Aufgabe 1

Es sei $\mathcal{K}$ ein Kreis mit Mittelpunkt M. Weiter seien zwei Punkte $A, B \in \mathcal{K}$. Weiter sei $X \notin A \vee B$. Dann gilt

$$X \in \mathcal{K} \quad \Leftrightarrow \quad 2\angle AXB = \angle AMB$$

Beweis. Man betrachte Hin- und Rückrichtung.

„$\Rightarrow$“ Da $A, X \in \mathcal{K}$ gilt $|AM| = |XM|$ und damit $\triangle AMX$ gleichschenklig. Damit gilt

$$\angle XAM = \angle AXM$$

und auch

$$\angle XMA = \text{GW} - 2\angle AXM \tag{1}$$

Sei nun $S \in (X \vee M) \cap (A \vee B)$. Dann gilt

$$\angle XMA + \angle AMS = \text{GW}$$

und somit

$$\begin{aligned} \angle AMS &= \text{GW} - \angle XAM \\ &\overset{(1)}{=} 2\angle AXM \end{aligned}$$

Analog gilt für $\triangle BMX$

$$\angle BMS = 2\angle BXM$$

Folglich gilt damit

$$\begin{aligned} \angle AMB &= \angle AMS + \angle BMS \\ &= 2\left(\angle AXM + \angle BXM\right) \\ &= 2\angle AXB \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“ Es sei $2\angle AXB = \angle AMB$. Sei weiter $D \in (A \vee X) \cap \mathcal{K}$, also insbesondere $D \in \mathcal{K}$. Dann gilt für D (wie oben)

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AMB \overset{Vor.}{=} \angle AXB$$

Mit der Winkelsumme eines Dreiecks folgt nun

$$\begin{aligned} \angle ABD &= \text{GW} - \angle BAD - \angle ADB \\ &= \text{GW} - \angle BAD - \angle AXB \\ &= \angle ABX \end{aligned}$$

Aufgrund der gemeinsamen Seite AB folgt mit WSW, dass

$$\triangle ADB \cong \triangle AXB$$

Folglich gilt $X = D$ und es folgt die Behauptung.

$\square$

Liegen $A, B \in \mathcal{K}$ so, dass $M \in A \vee B$, so ist

$$\angle AMB = \mathrm{GW}$$

Für jedes $A, B \neq X \in \mathcal{K}$ gilt folglich

$$\angle AXB = \frac{1}{2}\mathrm{GW} = \mathrm{RW}$$

Es gilt also der Satz des Thales.

Aufgabe 3

Sei $\triangle ABC \in \mathbb{C}$.

Behauptung

i) Der Schwerpunkt S von $\triangle ABC$ ist

$$S = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

ii) Satz von Napoleon

Beweis

i) Seien die Seitenmittelpunkte

$$m_A = \frac{1}{2}(B + C)$$
$$m_B = \frac{1}{2}(A + C)$$
$$m_C = \frac{1}{2}(A + B)$$

Dann gilt

$$\frac{|A - B|}{|m_C - B|} = \frac{2}{1} = \frac{|B - C|}{|m_A - B|}$$

Mit dem ersten Strahlensatz (Zentrum in B) folgt damit

$$m_A - m_C = \lambda (A - C)$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Mit dem zweiten Strahlensatz folgt damit

$$\frac{|A - C|}{|m_A - m_C|} = \frac{2}{1}$$

Man betrachte nun die Strahlensatzfigur mit Zentrum S, so gilt

$$\frac{2}{1} = \frac{|A - C|}{|m_A - m_C|} = \frac{|A - S|}{|S - m_A|}$$

Analog für die anderen Seiten. Damit folgt

$$\begin{aligned} S &= m_A + \frac{1}{3}(C - m_C) \\ &= \frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{3}\left(C - \frac{1}{2}(A + B)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(C - \frac{1}{2}(A + B) + \frac{3}{2}(A + B)\right) \\ &= \frac{1}{3}(A + B + C) \end{aligned}$$

ii) Siehe Skript