

# Sitzung 1

## Uni-Teil

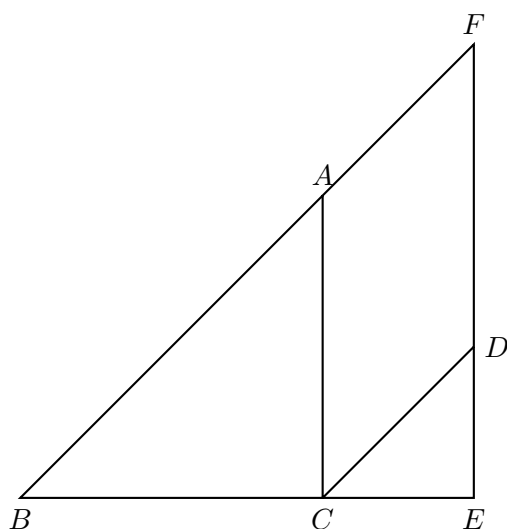
### Erweiterung des ersten Strahlensatzes

$$\begin{aligned} & \frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+b} \\ \Leftrightarrow & \frac{c+d}{c} = \frac{a+b}{a} \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \\ \Leftrightarrow & \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \end{aligned}$$

### Zweiter Strahlensatz

Es gilt der erste Strahlensatz.

**Skizze:**



Es gilt mit dem ersten, erweiterten Strahlensatz und Zentrum  $B$

$$\frac{BC}{CE} = \frac{BA}{AF} \quad (1)$$

sowie für Zentrum  $E$

$$\frac{ED}{DF} = \frac{EC}{CB}$$

und somit natürlich auch

$$\frac{DF}{ED} = \frac{BC}{CE} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$\begin{aligned} & \frac{BA}{AF} = \frac{DF}{ED} \\ \Leftrightarrow & \frac{BA}{DF} = \frac{AF}{ED} \end{aligned}$$

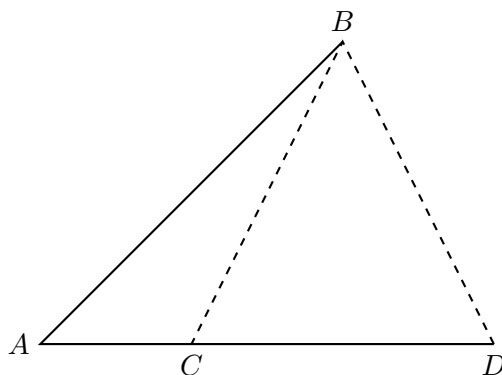
Da  $AF \parallel CD$  und  $AC \parallel DF$  ist  $ACDF$  ein Parallelogramm. Damit gilt  $AC = DF$  und folglich

$$\begin{aligned} & \frac{BA}{DF} = \frac{AF}{DE} \\ \Leftrightarrow & \frac{DE}{DF} = \frac{AF}{BA} \\ \Leftrightarrow & \frac{DE}{DF} = \frac{AF}{BA} \\ \Leftrightarrow & \frac{DE + DF}{DF} = \frac{AF + BA}{BA} \\ \Leftrightarrow & \frac{BA}{DF} = \frac{AF + BA}{DE + DF} \\ \Leftrightarrow & \frac{BA}{AC} = \frac{BF}{EF} \end{aligned}$$

### Widerlegung der Umkehrung

Betrachte die Punkte  $A(0,0)$ ,  $B(2,2)$ ,  $C(1,0)$ ,  $D(3,0)$ .

**Skizze:**



Offenbar gilt

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BD},$$

doch die Geraden  $B \vee C$  und  $B \vee D$  sind verschieden, da  $C \neq D$ , es gilt aber

$$B \in B \vee C \cap B \vee D \neq \emptyset.$$

Folglich sind die Geraden nicht parallel.

## Sitzung 2

### Schul-Teil

#### Eigenschaften der Zentrischen Streckung (Elemente 5)

Beispiele an Konstruktionen mit maßstäblicher Vergrößerung.

**Definition** Eine **zentrische Streckung** wird festgelegt durch das **Streckzentrum**  $Z$  und den *positiven* **Streckfaktor**  $k$ .

Zu einem Punkt erhältst du den Bildpunkt wie folgt:

- (1) Wenn der Punkt  $P$  nicht mit dem Zentrum zusammenfällt, dann erhält man den Bildpunkt  $P'$  wie folgt:

- (a) Zeichne die Halbgerade  $\overrightarrow{ZP}$ .

- (b) Zeichne den Punkt  $P'$  auf der Halbgeraden  $\overrightarrow{ZP}$  so, dass gilt

$$|ZP'| = k \cdot |ZP|$$

- (2) Der Bildpunkt  $Z'$  von  $Z$  fällt mit  $Z$  zusammen:  $Z' = Z$ .

**Zentrische Streckung mit negativem Streckfaktor** Eingeführt als zentrische Streckung um  $|k|$  und anschließender Punktspiegelung in  $Z$ .

**Diskussion** S.18, Afg 12

**Eigenschaften** Betrachtung verschiedener Abbildungen (vgl S.19)

Abb. ungenau,  
nur intuitive  
Vermutungen

- (1) Drehung + Verkleinerung

- (2) Stauchung von Winkel

- (3) Zentrische Streckung Dreieck

- (4) Verschiedene Streckungsfaktoren

mit Hinblick auf zentrische Streckungen. Beurteilung:

- (1) nicht, da  $AB$  nicht parallel zu  $A'B'$ .

- (2) nicht, da Winkel nicht erhalten.

- (3) ja.

- (4) nicht, da unterschiedliche Streckfaktoren.

**Satz** Für jede *zentrische Streckung* mit einem positiven Streckfaktor  $k$  gilt:

- (a) Gerade und Bildgerade sind parallel.
- (b) Bildstrecke ist  $k$ -mal so lang wie Originalstrecke.
- (c) Winkel und Bildwinkel sind gleich groß.

**Beweis des Satzes**

(a) Wird nicht bewiesen.

(b) Betrachtung zweier Fälle

1. Fall: Die Strecke  $AB$  liegt auf einer Geraden durch das Streckzentrum.

$$Z \in A \vee B$$

Dann gilt

$$|ZA'| = k \cdot |ZA| \quad \text{und} \quad |ZB'| = k \cdot |ZB|.$$

Ohne Einschränkung ist

$$|ZA| < |ZB|.$$

Dann gilt („Aus der Zeichnung entnehmen wir:“)

$$\begin{array}{ccccccc} \times & & \times & \times & \times & & \times \\ Z & & A & B & A' & & B' \end{array}$$

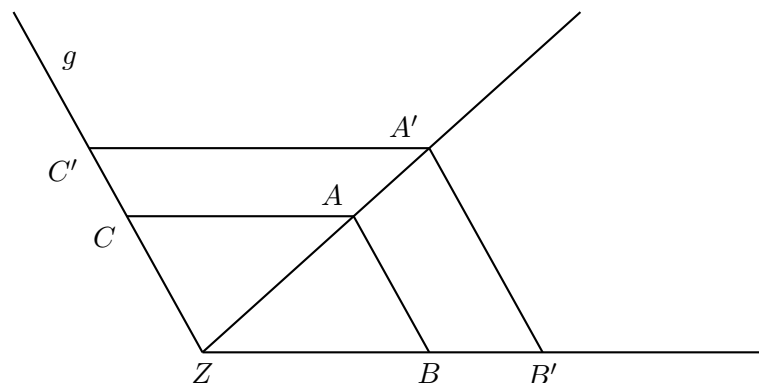
$$|AB| = |ZB| - |ZA| \quad \text{und} \quad |A'B'| = |ZB'| - |ZA'|.$$

Infolge dessen gilt

$$\begin{aligned} |A'B'| &= |ZB'| - |ZA'| \\ &= k \cdot |ZB| - k \cdot |ZA| \\ &= k \cdot (|ZB| - |ZA|) \\ &= k |AB| \end{aligned}$$

2. Fall: Die Strecke  $AB$  liegt nicht auf einer Geraden durch das Streckzentrum.

$$Z \notin A \vee B$$



Betrachte Parallele  $g$  zu  $AB$  durch  $Z$ . Dann ist  $g$  nach (a) auch parallel zu  $A'B'$ , da

$$AB \parallel A'B'.$$

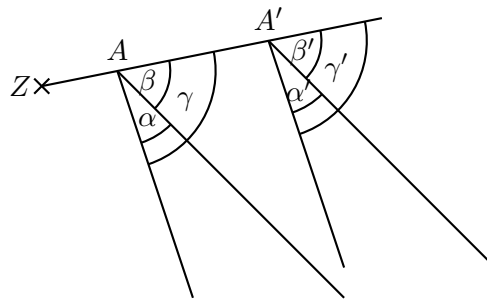
Strecken  $AB$  und  $A'B'$  werden auf  $g$  abgetragen (Schnitt von  $g$  und Parallele von  $ZB$  durch  $A$  bzw.  $A'$ ). Damit sind  $ZBAC$  und  $ZB'A'C'$  Parallelogramme und es gilt

$$\begin{aligned} |ZC| &= |AB| \\ |ZC'| &= |A'B'|. \end{aligned}$$

Nun ist  $C'$  auch Bildpunkt von  $C$ , da nach (a)  $C'A'$  die Bildgerade von  $CA$  ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} |A'B'| &= |ZC'| \\ &= k |ZC| \\ &= k |AB| \end{aligned}$$

(c) Sei  $\alpha'$  der Bildwinkel von  $\alpha$  nach zentrischer Streckung in Zentrum  $Z$ .



Nach (a) sind die Schenkel an  $A$  bzw.  $A'$  paarweise zueinander parallel. Mit dem Stufenwinkelsatz gilt dann

$$\begin{aligned} \beta &= \beta' \\ \gamma &= \gamma' \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma - \beta \\ \alpha' &= \gamma' - \beta' \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \alpha' &= \gamma' - \beta' \\ &= \gamma - \beta \\ &= \alpha \end{aligned}$$

□

## Vergleich der Schulbücher

### BUCHTITEL 1

- Beginn mit „maßstäblicher Vergrößerung“.
  - Streckenverhältnis von Original- zu Bildstrecke bleibt gleich

$$k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

- (Bild-)Winkel sind gleich weit.
- zentrische Streckung als „Abbildung“ mit Streckzentrum  $Z$  und Streckfaktor  $k$ , sodass jedem Punkt  $P$ , der nicht das Zentrum ist, ein Punkt  $P'$  zugeordnet wird und
  - $P'$  liegt auf dem Strahl  $\overrightarrow{ZP}$
  -

$$\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$$

- Vorerst  $k > 0$
- „Satz von der zentrischen Streckung“, sodass Geraden auf parallele Geraden abgebildet werden
- Mit dem Satz begründen sich Winkeltreue und Teilverhältnistreue
- Bsp. zum konstruieren einer zentr. Streck.
- Bsp. Streckzentrum bestimmen
- Üb. Entscheiden ob zentr. Streck.

### Lambacher Schweizer

- Zentrische Streckung als reine Konstruktionsanleitung.
- Bsp. Konstruktion
- Bsp. Zentrum finden

Mache dies,  
dann das

### Delta

- Einführung über Vergrößerung und Verkleinerung
  - intuitiv und anschaulich
  - Anschauliche Beispiele (praktisch durchführbar)
  - Wertetabelle

**5** *Special Effects*

Mit großem technischen Aufwand werden für Filme riesige Monster zum Leben erweckt. Viel einfacher geht es z. B. mit einem Teelicht in einem abgedunkelten Raum. Schneide aus einem DIN A 4-Blatt eine 20 cm große Figur aus.

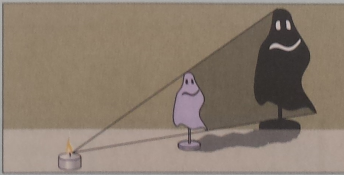
a) Gib eine Schätzung ab und notiere: Wie müssen Teelicht und Papiergespenst platziert werden, damit an der Wand ein 1,80 m großes Gespenst „entsteht“?

b) Erzeuge an der Wand ein 1,80 m großes Schattenbild und notiere die Abstände. Die Tabelle hilft dabei:

Schattengröße	Abstand Teelicht–Wand	Abstand Figur–Wand	Abstand Figur–Teelicht
1,80 m	■	■	■

c) Erstelle eine maßstabsgerechte Zeichnung in deinem Heft und erkläre.

d) Wie sind die Abmessungen für eine Schattengröße von 2 m (1,60 m) zu wählen? Setze dazu die Tabelle aus b) fort.



- Definition via Konstruktion (nur Bilder)
- Eigenschaften
  - $P' \in Z \vee P$
  - $\overline{ZA'} = k \cdot \overline{ZA}$
  - $\alpha = \alpha'$
  - $BC \parallel B'C'$
- negatives  $k$  extra behandelt (Bsp Lochkamera)
- Übungsaufgabe: Erkenne ob ZS
- Übungsaufgabe: Nicht erkennbar, was Ausgangs- und Bildfigur (interpretativ)