

Aufgabe 1

Man betrachte $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup H_\infty$ und $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit den Standardkarten, also $H_\infty : X_3 = 0, \infty = [1 : 0]$.

Behauptung

1. $\pi : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C}), [X_1 : X_2 : X_3] \mapsto [X_1 + iX_2 : X_3]$ ist wohldefiniert und surjektiv.
2. π induziert Bijektion der Standardkarte $\mathbb{R}^2 \equiv \{X_3 \neq 0\}$ auf $\mathbb{C} \equiv \{Z \neq \infty\}$.
3. $\pi^{-1}(\infty) = H_\infty$.

Beweis

1. Es seien

$$[X_1 : X_2 : X_3] = [X'_1 : X'_2 : X'_3],$$

dann gilt

$$X'_1 = \lambda X_1$$

$$X'_2 = \lambda X_2$$

$$X'_3 = \lambda X_3$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist

$$\pi([X_1 : X_2 : X_3]) = [X_1 + iX_2 : X_3]$$

und

$$\begin{aligned} \pi([X'_1 : X'_2 : X'_3]) &= [X'_1 + iX'_2 : X'_3] \\ &= [\lambda X_1 + i\lambda X_2 : \lambda X_3] \\ &= [X_1 + iX_2 : X_3] \\ &= \pi([X_1 : X_2 : X_3]). \end{aligned}$$

Folglich ist π wohldefiniert.

Sei nun weiter $[Z : X_3] \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ beliebig, mit $Z \in \mathbb{C}$. Wähle

$$X_1 = \operatorname{Re}(Z) \in \mathbb{R}$$

$$X_2 = \operatorname{Im}(Z) \in \mathbb{R},$$

so gilt

$$\begin{aligned} \pi([X_1 : X_2 : X_3]) &= [X_1 + iX_2 : X_3] \\ &= [Z : X_3]. \end{aligned}$$

Somit ist π surjektiv.

- 2.