P.Gepperth, S.Jung
Gruppe 4

Aufgabe 2

Seien ein Punkt $Z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, eine Gerade $L : t \mapsto p + tr$ und eine Ebene $E : m_1x_1 + m_2x_x + m_3x_3 = b$ gegeben. Ferner gelte $Z \notin E$ und $L \cap E$ ein Punkt.

1. Es sei $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Dann ist

$$L(X) : t \mapsto \mathbf{x} + t\mathbf{r}$$

die zu L parallel verschobene Gerade, sodass $X \in L$. Da $K \cap E$ ein Punkt ist, ist auch $L(X) \cap E = \{S_1\}$ genau ein Punkt. Der Schnittpunkt lässt sich wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} & m_1(x_1 + tr_1) + m_2(x_2 + tr_2) + m_3(x_3 + tr_3) = b \\ \Leftrightarrow \quad & t(m_1r_1 + m_2r_2 + m_3r_3) = b - m_1x_1 - m_2x_2 - m_3x_3 \\ \Leftrightarrow \quad & t = \frac{b - (m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)}{m_1r_1 + m_2r_2 + m_3r_3} \\ & = \frac{b - \langle \mathbf{m}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{m}, \mathbf{r} \rangle} \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt und

$$s_1 = \mathbf{x} + \frac{b - \langle \mathbf{m}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{m}, \mathbf{r} \rangle} \cdot \mathbf{r}.$$

ist die Projektion von X parallel zu L auf E.

2. Für eine Zentralprojektion auf E mit Zentrum $Z \notin E$ wird zuerst eine Ausschlussebene H bestimmt. Für diese gilt

$$E \parallel H$$

und

$$Z \in H.$$

Damit folgt

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3\}$$

als Ausschlussebene. Sei nun $X = (x_1, x_2, x_3) \notin H$. Definiere

$$Y : t \mapsto \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \\ x_3 - z_3 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{v}}.$$

Y ist nicht parallel zu E, folglich existiert ein eindeutiger Schnittpunkt $Y \cap E = \{S_2\}$, der sich analog zum vorangegangenen berechnet. Es gilt

$$\begin{aligned} s_2 &= \mathbf{z} + \frac{b - \langle \mathbf{m}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{m}, \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{z} + \frac{b - \langle \mathbf{m}, \mathbf{x} \rangle}{b - \langle \mathbf{m}, \mathbf{z} \rangle} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Kollineation. Weiter sei o.E. $f(0) = 0$. Nach VL ist f parallelentreu auf Geraden.

Behauptung

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

für unabhängige $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Beweis

Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ unabhängig. Es gilt

$$0 \vee x \parallel y \vee (x+y).$$

Aus der Parallelentreue folgt damit

$$f(0) \vee f(x) \parallel f(y) \vee f(x+y).$$

Ferner gilt damit

$$-x \vee (y) \parallel f(-x) \vee f(y)$$

mit

$$f(y) = f(-x) + f(y) + f(x).$$

Daraus folgt

$$f(-x) = -f(x)$$

Ferner gilt auch

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x+y) + f(-x) \\ &= f(x+y) - f(x) \\ \Leftrightarrow \quad f(x) + f(y) &= f(x+y) \end{aligned}$$

□

MC

1. falsch
2. richtig
3. richtig
4. falsch
5. richtig