СОДЕРЖАНИЕ

1 Динамика добычи тяжелой нефти

В данной главе приводятся иллюстрации, формулируется математическая постановка задачи, строится разностная схема (РС), определяются значения граничных и начальных условий к РС, для этапа 2 технологии разработки тяжелой нефти

1.1 Иллюстрации к краевой задаче

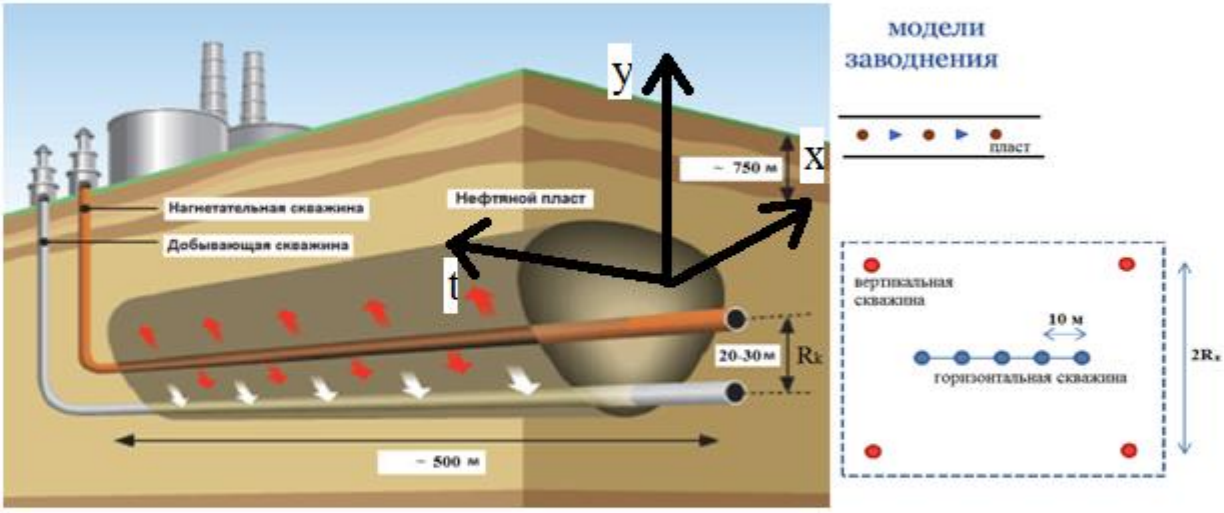

Рисунок 1.1 – Нефтеносный пласт на глубине 750м, размером 50км·10км, толщина пласта 2h=20 |30м. Радиус горизонтальной скважины r_0=0,5 |1м. По оси z горизонтальной скважины объёмное джоулево тепловыделение q_w вт/м^3, в проводнике радиусом $r_п$=0,02 |0,03м. На расстоянии H от нагнетательной – добывающая скважина

Рисунок 1.2– Сечение нефтяного пласта на рисунке 1.1

1.2 Краевая задача

Законы Дарси или сохранения массы и энергии (теплопроводностью пласта пренебрегаем) в векторной форме

$$\begin{cases} \varphi \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} + div(\overline{u}_1) = 0; \\ -\varphi \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} + div(\overline{u}_2) = 0; \end{cases}$$

при этом

$$div(\overline{u}_1) = \frac{\partial u_1(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial u_2(x,y,t)}{\partial y};$$
$$div(\overline{u}_2) = \frac{\partial w_1(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial w_2(x,y,t)}{\partial y};$$

$$\overline{u}_1 = \{u_1(x,y,t); u_2(x,y,t)\};$$
$$\overline{u}_2 = \{w_1(x,y,t); w_2(x,y,t)\};$$

координатная форма закона Дарси

$$\begin{cases} \varphi\sigma(x,y,t) + \dfrac{\partial u_1(x,y,t)}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2(x,y,t)}{\partial y} = 0; & (1.1) \\ -\varphi\sigma(x,y,t) + \dfrac{\partial w_1(x,y,t)}{\partial x} + \dfrac{\partial w_2(x,y,t)}{\partial y} = 0; & (1.2) \end{cases}$$

где

$\varphi = 26.4\%$ – эффективная пористость;

$\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{w_1}, \overline{w_2}$ – векторные поля скоростей для фаз: воды, нефти;

$\sigma = \sigma(x,y,t)$ – относительная водонасыщенность для фаз: воды, нефти.

Закон сохранения импульса в векторной форме (пренебрежём силой тяжести), для вязко-пластичной нефти с предельным градиентом давления по реологической модели вязкопластической среды Бингама-Шведова, для фазы нефти

$$\begin{cases} \nabla P = \dfrac{-\mu_2 \bar{u}_2}{kk_2(s_2, T, C)} - \dfrac{\gamma \bar{u}_2}{|\bar{u}_2|}, |\bar{u}_2| > 0; \\ \nabla P < \gamma, \bar{u}_2 = 0; \end{cases}$$

координатная форма для фазы нефти

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{-\mu_2 w_1}{kk_2(s_2, T, C)} - \dfrac{\gamma w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}; & (1.3) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-\mu_2 w_2}{kk_2(s_2, T, C)} - \dfrac{\gamma w_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}; & (1.4) \\ w_1 = w_2 = 0, \left(\dfrac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)^2 < \gamma; \end{cases}$$

векторная форма закона Бингама-Шведова для фазы воды

$$\nabla P = \frac{-\mu_1 \bar{u}_1}{kk_1(s_1, T, C)}, |\bar{u}_1| > 0;$$

для фазы воды

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{-\mu_1 u_1}{kk_1(s_1, T, C)}; & (1.5) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-\mu_1 u_2}{kk_1(s_1, T, C)}; & (1.6) \end{cases}$$

где

при давлении $P_{пл}$: $\gamma = \gamma\left(T, C\right)$ – предельный градиент давления для каждой фазы;

$k_i = k_i\left(s_i, T, C\right)$ – относительная фазовая проницаемость i-й фазы (i=1 – вода, i=2 – нефть);

$k = k\left(T, C\right)$ – коэффициент проницаемости пласта (горной породы);

$P_i, \nabla P$ – парциальное давление, градиент парциального давления i-й фазы;

$\mu, \mu_i = \mu_i\left(T, C\right)$ – динамическая вязкость i-й фазы;

1.3 Замыкающие соотношения для параметров модели

Для решения (1.1)-(1.6) требуются замыкающие соотношения параметров: $k=k(C, T)$; $\gamma=\gamma(C, T)$; $\mu_1=\mu_1(C, T)$; $\mu_2=\mu_2(C, T)$; $k_1=k_1(s_1,T,C)$; $k_2=k_2(s_2,T,C)$.

$$k\left(C,T\right)=10^{-10}1.47T^{-2.1475}exp\left(0.13563C\right);$$

$$\gamma\left(C,T\right)=10^{5}7857T^{-2.27694}exp\left(-0.16194C\right);$$

$$\mu_1\left(C,T\right)=10^{-4}3.03exp\left(\frac{31.9283}{T}\right)exp\left(0.168228C\right);$$

$$\mu_2\left(C,T\right)=10^{-3}5.10746exp\left(\frac{70.2362}{T}\right)exp\left(-0.25714C\right);$$

$$k_1\left(s_1,C,T\right)=;$$

$$k_2\left(s_2,C,T\right)=;$$

1.4 Методы построения РС

1.4.1 Метод неопределённых коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов рассмотрен на примере задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dy} = f(x, y), x_0 \le x \le X,\\ &y(x_0) = a.\end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Для численного решения задачи (1.6.1) методом конечных разностей была построена РС:

$$\begin{cases}\dfrac{y_{j+1} - y_j}{h} = f(x_i, y_j), j = \overline{0, N-1},\\ y_0 = a.\end{cases} \tag{1.6.2}$$

Эта схема связывает значения искомой функции $y(x)$ в двух узлах x_j, x_{j+1}.

Построим разностную схему (1.6.2) методом неопределённых коэффициентов. Для этого разностное уравнение запишем в следующем виде:

$$L_h y^{(h)} \equiv a_0 y_j + a_1 y_{j+1} = f_j, \tag{1.6.3}$$

где a_0, a_1 – неопределённые коэффициенты. Постараемся подобрать их таким образом, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$L_h [y]_h \Big|_{x=x_j} \equiv f\left(x_j, y(x_j) + O(h^2)\right). \tag{1.6.4}$$

Воспользуемся формулой Тейлора, предполагая, что $y(x) \in C^2[x_0, X]$:

$$y(x_j+h)=y(x_j)+h\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j}+\frac{h^2}{2}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\tilde{x}}, \tag{1.6.5}$$

где $\breve{x}=x_j+\theta_1 h, \tilde{\tilde{x}}=x_j+\theta_2, \theta_1\in(-1,0), \theta_2\in(0,1)$.

Подставляя (1.6.5) в левую часть равенства (1.6.4), получим:

$$L_h[y]_h\Big|_{x=x_j}\equiv a_0 y(x_j)+a_1\left\{y(x_j)+h\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j}+O(h^2)\right\}. \tag{1.6.6}$$

Определим коэффициенты a_0, a_1 так, чтобы выполнялось условие аппроксимации (1.6.4). Вначале сгруппируем слагаемые в правой части равенства (1.6.6):

$$L_h[y]_h\Big|_{x=x_j}\equiv(a_0+a_1)y(x_j)+a_1 h\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j}+O(h^2)=f(x_j,y(x_j)). \tag{1.6.7}$$

Из соотношения (1.6.7) следует, что для выполнения условия аппроксимации необходимо, чтобы выполнялись равенства:

$$\begin{cases} a_0+a_1=0, \\ a_1 h=1. \end{cases}$$

Имеем систему двух линейных алгебраических уравнений, которая, очевидно, допускает единственное решение:

$$a_0=\frac{-1}{h}, a_1=\frac{1}{h}.$$

В результате получается РС

$$\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} = f_j,\ j = \overline{1, N-1}.$$

аналогичная ранее рассмотренной схеме (1.6.2).

Для построения РС, связывающей значения искомой функции $y(x)$ в узлах x_{j-1}, x_{j+1}, методом неопределенных коэффициентов, повторим выше приведенную процедуру. Имеем

$$L_h y^{(h)} \equiv a_0 y_{j-1} + a_1 y_{j+1} = f_j. \tag{1.6.8}$$

Определим неизвестные коэффициенты a_0, a_1 так, чтобы имело место равенство

$$L_h [y]_h \Big|_{x=x_j} = f(x_j, y(x_j)) + O(h^2). \tag{1.6.9}$$

Используя формулу Тейлора, получим

$$y(x_j - h) = y(x_j) - h \frac{dx}{dy}\bigg|_{x=x_j} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}\bigg|_{x=\tilde{x}}, \tag{1.6.10}$$

$$y(x_j + h) = y(x_j) + h \frac{dx}{dy}\bigg|_{x=x_j} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}\bigg|_{x=\tilde{\tilde{x}}}, \tag{1.6.11}$$

где $\breve{x} = x_j + \theta_1 h, \tilde{\tilde{x}} = x_j + \theta_2, \theta_1 \in (-1, 0), \theta_2 \in (0, 1)$.

Подставляя (1.6.10) и (1.6.11) в левую часть равенства (1.6.9), будем иметь:

$$L_h [y]_h \Big|_{x=x_j} \equiv (a_0 + a_1) y(x_j) + (-a_0 h + a_1 h) \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_j} + O(h^2) = f(x_j, y(x_j)). \tag{1.6.12}$$

Для выполнения условия аппроксимации (1.6.12) необходимо выполнение следующих соотношений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0, \\ (-a_0 + a_1)h = 1. \end{cases}$$

Из системы имеем, что $a_0 = \frac{-1}{2h}, a_1 = \frac{1}{2h}.$ Подставляя полученные значения a_0,a_1 в (1.6.8), запишем разностную схему:

$$\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} = f_j, \ j = \overline{1, N-1}. \qquad (1.6.13)$$

Отметим, что в построенной разностной схеме (1.6.13) используется *центральная разность*. В ранее рассмотренной схеме применялась *правая пространственная разность*.

Аналогичным образом можно построить разностную схему с *левой пространственной разностью* вида:

$$\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} = f_j, \ j = \overline{1, N}. \qquad (1.6.14)$$

Отметим, что в общем случае РС может иметь шаблон, в котором узлы могут быть расположены произвольным образом друг относительно друга. При этом число неопределенных коэффициентов должно совпадать с количеством узлов.

1.4.2 Метод полиномиальной аппроксимации

Рассматриваемый метод основан на применении гладкой функции со свободными параметрами [2], [7] для нахождения производных по экспериментальным данным. В качестве такой функции обычно используются полиномы.

Проиллюстрируем указанный метод для случая, когда в узлах x_{j-1}, x_j, x_{j+1} заданы значения функции y_{j-1}, y_j, y_{j+1}. Проведем аппроксимацию функции многочленом второй степени

$$y(x) = a + bx + cx^2, \tag{1.6.15}$$

причем, за начало координат $x = 0$ примем точку x_j.Тогда $x_{j-1} = -h, x_{j+1} = h$. Для определения *a*,*b*, *c* воспользуемся значениями y_{j-1}, y_j, y_{j+1}. Имеем:

$$y_{j-1} = a + bx + cx_{j-1}^2,$$
$$y_{j-1} = a + bx + cx_j^2,$$
$$y_{j+1} = a + bx + cx_{j+1}^2,$$

или, с учетом того, что $x_j = 0$,

$$y_{j-1} = a - bh + ch^2,$$

$$y_{j-1} = a,$$

$$y_{j+1} = a + bh + ch^2,$$

Складывая первое и последнее равенства, получим:

$$y_{j+1} + y_{j-1} = 2a + 2ch^2,$$

или

$$c = \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{2h^2}.$$

Для определения коэффициента b вычтем из третьего равенства первое. Получим:

$$y_{j+1} - y_{j-1} = 2bh.$$

Отсюда

$$b = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h}.$$

Для определения производной воспользуемся формулой

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j} = (b + 2cx)\big|_{x=x_j=0} = b.$$

Или

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j} = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h}.$$

Значение второй производной

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_j} = 2c,$$

или

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_j} = \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2}.$$

Построенные формулы для первой и второй производной совпадают с формулами, полученными методом конечных разностей [2, с. 107-120, с. 146-151].

Если теперь аппроксимировать $y(x)$ полиномом первой степени, то есть $y(x) = a + bx$, то в зависимости от таблицы значений функции y_j, y_{j+1} или y_j, y_{j-1}, получатся формулы для аппроксимации $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j}$ правой или левой пространственными разностями соответственно.

Заметим, что аппроксимационные формулы для производных, полученные при помощи полиномов выше второго порядка, уже не идентичны выражениям, полученным разложением в ряд Тейлора [3, с. 44-45]. В каждом случае погрешность аппроксимации проверяется при помощи разложения по формуле Тейлора [3, с. 44].

Замечание. Среди других методов построения разностных схем отметим проекционные методы [4, с. 138-144]: метод конечных элементов, метод Галеркина, метод Рэлея-Ритца и другие. В их основе лежит идея аппроксимации решения дифференциального уравнения конечной линейной комбинацией заданных функций, называемых *базисными*. Интегро интерполяционный метод (ИИМ) или *метод баланса* применяется при построении разностных схем, аппроксимирующих основные уравнения исходной задачи, записанные в интегральной, а не в дифференциальной форме

[5, с. 111-116]. В результате применения этого метода получается *консервативная* или *дивергентная* разностная схема.

Под *консервативной разностной схемой* понимаем схему, выражающую на сетке разностные аналоги соответствующих законов сохранения [5, с. 111-114]. Кроме того, при построении разностных схем для решения задачи Коши применяются: метод Эйлера, модифицированный метод Эйлера [6, с. 214-215], методы Рунге-Кутты [6, с. 218-230] или, так называемые, *одношаговые методы*. К числу *многошаговых методов* построения разностных схем принадлежат экстраполяционный и интерполяционный методы Адамса [6, с. 230-238].

Одним из основных методов численного решения граничных задач, как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных, является *метод конечных разностей* [2, с. 107-120, с. 146-151]. Не нарушая общности, проведем рассмотрение метода конечных разностей на примере краевой задачи для ОДУ второго порядка.

1.4.3 Метод конечных разностей

Рассмотрим линейную двухточечную краевую задачу [2, с. 107-120]:

$$Ly = f,$$

где

$$Ly \equiv \begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y, 0 \le x \le 1, \\ y(0), \\ y'(1), \end{cases} \tag{1.6.16}$$

$$f \equiv \begin{cases} r(x), 0 \le x \le 1, \\ \alpha, \\ \beta, \end{cases}$$

$p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ – заданные функции, α, β – известные числа. Будем предполагать, что задача (1.6.16) корректно поставлена. Используя метод конечных разностей, называемый иначе *методом сеток*, опишем алгоритм нахождения приближенного решения задачи (1.6.16) на ПЭВМ.

Согласно методу сеток необходимо выполнить следующие действия:

1) заменить область непрерывного изменения аргумента $x \in [0,1]$ некоторой дискретной областью. Для этой цели рассмотрим, например, равномерную сетку на отрезке [0,1] с N+1 узлами:

$$\overline{\omega_h} = \left\{ x_j, x_j = jh, j = \overline{0,N}, N = 1/h, h > 0 \right\};$$

2) аппроксимировать краевую задачу (1.6.16) на множестве узлов $x_j \in \overline{\omega_h}$ некоторой разностной задачей

$$L_h y^{(h)} = f^{(h)}, \tag{1.6.17}$$

где

$$y^{(h)} \in U_h, f^{(h)} \in F_h,$$

U_h – пространство сеточных функций – решений задачи (1.6.17),

F_h – пространство сеточных функций – правых частей разностной задачи (1.41);

3) решить разностную задачу (1.6.17) каким-либо численным методом, то есть найти приближенные значения решения $y_j \approx y(x_j)$ в узлах сетки $\overline{\omega_h}$.

Под $y(x_j)$ понимаем значения решения дифференциальной задачи (1.6.16), вычисленные в узлах $x_j \in \overline{\omega_h}, y_j$ – значение в узле x_j решения разностной задачи (1.6.17). В рассматриваемом случае разностная задача (1.6.17) представляет собой систему *N*+1 линейных алгебраических уравнений относительно *N*+1 неизвестных $y_0, y_1, \ldots, y_N$.

При таком подходе к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений необходимо решить следующие вопросы:

1) **выбрать формулы численного дифференцирования**, достаточно приближающие производные из (1.6.16);

2) **определить порядок аппроксимации краевой задачи РС**, устойчивость разностной схемы и сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи;

3) **показать разрешимость системы линейных алгебраических уравнений и указать метод её решения**.

Приведём решение каждого из перечисленных вопросов на примере поставленной задачи (1.6.16).

1.4.3.1 Выбор формул численного дифференцирования

За определение *аппроксимации* принимается стремление невязки $\delta f^{(h)}$ к нулю при шаге $h \to 0$.

Аппроксимируем производные из (1.6.16) в узле x_j по следующим формулам численного дифференцирования [2, с. 109]:

$$y''(x_j) \simeq \frac{y(x_{j+1}) - 2(x_j) + y(x_{j-1})}{h^2}, j = \overline{1, N-1};$$

$$y'(x_j) \simeq \frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h}, j = \overline{1, N-1};$$

правая разностная производная,

$$y^{'}(x_j) \simeq \frac{y(x_j) - y(x_{j-1})}{h}, j = \overline{1, N};$$

левая разностная производная

$$y^{'}(x_j) \simeq \frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j+1})}{2h}, j = \overline{1, N-1};$$

центральная разностная производная Тогда вместо краевой задачи (1.6.16) получим разностную задачу (1.6.17), где

$$L_h y^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} + p_j \dfrac{y_{j+1} - y_j}{h} + q_j y_j, j = \overline{1, N-1} \\ y_{0,} \\ \dfrac{y_N - y_{N-1}}{2h}, \end{cases} \tag{1.6.18}$$

или

$$L_h y^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} + p_j \dfrac{y_{j+1} - y_j}{2h} + q_j y_j, j = \overline{1, N-1} \\ y_{0,} \\ \dfrac{y_N - y_{N-1}}{2h}, \end{cases} \tag{1.6.19}$$

при этом

$$f \equiv \begin{cases} r, j = \overline{1, N-1} \\ \alpha \\ \beta. \end{cases}$$

1.4.3.2 Определение порядка аппроксимации дифференциальной задачи разностной

Исследуем погрешность от замены производных из (1.6.16) по формулам численного дифференцирования, предполагая, что функция $y(x)$ обладает достаточной гладкостью. Разложим $y(x_{j+1})$ в окрестности x_j по формуле Тейлора. Будем иметь:

$$y(x_{j\pm1}) = y(x_j \pm h) = y(x_j) \pm hy'(x_j) + \frac{h^2}{2} y''(x_j) \pm \frac{h^3}{6} y'''(x_j) + \frac{h^4}{24} y^{IV}(x_j) + O(h^5),$$

где $O(h^5)$ означает, что остаточный член разложения стремится к нулю при шаге $h \to 0$, как h^5.

Тогда

$$\frac{y(x_{j+1}) - 2(x_j) + y(x_{j-1})}{h^2} = y''(x_j) + \frac{h^2}{12} y^{IV}(\xi_1),$$

где $x_{j-1} < \xi_1 < x_{j+1}$.

Аналогично получаем:

$$\frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1})}{2h} = y'(x_j) + \frac{h^2}{6} y'''(\xi_2),$$

где $x_{j-1} < \xi_2 < x_{j+1}$;

$$\frac{y(x_{j+1})-y(x_j)}{h}=y^{'}(x_j)+\frac{h}{2}y^{''}(\xi_3),$$

где $x_j<\xi_3<x_{j+1}$;

$$\frac{y(x_N)-y(x_{N-1})}{h}=y^{'}(x_N)-\frac{h}{2}y^{''}(\xi_3),$$

где $x_{N-1}<\xi_4<x_N$.

Определяем теперь невязку $\delta f^{(h)}$ по формуле

$$L_h[y]_h-f^{(h)}=\delta f^{(h)},[y]_h\in U_h;f^{(h)},\delta f^{(h)}\in F_h.$$

При использовании правой разностной производной имеем:

$$L_h y^{(h)}\equiv\begin{cases}y^{''}(x_j)+p_j y^{'}(x_j)+q_j y(x_j)+\dfrac{h^2}{12}y^{IV}(\xi_1)+\dfrac{h}{2}y^{''}(\xi_3)p_j,\\ y(x_0),\\ y^{'}(x_N)-\dfrac{h}{2}y^{''}(\xi_4),\end{cases}$$

$$f\equiv\begin{cases}r_j,\ j=\overline{1,N-1}\\ \alpha\\ \beta.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\delta f^{(h)}\equiv\begin{cases}-\dfrac{h^2}{12}y^{IV}(\xi_1)-\dfrac{h}{2}y^{''}(\xi_3)p_j\equiv\delta f_1^{(h)},\\ 0\equiv\delta f_2^{(h)},\\ \dfrac{h}{2}y^{''}(\xi_4)\equiv\delta f_3^{(h)}.\end{cases}$$

При замене $y'(x_j)$ центральной разностной производной получаем:

$$\delta f^{(h)} \equiv \begin{cases} -\dfrac{h^2}{12} y^{IV}(\xi_1) - \dfrac{h^2}{6} y''(\xi_2) p_j \equiv \delta f_1^{(h)}, \\ 0 \equiv \delta f_2^{(h)}, \\ \dfrac{h}{2} y''(\xi_4) \equiv \delta f_3^{(h)}. \end{cases}$$

Из проведенных исследований заключаем, что разностные схемы (1.6.18),(1.6.19) аппроксимируют дифференциальную задачу (1.6.16) на решении $y \in C^4[0,1]$ с локальной ошибкой (ошибкой на одном шаге) *O*(*h*). Отметим, что порядок аппроксимации разностной схемы (1.6.19) можно повысить до 2-го относительно *h*, если аппроксимировать $y'(x_N)$ по формуле численного дифференцирования [7, с. 57-59]:

$$\frac{3y(x_N) - 4y(x_{N-1}) + y(x_{N-2})}{2h} = y'(x_N) + \frac{h^2}{3} y'''(\xi_5),$$

где $x_{N-2} < \xi_5 < x_N$.

Тогда невязка $\delta f^{(h)}$ принимает вид:

$$\delta f^{(h)} \equiv \begin{cases} -\dfrac{h^2}{12} y^{IV}(\xi_1) - \dfrac{h^2}{6} y''(\xi_2) p_j \equiv \delta f_1^{(h)}, \\ 0 \equiv \delta f_2^{(h)}, \\ \dfrac{h^2}{3} y''(\xi_5) \equiv \delta f_3^{(h)}. \end{cases} \tag{1.6.20}$$

Получим оценку $\left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h}$ из (1.6.20). Имеем:

$$\left| y''(x_j) - \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} \right| \le \frac{h^2}{12} \left\| y^{IV} \right\|_c,$$

$$\left| p(x_j) y'(x_j) - p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} \right| \le \frac{h}{6} \left\| p \right\|_c \left\| y''' \right\|_c,$$

$$\left| y'(x_N) - \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h} \right| \le \frac{h^2}{3} \left\| y''' \right\|_c.$$

Здесь

$$p_j = p(x_j),\ j = \overline{1, N-1}, \left\| p \right\|_c = \max_{x \in [0,1]} \left| p(x) \right|, \left\| y^{IV} \right\|_c = \max_{x \in [0,1]} \left| y^{IV}(x) \right|, \left\| y''' \right\|_c = \max_{x \in [0,1]} \left| y'''(x) \right|.$$

Пусть

$$\left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} = \max_{1 \le i \le 3} \left| \delta f_i^{(h)} \right|.$$

Тогда получаем

$$\left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} = C \cdot h^2,$$

где C – некоторая не зависящая от h постоянная.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что в случае разностных схем (1.6.18),(1.6.19).

$$\left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} = C \cdot h,$$

1.4.3.3 Устойчивость РС и сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной. Вопросы разрешимости разностной задачи

Разностную задачу (1.6.18) запишем в виде:

$$\begin{cases} y_0 = \alpha, \\ \dfrac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + p_j \dfrac{y_{j+1} - y_j}{h} + q_j y_j = r_j, \; j = \overline{1, N-1}, \\ y_N - y_{N-1} = \beta h. \end{cases} \qquad (1.6.21)$$

Или

$$A\overline{y} = \overline{b}, \qquad (1.6.22)$$

где

$$\overline{y} = (y_0, y_1, \dots, y_N)^T, \overline{b} = (\alpha, h^2 r_1, \dots, h^2 r_{N-1}, \beta h)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \left(-2 - hp_1 + q_1 h^2\right) & 1 + hp_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \left(-2 - hp_2 + q_2 h^2\right) & 1 + hp_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \left(-2 - hp_{N-1} + q_{N-1} h^2\right) & 1 + hp_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1) & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица A системы линейных алгебраических уравнений (1.6.22) является трехдиагональной матрицей с доминирующей главной диагональю, если при $0 \le x \le 1$ функция $q(x) \le 0$. Это условие гарантирует существование единственного решения разностной краевой задачи (1.6.18), причем, решение может быть получено методом прогонки [8, с. 130-133].

В самом деле, задачу (1.6.21) можно привести к виду:

$$\begin{cases} A_j y_{j-1} - C_j y_j + B_j y_{j+1} = F_j, j = \overline{1, N-1}, \\ y_0 - \chi_0 y_1 = \gamma_0, \\ y_N - \chi_N y_{N-1} = \gamma_N, \end{cases} \tag{1.6.23}$$

где

$$A_j = \frac{1}{h^2}, C_j = \frac{2}{h^2} + \frac{p_j}{h} - q, B_j = \frac{1}{h^2} + \frac{p_j}{h},$$
$$F_j = r_j, \chi_0 = 0, \gamma_0 = \alpha, \chi_N = 1, \gamma_N = \beta h.$$

При этом должны выполняться следующие достаточные условия устойчивости метода прогонки [7, с.161-166]:

$$\left|C_j\right| \ge \left|A_j\right| + \left|B_j\right|, \left|\chi_0\right| \le 1. \tag{1.6.24}$$

Неравенства (1.6.24) справедливы, если $q(x) \le 0$ при $x \in [0,1]$.

Аналогичными исследованиями можно показать существование и единственность решения разностной задачи (1.6.19).

Чтобы доказать устойчивость разностных схем (1.6.18),(1.6.19), требуется показать выполнение неравенства

$$\left\|y^{(h)}\right\|_{U_h} \le C \cdot \left\|f^{(h)}\right\|_{F_h}. \tag{1.6.25}$$

Здесь C – константа, не зависящая ни от h, ни от $f^{(h)}$. С доказательством устойчивости можно познакомиться в [10, с. 207-209].

Таким образом, разностная схема (1.6.18) аппроксимирует краевую задачу (1.40) с первым порядком относительно h и устойчива, если [7, с. 205]

$$h < h_0 \min\left\{1, \frac{2}{\|p\|_c}\right\}.$$

Тогда согласно основной теореме 1 теории разностных схем получаем, что решение разностной задачи (1.6.18) будет сходиться к решению дифференциальной задачи (1.6.16) с первым порядком относительно h, то есть

$$\left\|[y]_h - y^{(h)}\right\|_{U^h} \le Kh,$$

где K – постоянная, не зависящая от h .

Итак, решая систему линейных алгебраических уравнений (1.6.23) экономичным методом прогонки, получаем приближенные значения $y_0, y_1, \dots, y_N$ решения краевой задачи (1.6.16) в узлах сетки $\overline{\omega_h}$.

Замечание. Метод сеток применяется для решения краевой задачи (1.6.16) при $q(x) > 0$, когда условия (1.6.24) не выполняются. Однако в этом случае заранее предвидеть успешный результат трудно. Обычно проводят расчеты для разных значений шага (не менее трех) и сравнивают y_i в одних и тех же узлах сетки между собой. Если разность этих значений уменьшается при измельчении шага, то решение стремится к некоторому пределу при $h \to 0$.

1.5 Построение РС

Решим дифференциальную задачу (1.1)-(1.6) методом конечных разностей.

Заменим область непрерывного изменения аргумента $x \in [-30, 30]$ дискретной областью $D = \left[-30;30\right] \times [-15;15] \times [0;T],$ в которой $x \in \left[-30;30\right],$ $y \in [-15;15], t \in [0;T].$ Построим в D сеточное разбиение точками множества

$$w_h = \left\{x_i = ih, i = \overline{0, \mathrm{N}}\right\},$$

$$w_H = \left\{y_j = jH, j = \overline{0, \mathrm{M}}\right\},$$

$$w_\tau = \left\{t_k = k\tau, k = \overline{0, \mathrm{L}}\right\}.$$

Тогда декартово произведение множеств узлов $x = ih; y = jH; t = k\tau;$ даст новое множество

$$w_{h\tau} = \left\{x_i = ih, t_j = j\tau, i = \overline{0, \mathrm{N}}, j = \overline{0, \mathrm{M}}\right\}.$$

Аппроксимируем дифференциальную задачу (1.1)-(1.6) разностной, а именно аппроксимируем производные из (1.1)-(1.6) в узлах x_i, y_j, t_k по следующим правым разностным производным 1-го порядка

$$\frac{\partial\sigma(x_i,y_j,t_k)}{\partial t}=\frac{\sigma(x_i,y_j,t_{k+1})-\sigma(x_i,y_j,t_k)}{\tau}+O(\tau)\approx\frac{\sigma(x_i,y_j,t_{k+1})-\sigma(x_i,y_j,t_k)}{\tau};$$
$$\frac{\partial u_1(x_i,y_j,t_k)}{\partial x}=\frac{u_1(x_{i+1},y_j,t_k)-u_1(x_i,y_j,t_k)}{h}+O(h)\approx\frac{u_1(x_{i+1},y_j,t_k)-u_1(x_i,y_j,t_k)}{h};$$
$$\frac{\partial u_2(x_i,y_j,t_k)}{\partial y}=\frac{u_2(x_i,y_{j+1},t_k)-u_2(x_i,y_j,t_k)}{H}+O(H)\approx\frac{u_2(x_i,y_{j+1},t_k)-u_2(x_i,y_j,t_k)}{H};$$
$$\frac{\partial P(x_i,y_j,t_k)}{\partial x}=\frac{P(x_{i+1},y_j,t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{h}+O(h)\approx\frac{P(x_{i+1},y_j,t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{h};$$
$$\frac{\partial w_1(x_i,y_j,t_k)}{\partial x}=\frac{w_1(x_{i+1},y_j,t_k)-w_1(x_i,y_j,t_k)}{h}+O(h)\approx\frac{w_1(x_{i+1},y_j,t_k)-w_1(x_i,y_j,t_k)}{h};$$
$$\frac{\partial P(x_i,y_j,t_k)}{\partial y}=\frac{P(x_i,y_{j+1},t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{H}+O(H)\approx\frac{P(x_i,y_{j+1},t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{H};$$
$$\frac{\partial w_2(x_i,y_j,t_k)}{\partial y}=\frac{w_2(x_i,y_{j+1},t_k)-w_2(x_i,y_j,t_k)}{H}+O(H)\approx\frac{w_2(x_i,y_{j+1},t_k)-w_2(x_i,y_j,t_k)}{H};$$

Представим (1.1)-(1.2) в виде сеточного разбиения

$$\begin{cases}\varphi\dfrac{\sigma(x_i,y_j,t_{k+1})-\sigma(x_i,y_j,t_k)}{\tau}+\dfrac{u_1(x_{i+1},y_j,t_k)-u_1(x_i,y_j,t_k)}{h}+\dfrac{u_2(x_i,y_{j+1},t_k)-u_2(x_i,y_j,t_k)}{H}=0;\\-\varphi\dfrac{\sigma(x_i,y_j,t_{k+1})-\sigma(x_i,y_j,t_k)}{\tau}+\dfrac{w_1(x_{i+1},y_j,t_k)-w_1(x_i,y_j,t_k)}{h}+\dfrac{w_2(x_i,y_{j+1},t_k)-w_2(x_i,y_j,t_k)}{H}=0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

тогда разностные схемы для $\sigma(x_i,y_j,t_{k+1})$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma(x_i,y_j,t_{k+1})=\dfrac{\tau*\sigma(x_i,y_j,t_k)}{\varphi}-\dfrac{\tau*(u_1(x_{i+1},y_j,t_k)-u_1(x_i,y_j,t_k))}{\varphi h}-\dfrac{\tau*(u_2(x_i,y_{j+1},t_k)-u_2(x_i,y_j,t_k))}{\varphi H}; & (1.7)\\\sigma(x_i,y_j,t_{k+1})=\dfrac{\tau*\sigma(x_i,y_j,t_k)}{-\varphi}-\dfrac{\tau*(w_1(x_{i+1},y_j,t_k)-w_1(x_i,y_j,t_k))}{-\varphi h}+\dfrac{\tau*(w_2(x_i,y_{j+1},t_k)-w_2(x_i,y_j,t_k))}{-\varphi H}. & (1.8)\end{cases}$$

Для нахождения $\sigma(x_i,y_j,t_{k+1})$ используем только (1.8), дополнительно найдём соотношение для разностей $\overline{u}_1,\overline{u}_2$

$$u_1(x_{i+1},y_j,t_k)-u_1(x_i,y_j,t_k)=h*\sigma(x_i,y_j,t_k)-\frac{\varphi h*\sigma(x_i,y_j,t_{k+1})}{\tau}-\frac{h*(u_2(x_i,y_{j+1},t_k)-u_2(x_i,y_j,t_k))}{H};$$
$$u_2(x_i,y_{j+1},t_k)-u_2(x_i,y_j,t_k)=H*\sigma(x_i,y_j,t_k)-\frac{\varphi H*\sigma(x_i,y_j,t_{k+1})}{\tau}-\frac{H*(u_1(x_{i+1},y_j,t_k)-u_1(x_i,y_j,t_k))}{h};$$

Представим (1.3)-(1.4) в виде сеточного разбиения

$$\begin{cases} \dfrac{P(x_{i+1},y_j,t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{h}=\dfrac{-\mu_2*w_1(x_i,y_j,t_k)}{kk_2(s_2,T,C)}-\dfrac{\gamma*w_1(x_i,y_j,t_k)}{\sqrt{w_1^2(x_i,y_j,t_k)+w_2^2(x_i,y_j,t_k)}}; \\ \dfrac{P(x_i,y_{j+1},t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{H}=\dfrac{-\mu_2*w_2(x_i,y_j,t_k)}{kk_2(s_2,T,C)}-\dfrac{\gamma*w_2(x_i,y_j,t_k)}{\sqrt{w_1^2(x_i,y_j,t_k)+w_2^2(x_i,y_j,t_k)}}; \\ w_1\equiv w_2\equiv 0,\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)^2<\gamma; \end{cases} <=>$$

$$<=>\begin{cases} P(x_{i+1},y_j,t_k)=\dfrac{-\mu_2 h*w_1(x_i,y_j,t_k)}{kk_2(s_2,T,C)}-\dfrac{\gamma h*w_1(x_i,y_j,t_k)}{\sqrt{w_1^2(x_i,y_j,t_k)+w_2^2(x_i,y_j,t_k)}}+h*P(x_i,y_j,t_k); \\ P(x_i,y_{j+1},t_k)=\dfrac{-\mu_2 H*w_2(x_i,y_j,t_k)}{kk_2(s_2,T,C)}-\dfrac{\gamma H*w_2(x_i,y_j,t_k)}{\sqrt{w_1^2(x_i,y_j,t_k)+w_2^2(x_i,y_j,t_k)}}+H*P(x_i,y_j,t_k); \\ w_1\equiv w_2\equiv 0,\left(\dfrac{P(x_{i+1},y_j,t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{h}\right)^2+\left(\dfrac{P(x_i,y_{j+1},t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{H}\right)^2<\gamma. \end{cases}$$

Заметим, что при

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2>\gamma;$$

верно

$$\sqrt{w_1^2+w_2^2}=w_1\sqrt{1+\left(\frac{P_x}{P_y}\right)^2};<=>$$

$$\sqrt{w_1^2(x_i,y_j,t_k)+w_2^2(x_i,y_j,t_k)} = w_1(x_i,y_j,t_k)\sqrt{1+\left(\frac{P(x_{i+1},y_j,t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{h}:\frac{P(x_i,y_{j+1},t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{H}\right)^2}.$$

Отдельно рассмотрим множитель после $w_1(x_i,y_j,t_k)$ в правой части предыдущей формулы

$$\sqrt{1+\left(\frac{P(x_{i+1},y_j,t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{h}:\frac{P(x_i,y_{j+1},t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{H}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{H\left(P(x_{i+1},y_j,t_k)-P(x_i,y_j,t_k)\right)}{h\left(P(x_i,y_{j+1},t_k)-P(x_i,y_j,t_k)\right)}\right)^2};$$

отдельно рассмотрим слагаемое под корнем в правой части предыдущей формулы

$$\left(\frac{H\left(P(x_{i+1},y_j,t_k)-P(x_i,y_j,t_k)\right)}{h\left(P(x_i,y_{j+1},t_k)-P(x_i,y_j,t_k)\right)}\right)^2 = \frac{H^2\left(P(x_{i+1},y_j,t_k)-P(x_i,y_j,t_k)\right)^2}{h^2\left(P(x_i,y_{j+1},t_k)-P(x_i,y_j,t_k)\right)^2};\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{H^2\left(P(x_{i+1},y_j,t_k)-P(x_i,y_j,t_k)\right)^2}{h^2\left(P(x_i,y_{j+1},t_k)-P(x_i,y_j,t_k)\right)^2} = \frac{H^2\left(P^2(x_{i+1},y_j,t_k)-2P(x_{i+1},y_j,t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}{h^2\left(P^2(x_i,y_{j+1},t_k)-2P(x_i,y_{j+1},t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)};$$

таким образом

$$\sqrt{w_1^2(x_i,y_j,t_k)+w_2^2(x_i,y_j,t_k)} = w_1(x_i,y_j,t_k)\sqrt{1+\frac{H^2\left(P^2(x_{i+1},y_j,t_k)-2P(x_{i+1},y_j,t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}{h^2\left(P^2(x_i,y_{j+1},t_k)-2P(x_i,y_{j+1},t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}}.$$

Перепишем сеточное разбиение (1.3)-(1.4) с учётом предыдущей формулы

$$\begin{cases} P(x_{i+1},y_j,t_k)=\dfrac{-\mu_2 h^* w_1(x_i,y_j,t_k)}{kk_2(s_2,T,C)}+h^*P(x_i,y_j,t_k)- \\ --\dfrac{\gamma h^* w_1(x_i,y_j,t_k)}{w_1(x_i,y_j,t_k)\sqrt{1+\dfrac{H^2\left(P^2(x_{i+1},y_j,t_k)-2P(x_{i+1},y_j,t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}{h^2\left(P^2(x_i,y_{j+1},t_k)-2P(x_i,y_{j+1},t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}}}; \\ P(x_i,y_{j+1},t_k)=\dfrac{-\mu_2 H^* w_2(x_i,y_j,t_k)}{kk_2(s_2,T,C)}+H^*P(x_i,y_j,t_k)- \\ --\dfrac{\gamma H^* w_2(x_i,y_j,t_k)}{w_1(x_i,y_j,t_k)\sqrt{1+\dfrac{H^2\left(P^2(x_{i+1},y_j,t_k)-2P(x_{i+1},y_j,t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}{h^2\left(P^2(x_i,y_{j+1},t_k)-2P(x_i,y_{j+1},t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}}}; \\ w_1\equiv w_2\equiv 0,\left(\dfrac{P(x_{i+1},y_j,t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{h}\right)^2+\left(\dfrac{P(x_i,y_{j+1},t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{H}\right)^2<\gamma; \end{cases}$$

тогда разностные схемы для $w_1(x_i,y_j,t_{k+1}); w_2(x_i,y_j,t_{k+1})$

$$\begin{cases} w_1(x_i,y_j,t_{k+1})=\dfrac{kk_2(s_2,T,C)}{\mu_2 h}\left(h^*P(x_i,y_j,t_k)-P(x_{i+1},y_j,t_k)\right)- \qquad (1.9) \\ -\dfrac{kk_2(s_2,T,C)\gamma h}{\mu_2 h}\left(\sqrt{1+\dfrac{H^2\left(P^2(x_{i+1},y_j,t_k)-2P(x_{i+1},y_j,t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}{h^2\left(P^2(x_i,y_{j+1},t_k)-2P(x_i,y_{j+1},t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}}\right)^{-1}; \\ w_2(x_i,y_j,t_{k+1})=\dfrac{\dfrac{w_1(x_i,y_j,t_{k+1})}{\gamma H}\sqrt{1+\dfrac{H^2\left(P^2(x_{i+1},y_j,t_k)-2P(x_{i+1},y_j,t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}{h^2\left(P^2(x_i,y_{j+1},t_k)-2P(x_i,y_{j+1},t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}}\left(H^*P(x_i,y_j,t_k)-P(x_i,y_{j+1},t_k)\right)}{\left(\dfrac{\mu_2 H w_1(x_i,y_j,t_{k+1})\sqrt{1+\dfrac{H^2\left(P^2(x_{i+1},y_j,t_k)-2P(x_{i+1},y_j,t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}{h^2\left(P^2(x_i,y_{j+1},t_k)-2P(x_i,y_{j+1},t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}}}{kk_2(s_2,T,C)\gamma H}+1\right)}; \qquad (1.10) \\ w_1\equiv w_2\equiv 0,\left(\dfrac{P(x_{i+1},y_j,t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{h}\right)^2+\left(\dfrac{P(x_i,y_{j+1},t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{H}\right)^2<\gamma. \end{cases}$$

Представим (1.5)-(1.6) в виде сеточного разбиения

$$\begin{cases} \dfrac{P(x_{i+1}, y_j, t_k) - P(x_i, y_j, t_k)}{h} = \dfrac{-\mu_1 * u_1(x_i, y_j, t_k)}{kk_1(s_1, T, C)}; \\ \dfrac{P(x_i, y_{j+1}, t_k) - P(x_i, y_j, t_k)}{H} = \dfrac{-\mu_1 * u_2(x_i, y_j, t_k)}{kk_1(s_1, T, C)}; \end{cases} <=>$$

$$<=> \begin{cases} P(x_{i+1}, y_j, t_k) = \dfrac{-\mu_1 h * u_1(x_i, y_j, t_k)}{kk_1(s_1, T, C)} + P(x_i, y_j, t_k); \\ P(x_i, y_{j+1}, t_k) = \dfrac{-\mu_1 H * u_2(x_i, y_j, t_k)}{kk_1(s_1, T, C)} + P(x_i, y_j, t_k); \end{cases} <=>$$

разностные схемы для $u_1(x_i, y_j, t_{k+1}); u_2(x_i, y_j, t_{k+1})$

$$<=> \begin{cases} u_1(x_i, y_j, t_{k+1}) = \dfrac{kk_1(s_1, T, C) * (P(x_i, y_j, t_k) - P(x_{i+1}, y_j, t_k))}{\mu_1 h}; & (1.11) \\ u_2(x_i, y_j, t_{k+1}) = \dfrac{kk_1(s_1, T, C) * (P(x_i, y_j, t_k) - P(x_i, y_{j+1}, t_k))}{\mu_1 H}; & (1.12) \end{cases}$$

Для нахождения $P(x_{i+1}, y_j, t_{k+1})$, $P(x_i, y_{j+1}, t_{k+1})$, $P(x_i, y_j, t_{k+1})$ используем ранее полученные формулы

$$u_1(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) - u_1(x_i, y_j, t_{k+1}) = h * \sigma(x_i, y_j, t_{k+1}) - \frac{\varphi h * \sigma(x_i, y_j, t_{k+2})}{\tau} - \frac{h * (u_2(x_i, y_{j+1}, t_{k+1}) - u_2(x_i, y_j, t_{k+1}))}{H};$$

$$\begin{cases} P(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) - P(x_i, y_j, t_{k+1}) = \dfrac{-\mu_1 h * u_1(x_i, y_j, t_{k+1})}{kk_1(s_1, T, C)}; \\ P(x_i, y_{j+1}, t_{k+1}) - P(x_i, y_j, t_{k+1}) = \dfrac{-\mu_1 H * u_2(x_i, y_j, t_{k+1})}{kk_1(s_1, T, C)}; \end{cases}$$

дополним (1.11)-(1.12), принимая $k = k + 1$ для значения разности $u_1(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) - u_1(x_i, y_j, t_{k+1})$ полученной из (1.7)

$$\begin{cases} P(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) - P(x_i, y_j, t_{k+1}) = \dfrac{-\mu_1 h * u_1(x_i, y_j, t_{k+1})}{kk_1(s_1, T, C)}; \\ P(x_i, y_{j+1}, t_{k+1}) - P(x_i, y_j, t_{k+1}) = \dfrac{-\mu_1 H * u_2(x_i, y_j, t_{k+1})}{kk_1(s_1, T, C)}; \\ u_1(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) - u_1(x_i, y_j, t_{k+1}) = h * \sigma(x_i, y_j, t_{k+1}) - \dfrac{\varphi h * \sigma(x_i, y_j, t_{k+2})}{\tau} - \dfrac{h * (u_2(x_i, y_{j+1}, t_{k+1}) - u_2(x_i, y_j, t_{k+1}))}{H}; \end{cases}$$

представим дополненную (1.11)-(1.12) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{kk_1(s_1, T, C)}{-\mu_1 h}(P(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) - P(x_i, y_j, t_{k+1})) = u_1(x_i, y_j, t_{k+1}); \\ \dfrac{kk_1(s_1, T, C)}{-\mu_1 H}(P(x_i, y_{j+1}, t_{k+1}) - P(x_i, y_j, t_{k+1})) = u_2(x_i, y_j, t_{k+1}); \\ u_1(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) - \dfrac{kk_1(s_1, T, C)}{-\mu_1 h}(P(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) - P(x_i, y_j, t_{k+1})) = h * \sigma(x_i, y_j, t_{k+1}) - \\ -\dfrac{\varphi h * \sigma(x_i, y_j, t_{k+2})}{\tau} - \dfrac{h * (u_2(x_i, y_{j+1}, t_{k+1}) - \dfrac{kk_1(s_1, T, C)}{-\mu_1 H}(P(x_i, y_{j+1}, t_{k+1}) - P(x_i, y_j, t_{k+1})))}{H}; \end{cases}$$

пусть

$$\frac{kk_1(s_1, T, C)}{-\mu_1 h} = \lambda_1;$$

$$\frac{kk_1(s_1, T, C)}{-\mu_1 H} = \lambda_2;$$

$$h * \sigma(x_i, y_j, t_{k+1}) - \frac{\varphi h * \sigma(x_i, y_j, t_{k+2})}{\tau} = \lambda_3; \quad u_2(x_i, y_{j+1}, t_{k+1})$$

$$\frac{h}{H} = \lambda_4;$$

тогда

$$\begin{cases} \lambda_1(P(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) - P(x_i, y_j, t_{k+1})) = u_1(x_i, y_j, t_{k+1}); \\ \lambda_2(P(x_i, y_{j+1}, t_{k+1}) - P(x_i, y_j, t_{k+1})) = u_2(x_i, y_j, t_{k+1}); \\ -\lambda_1(P(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) - P(x_i, y_j, t_{k+1})) + \dfrac{\lambda_2}{H}(P(x_i, y_{j+1}, t_{k+1}) - P(x_i, y_j, t_{k+1}) = \lambda_3 - u_1(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) - \\ -\lambda_4 u_2(x_i, y_{j+1}, t_{k+1}); \end{cases}$$

далее, примем

$$P(x_i, y_j, t_{k+1}) = x; P(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) = y; P(x_i, y_{j+1}, t_{k+1}) = z;$$

$$\lambda_5 = \frac{u_1(x_i, y_j, t_{k+1})}{\lambda_1};$$

$$\lambda_6 = \frac{u_2(x_i, y_j, t_{k+1})}{\lambda_2};$$

$$\lambda_7 = \frac{\lambda_3 - u_1(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) - \lambda_4 u_2(x_i, y_{j+1}, t_{k+1})}{\lambda_1};$$

тогда

$$\begin{cases} y - x = \lambda_5; \\ z - x = \lambda_6; \\ -y + x + \dfrac{H^2}{h}(z - x) = \lambda_7; \end{cases}$$

что равно

$$\begin{pmatrix} (-1) & 1 & 0 \\ (-1) & 0 & 1 \\ \left(1 - \dfrac{H^2}{h}\right) & (-1) & \left(\dfrac{H^2}{h}\right) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \end{Bmatrix}.$$

$\lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, h, H$ – известны на данном этапе, => СЛАУ может быть решена, например, методом Крамера, =>

$$\Delta = \det\left(\left(\begin{matrix} (-1) & 1 & 0 \\ (-1) & 0 & 1 \\ \left(1-\frac{H^2}{h}\right) & (-1) & \left(\frac{H^2}{h}\right) \end{matrix}\right)\right);$$

$$\delta_1 = \det\left(\left(\begin{matrix} \lambda_5 & 1 & 0 \\ \lambda_6 & 0 & 1 \\ \lambda_7 & (-1) & \left(\frac{H^2}{h}\right) \end{matrix}\right)\right);$$

$$\delta_2 = \det\left(\left(\begin{matrix} (-1) & \lambda_5 & 0 \\ (-1) & \lambda_6 & 1 \\ \left(1-\frac{H^2}{h}\right) & \lambda_7 & \left(\frac{H^2}{h}\right) \end{matrix}\right)\right);$$

$$\delta_3 = \det\left(\left(\begin{matrix} (-1) & 1 & \lambda_5 \\ (-1) & 0 & \lambda_6 \\ \left(1-\frac{H^2}{h}\right) & (-1) & \lambda_7 \end{matrix}\right)\right);$$

так как

$$x = \frac{\delta_1}{\Delta}; y = \frac{\delta_2}{\Delta}; z = \frac{\delta_3}{\Delta};$$

или

$$P(x_i, y_j, t_{k+1}) = \frac{\det\left(\begin{matrix} \left(\frac{u_1(x_i, y_j, t_{k+1})}{\frac{kk_1(s_1, T, C)}{-\mu_1 h}}\right) & 1 & 0 \\ \left(\frac{u_2(x_i, y_j, t_{k+1})}{\frac{kk_1(s_1, T, C)}{-\mu_1 H}}\right) & 0 & 1 \\ \left(\frac{h*\sigma(x_i, y_j, t_{k+1}) - \frac{\varphi h*\sigma(x_i, y_j, t_{k+2})}{\tau} - u_1(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) - \frac{h}{H} u_2(x_i, y_{j+1}, t_{k+1})}{\frac{kk_1(s_1, T, C)}{-\mu_1 h}}\right) & (-1) & \left(\frac{H^2}{h}\right) \end{matrix}\right)}{\det\left(\begin{matrix} (-1) & 1 & 0 \\ (-1) & 0 & 1 \\ \left(1 - \frac{H^2}{h}\right) & (-1) & \left(\frac{H^2}{h}\right) \end{matrix}\right)};$$

$$P(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) = \frac{\det\left(\begin{matrix} (-1) & \left(\frac{u_1(x_i, y_j, t_{k+1})}{\frac{kk_1(s_1, T, C)}{-\mu_1 h}}\right) & 0 \\ (-1) & \left(\frac{u_2(x_i, y_j, t_{k+1})}{\frac{kk_1(s_1, T, C)}{-\mu_1 H}}\right) & 1 \\ \left(1 - \frac{H^2}{h}\right) & \left(\frac{h*\sigma(x_i, y_j, t_{k+1}) - \frac{\varphi h*\sigma(x_i, y_j, t_{k+2})}{\tau} - u_1(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) - \frac{h}{H} u_2(x_i, y_{j+1}, t_{k+1})}{\frac{kk_1(s_1, T, C)}{-\mu_1 h}}\right) & \left(\frac{H^2}{h}\right) \end{matrix}\right)}{\det\left(\begin{matrix} (-1) & 1 & 0 \\ (-1) & 0 & 1 \\ \left(1 - \frac{H^2}{h}\right) & (-1) & \left(\frac{H^2}{h}\right) \end{matrix}\right)};$$

$$
P(x_i, y_{j+1}, t_{k+1}) = \frac{\det\left(\left(\begin{matrix} (-1) & 0 & \left(\dfrac{\dfrac{u_1(x_i, y_j, t_{k+1})}{kk_1(s_1, T, C)}}{-\mu_1 h}\right) \\ (-1) & 1 & \left(\dfrac{\dfrac{u_2(x_i, y_j, t_{k+1})}{kk_1(s_1, T, C)}}{-\mu_1 H}\right) \\ \left(1 - \dfrac{H^2}{h}\right) & \left(\dfrac{H^2}{h}\right) & \left(\dfrac{\dfrac{h * \sigma(x_i, y_j, t_{k+1}) - \dfrac{\varphi h * \sigma(x_i, y_j, t_{k+2})}{\tau} - u_1(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) - \dfrac{h}{H} u_2(x_i, y_{j+1}, t_{k+1})}{kk_1(s_1, T, C)}}{-\mu_1 h}\right) \end{matrix}\right)\right)}{\det\left(\left(\begin{matrix} (-1) & 1 & 0 \\ (-1) & 0 & 1 \\ \left(1 - \dfrac{H^2}{h}\right) & (-1) & \left(\dfrac{H^2}{h}\right) \end{matrix}\right)\right)};
$$

1.6 Граничные и начальные условия краевой задачи, аппроксимация граничных и начальных условий

Так как граничные и начальные условия являются константами, то их аппроксимация точная.

Граничные условия для разностных схем (для всех t_k):

Пусть $i=i_{наг}$, $j=j_{наг}$ – узел (узлы) сетки, попадающие на нагнетающую скважину;

И пусть $i=j_{доб}$, $j=j_{доб}$ – узел (узлы) сетки, попадающие на добывающую скважину.

Тогда

$$P_{i наг,\, j наг} = \tilde{D};\ P_{i доб\,,\, j доб} = 0.$$

$$0 \le i \le I;\ 0 \le j \le J;$$

$u_1(x_{i=0},y_j,t_k)=0;$	$u_1(x_{i=I},y_j,t_k)=0;$	$u_2(x_i,y_{j=0},t_k)=0;$
$u_2(x_{i=0},y_j,t_k)=0;$	$u_2(x_{i=I},y_j,t_k)=0;$	$u_2(x_i,y_{j=J},t_k)=0;$
$w_1(x_{i=0},y_j,t_k)=0;$	$w_1(x_{i=I},y_j,t_k)=0;$	$w_2(x_i,y_{j=0},t_k)=0;$
$w_2(x_{i=0},y_j,t_k)=0;$	$w_2(x_{i=I},y_j,t_k)=0;$	$w_2(x_i,y_{j=J},t_k)=0;$

Начальное условие для разностных схем на шаге $t=t_{k=0}=0$:

$$\sigma(x_i,y_j,0)=0;$$

$$u_1(x_i,y_j,0)=0;$$

$$u_2(x_i,y_j,0)=0;$$

$$w_1(x_i,y_j,0)=0;$$

$$w_2(x_i,y_j,0)=0;$$

$$P(x_i,y_j,0)=P_{пласта};$$

$P_{пласта}=P_{пласта} - P_{добыв.скваж.}$.(для каждого i,j вычисляется);

1.7 Некоторые свойства ЯРС и алгоритм решения разностной задачи (1.7)-(1.12)

1.7.1 Некоторые свойства ЯРС

Иллюстрация к краевой задаче из главы 1.1 представлена в виде

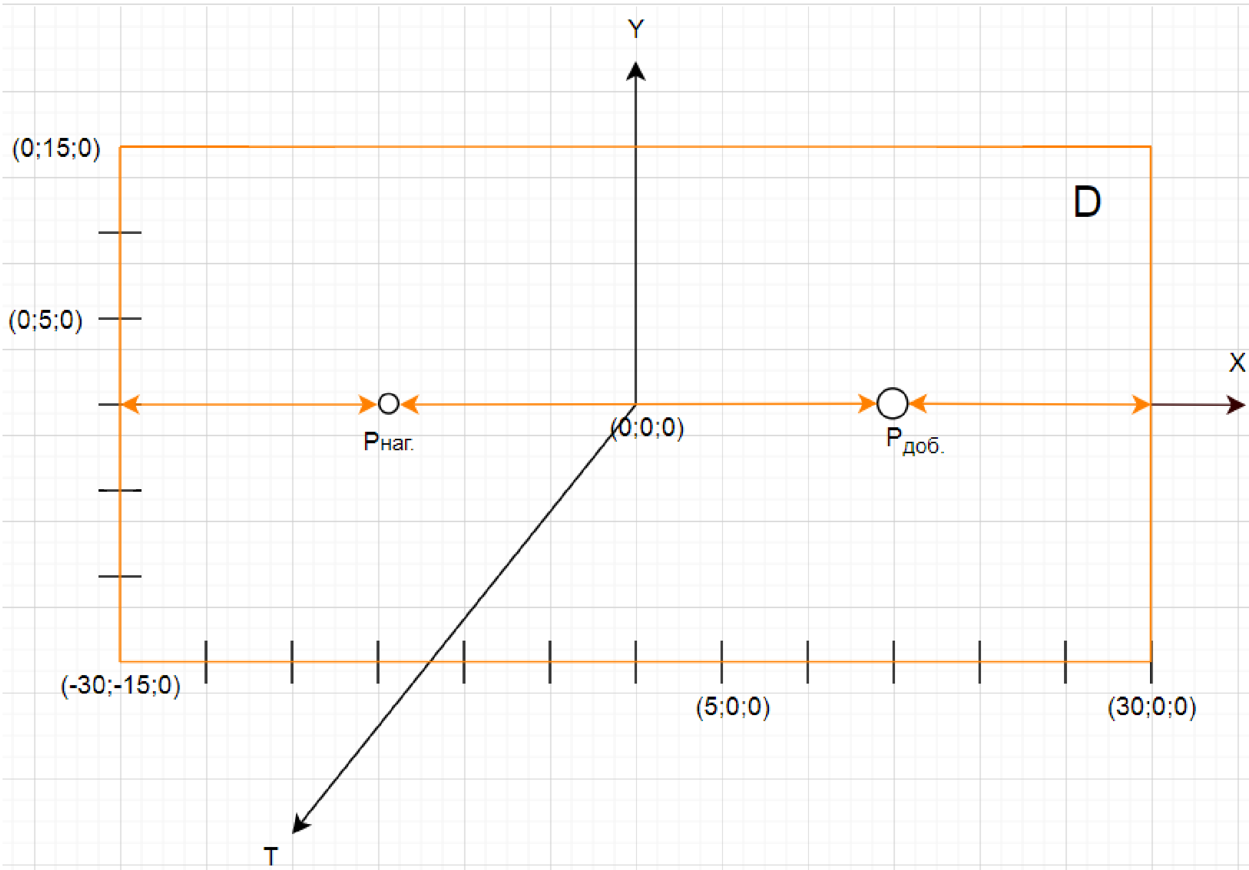

Рисунок 1.3 – Сечение нефтяного пласта

Для решения разностной задачи область D на рисунке 1.3 представляется сеточным разбиением предложенным главе 1.5, причём мелкость разбиения такая, что хотя бы 1 узел попадает на $P_{наг.}$, $P_{доб.}$.

Схематичное разбиение области сеткой может быть таким

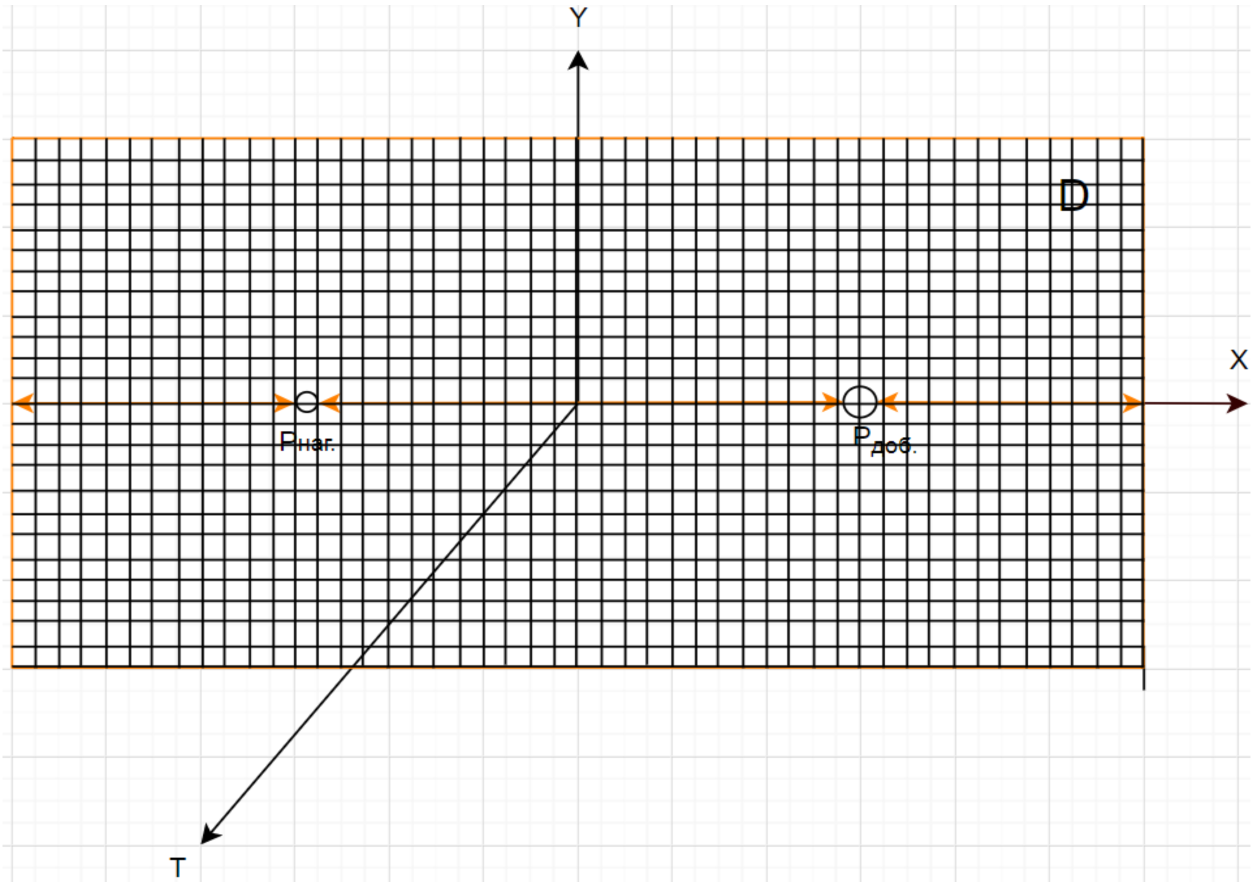

Рисунок 1.4 – Сеточное разбиение сечения нефтяного пласта

Шаблоном ЯРС является

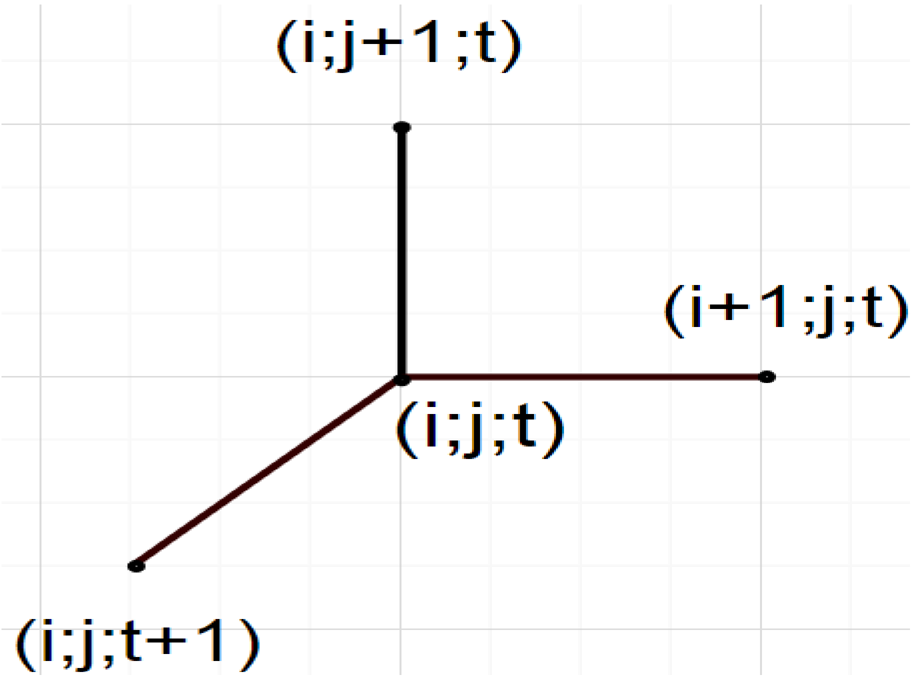

Рисунок 1.5 – Шаблон ЯРС для 2-d задачи

Устойчивость ЯРС для 2-d задачи.

При

$$h_x = h_y.$$

Учитывая

Зависимость условия устойчивости явной разностной схемы, аппроксимирующей дифференциальное уравнение параболического типа, от размерности задачи

Размерность пространства	1	2	3	N
Условие устойчивости	$\frac{\Delta t}{h^2} \le \frac{1}{2\sigma}$	$\frac{\Delta t}{h^2} \le \frac{1}{4\sigma}$	$\frac{\Delta t}{h^2} \le \frac{1}{6\sigma}$	$\frac{\Delta t}{h^2} \le \frac{1}{2N\sigma}$

Вероятно, условием устойчивости ЯРС является

$$\Delta t \le \frac{h^2}{4}?$$

1.7.2 Общая схема решения и описание вспомогательных алгоритмов

Пусть I,J,K – последние узловые точки в ЯРС, (i – дискретная область по оси x, j – дискретная область по оси y, k – дискретная область по оси t) тогда

1) Известно $\sigma(x_0, y_0, t_0)$, $w_1(x_0, y_0, t_0), w_2(x_0, y_0, t_0)$ => вычисляется $\sigma(x_0, y_0, t_1),$ которое является решением **задачи 1** (для уравнения Дарси);

2) Известно $w_1(x_0, y_0, t_0), w_2(x_0, y_0, t_0), w_1(x_1, y_0, t_0), w_2(x_0, y_1, t_0)$, вычисляется $P(x_0,y_0,t_0)=P_{пласта} – P_{добыв.скваж.}$, $P(x_1, y_0, t_0), P(x_0, y_1, t_0)$ => вычисляются

$w_1(x_0, y_0, t_1), w_2(x_0, y_0, t_1),$ которое является решением **задачи 2** (для уравнения Бингама-Шведова);

3) Уже известно $P(x_0,y_0,t_0)$., $P(x_1, y_0, t_0), P(x_0, y_1, t_0)$ => вычисляются $u_1(x_0, y_0, t_1), u_2(x_0, y_0, t_1)$ решение **задачи 3** (для уравнения Бингама-Шведова);

4) Известно $u_1(x_0, y_0, t_1), u_2(x_0, y_0, t_1), u_1(x_1, y_0, t_1), u_2(x_0, y_1, t_1), \sigma(x_0, y_0, t_1)$, => вычисляется $\sigma(x_1, y_1, t_2)$ (**Задача 1**) => вычисляются $P(x_1, y_0, t_1), P(x_0, y_1, t_1), P(x_0, y_0, t_1)$ решение **задачи 4** (для уравнения Бингама-Шведова);

5) Далее циклично повторяются 1)-4). Пусть i=0,j=0,k=0, сначала заполняются для i=i+1, j=j+1, k=k+1 известные величины, затем вычисляется решение **задач 1-4** для i=i+1, j=j+1,k=k+2, и при необходимости i=i+2, j=j+2, k=k+2. Процесс вычисления повторяется для $\forall\ I \geq i \geq 0, J \geq j \geq 0, K \geq k \geq 0$ и вычисляются:

$\sigma(x_i, y_j, t_k)$ – относительная водонасыщенность для фаз: воды, нефти.

$w_1(x_i, y_j, t_k), w_2(x_i, y_j, t_k)$ – векторные поля скоростей для фазы нефти;

$u_1(x_i, y_j, t_k), u_2(x_i, y_j, t_k)$ – векторные поля скоростей для фазы воды;

$P(x_i, y_j, t_k)$ – парциальное давление.

Задача 1.

ЯРС для закона Дарси (теплопроводностью пласта пренебрегаем)

$$\sigma(x_i, y_j, t_{k+1}) = \frac{\tau * \sigma(x_i, y_j, t_k)}{-\varphi} - \frac{\tau * (w_1(x_{i+1}, y_j, t_k) - w_1(x_i, y_j, t_k))}{-\varphi h} + \frac{\tau * (w_2(x_i, y_{j+1}, t_k) - w_2(x_i, y_j, t_k))}{-\varphi H}.$$

Задача 2.

ЯРС для закона сохранения импульса (пренебрегая силой тяжести), для вязко-пластичной нефти с предельным градиентом давления по реологической модели вязкопластической среды Бингама-Шведова, для фазы нефти

$$
\begin{cases}
w_1(x_i,y_j,t_{k+1}) = \dfrac{kk_2(s_2,T,C)}{\mu_2 h}\left(h*P(x_i,y_j,t_k)-P(x_{i+1},y_j,t_k)\right)- \\
-\dfrac{kk_2(s_2,T,C)\gamma h}{\mu_2 h}\left(\sqrt{1+\dfrac{H^2\left(P^2(x_{i+1},y_j,t_k)-2P(x_{i+1},y_j,t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}{h^2\left(P^2(x_i,y_{j+1},t_k)-2P(x_i,y_{j+1},t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}}\right)^{-1}; \\
w_2(x_i,y_j,t_{k+1}) = \dfrac{\dfrac{w_1(x_i,y_j,t_{k+1})}{\gamma H}\sqrt{1+\dfrac{H^2\left(P^2(x_{i+1},y_j,t_k)-2P(x_{i+1},y_j,t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}{h^2\left(P^2(x_i,y_{j+1},t_k)-2P(x_i,y_{j+1},t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}}\left(H*P(x_i,y_j,t_k)-P(x_i,y_{j+1},t_k)\right)}{\left(\dfrac{\mu_2 H w_1(x_i,y_j,t_{k+1})\sqrt{1+\dfrac{H^2\left(P^2(x_{i+1},y_j,t_k)-2P(x_{i+1},y_j,t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}{h^2\left(P^2(x_i,y_{j+1},t_k)-2P(x_i,y_{j+1},t_k)P(x_i,y_j,t_k)+P^2(x_i,y_j,t_k)\right)}}}{kk_2(s_2,T,C)\gamma H}+1\right)}; \\
w_1 \equiv w_2 \equiv 0, \left(\dfrac{P(x_{i+1},y_j,t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{h}\right)^2+\left(\dfrac{P(x_i,y_{j+1},t_k)-P(x_i,y_j,t_k)}{H}\right)^2 < \gamma.
\end{cases}
$$

Задача 3.

Закон сохранения импульса в векторной форме (пренебрежём силой тяжести), для вязко-пластичной нефти с предельным градиентом давления по реологической модели вязкопластической среды Бингама-Шведова, для фазы воды

$$
\begin{cases}
u_1(x_i,y_j,t_{k+1}) = \dfrac{kk_1(s_1,T,C)*(P(x_i,y_j,t_k)-P(x_{i+1},y_j,t_k))}{\mu_1 h}; \\
u_2(x_i,y_j,t_{k+1}) = \dfrac{kk_1(s_1,T,C)*(P(x_i,y_j,t_k)-P(x_i,y_{j+1},t_k))}{\mu_1 H};
\end{cases}
$$

Задача 4.

$$
\begin{cases}
P(x_{i+1},y_j,t_{k+1})-P(x_i,y_j,t_{k+1}) = \dfrac{-\mu_1 h*u_1(x_i,y_j,t_{k+1})}{kk_1(s_1,T,C)}; \\
P(x_i,y_{j+1},t_{k+1})-P(x_i,y_j,t_{k+1}) = \dfrac{-\mu_1 H*u_2(x_i,y_j,t_{k+1})}{kk_1(s_1,T,C)}; \\
u_1(x_{i+1},y_j,t_{k+1})-u_1(x_i,y_j,t_{k+1}) = h*\sigma(x_i,y_j,t_{k+1})-\dfrac{\varphi h*\sigma(x_i,y_j,t_{k+2})}{\tau}-\dfrac{h*(u_2(x_i,y_{j+1},t_{k+1})-u_2(x_i,y_j,t_{k+1}))}{H};
\end{cases}
$$

Приводится к СЛАУ и решается методом Крамера (глава 1.5)

$$P(x_i, y_j, t_{k+1}) = \frac{\delta_1}{\Delta}; P(x_{i+1}, y_j, t_{k+1}) = \frac{\delta_2}{\Delta}; P(x_i, y_{j+1}, t_{k+1}) = \frac{\delta_3}{\Delta};$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений. Учебное пособие, Томск 2014.

2 Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, том 2. – М.:ГИФМЛ, 1960. –620с.

3 Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.:Наука, 1989. – 432с.

4 Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. . – М.:Наука, 1967. –368с.

5 Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985.

6 Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на фортране. – М.: изд-во МГУ, 1990. – 336 с. 10.

7 Ракитин В.И., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров. – М.: Высшая школа, 1998. – 383 с.

8 Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. – М.: Наука, 1977. – 439 с.