(\mu+\lambda)*\dfrac{\partial e}{\partial \mathrm{y}}+\mu\Delta v+\rho\omega^2 v\right]=0\\ \mathcal{F}\left[(\mu+\lambda)*\dfrac{\partial e}{\partial \mathrm{z}}+\mu\Delta w+\rho\omega^2 w\right]=0\end{cases}\sim\begin{cases}(\mu+\lambda)*\mathcal{F}\left[\dfrac{\partial e}{\partial \mathrm{x}}\right]+\mu\mathcal{F}[\Delta u]+\rho\omega^2\mathcal{F}[u]=0\\ (\mu+\lambda)*\mathcal{F}\left[\dfrac{\partial e}{\partial \mathrm{y}}\right]+\mu\mathcal{F}[\Delta v]+\rho\omega^2\mathcal{F}[v]=0\\ (\mu+\lambda)*\dfrac{\partial\mathcal{F}[e]}{\partial \mathrm{z}}+\mu\mathcal{F}[\Delta w]+\rho\omega^2\mathcal{F}[w]=0\end{cases}\sim$$

$$\begin{cases}(\mu+\lambda)*(-i\alpha_1)\mathcal{F}[e\,]+\mu(-\alpha_1^2U-\alpha_2^2U+U``)+\rho\omega^2\mathrm{U}=0\\ (\mu+\lambda)*(-i\alpha_2)\mathcal{F}[e\,]+\mu(-\alpha_1^2V-\alpha_2^2V+V``)+\rho\omega^2V=0\\ (\mu+\lambda)*\dfrac{\partial\mathcal{F}[e]}{\partial \mathrm{z}}+\mu(-\alpha_1^2W-\alpha_2^2W+W``)+\rho\omega^2W=0\end{cases}\sim$$

$$\begin{cases}(\mu+\lambda)*(-i\alpha_1)(-i\alpha_1U-i\alpha_2V+W`)+\mu(-\alpha_1^2U-\alpha_2^2U+U``)+\rho\omega^2\mathrm{U}=0\\ (\mu+\lambda)*(-i\alpha_2)(-i\alpha_1U-i\alpha_2V+W`)+\mu(-\alpha_1^2V-\alpha_2^2V+V``)+\rho\omega^2V=0\\ (\mu+\lambda)*(-i\alpha_1U`-i\alpha_2V`+W``)+\mu(-\alpha_1^2W-\alpha_2^2W+W``)+\rho\omega^2W=0\end{cases}\sim$$

$$\boxed{\begin{cases}(\mu+\lambda)(-\alpha_1^2U-\alpha_1\alpha_2V-i\alpha_1W`)+\mu(-\alpha_1^2U-\alpha_2^2U+U``)+\rho\omega^2U=0\\ (\mu+\lambda)(-\alpha_2^2V-\alpha_1\alpha_2U-i\alpha_2W`)+\mu(-\alpha_1^2V-\alpha_2^2V+V``)+\rho\omega^2V=0\\ (\mu+\lambda)(W``+i\alpha_2V`-i\alpha_1U`)+\mu(-\alpha_1^2W-\alpha_2^2W+W``)+\rho\omega^2W=0\end{cases}}\ (3.12)$$

Из 3.10 с учётом 3.7:

$$\begin{cases}\mathcal{F}[\tau_{xz}]=\mathcal{F}[q_1]\\ \mathcal{F}[\tau_{zy}]=\mathcal{F}[q_2]\\ \mathcal{F}[\vartheta_z]=\mathcal{F}[q_3]\end{cases}\sim\begin{cases}\mu\mathcal{F}[\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)]=\mathcal{F}[q_1]\\ \mu\mathcal{F}[\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)]=\mathcal{F}[q_2]\\ \mathcal{F}[\lambda e+2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z}]=\mathcal{F}[q_3]\end{cases}\sim$$

$$\boxed{\begin{cases}\mu(U`-i\alpha_1W)=Q_1\\ \mu(V`-i\alpha_2W)=Q_2\\ \lambda(-i\alpha_1U-i\alpha_2V)+(2\mu+\lambda)W`=Q_3\end{cases}}\ (3.13)$$

Возьмём замену

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\ v = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - \dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ w = w \end{cases} \quad (3.14)$$

В трансформантах:

$$\begin{cases} U = -i\alpha_1\Phi - i\alpha_2\Psi \\ V = -i\alpha_2\Phi + i\alpha_1\Psi \\ W = W, \Phi = \mathcal{F}[\varphi], \Psi = \mathcal{F}[\psi] \end{cases} \quad (3.15)$$

Подставим 3.15 в 3.12:

$$\begin{cases} (\mu+\lambda)(-\alpha_1^2(-i\alpha_1\Phi - i\alpha_2\Psi) - \alpha_1\alpha_2(-i\alpha_2\Phi + i\alpha_1\Psi) - i\alpha_1 W`) + \mu(-\alpha_1^2(-i\alpha_1\Phi - i\alpha_2\Psi) - \alpha_2^2(-i\alpha_1\Phi - i\alpha_2\Psi) + (-i\alpha_1\Phi - i\alpha_2\Psi)``) + \rho\omega^2(-i\alpha_1\Phi - i\alpha_2\Psi) = 0 \\ (\mu+\lambda)(-\alpha_2^2(-i\alpha_2\Phi + i\alpha_1\Psi) - \alpha_1\alpha_2(-i\alpha_1\Phi - i\alpha_2\Psi) - i\alpha_2 W`) + \mu(-\alpha_1^2(-i\alpha_2\Phi + i\alpha_1\Psi) - \alpha_2^2(-i\alpha_2\Phi + i\alpha_1\Psi) + (-i\alpha_2\Phi + i\alpha_1\Psi)``) + \rho\omega^2(-i\alpha_2\Phi + i\alpha_1\Psi) = 0 \Rightarrow \\ (\mu+\lambda)(W`` + i\alpha_2(-i\alpha_2\Phi + i\alpha_1\Psi)` - i\alpha_1(-i\alpha_1\Phi - i\alpha_2\Psi)`) + \mu(-\alpha_1^2 W - \alpha_2^2 W + W``) + \rho\omega^2 W = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} -i\alpha_1\mu\Phi`` + i\alpha_2\mu\Psi`` - i(\mu+\lambda)\alpha_1 W` + i\alpha_1\big((2\mu+\lambda)\alpha^2 - \rho\omega^2\big)\Phi + \mathrm{i}\alpha_2(\mu\alpha^2 - \rho\omega^2)\Psi = 0 \\ -i\alpha_2\mu\Phi`` + i\alpha_1\mu\Psi`` - i(\mu+\lambda)\alpha_2 W` + i\alpha_2\big((2\mu+\lambda)\alpha^2 - \rho\omega^2\big)\Phi + \mathrm{i}\alpha_1(-\mu\alpha^2 + \rho\omega^2)\Psi = 0 \\ (2\mu+\lambda)W`` - (\mu+\lambda)\alpha^2\Phi` + (-\mu\alpha^2 + \rho\omega^2)W = 0 \\ \alpha^2 \equiv \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \end{cases}} \quad (3.16)$$

Далее:

$$\begin{cases} \alpha_1\big(-i\alpha_1\mu\Phi`` + i\alpha_2\mu\Psi`` - i(\mu+\lambda)\alpha_1 W` + i\alpha_1\big((2\mu+\lambda)\alpha^2 - \rho\omega^2\big)\Phi + \mathrm{i}\alpha_2(\mu\alpha^2 - \rho\omega^2)\Psi\big) + \alpha_2\big(-i\alpha_2\mu\Phi`` + i\alpha_1\mu\Psi`` - i(\mu+\lambda)\alpha_2 W` + i\alpha_2\big((2\mu+\lambda)\alpha^2 - \rho\omega^2\big)\Phi + \mathrm{i}\alpha_1(-\mu\alpha^2 + \rho\omega^2)\Psi\big) = 0 \\ \alpha_2\big(-i\alpha_1\mu\Phi`` + i\alpha_2\mu\Psi`` - i(\mu+\lambda)\alpha_1 W` + i\alpha_1\big((2\mu+\lambda)\alpha^2 - \rho\omega^2\big)\Phi + \mathrm{i}\alpha_2(\mu\alpha^2 - \rho\omega^2)\Psi\big) - \alpha_1\big(-i\alpha_2\mu\Phi`` + i\alpha_1\mu\Psi`` - i(\mu+\lambda)\alpha_2 W` + i\alpha_2\big((2\mu+\lambda)\alpha^2 - \rho\omega^2\big)\Phi + \mathrm{i}\alpha_1(-\mu\alpha^2 + \rho\omega^2)\Psi\big) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \big(-i\alpha_1^2\mu\Phi`` + i\alpha_1\alpha_2\mu\Psi`` - i(\mu+\lambda)\alpha_1^2 W` + i\alpha_1^2\big((2\mu+\lambda)\alpha^2 - \rho\omega^2\big)\Phi + \mathrm{i}\alpha_1\alpha_2(\mu\alpha^2 - \rho\omega^2)\Psi\big) + \big(-i_2\alpha_2^2\mu\Phi`` + i\alpha_1\alpha_2\mu\Psi`` - i(\mu+\lambda)\alpha_2^2 W` + i\alpha_2^2\big((2\mu+\lambda)\alpha^2 - \rho\omega^2\big)\Phi + \mathrm{i}\alpha_1\alpha_2(-\mu\alpha^2 + \rho\omega^2)\Psi\big) = 0 \\ \big(-i\alpha_1\alpha_2\mu\Phi`` + i\alpha_2^2\mu\Psi`` - i(\mu+\lambda)\alpha_1\alpha_2 W` + i\alpha_1\alpha_2\big((2\mu+\lambda)\alpha^2 - \rho\omega^2\big)\Phi + \mathrm{i}\alpha_2^2(\mu\alpha^2 - \rho\omega^2)\Psi\big) + \big(i\alpha_1\alpha_2\mu\Phi`` - i\alpha_1^2\mu\Psi`` + i(\mu+\lambda)\alpha_1\alpha_2 W` - i\alpha_1\alpha_2\big((2\mu+\lambda)\alpha^2 - \rho\omega^2\big)\Phi - \mathrm{i}\alpha_1^2(-\mu\alpha^2 + \rho\omega^2)\Psi\big) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-i\alpha_1^2\mu - i_2\alpha_2^2\mu)\Phi`` + \left(i\alpha_1^2\left((2\mu+\lambda)\alpha^2-\rho\omega^2\right) + i\alpha_2^2\left((2\mu+\lambda)\alpha^2-\rho\omega^2\right)\right)\Phi + (i\alpha_1\alpha_2\mu + i\alpha_1\alpha_2\mu)\Psi`` + \left(\mathrm{i}\alpha_1\alpha_2(\mu\alpha^2-\rho\omega^2) + \mathrm{i}\alpha_1\alpha_2(-\mu\alpha^2+\rho\omega^2)\right)\Psi + (-i(\mu+\lambda)\alpha_1^2 - i(\mu+\lambda)\alpha_2^2)W` = 0 \\ (-i\alpha_1\alpha_2\mu + i\alpha_1\alpha_2\mu)\Phi`` + \left(i\alpha_1\alpha_2\left((2\mu+\lambda)\alpha^2-\rho\omega^2\right) - i\alpha_1\alpha_2\left((2\mu+\lambda)\alpha^2-\rho\omega^2\right)\right)\Phi + (i\alpha_2^2\mu - i\alpha_1^2\mu)\Psi`` + \left(\mathrm{i}\alpha_2^2(\mu\alpha^2-\rho\omega^2) - \mathrm{i}\alpha_1^2(-\mu\alpha^2+\rho\omega^2)\right)\Psi + (-i(\mu+\lambda)\alpha_1\alpha_2 + i(\mu+\lambda)\alpha_1\alpha_2)W` = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu\Phi`` + (\mu+\lambda)W` + \left(\rho\omega^2 - (2\mu+\lambda)\alpha^2\right)\Phi + \mu\Psi`` + \left(-\mu\alpha^2+\rho\omega^2\right)\Psi = 0 \\ \mu\Psi`` + \left(-\mu\alpha^2+\rho\omega^2\right)\Psi = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \mu\Phi`` + (\mu+\lambda)W` + \left(\rho\omega^2 - (2\mu+\lambda)\alpha^2\right)\Phi = 0 \\ (2\mu+\lambda)W`` - (\mu+\lambda)\alpha^2\Phi` + \left(-\mu\alpha^2+\rho\omega^2\right)W = 0 \\ \mu\Psi`` + \left(-\mu\alpha^2+\rho\omega^2\right)\Psi = 0 \end{cases}} \quad (3.17, 3.18)$$

И для граничных условий:

$$\begin{cases} \mu\left((-i\alpha_1\Phi - i\alpha_2\Psi)` - i\alpha_1 W\right) = Q_1 \\ \mu\left((-i\alpha_2\Phi + i\alpha_1\Psi)` - i\alpha_2 W\right) = Q_2 \\ \lambda\left(-i\alpha_1(-i\alpha_1\Phi - i\alpha_2\Psi) - i\alpha_2(-i\alpha_2\Phi + i\alpha_1\Psi)\right) + (2\mu+\lambda)W` = Q_3 \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha_1\mu\left((-i\alpha_1\Phi - i\alpha_2\Psi)` - i\alpha_1 W\right) + \alpha_2\mu\left((-i\alpha_2\Phi + i\alpha_1\Psi)` - i\alpha_2 W\right) = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 \\ \alpha_2\mu\left((-i\alpha_1\Phi - i\alpha_2\Psi)` - i\alpha_1 W\right) - \alpha_1\mu\left((-i\alpha_2\Phi + i\alpha_1\Psi)` - i\alpha_2 W\right) = \alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2 \\ -\lambda\alpha^2\Phi + (2\mu+\lambda)W` = Q_3 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} \mu\left((-i\alpha_1^2\Phi - i\alpha_1\alpha_2\Psi)` - i\alpha_1^2 W\right) + \mu\left((-i\alpha_2^2\Phi + i\alpha_1\alpha_2\Psi)` - i\alpha_2^2 W\right) = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 \\ \mu\left((-i\alpha_1\alpha_2\Phi - i\alpha_2^2\Psi)` - i\alpha_1\alpha_2 W\right) - \mu\left((-i\alpha_1\alpha_2\Phi + i\alpha_1^2\Psi)` - i\alpha_1\alpha_2 W\right) = \alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2 \\ -\lambda\alpha^2\Phi + (2\mu+\lambda)W` = Q_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} -\lambda\alpha^2\Phi + (2\mu+\lambda)W` = Q_3 \\ -i\mu\alpha^2(\Phi` + W) = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 \\ -i\mu\alpha^2\Psi` = \alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2 \end{cases}} \quad (3.19, 3.20)$$

Пусть

$$Y = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi` \\ W \\ W` \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi` \end{pmatrix}$$

Тогда задачи 3.16-3.20 примут вид:

$$\begin{cases} \mu\Phi`` + (\mu+\lambda)W` + (\rho\omega^2 - (2\mu+\lambda)\alpha^2)\Phi = 0 \\ (2\mu+\lambda)W`` - (\mu+\lambda)\alpha^2\Phi` + (-\mu\alpha^2+\rho\omega^2)W = 0 \end{cases}$$

$$\mu\Psi`` + (-\mu\alpha^2+\rho\omega^2)\Psi = 0$$

$$\begin{cases} -\lambda\alpha^2\Phi + (2\mu+\lambda)W` = Q_3 \\ -i\mu\alpha^2(\Phi` + W) = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 \end{cases}$$

$$-i\mu\alpha^2\Psi` = \alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2$$

$$\sim \boxed{\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial z} = A * Y \\ \frac{\partial X}{\partial z} = BX \\ T * Y|_{z=0} = P \\ (lX)|_{z=0} = \alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2 \end{cases}} \quad (3.22)$$

Где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} a_{21} = \frac{\alpha^2(2\mu+\lambda)-\rho\omega^2}{\mu} \\ a_{24} = \frac{-(\mu+\lambda)}{\mu} \\ a_{42} = \frac{\alpha^2(\mu+\lambda)}{(2\mu+\lambda)} \\ a_{43} = \frac{\mu\alpha^2-\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)} \end{cases}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, b_1 = \frac{\mu\alpha^2-\rho\omega^2}{\mu}, T = \begin{pmatrix} -\lambda\alpha^2 & 0 & 0 & 2\mu+\lambda \\ 0 & -i\mu\alpha^2 & -i\mu\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} Q_3 \\ \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 \end{pmatrix}, l = \begin{pmatrix} 0 \\ -i\mu\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial Y}{\partial z} = A*Y \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} = BX \\ T*Y|_{z=0} = P \\ (lX)|_{z=0} = \alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \Phi` \\ \Phi`` \\ W` \\ W`` \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\alpha^2(2\mu+\lambda)-\rho\omega^2}{\mu} & 0 & 0 & \dfrac{-(\mu+\lambda)}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{\alpha^2(\mu+\lambda)}{(2\mu+\lambda)} & \dfrac{\mu\alpha^2-\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)} & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi` \\ W \\ W` \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Psi` \\ \Psi`` \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\mu\alpha^2-\rho\omega^2}{\mu} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi` \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\lambda\alpha^2 & 0 & 0 & 2\mu+\lambda \\ 0 & -i\mu\alpha^2 & -i\mu\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi` \\ W \\ W` \end{pmatrix} |_{z=0} = \begin{pmatrix} Q_3 \\ \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 \end{pmatrix} \\ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -i\mu\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi` \end{pmatrix}\right)|_{z=0} = \alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \Phi` \\ \Phi`` \\ W` \\ W`` \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi` \\ \dfrac{\alpha^2(2\mu+\lambda)-\rho\omega^2}{\mu}\Phi - \dfrac{(\mu+\lambda)W`}{\mu} \\ W` \\ \dfrac{\alpha^2(\mu+\lambda)}{(2\mu+\lambda)}\Phi + \dfrac{\mu\alpha^2-\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)}W \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Psi` \\ \Psi`` \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi` \\ \dfrac{\mu\alpha^2-\rho\omega^2}{\mu}\Psi` \end{pmatrix} \\ -\lambda\alpha^2\Phi + (2\mu+\lambda)W` = Q_3 \\ -i\mu\alpha^2(\Phi` + W) = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 \\ -i\mu\alpha^2\Psi` = \alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2 \end{array}\right.$$

3.3

3.3. Построение общего решения полученных систем

Итак, имеем две краевые задачи (3.22) для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Общее решение таких систем в случае отсутствия кратных собственных значений может быть выписано в виде

$Y = \sum_{k=1}^{N} t_k * m_k e^{\gamma_k z}$(3.23)

здесь N - размерность системы, - собственные значения, а тк соответствующие им собственные векторы матрицы системы, -неизвестные константы, определяемые из N граничных условий. Конкретно для первой задачи N=4,

$\gamma_k\colon \det(A - \gamma_k E) = 0$(3.24)

$m_k\colon (A - \gamma_k E) m_k = 0$(3.25)

$X = \sum_{k=1}^{2} s_k * n_k e^{\delta_k z}$(3.26)

$\delta_k: \det(B - \delta_k E) = 0$(3.27)

$n_k: (B - \delta_k E) m_k = 0$(3.28)

Найдём вид собственных значений и векторов из уравнений (3.24), (3.25) И (3.27), (3.28).

I. Раскроем определитель (3.24):

$$\boxed{\det(A - \gamma E) = \begin{vmatrix} -\gamma & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & -\gamma & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & -\gamma & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & -\gamma \end{vmatrix}} = -\gamma \begin{vmatrix} -\gamma & 0 & a_{24} \\ 0 & -\gamma & 1 \\ a_{42} & a_{43} & -\gamma \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 1 \\ a_{42} & a_{43} & -\gamma \end{vmatrix} = (-\gamma)(-\gamma^3 + \gamma a_{24} a_{42} + \gamma a_{43}) - a_{21}(\gamma^2 - a_{43})$$

$$= \gamma^4 - \gamma^2 a_{24} a_{42} - \gamma^2 a_{43} - \gamma^2 a_{21} + a_{21} a_{43} \boxed{= \gamma^4 - (a_{24} a_{42} + a_{21} + a_{43})\gamma^2 + a_{21} a_{43} = 0}$$

Причём

$$\boxed{a_{24} a_{42} + a_{21} + a_{43} =} \frac{-(\mu + \lambda)}{\mu} \frac{\alpha^2 (\mu + \lambda)}{(2\mu + \lambda)} + \frac{\alpha^2 (2\mu + \lambda) - \rho\omega^2}{\mu} + \frac{\mu\alpha^2 - \rho\omega^2}{(2\mu + \lambda)}$$

$$= \frac{1}{\mu(2\mu + \lambda)} \left(-\alpha^2 (\mu + \lambda)^2 + (2\mu + \lambda)(\alpha^2 (2\mu + \lambda) - \rho\omega^2) + \mu(\mu\alpha^2 - \rho\omega^2)\right)$$

$$= \frac{1}{\mu(2\mu + \lambda)} (-\alpha^2 \mu^2 - 2\alpha^2 \mu\lambda - \alpha^2 \lambda^2 + 4\alpha^2 \mu^2 + 2\alpha^2 \mu\lambda - 2\mu\rho\omega^2 + 2\alpha^2 \mu\lambda + \alpha^2 \lambda^2 - \lambda\rho\omega^2 + \alpha^2 \mu^2 - \mu\rho\omega^2)$$

$$= \frac{1}{\mu(2\mu + \lambda)} (4\alpha^2 \mu^2 + 2\alpha^2 \mu\lambda - 2\mu\rho\omega^2 - \lambda\rho\omega^2 - \mu\rho\omega^2) = \frac{1}{\mu(2\mu + \lambda)} (2\mu\alpha^2 (2\mu + \lambda) - \mu\rho\omega^2 - (2\mu + \lambda)\rho\omega^2) = 2\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{(2\mu + \lambda)} - \frac{\rho\omega^2}{\mu}$$

$$= \left| \chi_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{(2\mu + \lambda)}, \chi_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu} \right| = 2\alpha^2 - \chi_1^2 - \chi_2^2 = \left| \vartheta_n = \sqrt{\alpha^2 - \chi_n^2} \right| = \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2$$

$$a_{21}a_{43} = \frac{\alpha^2(2\mu+\lambda)-\rho\omega^2}{\mu}\frac{\mu\alpha^2-\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)} = \frac{\alpha^2(2\mu+\lambda)-\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)}\frac{\mu\alpha^2-\rho\omega^2}{\mu} = (\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)})(\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu}) = (\alpha^2-\chi_1^2)(\alpha^2-\chi_2^2) = \vartheta_1^2\vartheta_2^2$$

В новых обозначениях у-е принимает вид:

$$\gamma^4 - (\vartheta_1^2+\vartheta_2^2)\gamma^2 + \vartheta_1^2\vartheta_2^2 = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} \gamma_1^2+\gamma_2^2 = \vartheta_1^2+\vartheta_2^2 \\ \gamma_1^2\gamma_2^2 = \vartheta_1^2\vartheta_2^2 \end{matrix} \Longrightarrow \gamma = \pm\vartheta_1, \pm\vartheta_2 \quad (3.30)$$

Распишем систему 3.25:

$$\overline{m_k} = \{m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad m_4\}$$

$$(A-\gamma_k E)m_k = 0 \sim \begin{pmatrix} -\gamma_k & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & -\gamma_k & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & -\gamma_k & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & -\gamma_k \end{pmatrix} m_k =$$

$$0 \sim \begin{cases} -\gamma_k m_1 + m_2 = 0 \\ a_{21}m_1 - \gamma_k m_2 + a_{24}m_4 = 0 \\ -\gamma_k m_3 + m_4 = 0 \\ a_{42}m_2 + a_{43}m_3 - \gamma_k m_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} m_2 = \gamma_k m_1 \\ m_4 = \gamma_k m_3 \\ (a_{21}-\gamma_k^2)m_1 + a_{24}\gamma_k m_3 = 0 \\ a_{42}\gamma_k m_1 + (a_{43}-\gamma_k^2)m_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} m_2 = \gamma_k m_1 \\ m_4 = \gamma_k m_3 \\ \left(\frac{\alpha^2(2\mu+\lambda)-\rho\omega^2}{\mu} - \gamma_k^2\right)m_1 + \frac{-(\mu+\lambda)}{\mu}\gamma_k m_3 = 0 \quad (3.31) \\ \frac{\alpha^2(\mu+\lambda)}{(2\mu+\lambda)}\gamma_k m_1 + \left(\frac{\mu\alpha^2-\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)} - \gamma_k^2\right)m_3 = 0 \end{cases}$$

Уравнения (3.31) в силу (3.24) линейно зависимы, пользоваться можно только одним из них, зафиксировав одно из неизвестных и выразив остальные через него.

$$\begin{cases} m_2 = \gamma_k m_1 \\ m_4 = \gamma_k m_3 \\ \frac{\alpha^2(\mu+\lambda)}{(2\mu+\lambda)}\gamma_k m_1 + \left(\frac{\mu\alpha^2-\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)} - \gamma_k^2\right)m_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} m_2 = \gamma_k m_1 \\ m_4 = \gamma_k m_3 \\ \frac{\alpha^2(\mu+\lambda)}{(2\mu+\lambda)}\gamma_k m_1 = \left(\gamma_k^2 - \frac{\mu\alpha^2-\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)}\right)m_3 \end{cases} \sim \begin{cases} m_2 = \gamma_k m_1 \\ m_4 = \gamma_k m_3 \\ \alpha^2(\mu+\lambda)\gamma_k m_1 = \left(\gamma_k^2(2\mu+\lambda) - \mu\alpha^2 + \rho\omega^2\right)m_3 \end{cases}$$

Для различных, к имеем

$$\gamma_1 = \vartheta_1, m_1 = 1 \Longrightarrow \alpha^2(\mu+\lambda)\vartheta_1 = (\vartheta_1^2(2\mu+\lambda) - \mu\alpha^2 + \rho\omega^2)m_3 \Longrightarrow m_3 = \frac{\alpha^2(\mu+\lambda)\vartheta_1}{(\vartheta_1^2(2\mu+\lambda) - \mu\alpha^2 + \rho\omega^2)} = \frac{\alpha^2(\mu+\lambda)\sqrt{\frac{\alpha^2(2\mu+\lambda)-\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)}}}{\left(\frac{\alpha^2(2\mu+\lambda)-\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)}(2\mu+\lambda) - \mu\alpha^2 + \rho\omega^2\right)}$$

$$= \frac{\alpha^2(\mu+\lambda)\sqrt{\frac{\alpha^2(2\mu+\lambda)-\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)}}}{(\alpha^2(2\mu+\lambda) - \mu\alpha^2)} = \frac{(\mu+\lambda)\sqrt{\frac{\alpha^2(2\mu+\lambda)-\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)}}}{(2\mu+\lambda-\mu)} = \sqrt{\frac{\alpha^2(2\mu+\lambda)-\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)}} = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)}} = \vartheta_1 \Longrightarrow \overline{m_1} = \{1 \quad \vartheta_1 \quad \vartheta_1 \quad \vartheta_1^2\}$$

$$\gamma_2 = -\vartheta_1, m_1 = 1 \Longrightarrow \alpha^2(\mu+\lambda)(-\vartheta_1) = (\vartheta_1^2(2\mu+\lambda) - \mu\alpha^2 + \rho\omega^2)m_3 \Longrightarrow m_3 = \frac{\alpha^2(\mu+\lambda)(-\vartheta_1)}{(\vartheta_1^2(2\mu+\lambda) - \mu\alpha^2 + \rho\omega^2)} = -\frac{\alpha^2(\mu+\lambda)\vartheta_1}{(\vartheta_1^2(2\mu+\lambda) - \mu\alpha^2 + \rho\omega^2)}$$

$$= -\sqrt{\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)}} = -\vartheta_1 \Longrightarrow \overline{m_2} = \{1 \quad -\vartheta_1 \quad -\vartheta_1 \quad \vartheta_1^2\}$$

$$\gamma_3 = \vartheta_2, m_3 = \alpha^2 \Longrightarrow \alpha^2(\mu+\lambda)\vartheta_2 m_1 = (\vartheta_2^2(2\mu+\lambda) - \mu\alpha^2 + \rho\omega^2)\alpha^2 \Longrightarrow m_1 = \frac{(\vartheta_2^2(2\mu+\lambda) - \mu\alpha^2 + \rho\omega^2)\alpha^2}{\alpha^2(\mu+\lambda)\vartheta_2} = \frac{\left(\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu}\right)(2\mu+\lambda) - \mu\alpha^2 + \rho\omega^2}{(\mu+\lambda)\sqrt{\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\alpha^2\mu - \rho\omega^2}{\mu}\right)(2\mu+\lambda) - \mu\alpha^2 + \rho\omega^2}{(\mu+\lambda)\sqrt{\frac{\alpha^2\mu - \rho\omega^2}{\mu}}} = \frac{\left(\frac{\alpha^2\mu - \rho\omega^2}{\mu}\right)(\mu+\lambda)}{(\mu+\lambda)\sqrt{\frac{\alpha^2\mu - \rho\omega^2}{\mu}}} + \frac{\mu\left(\frac{\alpha^2\mu - \rho\omega^2}{\mu}\right) - \mu\alpha^2 + \rho\omega^2}{(\mu+\lambda)\sqrt{\frac{\alpha^2\mu - \rho\omega^2}{\mu}}} = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu}} = \vartheta_2 \Longrightarrow \overline{m_3}$$
$$= \{\vartheta_2 \quad \vartheta_2^2 \quad \alpha^2 \quad \alpha^2\vartheta_2\}$$

$$\gamma_4 = -\vartheta_2, m_3 = \alpha^2 \Longrightarrow \alpha^2(\mu+\lambda)(-\vartheta_2) m_1 = (\vartheta_2^2(2\mu+\lambda) - \mu\alpha^2 + \rho\omega^2)\alpha^2 \Longrightarrow m_1 = \frac{(\vartheta_2^2(2\mu+\lambda) - \mu\alpha^2 + \rho\omega^2)\alpha^2}{\alpha^2(\mu+\lambda)(-\vartheta_2)} = -\frac{(\vartheta_2^2(2\mu+\lambda) - \mu\alpha^2 + \rho\omega^2)\alpha^2}{\alpha^2(\mu+\lambda)\vartheta_2}$$

$$= -\sqrt{\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu}} = -\vartheta_2 \Longrightarrow \overline{m_4} = \{-\vartheta_2 \quad \vartheta_2^2 \quad \alpha^2 \quad -\alpha^2\vartheta_2\}$$

Для матрицы B:

$$\det(B - \delta E) = \begin{vmatrix} -\delta & 1 \\ b_1 & -\delta \end{vmatrix} = \delta^2 - b_1 = 0 \Longrightarrow \delta = \pm\sqrt{b_1} = \pm\sqrt{\vartheta_2^2} = \pm\vartheta_2 \text{(3.33)}$$

Тогда:

$$(B - \delta E)n = 0 \sim \begin{cases} -\delta_j n_1 + n_2 = 0 \\ \vartheta_2^2 n_1 - \delta_j n_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \overline{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix}, \overline{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\vartheta_2 \end{pmatrix}$$

Неизвестные константы tK>6. в (3.23), (3.26) определяются из условий цри_ 2=0 и 2'♦-ов. Последние выполняются, если Y6M),X(of.3)-*0 при 2-»-оо.
(3.35)

Проанализируем поведение экопонент в DC(<J,Z),Y(c(,Z) при 2—>-oo. Для раадой из них при Ы - вещественных выделяется два случая: '_____(

1) |oI| >аек, ё^АА~*гк-вещественная,

2) МКэек, dK - чисто мнимая.

С(к Ж П

В первом случае е —>11, в —>оо при 2-*-во и дам

выполнения условий (3.35) необходимо положить Три остальные константы однозначно определяются из орех уо-

ловий при 2 = 0.

Во втором случае экспонента становится осциллирующей, не имеющей предела при г —*·-оо 1 при V 2), однако анализ их

вклада в окончательное решение U.(ат,^,г) показывает, что он стремится к нулю при Z-9-oo как для ed,cZ, так и для /X/,

Следовательно, для Ml <эек при обеих экспонентах е±<S*Zконстанты M0I7T быть ненулевыми, что не противоречит условию (3.П).

Таким образом, число ненулевых констант становится больше трех, и из условий при 2 = 0 они определяются неоднозначно - решение становится неединственным*.

Для выделения единственного решения формулируются дополнительныв уоловня, которые принято называть условиями или принципами излучения, Формулировка различных принципов и техника их применения подробно описаны в Д7· Так как в случае однородного полупространства вое они эквивалентны, воспользуемся наиболее простым и фшзяческя наглядным принципом Зоммерфельда, в соответствия с которые требуется, чтобы в решении оставались только те составляющие, которые описывают распространение волн от источника на бесконечность. . ^

Учитывая опущенный ранее множитель еГ , убеждаемся, что при |oU<aeK е±^<z~Ujt списывает плоскую волну, уравнение распространения которой дает условие постоянства фазы

±Tтёк-2- cot=CO+virt. (3.36)

Пполж&Ьевенпкровав уравнение (3.36) по времени ί , считая, что

В соответствии о принципом Зоммерфельда фазовая скорость должна быть отрицательной (ось 2 направлена вверх), поэтому, слагаемые, содержащие экспоненты ST* должны быть отброшены, так как они описывают волны, идущие к источнику из глубины. Следовательно, ta=t<=Sa=D и для | оЦ < аек ·

3.4

Итак,

$X(\alpha,z) = s_1 n_1 e^{\vartheta_2 z}, Y(\alpha,z) = t_1 m_1 e^{\vartheta_1 z} + t_3 m_3 e^{\vartheta_2 z}$ (3.37)

$$P = \binom{Q_3}{\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2}$$

и осталось определить неизвестные , tj, из граничных условий при 2=0 (см.(3.22)).

$TY_n|_{z=0} = e_n, e_1 = \binom{1}{0}, e_2 = \binom{0}{1}$(3.38)

$(l, X_1) = 1$(3.39)

Следующие векторы удовлетворяют уравнениям и граничным условиям 3.22:

$Y = P^1 Y_1 + P^2 Y_2, X = (\alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2) X_1$(3.40)

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial z} = A * Y \\ \frac{\partial X}{\partial z} = BX \\ T * Y|_{z=0} = P \\ (lX)|_{z=0} = \alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2 \end{cases} \sim \begin{cases} \frac{\partial (P^1 Y_1 + P^2 Y_2)}{\partial z} = A * (P^1 Y_1 + P^2 Y_2) \\ \frac{\partial (\alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2) X_1}{\partial z} = B(\alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2) X_1 \\ T * (P^1 Y_1 + P^2 Y_2)|_{z=0} = P \\ (l(\alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2) X_1)|_{z=0} = \alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2 \end{cases} \sim \begin{cases} \frac{\partial (Q_3 Y_1 + (\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2) Y_2)}{\partial z} = A * (Q_3 Y_1 + (\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2) Y_2) \\ \frac{\partial (\alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2) X_1}{\partial z} = B(\alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2) X_1 \\ T * (Q_3 Y_1 + (\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2) Y_2)|_{z=0} = P \\ (\alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2)(lX_1)|_{z=0} = \alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2 \end{cases} \sim \begin{cases} Q_3 \frac{\partial (Y_1)}{\partial z} + (\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2) \frac{\partial (Y_2)}{\partial z} = Q_3 A Y_1 + (\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2) A Y_2 \\ (\alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2) \frac{\partial X_1}{\partial z} = (\alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2) B X_1 \\ P^1 \binom{1}{0} + P^2 \binom{0}{1} = P \\ \alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2 = \alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2 \end{cases}$$

$$Y_1=\begin{pmatrix}P\\P`\\R\\R`\end{pmatrix},Y_2=\begin{pmatrix}M\\M`\\S\\S`\end{pmatrix},X_1=\binom{N}{N`}(3.41)$$

$$T=\begin{pmatrix}-\lambda\alpha^2 & 0 & 0 & 2\mu+\lambda\\ 0 & -i\mu\alpha^2 & -i\mu\alpha^2 & 0\end{pmatrix},P=\binom{Q_3}{\alpha_1Q_1+\alpha_2Q_2},l=\binom{0}{-i\mu\alpha^2},\overline{m_1}=\{1\quad\vartheta_1\quad\vartheta_1\quad\vartheta_1^2\},\overline{m_3}=\{\vartheta_2\quad\vartheta_2^2\quad\alpha^2\quad\alpha^2\vartheta_2\},\chi_1^2=\frac{\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)},\chi_2^2=\frac{\rho\omega^2}{\mu}$$

$$TY_n=t_1(Tm_1)+t_3(Tm_3)=t_1\begin{pmatrix}-\lambda\alpha^2 & 0 & 0 & 2\mu+\lambda\\ 0 & -i\mu\alpha^2 & -i\mu\alpha^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\vartheta_1\\\vartheta_1\\\vartheta_1^2\end{pmatrix}+t_3\begin{pmatrix}-\lambda\alpha^2 & 0 & 0 & 2\mu+\lambda\\ 0 & -i\mu\alpha^2 & -i\mu\alpha^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vartheta_2\\\vartheta_2^2\\\alpha^2\\\alpha^2\vartheta_2\end{pmatrix}$$

$$=t_1\begin{pmatrix}-\lambda\alpha^2+(2\mu+\lambda)\vartheta_1^2\\-2i\mu\alpha^2\vartheta_1\end{pmatrix}+t_3\begin{pmatrix}-\lambda\alpha^2\vartheta_2+(2\mu+\lambda)\alpha^2\vartheta_2\\-i\mu\alpha^2(\alpha^2+\vartheta_2^2)\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}2\mu\vartheta_1^2-\lambda\chi_1^2\\-2i\mu\alpha^2\vartheta_1\end{pmatrix}+t_3\begin{pmatrix}2\mu\alpha^2\vartheta_2\\-i\mu\alpha^2(\alpha^2+\vartheta_2^2)\end{pmatrix}=e_n\Leftrightarrow Bt=e_n,t=\binom{t_1}{t_3},B$$

$$=\boxed{\begin{pmatrix}2\mu(\alpha^2-(1+\frac{\lambda}{2\mu})\chi_1^2) & 2\mu\alpha^2\vartheta_2\\-2i\mu\alpha^2\vartheta_1 & -i\mu\alpha^2(\alpha^2+\vartheta_2^2)\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}2\mu(\alpha^2-(1+\frac{\lambda}{2\mu})\frac{\rho\omega^2}{(2\mu+\lambda)}) & 2\mu\alpha^2\vartheta_2\\-2i\mu\alpha^2\vartheta_1 & -i\mu\alpha^2(\alpha^2+\vartheta_2^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\mu(\alpha^2-\frac{\rho\omega^2}{2\mu}) & 2\mu\alpha^2\vartheta_2\\-2i\mu\alpha^2\vartheta_1 & -i\mu\alpha^2(\alpha^2+\vartheta_2^2)\end{pmatrix}$$

$$=\boxed{\begin{pmatrix}2\mu(\alpha^2-\frac{1}{2}\chi_2^2) & 2\mu\alpha^2\vartheta_2\\-2i\mu\alpha^2\vartheta_1 & -i\mu\alpha^2(\alpha^2+\vartheta_2^2)\end{pmatrix}}==\begin{pmatrix}2\mu\left(\alpha^2-\left(1+\frac{\lambda}{2\mu}\right)(-\vartheta_1^2+\alpha^2)\right) & 2\mu\alpha^2\vartheta_2\\-2i\mu\alpha^2\vartheta_1 & -i\mu\alpha^2(\alpha^2+\vartheta_2^2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\mu\left(-\frac{\lambda}{2\mu}\alpha^2+\left(1+\frac{\lambda}{2\mu}\right)\vartheta_1^2\right) & 2\mu\alpha^2\vartheta_2\\-2i\mu\alpha^2\vartheta_1 & -i\mu\alpha^2(\alpha^2+\vartheta_2^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda\alpha^2+(2\mu+\lambda)\vartheta_1^2 & 2\mu\alpha^2\vartheta_2\\-2i\mu\alpha^2\vartheta_1 & -i\mu\alpha^2(\alpha^2+\vartheta_2^2)\end{pmatrix}$$

По правилу Крамера

$$t_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, t_3=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \Delta=\det B, \begin{cases} n=1 \\ \Delta_1=b_{22} \\ \Delta_2=-b_{21}\end{cases}, \begin{cases} n=2 \\ \Delta_1=-b_{12} \\ \Delta_2=b_{11}\end{cases}$$

$$\Delta=-2\mu^2 i\alpha^2(\alpha^2+\vartheta_2^2)\left(\alpha^2-\frac{1}{2}\chi_2^2\right)+4\mu^2 i\alpha^2\vartheta_1\alpha^2\vartheta_2=2\mu^2 i\alpha^2\left(-(\alpha^2+\vartheta_2^2)\left(\alpha^2-\frac{1}{2}\chi_2^2\right)+2\vartheta_1\alpha^2\vartheta_2\right)$$

$$=2\mu^2 i\alpha^2\left(-(\alpha^2+\alpha^2-\chi_2^2)\left(\alpha^2-\frac{1}{2}\chi_2^2\right)+2\vartheta_1\alpha^2\vartheta_2\right)=\boxed{4i\mu^2\alpha^2\left(-\left(\alpha^2-\frac{1}{2}\chi_2^2\right)^2+\alpha^2\vartheta_1\vartheta_2\right)}$$

$$=2\mu\left(\alpha^2-\left(1+\frac{\lambda}{2\mu}\right)\chi_1^2\right)\left(-i\mu\alpha^2(\alpha^2+\vartheta_2^2)\right)+2\mu\alpha^2\vartheta_2(2i\mu\alpha^2\vartheta_1)=2i\mu^2\alpha^2\left(2\vartheta_1\alpha^2\vartheta_2-\left(\alpha^2-\left(1+\frac{\lambda}{2\mu}\right)\chi_1^2\right)(\alpha^2+\vartheta_2^2)\right)$$

$$=2i\mu^2\alpha^2\left(2\vartheta_1\vartheta_2\alpha^2-\alpha^4-\alpha^2\vartheta_2^2+\left(1+\frac{\lambda}{2\mu}\right)\chi_1^2(\alpha^2+\vartheta_2^2)\right)=2i\mu^2\alpha^2\left(2\vartheta_1\vartheta_2\alpha^2-\alpha^4-\alpha^2(\vartheta_2^2-\left(1+\frac{\lambda}{2\mu}\right)\chi_1^2)+\left(1+\frac{\lambda}{2\mu}\right)\chi_1^2\vartheta_2^2\right)$$

$$=2i\mu^2\alpha^2\left(2\vartheta_1\vartheta_2\alpha^2-\alpha^4-\alpha^2\left(\alpha^2-\chi_2^2-\left(1+\frac{\lambda}{2\mu}\right)\chi_1^2\right)+\left(1+\frac{\lambda}{2\mu}\right)\chi_1^2(\alpha^2-\chi_2^2)\right)$$

$$=2i\mu^2\alpha^2\left(2\vartheta_1\vartheta_2\alpha^2-2\alpha^4+2\left(1+\frac{\lambda}{2\mu}\right)\chi_1^2\alpha^2+\alpha^2\chi_2^2+\left(1+\frac{\lambda}{2\mu}\right)\chi_1^2\chi_2^2\right)$$

$$=2i\mu^2\alpha^2\left(2\vartheta_1\vartheta_2\alpha^2-2\alpha^4+2\left(1+\frac{\lambda}{2\mu}\right)(-\vartheta_1^2+\alpha^2)\alpha^2+\alpha^2(-\vartheta_2^2+\alpha^2)+\left(1+\frac{\lambda}{2\mu}\right)(-\vartheta_1^2+\alpha^2)(-\vartheta_2^2+\alpha^2)\right)=\cdots$$

$$=-i\mu\alpha^2(\alpha^2+\vartheta_2^2)(-\lambda\alpha^2+(2\mu+\lambda)\vartheta_1^2)+2\mu\alpha^2\vartheta_2(2i\mu\alpha^2\vartheta_1)=i\mu\alpha^2\left(4\mu\alpha^2\vartheta_1\vartheta_2-(\alpha^2+\vartheta_2^2)(-\lambda\alpha^2+(2\mu+\lambda)\vartheta_1^2)\right)$$

$$=i\mu\alpha^2(4\mu\alpha^2\vartheta_1\vartheta_2+\lambda\alpha^4+\lambda\alpha^2\vartheta_2^2-\alpha^2(2\mu+\lambda)\vartheta_1^2-(2\mu+\lambda)\vartheta_1^2\vartheta_2^2)$$

$$\xLeftrightarrow{\text{через } MathWay}\lambda\alpha^6 i\mu+\lambda\alpha^4 i\mu\vartheta_2^2-2\vartheta_1^2 i\mu^2\alpha^4-2\vartheta_1^2 i\mu^2\alpha^2\vartheta_2^2-\lambda\vartheta_1^2 i\mu\alpha^4-\lambda\vartheta_1^2 i\mu\alpha^2\vartheta_2^2+4i\mu^2\alpha^4\vartheta_1\vartheta_2=$$

$$i\mu\alpha^2(\lambda\alpha^4+\lambda\vartheta_2^2\alpha^2-2\vartheta_1^2\mu\alpha^2-2\vartheta_1^2\mu\vartheta_2^2-\lambda\vartheta_1^2\alpha^2-\lambda\vartheta_1^2\vartheta_2^2+4\mu\vartheta_1\vartheta_2\alpha^2)=i\mu\alpha^2(\lambda\alpha^4+\alpha^2(\lambda\vartheta_2^2-2\vartheta_1^2\mu-\lambda\vartheta_1^2+4\mu\vartheta_1\vartheta_2)-2\vartheta_1^2\mu\vartheta_2^2-\lambda\vartheta_1^2\vartheta_2^2)$$

(3.42)

$$Y(\alpha,z)=t_1m_1e^{\vartheta_1 z}+t_3m_3e^{\vartheta_2 z}=\frac{\Delta_1}{\Delta}\begin{pmatrix}1\\ \vartheta_1\\ \vartheta_1\\ \vartheta_1^2\end{pmatrix}e^{\vartheta_1 z}+\frac{\Delta_2}{\Delta}\begin{pmatrix}\vartheta_2\\ \vartheta_2^2\\ \alpha^2\\ \alpha^2\vartheta_2\end{pmatrix}e^{\vartheta_2 z}=Q_3\begin{pmatrix}P\\ P`\\ R\\ R`\end{pmatrix}+(\alpha_1Q_1+\alpha_2Q_2)\begin{pmatrix}M\\ M`\\ S\\ S`\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}P\\ P`\\ R\\ R`\end{pmatrix}=\frac{-i\mu\alpha^2(\alpha^2+\vartheta_2^2)}{\Delta}\begin{pmatrix}1\\ \vartheta_1\\ \vartheta_1\\ \vartheta_1^2\end{pmatrix}e^{\vartheta_1 z}+\frac{2i\mu\alpha^2\vartheta_1}{\Delta}\begin{pmatrix}\vartheta_2\\ \vartheta_2^2\\ \alpha^2\\ \alpha^2\vartheta_2\end{pmatrix}e^{\vartheta_2 z}=\frac{-i\mu\alpha^2(2\alpha^2-\chi_2^2)}{\Delta}\begin{pmatrix}1\\ \vartheta_1\\ \vartheta_1\\ \vartheta_1^2\end{pmatrix}e^{\vartheta_1 z}+\frac{2i\mu\alpha^2\vartheta_1}{\Delta}\begin{pmatrix}\vartheta_2\\ \vartheta_2^2\\ \alpha^2\\ \alpha^2\vartheta_2\end{pmatrix}e^{\vartheta_2 z}$$

$$=\frac{2i\mu\alpha^2}{\Delta}\left(-\left(\alpha^2-\frac{1}{2}\chi_2^2\right)\begin{pmatrix}1\\ \vartheta_1\\ \vartheta_1\\ \vartheta_1^2\end{pmatrix}e^{\vartheta_1 z}+\vartheta_1\begin{pmatrix}\vartheta_2\\ \vartheta_2^2\\ \alpha^2\\ \alpha^2\vartheta_2\end{pmatrix}e^{\vartheta_2 z}\right)\Rightarrow\begin{cases}P(\alpha,z)=\dfrac{2i\mu\alpha^2}{\Delta}\left(-\left(\alpha^2-\dfrac{1}{2}\chi_2^2\right)e^{\vartheta_1 z}+\vartheta_1\vartheta_2e^{\vartheta_2 z}\right)\\ R(\alpha,z)=\dfrac{2i\mu\alpha^2\vartheta_1}{\Delta}\left(-\left(\alpha^2-\dfrac{1}{2}\chi_2^2\right)e^{\vartheta_1 z}+\alpha^2e^{\vartheta_2 z}\right)\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}M\\ M`\\ S\\ S`\end{pmatrix}=\frac{-2\mu\alpha^2\vartheta_2}{\Delta}\begin{pmatrix}1\\ \vartheta_1\\ \vartheta_1\\ \vartheta_1^2\end{pmatrix}e^{\vartheta_1 z}+\frac{-\lambda\alpha^2+(2\mu+\lambda)\vartheta_1^2}{\Delta}\begin{pmatrix}\vartheta_2\\ \vartheta_2^2\\ \alpha^2\\ \alpha^2\vartheta_2\end{pmatrix}e^{\vartheta_2 z}=\frac{1}{\Delta}\left(-2\mu\alpha^2\vartheta_2\begin{pmatrix}1\\ \vartheta_1\\ \vartheta_1\\ \vartheta_1^2\end{pmatrix}e^{\vartheta_1 z}+(-\lambda\alpha^2+(2\mu+\lambda)\vartheta_1^2)\begin{pmatrix}\vartheta_2\\ \vartheta_2^2\\ \alpha^2\\ \alpha^2\vartheta_2\end{pmatrix}e^{\vartheta_2 z}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}M(\alpha,z)=\dfrac{1}{\Delta}(-2\mu\alpha^2\vartheta_2e^{\vartheta_1 z}+(-\lambda\alpha^2+(2\mu+\lambda)\vartheta_1^2)\vartheta_2e^{\vartheta_2 z})\\ S(\alpha,z)=\dfrac{1}{\Delta}(-2\mu\alpha^2\vartheta_1\vartheta_2e^{\vartheta_1 z}+(-\lambda\alpha^2+(2\mu+\lambda)\vartheta_1^2)\alpha^2e^{\vartheta_2 z})\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
P(\alpha,z)=\frac{2i\mu\alpha^2}{\Delta}\left(-\left(\alpha^2-\frac{1}{2}\chi_2^2\right)e^{\vartheta_1 z}+\vartheta_1\vartheta_2 e^{\vartheta_2 z}\right)\\
R(\alpha,z)=\frac{2i\mu\alpha^2\vartheta_1}{\Delta}\left(-\left(\alpha^2-\frac{1}{2}\chi_2^2\right)e^{\vartheta_1 z}+\alpha^2 e^{\vartheta_2 z}\right)\\
M(\alpha,z)=\boxed{\frac{2\mu\vartheta_2}{\Delta}\left(-\alpha^2 e^{\vartheta_1 z}+\left(\alpha^2-\frac{1}{2}\chi_2^2\right)e^{\vartheta_2 z}\right)}=\frac{1}{\Delta}(-2\mu\alpha^2\vartheta_2 e^{\vartheta_1 z}+(-\lambda\alpha^2+(2\mu+\lambda)\vartheta_1^2)\vartheta_2 e^{\vartheta_2 z})\\
S(\alpha,z)=\boxed{\frac{2\mu\alpha^2}{\Delta}\left(-\vartheta_1\vartheta_2 e^{\vartheta_1 z}+\left(\alpha^2-\frac{1}{2}\chi_2^2\right)e^{\vartheta_2 z}\right)}=\frac{1}{\Delta}(-2\mu\alpha^2\vartheta_1\vartheta_2 e^{\vartheta_1 z}+(-\lambda\alpha^2+(2\mu+\lambda)\vartheta_1^2)\alpha^2 e^{\vartheta_2 z})
\end{cases}
\quad (3.43)
$$

Из 3.39 следует для X_1

$$
(l,X_1)=1\Longrightarrow\begin{pmatrix}0\\-i\mu\alpha^2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}N\\N`\end{pmatrix}=1\Longrightarrow\begin{pmatrix}0\\-i\mu\alpha^2\end{pmatrix}*s_1\begin{pmatrix}1\\\vartheta_2\end{pmatrix}\boxed{e^{\vartheta_2 z}}=1\Longrightarrow
$$

$$
-i\mu\alpha^2\vartheta_2 s_1=1\Longrightarrow s_1=\frac{1}{-i\mu\alpha^2\vartheta_2}\Longrightarrow N(\alpha,z)=\frac{i}{\mu\alpha^2\vartheta_2}e^{\vartheta_2 z}\text{(3.44)}
$$

Учитывая 3.15 и 3.40:

$$
\begin{cases}
U=-i\alpha_1\Phi-i\alpha_2\Psi\\
V=-i\alpha_2\Phi+i\alpha_1\Psi\\
W=W
\end{cases},Y=P^1Y_1+P^2Y_2,X=(\alpha_2Q_1-\alpha_1Q_2)X_1,Y=\begin{pmatrix}\Phi\\\Phi`\\W\\W`\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}\Psi\\\Psi`\end{pmatrix}
$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi` \\ W \\ W` \end{pmatrix} = Q_3 \begin{pmatrix} P \\ P` \\ R \\ R` \end{pmatrix} + (\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2) \begin{pmatrix} M \\ M` \\ S \\ S` \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi` \end{pmatrix} = (\alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2) \begin{pmatrix} N \\ N` \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} U = -i\alpha_1(P^1 P + P^2 M) - i\alpha_2(\alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2)N \\ V = -i\alpha_2(P^1 P + P^2 M) + i\alpha_1(\alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2)N \\ W = P^1 R + P^2 S \end{cases} \sim \begin{cases} U = -i\alpha_1(Q_3 P + (\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2)M) - i\alpha_2(\alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2)N \\ V = -i\alpha_2(Q_3 P + (\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2)M) + i\alpha_1(\alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2)N \\ W = Q_3 R + (\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2)S \end{cases}$$

$$U(\alpha_1, \alpha_2) = K(\alpha_1, \alpha_2, z)Q(\alpha_1, \alpha_2), K = \begin{pmatrix} -i(\alpha_1^2 M + \alpha_2^2 N) & -i\alpha_1\alpha_2(M - N) & -i\alpha_1 P \\ -i\alpha_1\alpha_2(M - N) & -i(\alpha_2^2 M + \alpha_1^2 N) & -i\alpha_2 P \\ \alpha_1 S & \alpha_2 S & R \end{pmatrix} (3.45)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Gamma 1} \int_{\Gamma 2} K(\alpha_1, \alpha_2, z)Q(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\,\alpha_1 d\alpha_2 = \iint_C k(x - \zeta, y - \eta, z)q(\zeta, \eta)d\zeta d\eta \ (3.46)$$

$$k(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\Gamma 1} \int\limits_{\Gamma 2} K(\alpha_1, \alpha_2, z)e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\,\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\Delta(\alpha) = i\mu\alpha^2(\lambda\alpha^4 + \alpha^2(\lambda\vartheta_2^2 - 2\vartheta_1^2\mu - \lambda\vartheta_1^2 + 4\mu\vartheta_1\vartheta_2) - 2\vartheta_1^2\mu\vartheta_2^2 - \lambda\vartheta_1^2\vartheta_2^2) \neq -\left(\alpha^2 - \frac{1}{2}\chi_2^2\right)^2 + \alpha^2\vartheta_1\vartheta_2 (3.47)$$

Контуры интегрирования liflz почти всаду совпадают с вещественной осью, отклоняясь от нее в комплексную плоскость только при обходе вещественного полюса £ функций M,P, R,g. Такой выбор контуров диктуется условиями излучения Д/. Полюс ξ является ' единственным вещественным корнем уравнения Релея

Д(Ы)= -(Ыг-0.5хгУ+о12^г,

(3.47)

его вклад в решение (вычет (3.46) в данном полюсе) определяет волну Релея, распространяющуюся вдоль поверхности упругого полупространства от области приложения нагрузки. Матрица ,в (3.46) называется матрицей Грина упругого полупространства по аналогии с функцией Грини для неоднородных дифференциальных уравнений. Известно /ВУ, что функция Грина ff(x) уравнения />u=f (Z - дифференциальный оператор) определяется как решение уравнения £>$=$ (5 - & - функция Дирака). Свертка у (а) с правой частью £(х) является частным решением исходного уравнения!

Аналогично столбцами матрицы ft являются векторы перемещений, вызванные в полупространстве сосредоточенными поверхностными нагрузками m=1,2,3, направленными вдоль коорди-

натных осей (координатные орты), а перемещение а, вызванное произвольной нагрузкой η, выражается сверткой ки-Ц, (3.46).

Матрица К(с^,о^,3) является преобразованием Фурье от по о.,у·; в соответствии с терминологией теории псевдодифферен-циальных операторов ее называют также символом матрицы к. Переход от К к ft. в (3.46) осуществляется путем подстановки Q=GT[^] и замены порядка интегрирования.