

MASTER OF SCIENCE IN ENGINEERING
Vertiefungsmodul I

Tragverhalten von Stahlbetontragwerken

Grundlagen

Pascal Gitz

Horw, Donnerstag, 7. September 2023

Advisor: Prof. FH, Dr. Daniel Heinzmann
Experte: Dr. Thomas Jäger

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Sämtliche verwendeten Textausschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet.

Horw, 21. Januar 2023

Pascal Gitz

Kurzfassung

Das grundlegende Ziel der Arbeit ist der theoretische Hintergrund der Deformationen im Stahlbeton darzulegen. Gegliedert wird die Arbeit in einen Beschrieb der Modelle zur Beschreibung des Tragverhaltens, sowie in die rechnerische Anwendung der Modelle auf Versuchsexperimente. Abgeschlossen wird die Arbeit mit einer Diskussion.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Hintergrund	5
2	Modellbeschreibung	6
2.1	Kontinua - reine Biegeträger	6
2.2	Mohrsche Analogie	9
2.3	Zuggurtmodell	10
2.4	Numerische Integration der Krümmung	13
2.5	Versatzmass	13
3	Verformung an Dreipunktbiegeversuch	14
3.1	Versuchsbeschreibung	14
3.2	Baustoffeigenschaften	15
3.3	Reiner Biegeträger	16
3.4	Mohrsche Analogie	21
3.5	Abschätzung nach Norm	24
3.6	Numerische Integration der Krümmung	24
3.7	Fachwerk	38
3.8	Modellvergleich	41
4	Numerische Integration der Krümmung	46
5	Verformung an einem einfachen Balken	57
5.1	Numerische Integration der Krümmungen	57
	Literatur	64

1 Einleitung

1.1 Hintergrund

Das grundlegende Ziel der Arbeit ist der theoretische Hintergrund der Deformationen im Stahlbeton darzulegen. Gegliedert wird die Arbeit in einen Beschrieb der Modelle zur Beschreibung des Tragverhaltens, sowie in die rechnerische Anwendung der Modelle auf Versuchsexperimente. Abgeschlossen wird die Arbeit mit einer Diskussion.

2 Modellbeschreibung

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Modelle und Methoden erläutert, die verwendet werden können, um das Tragverhalten von Stahlbeton mithilfe von Berechnungen zu analysieren.

2.1 Kontinua - reine Biegeträger

2.1.1 Aufbau

Die Verknüpfung der Gleichgewichtsbedingungen mit den kinematischen Relationen, sowie den linear elastischen Stoffgleichungen führt auf gewöhnliche Differentialgleichungen für die je nach Problemstellung relevanten Verschiebungsgrößen, und aus diesen ergeben sich die interessierenden inneren Verformungs- und Kraftgrößen in Abhängigkeit der Lage auf der Stabachse. Beschreibt Marti (o. J.) in seinem Kapitel Kontinua.

Das System in Abbildung 2.1 beschreibt einen einfachen Balken mit einer gleichmässig verteilten Last. Berücksichtigt man ein infinitesimal kleines Element im Balken, so lassen sich an diesem differentiellen Element Beziehungen zwischen Einwirkung, Querkraft, Verdrehung und Verformung aufstellen.

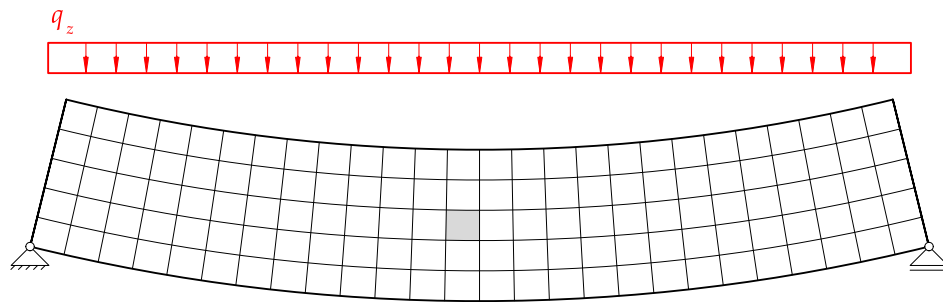


Abbildung 2.1: Statisches System mit finiten Elementen

Der Vorteil dieser Beziehungen liegt darin, dass diese allgemein für Biegeprobleme angewendet werden können. Als Gedankenexperiment kann man sich folgendes vorstellen. Man kann die differentiellen Elemente beliebig anordnen und weitere statische Systeme zu bilden, die differentiellen Beziehungen bleiben jedoch die selben.

Die Schnittkräfte am Differentiellen Element sind in Abbildung 2.2 gezeigt. Ebenfalls ist der verformte Zustand dargestellt, dieser bietet Auskunft über die kinematischen Relationen.

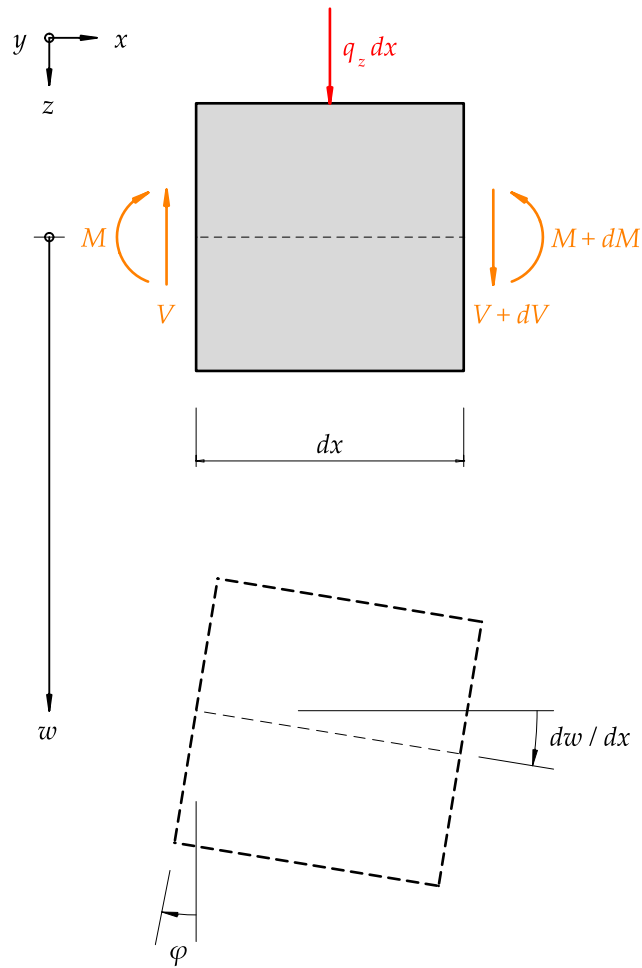


Abbildung 2.2: Differentielles Element des reinen Beigebalkens

Um die Beziehung für den reinen Biegeträger herzuleiten, sind neben den Gleichgewichtsbedingungen und kinematischen Relationen ebenfalls die Werkstoffbeziehungen erforderlich.

2.1.2 Herleitung

Beginnend bei den Gleichgewichtsbetrachtungen kann anhand des Gleichgewichts der vertikalen Kräfte die Beziehung in Gleichung 2.1 zwischen Einwirkung und Querkraft ermittelt werden:

$$\downarrow^+ \sum F_z = 0 = q_z(x) \cdot dx - V + (V + dV)$$

$$q_z(x) \cdot dx = -dV$$

$$q_z(x) = \frac{dV}{dx} = -V(x)' \quad (2.1)$$

Aus dem Gleichgewicht der Momente folgt die Gleichung 2.2, welche die Beziehung zwischen Einwirkung und Biegemoment erläutert.

$$\sum^{\infty+} M_y = 0 = (M + dM) - M - V \cdot dx + q_z(x) \cdot dx \cdot dx/2$$

Dabei kann der Anteil aus der Einwirkung $q_z(x) \cdot dx \cdot dx/2$ vernachlässigt werden, da dieser von höherer Ordnung klein ist, es folgt:

$$0 = dM - V \cdot dx$$

Umgeformt resultiert die Beziehung zwischen Querkraft und Biegemoment:

$$V = \frac{dM}{dx}$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung 2.1 folgt die Gleichung 2.2:

$$q_z(x) = -V(x)' = -M(x)'' \quad (2.2)$$

Weitere Beziehungen lassen sich mittels Gleichgewicht nicht ermitteln. Berücksichtigt man die Werkstoffbeziehungen und kinematischen Relationen, so lassen sich Aussagen zwischen Einwirkung und Verformung ermitteln. Um die Herleitung abzukürzen wird die Beziehung in Gleichung 2.3 zwischen Biegemoment und Krümmung vorausgesetzt.

$$\frac{M}{EI} = \chi \quad (2.3)$$

Allgemein gilt, die Krümmung entspricht der Änderung der Verdrehung:

$$\chi = \varphi(x)' \quad (2.4)$$

Aus der verformten Lage in Abbildung 2.2, lässt sich die Verdrehung des Elements bestimmen. Da das Element seiner Form treu bleibt, entspricht die Verdrehung der Änderung der Verformung.

$$-\varphi = \frac{dw}{dx}$$

Daraus folgt die Beziehung zwischen Biegemoment und Verformung:

$$M = -EIw(x)''$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung 2.2 folgt die Beziehung zwischen Verformung und Einwirkung.

$$q(x) = EIw(x)''' \quad (2.5)$$

2.1.3 Anwendungen und Grenzen

Das angewendete Modell berücksichtigt keine Schubverformungen. Da in der Praxis übliche Stahlbetonbauteile eine signifikant grössere Schubsteifigkeit, als Biegesteifigkeit aufweisen, liefert das Modell zuverlässige Resultate. Dazu gelten die Beziehungen lediglich für konstante Biegesteifigkeiten.

2.2 Mohrsche Analogie

2.2.1 Aufbau

Die Mohrsche Analogie beschreibt ein handhabbares Lösungsvorgehen der Differentialgleichung für reine Biegeträger. Aus den Beziehungen, detailliert beschrieben in Kapitel [2.1](#), können folgende Abhängigkeiten definiert werden:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = M'' = -q_z$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = w'' = -\frac{M}{EI}$$

Erkennbar ist die Analogie der beiden Gleichungen. Aus der Einwirkung lässt sich der Verlauf der Biegemomente bestimmen. Wird nun auf ein analoges System der Verlauf der Biegemomente dividiert durch die Biegesteifigkeit als Einwirkung angesetzt, so lässt sich mit dem gleichen Berechnungsvorgehen die Verformung bestimmen. Lediglich den Randbedingungen ist Beachtung zu schenken, welche mit entsprechenden Lagerungsbedingungen im analogen System berücksichtigt werden.

Die Anpassung der Lagerungsbedingungen für ein analoges System ist in Abbildung [2.3](#) gezeigt.


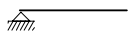

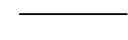
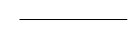
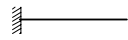
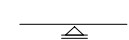
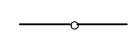
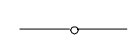
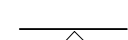
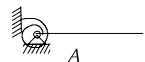
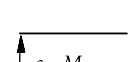
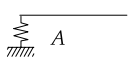
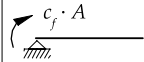
Gegebener Träger			Analogieträger		
	Einfach gelagert	$w = 0$ $w' \neq 0$		Einfach gelagert	$M^* = 0$ $V^* \neq 0$
	Eingespannt	$w = 0$ $w' = 0$		Freies Ende	$M^* = 0$ $V^* = 0$
	Freies Ende	$w \neq 0$ $w' \neq 0$		Eingespannt	$M^* \neq 0$ $V^* \neq 0$
	Zwischenaufleger	$w = 0$ $w'_l = w'_r$		Gelenk	$M^* = 0$ $V^*_l = V^*_r$
	Gelenk	$w \neq 0$ $w'_l \neq w'_r$		Zwischenaufleger	$M^* \neq 0$ $V^*_l \neq V^*_r$
	Elastische Einspannung	$w = 0$ $w' = c_f \cdot M_A$		Freies Ende mit Einzellast	$M^* = 0$ $V^* = c_f \cdot M_A$
	Elastische Auflagerung	$w = c_f \cdot M_A$ $w' \neq 0$		Einfach gelagert mit Endmoment	$M^* = c_f \cdot A$ $V^* \neq 0$

Abbildung 2.3: Lagerungsbedingungen für Analogiesysteme, übernommen aus Spathelf (2022)

2.3 Zuggurtmodell

2.3.1 Aufbau

Der folgende Abschnitt beschreibt das Zuggurtmodell anhand der Herleitungen in Spathelf (2022). Das Zuggurtmodell betrachtet auf Zug beanspruchte Stahlbetonzugglieder. Das Modell erlaubt eine Eingrenzung der Rissbreiten und der Rissabständen. Im Bereich zwischen den Rissen erhöht sich die Steifigkeit des Zugglieds, da der Beton sich am Lastabtrag beteiligt. Dies wird als Zugversteifung beschrieben. Um das Verhalten des Verbunds zwischen Beton und Betonstahl im ungerissenen Bereich zu definieren, wird eine Verbund Schubspannungs-Schlupfbeziehung dem Modell zu Grunde gelegt.

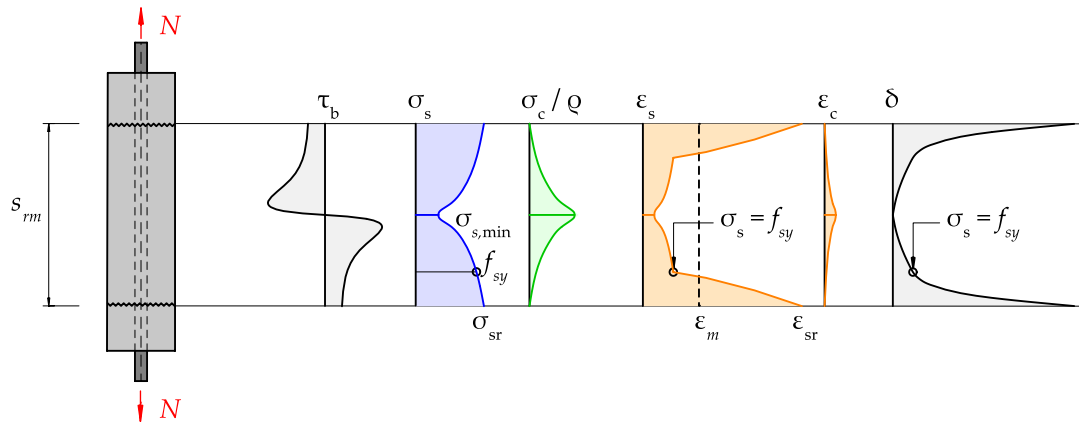


Abbildung 2.4: Verlauf der Verbundschubspannungen, Betonstahlspannungen, Betonspannungen, Betonstahldehnungen, Betondehnungen und Schlupf bei einem Zugglied. Bild neu gezeichnet nach Spathelf (2022)

Verwendet wird eine abgetreppte, starr-ideal plastische Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung. Durch die Idealisierung lassen sich die Spannungen und Dehnungen durch Gleichgewichtsbetrachtungen ermitteln. Die Abtreppung erfolgt beim Erreichen der Fließgrenze des Betonstahls.

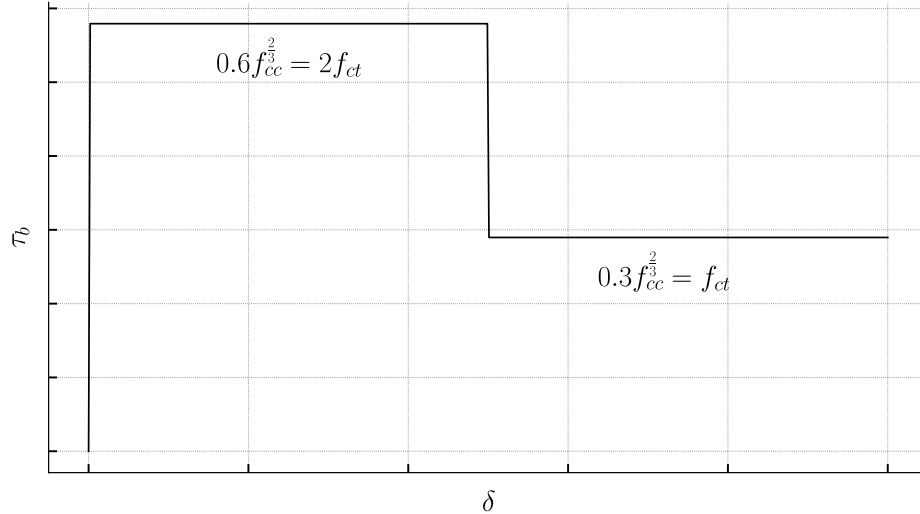


Abbildung 2.5: idealisierte Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung

2.3.1.1 Verhalten unter Belastung

Vor dem Erreichen der Zugfestigkeit des Betons, verbleibt das Zugglied ungerissen und verhält sich linear elastisch. Beim Reißen des Querschnitts verharrt die Betonspannung bei der Rissspannung, eine Erhöhung der Einwirkung erhöht lediglich die Zugspannung im Betonstahl.

Marti hat in xx ein Ansatz zur Berücksichtigung der Zugversteifung basierend auf dem Zuggurtmodell für Biegeelemente entwickelt.

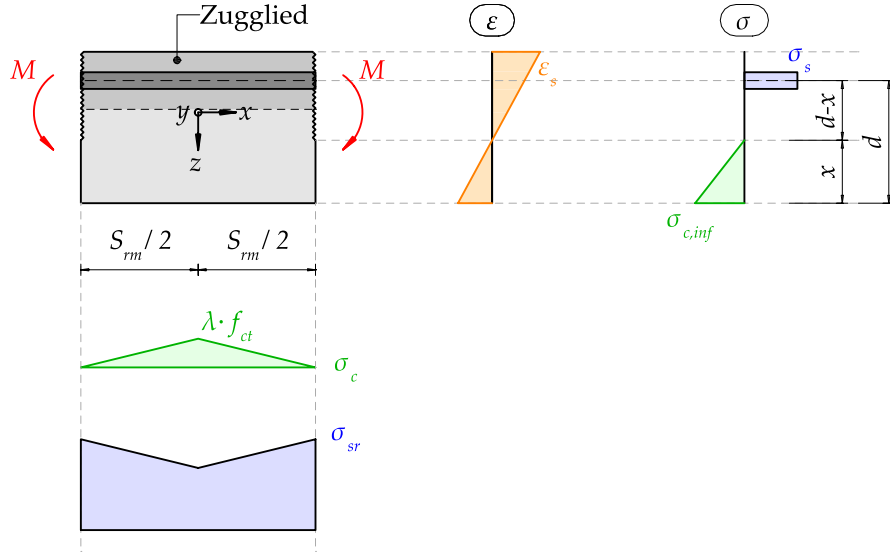


Abbildung 2.6: Einfluss der Zugversteifenden Wirkung bei einem Biegeelement

Vereinfacht lässt sich eine Dehnungsreduktion im Betonstahl durch die Zugversteifung beschreiben, welche mit $\Delta\varepsilon_s(\lambda)$ beschrieben wird. Die Krümmungsdifferenz infolge der Dehnungsreduktion folgt nach Gleichung 2.6.

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{\Delta\varepsilon_s(\lambda)}{(d-x)} = \frac{\lambda}{2} \cdot \left(\frac{M_r}{EI^{II}} - \frac{f_{ct}}{E_c \cdot (d-x)} \right) \quad (2.6)$$

Dabei wird die gesamte Krümmung $\frac{M_r}{EI^{II}}$ beim Reißen des Querschnitts durch die Krümmung beim Erreichen der Zugfestigkeit des Betons $\frac{f_{ct}}{E_c \cdot (d-x)}$ reduziert.

Die Gleichung 2.6 kann mittels dem effektiven Bewehrungsgehalt formuliert werden.

$$\rho_{\text{eff}} = \left[\frac{M_r(d-x) \cdot E_s}{f_{ct} \cdot EI^{II}} + 1 - n \right]^{-1} \quad (2.7)$$

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{f_{ct} \cdot (1 - \rho_{\text{eff}})}{\rho_{\text{eff}} \cdot E_s \cdot (d-x)}$$

Der Beiwert λ dient zur Fallunterscheidung. Grundsätzlich gilt die Annahme, dass sich ein Riss einstellt beim Erreichen der Zugfestigkeit des Betons.

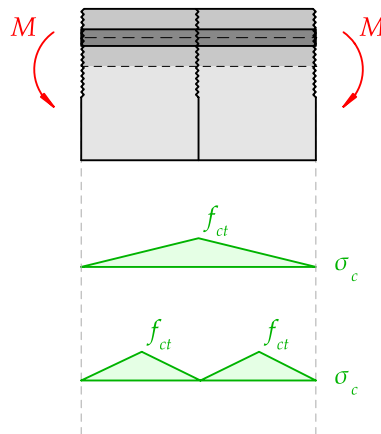


Abbildung 2.7: Fallunterscheidung beim Erreichen der Zugfestigkeit des Betons

Betrachtet man die Darstellung in Abbildung 2.7, so müsste sich in der Elementmitte ein Riss einstellen. Dabei wird zwischen unmittelbar vor dem Reißen unterschieden und unmittelbar nach dem Reißen. Dies kann mit Beiwert unterschieden werden.

2.3.1.2 Anwendungen und Grenzen

Das Zuggurtmodell findet Anwendung Biegebeanspruchungen. Es liefert Auskunft über Rissweiten und Rissbreiten, sowie eine Verfeinerung der Biegesteifigkeit im gerissenen Bereich. Das Modell beschränkt sich ausschliesslich auf normalzugbeanspruchte Bauteile.

2.4 Numerische Integration der Krümmung

2.4.1 Momenten-Krümmungsdiagramm

Das Momenten-Krümmungsdiagramm ist geeignet zur Beschreibung des Tragverhaltens von überwiegend auf Biegung beanspruchte Stabtragwerke. Zur rechnerischen Ermittlung gelten folgende Annahmen, wie in Spathelf (2022) beschrieben:

- Eben- und senkrechtbleiben der Querschnitte
- Die Betonzugfestigkeit f_{ct} wird, für Zustände nach dem Überschreiten von f_{ct} , vernachlässigt
- Linear elastisches Verhalten von Stahl und Beton für die Spannungs- und Verformungsberechnung
- Die Bewehrung überträgt Zug- und Druckkräfte ausschliesslich in Stabrichtung

2.5 Versatzmass

3 Verformung an Dreipunktbiegeversuch

Im folgenden Kapitel werden sämtliche Modelle, welche in Kapitel 2 erläutert sind, auf einen Dreipunktbiegeversuch angewendet. Es wird das Ziel verfolgt, die Abweichungen der Verformungen, ermittelt mit den unterschiedlichen Modellen, zu den gemessenen Verformungen darzustellen.

3.1 Versuchsbeschreibung

Es dient der Versuch A3 in der zweiten Versuchsanordnung (kurz A3V2) aus Jäger und Marti (2006). Folgend sind die notwendigen Eckdaten des Versuchs aufgezeigt, detaillierte Beschreibungen finden sich in Jäger und Marti (2006).

Es handelt sich um einen Plattenstreifen, die Lagerung entspricht einem Dreipunktbiegeversuch. Belastet wird der Plattenstreifen durch F_A bis zum Bruch. Die Höchstlast beträgt 331 kN.

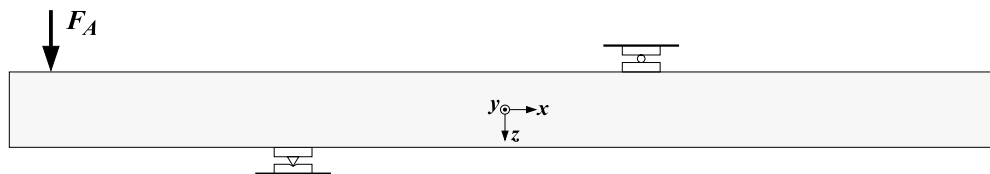


Abbildung 3.1: Lagerung und Belastung des Plattenstreifens Versuch A3V2, entnommen aus Jäger und Marti (2006)

Das Bewehrungslayout ist so gewählt, dass lediglich eine Zugbewehrung im negativen Momentenbereich vorhanden ist. Die Bewehrungsrichtung ist orthogonal, bzw. parallel zu den Bauteilkanten verlegt.

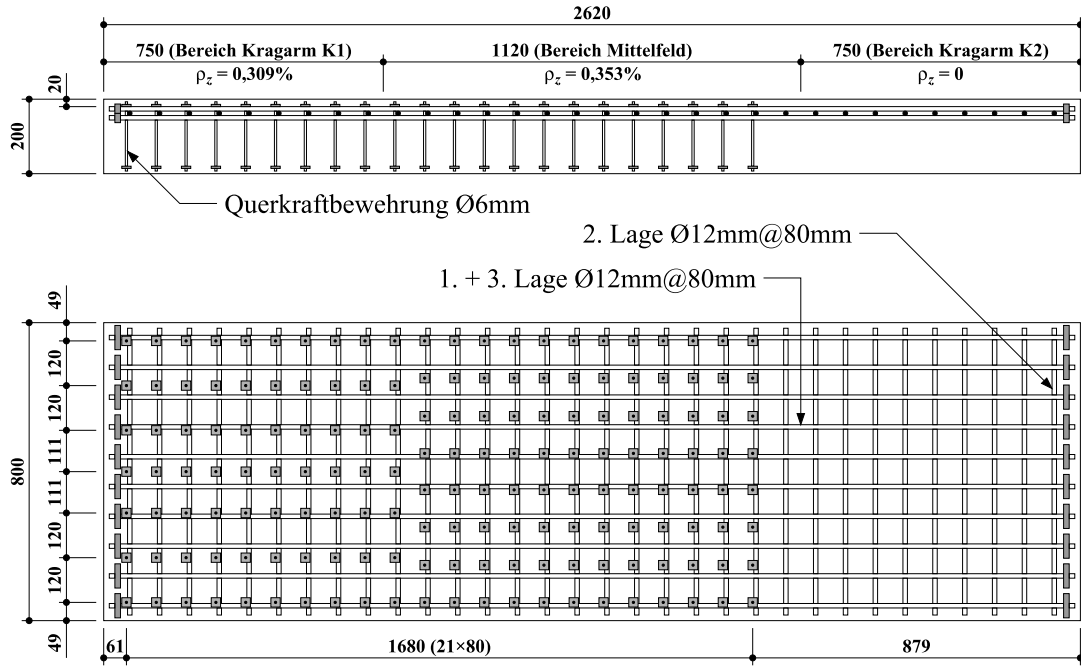


Abbildung 3.2: Bewehrungslayout des Plattenstreifens Versuch A3V2, entnommen aus Jäger und Marti (2006)

Die vorhandene Querkraftbewehrung ermöglicht ein weitgehend durch die Biegung verursachtes Versagen. Dies deckt sich mit der Abgrenzung, primär Biegeverformungen zu betrachten.

3.2 Baustoffeigenschaften

Mittels Würfel- und Zylinderproben sind Betoneigenschaften in Jäger und Marti (2006) ermittelt worden. Sowie durch Zugproben die Eigenschaften des Betonstahls. Die Betoneigenschaften des Würfels decken sich nicht direkt mit den Eigenschaften des Betons im Bauteil. Mittels Transformationen aus Jaeger (2014) sind die Bauteileigenschaften bestimmt worden.

Die Betondruckfestigkeit entspricht:

$$f_c = 2.7 f_{cc}^{\frac{2}{3}} \quad (3.1)$$

$$f_c = \frac{40.827 \text{ N}}{\text{mm}^2} \quad (3.2)$$

Zugfestigkeit nach Jaeger (2013):

$$f_{ct} = 0.3 f_{cc}^{\frac{2}{3}} \quad (3.3)$$

$$f_{ct} = \frac{4.54\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (3.4)$$

Elastizitätsmodul nach Jaeger (2013):

$$E_c = 10000 \sqrt[3]{f_{cc}} \quad (3.5)$$

$$E_c = \frac{38886.0\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (3.6)$$

3.3 Reiner Biegeträger

In diesem Abschnitt wird das Modell aus Kapitel 2.1 auf das Versuchsobjekt angewendet. Dazu ist in einem ersten Schritt das statische System des Versuchs in Abbildung 3.3 aufgezeigt.

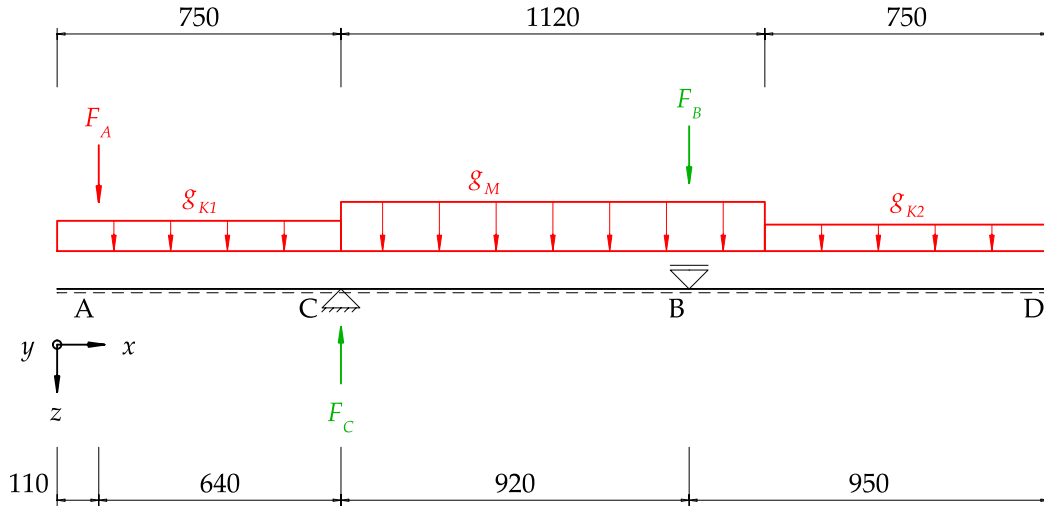


Abbildung 3.3: Statisches System der Versuchsanordnung

Eine Vereinfachung des Systems in Abbildung 3.3 ist in Abbildung 3.4 gezeigt. Dabei wird das Eigengewicht vernachlässigt, aufgrund des minimalen Einflusses des Eigengewichts auf das Biegemoment. Sowie sind die Verformungen, gemessen in Jäger und Marti (2006), nach dem Einbau des Trägers gemessen worden. Folglich zeigt die Messung den Einfluss des Eigengewichts nicht.

$$g_M, g_{k1}, g_{k2} = 0 \quad (3.7)$$

Die Berücksichtigung der Lagerbreiten führt zu der Streckenlast f_A , bzw. zu den Lagerreaktionen f_B und f_C .

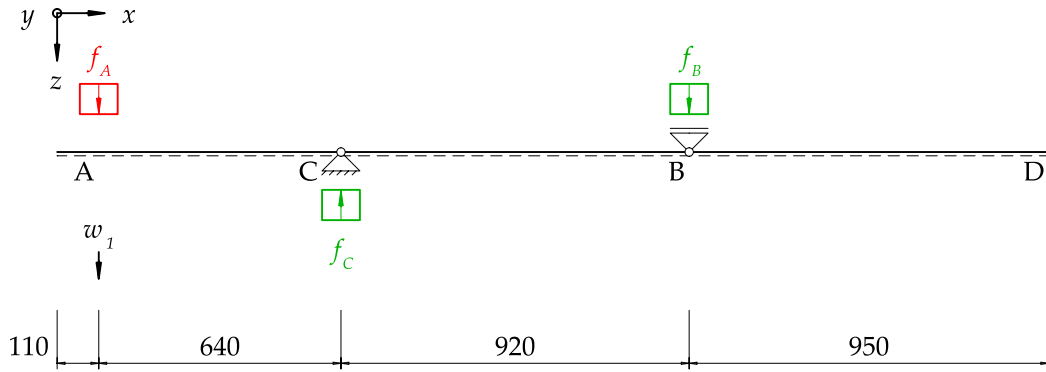


Abbildung 3.4: Angepasstes statisches System der Versuchsanordnung

Die Berechnungen beziehen sich ausschliesslich auf Abbildung 3.4. Dazu sind die folgenden Parameter berücksichtigt:

Tabelle 3.1: Versuchsparameter für den reinen Biegeträger

$a_1 = 0.11 \text{ m}$	$a_2 = 0.64 \text{ m}$
$a_3 = 0.92 \text{ m}$	$a_4 = 0.95 \text{ m}$
$b = 800.0 \text{ mm}$	$b_{Auflager} = 100 \text{ mm}$
$h = 200.0 \text{ mm}$	

3.3.1 Auflagerkräfte

Anhand von Gleichgewichtsbeziehungen können für das statisch bestimmte System die Auflagerkräfte bestimmt werden. In einem ersten Schritt wird die Balkenlänge definiert:

$$l_{tot} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad (3.8)$$

$$l_{tot} = 2.62 \text{ m} \quad (3.9)$$

Durch Momentengleichgewicht um die Auflagerpunkte C und B folgen die Beziehungen zwischen Einwirkung und Reaktionskräfte:

$$0 = F_A a_2 - F_B a_3 \quad (3.10)$$

$$0 = F_A (a_2 + a_3) - F_C a_3 \quad (3.11)$$

Durch Auflösung nach den Reaktionskräften folgt:

$$F_B = \frac{F_A a_2}{a_3} \quad (3.12)$$

$$F_C = \frac{F_A a_2 + F_A a_3}{a_3} \quad (3.13)$$

Wie in Abbildung 3.4 gezeigt, gilt es die Punktkräfte der Auflagerbreite entsprechend zu verteilen:

$$f_B = \frac{F_A a_2}{a_3 b_{\text{Auflager}}} \quad (3.14)$$

$$f_C = \frac{F_A a_2 + F_A a_3}{a_3 b_{\text{Auflager}}} \quad (3.15)$$

$$f_A = \frac{F_A}{b_{\text{Auflager}}} \quad (3.16)$$

3.3.2 Zustandslinien

Die Zustandslinien der Schnittkräfte resultieren aus der Bemühung der hergeleiteten Gleichungen in Kapitel 2.1. Dabei ist zu beachten, dass die Zustandslinien lediglich für die maximal gewählte Laststufe gelten. Der Verlauf der Einwirkungen ist in Abbildung 3.5 aufgezeigt. Es sind lediglich die bestimmten Einwirkungen und Reaktionen an den Stab anzusetzen. Die positive Stabseite ist strichliert dargestellt. In positive z-Richtung wirkende Kräfte sind positiv definiert.

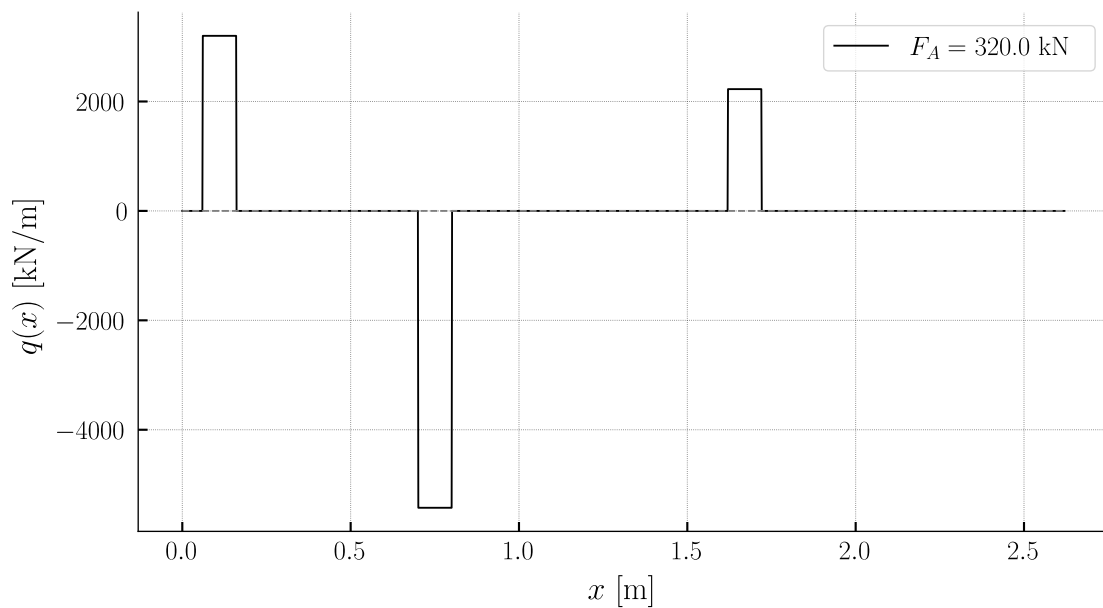


Abbildung 3.5: Verlauf der Einwirkungen und Reaktionskräften

Durch Integration der Einwirkung resultiert der Querkraftverlauf.

$$V(x) = - \int q(x) + c_1 \quad (3.17)$$

Dabei kann mit der Randbedingung $V(0) = 0$ die Integrationskonstante ermittelt werden. Der Verlauf der Querkräfte ist in Abbildung 3.6 dargestellt. Nach dem Auflager B ist der Plattenstreifen unbelastet.

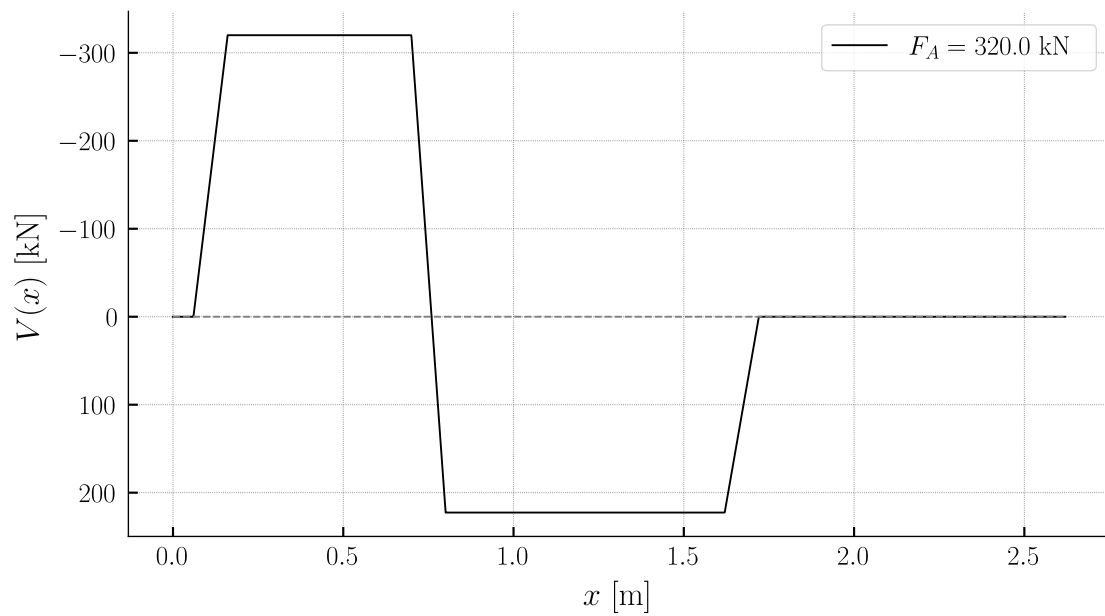


Abbildung 3.6: Verlauf der Querkräfte

Der Verlauf der Biegemoment lässt sich durch Integration der Querkräfte bestimmen:

$$M(x) = \int V(x) + c_2$$

Dabei kann mit der Randbedingung $M(0) = 0$ die Integrationskonstante ermittelt werden. Der Verlauf der Biegemomente ist in [Abbildung 3.7](#) dargestellt. Es stellt sich ein Minimum über dem Auflager C ein.

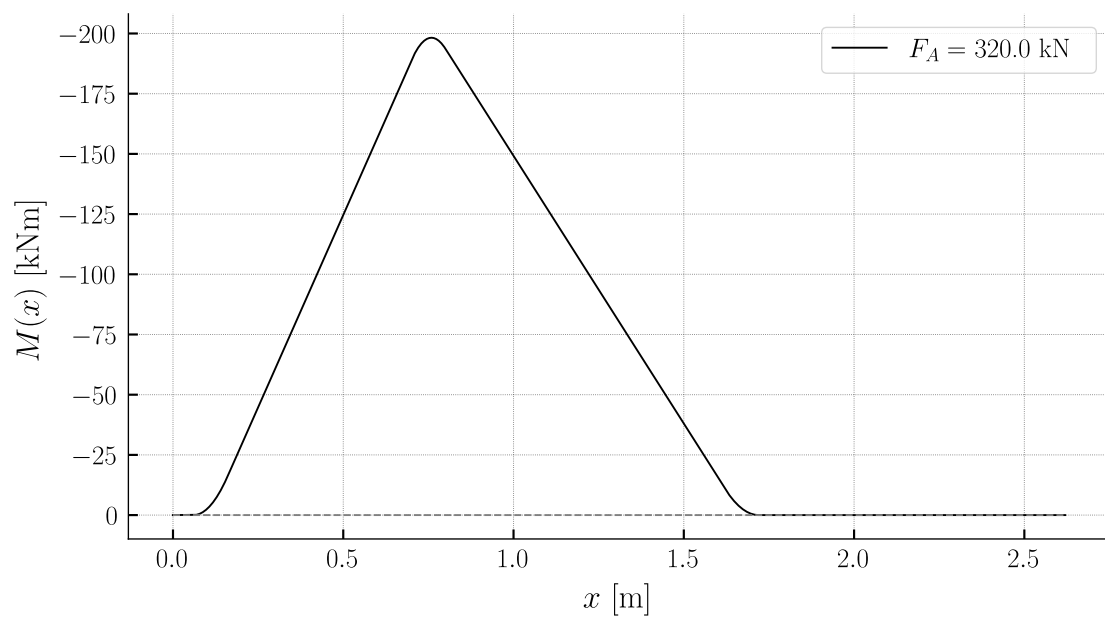


Abbildung 3.7: Verlauf der Biegemomente

Neben den resultierenden Biegemomenten aus der Einwirkung kann ein Biegemoment, induziert durch die Längszugkraft aus der Querkraft, ermittelt werden. Dies ist mit einem Versatzmass berücksichtigt. Dabei gilt das Versatzmass lediglich für die Längszugkraft. Multipliziert mit der statischen Höhe resultiert der Versatz des Biegemoments

$$h_{versatz} = \frac{V \cdot \cot(\theta_{c3})}{2} \quad (3.18)$$

$$M_{versatz} = \frac{V \cdot \cot(\theta_{c3})}{2} \cdot z \quad (3.19)$$

Der Momentenverlauf in Abbildung 3.7 ist mit dem Versatzmass zu erhöhen. Dargestellt ist dies in Abbildung 3.8. Beim Momentenminimum bildet sich ein Plateau aus.

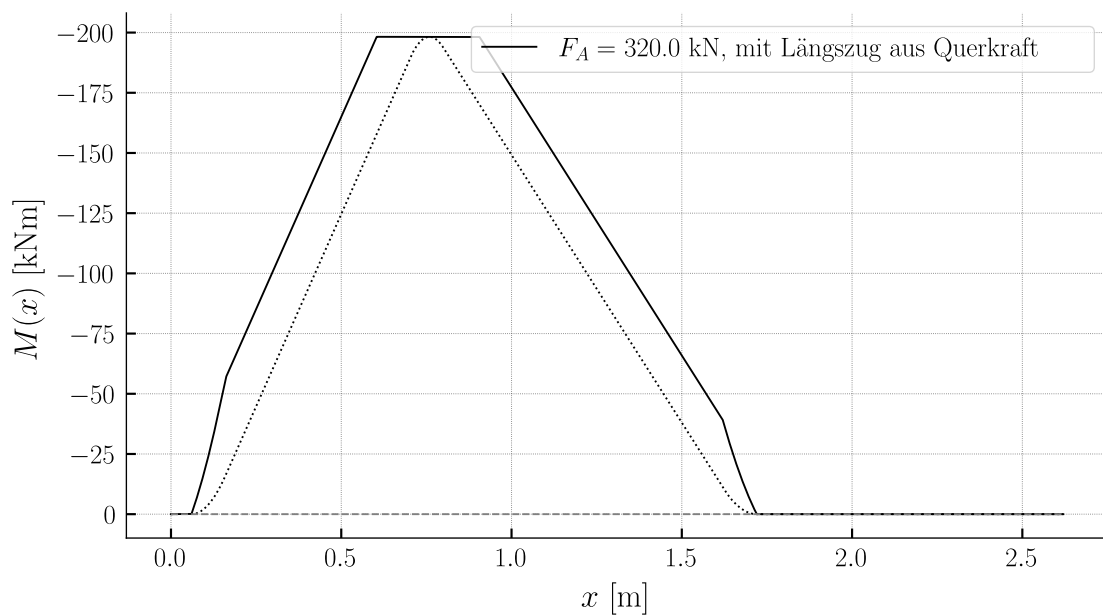


Abbildung 3.8: Verlauf der Biegemomente mit Längszugkraft aus Querkraft

3.3.2.1 Biegesteifigkeit - Vollständig ungerissen

Wie in Kapitel 2.1 hergeleitet, sind die Gleichgewichtsbetrachtungen nicht ausreichend um die Verdrehung und Verformung zu beschreiben. Die Werkstoffbeziehung bedingt eine Biegesteifigkeit. Dabei wird von einer konstanten Biegesteifigkeit ausgegangen. Für einen ungerissenen Querschnitts folgt diese zu:

$$EI = \frac{E_c b h^3}{12} \quad (3.20)$$

$$EI = 2.07 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2 \quad (3.21)$$

Der Verlauf der Verdrehung entspricht dem Integrierten Verlauf der Biegemomente, dividiert durch die Biegesteifigkeit.

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI} \int M(x) + c_3 \quad (3.22)$$

Abschliessend lässt sich die Verformung anhand der Verdrehung ermitteln.

$$w(x) = \int -\varphi(x) + c_4 \quad (3.23)$$

Mit den Randbedingungen $w(C) = 0$ und $w(B) = 0$ sind die Integrationskonstanten bestimmt. Die elastische Verformung für einen ungerissenen Querschnitt ist in [Abbildung 3.9](#) dargestellt.

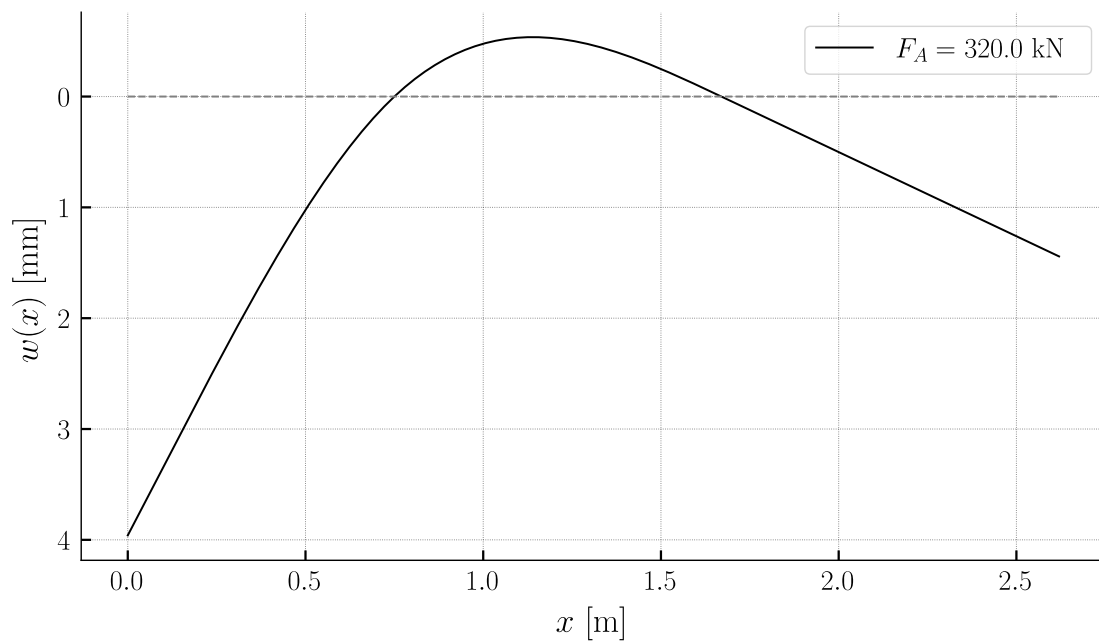


Abbildung 3.9: Verlauf der Verformung für eine konstante ungerissene Biegesteifigkeit

3.4 Mohrsche Analogie

Das Vorgehen ist in Kapitel [2.2](#) beschrieben. Der bereits bestimmte Momentenverlauf gemäss [Abbildung 3.7](#), dividiert durch die ungerissene Biegesteifigkeit, ist als Einwirkung auf das System anzusetzen. Dargestellt ist dies in [Abbildung 3.10](#).

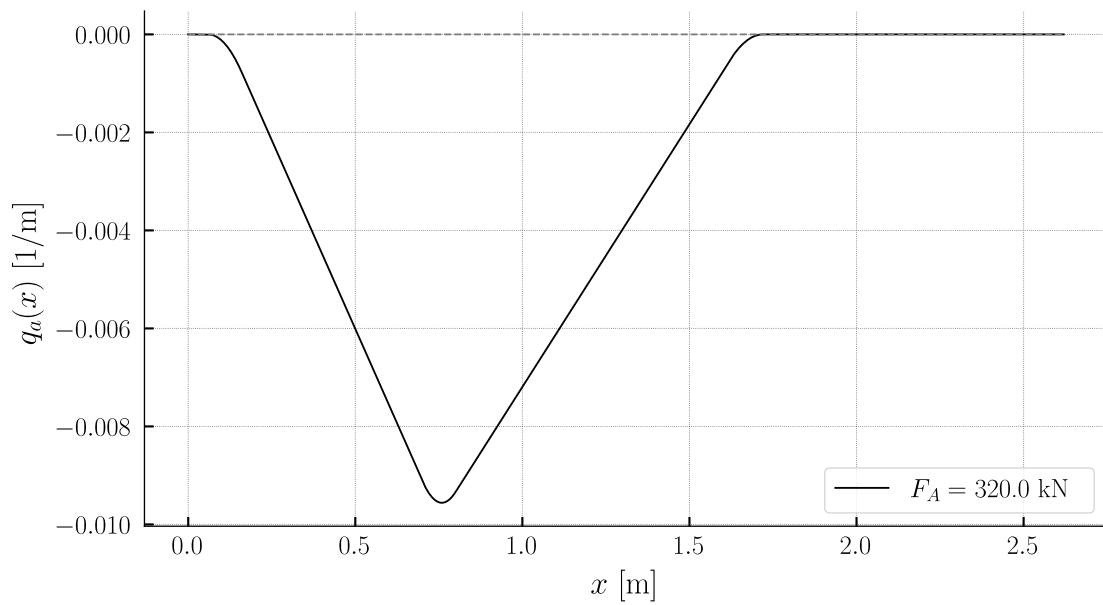


Abbildung 3.10: Verlauf der Einwirkungen auf das analoge System

Die maximale Biegeverformung tritt beim Stabanfang auf. Gemäss der Abbildung 3.9 ist bekannt, dass bei den Auflagerpunkten die Verformung gleich null sein muss, sowie die Verformung am Stabanfang und einen Maximalwert aufweist. Die Verformung bei der Mohrschen Analogie entspricht dem Biegemomentenverlauf des analogen Systems. Folglich ist bei den Stab Anfangs- und Endpunkten eine volle Einspannung zu modellieren, sowie bei den Auflagerpunkten ein Biegegelenk einzuführen. Dies deckt sich mit den Lagerungsbedingungen aus Abbildung 2.3.

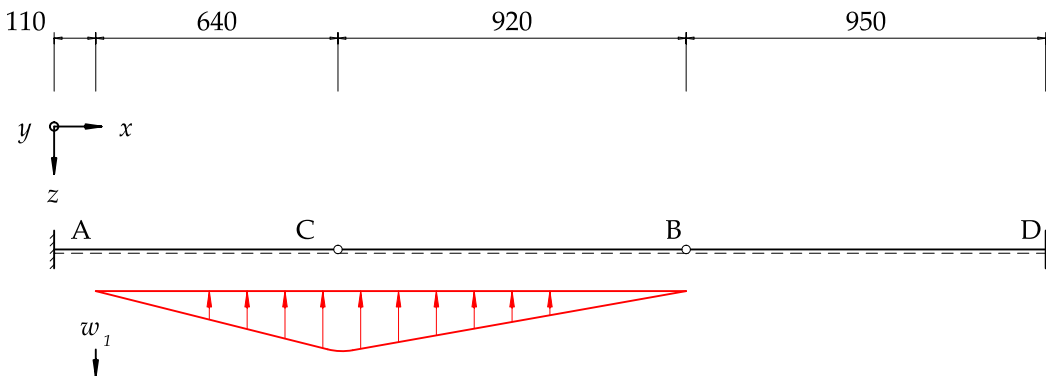


Abbildung 3.11: Analoges System mit entsprechender Einwirkung und Lagerungsbedingungen

Der Querkraftverlauf für das analoge System ist in Abbildung 3.12 aufgezeigt. Die Querkraft ist einheitslos, da es sich um die Verdrehung handelt.

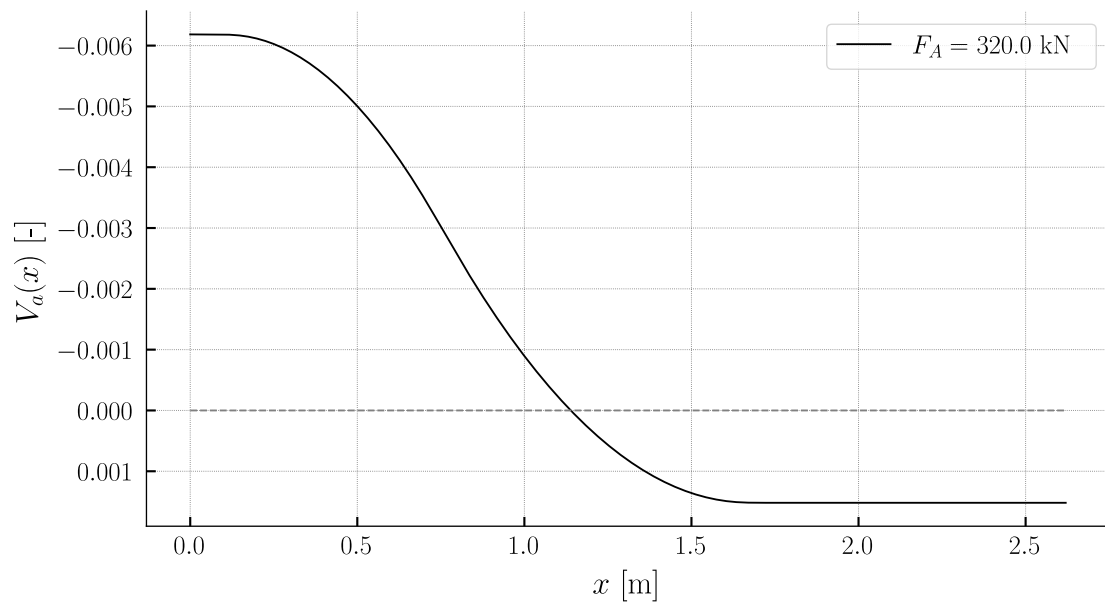


Abbildung 3.12: Verlauf der Querkräfte für das Analogiesystem

Der Biegemomentenverlauf für das analoge System zeigt die Abbildung 3.13. Der Momentenverlauf entspricht der Verformung und ist folglich in [mm] dargestellt.

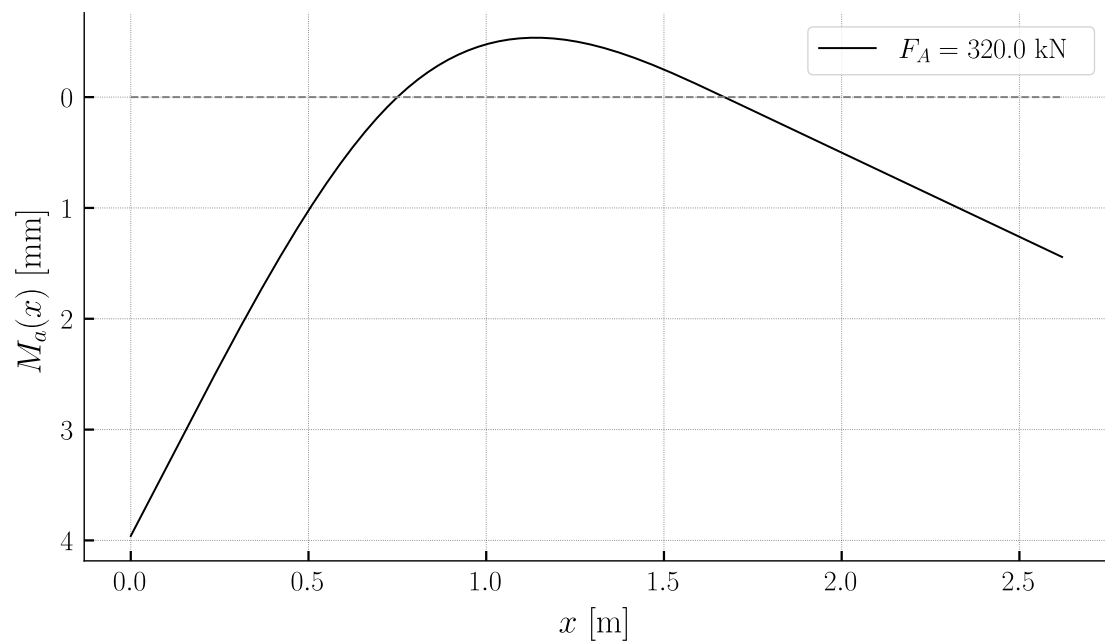


Abbildung 3.13: Verlauf der Biegemomente für das Analogiesystem

3.5 Abschätzung nach Norm

Nach der bestimmten elastischen Verformung kann die Verformung anhand des vollständig gerissenen Querschnitts nach SIA (2013) ermittelt werden. Ohne Druckbewehrung und Kriecheinflüsse folgt die Gleichung zu:

$$w_{1II,SIA} = \frac{0.75}{10\rho^{0.7}} \left(\frac{h}{d}\right)^3 w_1 \quad (3.24)$$

Dabei entspricht der geometrische Bewehrungsgehalt:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (3.25)$$

Die Querschnittsfläche der Stäbe folgt zu:

$$A_s = 2b \frac{\pi \phi_s^2}{4s_x} \quad (3.26)$$

$$A_s = 2262.0\text{mm}^2 \quad (3.27)$$

Die statische Höhe ist definiert gemäss:

$$d = -\frac{3\phi_s}{2} - c_{nom} + h \quad (3.28)$$

$$d = 162.0\text{mm} \quad (3.29)$$

Die Verformung entspricht abschliessend:

$$w_{1II,SIA} = 15.7\text{mm} \quad (3.30)$$

3.6 Numerische Integration der Krümmung

3.6.1 Grundlagen

Um sich von der Betrachtung einer konstanten Biegesteifigkeit zu lösen, hilft die Anwendung einer verfeinerten Momenten-Krümmungsbeziehung. Folgend wird ein Momentenkrümmungsdiagramm für den Querschnitt aus dem beschriebenen Versuch berechnet. Die vorhandene Querkraftbewehrung ist nicht dargestellt in Abbildung 4.1.

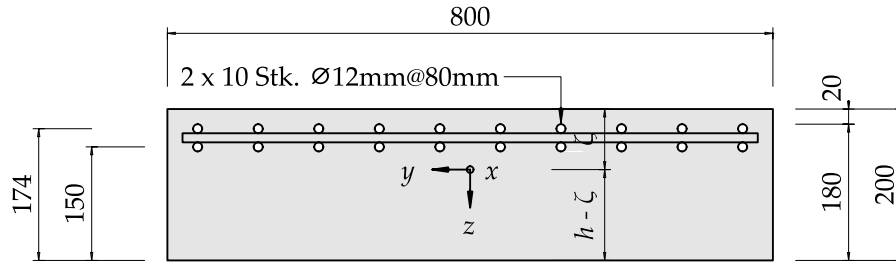


Abbildung 3.14: Querschnitt des Versuchs A3 zur Bestimmung des Momenten-Krümmungsdiagramms

Vereinfacht wird der Querschnitt folgender massen:

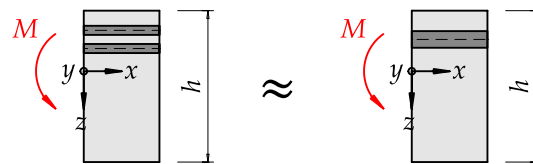


Abbildung 3.15: Vereinfachung der Bewehrungsführung

Die Parameter in Tabelle 4.1 finden Einfluss in die Berechnungen.

Tabelle 3.2: Versuchsparameter für die verfeinerte Momenten-Krümmungsbeziehung

$E_s = 200000.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\phi_s = 12.0 \text{ mm}$
$c_{nom} = 20.0 \text{ mm}$	$f_{cc} = 58.8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
$f_{su} = 630.3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$f_{sy} = 546.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
$s_x = 80.0 \text{ mm}$	$\varepsilon_{cu} = 0.005$
$\varepsilon_{su} = 0.1117$	

Neben den Parametern wird das Stoffgesetz für den Betonstahl in Abbildung 4.3 hinterlegt. Das Bilineare, bzw. linear-elastisch linear-plastische Spannungs-Dehnungsdiagramm für den Betonstahl hält den Rechenaufwand klein und liefert eine ausreichende Genauigkeit. Eine Berücksichtigung des verfestigenden Verhaltens ist essentiell um die Verformungen nach dem Fließen des Betonstahls näherungsweise zu bestimmen. Das Diagramm ist definiert bis zur Bruchdehnung des Stahls. Das Verhalten gilt ebenso im negativen Spannungs-Dehnungs Bereich.

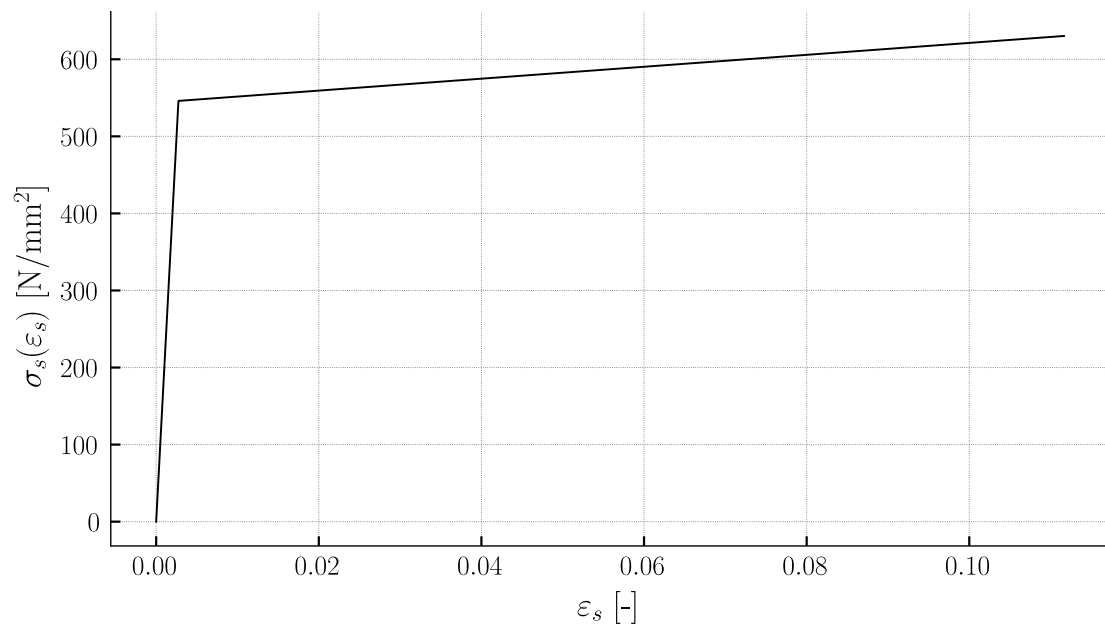


Abbildung 3.16: Spannungs-Dehnungs Diagramm des Bewehrungsstahls linear elastisch-linear verfestigend plastisch

Die Betonkennlinie in Abbildung 4.4 zeigt ein linear-elastisches ideal-plastisches Verhalten. Im positiven Bereich lässt sich die Betonspannung bis zur Betonzugfestigkeit erhöhen, im negativen Spannungsbereich beginnt ein Plastifizieren beim Erreichen der Betondruckfestigkeit. Bis zur Bruchstauchung ist dies definiert.

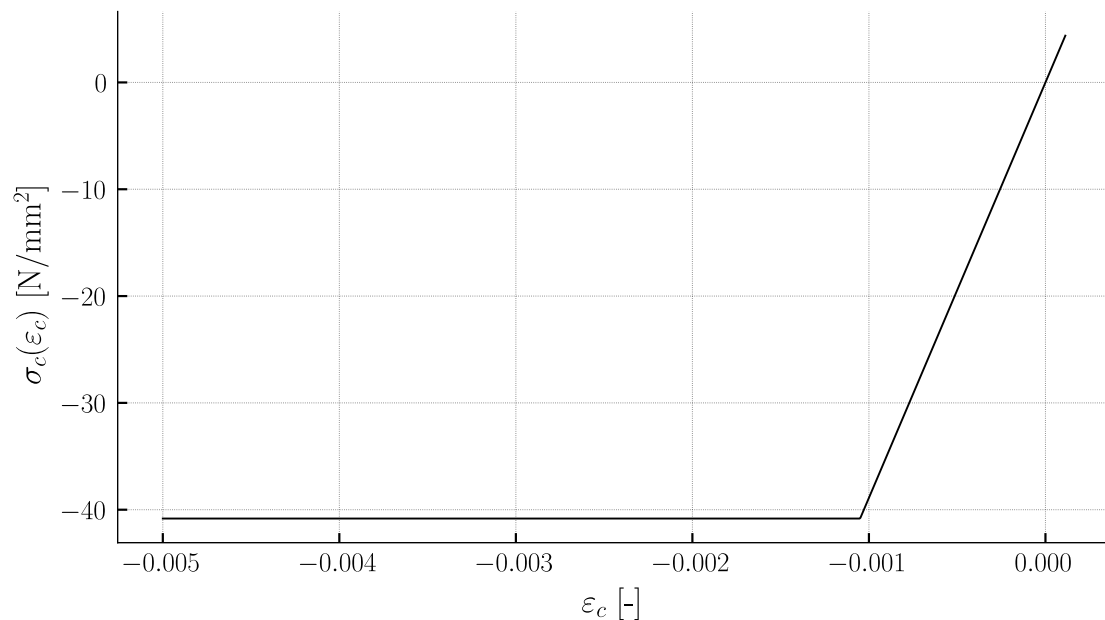


Abbildung 3.17: Spannungs-Dehnungs Diagramm des Betons linear elastisch-ideal plastisch

3.6.2 Querschnittsanalyse

Mittels einer Querschnittsanalyse lassen sich die unterschiedlichen Zustände des Momenten-Krümmungsdiagramms ermitteln.

3.6.2.1 Schwerpunkt des Querschnitts

Durch die Bestimmung der Wertigkeit n kann der Querschnitt als homogener Betonquerschnitt zur Bestimmung des Schwerpunkts behandelt werden.

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (3.31)$$

$$n = 5.14 \quad (3.32)$$

Die Querschnittsfläche der Bewehrung beträgt:

$$A_s = 2b \frac{\pi \mathcal{O}_s^2}{4s_x} \quad (3.33)$$

$$A_s = 2262.0\text{mm}^2 \quad (3.34)$$

Die Betonquerschnittsfläche:

$$A_c = bh \quad (3.35)$$

$$A_c = 160000.0\text{mm}^2 \quad (3.36)$$

Die ideelle Querschnittsfläche resultiert zu:

$$A_i = A_c + A_s (n - 1) \quad (3.37)$$

$$A_i = 169372.0\text{mm}^2 \quad (3.38)$$

Und die z-Koordinate des Schwerpunkts folgt abschliessend zu:

$$\zeta_c = \frac{\frac{A_c h}{2} + A_s (1.5 \mathcal{O}_s + c_{nom}) (n - 1)}{A_i} \quad (3.39)$$

$$\zeta_c = 96.6\text{mm} \quad (3.40)$$

$$A_s = 22.6\text{cm}^2 \quad (3.41)$$

3.6.2.2 Flächenträgheitsmoment

Das Flächenträgheitsmoment wird ebenfalls am ideellen Querschnitt bestimmt. Die Eigen­trägheitsmomente der Kreisquerschnitte der Bewehrung sind nicht berücksichtigt, lediglich der Steiner-Anteil fließt in die Berechnung ein:

$$I^I = A_s (n-1) \left(\frac{3\mathcal{D}_s}{2} + c_{nom} - \zeta_c \right)^2 + \frac{bh^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} - \zeta_c \right)^2 \quad (3.42)$$

$$I^I = 5.67 \cdot 10^8 \text{mm}^4 \quad (3.43)$$

3.6.2.3 Ungerissen - Zustand 1

Der Querschnitt verbleibt elastisch. Folglich kann das Flächenträgheitsmoment mit E_c multipliziert werden und es resultiert die ungerissene Biegesteifigkeit:

$$EI^I = E_c I^I \quad (3.44)$$

$$EI^I = 2.206 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2 \quad (3.45)$$

3.6.2.3.1 Rissmoment

Durch die Ermittlung des Rissmoments kann die Krümmung vor dem Reißen des Betons ermittelt werden. Die Betonzugkraft wird nicht berücksichtigt.

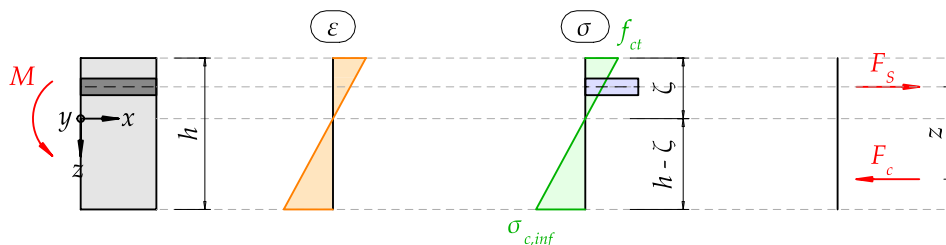


Abbildung 3.18: Querschnittsanalyse vor dem Reißen des Betons

Die Betondruckspannung beträgt:

$$\sigma_{conf,1} = \frac{f_{ct}(h - \zeta_c)}{\zeta_c} \quad (3.46)$$

$$\sigma_{cinf,1} = \frac{4.86\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (3.47)$$

Der Hebelarm der inneren Kräfte folgt zu:

$$z_1 = -1.5 \mathcal{O}_s - c_{nom} + \frac{2h}{3} + \frac{\zeta_c}{3} \quad (3.48)$$

$$z_1 = 128.0\text{mm} \quad (3.49)$$

Die Betondruckkraft ist definiert nach:

$$F_{c,1} = \frac{b\sigma_{c,inf,1}(h - \zeta_c)}{2} \quad (3.50)$$

$$F_{c,1} = 201.0\text{kN} \quad (3.51)$$

Und das Rissmoment resultiert schliesslich zu:

$$M_r = F_{c,1}z_1 \quad (3.52)$$

$$M_r = 25.63\text{kNm} \quad (3.53)$$

Aus dem Rissmoment folgt die Krümmung beim Reissen:

$$\chi_r = \frac{M_r}{EI^I} \quad (3.54)$$

$$\chi_r = \frac{0.00116}{\text{m}} \quad (3.55)$$

Die Neigung linearen Funktion des ungerissenen Zustands im Momentenkrümmungsdiagramm ist durch die Biegesteifigkeit definiert. Der Endpunkts des Zustand 1 definiert das Rissmoment mit der entsprechenden Krümmung.

3.6.2.4 Gerissen Elastisch - Zustand 2

Der Querschnitt nach dem Reissen ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Der Betonstahl hat die Fließgrenze noch nicht erreicht. Der Beton die Druckfestigkeit ebenfalls nicht.

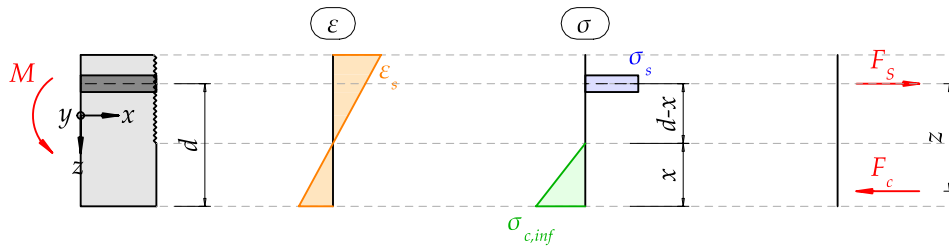


Abbildung 3.19: Querschnittsanalyse nach dem Reissen des Betons

Dabei beträgt die statische Höhe:

$$d = -\frac{3\varnothing_s}{2} - c_{nom} + h \quad (3.56)$$

$$d = 162.0\text{mm} \quad (3.57)$$

Mittels Gleichgewicht der Kräfte lässt sich die Betondruckzonenhöhe und folglich die gerissene Biegesteifigkeit herleiten. Die Betonstahlzugkraft beträgt:

$$F_{z,2} = A_s \sigma_{s,2} \quad (3.58)$$

Die Betonstahlspannung für linear elastisches Verhalten folgt zu:

$$\sigma_{s,2} = E_s \varepsilon_{s,2} \quad (3.59)$$

Die Betondruckkraft anhand des dreieckigen Verlaufs in Abbildung 4.6 beträgt:

$$F_{c,2} = \frac{b \sigma_{cinf,2} x_2}{2} \quad (3.60)$$

Die Betonspannung ebenfalls bestimmt durch ein linear elastisches Verhalten ist definiert durch:

$$\sigma_{cinf,2} = E_c \varepsilon_{c,2} \quad (3.61)$$

Die Betondehnung anhand des Dehnungsverlaufs in Abbildung 4.6:

$$\varepsilon_{c,2} = \frac{\varepsilon_{s,2} x_2}{d - x_2} \quad (3.62)$$

Unter Bemühung des Gleichgewichts der horizontalen Kräfte lässt sich die folgende Beziehung ermitteln.

$$F_{c,2} = F_{z,2} \quad (3.63)$$

Einsetzen der bestimmten Gleichungen in die Gleichgewichtsbeziehung und mit n und ρ substituiert, folgt:

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (3.64)$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (3.65)$$

$$E_s b d \rho \varepsilon_{s,2} = \frac{E_s b \varepsilon_{s,2} x_2^2}{2n(d - x_2)} \quad (3.66)$$

Durch die Auflösung nach x folgt die Betondruckzonenhöhe:

$$x_2 = d \left(-n\rho + \sqrt{n\rho(n\rho + 2)} \right) \quad (3.67)$$

$$x_2 = 55.6 \text{ mm} \quad (3.68)$$

Zur Bestimmung der Krümmung ist die Betonstahldehnung erforderlich. Diese bedingt ein einwirkendes Moment. Der Übergang zwischen ungerissenem zu gerissenem Verhalten erfolgt beim Rissmoment. Folglich kann das Rissmoment in Abbildung 4.6 angesetzt werden.

$$M_2 = F_{z,2} \left(d - \frac{x_2}{3} \right) \quad (3.69)$$

$$M_2 = M_r \quad (3.70)$$

$$M_r = A_s E_s \varepsilon_{s,2} \left(d - \frac{x_2}{3} \right) \quad (3.71)$$

Daraus resultiert die Betonstahldehnung:

$$\varepsilon_{s,2} = 0.000395 \quad (3.72)$$

Die Krümmung kann anhand des Dehnungsverlaufs in Abbildung 4.6 bestimmt werden:

$$\chi^{II} = \frac{\varepsilon_{s,2}}{d - x_2} \quad (3.73)$$

$$\chi^{II} = \frac{0.00371}{\text{m}} \quad (3.74)$$

Abschliessend folgt die gerissene Biegesteifigkeit zu:

$$EI^{II} = \frac{M_2}{\chi^{II}} \quad (3.75)$$

$$EI^{II} = 6903.8 \text{ kNm}^2 \quad (3.76)$$

Die Neigung der linearen Funktion im gerissenen Bereich ist durch die gerissene Biegesteifigkeit definiert. Der Beginn ist durch das Rissmoment definiert.

3.6.2.5 Fließen der Bewehrung - Zustand 3

Die Biegesteifigkeit EI^{II} gilt bis die Bewehrung fließt oder der Beton beginnt zu plastifizieren. In Abbildung 4.7 wird vorausgesetzt, dass die Bewehrung fließt.

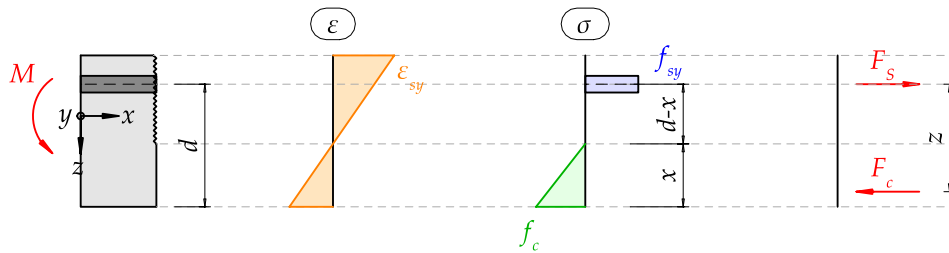


Abbildung 3.20: Querschnittsanalyse für reine Biegung beim Fließen der Bewehrung

Durch Gleichgewicht der horizontalen Kräfte folgen die Beziehungen:

$$\sigma_{cinf,3} = \frac{E_c f_{sy} x_3}{E_s (d - x_3)} \quad (3.77)$$

$$A_s f_{sy} = \frac{b \sigma_{cinf,3} x_3}{2} \quad (3.78)$$

Aufgelöst nach der Druckzonenhöhe:

$$x_3 = \frac{-A_s E_s + \sqrt{A_s E_s (A_s E_s + 2 E_c b d)}}{E_c b} \quad (3.79)$$

$$x_3 = 55.6 \text{ mm} \quad (3.80)$$

Daraus lässt sich das Fliessmoment bestimmen, welches den Endpunkt im Momenten-Krümmungsdiagramm für den gerissenen Zustand definiert:

$$M_y = A_s f_{sy} \left(d - \frac{x_3}{3} \right) \quad (3.81)$$

$$M_y = 177.2 \text{ kNm} \quad (3.82)$$

Die Fliessdehnung des Betonstahls entspricht:

$$\varepsilon_{sy} = 0.00273 \quad (3.83)$$

Abschliessend lässt sich die Krümmung für den Endpunkt des Zustands 2 folgend bestimmen:

$$\chi_y = \frac{\varepsilon_{sy}}{d - x_3} \quad (3.84)$$

$$\chi_y = \frac{0.0257}{\text{m}} \quad (3.85)$$

Der Zustand 3 beschreibt lediglich den Endpunkt des gerissenen Bereichs im Momenten-Krümmungsdiagramm.

3.6.2.6 Maximaler Biege widerstand - Zustand 4

Abschliessen kann der maximale Biege widerstand durch die plastifizierung der Betondruckzone bestimmt werden. Vereinfacht wird dem Betonstahl die statische Zugfestigkeit vorausgesetzt um das verfestigende Verhalten annähernd abzubilden. Dies bedingt grundsätzlich das Erreichen der Bruchdehnung im Stahl. Da der Querschnitt stark bewehrt ist, versagt die Betondruckzone vor dem Erreichen der Betonstahlbruchdehnung.

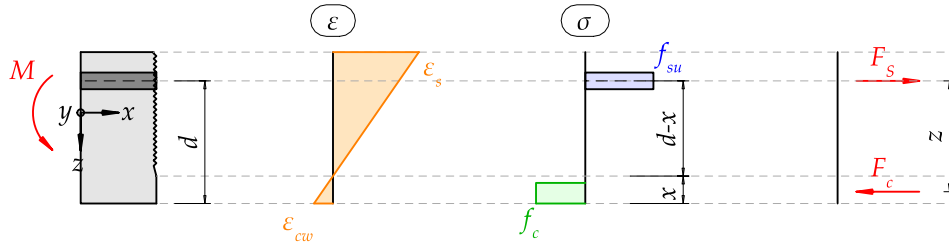


Abbildung 3.21: Querschnittsanalyse für reine Biegung mit der Bewehrung bei der Bruchspannung und plastifizierter Betondruckzone

Vereinfacht werden die Spannungen in der Druckzone konstant verteilt betrachtet. Dazu wird die Druckzonenhöhe abgemindert um Faktor 0.85.

Das Gleichgewicht der Kräfte führt zu:

$$A_s f_{su} = 0.85 b f_c x_4 \quad (3.86)$$

Die Druckzonenhöhe folgt zu:

$$x_4 = 51.4 \text{ mm} \quad (3.87)$$

Der maximale Biege widerstand folgt zu:

$$M_R = A_s f_{su} (d - 0.425 x_4) \quad (3.88)$$

$$M_R = 199.8 \text{ kNm} \quad (3.89)$$

Die Krümmung lässt sich anhand der Betonstauchung ermitteln:

$$\chi_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{x_4} \quad (3.90)$$

$$\chi_u = \frac{0.0974}{\text{m}} \quad (3.91)$$

Die Betonstahldehnung darf die Bruchdehnung nicht überschreiten:

$$\varepsilon_{s,4} = \frac{\varepsilon_{cu} (d - x_4)}{x_4} \quad (3.92)$$

$$\varepsilon_{s,4} = 0.0108 \quad (3.93)$$

Die Bruchdehnung des Stahls wird nicht erreicht. Der Querschnitt versagt im Druckbereich. Die Annahme, dem Betonstahl die statische Zugfestigkeit zu Grunde zu legen ist grundsätzlich nicht gerechtfertigt. Der Vergleich mit den Versuchsergebnissen zeigt jedoch, dass sich diese Annahme bewährt.

$$\varepsilon_{su} = 0.1117 \quad (3.94)$$

Die Biegesteifigkeit im Bereich 3 beträgt:

$$EI^{III} = \frac{M_R}{\chi_u} \quad (3.95)$$

$$EI^{III} = 2.05 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2 \quad (3.96)$$

Der Zustand 4 beschreibt den Endpunkt des Momenten-Krümmungsdiagramm.

3.6.2.7 Momenten-Krümmungsdiagramm

Abschliessend lässt sich aus der Querschnittsanalyse die Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung ermitteln. Der lineare Verlauf im ersten Bereich ergibt sich aus der ungerissenen Biegesteifigkeit. Darauf folgt ein schlagartiger Wechsel der Steifigkeit von EI^I zu EI^{II} , da der Beton reisst. Dies führt zum Plateau im unteren Bereich. Im Bereich drei werden die zwei definierten Punkte M_y, χ_y sowie M_R, χ_u linear verbunden.

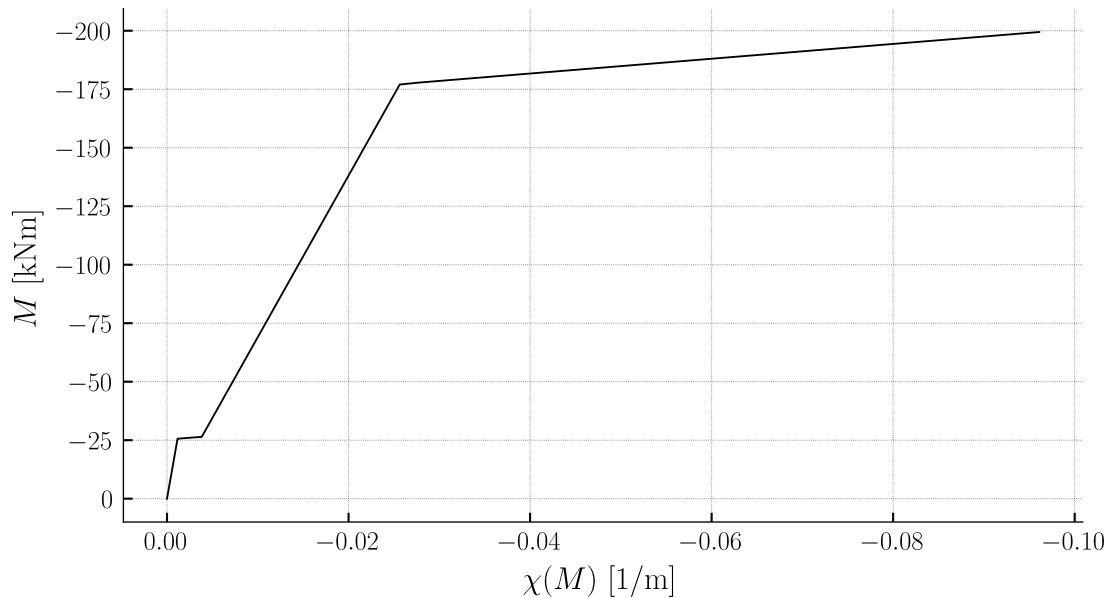


Abbildung 3.22: Momenten-Krümmungsdiagramm händisch ermittelt, definiert im positiven Bereich

3.6.2.8 Zustandslinien der Krümmung

Der Biegemomentenverlauf $M(x)$ als Eingabe in die Funktion der Krümmung $\chi(M)$ resultiert zu den Zustandslinie der Krümmung in Abbildung 3.23. Dargestellt sind die Krümmungsverläufe für die Biegemomentenverläufe aus Abbildung 3.7 und Abbildung 3.8.

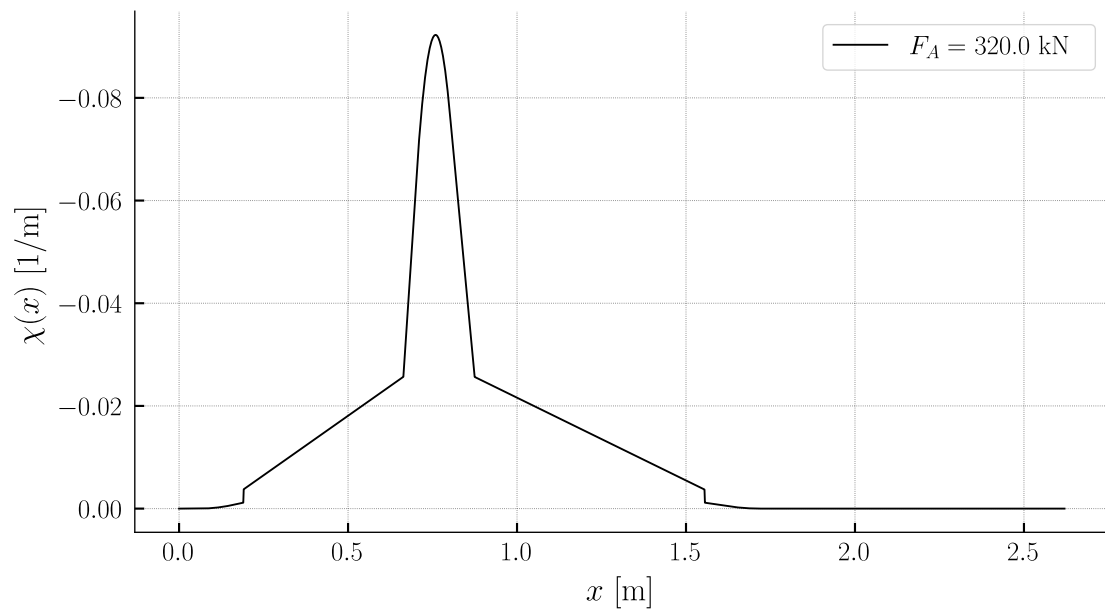


Abbildung 3.23: Krümmungsverlauf entlang der Stabachse

3.6.2.9 Punktuelle Bestimmung der Verformung

Unter Anwendung der Arbeitsgleichung kann die Verformung nach Gleichung 3.97 bestimmt werden.

$$w = \int_0^l \bar{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx \quad (3.97)$$

Wobei $\frac{M(x)}{EI} = \chi(x)$ gilt.

Es gilt die Zustandslinien der Krümmung multipliziert mit der Zustandslinie der Biegemomente in Abbildung 3.24 des virtuellen Kräftezustands über die Stablänge zu integrieren.

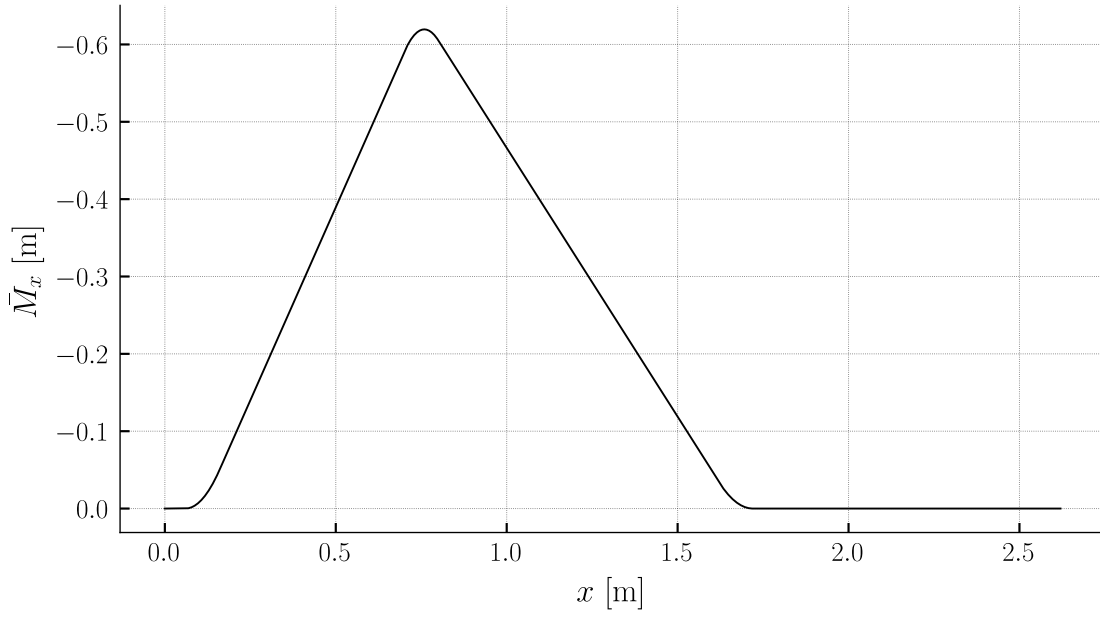


Abbildung 3.24: Biegemomentenverlauf für den virtuellen Kräftezustand

Für die maximale Last beträgt die Deformation an der Stelle w_1 beispielsweise:

$$w_1 = 14.7\text{mm} \quad (3.98)$$

3.6.3 Zugversteifung

Die bisherige Betrachtung beschränkt sich auf einen schlagartigen Wechsel von ungerissen zu vollständig gerissen. Dabei wird der Bereich zwischen den Rissen ebenfalls als gerissen angenommen. Mittels der Zugversteifung wird ein theoretischer Rissabstand ermittelt und zwischen den Rissen eine versteifte Wirkung zwischen Betonstahl und Beton angenommen (Verbundwirkung). Dies wird folgend auf das Versuchsbeispiel angewendet. Berücksichtigt wird dies unter dem Ansatz von Marti, beschrieben in Spathelf (2022).

Die Krümmungsdifferenz nach Marti beträgt:

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \frac{f_{ct}(1 - \rho_{eff})}{E_s \rho_{eff} (d - x_2)} \quad (3.99)$$

Der mechanische Bewehrungsgehalt folgt zu:

$$\rho_{eff} = \frac{1}{-n + 1 + \frac{E_s M_r (d - x_2)}{E I n f_{ct}}} \quad (3.100)$$

Eine Abschätzung des Rissabstands ist der folgende:

$$s_{rm} = \frac{\mathcal{O}_s \lambda (1 - \rho_{eff})}{4 \rho_{eff}} \quad (3.101)$$

Die Rissspannung beträgt:

$$\sigma_{sr0} = \frac{F_{z,2}}{A_s} \quad (3.102)$$

und die Rissbreiten lässt sich folgend beschreiben:

$$w_r = \frac{s_{rm} (-\lambda \sigma_{sr0} + 2\sigma_{sr})}{2E_s} \quad (3.103)$$

Durch das Einsetzen der Versuchsparameter ergeben sich folgende Werte:

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{0.00131\lambda}{\text{m}} \quad (3.104)$$

$$\rho_{eff} = 0.0753 \quad (3.105)$$

$$s_{rm} = 36.8\lambda\text{mm} \quad (3.106)$$

Unter Berücksichtigung der beiden λ -Grenzwerte ist der Einfluss der Zugversteifung im Momente-Krümmungsdiagramm in Abbildung 3.25 gezeigt.

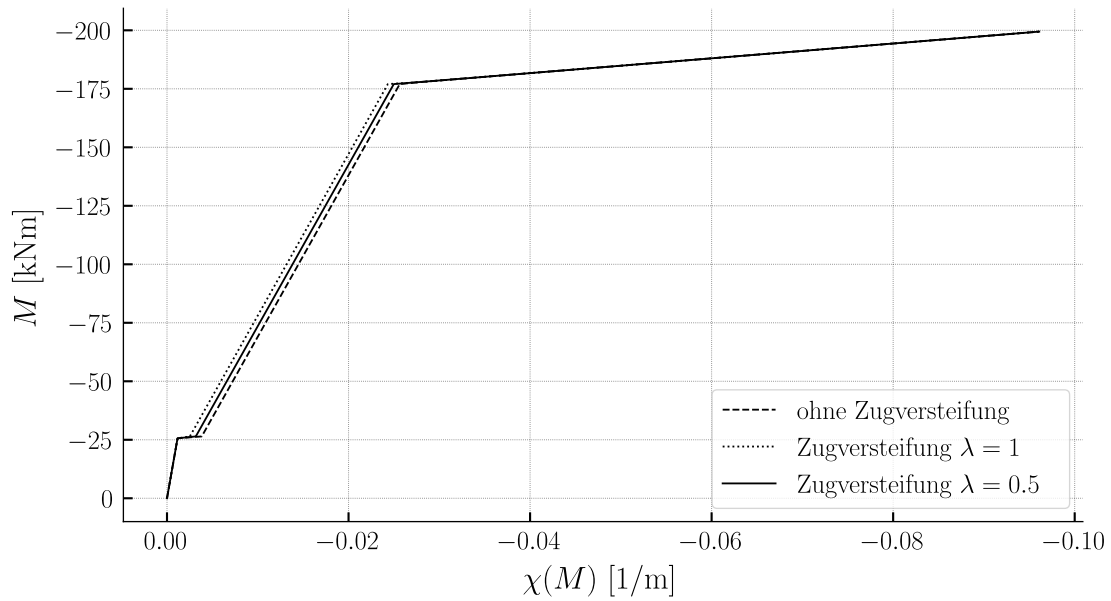


Abbildung 3.25: Momenten-Krümmungsdiagramm mit Zugversteifung ergänzt

Es zeigt sich ein steiferes Verhalten im ungerissenen Bereich.

3.7 Fachwerk

Die bisherigen Analysen beschränken sich auf eine Querschnittsbetrachtung. Der Kraftfluss lässt sich mit einem Spannungsfeld detaillierter verfolgen. Eine Einteilung in Parallelfelder und Fächer ist in Abbildung 3.26 gezeigt. Dabei ist der Neigungswinkel maximal steil gewählt. Die Höhe der Spannungsfelder entspricht dem Hebelarm der inneren Kräfte. Grundsätzlich ist dieser abhängig von der Druckzonenhöhe und der statischen Höhe. Dies zeigte sich bereits bei der Querschnittsanalyse zwischen den Zuständen 1 bis 4. Als Vereinfachung wird eine konstante Höhe vorausgesetzt.

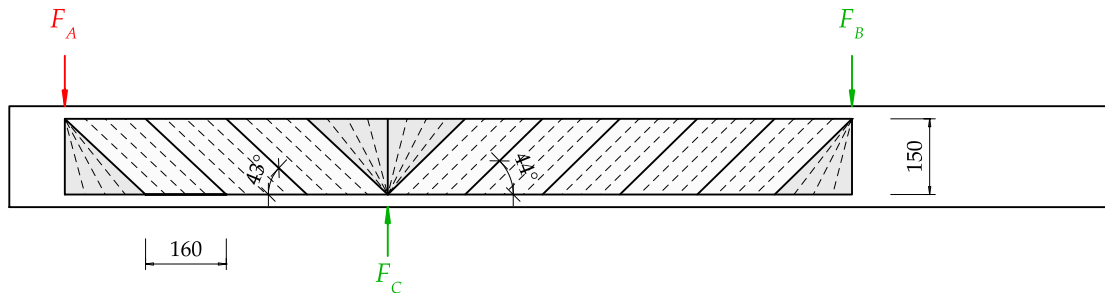


Abbildung 3.26: Spannungsfeld mit steiler Feldneigung

Durch das Zusammenfassen der Felder zu Streben resultiert das Fachwerk in Abbildung 3.27. Um aus dem Fachwerkmodell zutreffende Deformation zu ermitteln, gilt es den Pendelstäben passende Dehnsteifigkeiten zu zuordnen.

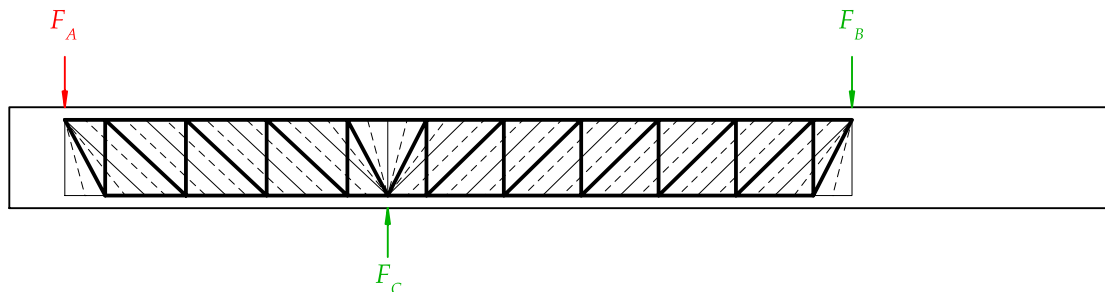


Abbildung 3.27: Fachwerk mit steiler Feldneigung

Zuggurt:

Die Steifigkeit des Zuggurts resultiert aus der Querschnittsfläche der Biegebewehrung und dem Elastizitätsmodul. Dabei wird die Spannungs-Dehnungs-Beziehung gemäss Abbildung 4.3 hinterlegt.

Druckgurt:

Die Querschnittsfläche des Druckgurts entspricht der Druckzonenhöhe multipliziert mit der Plattenstreifenbreite. Diese wird als konstant über sämtliche Stäbe des Druckgurtes angenommen. Der Elastizitätsmodul folgt aus der Kennlinie in Abbildung 4.4.

Druckdiagonalen:

Die Breite der Druckdiagonalen entspricht der Breite des Spannungsfelds. Vereinfacht gilt dies auch für die Fächer. Die Breite Multipliziert mit der Plattenbreite resultiert zur Querschnittsfläche. Der Elastizitätsmodul folgt ebenfalls aus Abbildung 4.4.

Zugstreben:

Die vertikalen Zugstreben bilden die Schubbewehrung ab. Die Querschnittsfläche resultiert aus der Anzahl an Schubdübeln im entsprechenden Spannungsfeld.

Verteilung der Schubbewehrung (21 x 80)

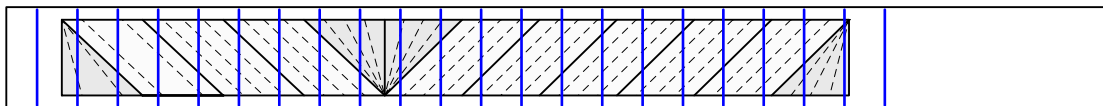


Abbildung 3.28: Anordnung der Schubbewehrung im Fachwerk mit steiler Neigung

Das Spannungsfeld für die gewählte Neigung umfasst zwei Stabreihen. Es ist ein linear elastisches Stoffgesetz hinterlegt.

Die Berechnung der Spannungen des Systems in @ fig-fachwerk mit den entsprechenden Steifigkeiten führt bei der maximalen Laststufe zu einem Versagen der Schubbewehrung. Dies entspricht nicht dem Versagen im Versuchsbericht. Ein angepasstes Modell ist in Abbildung 3.29 gezeigt. Durch eine flachere Neigung der Felder lagert sich die Kraft der Schubbewehrung in die Gurtkräfte um. Die Spannungen in den Schubdübeln reduzieren sich.

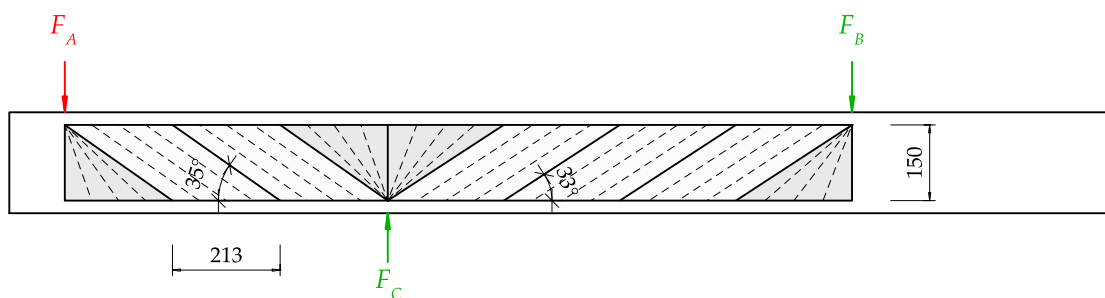


Abbildung 3.29: Spannungsfeld mit flacher Feldneigung

Die Querschnittsflächen der Druckdiagonalen und Zugstreben in Abbildung 3.30 ändern sich im Vergleich mit denen aus Abbildung 3.27.

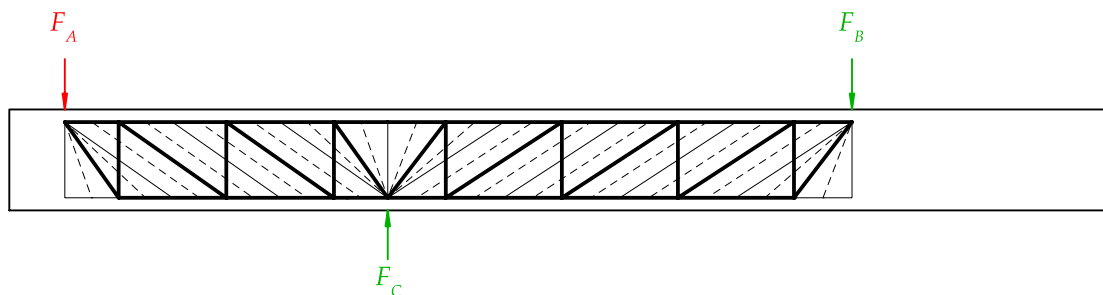


Abbildung 3.30: Fachwerk mit flacher Feldneigung

Abbildung 3.31 zeigt die Erhöhung der Querschnittsfläche der Schubbewehrung pro Strebe durch die Änderung der Feldneigung.

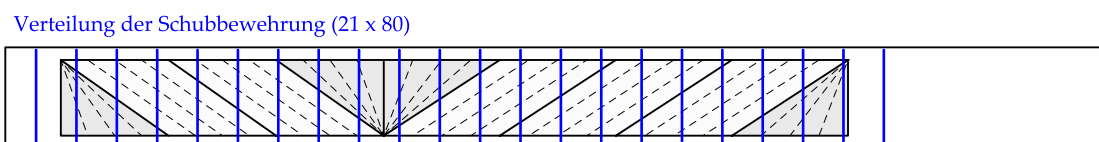


Abbildung 3.31: Anordnung der Schubbewehrung im Fachwerk mit flacher Neigung

Die Reduktion des Neigungswinkels führt zu einem Versagen der Zugbewehrung. Das erhoffte Versagen in der Druckzone tritt nicht ein. Dazu sind die berechneten Verformungen deutlich grösser als die gemessenen im Versuch.

Am Fachwerkmodell lassen sich die Verformungsanteile aus der Schubbewehrung, der Gurte und der Betondruckstreben ermitteln. Beispielsweise lässt sich der Anteil der Schubbewehrung durch das Setzen der Steifigkeit der übrigen Stäbe auf ein infinit grosses Mass bestimmen. Dargestellt ist dies in Abbildung 3.37.

3.8 Modellvergleich

Abgeschlossen wird die Analyse des Dreipunktbiegeversuchs mit einer Gegenüberstellung der angewendeten Methoden.

Der Vergleich im Momentenkrümmungsdiagramm Abbildung 3.32 ist Belastungsunabhängig. Es zeigt den minimalen Einfluss der Zugversteifung.

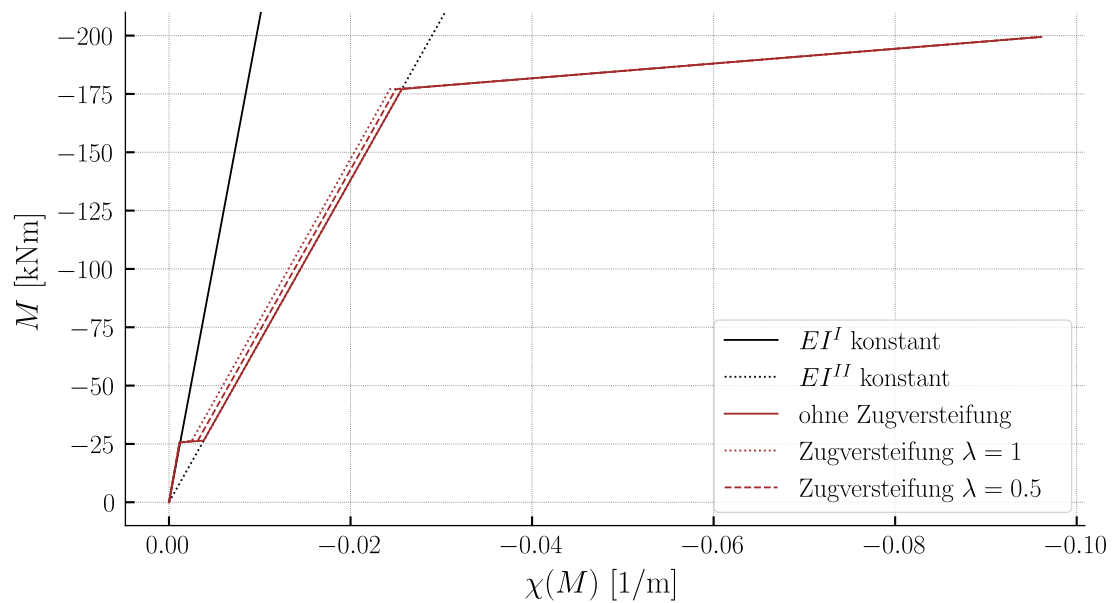


Abbildung 3.32: Momenten-Krümmungsdiagramm der unterschiedlichen Methoden

Der Krümmungsverlauf bedingt einen Biegemomentenverlauf. Unterschieden wird zwischen der Berücksichtigung der Längszugkraft aus Querkraft, siehe Abbildung 3.33 und Abbildung 3.34.

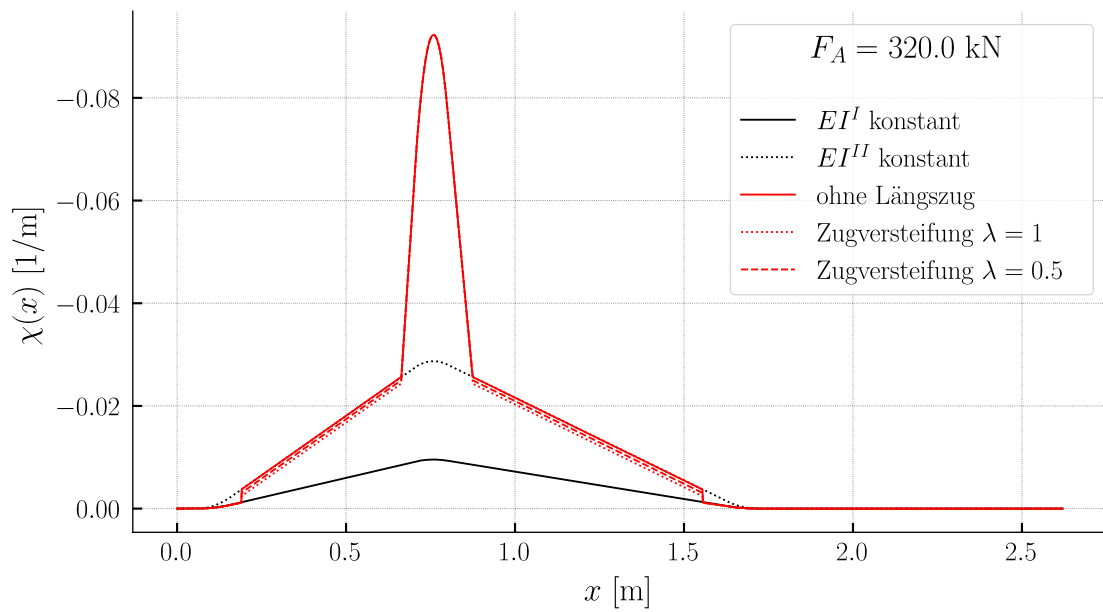


Abbildung 3.33: Krümmungsverlauf für die maximale Laststufe ohne Längszugkraft

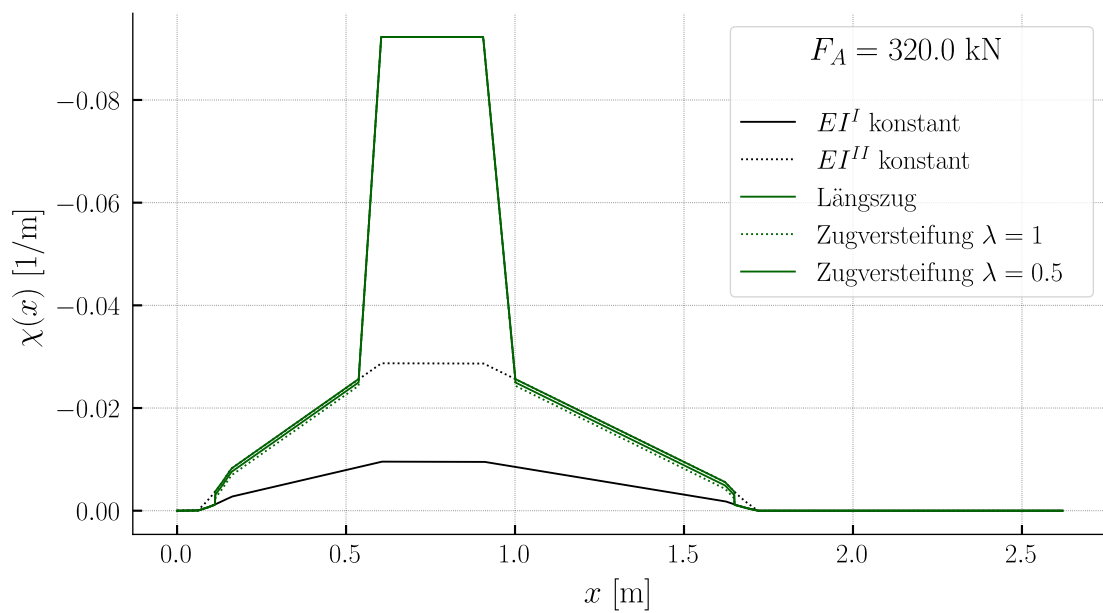


Abbildung 3.34: Krümmungsverlauf für die maximale Laststufe mit Längszugkraft durch Querkraft

Der Vergleich der Krümmungsverläufe zeigt, dass mit einer konstanten Biegesteifigkeit im Bereich des Fließens signifikante Unterschiede zum verfeinerten Momenten-Krümmungsdiagramm entstehen.

Aussagekräfte sind vor allem die Last-Verformungsdiagramme in [Abbildung 3.35](#) und [Abbildung 3.36](#). Diese unterscheiden sich in der Berücksichtigung der Längszugkraft aus Querkraft.

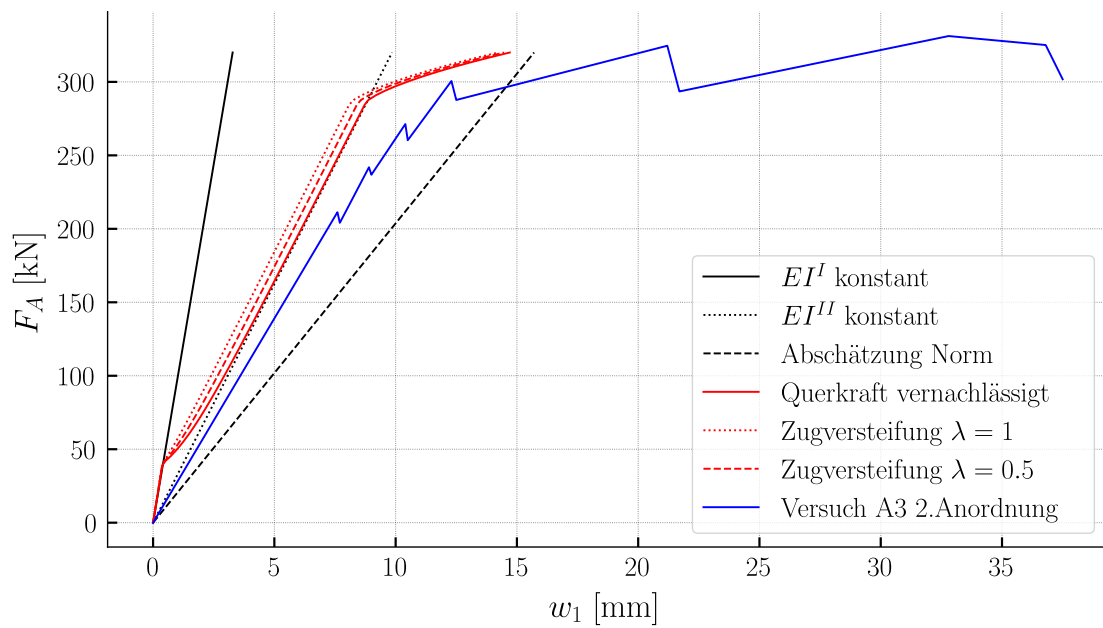


Abbildung 3.35: Last-Verformungsdiagramm bei der Krafteinleitung F_A

Es zeigt sich, dass mit einer konstanten ungerissenen Biegesteifigkeit die Verformungen nicht zufriedenstellend abbildbar sind. Vor allem im Bereich des Fließens ist das Modell grundsätzlich nicht mehr zielführend anwendbar.

Mit einer konstanten gerissenen Biegesteifigkeit nähert man sich den Versuchsergebnissen an. Auch hier ist klar der Bereich des Fließens des Betonstahls nicht abgedeckt. Für eine Bemessung ist dies jedoch zutreffend, da die Bauteile grundsätzlich nicht bis in den Fließbereich zu belasten sind.

Die Darstellung der Normabschätzung zeigt eine konservative Abschätzung der Verformungen. Dies führt grundsätzlich zu einer Überbemessung. Die Anwendung des Berechnungsalgorithmus ist jedoch simpel und somit eine solide Grundabschätzung.

Bei der Berücksichtigung des verfeinerten Momenten-Krümmungsdiagramms in rot dargestellt, lässt sich das Verformungsverhalten des Versuchs annähernd abbilden. Das Modell bildet ein zu steifes Verhalten ab. Die Zugversteifung wirkt der Modellgenauigkeit entgegen.

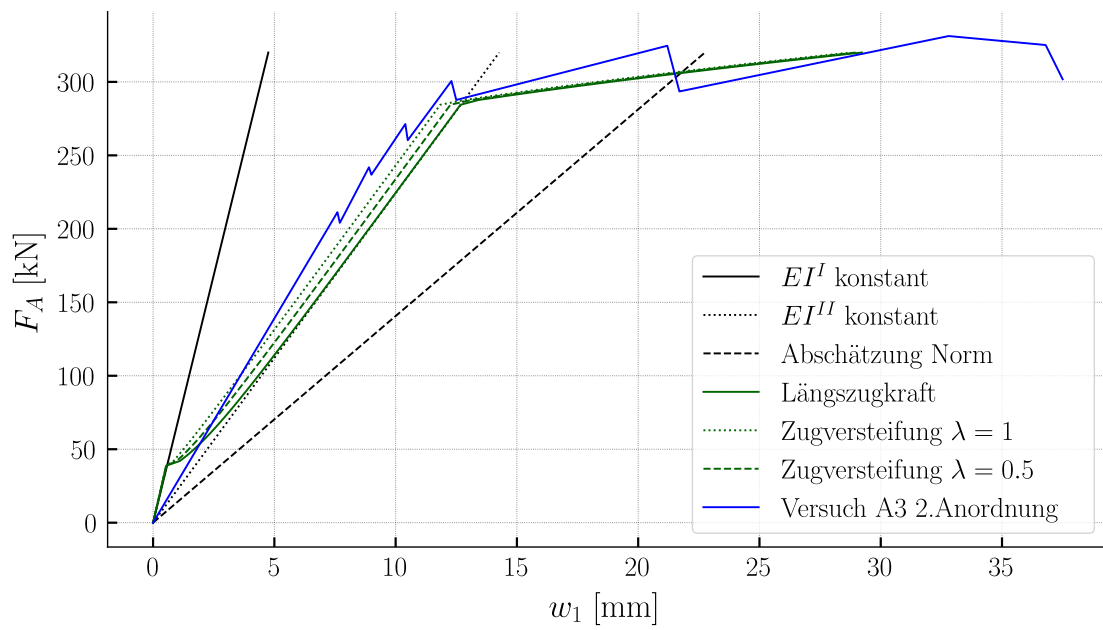


Abbildung 3.36: Last-Verformungsdiagramm bei der Krafteinleitung F_A mit Längszugkraft aus Querkraft

Die Abbildung 3.36 zeigt sämtliche Berechnungsmethoden unter Berücksichtigung der Längszugkraft aus Querkraft. Es zeigt sich deutlich, dass das Berechnungsmodell mit der Zugversteifung den Versuchsverlauf zufriedenstellend abbildet. Lediglich Abweichungen im höchstlastbereich sind vorhanden.

Die Normabschätzung zeigt deutliche Abweichungen zu den gemessenen Verformungen. Zwar liegen diese auf der sicheren Seite, sind jedoch äusserst konservativ.

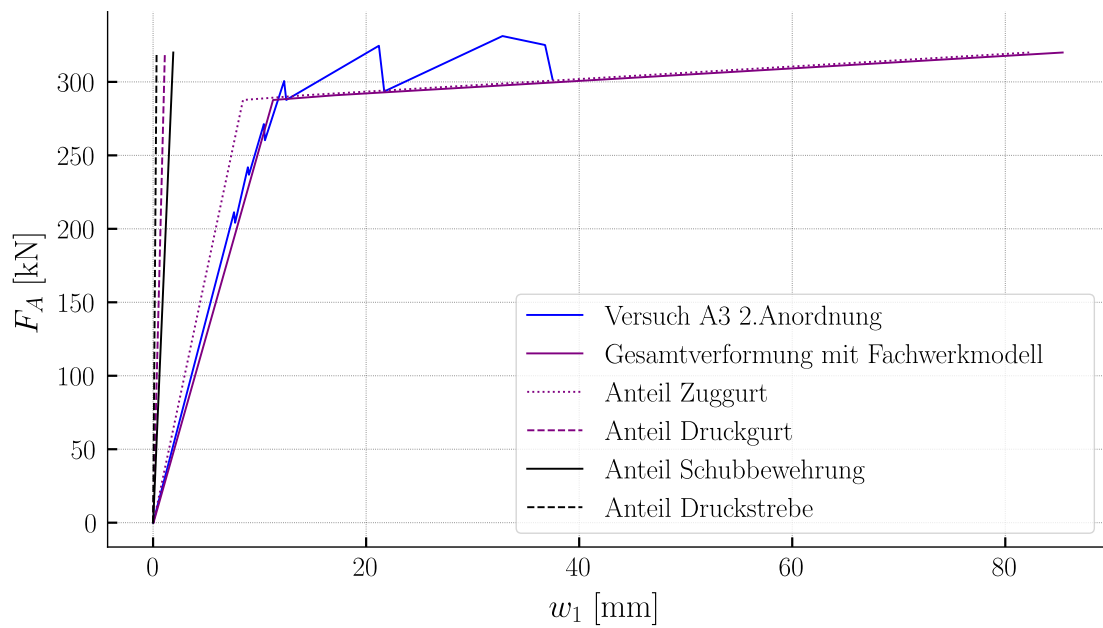


Abbildung 3.37: Last-Verformungsdiagramm bei der Krafteinleitung F_A mittels Fachwerkmodell

Das Fachwerkmodell beschreibt den Verlauf ausreichend präzise. Die maximale Deformation mit der rechnerisch ermittelten Höhe, sprich innerem Hebelarm aus der Querschnittsanalyse überschiesst das Ziel bei Weitem. Das Fachwerkmodell reagiert äusserst sensitiv auf die gewählte Höhe. Der Verformungsverlauf lässt sich mit einer Fachwerkshöhe von 160mm präzise abbilden. Ohne Kenntnisse der Versuchsergebnisse wäre jedoch eine präzise Bestimmung der Verformung im Bereich des Fließens der Zugsbewehrung nicht möglich.

4 Numerische Integration der Krümmung

4.0.1 Grundlagen

Um sich von der Betrachtung einer konstanten Biegesteifigkeit zu lösen, hilft die Anwendung einer verfeinerten Momenten-Krümmungsbeziehung. Folgend wird ein Momentenkrümmungsdiagramm für den Querschnitt aus dem beschriebenen Versuch berechnet. Die vorhandene Querkraftbewehrung ist nicht dargestellt in Abbildung 4.1.

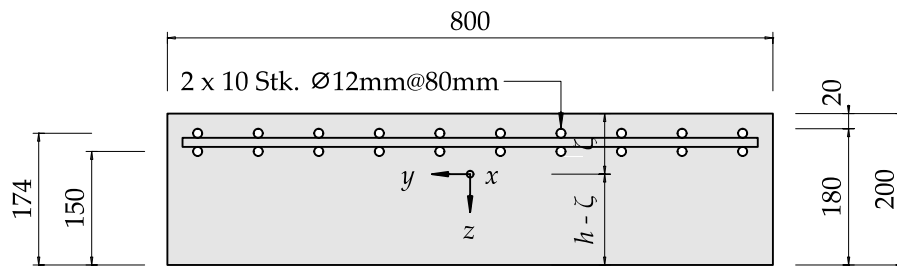


Abbildung 4.1: Querschnitt des Versuchs A3 zur Bestimmung des Momenten-Krümmungsdiagramms

Vereinfacht wird der Querschnitt folgender massen:

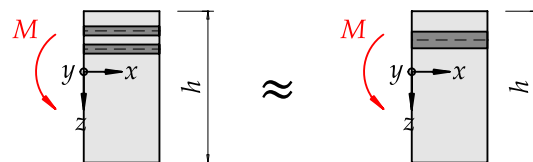


Abbildung 4.2: Vereinfachung der Bewehrungsführung

Die Parameter in Tabelle 4.1 finden Einfluss in die Berechnungen.

Tabelle 4.1: Versuchsparameter für die verfeinerte Momenten-Krümmungsbeziehung

$E_c = 30000.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$E_s = 200000.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
$\phi_s = 18.0 \text{ mm}$	$c_{nom} = 20.0 \text{ mm}$
$f_c = 35.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$f_{ct} = 4.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
$f_{s550} = 550.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$f_{su} = 800 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
$f_{sy} = 670.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\varepsilon_{cu} = 0.003$
$\varepsilon_{su} = 0.5$	

Neben den Parametern wird das Stoffgesetz für den Betonstahl in Abbildung 4.3 hinterlegt. Das Bilineare, bzw. linear-elastisch linear-plastische Spannungs-Dehnungsdiagramm für den Betonstahl hält den Rechenaufwand klein und liefert eine ausreichende Genauigkeit. Eine Berücksichtigung des verfestigenden Verhaltens ist essentiell um die Verformungen nach dem Fließen des Betonstahls näherungsweise zu bestimmen. Das Diagramm ist definiert bis zur Bruchdehnung des Stahls. Das Verhalten gilt ebenso im negativen Spannungs-Dehnungs Bereich.

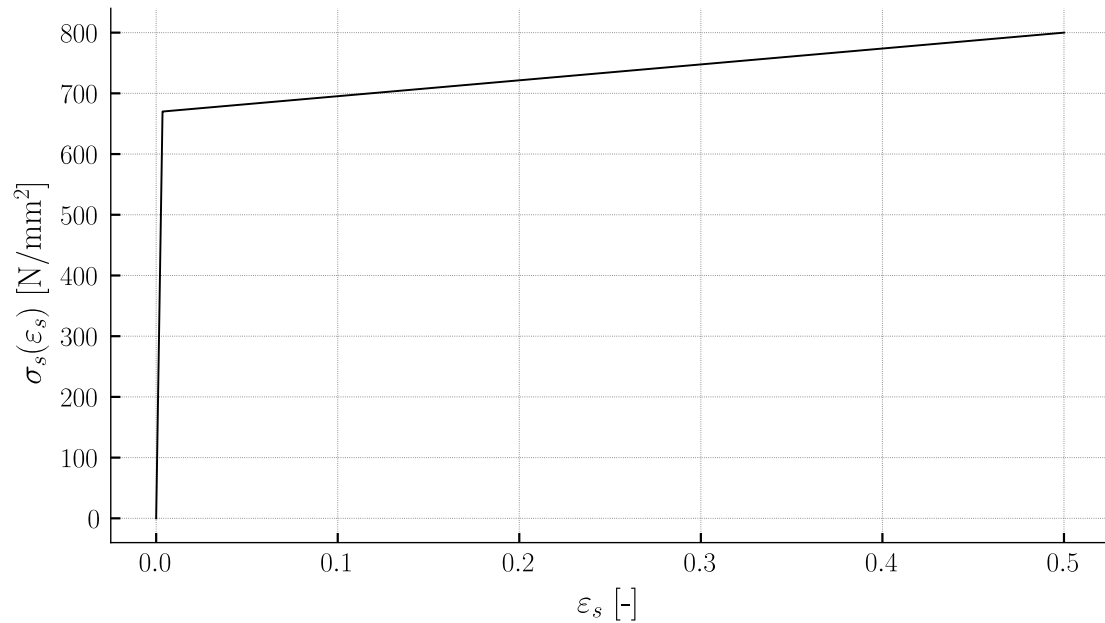


Abbildung 4.3: Spannungs-Dehnungs Diagramm des Bewehrungsstahls linear elastisch-linear verfestigend plastisch

Die Betonkennlinie in Abbildung 4.4 zeigt ein linear-elastisches ideal-plastisches Verhalten. Im positiven Bereich lässt sich die Betonspannung bis zur Betonzugfestigkeit erhöhen, im negativen Spannungsbereich beginnt ein Plastifizieren beim Erreichen der Betondruckfestigkeit. Bis zur Bruchstauchung ist dies definiert.

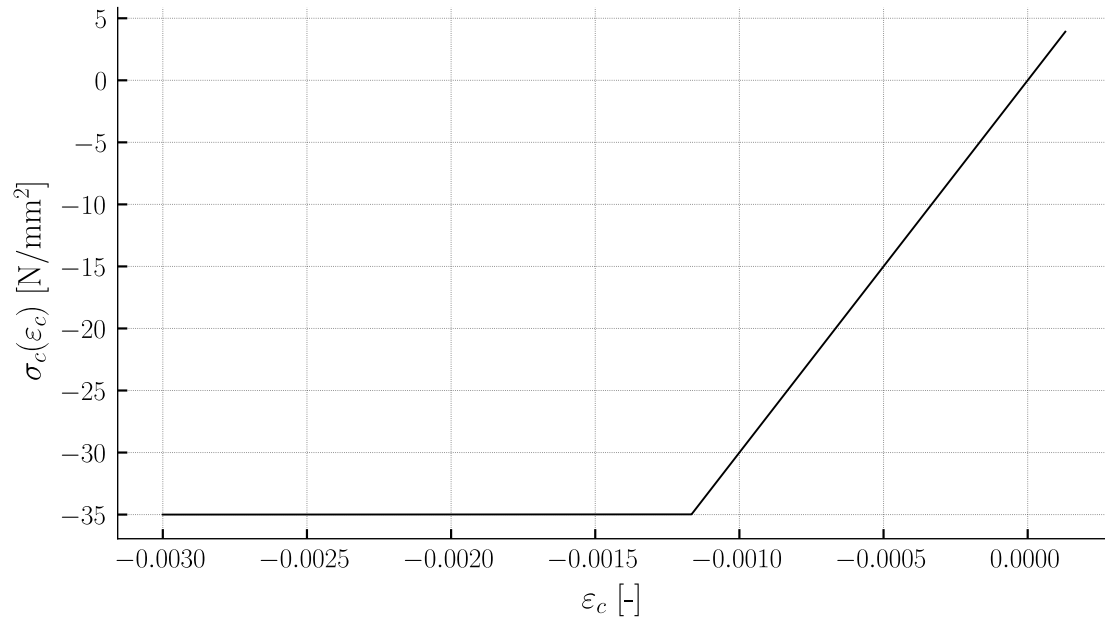


Abbildung 4.4: Spannungs-Dehnungs Diagramm des Betons linear elastisch-ideal plastisch

4.0.2 Querschnittsanalyse

Mittels einer Querschnittsanalyse lassen sich die unterschiedlichen Zustände des Momenten-Krümmungsdiagramms ermitteln.

4.0.2.1 Schwerpunkt des Querschnitts

Durch die Bestimmung der Wertigkeit n kann der Querschnitt als homogener Betonquerschnitt zur Bestimmung des Schwerpunkts behandelt werden.

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (4.1)$$

$$n = 6.67 \quad (4.2)$$

Die Querschnittsfläche der Bewehrung beträgt:

$$A_s = \frac{36\pi f_{s550}\text{mm}^2}{f_{sy}} + 2 \cdot \frac{1}{4}\pi\phi_s^2 \quad (4.3)$$

$$A_s = 601.8\text{mm}^2 \quad (4.4)$$

Die Betonquerschnittsfläche:

$$A_c = bh \quad (4.5)$$

$$A_c = 76500.0\text{mm}^2 \quad (4.6)$$

Die ideelle Querschnittsfläche resultiert zu:

$$A_i = A_c + A_s (n - 1) \quad (4.7)$$

$$A_i = 79910.1 \text{mm}^2 \quad (4.8)$$

Und die z-Koordinate des Schwerpunkts folgt abschliessend zu:

$$\zeta_c = \frac{\frac{A_c h}{2} + A_s (1.5 \varnothing_s + c_{nom}) (n - 1)}{A_i} \quad (4.9)$$

$$\zeta_c = 217.0 \text{mm} \quad (4.10)$$

4.0.2.2 Flächenträgheitsmoment

Das Flächenträgheitsmoment wird ebenfalls am ideellen Querschnitt bestimmt. Die Eigenträgheitsmomente der Kreisquerschnitte der Bewehrung sind nicht berücksichtigt, lediglich der Steiner-Anteil fliesst in die Berechnung ein:

$$I^I = A_s (n - 1) \left(\frac{3\varnothing_s}{2} + c_{nom} - \zeta_c \right)^2 + \frac{bh^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} - \zeta_c \right)^2 \quad (4.11)$$

$$I^I = 1.39 \cdot 10^9 \text{mm}^4 \quad (4.12)$$

4.0.2.3 Ungerissen - Zustand 1

Der Querschnitt verbleibt elastisch. Folglich kann das Flächenträgheitsmoment mit E_c multipliziert werden und es resultiert die ungerissene Biegesteifigkeit:

$$EI^I = E_c I^I \quad (4.13)$$

$$EI^I = 4.183 \cdot 10^4 \text{kNm}^2 \quad (4.14)$$

4.0.2.3.1 Rissmoment

Durch die Ermittlung des Rissmoments kann die Krümmung vor dem Reißen des Betons ermittelt werden. Die Betonzugkraft wird nicht berücksichtigt.

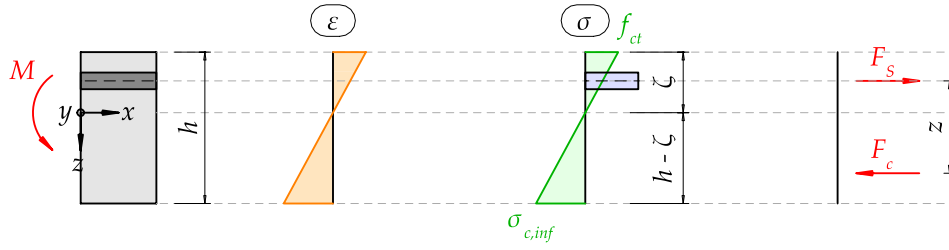


Abbildung 4.5: Querschnittsanalyse vor dem Reißen des Betons

Die Betondruckspannung beträgt:

$$\sigma_{cinf,1} = \frac{f_{ct} (h - \zeta_c)}{\zeta_c} \quad (4.15)$$

$$\sigma_{cinf,1} = \frac{4.28 \text{ N}}{\text{mm}^2} \quad (4.16)$$

Der Hebelarm der inneren Kräfte folgt zu:

$$z_1 = -1.5 \mathcal{O}_s - c_{nom} + \frac{2h}{3} + \frac{\zeta_c}{3} \quad (4.17)$$

$$z_1 = 326.0 \text{ mm} \quad (4.18)$$

Die Betondruckkraft ist definiert nach:

$$F_{c,1} = \frac{b \sigma_{cinf,1} (h - \zeta_c)}{2} \quad (4.19)$$

$$F_{c,1} = 84.6 \text{ kN} \quad (4.20)$$

Und das Rissmoment resultiert schliesslich zu:

$$M_r = F_{c,1} z_1 \quad (4.21)$$

$$M_r = 27.54 \text{ kNm} \quad (4.22)$$

Aus dem Rissmoment folgt die Krümmung beim Reißen:

$$\chi_r = \frac{M_r}{EI} \quad (4.23)$$

$$\chi_r = \frac{0.000659}{\text{m}} \quad (4.24)$$

Die Neigung linearen Funktion des ungerissenen Zustands im Momentenkrümmungsdiagramm ist durch die Biegesteifigkeit definiert. Der Endpunkts des Zustand 1 definiert das Rissmoment mit der entsprechenden Krümmung.

4.0.2.4 Gerissen Elastisch - Zustand 2

Der Querschnitt nach dem Reissen ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Der Betonstahl hat die Fließgrenze noch nicht erreicht. Der Beton die Druckfestigkeit ebenfalls nicht.

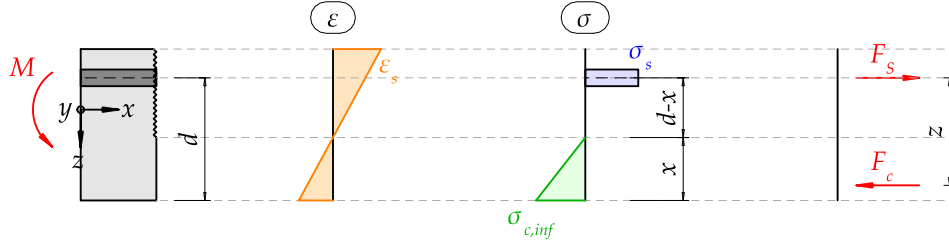


Abbildung 4.6: Querschnittsanalyse nach dem Reißen des Betons

Dabei beträgt die statische Höhe:

$$d = -\frac{3Q_s}{2} - c_{nom} + h \quad (4.25)$$

$$d = 403.0 \text{ mm} \quad (4.26)$$

Mittels Gleichgewicht der Kräfte lässt sich die Betondruckzonenhöhe und folglich die gerissene Biegesteifigkeit herleiten. Die Betonstahlzugkraft beträgt:

$$F_{z,2} = A_s \sigma_{s,2} \quad (4.27)$$

Die Betonstahlspannung für linear elastisches Verhalten folgt zu:

$$\sigma_{s,2} = E_s \varepsilon_{s,2} \quad (4.28)$$

Die Betondruckkraft anhand des dreieckigen Verlaufs in Abbildung 4.6 beträgt:

$$F_{c,2} = \frac{b \sigma_{c,inf,2} x_2}{2} \quad (4.29)$$

Die Betonspannung ebenfalls bestimmt durch ein linear elastisches Verhalten ist definiert durch:

$$\sigma_{c,inf,2} = E_c \varepsilon_{c,2} \quad (4.30)$$

Die Betondehnung anhand des Dehnungsverlaufs in Abbildung 4.6:

$$\varepsilon_{c,2} = \frac{\varepsilon_{s,2} x_2}{d - x_2} \quad (4.31)$$

Unter Bemühung des Gleichgewichts der horizontalen Kräfte lässt sich die folgende Beziehung ermitteln.

$$F_{c,2} = F_{z,2} \quad (4.32)$$

Einsetzen der bestimmten Gleichungen in die Gleichgewichtsbeziehung und mit n und ρ substituiert, folgt:

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (4.33)$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (4.34)$$

$$E_s b d \rho \varepsilon_{s,2} = \frac{E_s b \varepsilon_{s,2} x_2^2}{2n(d - x_2)} \quad (4.35)$$

Durch die Auflösung nach x folgt die Betondruckzonenhöhe:

$$x_2 = d \left(-n\rho + \sqrt{n\rho(n\rho + 2)} \right) \quad (4.36)$$

$$x_2 = 116.0 \text{ mm} \quad (4.37)$$

Zur Bestimmung der Krümmung ist die Betonstahldehnung erforderlich. Diese bedingt ein einwirkendes Moment. Der Übergang zwischen ungerissenem zu gerissenem Verhalten erfolgt beim Rissmoment. Folglich kann das Rissmoment in Abbildung 4.6 angesetzt werden.

$$M_2 = F_{z,2} \left(d - \frac{x_2}{3} \right) \quad (4.38)$$

$$M_2 = M_r \quad (4.39)$$

$$M_r = A_s E_s \varepsilon_{s,2} \left(d - \frac{x_2}{3} \right) \quad (4.40)$$

Daraus resultiert die Betonstahldehnung:

$$\varepsilon_{s,2} = 0.000628 \quad (4.41)$$

Die Krümmung kann anhand des Dehnungsverlaufs in Abbildung 4.6 bestimmt werden:

$$\chi^{II} = \frac{\varepsilon_{s,2}}{d - x_2} \quad (4.42)$$

$$\chi^{II} = \frac{0.00219}{\text{m}} \quad (4.43)$$

Abschliessend folgt die gerissene Biegesteifigkeit zu:

$$EI^{II} = \frac{M_2}{\chi^{II}} \quad (4.44)$$

$$EI^{II} = 12567.0 \text{ kNm}^2 \quad (4.45)$$

Die Neigung der linearen Funktion im gerissenen Bereich ist durch die gerissene Biegesteifigkeit definiert. Der Beginn ist durch das Rissmoment definiert.

4.0.2.5 Fließen der Bewehrung - Zustand 3

Die Biegesteifigkeit EI^{II} gilt bis die Bewehrung fließt oder der Beton beginnt zu plastifizieren. In Abbildung 4.7 wird vorausgesetzt, dass die Bewehrung fließt.

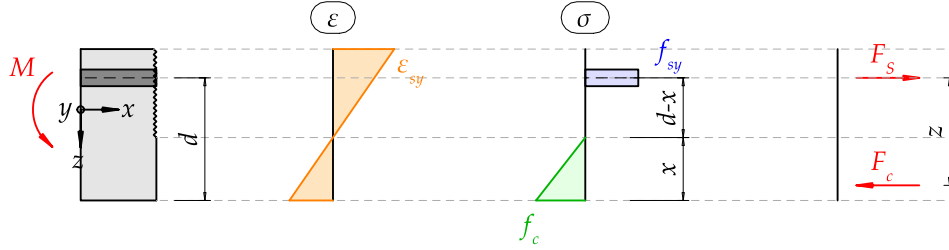


Abbildung 4.7: Querschnittsanalyse für reine Biegung beim Fließen der Bewehrung

Durch Gleichgewicht der horizontalen Kräfte folgen die Beziehungen:

$$\sigma_{cinf,3} = \frac{E_c f_{sy} x_3}{E_s (d - x_3)} \quad (4.46)$$

$$A_s f_{sy} = \frac{b \sigma_{cinf,3} x_3}{2} \quad (4.47)$$

Aufgelöst nach der Druckzonenhöhe:

$$x_3 = \frac{-A_s E_s + \sqrt{A_s E_s (A_s E_s + 2 E_c b d)}}{E_c b} \quad (4.48)$$

$$x_3 = 116.0 \text{ mm} \quad (4.49)$$

Daraus lässt sich das Fliessmoment bestimmen, welches den Endpunkt im Momenten-Krümmungsdiagramm für den gerissenen Zustand definiert:

$$M_y = A_s f_{sy} \left(d - \frac{x_3}{3} \right) \quad (4.50)$$

$$M_y = 146.9 \text{ kNm} \quad (4.51)$$

Die Fließdehnung des Betonstahls entspricht:

$$\varepsilon_{sy} = 0.00335 \quad (4.52)$$

Abschliessend lässt sich die Krümmung für den Endpunkt des Zustands 2 folgend bestimmen:

$$\chi_y = \frac{\varepsilon_{sy}}{d - x_3} \quad (4.53)$$

$$\chi_y = \frac{0.0117}{\text{m}} \quad (4.54)$$

Der Zustand 3 beschreibt lediglich den Endpunkt des gerissenen Bereichs im Momenten-Krümmungsdiagramm.

4.0.2.6 Maximaler Biegewiderstand - Zustand 4

Abschliessen kann der maximale Biegewiderstand durch die plastifizierung der Betondruckzone bestimmt werden. Vereinfacht wird dem Betonstahl die statische Zugfestigkeit vorausgesetzt um das verfestigende Verhalten annähernd abzubilden. Dies bedingt grundsätzlich das Erreichen der Bruchdehnung im Stahl. Da der Querschnitt stark bewehrt ist, versagt die Betondruckzone vor dem Erreichen der Betonstahlbruchdehnung.

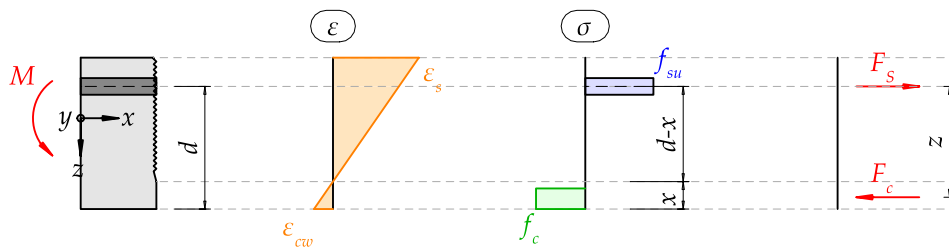


Abbildung 4.8: Querschnittsanalyse für reine Biegung mit der Bewehrung bei der Bruchspannung und plastifizierter Betondruckzone

Vereinfacht werden die Spannungen in der Druckzone konstant verteilt betrachtet. Dazu wird die Druckzonenhöhe abgemindert um Faktor 0.85.

Das Gleichgewicht der Kräfte führt zu:

$$A_s f_{su} = 0.85 b f_c x_4 \quad (4.55)$$

Die Druckzonenhöhe folgt zu:

$$x_4 = 95.2 \text{ mm} \quad (4.56)$$

Der maximale Biegewiderstand folgt zu:

$$M_R = A_s f_{su} (d - 0.425 x_4) \quad (4.57)$$

$$M_R = 174.5 \text{ kNm} \quad (4.58)$$

Die Krümmung lässt sich anhand der Betonstauchung ermitteln:

$$\chi_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{x_4} \quad (4.59)$$

$$\chi_u = \frac{0.0315}{\text{m}} \quad (4.60)$$

Die Betonstahldehnung darf die Bruchdehnung nicht überschreiten:

$$\varepsilon_{s,4} = \frac{\varepsilon_{cu}(d - x_4)}{x_4} \quad (4.61)$$

$$\varepsilon_{s,4} = 0.0097 \quad (4.62)$$

Die Bruchdehnung des Stahls wird nicht erreicht. Der Querschnitt versagt im Druckbereich. Die Annahme, dem Betonstahl die statische Zugfestigkeit zu Grunde zu legen ist grundsätzlich nicht gerechtfertigt. Der Vergleich mit den Versuchsergebnissen zeigt jedoch, dass sich diese Annahme bewährt.

$$\varepsilon_{su} = 0.5 \quad (4.63)$$

Die Biegesteifigkeit im Bereich 3 beträgt:

$$EI^{III} = \frac{M_R}{\chi_u} \quad (4.64)$$

$$EI^{III} = 5.54 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2 \quad (4.65)$$

Der Zustand 4 beschreibt den Endpunkt des Momenten-Krümmungsdiagramm.

4.0.2.7 Momenten-Krümmungsdiagramm

Abschliessend lässt sich aus der Querschnittsanalyse die Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung ermitteln. Der lineare verlauf im ersten Bereich ergibt sich aus der ungerissenen Biegesteifigkeit. Darauf folgt ein schlagartiger wechsel der Steifigkeit von EI^I zu EI^{II} , da der Beton reisst. Dies führt zum Plateau im unteren Bereich. Im Bereich drei werden die zwei definierten Punkte M_y, χ_y sowie M_R, χ_u linear verbunden.

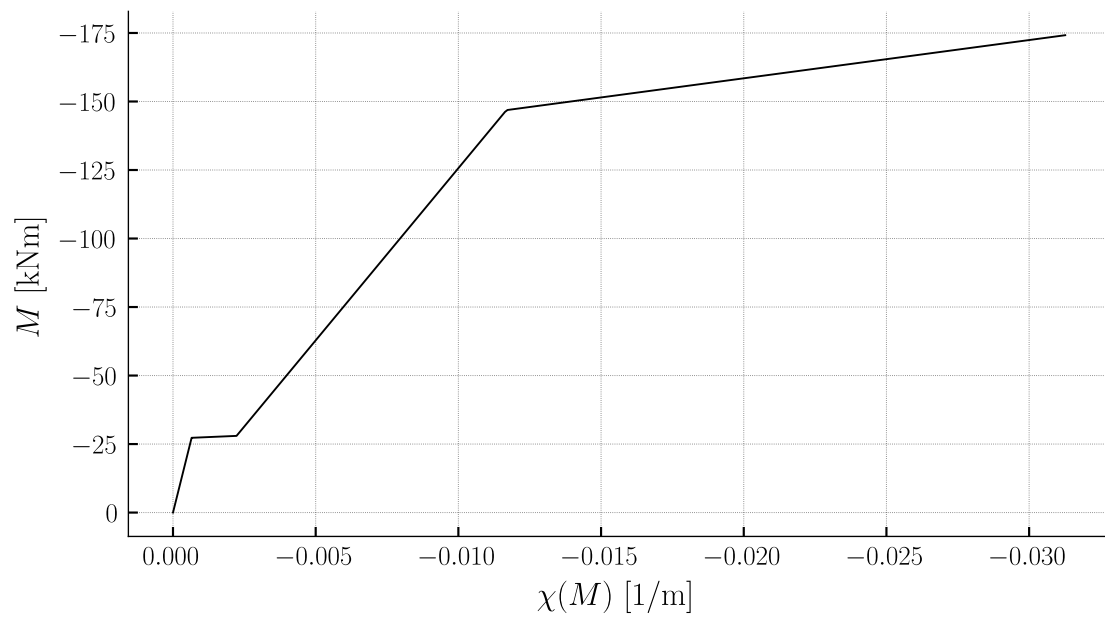


Abbildung 4.9: Momenten-Krümmungsdiagramm händisch ermittelt, definiert im positiven Bereich

$$259.485759493671$$

$$(4.66)$$

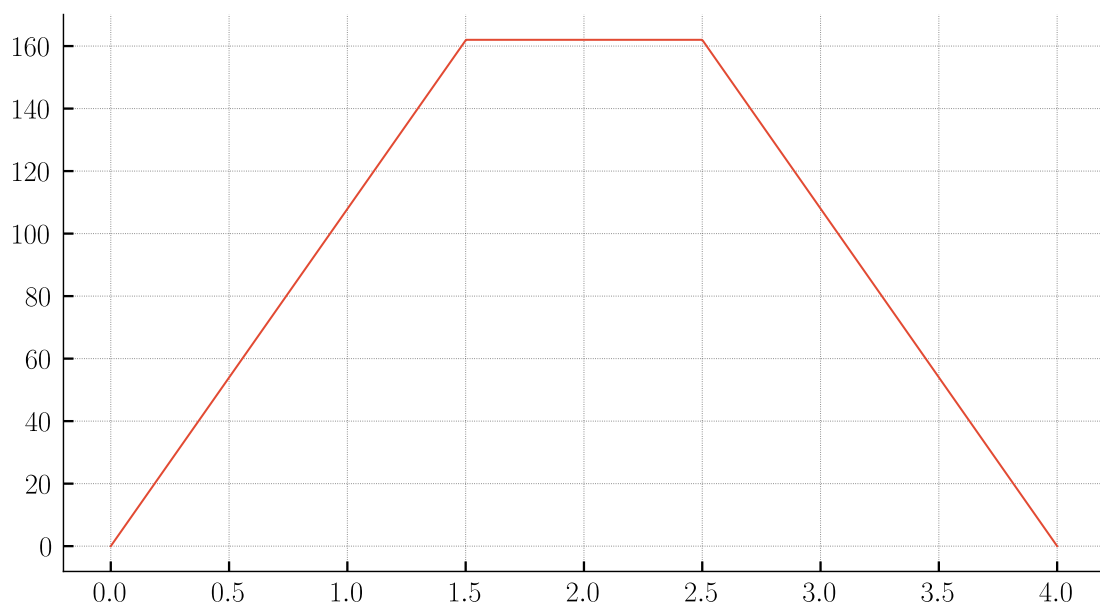
5 Verformung an einem einfachen Balken

5.1 Numerische Integration der Krümmungen

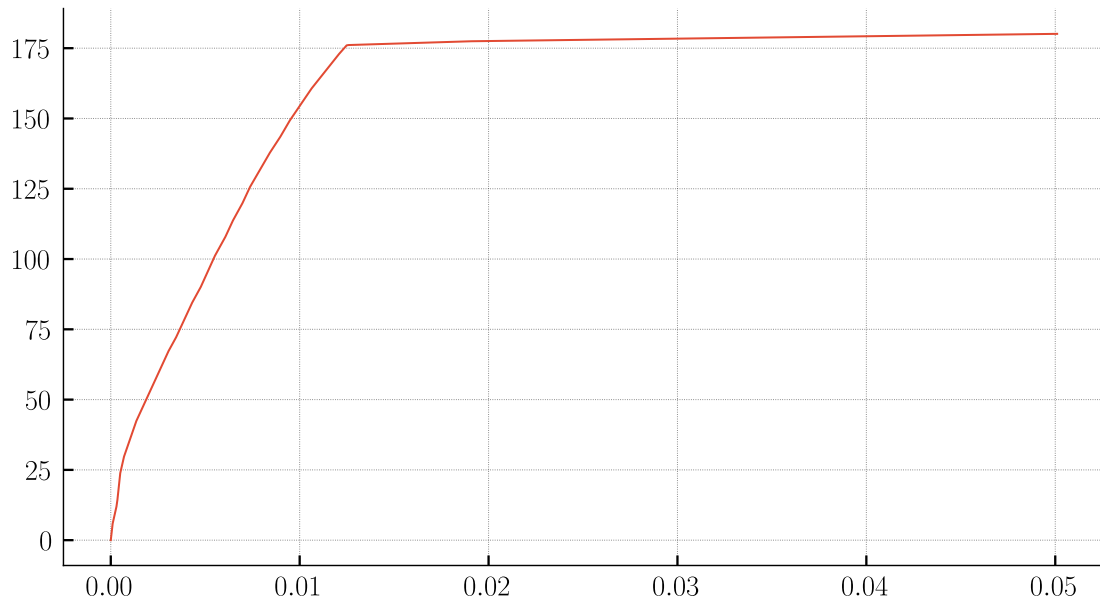
Zur Näherung an die Praxisanwendung ist die Momenten-Krümmungsbeziehung mittels einer FEM-Software ermittelt worden.

$$715.424 \quad (5.1)$$

c:\Users\Pascal Gitz\OneDrive - Hochschule Luzern\02_Master\03_Tragverhalten_von_Stahlbet



$$[0, 5.015015 \times 10^{-5}, 0.0001003003, \dots, 0.0499997, 0.05004985, 0.0501] \frac{1}{\text{m}}$$



```
array([0.00000000e+00, 7.32936326e-03, 1.46587265e-02, 2.19880898e-02,
       2.93174530e-02, 3.66468163e-02, 4.39761796e-02, 5.13089535e-02,
       5.86599527e-02, 6.60109519e-02, 7.33619511e-02, 8.07129503e-02,
       8.80639495e-02, 9.54149487e-02, 1.05135135e-01, 1.19549550e-01,
       1.33963964e-01, 1.48378378e-01, 1.62792793e-01, 1.77207207e-01,
       1.91621622e-01, 2.06036036e-01, 2.20450450e-01, 2.34864865e-01,
       2.49279279e-01, 2.63563267e-01, 2.77832426e-01, 2.92101586e-01,
       3.04427832e-01, 3.13628522e-01, 3.22829212e-01, 3.32029902e-01,
       3.41230592e-01, 3.50431282e-01, 3.56712281e-01, 3.62782401e-01,
       3.68852521e-01, 3.74922641e-01, 3.80992760e-01, 3.87062880e-01,
       3.93133000e-01, 3.99203120e-01, 4.06036036e-01, 4.13243243e-01,
       4.20450450e-01, 4.27657658e-01, 4.34864865e-01, 4.42072072e-01,
       4.49279279e-01, 4.56565849e-01, 4.63884442e-01, 4.71203035e-01,
       4.78521628e-01, 4.85840221e-01, 4.93158814e-01, 5.00477407e-01,
       5.14109024e-01, 5.28767751e-01, 5.43426477e-01, 5.58085204e-01,
       5.72743930e-01, 5.87402657e-01, 6.02061383e-01, 6.16720110e-01,
       6.31378836e-01, 6.46037563e-01, 6.60820197e-01, 6.75686638e-01,
       6.90553080e-01, 7.07008704e-01, 7.28996793e-01, 7.50984883e-01,
       7.72972973e-01, 7.94961063e-01, 8.16949153e-01, 8.38937242e-01,
       8.60925332e-01, 8.82913422e-01, 9.04901512e-01, 9.26889601e-01,
       9.48877691e-01, 9.70847518e-01, 9.92813314e-01, 1.01459459e+00,
       1.03621622e+00, 1.05783784e+00, 1.07945946e+00, 1.10108108e+00,
       1.12270270e+00, 1.14432432e+00, 1.16594595e+00, 1.18756757e+00,
       1.20918919e+00, 1.23081081e+00, 1.25243243e+00, 1.27447753e+00,
       1.29655018e+00, 1.32345396e+00, 1.35277142e+00, 1.38208887e+00,
       1.41140632e+00, 1.44072377e+00, 1.47004123e+00, 1.49935868e+00,
       1.52867613e+00, 1.55799359e+00, 1.58731104e+00, 1.61662849e+00,
       1.64594595e+00, 1.67522842e+00, 1.70449538e+00, 1.73333333e+00,
       1.76216216e+00, 1.79099099e+00, 1.81981982e+00, 1.84864865e+00,
       1.87747748e+00, 1.90630631e+00, 1.93513514e+00, 1.96396396e+00,
       1.99279279e+00, 2.02162162e+00, 2.05045045e+00, 2.07932784e+00,
```

2.10824553e+00, 2.13756299e+00, 2.16688044e+00, 2.19619789e+00,
2.22551535e+00, 2.25483280e+00, 2.28415025e+00, 2.31346770e+00,
2.34278516e+00, 2.37210261e+00, 2.40142006e+00, 2.43073752e+00,
2.46004814e+00, 2.48929140e+00, 2.51837838e+00, 2.54720721e+00,
2.57603604e+00, 2.60486486e+00, 2.63369369e+00, 2.66252252e+00,
2.69135135e+00, 2.72018018e+00, 2.74900901e+00, 2.77783784e+00,
2.80666667e+00, 2.83549550e+00, 2.86454614e+00, 2.89448405e+00,
2.92794320e+00, 2.96459001e+00, 3.00123683e+00, 3.03788365e+00,
3.07453046e+00, 3.11117728e+00, 3.14782410e+00, 3.18447091e+00,
3.22111773e+00, 3.25776454e+00, 3.29441136e+00, 3.33105818e+00,
3.36733473e+00, 3.40220662e+00, 3.43279890e+00, 3.46211635e+00,
3.49143381e+00, 3.52075126e+00, 3.55006871e+00, 3.57938617e+00,
3.60870362e+00, 3.63802107e+00, 3.66733852e+00, 3.69665598e+00,
3.72597343e+00, 3.75529088e+00, 3.78451864e+00, 3.81369369e+00,
3.84252252e+00, 3.87135135e+00, 3.90018018e+00, 3.92900901e+00,
3.95783784e+00, 3.98666667e+00, 4.01549550e+00, 4.04432432e+00,
4.07315315e+00, 4.10198198e+00, 4.13081081e+00, 4.15963964e+00,
4.18994287e+00, 4.22198809e+00, 4.25863491e+00, 4.29528172e+00,
4.33192854e+00, 4.36857536e+00, 4.40522217e+00, 4.44186899e+00,
4.47851580e+00, 4.51516262e+00, 4.55180944e+00, 4.58845625e+00,
4.62510307e+00, 4.66174989e+00, 4.69595508e+00, 4.72756757e+00,
4.75639640e+00, 4.78522523e+00, 4.81405405e+00, 4.84288288e+00,
4.87171171e+00, 4.90054054e+00, 4.92936937e+00, 4.95819820e+00,
4.98702703e+00, 5.01585586e+00, 5.04468468e+00, 5.07355622e+00,
5.10253254e+00, 5.13169950e+00, 5.16101695e+00, 5.19033440e+00,
5.21965186e+00, 5.24896931e+00, 5.27828676e+00, 5.30760421e+00,
5.33692167e+00, 5.36623912e+00, 5.39555657e+00, 5.42487403e+00,
5.45419148e+00, 5.48471770e+00, 5.51610241e+00, 5.55267980e+00,
5.58932661e+00, 5.62597343e+00, 5.66262025e+00, 5.69926706e+00,
5.73591388e+00, 5.77256070e+00, 5.80920751e+00, 5.84585433e+00,
5.88250115e+00, 5.91914796e+00, 5.95579478e+00, 5.99025989e+00,
6.02288288e+00, 6.05171171e+00, 6.08054054e+00, 6.10936937e+00,
6.13819820e+00, 6.16702703e+00, 6.19585586e+00, 6.22468468e+00,
6.25351351e+00, 6.28234234e+00, 6.31117117e+00, 6.34000000e+00,
6.36882883e+00, 6.40020306e+00, 6.43366926e+00, 6.47031608e+00,
6.50696290e+00, 6.54360971e+00, 6.58025653e+00, 6.61690334e+00,
6.65355016e+00, 6.69019698e+00, 6.72684379e+00, 6.76349061e+00,
6.80013743e+00, 6.83678424e+00, 6.87314284e+00, 6.90609722e+00,
6.93675676e+00, 6.96558559e+00, 6.99441441e+00, 7.02324324e+00,
7.05207207e+00, 7.08090090e+00, 7.10972973e+00, 7.13855856e+00,
7.16738739e+00, 7.19621622e+00, 7.22504505e+00, 7.25387387e+00,
7.28382688e+00, 7.31562059e+00, 7.35130554e+00, 7.38795236e+00,
7.42459918e+00, 7.46124599e+00, 7.49789281e+00, 7.53453962e+00,
7.57118644e+00, 7.60783326e+00, 7.64448007e+00, 7.68112689e+00,
7.71777371e+00, 7.75442052e+00, 7.79106734e+00, 7.82771415e+00,
7.86436097e+00, 7.90100779e+00, 7.93765460e+00, 7.97430142e+00,
8.01094824e+00, 8.04759505e+00, 8.08424187e+00, 8.12088869e+00,
8.15753550e+00, 8.19418232e+00, 8.23082913e+00, 8.26747595e+00,
8.30653029e+00, 8.34810811e+00, 8.39135135e+00, 8.43459459e+00,

[illegible]

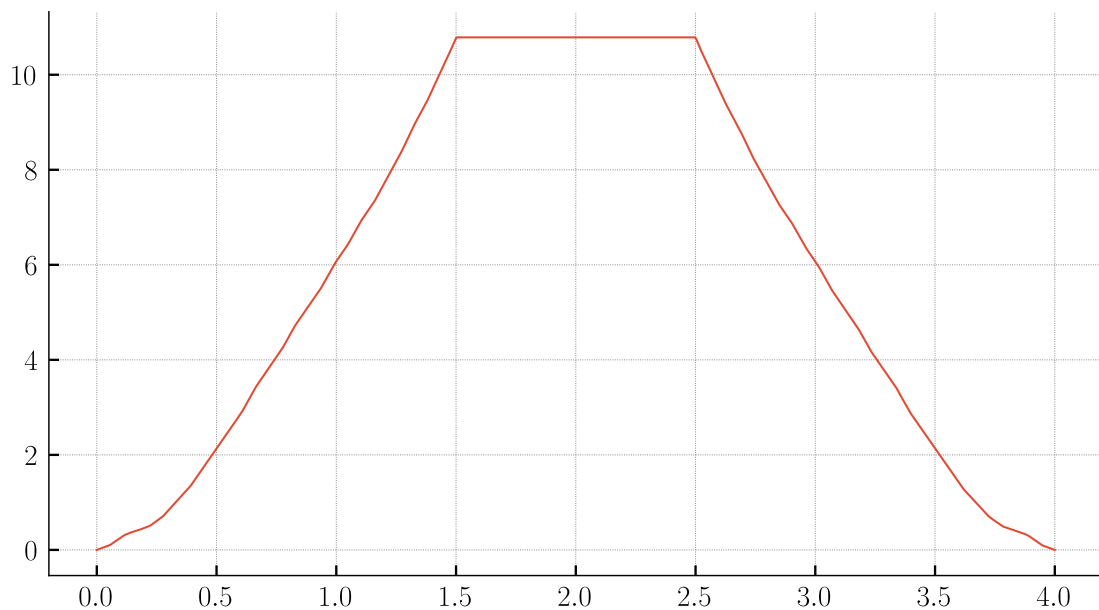
[illegible]

7.25402981e+00, 7.22520276e+00, 7.19637571e+00, 7.16754866e+00,
 7.13872161e+00, 7.10989456e+00, 7.08106751e+00, 7.05224046e+00,
 7.02341341e+00, 6.99458636e+00, 6.96575931e+00, 6.93693227e+00,
 6.90629988e+00, 6.87334754e+00, 6.83701413e+00, 6.80036958e+00,
 6.76372502e+00, 6.72708047e+00, 6.69043592e+00, 6.65379136e+00,
 6.61714681e+00, 6.58050225e+00, 6.54385770e+00, 6.50721315e+00,
 6.47056859e+00, 6.43392404e+00, 6.40042327e+00, 6.36903281e+00,
 6.34020576e+00, 6.31137871e+00, 6.28255166e+00, 6.25372461e+00,
 6.22489756e+00, 6.19607051e+00, 6.16724347e+00, 6.13841642e+00,
 6.10958937e+00, 6.08076232e+00, 6.05193527e+00, 6.02310822e+00,
 5.99052296e+00, 5.95608575e+00, 5.91944119e+00, 5.88279664e+00,
 5.84615208e+00, 5.80950753e+00, 5.77286298e+00, 5.73621842e+00,
 5.69957387e+00, 5.66292931e+00, 5.62628476e+00, 5.58964021e+00,
 5.55299565e+00, 5.51637485e+00, 5.48499208e+00, 5.45444959e+00,
 5.42513395e+00, 5.39581830e+00, 5.36650266e+00, 5.33718702e+00,
 5.30787137e+00, 5.27855573e+00, 5.24924009e+00, 5.21992444e+00,
 5.19060880e+00, 5.16129316e+00, 5.13197751e+00, 5.10280911e+00,
 5.07383458e+00, 5.04496341e+00, 5.01613636e+00, 4.98730931e+00,
 4.95848226e+00, 4.92965521e+00, 4.90082816e+00, 4.87200111e+00,
 4.84317406e+00, 4.81434701e+00, 4.78551996e+00, 4.75669292e+00,
 4.72786587e+00, 4.69630948e+00, 4.66213360e+00, 4.62548905e+00,
 4.58884449e+00, 4.55219994e+00, 4.51555539e+00, 4.47891083e+00,
 4.44226628e+00, 4.40562172e+00, 4.36897717e+00, 4.33233262e+00,
 4.29568806e+00, 4.25904351e+00, 4.22239895e+00, 4.19028628e+00,
 4.15996641e+00, 4.13113936e+00, 4.10231231e+00, 4.07348526e+00,
 4.04465821e+00, 4.01583116e+00, 3.98700412e+00, 3.95817707e+00,
 3.92935002e+00, 3.90052297e+00, 3.87169592e+00, 3.84286887e+00,
 3.81404182e+00, 3.78487311e+00, 3.75564853e+00, 3.72633289e+00,
 3.69701724e+00, 3.66770160e+00, 3.63838596e+00, 3.60907031e+00,
 3.57975467e+00, 3.55043903e+00, 3.52112338e+00, 3.49180774e+00,
 3.46249210e+00, 3.43317645e+00, 3.40265786e+00, 3.36778811e+00,
 3.33153690e+00, 3.29489235e+00, 3.25824780e+00, 3.22160324e+00,
 3.18495869e+00, 3.14831413e+00, 3.11166958e+00, 3.07502503e+00,
 3.03838047e+00, 3.00173592e+00, 2.96509136e+00, 2.92844681e+00,
 2.89489731e+00, 2.86496125e+00, 2.83589701e+00, 2.80706996e+00,
 2.77824291e+00, 2.74941586e+00, 2.72058881e+00, 2.69176176e+00,
 2.66293471e+00, 2.63410766e+00, 2.60528061e+00, 2.57645356e+00,
 2.54762652e+00, 2.51879947e+00, 2.48972034e+00, 2.46047889e+00,
 2.43117117e+00, 2.40185553e+00, 2.37253988e+00, 2.34322424e+00,
 2.31390860e+00, 2.28459295e+00, 2.25527731e+00, 2.22596167e+00,
 2.19664602e+00, 2.16733038e+00, 2.13801474e+00, 2.10869909e+00,
 2.07977656e+00, 2.05090001e+00, 2.02207296e+00, 1.99324591e+00,
 1.96441886e+00, 1.93559181e+00, 1.90676476e+00, 1.87793772e+00,
 1.84911067e+00, 1.82028362e+00, 1.79145657e+00, 1.76262952e+00,
 1.73380247e+00, 1.70497345e+00, 1.67570830e+00, 1.64642846e+00,
 1.61711282e+00, 1.58779718e+00, 1.55848153e+00, 1.52916589e+00,
 1.49985025e+00, 1.47053460e+00, 1.44121896e+00, 1.41190332e+00,
 1.38258767e+00, 1.35327203e+00, 1.32395639e+00, 1.29692981e+00,
 1.27485852e+00, 1.25280697e+00, 1.23118669e+00, 1.20956640e+00,

```

1.18794611e+00, 1.16632583e+00, 1.14470554e+00, 1.12308525e+00,
1.10146496e+00, 1.07984468e+00, 1.05822439e+00, 1.03660410e+00,
1.01498382e+00, 9.93210088e-01, 9.71245648e-01, 9.49277583e-01,
9.27290850e-01, 9.05304118e-01, 8.83317385e-01, 8.61330653e-01,
8.39343920e-01, 8.17357188e-01, 7.95370455e-01, 7.73383723e-01,
7.51396990e-01, 7.29410258e-01, 7.07423525e-01, 6.90834464e-01,
6.75968940e-01, 6.61103417e-01, 6.46317730e-01, 6.31659908e-01,
6.17002087e-01, 6.02344265e-01, 5.87686444e-01, 5.73028622e-01,
5.58370800e-01, 5.43712979e-01, 5.29055157e-01, 5.14397335e-01,
5.00621802e-01, 4.93303661e-01, 4.85985520e-01, 4.78667378e-01,
4.71349237e-01, 4.64031096e-01, 4.56712955e-01, 4.49424591e-01,
4.42217829e-01, 4.35011067e-01, 4.27804304e-01, 4.20597542e-01,
4.13390780e-01, 4.06184017e-01, 3.99328129e-01, 3.93258384e-01,
3.87188639e-01, 3.81118893e-01, 3.75049148e-01, 3.68979403e-01,
3.62909658e-01, 3.56839913e-01, 3.50625306e-01, 3.41425184e-01,
3.32225062e-01, 3.23024940e-01, 3.13824818e-01, 3.04624696e-01,
2.92407778e-01, 2.78139500e-01, 2.63871221e-01, 2.49591258e-01,
2.35177733e-01, 2.20764209e-01, 2.06350684e-01, 1.91937159e-01,
1.77523635e-01, 1.63110110e-01, 1.48696585e-01, 1.34283061e-01,
1.19869536e-01, 1.05456012e-01, 9.55790417e-02, 8.82284962e-02,
8.08779508e-02, 7.35274053e-02, 6.61768599e-02, 5.88263144e-02,
5.14757690e-02, 4.41429565e-02, 3.68140457e-02, 2.94851349e-02,
2.21562240e-02, 1.48273132e-02, 7.49840236e-03, 1.69491525e-04])

```



4.1087854 m

Literatur

- Jaeger, T. 2013. „Extended sandwich model for reinforced concrete slabs: Shear strength without transverse reinforcement“. *Engineering Structures*, 56: 1142–1153. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.06.035>.
- Jaeger, T. 2014. „Extended sandwich model for reinforced concrete slabs: Shear strength with transverse reinforcement“. *Engineering Structures*, 74: 218–228. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.05.025>.
- Jäger, T., und P. Marti. 2006. „Versuche zum Querkraftwiderstand und zum Verformungsvermögen von Stahlbetonplatten“. IBK Bericht, 294. vdf Hochschul-Verlag an der ETH Zürich. <https://doi.org/10.3929/ethz-a-005195576>.
- Marti, P. o. J. Baustatik. Wiley-VCH Verlag GmbH.
- SIA. 2013. Norm SIA 262:2013 Betonbau. Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein.
- Spathelf, C. 2022. „Skript Teil 2: Gebrauchstauglichkeit“. Betonbau - Ausgewählte Kapitel Hochschule Technik & Architektur Luzern.