Pascal Gepperth

Sitzung 1

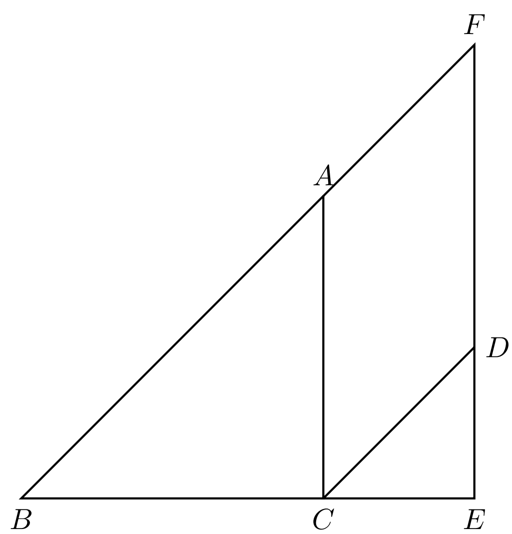
Uni-Teil

Erweiterung des ersten Strahlensatzes

$$
\begin{aligned}
&& \frac{a}{c} &= \frac{a+b}{c+b} \\
\Leftrightarrow && \frac{c+d}{c} &= \frac{a+b}{a} \\
\Leftrightarrow && \frac{d}{c} &= \frac{b}{a} \\
\Leftrightarrow && \frac{a}{b} &= \frac{c}{d}
\end{aligned}
$$

Zweiter Strahlensatz

Es gilt der erste Strahlensatz.
Skizze:



Es gilt mit dem ersten, erweiterten Strahlensatz und Zentrum B

$$\frac{BC}{CE} = \frac{BA}{AF} \tag{1}$$

sowie für Zentrum E

$$\frac{ED}{DF} = \frac{EC}{CB}$$

und somit natürlich auch

$$\frac{DF}{ED} = \frac{BC}{CE} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

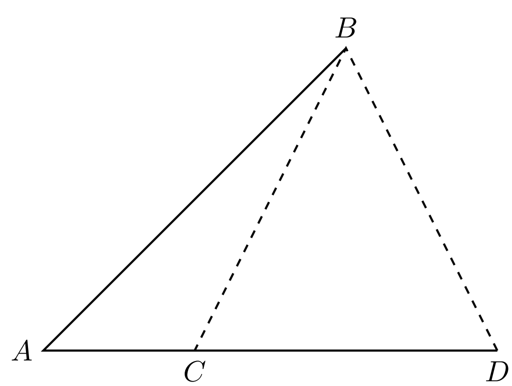
$$
\begin{aligned}
&& \frac{BA}{AF} &= \frac{DF}{ED} \\
\Leftrightarrow && \frac{BA}{DF} &= \frac{AF}{ED}
\end{aligned}
$$

Da $AF \parallel CD$ und $AC \parallel DF$ ist $ACDF$ ein Parallelogramm. Damit gilt $AC = DF$ und folglich

$$\begin{aligned} && \frac{BA}{DF} &= \frac{AF}{DE} \\ \Leftrightarrow && \frac{DE}{DF} &= \frac{AF}{BA} \\ \Leftrightarrow && \frac{DE}{DF} &= \frac{AF}{BA} \\ \Leftrightarrow && \frac{DE+DF}{DF} &= \frac{AF+BA}{BA} \\ \Leftrightarrow && \frac{BA}{DF} &= \frac{AF+BA}{DE+DF} \\ \Leftrightarrow && \frac{BA}{AC} &= \frac{BF}{EF} \end{aligned}$$

Widerlegung der Umkehrung

Betrachte die Punkte $A(0,0), B(2,2), C(1,0), D(3,0)$.
Skizze:



Offenbar gilt

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BC},$$

doch die Geraden $B \vee C$ und $B \vee D$ sind verschieden, da $C \neq D$, es gilt aber

$$B \in B \vee C \cap B \vee D \neq \emptyset.$$

Folglich sind die Geraden nicht parallel.

Sitzung 2

Schul-Teil

Eigenschaften der Zentrischen Streckung (Elemente 5)

Beispiele an Konstruktionen mit maßstäblicher Vergrößerung.

Definition Eine **zentrische Streckung** wird festgelegt durch das **Streckzentrum $\boldsymbol{Z}$** und den *positiven* **Streckfaktor $\boldsymbol{k}$**.
Zu einem Punkt erhältst du den Bildpunkt wie folgt:

(1) Wenn der Punkt P nicht mit dem Zentrum zusammenfällt, dann erhält man den Bildpunkt P' wie folgt:

   (a) Zeichne die Halbgerade $\overrightarrow{ZP}$.

   (b) Zeichne den Punkt P' auf der Halbgeraden $\overrightarrow{ZP}$ so, dass gilt

$$|ZP'| = k \cdot |ZP|$$

(2) Der Bildpunkt Z' von Z fällt mit Z zusammen: $Z' = Z$.

Zentrische Streckung mit negativem Streckfaktor Eingeführt als zentrische Streckung um $|k|$ und anschließender Punktspiegelung in Z.

Diskussion S.18, Afg 12

Eigenschaften Betrachtung verschiedener Abbildungen (vgl S.19)

Abb. ungenau, nur intuitive Vermutungen

(1) Drehung + Verkleinerung

(2) Stauchung von Winkel

(3) Zentrische Streckung Dreieck

(4) Verschiedene Streckungsfaktoren

mit Hinblick auf zentrische Streckungen. Beurteilung:

(1) nicht, da AB nicht parallel zu $A'B'$.

(2) nicht, da Winkel nicht erhalten.

(3) ja.

(4) nicht, da unterschiedliche Streckfaktoren.

Satz Für jede *zentrische Streckung* mit einem positiven Streckfaktor k gilt:

(a) Gerade und Bildgerade sind parallel.

(b) Bildstrecke ist k-mal so lang wie Originalstrecke.

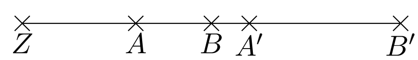
(c) Winkel und Bildwinkel sind gleich groß.

Beweis des Satzes

(a) Wird nicht bewiesen.

(b) Betrachtung zweier Fälle

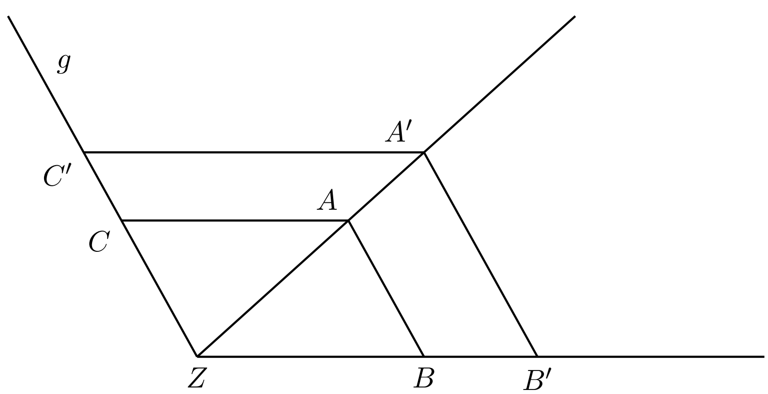
1. Fall: Die Strecke AB liegt auf einer Geraden durch das Streckzentrum. $Z \in A \vee B$
   Dann gilt
   $$|ZA'| = k \cdot |ZA| \qquad \text{und} \qquad |ZB'| = k \cdot |ZB| \,.$$
   Ohne Einschränkung ist
   $$|ZA| < |ZB| \,.$$
   Dann gilt *(„Aus der Zeichnung entnehmen wir:“)*



$$|AB| = |ZB| - |ZA| \qquad \text{und} \qquad |A'B'| = |ZB'| - |ZA'| \,.$$

Infolge dessen gilt
$$\begin{aligned} |A'B'| &= |ZB'| - |ZA'| \\ &= k \cdot |ZB| - k \cdot |ZA| \\ &= k \cdot (|ZB| - |ZA|) \\ &= k\,|AB| \end{aligned}$$

2. Fall: Die Strecke AB liegt nicht auf einer Geraden durch das Streckzentrum. $Z \notin A \vee B$



Betrachte Parallele g zu AB durch Z. Dann ist g nach (a) auch parallel zu $A'B'$, da

$$AB \parallel A'B'.$$

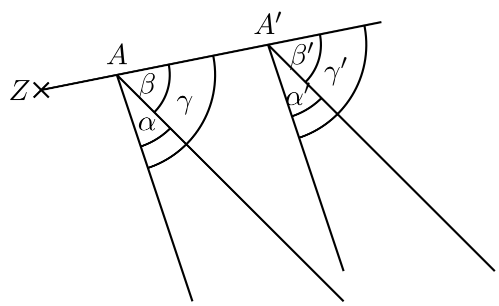
Strecken AB und $A'B'$ werden auf g abgetragen (Schnitt von g und Parallele von ZB durch A bzw. A'). Damit sind $ZBAC$ und $ZB'A'C'$ Parallelogramme und es gilt

$$\begin{aligned} |ZC| &= |AB| \\ |ZC'| &= |A'B'|\,. \end{aligned}$$

Nun ist C' auch Bildpunkt von C, da nach (a) $C'A'$ die Bildgerade von CA ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} |A'B'| &= |ZC'| \\ &= k\,|ZC| \\ &= k\,|AB| \end{aligned}$$

(c) Sei α' der Bildwinkel von α nach zentrischer Streckung in Zentrum Z.



Nach (a) sind die Schenkel an A bzw. A' paarweise zueinander parallel.
Mit dem Stufenwinkelsatz gilt dann

$$\begin{aligned} \beta &= \beta' \\ \gamma &= \gamma' \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma - \beta \\ \alpha' &= \gamma' - \beta' \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \alpha' &= \gamma' - \beta' \\ &= \gamma - \beta \\ &= \alpha \end{aligned}$$

$\square$

Vergleich der Schulbücher

BUCHTITEL 1

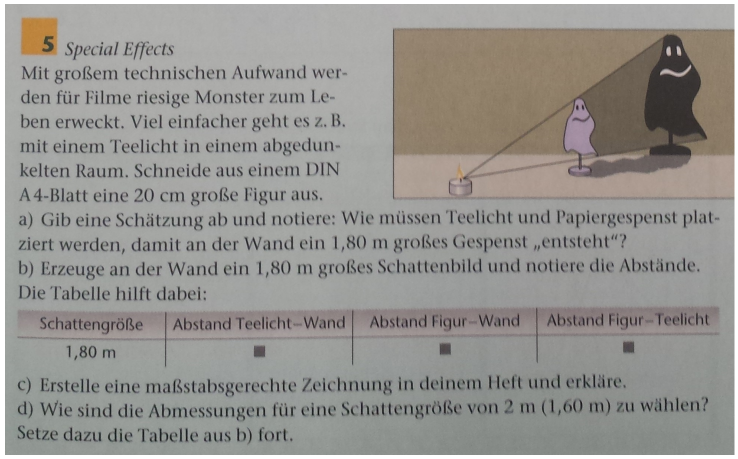
- Beginn mit „maßstäblicher Vergrößerung“.
  - Streckenverhältnis von Original- zu Bildstrecke bleibt gleich
    $$k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$
  - (Bild-)Winkel sind gleich weit.
- zentrische Streckung als „Abbildung“ mit Streckzentrum Z und Streckfaktor k, sodass jedem Punkt P, der nicht das Zentrum ist, ein Punkt P' zugeordnet wird und
  - P' liegt auf dem Strahl $\overrightarrow{ZP}$
  - $$\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$$
- Vorerst $k > 0$
- „Satz von der zentrischen Streckung“, sodass Geraden auf parallele Geraden abgebildet werden
- Mit dem Satz begründen sich Winkeltreue und Teilverhältnistreue
- Bsp. zum konstruieren einer zentr. Streck.
- Bsp. Streckzentrum bestimmen
- Üb. Entscheiden ob zentr. Streck.

Lambacher Schweizer

- Zentrische Streckung als reine Konstruktionsanleitung. Mache dies, dann das
- Bsp. Konstruktion
- Bsp. Zentrum finden

Delta

- Einführung über Vergrößerung und Verkleinerung
  - intuitiv und anschaulich
  - Anschauliche Beispiele (praktisch durchführbar)
  - Wertetabelle



5 *Special Effects*
Mit großem technischen Aufwand werden für Filme riesige Monster zum Leben erweckt. Viel einfacher geht es z. B. mit einem Teelicht in einem abgedunkelten Raum. Schneide aus einem DIN A4-Blatt eine 20 cm große Figur aus.
a) Gib eine Schätzung ab und notiere: Wie müssen Teelicht und Papiergespenst platziert werden, damit an der Wand ein 1,80 m großes Gespenst „entsteht"?
b) Erzeuge an der Wand ein 1,80 m großes Schattenbild und notiere die Abstände. Die Tabelle hilft dabei:

Schattengröße	Abstand Teelicht–Wand	Abstand Figur–Wand	Abstand Figur–Teelicht
1,80 m	■	■	■

c) Erstelle eine maßstabsgerechte Zeichnung in deinem Heft und erkläre.
d) Wie sind die Abmessungen für eine Schattengröße von 2 m (1,60 m) zu wählen? Setze dazu die Tabelle aus b) fort.

- Definition via Konstruktion (nur Bilder)
- Eigenschaften
  - $P' \in Z \vee P$
  - $\overline{ZA'} = k \cdot \overline{ZA}$
  - $\alpha = \alpha'$
  - $BC \parallel B'C'$
- negatives k extra behandelt (Bsp Lochkamera)
- Übungsaufgabe: Erkenne ob ZS
- Übungsaufgabe: Nicht erkennbar, was Ausgangs- und Bildfigur (interpretativ)

Sitzung 3

Schul-Teil

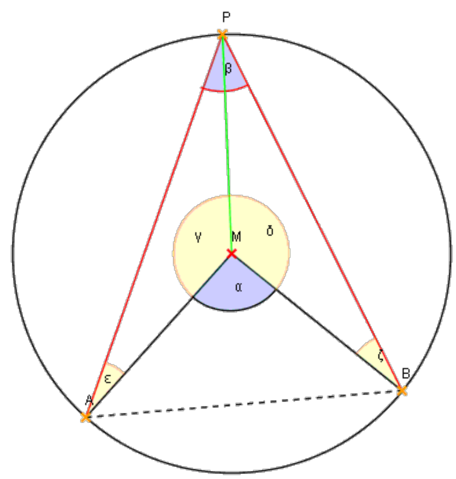
Exkurs: Ähnlichkeitssätze am Kreis

Definitionen Im folgenden bezeichne M den Mittelpunkt eines Kreisbogens mit Endpunkten A und B. Ferner sei P ein beliebiger Punkt auf dem Kreisbogen.

Peripheriewinkel Der Winkel $\angle APB$ wird als Peripheriewinkel der Kreissehne AB bezeichnet. Zu einer Kreissehne existieren also beliebig viele Peripheriewinkel (da P beliebig).

Zentriwinkel Der Winkel $\angle AMB$ ist der zugehörige Zentriwinkel. Dieser kann auch *überstumpf* ($> 180°$) sein. Im folgenden sei er folgendermaßen gewählt: Ist der Peripheriewinkel spitz, so ist der Zentriwinkel kleiner 180°. Ist der Peripheriewinkel stumpf, so ist der Zentriwinkel überstumpf.

Zentri-Peripheriewinkelsatz Der Zentriwinkel ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel. ($\alpha = 2\beta$)



Beweis: Das Dreieck $\triangle APM$ ist gleichschenklig. Es gilt

$$\angle APM = \angle PAM := \epsilon$$

Damit ist

$$\gamma = 180° - 2\epsilon$$

Analog gilt

$$\angle BPM = \angle PBM := \xi$$

Damit ist

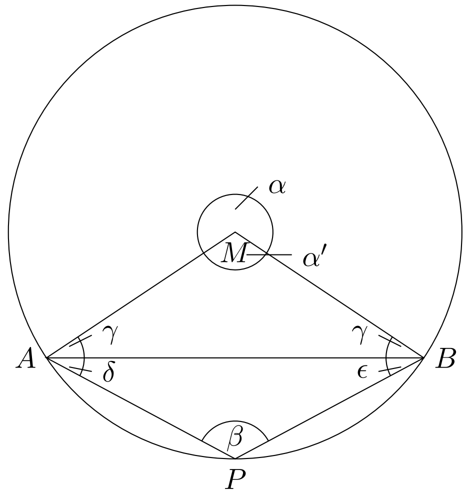
$$\delta = 180° - 2\xi$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned}\alpha &= 360° - \gamma - \delta \\ &= 2\epsilon + 2\xi \\ &= 2\beta\end{aligned}$$

da $\beta = \epsilon + \xi$.

Für den zweiten Fall betrachte man stumpfe Peripheriewinkel.



Damit gilt

$$\alpha' = 360° - \alpha$$

sowie

$$\begin{aligned} 180° &= 2\gamma + \alpha' \\ \Leftrightarrow \quad 180° &= 2\gamma + 360° - \alpha \\ \Leftrightarrow \quad \alpha &= 2\gamma + 180° \end{aligned}$$

und

$$2\gamma + \delta + \epsilon = \beta$$

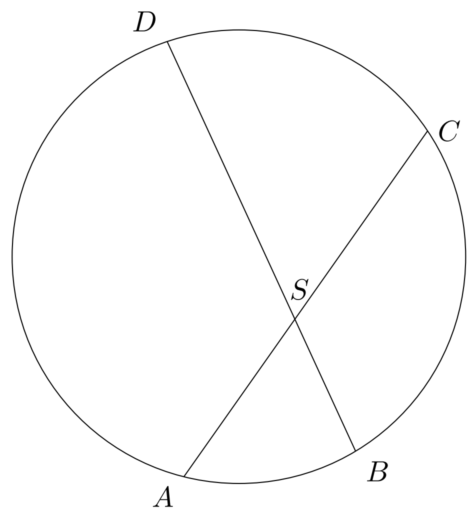
Damit gilt dann

$$\begin{aligned} \alpha &= 180° + 2\gamma \\ &= \beta + 180° - \delta - \epsilon \\ &= 2\beta \end{aligned}$$

$\square$

Folgerung Da die Kreissehne AB den Zentriwinkel bereits eindeutig definiert, der Punkt P aber beliebig ist, sind alle Peripheriewinkel auf der gleichen Seite von AB gleich groß.

Sehnensatz Sei S ein Punkt innerhalb eines Kreises. Für alle Sehnen durch S ist das Produkt der jeweiligen Sehnenabschnitte konstant.



Beweis. Man betrachte die Peripheriewinkel über der Sehne AD in den Punkten B und C. Dann gilt

$$\angle ABD = \angle ACD$$

Ferner sind die Scheitelwinkel gleich groß, also

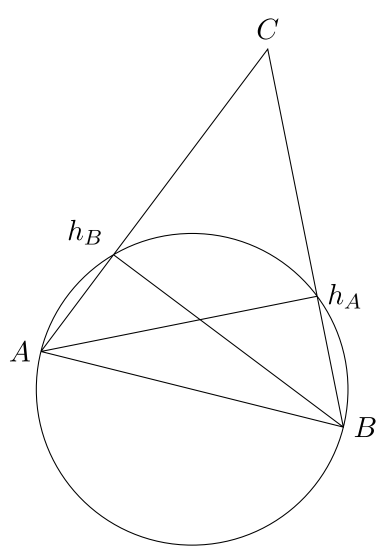
$$\angle ASB = \angle CSD$$

Infolgedessen sind $\triangle ABS$ und $\triangle CDS$ ähnlich. Damit gilt

$$\frac{AS}{BS} = \frac{SD}{SC}$$
$$\Leftrightarrow \quad AS \cdot SC = BS \cdot SD$$

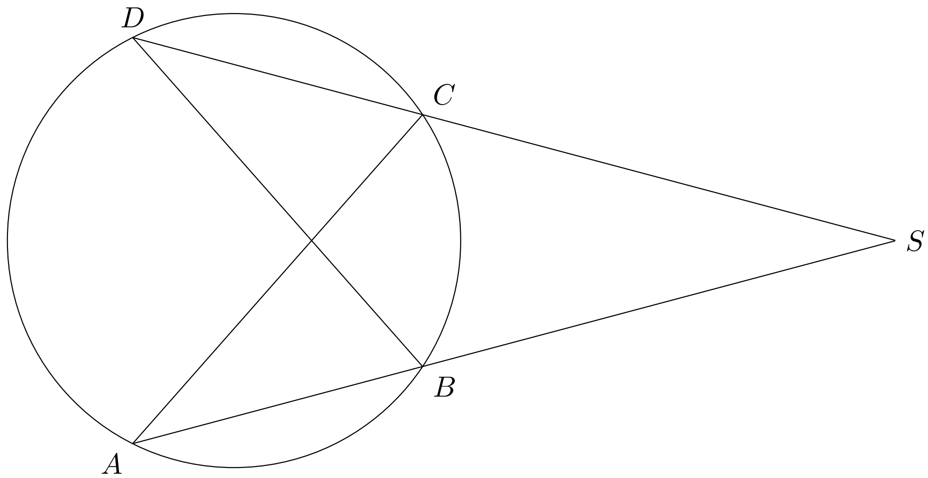
□

Höhenabschnittsatz



Beweis. Der Kreisbogen über AB ist ein Thaleskreis und erklärt die rechten Winkel. Mit dem Sehnensatz folgt die Behauptung. □

Sekantensatz Sei S ein Punkt außerhalb des Kreises. Das Produkt jeweiliger Sekantenabschnitte von Sekanten durch S ist konstant.



Beweis. Eine Sekante schneide den Kreis in A und B, eine weitere in den Punkten C und D. Dann sind $\triangle SAC$ und $\triangle SBD$ ähnlich. Damit gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{SC}{SB} &= \frac{SA}{SD} \\ \Leftrightarrow \quad SC \cdot SD &= SA \cdot SB \end{aligned}$$

□

Wie wird das in der Schule gemacht? In der Schule sind die Sätze nicht im Pflichtprogramm oder werden gar formal bewiesen.