Geometrie
Blatt 5
P.Gepperth, S.Jung
Gruppe 4

Aufgabe 1

Es gilt

$$\emptyset \neq Y \text{ ist AUR} :\Leftrightarrow U_Y := \{\overrightarrow{PQ} : Q \in Y\} \text{ ist UVR für ein } P \in Y$$

Behauptung

1) i)

$$U_Y = \{\overrightarrow{P'Q} : Q \in Y\} \quad \forall P' \in Y$$

ii)

$$Y = P' + U_Y \quad \forall P' \in Y$$

2)

$$Y \in \mathbb{A}(V) \text{ ist AUR } \Rightarrow U_Y = \{\overrightarrow{PQ} : P, Q \in Y\} \subseteq V \text{ ist UVR}$$

Die Umkehrung gilt nicht.

Beweis

1) i) Sei $P' \in Y$ beliebig. Dann gilt $\overrightarrow{PP'} \in U_Y$ und es gilt

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q} \\ \Leftrightarrow \quad \underbrace{\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PP'}}_{\in U_Y} &= \overrightarrow{P'Q} \in U_Y. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\{\overrightarrow{P'Q} : Q \in Y\} \subseteq U_Y. \tag{1}$$

Da $P \in Y$ gilt $\overrightarrow{P'P} \in \{\overrightarrow{P'Q} : Q \in Y\}$. Damit gilt nun

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P'Q} &= \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PQ} \\ \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P'Q} - \overrightarrow{P'P} &= \overrightarrow{PQ} \in \{\overrightarrow{P'Q} : Q \in Y\}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\{\overrightarrow{PQ} : Q \in Y\} = U_Y \subseteq \{\overrightarrow{P'Q} : Q \in Y\}. \tag{2}$$

Mit (1) und (2) gilt nun

$$\{\overrightarrow{P'Q} : Q \in Y\} = U_Y$$

ii)

$$\begin{aligned} Y &= P + U_Y \\ &= \{\overrightarrow{OP} + u : u \in U_Y\} \\ &= \{\overrightarrow{OP'} + \underbrace{\overrightarrow{P'P}}_{\in U_Y} + u : u \in U_Y\} \\ &= \{\overrightarrow{OP'} + u : u \in U_Y\} \\ &= P' + U_Y \end{aligned}$$

2) Es gilt

$$
\begin{aligned}
Y \in \mathbb{A}(V) \text{ ist AUR} &\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} U_Y = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in Y\} \text{ für ein } P \in Y \text{ ist UVR}\\
&\overset{1.i)}{\Rightarrow} U_Y = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in Y\} \quad \forall P \in Y \text{ ist UVR}\\
&\Leftrightarrow U_Y = \{\overrightarrow{PQ} : P, Q \in Y\} \text{ ist UVR.}
\end{aligned}
$$

Man betrachte nun einen Strahl $Y = \overset{\rightharpoonup}{AB} \in \mathbb{A}(V)$, so ist

$$U_Y = \{\overrightarrow{PQ} : P, Q \in Y\}$$

ein UVR. Bekanntlich ist ein Strahl aber kein AUR.

$\square$

Aufgabe 3

1) Es sei $L \subset \mathbb{R}^5$ gegeben als Lösungsmenge von

$$x_1 = 1, \quad x_2 = x_5, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0, \quad x_1 + x_4 = 1$$

und E als Bild der affinen Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$

$$(t_1, t_2, t_3) \mapsto (1,0,0,1,0) + t_1(0,2,1,-1,2) + t_2(1,0,0,1,0) + t_3(1,2,1,0,2)$$

.
Dann ist

$$L = (1,0,1,0,0) + t(0,1,0,0,1), \quad t \in \mathbb{R}$$

die Parameterform von L mit $\dim(L) = 1$. Für die implizite Form sind $\dim(\mathbb{R}^5) - \dim(L) = 4$ Gleichungen nötig. Hierfür wähle man

$$x_1 = 1, \quad x_2 = x_5, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0,$$

da $x_1 + x_4 = 1$ hierdurch bereits erfüllt ist.
Nun ist

$$E = (1,0,0,1,0) + t_1(0,2,1,-1,2) + t_2(1,0,0,1,0) + t_3(1,2,1,0,2), \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$$

die Parameterform von E mit $\dim(E) = 3$. Es gilt damit

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + t_2 + t_3 \\ x_2 &= 2(t_1 + t_3) \\ x_3 &= t_1 + t_3 \\ x_4 &= 1 - t_1 + t_2 \\ x_5 &= 2(t_1 + x_3) \end{aligned}$$

Offenbar gilt

$$x_2 = x_5 \tag{3}$$

und

$$x_1 - x_4 = x_3 \tag{4}$$

Die Gleichungen (3) und (4) sind $\dim(\mathbb{R}^5) - \dim(E) = 2$ Gleichungen und beinhalten alle x_i für $i = 1, \ldots, 5$ und sind damit die implizite Form.

2) Man betrachte nun die impliziten Formen von L

$$x_1 = 1, \quad x_2 = x_5, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0$$

und E

$$x_2 = x_5, \quad x_1 - x_4 = x_3.$$

Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 - x_4 \\ &= 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

E schränkt L folglich nicht weiter ein. Damit gilt

$$E \cap L = L,$$

L liegt also in E. Ist dies der Fall, so gilt aber

$$E \cup L = E$$

mit Dimensionen wie oben.

MC

1. falsch
2. richtig
3. falsch
4. richtig
5. falsch