Aufgabe 1

Man betrachte $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup H_\infty$ und $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit den Standardkarten, also $H_\infty : X_3 = 0, \infty = [1 : 0]$.

Behauptung

1. $\pi : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C}), [X_1 : X_2 : X_3] \mapsto [X_1 + iX_2 : X_3]$ ist wohldefiniert und surjektiv.
2. π induziert Bijektion der Standardkarte $\mathbb{R}^2 \equiv \{X_3 \neq 0\}$ auf $\mathbb{C} \equiv \{Z_2 \neq 0\}$.
3. $\pi^{-1}(\infty) = H_\infty$.

Beweis

1. Es seien
$$[X_1 : X_2 : X_3] = [X_1' : X_2' : X_3'] \,,$$
dann gilt
$$\begin{aligned} X_1' &= \lambda X_1 \\ X_2' &= \lambda X_2 \\ X_3' &= \lambda X_3 \end{aligned}$$
für ein $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann ist
$$\pi\left([X_1 : X_2 : X_3]\right) = [X_1 + iX_2 : X_3]$$
und
$$\begin{aligned} \pi\left([X_1' : X_2' : X_3']\right) &= [X_1' + iX_2' : X_3'] \\ &= [\lambda X_1 + i\lambda X_2 : \lambda X_3'] \\ &= [X_1 + iX_2 : X_3] \\ &= \pi\left([X_1 : X_2 : X_3]\right). \end{aligned}$$
Folglich ist π wohldefiniert.
Sei nun weiter $[Z : X_3] \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ beliebig, mit $Z \in \mathbb{C}$. Wähle
$$\begin{aligned} X_1 &= \mathrm{Re}(Z) \in \mathbb{R} \\ X_2 &= \mathrm{Im}(Z) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$
so gilt
$$\begin{aligned} \pi\left([X_1 : X_2 : X_3]\right) &= [X_1 + iX_2 : X_3] \\ &= [Z : X_3]\,. \end{aligned}$$
Somit ist π surjektiv.

Anmerkung o.B.d.A. ist $X_3 \in \mathbb{R}$, da sonst

$$[Z : X_3] = [Z/X_3 : 1]$$

2. Sei $X_3 \neq 0$, so ist o.B.d.A $X_3 = 1$ (siehe Anmerkung). Sei nun

$$\pi\left([X_1 : X_2 : 1]\right) = \pi\left(\left[X_1' : X_2' : 1\right]\right),$$

dann gilt

$$\begin{aligned}[X_1 + iX_2 : 1] &= \pi\left([X_1 : X_2 : 1]\right) \\ &= \pi\left(\left[X_1' : X_2' : 1\right]\right) \\ &= \left[X_1' + iX_2' : 1\right].\end{aligned}$$

Dann gilt aber

$$\begin{aligned}\left[X_1' + iX_2' : 1\right] &= \lambda\left[X_1 + iX_2 : 1\right] \\ &= \left[\lambda X_1 + i\lambda X_2 : \lambda\right]\end{aligned}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. O.B.d.A. sei $\lambda = 1$ (siehe Anmerkung), dann gilt

$$\left[X_1' + iX_2' : 1\right] = [X_1 + iX_2 : 1]$$

und damit (Vergleich letzter Komponente)

$$X_1' + iX_2' = X_1 + iX_2.$$

Dies ist nur erfüllt, wenn

$$\begin{aligned}X_1' &= X_1 \\ X_2' &= X_2.\end{aligned}$$

Damit folgt aber direkt

$$[X_1 : X_2 : 1] = \left[X_1' : X_2' : 1\right],$$

also ist π auf den Standardkarten injektiv. Mit oben gezeigter Surjektivität besteht hier also eine Bijektion.

3. Es gilt

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\infty) &= \pi^{-1}\left([1 : 0]\right) \\ &= \pi^{-1}\left([z : 0]\right) \;\; \forall z \in \mathbb{C} \\ &= [\mathrm{Re}(z) : \mathrm{Im}(z) : 0] \;\; \forall z \in \mathbb{C} \\ &= [x : y : 0] \;\; \forall x, y \in \mathbb{R} \\ &= H_\infty\end{aligned}$$