Notion d'algorithmique - Formules et propriétés

Les suites - définition

Une suite réelle est une application d'une partie de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$
On définit une suite notée U_n par son terme général (appelé terme de rang n) et par son premier terme U_0. La suite est alors définie par une équation.

Exemple :

$U_n=n^2+n+1$ et à l'évidence $U_0=1$

Ce qui donne U0=1, $u1=1^2+1+1=3$, $u2=2^2+2+1=7$, $u3=3^2+3+1=13$

Une suite peut être également définie par la valeur du premier terme et par une **relation de récurrence** :

Exemple :

$U_0=1$

$U_n=2U_{n-1}-6$ pour tout n non nul.

Parmi les suites récurrentes on trouve les suites arithmétiques et géométriques.

Une **suite arithmétique** est une liste de nombre dont chaque élément offre la possibilité de devenir le suivant, grâce à une " raison " qui lui est ajouté. Elle permet donc d'illustrer des phénomènes qui ont une variation régulière et constante. $\mathbf{U_{n+1}=U_n+r}$

Une **suite géométrique** correspond à une **suite** logique de nombres. La place de chaque nombre dans cette **suite** logique permet de calculer le suivant en le multipliant par une donnée exacte, appelée coefficient constant, ou raison. $\mathbf{U_{n+1}=U_n.r}$

Les séries - définition

En mathématiques, la **série** constitue une généralisation de la notion de somme pour une succession infinie de termes. L'étude des séries consiste à évaluer la somme d'un nombre fini *n* de termes successifs, puis, par un calcul de limite, à identifier le comportement lorsque *n* devient indéfiniment grand. Un certain nombre de méthodes permettent de déterminer la nature (convergence ou non) des séries sans réaliser explicitement les calculs.

Une série Sn est composée de la somme de n termes d'une suite :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Exemple :

Suite : $U_0=1$ et $U_n=2.U_{n-1}$
Série : $S_n=U_0+U_1+\ldots+U_n$

Formulation

Il existe différentes façons de formuler un problème en algorithmique.

- Les algorithmes exprimant une suite de règle formelle.
- Les séries
- Les relations de récurrence
- Les polynômes
- La notation de LANDAU

Exemples de formulation avec les sommations

Suite U_0=1 et Un =U_{n-1}+1 (**relation de récurrence**)

Série : Sn=1+2+3+…+n = $\sum_1^n Un$

Sn = O(n^2)   **notation de LANDAU** (on la verra plus tard)

Sn = $\frac{n.(n+1)}{2}$ =$\frac{n^2+n+1}{2}$ **polynôme** (factorisé ou développé)

Suite de règles formelles (algorithme)

```
U0=S=1
Pour i allant de 1 à n
        Un=Un-1 + 1
        S=S+1
Fin pour
```

Implémentation de l'algorithme en C

```
main()
{
int i=0;
int n = 5; // nombre de terme de la série. 5 par exemple
int Un_1=1;  // on initialise le 1er terme U0 = Un-1 = 1
int somme=1;  // on initialise somme avec le 1er resultat de la somme, cad  U0=1
for (i=0;i<n-1;i++)    // attention aux indices. On commence à 0 en langage C, mais à 1 en algo
   {
   Un_1=Un_1+1;  // on calcule chaque terme Un-1 de la suite
   somme=somme+Un_1;  // on l'ajoute à la somme précédente pour obtenir la série
   printf("%d  %d\n", Un_1,somme);
   }
}
```

Exercice 1 :

Trouvez une formulation polynomiale simple pour la série $Sn = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1$

Exercice 2 :

Démontrez par récurrence que $\sum_{1}^{n} Un$ = $\frac{n.(n+1)}{2}$

Bornage par récurrence mathématique

Il n'est pas nécessaire de connaître la valeur d'une sommation pour utiliser la récurrence mathématique. On peut également s'en servir pour montrer l'existence d'une **borne** (une limite).

Par exemple, démontrons que la série $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ est en O(3^n). La notation O(3^n) (notation de LANDAU) qu'on verra plus tard dans le détail, signifie que la série est bornée par une limite supérieure proportionnelle à 3^n.

Exercice 3 : démontrons par récurrence que $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} 3^k \leq c.3^n}$ pour une certaine constante c.

1) **Condition initiale** pour $n = 0 \ et \ c \geq 1, \ \ on \ a \ \ \sum_{k=0}^{0} 3^0 \ \leq c.3^0$ ce qui est vrai
2) On **suppose** la proposition vraie pour n
3) On veut la **prouver** pour n+1, c'est-à-dire qu'on veut prouver que $\sum_{k=0}^{n+1} 3^k \leq c.3^{n+1}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{n+1} \leq c.3^n + \ 3^{n+1}$$

Exercice 4 :

Ecrire un programme qui calcule la série $S_n = \sum_{n=1}^{m} n.(-1)^{n-1}$

Exercice 5:

Ecrire un programme qui calcule la série $\boldsymbol{S_n = \sum_{k=0}^{n} 2.k + 1 \ - \ \sum_{k=0}^{n} 2.k}$