Aufgabe 3

Sei $\triangle ABC \in \mathbb{C}$.

Behauptung

i) Der Schwerpunkt S von $\triangle ABC$ ist

$$S = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

ii) Satz von Napoleon

Beweis

i) Seien die Seitenmittelpunkte

$$\begin{aligned} m_A &= \frac{1}{2}(B + C) \\ m_B &= \frac{1}{2}(A + C) \\ m_C &= \frac{1}{2}(A + B) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{|A - B|}{|m_C - B|} &= \frac{2}{1} \\ &= \frac{|B - C|}{|m_A - B|} \end{aligned}$$

Mit dem ersten Strahlensatz (Zentrum in B) folgt damit

$$m_A - m_C = \lambda (A - C)$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Mit dem zweiten Strahlensatz folgt damit

$$\frac{|A - C|}{|m_A - m_C|} = \frac{2}{1}$$

Man betrachte nun die Strahlensatzfigur mit Zentrum S, so gilt

$$\frac{2}{1} = \frac{|A - C|}{|m_A - m_C|} = \frac{|A - S|}{|S - m_A|}$$

Analog für die anderen Seiten. Damit folgt

$$\begin{aligned} S &= m_A + \frac{1}{3}(C - m_C) \\ &= \frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{3}\left(C - \frac{1}{2}(A + B)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(C - \frac{1}{2}(A + B) + \frac{3}{2}(A + B)\right) \\ &= \frac{1}{3}(A + B + C) \end{aligned}$$

ii)