

Stringer-Tafelmodelle für Stahlbeton

Doctoral Thesis**Author(s):**

Heinzmann, Daniel

Publication date:

2012

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-007344037>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

DISSERTATION ETH Nr. 20303

**Stringer-Tafelmodelle
für
Stahlbeton**

ABHANDLUNG
zur Erlangung des Titels

DOKTOR DER WISSENSCHAFTEN

der

ETH ZÜRICH

vorgelegt von
DANIEL HEINZMANN
Dipl. Bauingenieur ETH/FH
geboren am 20. Juni 1976
Bürger von Visperterminen (VS)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. Peter Marti, Referent
Prof. Dr. Viktor Sigrist, Korreferent

2012

VORWORT

Die Möglichkeit, flächige Bauteile wie Scheiben und Platten praktisch beliebig zu Tragwerken zusammenzufügen, ist eine grundlegende Charakteristik der Betonbauweise. Bei der Bemessung solcher Tragwerke steht die Erfassung des Spannungszustands im Inneren der flächigen Bauteile im Vordergrund. Dem ebenen Spannungszustand kommt dabei grosse Bedeutung zu. Aufbauend auf der Beschreibung des Tragverhaltens von Scheiben- und Plattenelementen im ebenen Spannungszustand wird in der vorliegenden Abhandlung das Stringer-Tafelmodell eingeführt. Es erlaubt die vereinfachte Beschreibung des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahlbetontragwerken, die aus ebenen Bauteilen zusammengefügt sind, unter allgemeiner Beanspruchung.

Die vorliegende, als Promotionsarbeit verfasste Abhandlung schliesst meine etwas mehr als vierjährige Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter von Professor Dr. Peter Marti am Institut für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich ab. Neben der Lehrtätigkeit durfte ich an verschiedenen experimentellen Untersuchungen sowie an Expertisen und Beratungsmandaten mitwirken. Daraus entstanden verschiedene Fragestellungen zum Tragverhalten und insbesondere zur Modellierung von Stahlbetontragwerken, die als Grundlage der vorliegenden Arbeit dienten.

Mein aufrichtiger Dank gilt Professor Dr. Peter Marti, der mir die Durchführung des Doktorats ermöglichte und mit dem ich zahlreiche, sehr wertvolle Diskussionen während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter führen durfte. Ebenso danke ich Professor Dr. Viktor Sigrist für die Übernahme des Korreferats, die Begleitung dieser Arbeit sowie die Gastfreundschaft während meinem Besuch an der Technischen Universität Hamburg-Harburg.

Meinen derzeitigen und früheren Mitarbeitern am Institut danke ich für die angenehme Zusammenarbeit und die fachlichen Diskussionen; insbesondere bedanke ich mich bei Dr. Thomas Jäger für die Anregungen und Fachdiskussionen.

Mein Dank richtet sich auch an Dr. Sara Montani sowie Susi Schenkel für die Durchsicht des Manuskripts. Schliesslich möchte ich mich bei meiner Mutter bedanken, die mich während meiner Ausbildung stets unterstützte.

Zürich, im Februar 2012

Daniel Heinzmann

Dem Andenken meines Vaters

Siegfried Heinzmann
Landwirt und Skilehrer
(1943 – 1988)

KURZFASSUNG

Die vorliegende Abhandlung leistet einen Beitrag zur vereinfachten Modellierung und Bemessung sowie zur näherungsweisen Beschreibung des komplexen Verformungsverhaltens von Stahlbetontragwerken. Grundlage bildet die Erfassung des Tragverhaltens von Stahlbeton-Scheiben- und Plattenelementen im ebenen Spannungszustand. Darauf aufbauend werden ebene Stahlbetonstrukturen mit Stringern und Tafeln idealisiert. In der Regel übertragen Erstere Kräfte in ihrer Richtung, und Letztere weisen einen Zustand reiner Schubmembrankräfte auf.

In Kapitel 2 werden die relevanten Eigenschaften von Stahl und Beton sowie das Zusammenwirken der beiden Werkstoffe im Allgemeinen dargestellt.

Das Kapitel 3 fasst die Grundlagen für das im Anschluss eingeführte Stringer-Tafelmodell zusammen. Die wichtigsten Zusammenhänge zur Theorie des plastischen Potentials, die Grenzwertsätze der Traglastverfahren sowie die möglichen statischen und kinematischen Diskontinuitäten werden aufgezeigt. Im Anschluss folgt eine Darstellung und Erweiterung der MOHRschen Hüllkurven zur Beschreibung des Tragverhaltens des Betons. Neben der Darstellung der Fliessbedingungen für orthogonal bewehrte Stahlbeton-Scheibenelemente wird der Einfluss des endlichen Stababstands der Querkraftbewehrung auf den Tragwiderstand von Stahlbetonträgern mit Hilfe von kinematischen Diskontinuitäten aufgezeigt. Im Weiteren sind verschiedene Ansätze zur Bestimmung des Tragwiderstands von Platten- resp. Schalenelementen unter kombinierter Beanspruchung festgehalten. Schliesslich werden obere Grenzwerte des Durchstanzwiderstands unter Einbezug der verschiedenen MOHRschen Hüllkurven entwickelt.

In Kapitel 4 werden die vorgängig beschriebenen Elemente zum Stringer-Tafelmodell zusammengefasst. Diese Modellvorstellung erlaubt die Behandlung von Stahlbetonstrukturen, die sich aus ebenen Bauteilen (Scheiben, Platten) zusammensetzen. Verschiedene Tafelformen werden analysiert und anschliessend für die Bemessung von Biegeträgern und wandartigen Trägern verwendet. Zur Ermittlung des Verformungsverhaltens (einschliesslich Rissabstände und Rissbreiten) ebener Stahlbetonstrukturen werden das Tragverhalten der Stringer mit dem Zuggurt- resp. Druckgurtmodell und dasjenige der Tafeln mit dem klassischen Druckfeldmodell beschrieben, und die einzelnen Modellvorstellungen werden mit Versuchsergebnissen verglichen. Anschliessend wird das Stringer-Tafelmodell zur Modellierung und Bemessung von Platten und Faltwerken unter allgemeiner Beanspruchung (Biegung und Membrankräfte) eingesetzt.

Abschliessend werden in Kapitel 5 die massgebenden Erkenntnisse zusammengefasst und entsprechende Folgerungen für die praktische Anwendung von Stringer-Tafelmodellen formuliert. Ein Ausblick auf weiterführende Arbeiten rundet die Arbeit ab.

ABSTRACT

The present work aims at contributing to a simplified modelling and design as well as an approximate description of the complex deformation behaviour of reinforced concrete structures. Starting from the response of plate elements to plane stress stringers and panels are introduced to idealize reinforced concrete structures. Generally, pure axial forces are assigned to the stringers while the panels are subjected to pure membrane shear forces.

After a brief introduction, chapter 2 summarises the relevant properties of reinforcing steel and concrete as well as their interaction.

Chapter 3 presents the fundamentals underlying the stringer-panel models, including the theory of the plastic potential, the limit theorems and the potential static and kinematic discontinuities. MOHR's envelopes for describing the strength of concrete are discussed and a pertinent extension is given. The yield criteria of orthogonally reinforced concrete plate elements are presented and the influence of the finite spacing of the transverse reinforcement on the strength of reinforced concrete girders is illustrated using kinematic discontinuities. Furthermore, different approaches for determining the strength of plate and shell elements subjected to combined actions are described. Finally, upper bounds for the punching resistance are developed based on the various MOHR's envelopes.

In chapter 4 the previously described elements are combined in the form of the stringer-panel model, allowing to treat reinforced concrete structures made of plane members (plates, slabs). Different panel shapes are analysed and used for the design of girders and walls. The deformation behaviour is described using the tension chord model and the compression chord model for the stringers while the classical compression field model is used for the panels. Predictions of the individual models are compared with test results and the stringer-panel model is applied to model and design slabs and folded plates subjected to combined moments and membrane forces.

Chapter 5 provides a summary of the major findings along with conclusions for the practical application of stringer-panel models and an outlook on further work.

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einleitung	1
1.1	HINTERGRUND	1
1.2	ZIELSETZUNG	2
1.3	ÜBERSICHT	2
1.4	ABGRENZUNG	3
2	Werkstoffbeziehungen	5
2.1	BETONSTAHL	5
2.2	BETON	6
2.2.1	Zugfestigkeit	6
2.2.2	Druckfestigkeit	6
2.2.3	Verhältnis zwischen der Zug- und Druckfestigkeit	7
2.2.4	Zeitabhängiges Verhalten	8
2.3	VERBUNDVERHALTEN ZWISCHEN BETON UND BETONSTAHL	9
3	Plastische Modellierung	11
3.1	ÜBERSICHT	11
3.2	THEORIE DES PLASTISCHEN POTENTIALS	11
3.2.1	Ideal plastisches Verhalten	11
3.2.2	Traglastverfahren	14
3.3	DISKONTINUITÄTEN	15
3.3.1	Diskontinuität im Verschiebungsfeld	15
3.3.2	Diskontinuität im Spannungsfeld	16
3.4	MODIFIZIERTE FLIESSBEDINGUNG VON COULOMB	17
3.4.1	Quadratische Fließbedingung	19
3.5	MOHRSCHE HÜLLKURVEN	20
3.5.1	Quadratische Fließbedingung	22
3.5.2	Parabolische Hüllkurve	22
3.5.3	Hyperbolische Hüllkurve	23
3.5.4	Kettenlinienförmige Hüllkurve	25
3.6	FLIESSBEDINGUNGEN FÜR STAHLBETON-SCHEIBENELEMENTE	28
3.6.1	Statische und kinematische Beziehungen von Scheibenelementen	28
3.6.2	Orthogonale Bewehrung	31
3.6.3	Bemessung der Bewehrung in Stahlbeton-Scheibenelementen	34
3.6.4	Allgemeine Bewehrungsrichtungen	35
3.6.5	Berücksichtigung des endlichen Stababstands der Bewehrung	35
3.6.6	Bemessung der Querkraftbewehrung in Stahlbetonträgern	42
3.7	FLIESSBEDINGUNGEN FÜR STAHLBETON-PLATTEN- UND SCHALEN-ELEMENTE	47
3.7.1	Statische und kinematische Beziehungen von Plattenelementen	47
3.7.2	Biegewiderstand	53
3.7.3	Fließbedingungen nach dem unteren Grenzwertsatz (Sandwichmodell)	56
3.7.4	Fließbedingung nach dem oberen Grenzwertsatz	67
3.7.5	Numerische Verfahren	72
3.7.6	Vergleich der Fließbedingungen	75
3.7.7	Beispiel Quadratplatte	77
3.8	OBERER GRENZWERT DES DURCHSTANZWIDERSTANDS	79
3.8.1	Durchstanzen mit hyperbolischer Hüllkurve	80
3.8.2	Durchstanzen mit parabolischer Hüllkurve	82
3.8.3	Durchstanzen mit modifizierter Fließbedingung von COULOMB	84
3.8.4	Einflussfaktoren auf den Durchstanzwiderstand	85

3.8.5	Vergleich mit Durchstanzversuchen	86
3.8.6	Vergleich mit Versuchsergebnissen der ETH Zürich	87
3.8.7	Bemerkungen zur Bemessung bezüglich Durchstanzen	92
3.9	ZUSAMMENFASSUNG	94
4	Stringer-Tafelmodelle	95
4.1	ÜBERSICHT	95
4.1.1	Elastisches Verhalten der Scheiben	95
4.1.2	Elastisches Verhalten wandartiger Träger	95
4.1.3	Stringer-Tafelmodell, Geschichtlicher Abriss	100
4.2	TAFELFORMEN	101
4.2.1	Rechtecktafel	101
4.2.2	Parallelogrammtafel	102
4.2.3	Dreiecktafel	104
4.2.4	Trapeztafel	104
4.2.5	Allgemeine Vierecktafel	106
4.3	BEMESSUNG VON BIEGETRÄGERN	108
4.3.1	Spannungsfeld, Fachwerkmodell	108
4.3.2	Biegeträger mit Parallelogrammtafeln	110
4.3.3	Lagerung über Trapezfeld	112
4.3.4	Biegeträger mit Rechtecktafeln	113
4.3.5	Querschnittsbetrachtung	116
4.3.6	Vergleich der Bewehrungsmengen	118
4.3.7	Konstruktive Durchbildung	121
4.4	BEMESSUNG VON WANDARTIGEN TRÄGERN	122
4.4.1	Wandscheibe mit Öffnung: Fachwerkmodell, Spannungsfeld	122
4.4.2	Wandscheibe mit Öffnung: Stringer-Tafelmodell	124
4.4.3	Krafteinleitung in Wandscheiben mit Stringer-Tafelmodell	129
4.5	TRAGVERHALTEN DER STRINGER	133
4.5.1	Zuggurtmodell	133
4.5.2	Vergleich mit Zugversuchen an der ETH Zürich	136
4.5.3	Druckgurtmodell	138
4.6	TRAGVERHALTEN DER TAFELN	141
4.6.1	Gerissene Scheibe	141
4.6.2	Klassisches Druckfeldmodell	142
4.6.3	Druckfeldmodell mit reiner Schubbeanspruchung	146
4.6.4	Vergleich mit Versuchen im Membrane-Element-Tester in Toronto	151
4.6.5	Vergleich mit Versuchen im Shell-Element-Tester in Toronto	154
4.7	LAST-VERFORMUNGSVERHALTEN EBENER STRUKTUREN	156
4.7.1	Wandartiger Träger	156
4.7.2	Rechnergestützte Behandlung des Stringer-Tafelmodells	158
4.8	BEMESSUNG ALLGEMEINER STAHLBETONSTRUKTUREN	160
4.8.1	Gleichgewichtslösungen für Platten	160
4.8.2	Beispiel Hochbauplatte	162
4.8.3	Rechnergestützte Behandlung der Platten mit Stringern und Tafeln	163
4.8.4	Faltwerke	164
4.9	ZUSAMMENFASSUNG	165
5	Zusammenfassung und Folgerungen	169
5.1	ZUSAMMENFASSUNG	169
5.2	FOLGERUNGEN UND AUSBLICK	171

1 EINLEITUNG

1.1 Hintergrund

Scheiben, Platten und Schalen sind die am häufigsten verwendeten Bauteile bei der Anwendung der Stahlbetonbauweise. Sie lassen sich beliebig zu einem Tragwerk zusammenfügen. Dabei treten in der Regel kombinierte Beanspruchungen durch Biegemomente, Quer- und Membrankräfte auf, beispielsweise in Stegen von Brücken mit Hohlkastenquerschnitt, in Tunnelgewölben, in Schalentragwerken wie Offshore-Plattformen oder in aussteifenden Wänden in Hochbauten.

Bild 1.1 zeigt eine typische Anwendung ebener Stahlbeton-Bauteile. Sowohl die Stützen der Brücke als auch die einzelnen Abschnitte der Fahrbahnplatte sind einer kombinierten Beanspruchung unterworfen. Die Ermittlung des Spannungszustands im Inneren dieser Bauteile bildet die Grundlage für die Bemessung resp. Erfassung des Trag- und Verformungsverhaltens.

Die Bemessung umfasst die Wahl der verwendeten Werkstoffe, das Festlegen der Betonabmessungen und der Bewehrung sowie deren konstruktive Durchbildung. Dabei ist der Nachweis zu erbringen, dass die an das Tragwerk gestellten Anforderungen bezüglich Tragsicherheit, Gebrauchstauglichkeit und Dauerhaftigkeit erfüllt sind. Startpunkt jeder Bemessung im konstruktiven Ingenieurbau ist die Tragwerksanalyse mit der Festlegung der Einwirkungen und dem Tragwerksmodell.

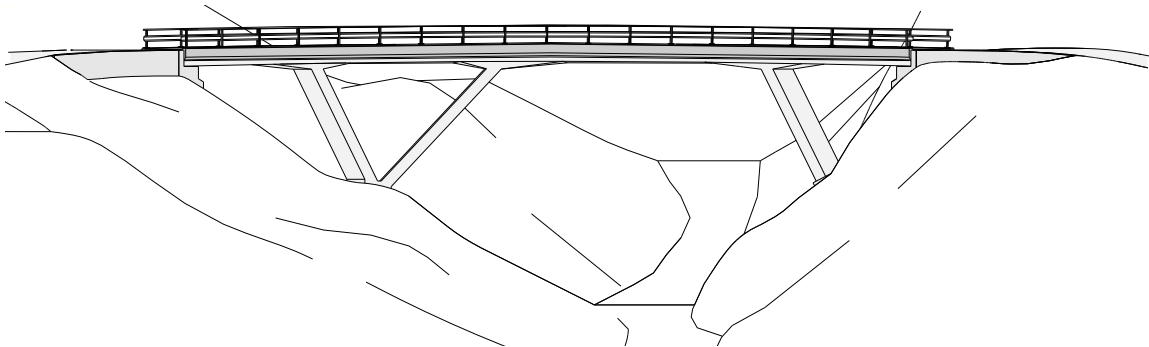


Bild 1.1 Wettbewerbsprojekt Pont sur le torrent du St-Barthélémy, Evionnaz, in Zusammenarbeit mit A. Murisier.

Bereits am Anfang der Stahlbetonbauweise wurden beispielsweise Biegeträger, entsprechend ihrer Beanspruchung und Tragwirkung, mit diskreten Elementen modelliert [Ritter (1899)]. Die Idealisierung von Tragstrukturen mit Stringern, welche primär Kräfte in ihrer Richtung aufnehmen, wurde insbesondere in der Strukturberechnung von Flugzeugflügeln für die Luftfahrtindustrie in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts eingeführt [Wagner (1929), Ebner & Köller (1938), Argyris (1954)].

Im Zentrum der vorliegenden Abhandlung stehen die vereinfachte Modellierung und Bemessung sowie die näherungsweise Beschreibung des komplexen Verformungsverhaltens von Stahlbetontragwerken. Grundlage bildet die Erfassung des Tragverhaltens von Stahlbeton-Scheiben- und Plattenelementen im ebenen Spannungszustand. Darauf aufbauend werden Stahlbetonstrukturen mit Stringern und Tafeln idealisiert. Sowohl bei der Bemessung wie auch bei der Überprüfung bestehender Tragwerke ist der Tragwiderstand von zentraler Bedeutung. Zu dessen Beschreibung sind insbesondere Modelle auf der Grundlage der Plastizitätstheorie dienlich. Die Anwendung dieser Modellvorstellungen setzt ein ausreichendes Verformungsvermögen sämtlicher Tragwerksteile voraus. Dies bedingt ein entsprechendes Tragwerkskonzept sowie eine geeignete konstruktive Durchbildung.

Mit diesem Hintergrund gliedert sich die vorliegende Arbeit in das von Professor Dr. Peter Marti lancierte Forschungsprojekt „Verformungsvermögen von Massivbautragwerken“ ein und baut auf die früheren am Institut für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich entwickelten Modellvorstellungen zur Beschreibung des Tragverhaltens von Stahlbetonstrukturen auf [Marti (1980), Sigrist (1995), Kaufmann (1998), Seelhofer (2009)].

1.2 Zielsetzung

Ziel der vorliegenden Abhandlung ist es, einen Beitrag zur vereinfachten Modellierung und Bemessung sowie der näherungsweisen Beschreibung des komplexen Verformungsverhaltens von Stahlbetontragwerken zu leisten. Grundlage bildet die Erfassung des Tragverhaltens von Stahlbeton-Scheiben- und Plattenelementen im ebenen Spannungszustand. Die grundlegenden Annahmen zur Beschreibung dieser Elemente werden erörtert, gegebenenfalls werden die Grenzen der Anwendbarkeit aufgezeigt, und Präzisierungen in den Bemessungsvorschriften werden vorgeschlagen. Darauf aufbauend werden ebene Stahlbetonstrukturen mit Stringern und Tafeln idealisiert. Das Tragverhalten der Stringer und Tafeln soll mit mechanisch begründeten und analytisch fassbaren Modellvorstellungen beschrieben werden, die die wesentlichen Einflüsse berücksichtigen und Aussagen zu Rissabständen und Rissbreiten sowie dem Verformungsvermögen erlauben.

1.3 Übersicht

Der erste Teil der Abhandlung behandelt die relevanten Eigenschaften von Stahl und Beton und deren Zusammenwirken (Kapitel 2) und beschreibt den Tragwiderstand von Stahlbeton-Scheiben- und Plattenelementen im ebenen Spannungszustand (Kapitel 3) als Grundlage für das Stringer-Tafelmodell. Aufbauend auf der Theorie des plastischen Potentials und den Grenzwertsätzen der Traglastverfahren werden mögliche statische und kinematische Diskontinuitäten aufgezeigt. Anschliessend folgt eine Darstellung und Erweiterung der MOHRschen Hüllkurven zur Beschreibung des Tragverhaltens des Betons. Die Fliessbedingungen für orthogonal bewehrte Scheibenelemente werden zusammengefasst, und mit einer eingehenden Diskussion bezüglich der grundlegenden Annahme ergänzt, dass die Bewehrungen als unendlich fein verteilte Einzelfasern idealisiert werden. Diese Diskussion gründet auf der Betrachtung kinematischer Diskontinuitäten. Darauf aufbauend werden für die Bemessung der Querkraftbewehrung Präzisierungen vorgeschlagen. Im Weiteren sind verschiedene Ansätze zur Bestimmung des Tragwiderstands von Platten- resp. Schalenelementen unter kombinierter Beanspruchung aufgeführt. Auf Basis der Sandwichmodellvorstellung wird ferner eine Fliessbedingung für Plattenelemente vorgeschlagen, mit welcher untere (statische) Grenzwerte der Traglast für Biege- und Drillmomente ermittelt werden können. Darüber hinaus wird, ebenfalls auf Grundlage des unteren Grenzwerts der Traglastverfahren, ein Vorgehen zur Berücksichtigung von Membrankraftbeanspruchungen vorgestellt. Schliesslich werden obere Grenzwerte des Durchstanzwiderstands unter Einbezug der verschiedenen MOHRschen Hüllkurven entwickelt.

Im zweiten Teil der Arbeit (Kapitel 4) werden die vorgängig beschriebenen Elemente zum Stringer-Tafelmodell zusammengefasst. Für verschiedene Tafelformen werden Gleichgewichtszustände erörtert. Am Beispiel eines Biegeträgers und eines wandartigen Trägers wird die Bemessung auf Grundlage des Stringer-Tafelmodells der Bemessung basierend auf diskontinuierlichen Spannungsfeldern und Fachwerkmodellen gegenübergestellt. Weiter werden Kraftein-

leitungen in hohen Scheiben mit Hilfe des Stringer-Tafelmodells diskutiert. Zur Ermittlung des Verformungsverhaltens (einschliesslich Rissabstände und -breiten) ebener Stahlbetonstrukturen wird das Tragverhalten der Stringer mit dem Zuggurt- resp. Druckgurtmodell und dasjenige der Tafeln mit dem klassischen Druckfeldmodell beschrieben. Diese Modellvorstellungen werden jeweils mit Versuchsergebnissen verglichen. Schliesslich wird das Stringer-Tafelmodell zur Modellierung und Bemessung von Platten und Faltwerken unter allgemeiner Beanspruchung (Biegung und Membrankräfte) eingeführt.

In Kapitel 5 werden die massgebenden Erkenntnisse zusammengefasst und entsprechende Folgerungen formuliert. Ein Ausblick auf weiterführende Arbeiten schliesst die Abhandlung ab.

1.4 Abgrenzung

In der vorliegenden Abhandlung werden primär orthogonal und schlaff bewehrte Bauteile behandelt. Die Berechnungen beziehen sich in der Regel auf angenommene oder aus Versuchen ermittelte, mittlere Werkstoffkennwerte. Dabei wird von Beanspruchungssituationen mit monoton steigenden Lasten ausgegangen; zyklische und dynamische Einwirkungen werden nicht betrachtet. Generell werden kleine Verformungen vorausgesetzt, so dass die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System formuliert werden können und Effekte 2. Ordnung vernachlässigbar sind.

2 WERKSTOFFBEZIEHUNGEN

Für die Beschreibung des Tragverhaltens von Stahlbetonstrukturen ist es zweckmässig, die beiden Werkstoffe Beton und Betonstahl mit vereinfachten Kraft-Verformungs-Beziehungen zu idealisieren. Die spezifischen Eigenschaften können dabei mit dem Grad der Idealisierung, d. h. mit der Komplexität der Werkstoffbeziehung, berücksichtigt werden.

Im vorliegenden Kapitel werden die in dieser Abhandlung verwendeten Werkstoffbeziehungen aufgezeigt. Eine ausführliche Betrachtung der Werkstoffbeziehungen ist beispielsweise in Muttoni (1990), Sigrist (1995), Seelhofer (2009) und Marti (2012) zu finden.

2.1 Betonstahl

Der Betonstahl wird in der Stahlbetonbauweise üblicherweise in Form von Stäben eingesetzt, die idealisiert nur Kräfte in ihrer Stablängsrichtung aufnehmen. Die Beanspruchung ist somit einachsig, und das Bild 2.1 zeigt verschiedene, idealisierte Spannungs-Verzerrungscharakteristiken. Die Werkstoffparameter werden in der Regel aus einachsigen Zugversuchen gewonnen.

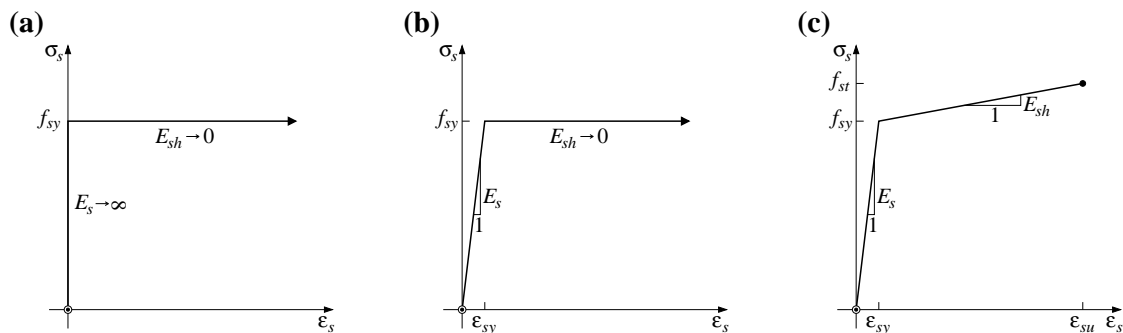


Bild 2.1 Idealisierte Werkstoffbeziehungen für Betonstahl: (a) Starr - ideal plastisch; (b) linear elastisch - ideal plastisch; (c) linear elastisch - linear verfestigend plastisch.

Zur Bestimmung von Tragwiderständen ist es sinnvoll, von einer starr - ideal plastischen Werkstoffbeziehung für den Betonstahl auszugehen, Bild 2.1(a). Hingegen ist zur Beschreibung von Rissbildungsprozessen und von Verformungen der Stahlbetonstrukturen eine linear elastisch - ideal plastische Charakteristik zweckmässig, Bild 2.1(b). Bild 2.1(c) zeigt eine linear elastisch - linear verfestigend plastische Werkstoffcharakteristik, die sich zur Beschreibung des Verformungsvermögens eignet.

Eine zentrale Eigenschaft des Betonstahls ist dessen Duktilität, die mit dem Verfestigungsverhältnis f_{st}/f_{sy} und der Bruchdehnung ϵ_{su} charakterisiert werden kann. Die Duktilität garantiert, dass bis zum Versagen durch plastische Verformungen der Betonstahl Energie dissipiert. Mindestanforderungen dieser beiden Kennwerte sind in Normenwerken festgelegt.

Das einachsige Verhalten des Betonstahls unter Druck entspricht etwa dem Verhalten unter Zug mit den analogen Werkstoffparametern, wobei vorausgesetzt wird, dass die Stäbe nicht ausknicken. Demnach können die idealisierten Werkstoffbeziehungen in Bild 2.1 punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs vom ersten in den dritten Quadranten übertragen werden.

2.2 Beton

2.2.1 Zugfestigkeit

Das Verhalten des Betons unter einachsiger Zugbeanspruchung kann bis nahe an die Festigkeitsgrenze in guter Näherung als linear elastisch angenommen werden. Die Festigkeit und das Dehnvermögen sind weitaus geringer als bei Druckbeanspruchung, und das Versagen unter Last ist ausgesprochen spröde.

Die einachsige Betonzugfestigkeit unterliegt erfahrungsgemäss einer relativ grossen Streuung. Sie kann direkt in einem einachsigen Zugversuch oder indirekt in einem Biegezug-, Spaltzug- oder Stempeldruckversuch (Double-Punch-Test) ermittelt werden. Die Zugfestigkeit sowie der Elastizitätsmodul können, wie in den folgenden Abschnitten dargestellt, in Abhängigkeit der Zylinderdruckfestigkeit näherungsweise bestimmt werden.

2.2.2 Druckfestigkeit

Einachsige Druckfestigkeit

Experimentell werden einachsige Druckfestigkeitsprüfungen des Betons gewöhnlich an Würfeln oder Zylindern durchgeführt. Die stärkere Behinderung der Querdehnung bei den Würfelproben führt auf eine etwa 10 bis 20% höhere Festigkeit im Vergleich zu den zylindrischen Proben. Die effektive Betondruckfestigkeit f_c kann vereinfacht in Funktion der Zylinderdruckfestigkeit f_{cc} in MPa mit

$$f_c = 2.7 \cdot f_{cc}^{2/3} \leq f_{cc} \quad (2.1)$$

nach Muttoni et al. (1996) bestimmt werden. Bis zum Erreichen der Druckfestigkeit des Betons folgt die Werkstoffcharakteristik in guter Näherung einem parabolischen Verlauf. Sargin (1971) schlägt die Beziehung

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = \frac{E_c \varepsilon_c - \sigma_{c \max} \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cu}} \right)^2}{1 + \frac{E_c \varepsilon_c}{\sigma_{c \max}} + \frac{2 \cdot \varepsilon_c}{\varepsilon_{cu}}} \quad (2.2)$$

mit der Druckfestigkeit $\sigma_{c \max}$ und der zugehörigen Stauchung ε_{cu} sowie dem Elastizitätsmodul E_c vor. Bild 2.2(a) illustriert die Beziehung (2.2) im Vergleich zu Versuchsergebnissen aus Zylinderdruckversuchen mit $\sigma_{c \max} = -f_{cc}$ resp. $\sigma_{c \max} = -f_c$, mit f_c gemäss (2.1). Bild 2.2(b) resp. (c) zeigt idealisierte Werkstoffbeziehungen des Betons, die eine vereinfachte Beschreibung des Tragverhaltens von Stahlbetonstrukturen ermöglichen.

Bis zu etwa einem Drittel der Zylinderdruckfestigkeit kann näherungsweise von einem linear elastischen Verhalten mit einem Elastizitätsmodul von

$$E_c = 10'000 \cdot f_{cc}^{1/3} \quad (2.3)$$

ausgegangen werden (E_c und f_{cc} in MPa). Beim Erreichen der Druckfestigkeit kann die zugehörige Stauchung ε_{cu} in ‰ mit

$$\varepsilon_{cu} \approx 0.9 \cdot f_{cc}^{1/4} \quad (2.4)$$

in Anlehnung an Popovics (1973) abgeschätzt werden; entsprechend nimmt die Stauchung mit Zunahme der Betondruckfestigkeit leicht zu. Nach dem Erreichen der Druckfestigkeit kommt es zu einem entfestigenden, systemabhängigen Verhalten [Sigrist (1995)].

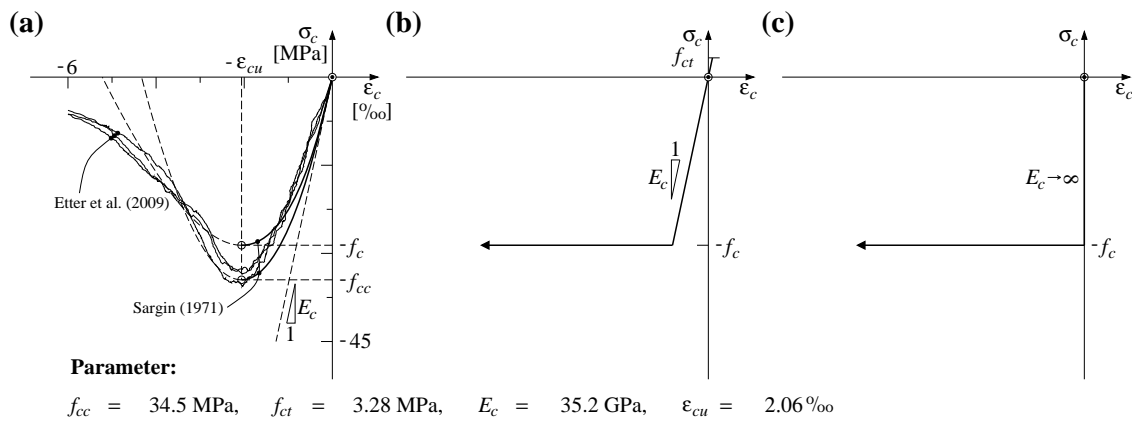


Bild 2.2 Werkstoffbeziehungen für Beton: (a) Spannungs-Dehnungsbeziehung gemäss Sargin (1971) im Vergleich mit Versuchsergebnissen (SP2, Etter et al. (2009)); (b) linear elastisch - ideal plastische Idealisierung; (c) starr - ideal plastische Idealisierung.

Dreiaxiale Druckfestigkeit

Ist der Beton einer räumlichen Druckbeanspruchung unterworfen, ergeben sich im Vergleich zum Verhalten unter einachsiger Druckbeanspruchung höhere Festigkeiten und auch grössere Bruchstauchungen [Sigrist (1995)]. Eine gute Übereinstimmung mit entsprechenden Versuchsergebnissen kann mit der COULOMBSchen Fließbedingung, die in Kapitel 3.4 ausführlich beschrieben wird, erreicht werden.

Ebener Spannungszustand

Dem ebenen Spannungszustand kommt in der Stahlbetonbauweise, die vorwiegend Scheiben und Platten verwendet, eine grosse Bedeutung zu. Eine Stahlbetonscheibe, welche Druckspannungen und Querzugdehnungen erfährt, weist im Vergleich zur einachsigen Druckfestigkeit eine geringere Druckfestigkeit auf. Die Querzugdehnungen resultieren beispielsweise aus den nach dem Reißen in der Bewehrung herrschenden Zugspannungen, die über den Verbund im Beton positive Dehnungen verursachen. Gestützt auf eine umfangreiche Auswertung von Versuchen schlägt Kaufmann (1998) die Beziehung

$$f_c = \frac{f_{cc}^{2/3}}{0.4 + 30 \cdot \epsilon_1} \leq f_{cc} \quad (2.5)$$

zur Bestimmung der Betondruckfestigkeit in Stahlbetonscheiben in Abhängigkeit der positiven Hauptdehnung ϵ_1 vor. Die Beziehung (2.5) berücksichtigt auch eine weniger als proportionale Zunahme der Druckfestigkeit mit der Zylinderdruckfestigkeit f_{cc} in MPa. Die Beurteilung der Betondruckfestigkeit in Stegscheiben wird in den Kapiteln 3.6 und 4.6 weiter diskutiert.

Eine besonders geeignete Idealisierung zur Behandlung ebener Spannungszustände im Stahlbeton bildet die modifizierte Fließbedingung von COULOMB, die in Kapitel 3.4 dargestellt ist.

2.2.3 Verhältnis zwischen der Zug- und Druckfestigkeit

Für normalfesten Beton kann die Zugfestigkeit nach Raphael (1984) mit der Beziehung

$$f_{ct} = 0.3 \cdot f_{cc}^{2/3} \quad (2.6)$$

bestimmt werden. Bereits Heilmann (1969) schlägt für die Abhängigkeit zwischen der Zugfestigkeit und der Druckfestigkeit des Betons die empirische Beziehung (2.6) mit dem Exponenten $2/3$ vor. (2.6) ist in Bild 2.3 mit Versuchsergebnissen verglichen.

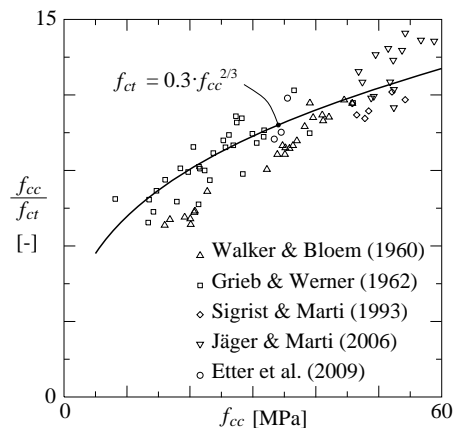


Bild 2.3 Versuchsergebnisse der Zug- und Druckfestigkeit an Betonzylindern und Vergleich mit empirischer Beziehung nach Raphael (1984).

Die Streuung in Bild 2.3 weist darauf hin, dass (2.6) als Abschätzung betrachtet werden muss.

2.2.4 Zeitabhängiges Verhalten

Zu den zeitabhängigen Auswirkungen auf den Werkstoff Beton gehören die Schwind- und Temperaturverformungen, welche unabhängig von einer Beanspruchung stattfinden, sowie die von der Beanspruchung abhängigen Kriechverformungen. Eine ausführliche Behandlung dieser zeitabhängigen Einflüsse ist in Seelhofer (2009) und Marti (2012) enthalten. Im Rahmen der vorliegenden Abhandlung wird kurz auf den Einfluss des Schwindens auf das Tragverhalten von Stahlbetonstrukturen eingegangen.

Einfluss des Schwindens

Als Schwinden bezeichnet man die zeitabhängige Volumenabnahme des Betons, verursacht durch Austrocknung resp. Verdunstung des Überschusswassers sowie durch Schrumpfen des Zementsteins. Das Schwindmaß ε_{cs} hängt hauptsächlich von der Art und dem Anteil des Zements, von dessen Mahlfeinheit sowie vom Wasserzementwert ab. Der zeitliche Verlauf des Schwindens wird vom Betonalter, den Bauteilabmessungen, der Umgebungsfeuchte und den Witterungsverhältnissen beeinflusst. Die Dokumentation SIA D 0192 (2004) enthält Beziehungen zur Abschätzung des Schwindmaßes sowie des zeitlichen Verlaufs; diese Beziehungen stützen sich im Wesentlichen auf die Bestimmungen in EC 2 (2004).

Eigenspannungszustand nach unbehindertem Schwinden eines Stahlbetonelements

Die Bewehrung in einem Stahlbetonelement behindert das Schwinden eines äußerlich unbehindert resp. statisch bestimmt gelagerten Stahlbetonelements. Dabei entsteht ein Eigenspannungszustand des Verbundquerschnitts, der durch Formulieren des Gleichgewichts und der Verträglichkeitsbedingung der Dehnungen des Betonstahls ε_{st} resp. des Betons ε_{ci}

$$-\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{ci} - \varepsilon_{st} \quad (2.7)$$

sowie der Annahme eines starren Verbunds zwischen der Bewehrung und dem Beton bestimmt werden kann, d. h.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{si} &= \varepsilon_{cs} \frac{1-\rho}{1+\rho(n-1)}, & \sigma_{si} &= \varepsilon_{si} E_s \\ \varepsilon_{ci} &= -\varepsilon_{cs} \frac{n\rho}{1+\rho(n-1)}, & \sigma_{ci} &= \varepsilon_{ci} E_c\end{aligned}\quad (2.8)$$

mit der Wertigkeit $n = E_s/E_c$ und dem geometrischen Bewehrungsgehalt $\rho = A_s/A_c$. Beim Schwindmass handelt es sich üblicherweise um eine Verkürzung des Betons; d. h. ε_{cs} ist negativ. Der Eigenspannungszustand setzt sich aus einer Druckspannung in der Bewehrung sowie einer Zugspannung im Beton zusammen. Für ein Schwindmass von $-\varepsilon_{cs} = 0.3\text{‰}$ mit $E_c = 35 \text{ GPa}$, $E_s = 210 \text{ GPa}$ und einem Bewehrungsgehalt ρ von 0.5 bis 2 % ergeben sich Zugspannungen im Beton von 0.3 bis 1.1 MPa und Druckspannungen im Betonstahl von -61 bis -56 MPa . Ist das Stahlbetonelement äusserlich behindert, d. h. statisch unbestimmt gelagert, resultieren darüber hinaus Zwängungen.

2.3 Verbundverhalten zwischen Beton und Betonstahl

Die Interaktion resp. das Zusammenwirken des Betonstahls mit dem umgebenden Beton wird im Wesentlichen durch den Verbund definiert, welcher insbesondere auf der Verzahnung der durch Rippen profilierten Oberfläche der Betonstähe basiert. Zur Beschreibung der Verbundcharakteristik dient vereinfachend eine am differentiellen Stabelement (Bild 2.4(a)) wirkende Verbundschubspannung τ_b zusammen mit der zugehörigen Relativverschiebung δ (Schlupf). Mittels Ausziehversuchen von Betonstählen können diese Kenngrössen des Verbunds experimentell ermittelt werden [Sigrist (1995)]. Die gewöhnliche inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung des verschieblichen Verbunds

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{4 \cdot \tau_b}{E_s \emptyset} + \frac{\pi \emptyset \tau_b + q}{A_c E_c (1-\rho)} \quad (2.9)$$

beschreibt das Verbundverhalten von Stäben mit kreisrundem Querschnitt. Sie lässt sich aus der Formulierung des Gleichgewichts am Stabelement in Bild 2.4(a) unter der Voraussetzung des Ebenbleibens des Querschnitts und der Annahme von linear elastischem Materialverhalten herleiten. Der zweite Summand in (2.9) berücksichtigt sowohl die Verformungen des Betons als auch eine in Stabrichtung wirkende Streckenlast $q(x)$. Unter Vorgabe allgemeiner Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehungen (τ_b - δ) ist die Differentialgleichung (2.9) numerisch lösbar. Analytische Lösungen sind für bestimmte, vereinfachte τ_b - δ Beziehungen möglich, [Bouma (1993)], [Marti (2012)].

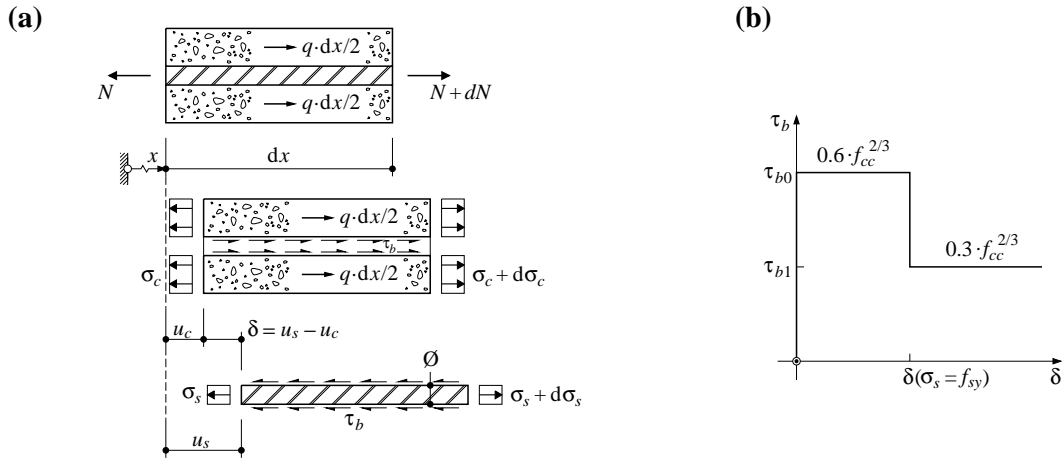


Bild 2.4 Verbundmodell: (a) differenzielles Element eines Stahlbetonzugglieds; (b) abgetreppte, starr - ideal plastische Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung.

Als Grundlage für das in Kapitel 4.5.1 beschriebene Zuggurtmodell zur Beschreibung des Tragverhaltens von Stahlbetonzuggliedern schlägt Sigrist (1995) eine abgetreppte, starr - ideal plastische Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung vor. In Bereichen, bei denen sich der Betonstahl linear elastisch verhält, wird für die Verbundschubspannung

$$\tau_{b0} = 0.6 \cdot f_{cc}^{2/3} = 2 \cdot f_{ct} \quad (2.10)$$

eingesetzt und in Bereichen, bei denen der Betonstahl fließt, eine halb so grosse Verbundschubspannung von

$$\tau_{b1} = 0.3 \cdot f_{cc}^{2/3} = f_{ct} \quad (2.11)$$

Bild 2.4(a) veranschaulicht die abgetreppte, starr - ideal plastische Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung. Die obigen Werte haben sich bei der Nachrechnung einer Vielzahl von Versuchen an der ETH in Zürich als zweckmässig erwiesen [Alvarez & Marti (1996), Burns (2012)].

3 PLASTISCHE MODELLIERUNG

3.1 Übersicht

Aufbauend auf den vorangegangenen Ausführungen zum Werkstoffverhalten von Beton und Stahl wird nachfolgend der Tragwiderstand von Scheiben- und Platten- resp. Schalenelementen in Stahlbeton beschrieben. Damit wird die Grundlage für die in Kapitel 4 aufgeführte Stringer-Tafelmodellvorstellung geschaffen, die eine Beschreibung des Tragverhaltens von Stahlbetonstrukturen erlaubt.

Zunächst werden die grundlegenden Zusammenhänge der Theorie des plastischen Potentials sowie der möglichen statischen und kinematischen Diskontinuitäten aufgeführt. Im Anschluss folgt eine Darstellung und Erweiterung der MOHRschen Hüllkurven zur Beschreibung des Tragverhaltens des Betons.

In Kapitel 3.6 sind die Fließbedingungen für Stahlbeton-Scheibenelemente aufgeführt. Diese gründen auf der Modellannahme, dass die Bewehrung mittels unendlich fein verteilter Einzelfasern idealisiert wird. Der Einfluss des endlichen Stababstands der Querkraftbewehrung auf den Tragwiderstand von Stahlbetonträgern wird mit Hilfe von kinematischen Diskontinuitäten aufgezeigt. Der Beweggrund der Betrachtung der endlichen Stababstände von Querkraftbewehrungen liegt in einer in Kapitel 3.8 dargestellten Durchstanzversuchsreihe.

In Kapitel 3.7 sind als Grundlage für die Stringer-Tafelmodellvorstellung verschiedene Ansätze zur Bestimmung des Tragwiderstands von Platten- resp. Schalenelementen in Stahlbeton unter kombinierter Beanspruchung festgehalten.

Die Resultate der erwähnten Durchstanzversuchsreihe werden in Kapitel 3.8 mit oberen Grenzwerten des Durchstanzwiderstands unter Einbezug der verschiedenen MOHRschen Hüllkurven (Kapitel 3.5) verglichen.

3.2 Theorie des plastischen Potentials

3.2.1 Ideal plastisches Verhalten

Einachsiger Spannungszustand

Das Verhalten des Werkstoffs Stahl unter einachsiger Beanspruchung wurde in Kapitel 2.1 kurz erläutert. Generell ist ein starr-ideal plastisches Verhalten gekennzeichnet durch plastische (irreversible) Verformungen beim Erreichen der Fließgrenze ($\sigma_s = f_{sy}$). Im elastischen Spannungsbereich ($\sigma_s < f_{sy}$) treten elastische (reversible) Verformungen auf. Für den Werkstoff Betonstahl, der als homogen und isotrop vorausgesetzt sowie einachsig beansprucht sein soll und bei dem darüber hinaus Stabilitätsprobleme ausgeschlossen werden, beschreibt das Bild 3.1(a) die Idealisierung im Spannungsraum für starr-ideal plastisches Verhalten. Erreichen die Spannungen im Betonstahl die Fließgrenze f_{sy} , treten plastische Verformungen auf, welche betragsmäßig unbestimmt bleiben, jedoch nicht abnehmen können. Es ist demnach zwar keine Aussage betreffend der totalen plastischen Dehnungen möglich, es können jedoch Aussagen über die auftretenden Dehnungsinkremente $\dot{\epsilon}_s$ gemacht werden. Wird die Fließgrenze erreicht, treten Dehnungsinkremente auf, deren Vorzeichen mit der Fließgrenze übereinstimmen und die senkrecht darauf orientiert sind. Im elastischen Spannungsbereich sind die Dehnungsinkremente identisch gleich null, und Spannungen über der Fließgrenze sind mit der starr-ideal plastischen Idealisierung nicht möglich.

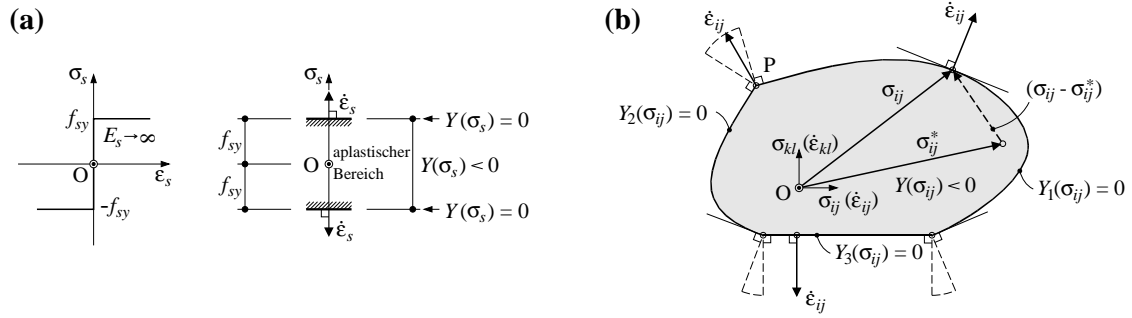


Bild 3.1 Fließfigur im Spannungsraum: (a) Fließfigur und Fließbedingung für einachsigen Betonstahl; (b) allgemeine Fließfigur mit Singularitäten.

Mathematisch ausgedrückt sind die Dehnungsinkremente $\dot{\epsilon}_s$ über die Fließfunktion

$$Y_s = \sigma_s - f_{sy} \quad (3.1)$$

definiert zu

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_s &= \kappa \frac{dY_s}{d\sigma_s} & \text{für} & \quad Y_s(\sigma_s) = 0 \\ \dot{\epsilon}_s &= 0 & \text{für} & \quad Y_s(\sigma_s) < 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

mit dem nicht negativen, skalaren Faktor κ . Die Fließgrenzen in Bild 3.1(a) grenzen, wie anschließend für allgemeine Fließfiguren gezeigt, den aplastischen Bereich ein, in dem beliebige Spannungen σ^* elastisch bleiben. Die plastischen Dehnungsinkremente werden auf dasselbe Koordinatensystem bezogen wie die Spannungen und stehen senkrecht auf den Fließgrenzen.

Räumlicher Spannungszustand

Der Spannungs- und Verzerrungszustand eines Volumenelements eines Körpers kann durch die Komponenten σ_{ij} des Spannungstensors sowie die Komponenten ϵ_{ij} des Verzerrungstensors beschrieben werden. Ausgehend von einem beliebigen Spannungszustand können andere Spannungszustände ohne plastische Verformungen, also rein elastisch, erreicht werden; der Bereich dieser Spannungszustände wird als aplastischer Bereich bezeichnet und ist in Bild 3.1(b) grau hinterlegt. Begrenzt wird dieser Bereich durch die Fließbedingung

$$Y(\sigma_{ij}) = 0 \quad (3.3)$$

Das Vorzeichen der Fließfunktion Y ist so definiert, dass im aplastischen Bereich negative Werte angenommen werden. Die auf ein Volumenelement bezogene, elementare Deformationsarbeit

$$\dot{D} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^e + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (3.4)$$

für elastisch-plastisches Verhalten, setzt sich aus der Summe der elastischen Verzerrungsenergie mit dem elastischen Verzerrungsinkrement $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ und der Dissipationsarbeit mit dem plastischen Verzerrungsinkrement $\dot{\epsilon}_{ij}$ zusammen.

Postuliert man, dass sich der tatsächliche Spannungszustand σ_{ij} bei einem vorgegebenen plastischen Verzerrungsinkrement so einstellt, dass die elementare Dissipationsarbeit $\dot{D} = \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$ maximal wird und beachtet dabei als Nebenbedingung die Fließbedingung $Y(\sigma'_{ij}) = 0$, resultiert eine Extremwertaufgabe unter Vorgabe einer Nebenbedingung. Der vom tatsächlichen Spannungszustand σ_{ij} verschiedene Spannungszustand σ'_{ij} hat die Nebenbedingung zu erfüllen und entspricht einem Punkt der Fließfläche. Durch Einführen des LAGRANGEschen Multiplikators

κ entsteht die LAGRANGE-Funktion $L = \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \kappa Y(\sigma'_{ij})$ und als notwendige Bedingung für ein Extremum resultiert die Beziehung

$$\frac{\partial [\sigma'_{kl} \cdot \dot{\epsilon}_{kl} - \kappa Y(\sigma'_{kl})]}{\partial \sigma'_{kl}} = 0 \quad (3.5)$$

Daraus ergibt sich das zugeordnete Fließgesetz zu $\dot{\epsilon}_{ij} = \kappa \partial Y(\sigma'_{kl}) / \partial \sigma'_{kl}$ das erfüllt ist, wenn σ'_{ij} dem tatsächlichen Spannungszustand σ_{ij} entspricht. Somit resultiert das zugeordnete Fließgesetz mit dem skalaren Faktor $\kappa \geq 0$ zu

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \kappa \cdot \frac{\partial Y(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.6)$$

Die Fließfläche ist somit zumindest schwach konvex (nicht konkav), und die plastischen Verzerrungssinkremente stehen orthogonal auf der Fließfläche. Das Fließgesetz (3.6) stellt den Zusammenhang zwischen dem Tensor der plastischen Verzerrungssinkremente und dem Spannungszustand her. Für starr-ideal plastisches Verhalten bestimmt (3.6) bei bekanntem Spannungszustand eindeutig die Richtung der plastischen Verzerrungssinkremente, vorausgesetzt, dass der Spannungszustand einen regulären Punkt auf der Fließgrenze beschreibt.

Setzt man im Gegensatz zu den bisherigen Betrachtungen die Konvexität der Fließfläche und die Orthogonalität der plastischen Verzerrungssinkremente zur Fließfläche als Postulat voraus, resultiert die Ungleichung

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \cdot \dot{\epsilon}_{ij} &\geq 0 \\ \sigma_{ij} \cdot \dot{\epsilon}_{ij} - \sigma_{ij}^* \cdot \dot{\epsilon}_{ij} &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Ungleichung (3.7)₁ zeigt auf, dass der Vektor $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)$ den Vektor $\dot{\epsilon}_{ij}$ unter einem Winkel schneidet, der stets kleiner oder höchstens gleich $\pi/2$ ist, Bild 3.1(b). Demnach muss die Fließfläche konvex sein und der Vektor $\dot{\epsilon}_{ij}$ der Normalen auf der Fließfläche entsprechen. Aus dem Postulat der Konvexität und Orthogonalität resultiert die Ungleichung (3.7)₂, welche dem Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit entspricht, als Folgerung. Der erste Summand in (3.7)₂ entspricht der elementaren Dissipationsarbeit

$$\dot{D} = \sigma_{ij} \cdot \dot{\epsilon}_{ij} \quad (3.8)$$

welche nicht kleiner als die durch den zweiten Summanden in (3.7)₂ beschriebene fiktive elementare Dissipationsarbeit sein kann.

Die Beziehung (3.6) gilt nur für reguläre (differenzierbare) Flächen ohne Unstetigkeitsstellen wie Spitzen oder Kanten. Für Fließflächen mit Singularitäten, wie z. B. bei der Fließfigur in Bild 3.1(b), muss das Fließgesetz verallgemeinert werden zu

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \sum_k \kappa_k \cdot \frac{\partial Y_k(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{mit} \quad Y_k = 0, \quad \kappa_k \geq 0 \quad (3.9)$$

In einer Unstetigkeitsstelle, wie z. B. Punkt P in Bild 3.1(b), soll demnach der Vektor der plastischen Verzerrungssinkremente in den Winkelraum zeigen, der durch die Normalen der anschließenden Teilstücke der Fließfigur gebildet wird. Diese Verallgemeinerung spielt im Betonbau insbesondere bei der Verwendung der quadratischen Fließbedingung (Kapitel 3.5.1) eine wichtige Rolle.

Verallgemeinerte Größen

Betrachtet man bei der Behandlung eines Tragsystems lediglich bestimmte Verformungen, beispielsweise mit der Hypothese von BERNOULLI-NAVIER für die Balkenbiegung (Kapi-

tel 4.1.2), beschränkt man sich auf Projektionen bzw. Schnitte der ursprünglichen Fliessfläche; die Verzerrungen werden auf eine bestimmte Anzahl verallgemeinerter Verformungen reduziert. Die Spannungen, die an einem verallgemeinerten Verzerrungsinkrement Arbeit leisten, können zu verallgemeinerten Spannungen zusammengefasst werden. Die Beschränkung auf bestimmte Verformungen (Projektion der Fliessfläche) geht einher mit einem „Verlust“ an Spannungskomponenten, da diese mit den vernachlässigten Verzerrungskomponenten keine Arbeit leisten. Diese Spannungskomponenten sind jedoch für das Gleichgewicht des Systems erforderlich und werden als verallgemeinerte Reaktionen bezeichnet. Bei der Balkenbiegung entsprechen beispielsweise die Querkkräfte verallgemeinerten Reaktionen. Die Theorie des plastischen Potentials behält ihre Gültigkeit auch für verallgemeinerte Spannungen und Verformungen [Ziegler (1960), Marti (1980)].

3.2.2 Traglastverfahren

Mit der Theorie des plastischen Potentials und dem Prinzip der virtuellen Arbeiten können die nachfolgenden Grenzwertsätze der Traglastverfahren mathematisch hergeleitet werden [Marti et al. (1999)].

Statischer (unterer) Grenzwertsatz der Traglastverfahren

Jede Belastung, zu der sich ein stabiler¹, statisch zulässiger Spannungszustand angeben lässt, liegt nicht höher als die Traglast.

Kinematischer (oberer) Grenzwert der Traglastverfahren

Jede Belastung, zu der sich ein instabiler², kinematisch zulässiger Verschiebungszustand angeben lässt, ist nicht tiefer als die Traglast.

Verträglichkeitssatz

Jeder Verschiebungszustand, der mit einem stabilen, statisch zulässigen Spannungszustand verträglich ist, ist instabil, und die zum Spannungszustand gehörende Belastung entspricht der Traglast.

Diskussion

Häufig kann bei der Behandlung baupraktischer Probleme die Traglast nicht angegeben resp. beziffert werden. Aus der Verwendung des statischen und des kinematischen Grenzwertsatzes der Traglastverfahren resultieren Schranken, innerhalb derer sich die Traglast befinden muss. Neben den Grenzwertsätzen und dem Verträglichkeitssatz sind die Konvexität der Fliessfläche, die Orthogonalität der Verzerrungsinkremente auf der Fliessfläche, die Behandlung von Unstetigkeitsstellen der Fliessfläche sowie die verallgemeinerten Grössen für praktische Problemstellungen wesentlich.

Die Ausführungen zur Theorie des plastischen Potentials stützen sich auf die Arbeiten von Prager (1955), Ziegler (1960), Ziegler et al. (1973). Die Arbeiten von Marti (1980) sowie Seelhof-

¹ Ein statisch zulässiger Spannungszustand wird als stabil bezeichnet, wenn er die Fliessbedingungen nirgends verletzt.

² Ein Verschiebungszustand wird als instabil bezeichnet, wenn die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte bei einem virtuellen Verschiebungszustand nicht kleiner wird als die durch diesen Verschiebungszustand eindeutig bestimmte Dissipationsarbeit.

er (2009) geben einen umfassenden Überblick und beinhalten auch die geschichtliche Entwicklung der Plastizitätstheorie.

3.3 Diskontinuitäten

3.3.1 Diskontinuität im Verschiebungsfeld

Bild 3.2 (a) zeigt eine kinematische Diskontinuitätslinie (Bruchlinie, Gleitlinie) mit der Schichtdicke d , die in t -Richtung orientiert ist und mit der x -Achse den Winkel θ_t einschliesst. Die beiden an die Diskontinuitätslinie angrenzenden Bereiche i und ii werden als starr angenommen. Der Punkt P erfahre ein Verschiebungsinkrement mit dem Vektor $\dot{\delta}$, der mit der t -Richtung den Winkel α einschliesst. Ein von den Richtungen n und t unabhängiger, konstanter Verzerrungszustand resultiert durch Annahme eines stetigen, linearen³ Verlaufs der Verschiebungsinkremente über die Schichtdicke d . Demnach betragen die Verschiebungsinkremente in den jeweiligen Koordinatenrichtungen

$$\dot{u}_n = \frac{n}{d} \cdot \dot{\delta} \sin \alpha \quad \text{und} \quad \dot{u}_t = \frac{n}{d} \cdot \dot{\delta} \cos \alpha \quad (3.10)$$

und der daraus resultierende, über die Schichtdicke d konstante Verzerrungszustand ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_n &= \frac{\partial \dot{u}_n}{\partial n} = \frac{1}{d} \cdot \dot{\delta} \sin \alpha \\ \dot{\epsilon}_t &= \frac{\partial \dot{u}_t}{\partial t} = 0 \\ \dot{\gamma}_{nt} &= \frac{\partial \dot{u}_n}{\partial t} + \frac{\partial \dot{u}_t}{\partial n} = \frac{1}{d} \cdot \dot{\delta} \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dieser Verzerrungszustand ist in Bild 3.2(b) mit den Verzerrungsbildpunkten N und T dargestellt. Der konstante Verzerrungszustand entspricht einer Zone homogener, plastischer Deformationen. Die zugehörigen Hauptverzerrungsinkremente betragen

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{\dot{\delta}}{2d} (\sin \alpha + 1) \quad \text{und} \quad \dot{\epsilon}_3 = -\frac{\dot{\delta}}{2d} (\sin \alpha - 1) \quad \text{mit} \quad \theta_3 = \theta_t - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (3.12)$$

Für $\alpha = \pi/2$ verschwindet $\dot{\epsilon}_3$, und beide Hauptverzerrungsinkremente besitzen das gleiche Vorzeichen. Ausschliesslich Schubverzerrungsinkremente $\dot{\gamma}$ treten in der Richtung der Diskontinuitätslinie (t -Richtung) und senkrecht zum Verschiebungsinkrement $\dot{\delta}$ (n -Richtung) auf. Die zugehörigen, in Bild 3.2(b) mit I und II gekennzeichneten Richtungen, werden als charakteristische Richtungen bezeichnet und entsprechen möglichen Gleit- oder Bruchlinien. Wie in Bild 3.2(b) ersichtlich, halbieren die Hauptrichtungen 1 und 3 die charakteristischen Richtungen I und II. Für den Grenzfall einer verschwindend kleinen Schichtdicke $d \rightarrow 0$ werden die Hauptverzerrungsinkremente $\dot{\epsilon}_1$ und $\dot{\epsilon}_3$ unendlich. $\dot{\epsilon}_2$ in y -Richtung bleibt dabei endlich resp. verschwindet im Vergleich zu $\dot{\epsilon}_1$ und $\dot{\epsilon}_3$. Somit entsteht für $d \rightarrow 0$ ein ebener Verzerrungszustand. Auf die Bestimmung der Dissipationsarbeit innerhalb der kinematischen Diskontinuität wird in Kapitel 3.5 eingegangen.

³ Wird beispielsweise ein parabolischer Verlauf des Verschiebungsfelds vorausgesetzt, entsteht ein in n -Richtung linear veränderlicher Verzerrungszustand, wobei dessen Mittelwerte mit (3.11) übereinstimmen.

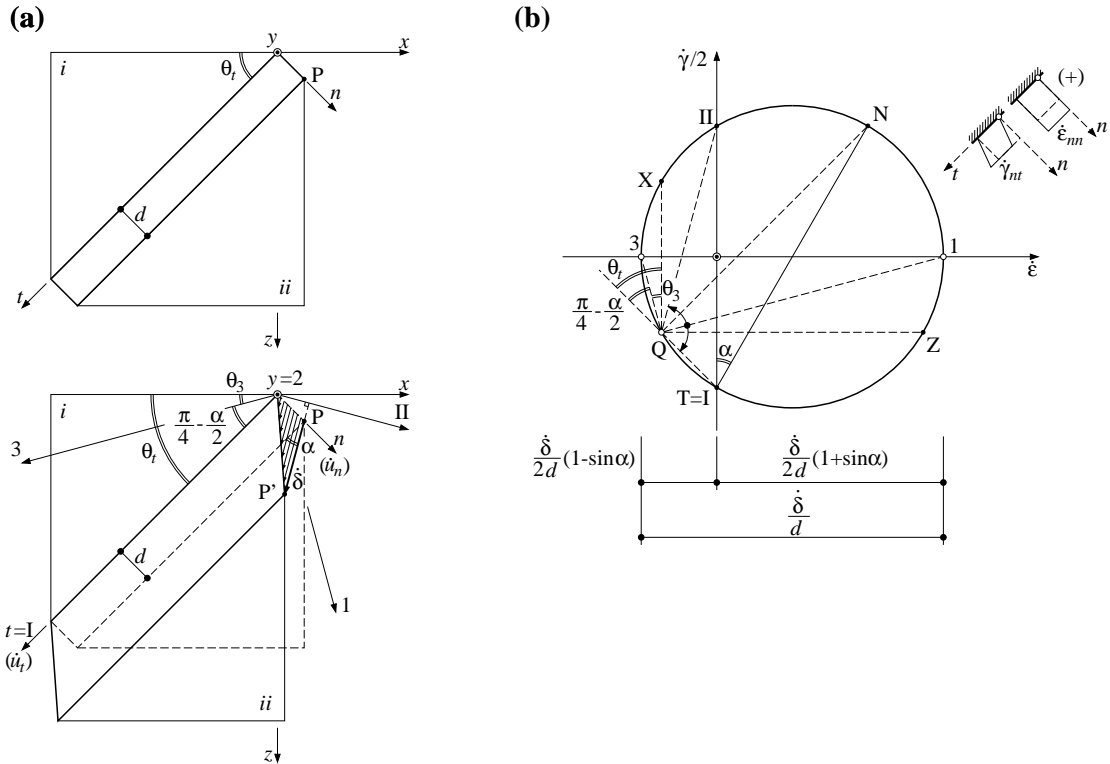


Bild 3.2 Kinematische Diskontinuität: (a) Diskontinuität im Verschiebungsfeld; (b) zugehöriger MOHRscher Kreis der Verzerrungssinkremente.

3.3.2 Diskontinuität im Spannungsfeld

In der baupraktischen Anwendung weisen Spannungsfelder häufig Unstetigkeiten auf. Zur Einhaltung des statischen Grenzwertsatzes der Traglastverfahren (Kapitel 3.2.2) müssen die diskontinuierlichen Spannungsfelder gewisse Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Bild 3.3(a) zeigt zwei Spannungsfelder i und ii , welche durch eine Diskontinuitätslinie unterteilt sind. Einzig die Normalspannungen in Richtung der Diskontinuitätslinie dürfen eine sprunghafte Änderung aufweisen, während die Schubspannungen sowie die Normalspannungen orthogonal zur Diskontinuitätslinie aus Gleichgewichtsgründen kontinuierlich verlaufen müssen, d. h.

$$\sigma_{tt}^i \neq \sigma_{tt}^{ii}, \quad \sigma_{nn}^i = \sigma_{nn}^{ii}, \quad \tau_{nt}^i = \tau_{nt}^{ii} \quad (3.13)$$

Bild 3.3(b) verdeutlicht die Spannungszustände in den angrenzenden Bereichen einer Diskontinuitätslinie anhand der MOHRschen Spannungskreise.

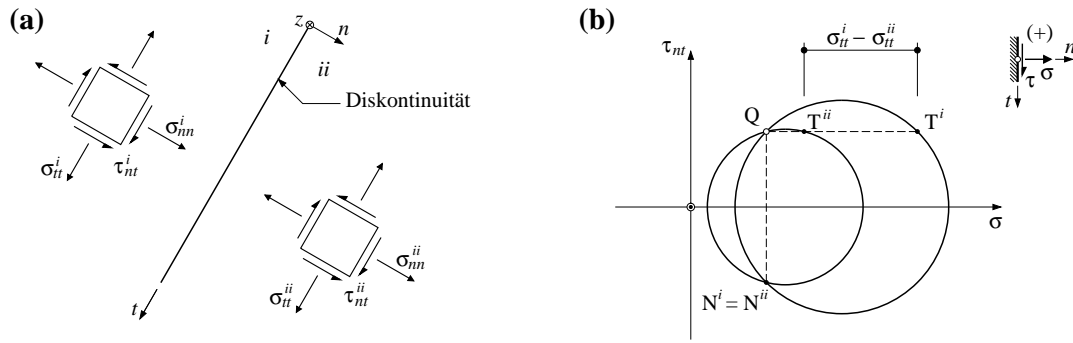


Bild 3.3 Diskontinuität im Spannungsfeld: (a) Diskontinuitätslinie; (b) zugehörige MOHRsche Kreise der Spannungen.

Weiterführende Überlegungen zum Verzerrungs- und Spannungszustand im Bereich von Diskontinuitäten sind in Marti (1980) zu finden. Statische Diskontinuitäten in Platten werden in Kapitel 4.8 verwendet.

3.4 Modifizierte Fließbedingung von COULOMB

Das Tragverhalten des Werkstoffs Beton kann mit der in der Bodenmechanik gebräuchlichen Fließbedingung von COULOMB⁴ beschrieben werden.

$$Y_I = |\tau| + \sigma \tan \varphi - c = 0 \quad (3.14)$$

Die Fließbedingung entspricht in der Spannungsebene in Bild 3.5(a) den beiden Geraden durch den Punkt E mit der Abszisse $c \cot \varphi = f_t / 2 (1 + \sqrt{1 + \cot \varphi})$ und der Steigung der Geraden $\pm \varphi$. Dabei bezeichnen c die Kohäsion des Werkstoffs und φ den Winkel der inneren Reibung. Unter einachsiger Beanspruchung resultiert für die Druck- resp. Zugfestigkeit

$$f_c = 2c \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad \text{und} \quad f_t = 2c \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (3.15)$$

Für den vorwiegend auf Druck beanspruchten Beton liefert die Fließbedingung (3.14) zuverlässige Resultate. Die Druckfestigkeit f_c und $\tan \varphi$ können aus Versuchen ermittelt werden. Der Tangens des Winkels φ kann mit 3/4 angenommen werden, Bild 3.4(b). Eingesetzt in die Fließbedingung von COULOMB ergeben sich daraus zu hohe Zugfestigkeiten f_t resp. ein unrealistisches Verhältnis zwischen der Druck- und der Zugfestigkeit von $f_c/f_t = 4$ für den Werkstoff Beton, Bild 2.3.

⁴ Nachdruck und englische Übersetzung [Heyman (1972)]

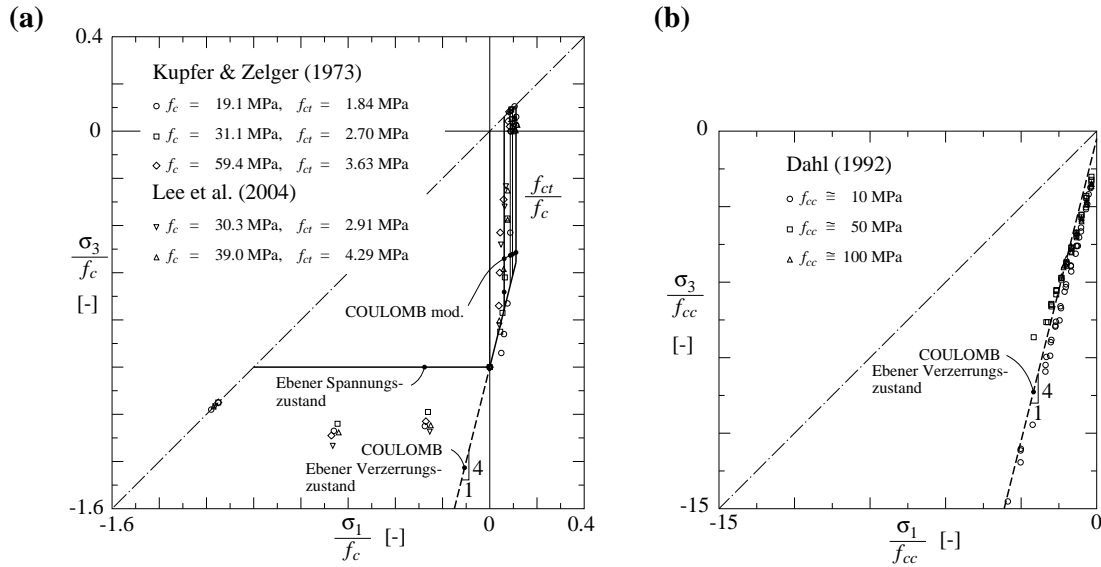


Bild 3.4 Modifizierte Fließbedingung von COULOMB: (a) und (b) zweiachsige Quaderfestigkeit und dreiachsige Zylinderdruckfestigkeit mit Vergleich der Fließbedingung von COULOMB.

Chen und Drucker (1969) schlagen deshalb eine Anpassung der Fließbedingung von COULOMB für Werkstoffe mit geringer Zugfestigkeit wie Beton oder Fels vor. Die COULOMBsche Fließbedingung wird mit der Bedingung $\sigma \leq f_{ct}$ modifiziert. Somit entsteht die in Bild 3.5(a) dargestellte modifizierte Fließbedingung von COULOMB in der Spannungsebene mit $Y_1 = 0$ gemäß (3.14) und

$$Y_2 = |\tau| - \sqrt{(\sigma - f_{ct}) \left[f_{ct} - \sigma + \left(f_{ct} - \frac{f_c}{3} \right) \frac{2}{\csc \varphi - 1} \right]} = 0 \quad (3.16)$$

$Y_2 = 0$ beschreibt den Kreisbogen BAF, wie in Bild 3.5(a) dargestellt, mit dem Radius $(f_c/3 - f_{ct}) \cdot \tan \varphi \cdot \tan(\pi/4 + \varphi/2)$, der den aplastischen Bereich der COULOMBsche Fließbedingung abschliesst. In der Hauptspannungsebene (Bild 3.5(b)) entspricht der Kreisbogen dem Punkt B mit den Koordinaten $[f_{ct}; f_{ct} + 2(f_{ct} - f_c/3)/(\csc \varphi - 1)]$ und dem an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten (hydrostatische Achse) gespiegelten Punkt F. Die Betonzugfestigkeit f_{ct} kann ebenfalls aus Versuchen ermittelt werden, Kapitel 2.2.2. Das Verhältnis zwischen der Druck- und der Zugfestigkeit von Beton f_c/f_{ct} beträgt ca. 10, Bild 2.3.

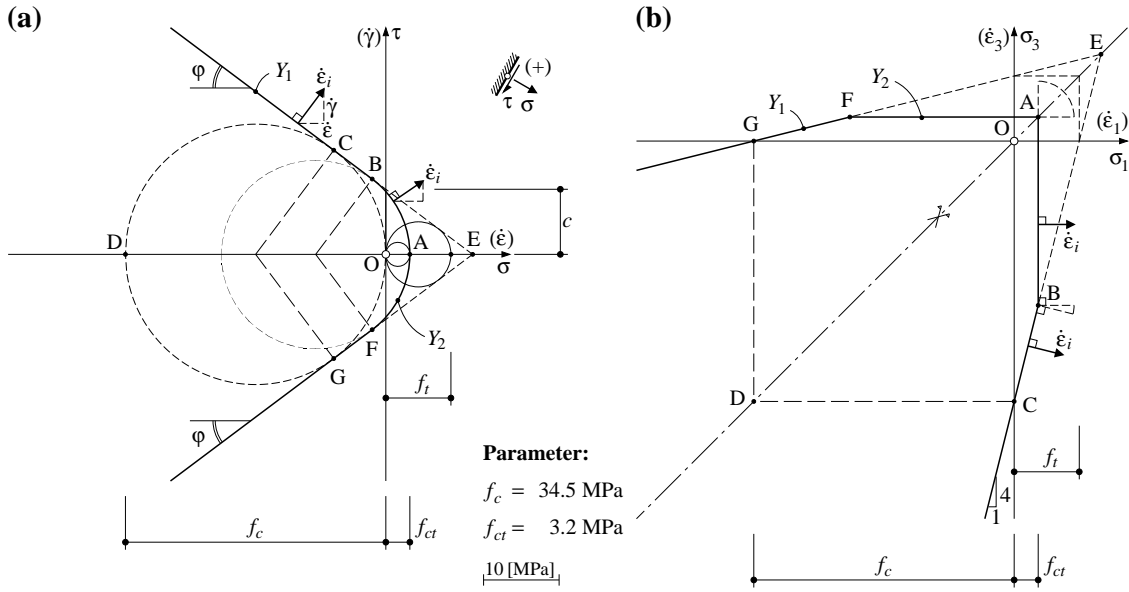


Bild 3.5 Modifizierte Fließbedingung von COULOMB: (a) Spannungsebene; (b) Hauptspannungsebene, ebener Spannungs- bzw. Verzerrungszustand.

3.4.1 Quadratische Fließbedingung

Wird die Betonzugfestigkeit vernachlässigt und ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt, entsteht mit $f_{ct} = 0$ und $\tan \varphi = 3/4$ in (3.16) die quadratische Fließbedingung in der Spannungsebene

$$Y_3 = |\tau| - \sqrt{\sigma(\sigma + f_c)} = 0 \quad (3.17)$$

die in Bild 3.6(a) als Kreis mit dem Radius $f_c/2$ erscheint. Die Punkte C und B resp. F und G in Bild 3.5(a) fallen zusammen. Die Fließbedingung kann auch mit der Bedingung $-f_c \leq \sigma \leq 0$ beschrieben werden. In der Hauptspannungsebene (Bild 3.6(b)) erscheint der aplastische Bereich als Quadrat OCDG mit den Seitenlängen f_c . Daraus können direkt die Fließbedingungen für die Hauptspannungskomponenten σ_1 und σ_3 abgelesen werden

$$Y_c = \sigma_1 = 0 \quad \text{und} \quad Y'_c = -f_c - \sigma_3 = 0 \quad (3.18)$$

Schliesslich kann die quadratische Fließbedingung in den orthogonalen Spannungskomponenten σ_{xx} , σ_{yy} , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ formuliert werden, indem (3.18) in die Beziehung für die Spannungstransformation (3.49) eingesetzt wird:

$$\begin{aligned} Y_c &= \tau_{xy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} = 0 & \text{wobei} \quad \sigma_{xx} \leq 0 & \quad \text{und} \quad \sigma_{yy} \leq 0 \\ Y'_c &= \tau_{xy}^2 - (f_c + \sigma_{xx})(f_c + \sigma_{yy}) = 0 & \text{wobei} \quad (f_c + \sigma_{xx}) \leq 0 & \quad \text{und} \quad (f_c + \sigma_{yy}) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Die Fließbedingungen Y_c und Y'_c beschreiben im orthogonalen Spannungsraum in Bild 3.6(c) zwei elliptische Kegelflächen mit den Spitzen in den Punkten A(0, 0) sowie D($-f_c$, $-f_c$) und mit der maximalen Schubspannung τ_{xy} von $f_c/2$.

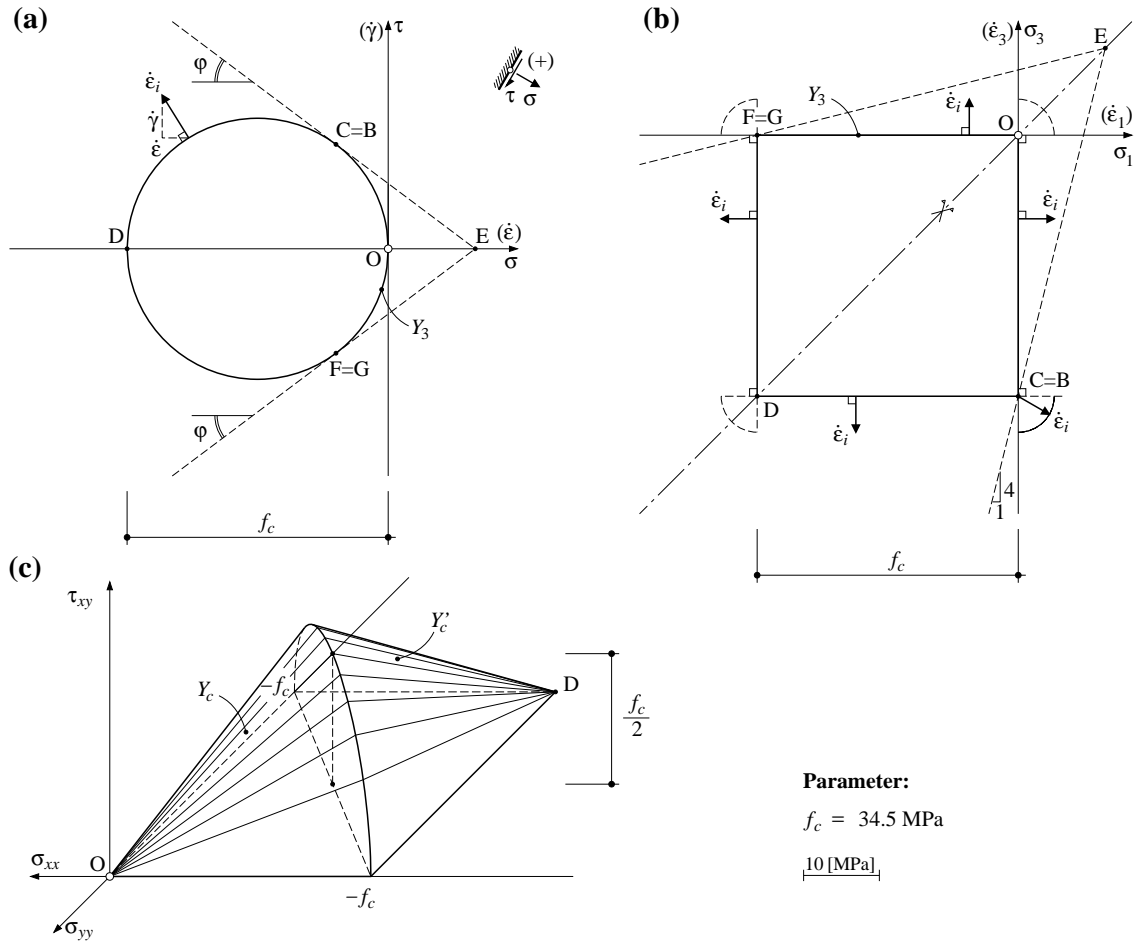


Bild 3.6 Quadratische Fließbedingung für den Werkstoff Beton: (a) Spannungsebene; (b) Hauptspannungsebene, ebener Spannungs- bzw. Verzerrungszustand; (c) orthogonaler Spannungsraum.

3.5 MOHRsche Hüllkurven

Die Fließbedingung von COULOMB lässt sich nach MOHR wie folgt verallgemeinern

$$Y = |\tau| - f(\sigma) = 0 \quad (3.20)$$

(3.20) stellt im Spannungsraum eine Hüllkurve (Envelope) dar [Torre (1951)]. Für die Hüllkurve postulierte Mohr (1906) die Bedingungen, dass sie die positive Normalspannungsachse schneidet. Im Weiteren soll die Hüllkurve ihre konkave Seite der Normalspannungsachse zukehren und sich die Tangentenrichtung der Hüllkurve mit wachsender negativer Abszisse der Normalspannungsachse nähern und somit in eine Fließbedingung nach TRESCA übergehen. Für die betrachteten Werkstoffe ist somit die Druckfestigkeit grösser als deren Zugfestigkeit ($-f_c \geq f_{ct}$). Für die Funktion $f(\sigma)$ in (3.20) ergeben sich daraus folgende Bedingungen

$$\begin{aligned}
f(\sigma) &\neq 0 && \text{für} && \sigma < 0 \\
\frac{d}{d\sigma} f(\sigma) &\leq 0 \\
\frac{d^2}{d\sigma^2} f(\sigma) &\leq 0 \\
A &= \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} f(\sigma) \quad \text{wobei} \quad A \neq 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Bild 3.7(a) zeigt eine allgemeine MOHRsche Hüllkurve in der Spannungsebene. Jedem Spannungspunkt auf der Hüllkurve lassen sich COULOMBsche Fließbedingungen mit einem fiktiven Winkel der inneren Reibung α und einer fiktiven Kohäsion c_α (Strecke vom Ursprung O bis zum Schnittpunkt der Gerade BD mit der Ordinatenachse) zuordnen. Dem Punkt B auf der Hüllkurve entspricht der in Bild 3.7(a) dargestellte MOHRsche Spannungskreis mit den Hauptspannungen σ_1 und σ_3 . Im Hauptspannungsraum kann die Fließbedingung mit α und c_α mit der Beziehung

$$Y = \sigma_1(1 + \sin \alpha) - \sigma_3(1 - \sin \alpha) - 2 \cdot c_\alpha \cos \alpha = 0 \tag{3.22}$$

ausgedrückt werden. Die mittlere Hauptspannung σ_2 hat keinen Einfluss auf das Fließen ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$). Mit dem zugeordneten Fließgesetz (3.9) folgen für die Hauptverzerrungsinkremente

$$\dot{\epsilon}_1 = \kappa(1 + \sin \alpha), \quad \dot{\epsilon}_3 = -\kappa(1 - \sin \alpha) \tag{3.23}$$

und für die elementare Dissipationsarbeit entsteht mit (3.8) die Beziehung

$$\dot{D} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \kappa [\sigma_1(1 + \sin \alpha) - \sigma_3(1 - \sin \alpha)] \tag{3.24}$$

Die formale Übereinstimmung der Hauptverzerrungsinkremente, herrührend aus der Betrachtung einer kinematischen Diskontinuität (3.12), mit denjenigen der MOHRschen Hüllkurve (3.23) ist evident, bis auf den Faktor κ mit

$$\kappa = \frac{\dot{\delta}}{2d} \tag{3.25}$$

Somit kann die elementare Dissipationsarbeit für die in Kapitel 3.3.1 dargestellte, kinematische Diskontinuität bestimmt werden zu

$$\dot{D} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\dot{\delta}}{2d} [\sigma_1(1 + \sin \alpha) - \sigma_3(1 - \sin \alpha)] \tag{3.26}$$

Die auf die Einheitsfläche bezogene, spezifische Dissipationsarbeit ergibt

$$\dot{D} \cdot d = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \cdot d = \frac{\dot{\delta}}{2} [\sigma_1(1 + \sin \alpha) - \sigma_3(1 - \sin \alpha)] \tag{3.27}$$

und unter Berücksichtigung der Beziehung (3.22) resultiert

$$\dot{D} \cdot d = \dot{\delta} \cdot c_\alpha \cos \alpha \tag{3.28}$$

Der Ausdruck $c_\alpha \cos \alpha$ in der Beziehung (3.28) entspricht geometrisch dem Abstand der Geraden DB vom Ursprung O in Bild 3.7(a). Die spezifische Dissipationsarbeit innerhalb einer Diskontinuitätsfläche lässt sich somit geometrisch aus der MOHRschen Hüllkurve im Spannungsraum ablesen [Marti (1980)].

Aufbauend auf den experimentell bestimmbaren Werkstoffkennwerten des Betons f_c , f_{ct} und ϕ sollen nachfolgend mögliche MOHRsche Hüllkurven aufgezeigt und diskutiert werden.

3.5.1 Quadratische Fließbedingung

Die quadratische Fließbedingung für den Werkstoff Beton im ebenen Spannungszustand unter Vernachlässigung der Zugfestigkeit f_{ct} ist in Kapitel 3.4.1 erläutert. Durch Einsetzen der Fließbedingung (3.18) in (3.27) entsteht für die spezifische Dissipationsarbeit der Ausdruck

$$\dot{D} \cdot d = \dot{\delta} \cdot \frac{f_c}{2} (1 - \sin \alpha) \quad (3.29)$$

wobei dieser wiederum direkt dem Bild 3.7(b) entnommen werden kann.

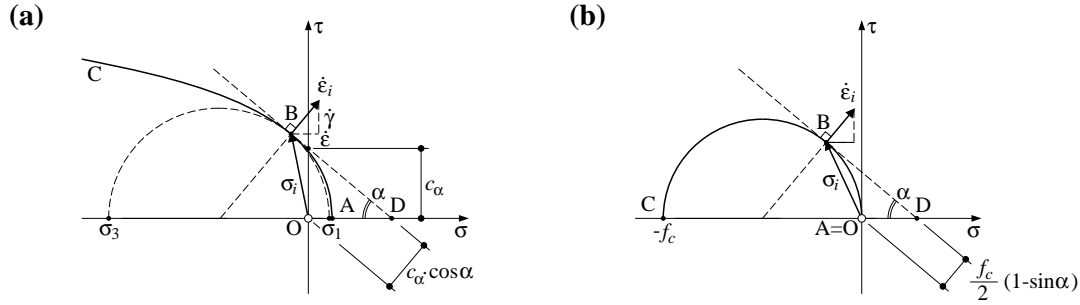


Bild 3.7 MOHRsche Hüllkurven in der Spannungsebene: (a) Allgemeine Darstellung; (b) quadratische Fließbedingung des Betons (ebener Spannungszustand).

Offensichtlich wird für den Winkel $\alpha = \pi/2$ in Bild 3.7(b) keine Dissipationsarbeit geleistet. Man spricht in diesem Fall auch von einem Kollapsriss (Kapitel 3.6.5). Für den Winkel α sind Werte zwischen $-\pi/2$ bis $\pi/2$ möglich. Die quadratische Fließbedingung erfüllt nicht sämtliche Bedingungen für die MOHRschen Hüllkurven (3.21). Diese Missachtung ist jedoch nicht von Bedeutung, da die quadratische Fließbedingung das Verhalten des Betons im ebenen Spannungszustand und nicht im ebenen Verzerrungszustand beschreibt. Der einfachen Beziehung (3.29) kommt bei der Behandlung von Stahlbetonscheiben (Kapitel 3.6) eine wichtige Rolle zu.

3.5.2 Parabolische Hüllkurve

Die einfachste Hüllkurve zur Erfüllung von f in (3.20) ist die quadratische Parabel. Mit den Bedingungen, dass der Scheitelpunkt der Parabel in der Spannungsebene mit der einachsialen Zugfestigkeit f_{ct} übereinstimmt und die Parabel den Spannungskreis mit der einachsialen Druckfestigkeit $-f_c$ umhüllt, resultiert die Fließbedingung

$$Y = |\tau| - \left(\sqrt{1 + \frac{f_c}{f_{ct}}} - 1 \right) \sqrt{f_{ct}(f_{ct} - \sigma)} = 0 \quad (3.30)$$

Die Koordinaten der Berührungspunkte B und B' in der Spannungsebene ergeben sich zu $[f_{ct}(1-k); \pm f_{ct}k^2(k-1)]$ mit $k = \sqrt{1 + f_c/f_{ct}}$. Bild 3.8(a) zeigt die parabolische Hüllkurve zusammen mit den Kreisen der einachsialen Druck- resp. Zugfestigkeit. Die Parabel umhüllt den Spannungskreis mit der einachsialen Zugfestigkeit f_{ct} unter der Bedingung $f_c/f_{ct} \geq 3$, die für den Werkstoff Beton üblicherweise erfüllt ist.

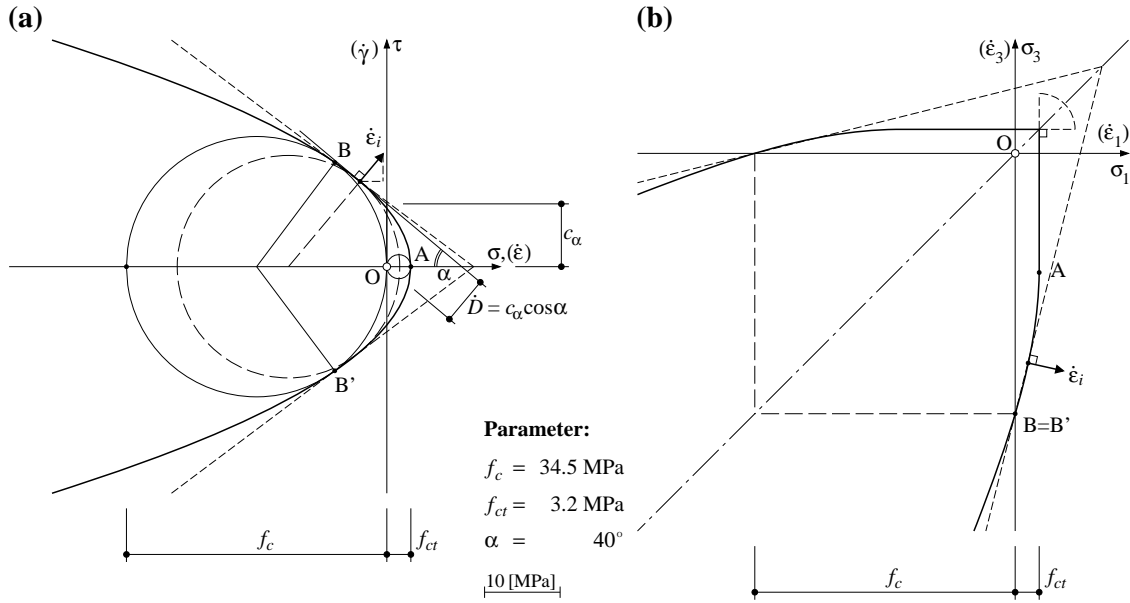


Bild 3.8 Parabolische Hüllkurve: (a) Spannungsebene; (b) ebener Spannungs- bzw. Verzerrungszustand.

Die Schnittpunkte in der Spannungsebene von Geraden mit der Steigung $\tan \alpha = d\tau / d\sigma$ in (3.30) mit der Normalspannungsachse σ entsprechen den Mittelpunkten der Hauptspannungskreise der parabolischen Hüllkurve. Die Hauptspannungen σ_1 und σ_3 sind in Bild 3.8(b) dargestellt und betragen in Abhängigkeit des Winkels α

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= f_{ct} \left[1 - \frac{(\sin \alpha - 1)^2}{4 \sin^2 \alpha} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{f_c}{f_{ct}}} - 1 \right)^2 \right] \\ \sigma_3 &= f_{ct} \left[1 - \frac{(\sin \alpha + 1)^2}{4 \sin^2 \alpha} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{f_c}{f_{ct}}} - 1 \right)^2 \right]\end{aligned}\quad (3.31)$$

Die Koordinaten des Punktes A in der Ebene der Hauptspannungen können aus (3.31) mit $\alpha = \pi/2$ bestimmt werden zu $[f_{ct}; f_{ct} k(2 - k)]$. Einsetzen von (3.31) in (3.26) liefert die zugehörige spezifische Dissipationsarbeit

$$\dot{D} \cdot d = \dot{\delta} \cdot f_{ct} \sin \alpha \left[1 + \frac{1}{4 \tan^2 \alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{f_c}{f_{ct}}} - 1 \right)^2 \right] \quad (3.32)$$

Der Winkel α in (3.32) ist definiert im Intervall $0 < \alpha < \pi$; wegen $\tau = \pm \infty$ für $\sigma \rightarrow -\infty$, ist die spezifische Dissipationsarbeit für $\alpha = 0$ resp. π nicht definiert.

3.5.3 Hyperbolische Hüllkurve

Zur Erfüllung von f in (3.20) wird die Hyperbel verwendet. In Form einer Fließfunktion und unter der Voraussetzung, dass der Scheitelpunkt der Hyperbel in der Spannungsebene mit der einachsialen Zugfestigkeit f_{ct} übereinstimmt und die Steigung der Asymptoten der Hyperbel dem Tangens des Winkels der inneren Reibung ϕ für den betrachteten Werkstoff entspricht, resultiert

$$Y = |\tau| - \tan \phi \sqrt{(\sigma - C_1)^2 - (C_1 - f_{ct})^2} = 0 \quad (3.33)$$

Für den Werkstoff Beton wird üblicherweise $\tan\varphi = 3/4$ angenommen. Darüber hinaus wird vorausgesetzt, dass die Hyperbel den Spannungskreis mit der einachsialen Druckfestigkeit $-f_c$ umhüllt. Daraus resultieren die Berührungspunkte B und B' in Bild 3.9(a) mit der Normalspannung

$$\sigma_B = f_{ct} \left(1 - \sqrt{\frac{1 + \frac{f_c}{f_{ct}}}{1 + \tan^2\varphi}} \right) \quad (3.34)$$

Aus (3.34) entsteht für C_1 in (3.33) der Ausdruck

$$C_1 = \frac{f_{ct}}{\tan^2\varphi} \left[(\tan^2\varphi + 1) \left(1 - \sqrt{\frac{1 + \frac{f_c}{f_{ct}}}{\tan^2\varphi + 1}} \right) + \frac{f_c}{2f_{ct}} \right] \quad (3.35)$$

Die Konstante C_1 ist abhängig von den beiden Werkstofffestigkeiten f_c und f_{ct} und dem Winkel der inneren Reibung φ . Die Hyperbel umhüllt den Spannungskreis mit der einachsialen Zugfestigkeit f_{ct} unter der Bedingung dass $f_c/f_{ct} \geq (3 + 4 \cdot \tan^2\varphi)$, welche für den Werkstoff Beton üblicherweise erfüllt ist.

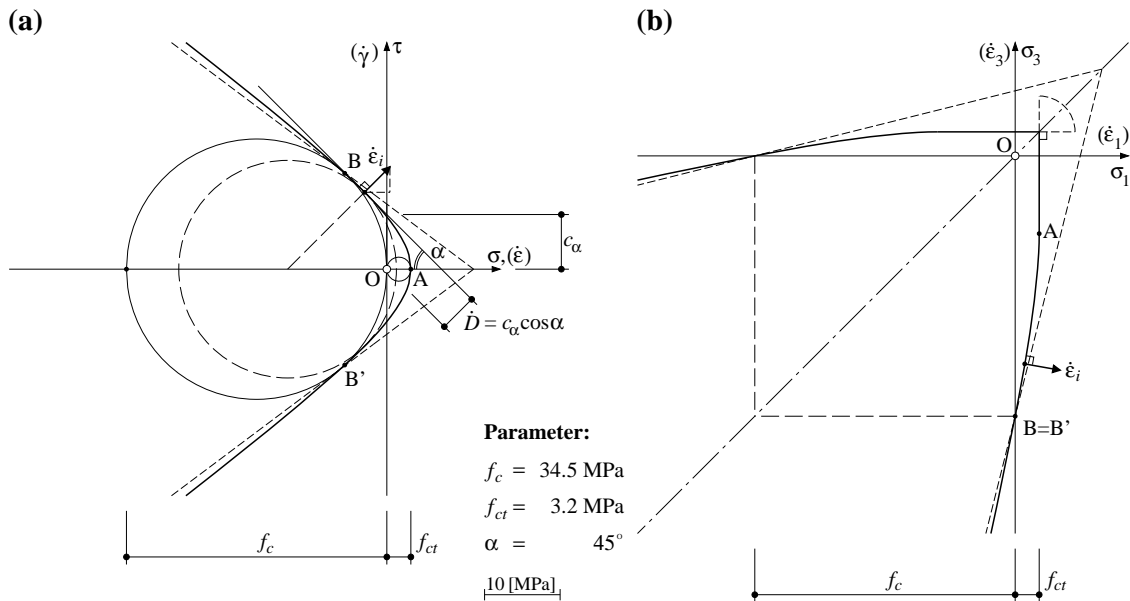


Bild 3.9 Hyperbolische Hüllkurve: (a) Spannungsebene; (b) ebener Spannungs- bzw. Verzerrungszustand.

Die Schnittpunkte in der Spannungsebene von Geraden mit der Steigung $\tan\alpha = d\tau/d\sigma$ in (3.33) mit der Normalspannungsachse σ entsprechen den Mittelpunkten der Hauptspannungskreise der hyperbolischen Hüllkurve. Die Hauptspannungen σ_1 und σ_3 sind in Bild 3.9(b) dargestellt und betragen in Abhängigkeit des Winkels α

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= C_1 - (C_1 - f_{ct}) \frac{\tan\alpha}{\sqrt{\tan^2\alpha - \tan^2\varphi}} \left(1 + \tan^2\varphi - \frac{\tan^2\varphi}{\sin\alpha} \right) \\ \sigma_3 &= C_1 - (C_1 - f_{ct}) \frac{\tan\alpha}{\sqrt{\tan^2\alpha - \tan^2\varphi}} \left(1 + \tan^2\varphi + \frac{\tan^2\varphi}{\sin\alpha} \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Die Koordinaten des Punkts A in der Ebene der Hauptspannungen können aus (3.36) mit $\alpha = \pi/2$ bestimmt werden (f_{ct} ; $C_1 - (C_1 - f_{ct})(1 + 2 \cdot \tan^2 \varphi)$). Für $\alpha \rightarrow \pi/2$ beträgt der Grenzwert des mittleren Quotienten in (3.36) eins.

Einsetzen von (3.36) in (3.24) liefert die spezifische Dissipationsarbeit

$$\dot{D} \cdot d = \dot{\delta} \cdot \cos \alpha \left[C_1 \tan \alpha - (C_1 - f_{ct}) \sqrt{\tan^2 \alpha - \tan^2 \varphi} \right] \quad (3.37)$$

Der Winkel α in (3.37) ist definiert im Intervall $\varphi \leq \alpha \leq (2\pi - \varphi)$. Dabei entsprechen die Intervallgrenzen den Steigungen der Asymptoten der Hyperbel.

3.5.4 Kettenlinienförmige Hüllkurve

Zur Erfüllung von f in (3.20) wird der Hyperbelkosinus, der die Kettenlinie beschreibt, verwendet. In Form einer Fliessfunktion und unter der Voraussetzung, dass der Scheitelpunkt der hyperbolischen Funktion in der Spannungsebene der Zugfestigkeit f_{ct} entspricht, resultiert

$$Y = \cosh \left(\frac{\tau}{C_2} \right) - \left(2 - \frac{\sigma}{f_{ct}} \right) = 0 \quad (3.38)$$

Darüber hinaus wird vorausgesetzt, dass die hyperbolische Funktion den Spannungskreis mit der einachsialen Druckfestigkeit $-f_c$ umhüllt. Daraus resultieren die Berührungspunkte B und B' in Bild 3.10(a) mit der Normalspannung σ_B , welche aufgrund der Transzendenz von (3.38) numerisch bestimmt werden muss.

$$\operatorname{arccosh} \left(2 - \frac{\sigma_B}{f_{ct}} \right) = - \frac{2\sigma_B(f_c + \sigma_B)}{2\sigma_B + f_c} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\sigma_B - 2f_{ct})^2 - f_{ct}^2}} \quad (3.39)$$

Aus (3.39) resultiert für C_2 in (3.38)

$$C_2 = \frac{\sqrt{-\sigma_B(f_c + \sigma_B)}}{\operatorname{arccosh} \left(2 - \frac{\sigma_B}{f_{ct}} \right)} \quad (3.40)$$

Die Konstante C_2 ist abhängig von den beiden Werkstofffestigkeiten f_c und f_{ct} . Werden die transzendenten Funktionen zur Bestimmung von C_2 durch TAYLOR-Polynome ersetzt, entsteht folgende analytische Näherung

$$C_2 \cong f_{ct} \sqrt{1 + \frac{f_c}{2f_{ct}}} - \sqrt{1 + \frac{f_c}{f_{ct}}} \quad (3.41)$$

Dabei werden die TAYLOR-Polynome nach dem ersten, nicht konstanten Glied abgebrochen. Wird C_2 mit (3.41) in die Fliessfunktion (3.38) eingesetzt, resultiert die in Bild 3.10 dargestellte gestrichelte Fliessfigur, welche zwar keine Umhüllende des Kreises mit der Druckfestigkeit $-f_c$ bildet, jedoch innerhalb der hyperbolischen Fliessfunktion mit C_2 nach (3.40) verläuft. Die mit (3.41) ermittelte Näherung der Konstanten C_2 bildet zudem einen guten Startwert für die numerische Iteration von (3.40) und (3.39). Die hyperbolische Funktion umhüllt den Spannungskreis mit der einachsialen Zugfestigkeit f_{ct} unter der Bedingung, dass $C_2/f_{ct} \geq 1/\sqrt{2}$. Mit der Näherung für C_2 resultiert die gleiche Bedingung für das Verhältnis zwischen Druck- und Zugfestigkeit wie bei der parabolischen Hüllkurve ($f_c/f_{ct} \geq 3$); diese Bedingung ist für den Werkstoff Beton üblicherweise erfüllt.

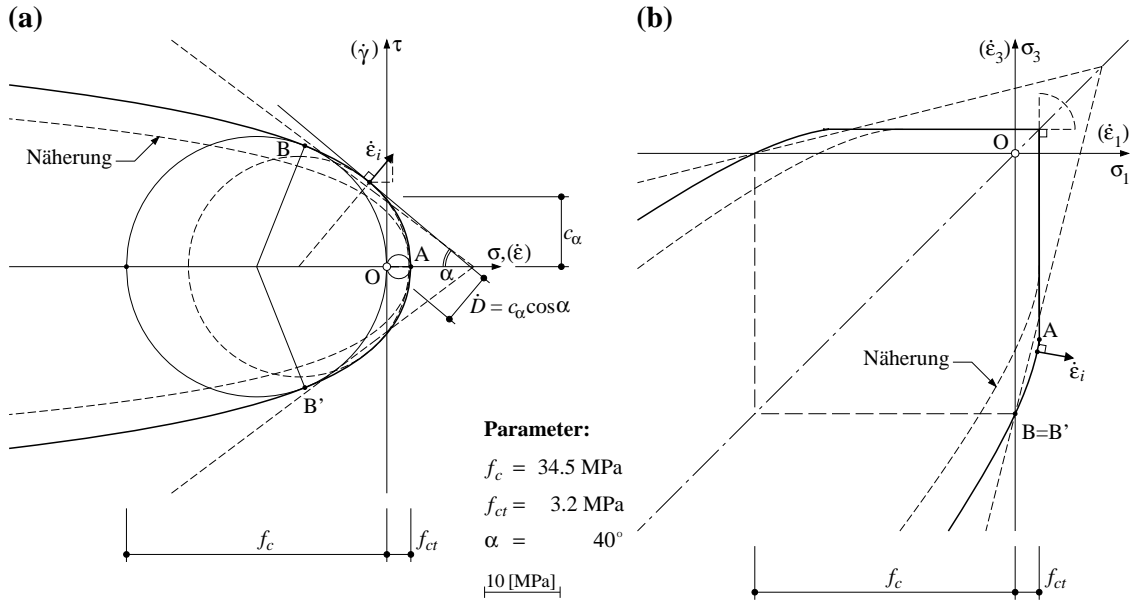


Bild 3.10 Kettenlinienförmige Hüllkurve: (a) Spannungsebene; (b) ebener Spannungs- bzw. Verzerrungszustand.

Die Schnittpunkte in der Spannungsebene von Geraden mit der Steigung $\tan \alpha = d\tau / d\sigma$ in (3.38) mit der Normalspannungsachse σ entsprechen den Mittelpunkten der Hauptspannungskreise der hyperbolischen MOHRschen Hüllkurve. Die Hauptspannungen σ_1 und σ_3 sind in Bild 3.10(b) dargestellt und betragen in Abhängigkeit des Winkels α

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= f_{ct} \left[2 - \sqrt{\left(\frac{C_2}{f_{ct} \tan \alpha} \right)^2 + 1} \right] + \left(\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) C_2 \cosh^{-1} \left[\sqrt{\left(\frac{C_2}{f_{ct} \tan \alpha} \right)^2 + 1} \right] \\ \sigma_3 &= f_{ct} \left[2 - \sqrt{\left(\frac{C_2}{f_{ct} \tan \alpha} \right)^2 + 1} \right] - \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) C_2 \cosh^{-1} \left[\sqrt{\left(\frac{C_2}{f_{ct} \tan \alpha} \right)^2 + 1} \right]\end{aligned}\quad (3.42)$$

Die Koordinaten des Punktes A in der Ebene der Hauptspannungen können aus (3.42) mit $\alpha \rightarrow \pi/2$ bestimmt werden ($f_{ct}, f_{ct} - 2C_2^2/f_{ct}$).

Einsetzen von (3.42) in (3.24) liefert die zugehörige spezifische Dissipationsarbeit

$$\dot{D} \cdot d = \dot{\delta} \cdot f_{ct} \sin \alpha \left[2 - \sqrt{\left(\frac{C_2}{f_{ct} \tan \alpha} \right)^2 + 1} \right] + C_2 \cos \alpha \cdot \cosh^{-1} \left[\sqrt{\left(\frac{C_2}{f_{ct} \tan \alpha} \right)^2 + 1} \right] \quad (3.43)$$

Der Winkel α in (3.43) ist definiert im Intervall $0 < \alpha < \pi$; wegen $\tau = \pm \infty$ für $\sigma \rightarrow -\infty$, ist die spezifische Dissipationsarbeit für $\alpha = 0$ resp. π nicht definiert.

Obwohl die Fliessbedingung mit dem Hyperbelkosinus (3.38) die ersten drei Bedingungen (3.21) nach MOHR erfüllt, überschreitet die grössere Hauptspannung σ_1 aus (3.42)₁ die Zugfestigkeit f_{ct} insbesondere für kleiner werdende Zugfestigkeiten. Die vierte Bedingung nach MOHR in (3.21) wird mit der Fliessbedingung (3.38) nicht eingehalten, ist aber bei der Betrachtung ebener Spannungszustände des Betons, analog der quadratischen Fliessbedingung in Kapitel 3.5.1, nicht von Belang. Bild 3.11 zeigt beispielhaft die Überschreitung der Zugfestigkeit durch die grössere Hauptspannung für die angegebenen Parameter.

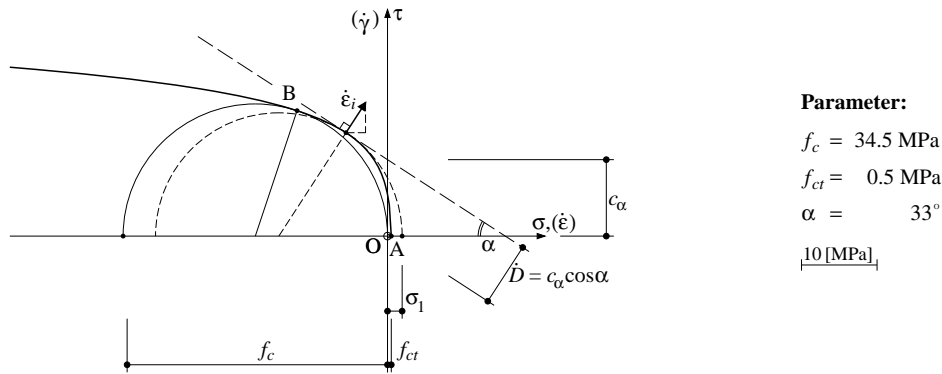


Bild 3.11 Kettenlinienförmige Hüllkurve in der Spannungsebene bei geringer Zugfestigkeit.

Der Grund für dieses Verhalten ist in der TAYLOR-Reihenentwicklung des hyperbolischen Kosinus zu finden. Die Fliessbedingung in (3.38) lässt sich mit der TAYLOR-Reihe wie folgt umschreiben:

$$Y = \left(1 + \frac{\tau^2}{2! \cdot C_2^2} + \frac{\tau^4}{4! \cdot C_2^4} + \dots \right) - \left(2 - \frac{\sigma}{f_{ct}} \right) = 0 \quad (3.44)$$

Werden die ersten beiden Glieder der TAYLOR-Reihenentwicklung in (3.44) berücksichtigt, resultiert daraus die in Kapitel 3.5.2 angegebene parabolische Hüllkurve, mit der von den Werkstoffkennwerten abhängigen Konstanten $C_2 = 1/\sqrt{2} \cdot f_{ct} (k-1)$ mit $k = \sqrt{1 + f_c/f_{ct}}$. Werden hingegen die ersten drei Glieder der TAYLOR-Reihenentwicklung in (3.44) berücksichtigt, überschreitet die grössere Hauptspannung σ_1 die Zugfestigkeit f_{ct} , analog Bild 3.11. Der strichliert dargestellte Hauptspannungskreis in Bild 3.11 ist analog der Beziehung (3.17) ein Polynom zweiten Grades. Die Glieder der TAYLOR-Reihe in (3.44) mit Grad höher als zwei bewirken eine Überschreitung der Zugfestigkeit durch den Hauptspannungskreis. Der Einfluss der Glieder höherer Ordnung nimmt zu, wenn f_{ct} in (3.44) abnimmt.

Die Bedingungen nach MOHR in (3.21) für die Hüllkurven müssen demnach erweitert werden. Für Funktionen, deren TAYLOR-Reihen ausschliesslich aus Gliedern mit geraden Exponenten bestehen, dürfen lediglich diejenigen Glieder berücksichtigt werden, die kleiner oder gleich Grad zwei sind. Dies gilt auch für Polynome höherer Ordnung mit geraden Exponenten. Demnach stellt die parabolische Hüllkurve in Kapitel 3.5.2 die einzig mögliche MOHRsche Hüllkurve in Form einer Polynomfunktion mit geraden Exponenten dar.

In Kapitel 3.8 werden auf der Basis der in diesem Kapitel aufgezeigten MOHRschen Hüllkurven obere Grenzwerte für den Durchstanzwiderstand hergeleitet. Damit eine Übereinstimmung der oberen Grenzwerte mit entsprechenden Versuchsergebnissen erreicht werden kann, werden die Werkstoffkennwerte angepasst und somit sehr geringe Zugfestigkeiten f_{ct} in Rechnung gestellt. Der Effekt mit der Überschreitung der grösseren Hauptspannung bei der kettenlinienförmigen Hüllkurve ist besonders ausgeprägt; die Fliessbedingung (3.38) wird aus diesem Grund nicht weiter beachtet.

3.6 Fließbedingungen für Stahlbeton-Scheibenelemente

3.6.1 Statische und kinematische Beziehungen von Scheibenelementen

Gleichgewichtsbedingungen

Am differentiellen Scheibenelement in Bild 3.12(b) greifen Normalspannungen σ_{xx} und σ_{yy} , Schubspannungen τ_{xy} resp. τ_{yx} sowie Volumenkräfte f_x und f_y an. Dabei steht der erste der doppelten Indizes bei den Spannungen für die Richtung, in welcher die Spannung wirkt, und der zweite Index bezeichnet die Normalenrichtung des Flächenelements, an welchem die Spannung angreift. Kräftegleichgewicht in den Koordinatenrichtungen x und y führt zu den Beziehungen

$$\begin{aligned}\sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} + f_x &= 0 \\ \tau_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + f_y &= 0\end{aligned}\quad (3.45)$$

und das Momentengleichgewicht führt auf den Satz der zugeordneten Schubspannungen mit

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.46)$$

Die Beziehungen (3.45) unter Berücksichtigung von (3.46) stellen ein System partieller Differentialgleichungen für die Funktionen σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} mit f_x , f_y dar. Zusammenfassen von (3.45) ergibt die Gleichgewichtsbeziehung

$$\sigma_{xx,xx} + 2 \cdot \tau_{xy,xy} + \sigma_{yy,yy} + f_{x,x} + f_{y,y} = 0 \quad (3.47)$$

für Scheibenelemente. Dabei stehen die Indizes nach einem Komma ($_{x,y}$) für die partiellen Ableitungen nach den entsprechenden Variablen resp. Koordinatenrichtungen.

Spannungstransformation

Mit der Formulierung des Gleichwichts an den Scheibenelementen in Bild 3.12(d) können die Spannungen σ_{nn} , σ_{tt} und $\tau_{nt} = \tau_{tn}$ in beliebigen, um die z -Achse mit dem Winkel φ gedrehten Schnitten, deren äusseren Normalenrichtungen n und t entsprechen, aus den Spannungen σ_{xx} , σ_{yy} , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ bestimmt werden:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \tau_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -2 \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

Diese Transformation kann auch graphisch anhand eines MOHRschen Kreises erfolgen, Bild 3.12(c). Die Spannungsbildpunkte X und Y werden dabei im Spannungsraum um den Winkel 2φ gedreht, woraus die Spannungsbildpunkte N und T direkt abgelesen werden können. Im Weiteren sind die Spannungsbildpunkte 1 und 3 mit verschwindender Schubspannung, bei welchen die Normalspannungen maximal werden, aus dem MOHRschen Kreis direkt einsehbar. Sie entsprechen den Hauptspannungen σ_1 und σ_3 . Diese betragen:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}}{2}, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}}{2} \quad (3.49)$$

wobei definitionsgemäss $\sigma_1 > \sigma_3$ gelten soll. Der zugehörige Winkel φ_1 zur grösseren Hauptspannung σ_1 beträgt dabei

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right) \quad \text{wobei}$$

$$0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2} \quad (\tau_{xy} > 0) \quad (3.50)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < 0 \quad (\tau_{xy} < 0)$$

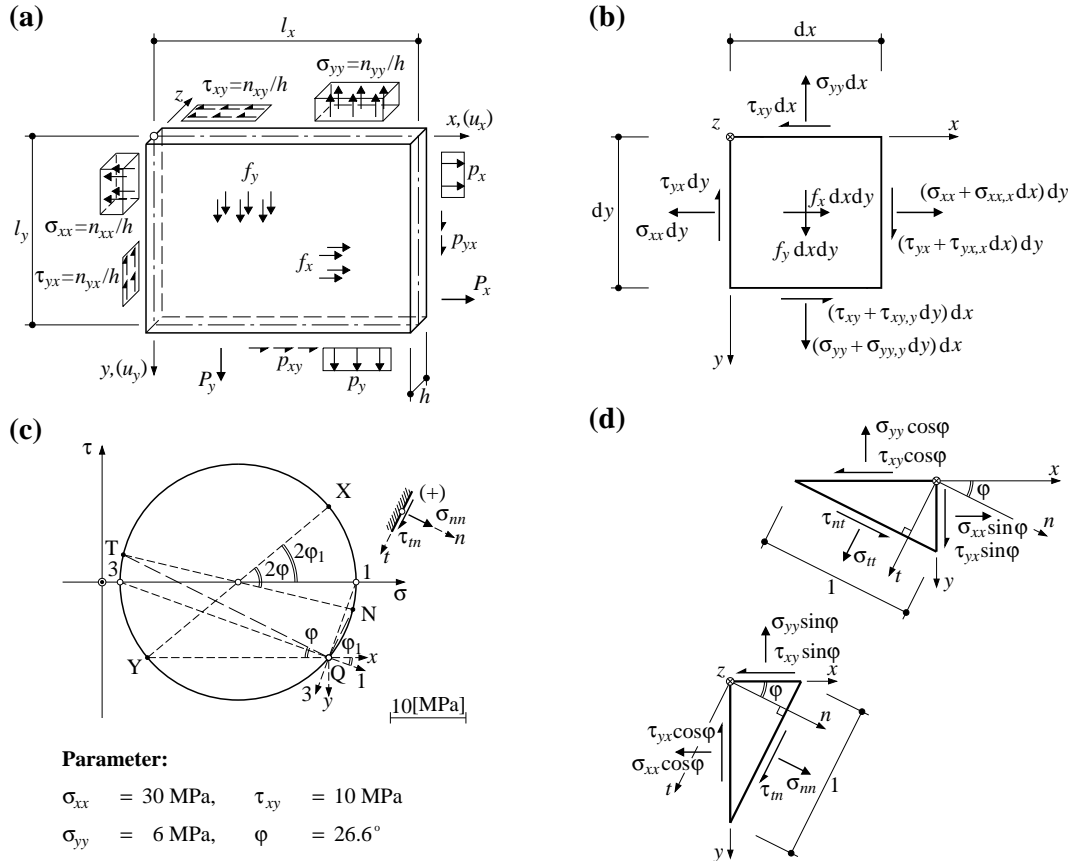


Bild 3.12 Scheiben: (a) Geometrie, Einwirkungen und Spannungen; (b) differentielles Scheibenelement; (c) MOHR'scher Kreis der Spannungen; (d) Scheibenelemente für die Spannungstransformation.

Kinematische Beziehungen

Bild 3.13(a) zeigt den Verschiebungs- sowie den Verzerrungszustand eines differentiellen Scheibenelements. Werden kleine Verformungen vorausgesetzt, gelten die kinematischen Relationen

$$\varepsilon_{xx} = u_{x,x} \quad \varepsilon_{yy} = u_{y,y} \quad \gamma_{xy} = \alpha + \beta = u_{x,y} + u_{y,x} \quad (3.51)$$

(3.51) verknüpft die Verschiebungen u_x und u_y in den jeweiligen Koordinatenrichtungen mit den Verzerrungen ε_{xx} und ε_{yy} (Dehnungen) und γ_{xy} (Schiebung) und stellt wiederum ein System partieller Differentialgleichungen für die ortsabhängigen Funktionen u_x und u_y dar. Analog zum Satz der zugeordneten Schubspannungen gilt $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$.

Ist der Verzerrungszustand eines Körpers bekannt, können die Verschiebungen durch Integration bestimmt werden. Als Integrationskonstanten treten dabei Funktionen in Erscheinung, welche die aus (3.51) resultierende Verträglichkeitsbedingung

$$\gamma_{xy,xy} = \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} \quad (3.52)$$

erfüllen müssen. (3.52) gilt unter der Voraussetzung, dass die partiellen Ableitungen von u_x und u_y stetigen Funktionen entsprechen.

Transformation der Verzerrungen

Bei einer Drehung des Koordinatensystems um die z -Achse mit dem Winkel φ entstehen die Transformationsbeziehungen

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{tt} \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ -2 \sin \varphi \cos \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

Die formale Ähnlichkeit von (3.48) und (3.53) ist evident; der Unterschied in der Transformationsmatrix liegt beim Faktor 2 der Schiebungen. Somit können die Verzerrungstransformationen ebenfalls mit Hilfe eines MOHRschen Kreises erfolgen, Bild 3.13(b), und die Hauptverzerrungen ε_1 und ε_3 ($\varepsilon_1 > \varepsilon_3$) sowie der Hauptverzerrungswinkel φ_1 ergeben sich zu

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2}}{2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \frac{\sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2}}{2}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} \right) \quad \text{wobei} \quad (3.54)$$

$$0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2} \quad (\gamma_{xy} > 0)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < 0 \quad (\gamma_{xy} < 0).$$

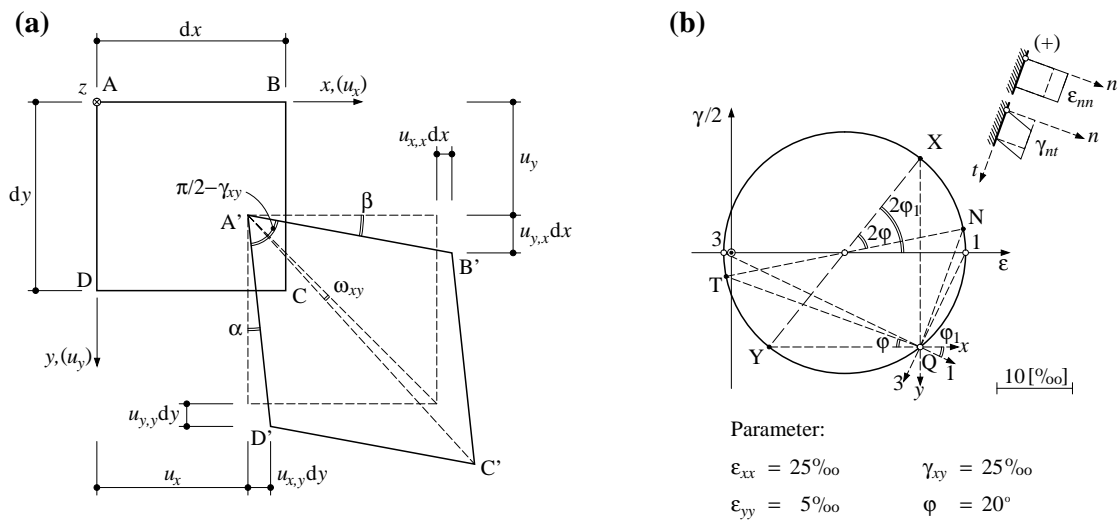


Bild 3.13 Scheibenelement: (a) Verschiebungen und Verzerrungen; (b) MOHRscher Kreis der Verzerrungen.

3.6.2 Orthogonale Bewehrung

Bild 3.14(a) zeigt ein in den Koordinatenrichtungen x und y bewehrtes Stahlbeton-Scheibenelement der Dicke h . Das Verhalten des als homogen und isotrop vorausgesetzten Betons wird mit der in Kapitel 3.5.1 eingeführten quadratischen Fliessbedingung beschrieben. Die Bewehrung im Scheibenelement wird mittels unendlich fein verteilter Einzelfasern idealisiert, welche ein starr - ideal plastisches Werkstoffverhalten gemäss Kapitel 3.2.1 aufweisen und lediglich Kräfte in den Bewehrungsrichtungen (Stabrichtungen) aufnehmen können. Zwischen der Bewehrung und dem Beton wird ein starrer Verbund vorausgesetzt. Die Fliessbedingungen für einachsige Spannungszustände lauten unter der Annahme der Fliessgrenzen f'_{sy} resp. f_{sy} des Bewehrungsstahls für Druck- resp. Zugbeanspruchung

$$\begin{aligned} Y_{sx} &= \sigma_{xx} - \rho_x f_{sy} = 0 & Y'_{sx} &= -\sigma_{xx} - \rho_x f'_{sy} = 0 \\ Y_{sy} &= \sigma_{yy} - \rho_y f_{sy} = 0 & Y'_{sy} &= -\sigma_{yy} - \rho_y f'_{sy} = 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

wobei $\rho_i = A_{si} / (h s_i)$. Daraus entsteht im Raum orthogonaler Spannungskomponenten σ_{xx} , σ_{yy} , und τ_{xy} als Fliessfigur für die Bewehrung eine Rechteckfläche, siehe Bild 3.14(c), mit einem zur τ_{xy} -Achse parallelen Normalenvektor.

Die Linearkombination der Fliessbedingungen für den Beton (Bild 3.14(b)) und für den Betonstahl (Bild 3.14(c)) liefert die Fliessbedingung für das orthogonal, in den Koordinatenrichtungen x und y bewehrte Stahlbeton-Scheibenelement. Graphisch kann die Fliessbedingung für das Scheibenelement durch Translation des Ursprungs der Fliessfigur für den Beton entlang der Grenzen der Fliessbedingung für die Bewehrung konstruiert werden.

$Y_1 = \tau_{xy}^2 - (\rho_x f_{sy} - \sigma_{xx})(\rho_y f_{sy} - \sigma_{yy}) = 0$	$\sigma_{sxx} = f_{sy}$	$\sigma_{syy} = f_{sy}$	$\sigma_{c3} \geq -f_c$
$Y_2 = \tau_{xy}^2 - (\sigma_{yy} + f_c - \rho_y f_{sy})(\rho_y f_{sy} - \sigma_{yy}) = 0$	$\sigma_{sxx} \leq f_{sy}$	$\sigma_{syy} = f_{sy}$	$\sigma_{c3} = -f_c$
$Y_3 = \tau_{xy}^2 - (\rho_x f_{sy} - \sigma_{xx})(\sigma_{xx} + f_c - \rho_x f_{sy}) = 0$	$\sigma_{sxx} = f_{sy}$	$\sigma_{syy} \leq f_{sy}$	$\sigma_{c3} = -f_c$
$Y_4 = \tau_{xy}^2 - \left(\frac{f_c}{2}\right)^2 = 0$	$\sigma_{sxx} \leq f_{sy}$	$\sigma_{syy} \leq f_{sy}$	$\sigma_{c3} = -f_c$
$Y_5 = \tau_{xy}^2 + (\rho_x f'_{sy} + \sigma_{xx})(\sigma_{xx} + f_c + \rho_x f'_{sy}) = 0$	$\sigma_{sxx} = -f'_{sy}$	$\sigma_{syy} \geq -f'_{sy}$	$\sigma_{c3} = -f_c$
$Y_6 = \tau_{xy}^2 + (\sigma_{yy} + f_c + \rho_y f'_{sy})(\rho_y f'_{sy} + \sigma_{yy}) = 0$	$\sigma_{sxx} \geq -f'_{sy}$	$\sigma_{syy} = -f'_{sy}$	$\sigma_{c3} = -f_c$
$Y_7 = \tau_{xy}^2 - (\sigma_{xx} + f_c + \rho_x f'_{sy})(\sigma_{yy} + f_c + \rho_y f'_{sy}) = 0$	$\sigma_{sxx} = f'_{sy}$	$\sigma_{syy} = f'_{sy}$	$\sigma_{c3} = -f_c$

Y_1 bis Y_7 beschreiben die einzelnen Fliessflächen der Fliessfigur im orthogonalen Spannungsraum in Bild 3.14(d). Y_1 und Y_7 entsprechen je einer elliptischen Kegelfläche, Y_2 und Y_5 resp. Y_3 und Y_6 beschreiben vier Kreiszylinderflächen, und schliesslich bildet Y_4 eine Ebene. In Regime 7 herrscht ein zweiachsiger Betondruckspannungszustand mit $-f_c \leq \sigma_{c1} \leq 0$; in den Regimes 1 bis 6 ist die grössere Betondruckspannung σ_{c1} identisch gleich null, und das Scheibenelement ist einem einachsigen Betondruckspannungszustand unterworfen. Für die praktische Anwendung im Stahlbetonbau sind die Regimes 5 bis 7 von untergeordnetem Interesse.

Ein auf das Stahlbeton-Scheibenelement aufgebracht Spannungszustand mit den Komponenten σ_{xx} , σ_{yy} und τ_{xy} entspricht dem in Bild 3.14(f) dargestellten MOHRschen Spannungskreis mit den Spannungsbildpunkten X und Y. Diese Spannungskomponenten verursachen im Inneren des Scheibenelements Spannungen im Beton σ_c und in der Bewehrung σ_s . Aufgrund der Annahme, dass der Betonstahl lediglich Kräfte in den jeweiligen Bewehrungsrichtungen aufnehmen kann, übernimmt bei orthogonal bewehrten Scheibenelementen ausschliesslich der Beton

allfällige Schubspannungskomponenten mit dem Maximum von $f_c/2$ gemäss (3.56)₄. Das Tragverhalten kann am Beispiel eines Spannungszustands innerhalb des Regimes 1 in Bild 3.14(f) veranschaulicht werden; der Anteil der Bewehrung entspricht den horizontalen Verbindungsstrecken zwischen den Spannungsbildpunkten X und X_c bzw. Y und Y_c .

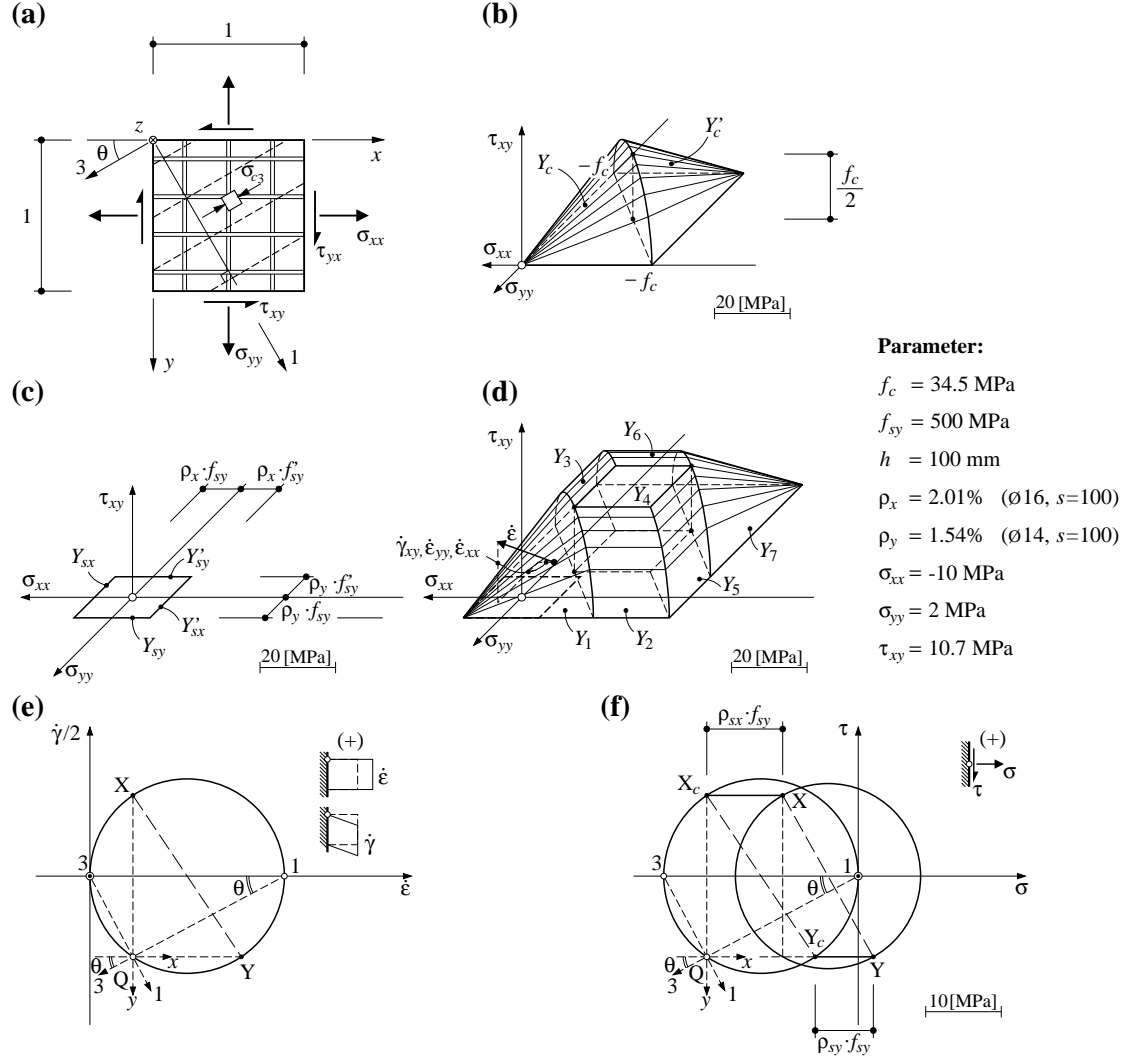


Bild 3.14 Fließbedingungen Stahlbeton-Scheibenelement: (a) Schnittkörperdiagramm; (b) Fließbedingung Beton; (c) Fließbedingung Bewehrung; (d) Fließbedingungen Scheibenelement; (e) MOHRscher Verzerrungskreis; (f) MOHRsche Spannungskreise für aufgebrachte Spannungen und Betonspannungen.

Mit dem zugeordneten Fließgesetz (3.9) lassen sich die plastischen Verzerrungszinkremente, d. h. die Komponenten der äusseren Normalenvektoren auf die Fließflächen (3.56), bestimmen. Für den in Bild 3.14(d) dargestellten Normalenvektor $\dot{\epsilon}$ zur Fließfläche des Regimes 1 resultiert beispielsweise

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon}_{xx} &= \kappa \frac{\partial Y_1}{\partial \sigma_{xx}} = \kappa \cdot (\rho_y f_{sy} - \sigma_{yy}) \\
 \dot{\epsilon}_{yy} &= \kappa \frac{\partial Y_1}{\partial \sigma_{yy}} = \kappa \cdot (\rho_x f_{sy} - \sigma_{xx}) \\
 \dot{\gamma}_{xy} &= \kappa \frac{\partial Y_1}{\partial \tau_{xy}} = \kappa \cdot 2 \cdot \tau_{xy}
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Durch Einsetzen von (3.56)₁ in (3.57)₃ entsteht für das Schiebungsinkrement $\dot{\gamma}_{xy}$ der Ausdruck

$$\dot{\gamma}_{xy} = \kappa \cdot 2 \cdot \sqrt{(\rho_x f_{sy} - \sigma_{xx})(\rho_y f_{sy} - \sigma_{yy})} = 2\sqrt{\dot{\epsilon}_{xx} \cdot \dot{\epsilon}_{yy}} \quad (3.58)$$

Die Hauptverzerrungsinkremente $\dot{\epsilon}_1$ und $\dot{\epsilon}_3$ sowie der zugehörige Winkel θ zur Hauptrichtung 3 der plastischen Verzerrungsinkremente können mit den Transformationsbeziehungen (3.54) oder mit Hilfe des MOHRschen Verzerrungskreises in Bild 3.14(e) bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} \geq 0 \\ \dot{\epsilon}_3 &= 0 \\ \cot \theta &= \frac{\dot{\epsilon}_{yy} - \dot{\epsilon}_{xx}}{\dot{\gamma}_{xy}} + \sqrt{\left(\frac{\dot{\epsilon}_{yy} - \dot{\epsilon}_{xx}}{\dot{\gamma}_{xy}} \right)^2 + 1} = \frac{\rho_x f_{sy} - \sigma_{xx}}{\rho_y f_{sy} - \sigma_{yy}} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Mit $\dot{\epsilon}_{xx}$ und $\dot{\epsilon}_{yy} \geq 0$ in (3.57)_{1,2} und dem dabei vorausgesetzten starr–ideal plastischen Werkstoffverhalten (Bild 3.1(a)) zeigt sich, dass beide Bewehrungen auf Zug fließen. Darüber hinaus bestätigt $\dot{\epsilon}_3 = 0$ in (3.59)₂, dass der Beton starr bleibt resp. unter Berücksichtigung des starr–ideal plastischen Werkstoffverhaltens (Bild 3.6) in der Hauptrichtung 3 keine Stauchung erfährt und somit Spannungen im Bereich null bis $-f_c$ aufnimmt. $\dot{\epsilon}_1 \geq 0$ in (3.59)₁ zeigt im Weiteren auf, dass orthogonal zur Hauptrichtung 1 der Beton Risse aufweist; es handelt sich um sogenannte Kollapsrisse, die in Kapitel 3.6.5 näher erläutert werden. Der Winkel θ , der die Richtung der kleineren Hauptdruckspannung im Beton beschreibt, siehe Bild 3.14(f), ist identisch mit dem Winkel θ , welcher die Hauptrichtung der plastischen Verzerrungsinkremente beschreibt, siehe Bild 3.14(e). Diese Übereinstimmung gründet auf den eingangs erwähnten Annahmen zur Isotropie und Homogenität des Werkstoffverhaltens des Betons.

Das Vorgehen zur Bestimmung der Hauptdruckrichtungen 1 und 3 kann für die übrigen Regimes 2 bis 7 in gleicher Weise durchgeführt werden [Marti (2012)], was zu den folgenden Beziehungen in Funktion des Winkels θ in den sieben Fließregimes führt:

$$\begin{aligned} Y_1 : \quad \cot^2 \theta &= \frac{\rho_x f_{sy} - \sigma_{xx}}{\rho_y f_{sy} - \sigma_{yy}} \\ Y_2 : \quad \cot^2 \theta &= \frac{\sigma_{yy} + f_c - \rho_y f_{sy}}{\rho_y f_{sy} - \sigma_{yy}} \\ Y_3 : \quad \cot^2 \theta &= \frac{\rho_x f_{sy} - \sigma_{xx}}{\sigma_{xx} + f_c - \rho_x f_{sy}} \\ Y_4 : \quad \cot^2 \theta &= 1 \\ Y_5 : \quad \cot^2 \theta &= -\frac{\rho_x f'_{sy} + \sigma_{xx}}{\sigma_{xx} + f_c + \rho_x f'_{sy}} \\ Y_6 : \quad \cot^2 \theta &= -\frac{\sigma_{yy} + f_c + \rho_y f'_{sy}}{\rho_y f'_{sy} + \sigma_{yy}} \\ Y_7 : \quad \cot^2 \theta &= \frac{\sigma_{xx} + f_c + \rho_x f'_{sy}}{\sigma_{yy} + f_c + \rho_y f'_{sy}} \end{aligned} \quad (3.60)$$

3.6.3 Bemessung der Bewehrung in Stahlbeton-Scheibenelementen

Der Bemessung wird üblicherweise das Regime 1 zu Grunde gelegt, in welchem beide Bewehrungen auf Zug fließen und somit ein duktiles Bruchverhalten sichergestellt werden kann. Mit der Wahl des Winkels θ können aus (3.56)₁ und (3.60)₁ die Bemessungsbeziehungen

$$\begin{aligned}\rho_x f_{sy} &\geq \sigma_{xx} + \cot\theta \cdot |\tau_{xy}| = \sigma_{xx} + k \cdot |\tau_{xy}| \\ \rho_y f_{sy} &\geq \sigma_{yy} + \frac{|\tau_{xy}|}{\cot\theta} = \sigma_{yy} + \frac{|\tau_{xy}|}{k}\end{aligned}\quad (3.61)$$

mit $k = \cot\theta$ hergeleitet werden. Für den Fall verschwindender Normalspannungen ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$), d.h. einen reinen Schubspannungszustand, vereinfachen sich die Beziehungen zu

$$\begin{aligned}\rho_x f_{sy} &\geq \cot\theta \cdot |\tau_{xy}| = k \cdot |\tau_{xy}| \\ \rho_y f_{sy} &\geq \frac{|\tau_{xy}|}{\cot\theta} = \frac{|\tau_{xy}|}{k}\end{aligned}\quad (3.62)$$

Aus Bild 3.14(f) kann die Spannung σ_{c3} für das Regime 1 bestimmt werden.

$$\sigma_{c3} = -\frac{|\tau_{xy}|}{\sin\theta \cdot \cos\theta} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \rho_x f_{sy} - \rho_y f_{sy} \geq -f_c \quad (3.63)$$

Mit der Bedingung $\sigma_{c3} \geq -f_c$ wird das duktile Verhalten innerhalb des Regimes 1 sichergestellt, ansonsten werden gemäss Bild 3.14(d) die Regimes 2 bis 4 massgebend.

(3.61) ist in Bild 3.15 veranschaulicht und entspricht einer Niveaulinie (Höhenlinie) des elliptischen Kegels der Fliessfläche Y_1 mit der zugehörigen konstanten Schubspannung.

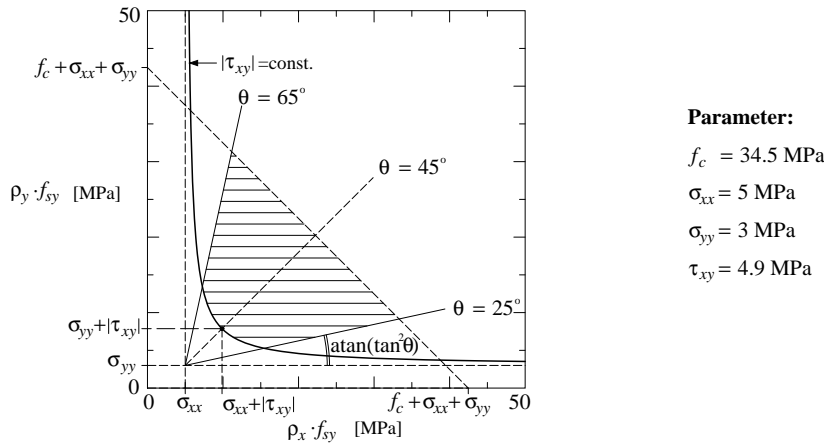


Bild 3.15 Bemessungsdiagramm für ein orthogonal bewehrtes Stahlbeton-Scheibenelement.

Wahl der Druckfeldneigung für Stahlbeton-Scheibenelemente

Der Wert k resp. der Winkel θ der Druckfeldneigung wird in den Tragwerksnormen SIA 262 (2003) und EC 2 (2004) auf Werte zwischen 0.5 und 2.0 resp. 25° und 65° begrenzt. Der schraffierte Bereich in Bild 3.15 veranschaulicht mögliche Kombinationen der Bewehrungsgelände in den orthogonalen Richtungen x und y . In der Bemessung wird häufig $k = 1$ resp. $\theta = 45^\circ$ gewählt und somit eine Linearisierung der Fliessbedingung verwendet. In Kapitel 3.6.6 wird die Wahl der Druckfeldneigung zur Querkraftbemessung von Trägerstegen weiter diskutiert.

3.6.4 Allgemeine Bewehrungsrichtungen

Die vorangegangenen Ausführungen an orthogonal bewehrten Stahlbeton-Scheibenelementen lassen sich auf Scheibenelemente mit allgemeinen (nicht orthogonalen) Bewehrungsrichtungen übertragen. Vorzugsweise wird dabei der aus den nicht orthogonalen Bewehrungslagen resultierende Spannungszustand auf ein Bezugssystem (x - y -Koordinatensystem) transformiert. Die dabei entstehenden äquivalenten mittleren Spannungen aus den Bewehrungen beinhalten auch Schubspannungskomponenten. Die Kombination zweier Bewehrungslagen ergibt im orthogonalen Spannungsraum (σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy}) ein Parallelogramm, welches gegenüber der Ebene der Normalspannungen eine Neigung aufweist. Drei nicht kollineare Bewehrungslagen formen ein Parallelepiped. Die Fliessfigur für derartig bewehrte Stahlbeton-Scheibenelemente lässt sich wiederum durch Linearkombination der einzelnen Fliessfiguren (Beton und Bewehrungen) konstruieren. Einen umfassenden Überblick inkl. der Fliessbedingungen für drei nicht orthogonale Bewehrungslagen gibt Seelhofer (2009).

3.6.5 Berücksichtigung des endlichen Stababstands der Bewehrung

Die Fliessbedingung für Scheibenelemente beruht auf der eingangs dieses Kapitels erwähnten Annahme, dass die Bewehrung mittels unendlich fein verteilter Einzelfasern idealisiert wird und dementsprechend die Kräfte in den einzelnen Bewehrungsstäben über die Scheibendicke verteilt als Spannung aufgefasst werden können. Dies führt im Allgemeinen zu einer Überschätzung der in Rechnung gestellten Querschnittsfläche der Querkraftbewehrung in Stahlbetonträgern und mithin zu einer Überschätzung von dessen Tragwiderstand. Dieser Sachverhalt wird anhand der Betrachtung einer kinematischen Diskontinuitätslinie (Bruchlinie in Kapitel 3.3.1) durch eine Stegscheibe eines Stahlbetonträgers diskutiert, und entsprechende Hinweise für die konstruktive Durchbildung werden aufgezeigt.

Stegdruckbruchmechanismus

Bild 3.16(a) zeigt einen Stahlbetonträger in Form einer rechteckförmigen Scheibe der Höhe l_y und der Breite b_w mit Bewehrung in Richtung der Trägerlängsachse x und Querkraftbewehrung in Richtung der Koordinatenachse y . Die Querkraftbewehrung mit der Länge l_{ys} sei symmetrisch zur x -Achse verlegt und weise einen endlichen Stababstand s auf. Betrachtet man eine kinematische Diskontinuität in Bild 3.16(a) und (b) mit der horizontalen Ausdehnung $n \cdot s$, die jeweils durch die Enden ($y = \pm l_{ys}/2$) zweier Querkraftbewehrungen (Bügel) hindurch verlaufen soll, beteiligen sich lediglich $n - 1$ diskrete Bügel an der Dissipation [Marti (1986a)]. Hingegen werden sich n Bügel an der Dissipation beteiligen, wenn diese als unendlich fein verteilte Einzelfasern idealisiert werden. Für den Anteil des Betons an der Dissipation innerhalb der Bruchlinie wird ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt mit Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit; mithin wird für den Beton die quadratische Fliessbedingung (Kapitel 3.4.1) vorausgesetzt. Die gesamte Dissipationsarbeit innerhalb der Bruchfläche setzt sich aus den Anteilen der Bewehrungen in x und y -Richtung sowie des Betons zusammen. Für den in Bild 3.16(c) dargestellten Bruchmechanismus mit der Voraussetzung einer vertikalen Translationsbewegung entspricht die Richtung des Sprungvektors δ der y -Richtung. Mit der Bedingung

$$2 \cdot \theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \quad (3.64)$$

verschwindet der Anteil an der Dissipation der Bewehrung in x -Richtung, und für die gesamte Dissipationsarbeit entsteht der Ausdruck

$$\dot{D} = \dot{\delta} \left[b_w \frac{f_c}{2} (1 - \sin \alpha) \frac{l_y}{\cos \alpha} + b_w s \rho_y f_{sy} \left(\frac{l_{ys}}{s} \tan \alpha - 1 \right) \right] \quad (3.65)$$

Durch Gleichsetzen von (3.65) mit der Arbeit der äusseren Kräfte

$$W_e = \dot{\delta} [\tau_{xy} l_y b_w + \sigma_{yy} b_w l_y \tan \alpha] \quad (3.66)$$

entsteht für den Schubwiderstand in Abhängigkeit der Richtung der Bruchlinie

$$\tau_{xy, \alpha} = \frac{f_c}{2} (1 - \sin \alpha) \frac{1}{\cos \alpha} - \sigma_{yy} \tan \alpha + \rho_y f_{sy} \left(\frac{l_{ys}}{l_y} \tan \alpha - \frac{s}{l_y} \right) \quad (3.67)$$

mit $\tan \alpha = \xi / l_{ys}$. Das Auffinden des Minimums mit $d\tau_{xy, \alpha} / d\alpha = 0$ führt auf

$$\sin \alpha = 1 - \frac{2}{f_c} \left(\rho_y f_{sy} \frac{l_{ys}}{l_y} - \sigma_{yy} \right) \quad (3.68)$$

und durch Einsetzen von (3.68) in (3.67) resultiert der Schubwiderstand in Abhängigkeit des Querkraftbewehrungsgehalts ρ_y

$$\tau_{xy, \text{endl}} = \sqrt{\left(\rho_y f_{sy} \frac{l_{ys}}{l_y} - \sigma_{yy} \right) \left(f_c + \sigma_{yy} - \rho_y f_{sy} \frac{l_{ys}}{l_y} \right)} - \rho_y f_{sy} \frac{s}{l_y} \quad (3.69)$$

Der maximal mögliche Schubwiderstand kann mit $d\tau_{xy} / d\rho_y = 0$ und daraus resultierend

$$\rho_{y, \text{endl, max}} = \frac{f_c}{2 f_{sy}} \frac{l_y}{l_{ys}} \left(1 + 2 \frac{\sigma_{yy}}{f_c} - \frac{s}{\sqrt{l_{ys}^2 + s^2}} \right) \quad (3.70)$$

bestimmt werden zu

$$\tau_{xy, \text{endl, max}} = \frac{f_c}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{s^2}{l_{ys}^2}} - \frac{s}{l_{ys}} \right) - \frac{s}{l_{ys}} \sigma_{yy} \quad (3.71)$$

Der Winkel θ der Hauptrichtung 3 gegenüber der x -Achse ergibt sich unter Berücksichtigung der Beziehung (3.64) in (3.68)

$$\cot^2 \theta_{\text{endl}} = \frac{f_c - \rho_y f_{sy} \frac{l_{ys}}{l_y} + \sigma_{yy}}{\rho_y f_{sy} \frac{l_{ys}}{l_y} - \sigma_{yy}} \quad (3.72)$$

und ist unabhängig vom endlichen Stababstands s . Die Beziehungen (3.67) bis (3.72) sind abhängig vom Verhältnis der statisch wirksamen Höhe der Querkraftbewehrung l_{ys} zur Querschnittshöhe l_y . Die statisch wirksame Höhe der Querkraftbewehrung ihrerseits hängt von der konstruktiven Durchbildung ab und beträgt für eine Bewehrung in Form von geschlossenen Bügeln im Maximum

$$l_{ys} = l_y - 2c_{\text{nom}} - \emptyset_y \quad (3.73)$$

Bild 3.16(e) zeigt das Verhältnis l_{ys} / l_y in Abhängigkeit der Bewehrungsüberdeckung c_{nom} sowie des Bügeldurchmessers \emptyset_y für übliche Querschnittshöhen von 0.2 m bis 1.0 m. Insbesondere für Querschnittshöhen kleiner als 0.5 m ist die statisch wirksame Höhe der Querkraftbewehrung gegenüber der Querschnittshöhe klein.

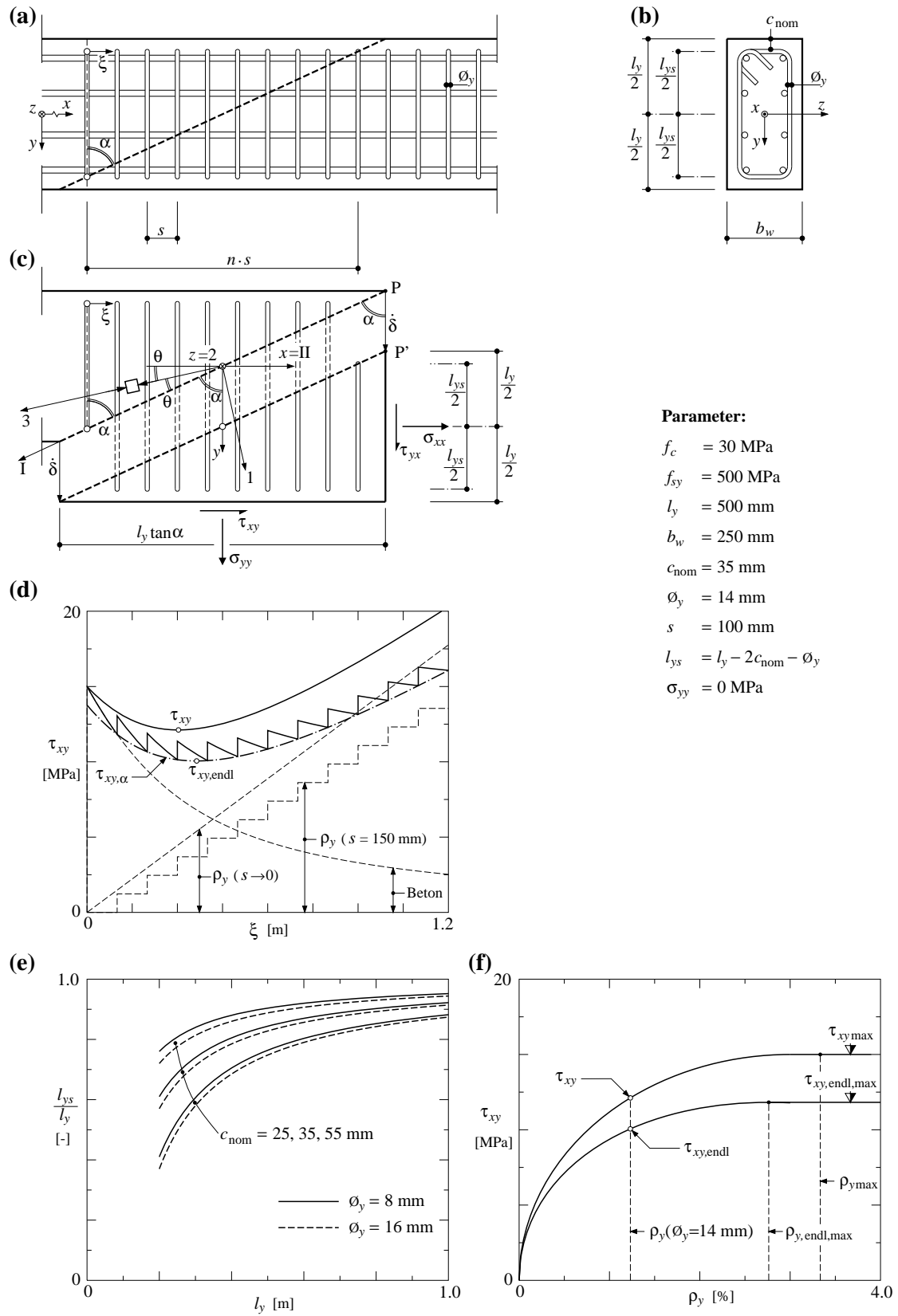


Bild 3.16 Stegdruckbruchmechanismus eines Stahlbetonträgers: (a) Stegscheibe; (b) Querschnitt; (c) Stegdruckbruchmechanismus; (d) Schubwiderstand in Abhängigkeit der Lage der kinematischen Diskontinuitätslinie; (e) Verhältnis der Abmessung der Bügel zur Querschnittshöhe; (f) Schubwiderstand.

Für den Fall, dass die Querkraftbewehrung über die gesamte Steghöhe verläuft ($l_{ys} = l_y$) und die Bewehrung mittels unendlich fein verteilter Einzelfasern mit verschwindendem Stababstand ($s \rightarrow 0$) idealisiert wird, resultieren aus (3.67) bis (3.72) die bekannten Beziehungen

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy,\alpha} &= \frac{f_c}{2} (1 - \sin \alpha) \frac{1}{\cos \alpha} - \sigma_{yy} \tan \alpha + \rho_y f_{sy} \tan \alpha \\
 \tau_{xy} &= \sqrt{(\rho_y f_{sy} - \sigma_{yy})(f_c + \sigma_{yy} - \rho_y f_{sy})} \\
 \rho_{y \max} &= \frac{f_c}{2 f_{sy}} \left(1 + 2 \frac{\sigma_{yy}}{f_c} \right) \\
 \tau_{xy \max} &= \frac{f_c}{2} \\
 \cot^2 \theta &= \frac{f_c - \rho_y f_{sy} + \sigma_{yy}}{\rho_y f_{sy} - \sigma_{yy}}
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Die Beziehungen (3.74) sind äquivalent mit den Beziehungen (3.56)₂ sowie (3.60)₂ für das Regime 2 der Fliessbedingungen für Stahlbetonscheiben, womit eine vollständige Lösung im Sinne der Traglastverfahren (Kapitel 3.2) vorliegt. Bild 3.16(d) zeigt den Schubwiderstand des in Bild 3.16(b) dargestellten Querschnitts in Abhängigkeit der Neigung der Bruchlinie. Die gestrichelten Linien zeigen die einzelnen Anteile des Betons und der Bewehrung. Wird die Bewehrung als unendlich fein verteilt betrachtet ($s \rightarrow 0$) ergibt sich eine lineare Zunahme des Schubwiderstands in Abhängigkeit der Laufkoordinate ξ . Wird hingegen die Dissipation der Bewehrung mit dem endlichem Stababstand s bestimmt, resultiert der sägezahnförmige Verlauf des Schubwiderstands in Funktion von ξ . Diese beiden Betrachtungsweisen stimmen punktweise überein, falls $l_{ys} = l_y$ gesetzt wird. Die ausgezogenen Linien in Bild 3.16(d) ergeben sich aus der Summenbildung der einzelnen Anteile, die zur Dissipation entlang der Bruchlinie beitragen. Die strichpunktierte Linie, herrührend aus der Beziehung (3.69), bildet die Enveloppe der Minima des Schubwiderstands bei Betrachtung endlicher Stababstände. Die Differenz zwischen den beiden Minima τ_{xy} (3.74)₂ und $\tau_{xy, \text{endl}}$ (3.69) in Bild 3.16(d) und (f) ist in Bild 3.17 als Verhältnis auf der Ordinatenachse in Abhängigkeit des Bügelabstands und der Querschnittshöhe dargestellt. Die für die Fliessbedingung zu Grunde gelegte Annahme, dass die Bewehrung mittels unendlich fein verteilter Einzelfasern idealisiert wird und dementsprechend die Kräfte in den einzelnen Bewehrungsstäben über die Scheibendicke verteilt als Spannung aufgefasst werden können, führt für geringe Querschnittshöhen und grosse Abstände der Querkraftbewehrungsstäbe zu einer markanten Überschätzung des Tragwiderstands.

In den Normvorschriften SIA 162 (1968), SIA 262 (2003) und EC 2 (2004) ist der maximale Abstand zwischen den Querkraftbewehrungsstäben s_{\max} in Trägerlängsrichtung wie folgt begrenzt

$$\begin{aligned}
 s_{\max, \text{SIA 162}} &= \left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{2} \right) \cdot l_y \leq 200 \div 300 \text{ mm}, \quad (\beta = \pi / 2) \\
 s_{\max, \text{SIA 162}} &= \left(\frac{1}{2} \div 1.0 \right) \cdot l_y \leq 300 \div 400 \text{ mm}, \quad (\beta = \pi / 4) \\
 s_{\max, \text{SIA 262}} &= 25 \cdot \emptyset_y \\
 s_{\max, \text{EC 2}} &= 0.75 \cdot d (1 + \cot \beta)
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Dabei bezeichnen d die statische Höhe des Stahlbetonträgers, \emptyset_y den Durchmesser der Querkraftbewehrung und β den Winkel zwischen der Querkraftbewehrung und der Längsachse des Trägers mit $\pi/4 \leq \beta \leq \pi/2$. Die in (3.75)_{1,2} angegebenen Grenzen sind abhängig von der Grösse

der Schubspannung τ_{xy} . In Bild 3.17 sind die Grenzen für s_{\max} eingetragen, wobei d in (3.75)₄ mit $0.9l_y$ berücksichtigt wurde.

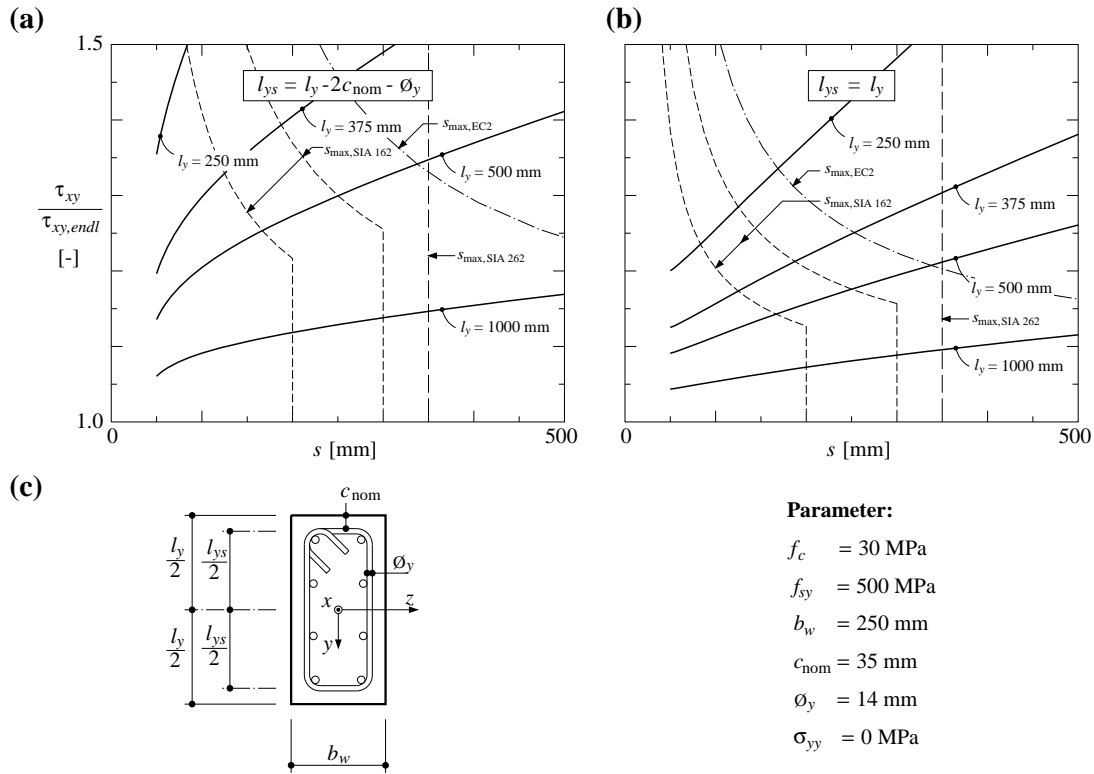


Bild 3.17 Stegdruckbruchmechanismus eines Stahlbetonträgers, Verhältnis der Schubwiderstände mit verschwindendem bzw. endlichem Stababstand: (a) Bügelabmessung maximal; (b) Bügelabmessung identisch mit Abmessung der Stegscheibe; (c) Querschnitt des Stahlbetonträgers mit Bezeichnungen.

Kollapsrissmechanismus

Aufbauend auf den Betrachtungen zum Stegdruckbruchmechanismus kann für den in Marti et al. (1999) beschriebenen Kollapsrissmechanismus, der endliche Stababstand der Querkraftbewehrung ebenfalls berücksichtigt werden. Beim Kollapsrissmechanismus wird α in Bild 3.16(c) zu $\pi/2$ gesetzt, so dass der Beton keine Dissipationsarbeit leistet und dementsprechend elastisch bleibt und sich die Dissipationsarbeit aus den Anteilen der Bewehrungen in x und y -Richtung zusammensetzt, Bild 3.18(a). Die Bewehrung in Richtung der Längsachse x des Trägers wird bei Biegeträgern in der Regel in den Stringern konzentriert angeordnet. Wird für die Querkraftbewehrung in y -Richtung deren endlicher Abstand s und deren statisch wirksame Höhe l_{ys} berücksichtigt, so beträgt der Schubwiderstand in Abhängigkeit der Richtung θ der kinematischen Diskontinuitätslinie (Bild 3.18(a) und (b))

$$\tau_{xy,\theta} = \frac{\tan \theta}{2} [\rho_x f_{sy} - \sigma_{xx}] + \frac{\cot \theta}{2} \left[\rho_y f_{sy} \left(\frac{l_{ys}}{l_y} - \frac{s}{l_y \cot \theta} \right) - \sigma_{yy} \right] \quad (3.76)$$

Auffinden des Minimums von (3.76) durch Variation des Winkels θ mit $d\tau_{xy,\theta} / d\theta = 0$ führt zu

$$\cot^2 \theta_{\text{endl}} = \frac{\rho_x f_{sy} - \sigma_{xx}}{\rho_y f_{sy} \frac{l_{ys}}{l_y} - \sigma_{yy}} \quad \text{und somit auf} \quad (3.77)$$

$$\tau_{xy, \text{endl}} = \sqrt{(\rho_x f_{sy} - \sigma_{xx}) \left(\rho_y f_{sy} \frac{l_{ys}}{l_y} - \sigma_{yy} \right)} - \rho_y f_{sy} \frac{s}{2 \cdot l_y}$$

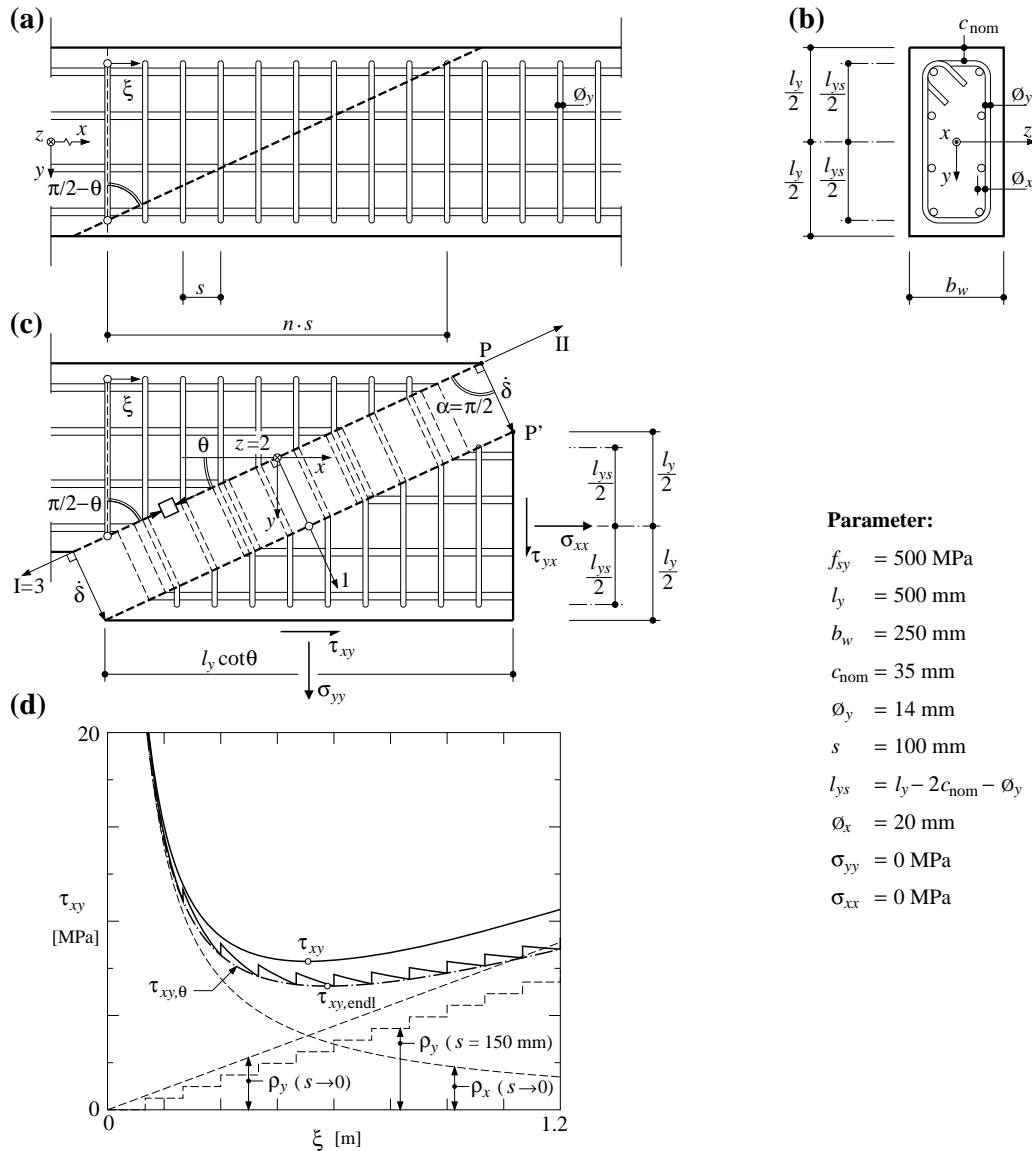


Bild 3.18 Kollapsrissmechanismus eines Stahlbetonträgers: (a) Stegscheibe; (b) Querschnitt; (c) Kollapsrissmechanismus; (d) Schubwiderstand in Abhängigkeit der Lage der kinematischen Diskontinuitätslinie.

Für den Fall, dass die Querkraftbewehrung über die gesamte Steghöhe verläuft ($l_{ys} = l_y$) und die Bewehrung mittels unendlich fein verteilter Einzelfasern mit verschwindendem Stababstand ($s \rightarrow 0$) idealisiert wird, resultieren aus den Beziehungen (3.77) die bekannten Beziehungen (3.56)₁ sowie (3.60)₁ für das Regime 1 der Fließbedingungen für Stahlbetonscheiben, womit eine vollständige Lösung im Sinne der Traglastverfahren (Kapitel 3.2.2) vorliegt.

Wiederum sind in Bild 3.18(d) die einzelnen Anteile der Bewehrungen an der Dissipation (gestrichelte Linien), deren Summenbildung (ausgezogene Linien) sowie die Enveloppe der Minima bei endlicher Betrachtung des Stababstands der Querkraftbewehrung (strichpunktierte Linie aus (3.76)) in Abhängigkeit der Laufkoordinate ξ mit $\tan\theta = l_{ys}/\xi$ dargestellt. Die Differenz zwischen den beiden Minima τ_{xy} (3.56)₁ und $\tau_{xy,endl}$ (3.77)₂ in Bild 3.18(d) und (f) ist in Bild 3.19 als Verhältnis auf der Ordinatenachse in Abhängigkeit des Stababstands, der Querschnittshöhe und der Druckfeldrichtung dargestellt. Die für die Fliessbedingung zu Grunde gelegte Annahme, dass die Bewehrung mittels unendlich fein verteilter Einzelfasern idealisiert wird und dementsprechend die Kräfte in den einzelnen Bewehrungsstäben über die Scheibendicke verteilt als Spannung aufgefasst werden können, führt für geringe Querschnittshöhen und grosse Abstände der Querkraftbewehrungsstäbe zu einer markanten Überschätzung des Tragwiderstands. Darüber hinaus nimmt die in Rechnung gestellte Querschnittsfläche der Querkraftbewehrung mit endlichen Stababständen mit der Wahl einer grösseren Neigung des Druckfeldes ab, was die Überschätzung des Tragwiderstands weiter verstärkt, siehe Bild 3.19(a) und (b) mit (c) und (d).

In Bild 3.19 sind zudem die maximalen Stababstände der Querkraftbewehrung entsprechend den Beziehungen (3.75) aufgezeigt. Zusammen mit Bild 3.17 kann festgestellt werden, dass die Normvorschriften, welche den Stababstand der Querkraftbewehrung in Abhängigkeit der Querschnittshöhe begrenzen, vernünftig sind [SIA 162 (1968), EC 2 (2004)]. In EC 2 (2004) fehlt eine obere Begrenzung des Stababstands, wobei dieser aus baupraktischer Sicht den Wert von 300 mm üblicherweise nicht übersteigt. In SIA 262 (2003) ist mit (3.75)₃ lediglich eine Begrenzung in Funktion des Durchmessers der Querkraftbewehrung angegeben, welche für übliche Bügeldurchmesser von 8 bis maximal 16 mm Stababstände von 200 bis 400 mm ergibt. Bei Verwendung von Doppelkopfkankern sind grössere Durchmesser möglich und somit theoretisch grössere Stababstände zulässig. Es bleibt aber auch hier anzumerken, dass Stababstände grösser als 300 mm in der Baupraxis unüblich sind. Nachfolgend wird, basierend auf den vorangegangenen Überlegungen, ein Vorschlag für die Bemessung der Querkraftbewehrung in Stahlbetonträgern aufgezeigt, welcher den endlichen Stababstand der Querkraftbewehrung berücksichtigt.

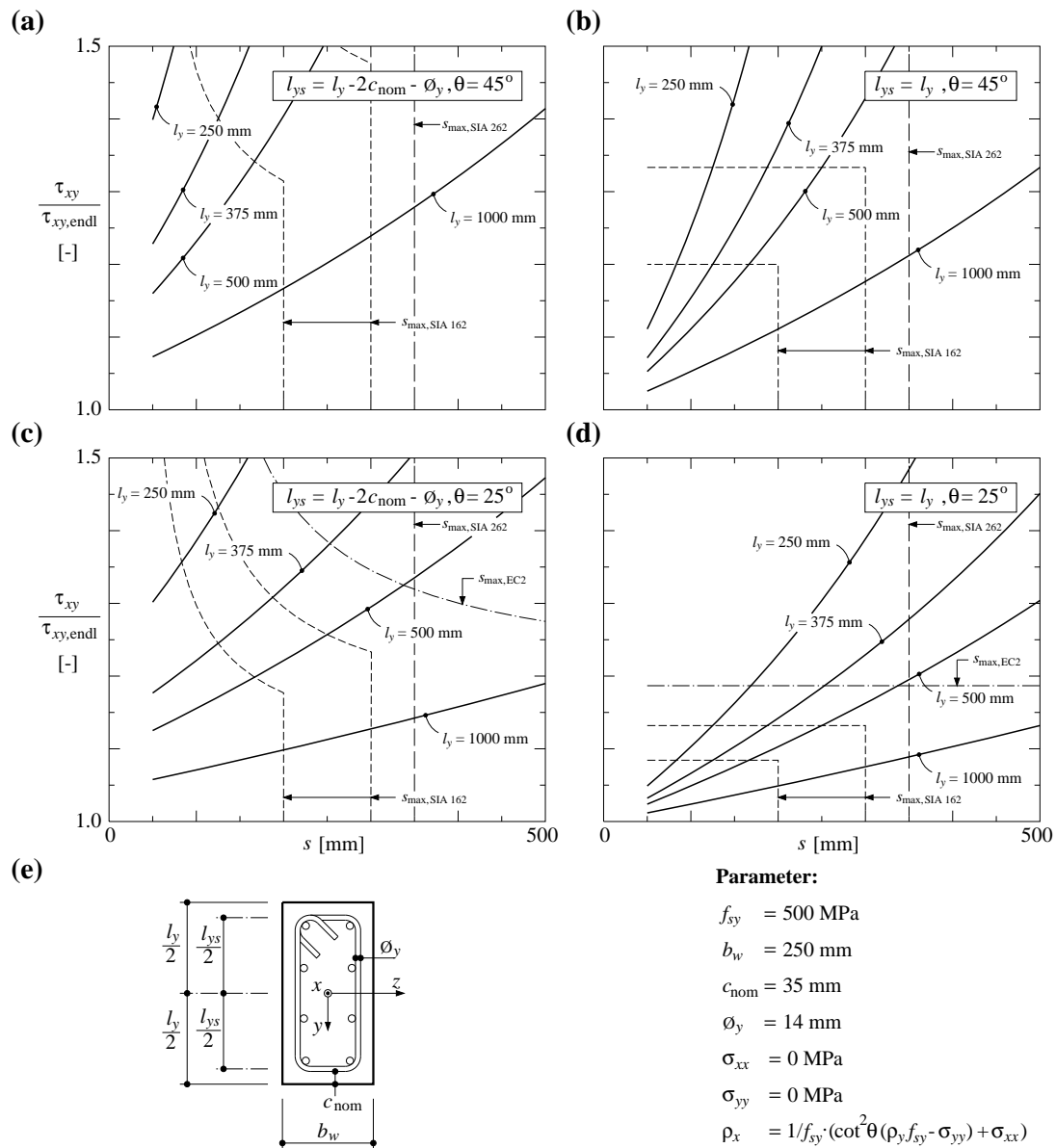


Bild 3.19 Kollapsrissmechanismus eines Stahlbetonträgers, Verhältnis der Schubwiderstände mit verschwindendem bzw. endlichem Bügelabstand: (a), (c) Bügelabmessung maximal; (b), (d) Bügelabmessung identisch mit Abmessung der Stegscheibe; (e) Querschnitt des Stahlbetonträgers mit Bezeichnungen.

3.6.6 Bemessung der Querkraftbewehrung in Stahlbetonträgern

Unendlich fein verteilte Querkraftbewehrung

In den Bestimmungen der Norm SIA 262 (2003) basiert die Bemessung der Querkraftbewehrung in Trägerstegen auf dem Regime 1 der Fliessbedingungen für Scheiben. Sowohl die Druckfeldneigung θ als auch der Querkraftbewehrungsgehalt ρ_y können gewählt werden. Der Querkraftwiderstand bezieht sich auf den Hebelarm der inneren Kräfte d_v des Querschnitts. Der Widerstand einer vertikalen Querkraftbewehrung mit $V = \tau_{xy} b_w d_v$ beträgt mit (3.56)₁ und (3.60)₁

$$V_{Ry,s} = (\rho_y f_{sy} - \sigma_{yy}) b_w d_v \cot \theta = \left(\frac{A_{sy}}{s} f_{sy} - \sigma_{yy} b_w \right) d_v \cot \theta \quad (3.78)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Querkraftbewehrung fliesst und als unendlich fein verteilt in Rechnung gestellt werden kann.

Unter der Annahme, dass die Bewehrung in Richtung der Längsachse x des Trägers ebenfalls fliesst (Regime 1) kann mit der Beziehung (3.60)₁ die erforderliche Längszugkraft F_{tV} bestimmt werden, die im Falle von Stahlbetonträgern üblicherweise je zur Hälfte dem Zug- resp. Druckstringer zugeordnet wird.

$$F_{tV} = \left[\cot^2 \theta (\rho_y f_{sy} - \sigma_{yy}) + \sigma_{xx} \right] b_w d_v = V_{Ry,s} \cot \theta + \sigma_{xx} b_w d_v \quad (3.79)$$

Der maximale Querkraftwiderstand mit der gewählten Druckfeldneigung ist auf Grundlage der Beziehungen (3.56)₂ und (3.60)₂ begrenzt auf

$$V_{Ry,c} = f_{ce} \sin \theta \cos \theta b_w d_v \quad (3.80)$$

womit ein spröder Betondruckbruch gemäss Regime 2 der Fliessbedingung für Scheiben ausgeschlossen werden kann.

Für die effektive Betondruckfestigkeit f_{ce} wird in der erwähnten Bemessungsnorm ein vom Beanspruchungszustand resp. Verzerrungszustand sowie der konstruktiven Durchbildung der Trägerstegbewehrung abhängiger Wert (Reduktionsfaktor für die Betondruckfestigkeit) angegeben. Muttoni (1990) empfiehlt für die effektive Betondruckfestigkeit von Normalbeton einen vom Verzerrungszustand unabhängigen Ausdruck von

$$f_{ce} = 1.6 \cdot f_c^{2/3} \leq 0.6 \cdot f_c \quad (3.81)$$

Diese empirische Beziehung stützt sich auf die Auswertung zahlreicher Schubversuche und liefert für die Bemessung von Trägerstegen vernünftige Resultate, wobei plastische Stringerverformungen in profilierten Stahlbetonträgern eine weitere Reduktion der effektiven Betondruckfestigkeit erforderlich machen.

Endlicher Stababstand der Querkraftbewehrung

Wird der Abstand der Querkraftbewehrungsstäbe als endlich betrachtet, lässt sich der Querkraftwiderstand einer vertikalen Querkraftbewehrung mit (3.77) bestimmen:

$$V_{Ry,s,endl} = \tau_{xy,endl} b_w d_v = \left[\rho_y f_{sy} \left(\frac{l_{ys}}{l_y} - \frac{s}{2l_y \cot \theta} \right) - \sigma_{yy} \right] b_w d_v \cot \theta \quad (3.82)$$

$$V_{Ry,s,endl} = \left[\frac{A_{sy}}{s} f_{sy} \left(\frac{l_{ys}}{l_y} - \frac{s}{2l_y \cot \theta} \right) - \sigma_{yy} b_w \right] d_v \cot \theta$$

Das Verhältnis zwischen der statisch wirksamen Höhe der Querkraftbewehrung l_{ys} zur Querschnittshöhe l_y ist in Bild 3.16(e) dargestellt und ist im Wesentlichen abhängig von der Querschnittshöhe sowie der Bewehrungsüberdeckung. Das Verhältnis zwischen der Höhe der Querkraftbewehrung l_{ys} (3.73) und des Hebelarm der inneren Kräfte d_v (Kapitel 3.7.2) ist massgeblich beeinflusst durch den Biegebewehrungsgehalt ω_b und kann mit $6(1 + \omega_b)/7$ abgeschätzt werden.

Der maximale Querkraftwiderstand mit der gewählten Druckfeldneigung ist auf Grundlage der Beziehungen (3.69) und (3.72) begrenzt auf

$$V_{Ry,c,endl} = \tau_{xy,endl} b_w d_v = b_w d_v \left[f_{ce} \left(\sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \frac{s}{l_{ys}} \right) - \sigma_{yy} \frac{s}{l_{ys}} \right] \quad (3.83)$$

womit ein spröder Betondruckbruch gemäss Regime 2 der Fliessbedingung für Stahlbetonscheiben ausgeschlossen werden kann.

Einschränkung für die maximale Druckfeldneigung bei Betondruckbruch

Eine andere Möglichkeit der Berücksichtigung der endlichen Stababstände der Querkraftbewehrung ist in Bild 3.20 dargestellt. Bild 3.20(b) zeigt eine kinematische Diskontinuitätslinie zwischen zwei in Trägerlängsrichtung aufeinanderfolgenden Querkraftbewehrungen *i* und *ii*. Die kinematische Diskontinuität oder Bruchlinie definiert die charakteristische Richtung I. Unter Voraussetzung einer vertikalen Translationsbewegung entspricht die Richtung des Sprungvektors $\hat{\delta}$ der *y*-Richtung, und senkrecht dazu ist die charakteristische Richtung II definiert. Die Hauptrichtung 3 mit dem zugehörigen Druckfeldwinkel θ und die Hauptrichtung 1 sind in Bild 3.20(c) dargestellt; sie halbieren die charakteristischen Richtungen I und II (Kapitel 3.3.1). Mit $\tan \alpha = s/l_{ys}$ und (3.64) resultiert für die Neigung der Druckfeldes die obere Grenze

$$\cot(2 \cdot \theta) \leq \frac{s}{l_{ys}} \quad (3.84)$$

die in Bild 3.20(d) illustriert ist und in welcher l_{ys} durch (3.73) berücksichtigt wurde. Für den Fall einer unendlich fein verteilten Querkraftbewehrung entspricht die charakteristische Richtung I der *y*-Richtung mit $\alpha = 0$, und für θ resultiert die obere Grenze der Neigung des Druckfeldes von 45° , welche beispielsweise in der Bemessungsvorschrift SIA 262 (2003) für die Bemessung der Querkraftbewehrung von Stahlbetonträgern angegeben ist. Für eine Hochbaudecke mit einer nicht unüblichen Dicke von 250 mm und den Parametern gemäss Bild 3.20, beträgt die maximale Druckfeldneigung bei einem Stababstand s der Querkraftbewehrung von 100 mm beispielsweise 29.6° . Wird für die Bemessung der Querkraftbewehrung eine Druckfeldneigung von 25° vorausgesetzt, beträgt der maximal mögliche Stababstand 141 mm. Mit der Wahl einer steileren Druckfeldneigung oder eines grösseren Stababstands der Querkraftbewehrung kann sich ein Bruch gemäss Bild 3.20(b) einstellen. Mit der Einschränkung (3.84) kann demnach ein sprödes Versagen des Betons (Regime 2 der Fliessbedingungen für Scheiben) zwischen zwei aufeinanderfolgenden Querkraftbewehrungen ausgeschlossen werden. Sie schliesst aber nicht die Überschätzung des Tragwiderstands aufgrund der als unendlich fein verteilt in Rechnung gestellten Querkraftbewehrung aus. Dazu kann mit der Annahme einer Bruchlinie zwischen den Querkraftbewehrungen *i* und *iii* der maximale Bewehrungsgehalt der Querkraftbewehrung *ii* durch Gleichsetzen der Arbeiten der inneren Kräfte für die Bruchlinie *i*-*ii* mit der Bruchlinie *i*-*iii* bestimmt werden zu

$$\rho_{y,ii} = \frac{A_{sy,ii}}{s b_w} = \frac{f_{ce} d_v}{2 \cdot s f_{sy}} \left(\frac{s}{l_{ys}} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{l_{ys}^2}} - \sqrt{1 + \frac{4 \cdot s^2}{l_{ys}^2}} \right) \quad (3.85)$$

Dieser Querkraftbewehrungsgehalt ist lediglich abhängig von den geometrischen Abmessungen des Stahlbetonträgers sowie der konstruktiven Durchbildung der Bewehrung und entspricht dem Bewehrungsgehalt zur Erlangung der maximal möglichen Schubtragfähigkeit des Stahlbetonträgers gemäss (3.80) mit der Druckfeldrichtung aus (3.84), d. h.

$$V_{xy,max} = b_w d_v \frac{f_{ce}}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{s^2}{l_{ys}^2}} - \frac{s}{l_{ys}} \right) \quad (3.86)$$

womit (3.71) bestätigt wird. Für eine gegebene Querkraftbeanspruchung und eine definierte Querschnittshöhe kann mit (3.86) die Stegbreite b_w und mit (3.85) die maximale Querkraftbewehrung ermittelt werden.

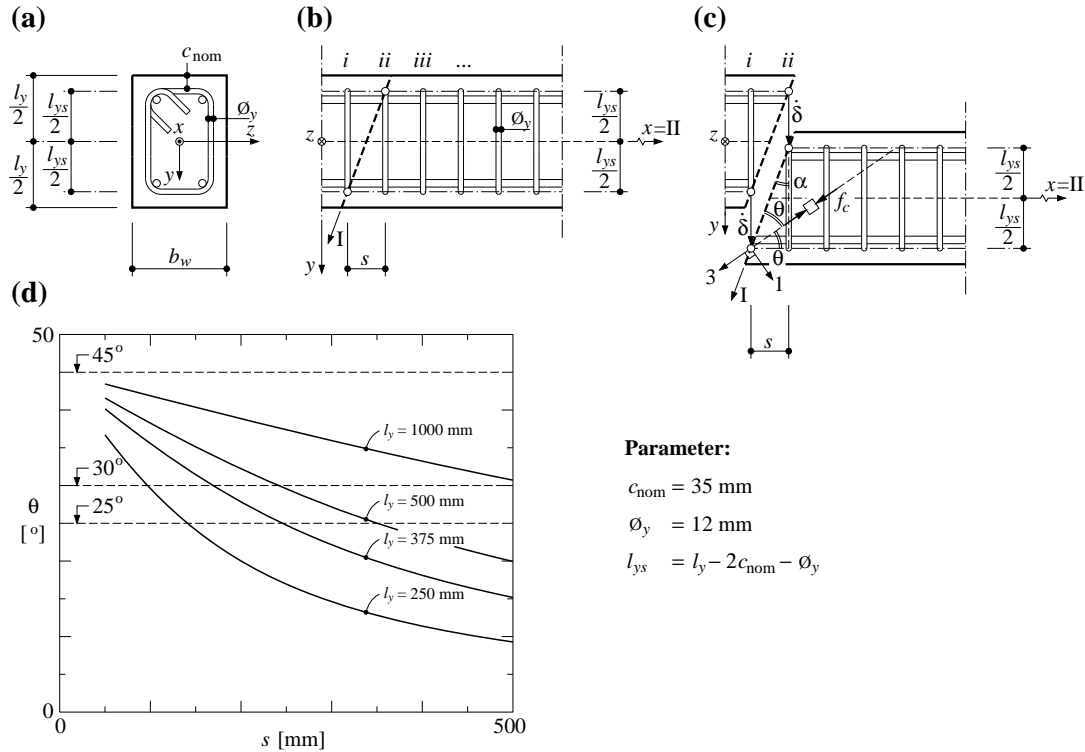


Bild 3.20 Stegdruckbruchmechanismus eines Stahlbetonträgers: (a) Querschnitt, (b) Trägersteg mit charakteristischen Richtungen (Gleit- Bruchlinie), (c) Kollapsrissmechanismus mit Haupttrichtungen, (d) Schranken der Druckfeldneigung.

Einschränkung für die minimale Druckfeldneigung

Als untere Grenze für die Druckfeldneigung θ wird beispielsweise in der Bemessungsvorschrift der Norm SIA 262 (2003) eine Neigung von 25° definiert. Die Wahl der Druckfeldneigung und die damit zusammenhängende reduzierte Betondruckfestigkeit in Trägerstegen wird in der Fachwelt rege diskutiert [Sigrist & Hackbarth (2010)]. Mit dem gerissenen Scheibenmodell [Kaufmann & Marti (1998)], das auf den Gleichgewichtsbeziehungen der Scheibenelemente (3.45) aufbaut und die Verzerrungen im Trägersteg mitberücksichtigt, können numerisch vollständige Last-Verformungsberechnungen durchgeführt und die effektive Betondruckfestigkeit sowie insbesondere die Druckfeldneigung bestimmt werden. Die Druckfeldneigung ist dabei abhängig vom gewählten Bewehrungsgrad im Trägersteg, den Werkstoffeigenschaften sowie dem Verzerrungszustand des Trägerstegs in Trägerlängsrichtung. Sigrist (2011) schlägt auf Grundlage des gerissenen Scheibenmodells und abgestützt auf zahlreiche Vergleiche mit Versuchsergebnissen für die Bemessung von Trägerstegen vor, die Druckfeldneigung auf

$$30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ \quad (3.87)$$

zu beschränken. Die untere Grenze von 30° berücksichtigt, dass auch bei Stahl mit eingeschränkter Duktilität mit einem Verfestigungsverhältnis von $f_{st}/f_{sy} = 1.08$ und einer Bruchdehnung von $\varepsilon_{su} = 5\%$ für Betonstahl B500B in SIA 262 (2003) und Stahl B in EC 2 (2004) eine sichere Bemessung garantiert werden kann. Aufgrund der beschränkten Abmessungen von Trägerstegen weisen die darin enthaltenen Querkraftbewehrungen üblicherweise geringe Stab-

durchmesser auf und stammen häufig aus Ringmaterial. Die erwähnten Kriterien zum Verfestigungsverhältnis und zur Bruchdehnung werden eher knapp eingehalten. Die Beschränkung der unteren Druckfeldneigung für die Bemessung auf 30° ist daher vernünftig. Es bleibt jedoch anzumerken, dass diese untere Grenze keine zwingende Grösse dargestellt; eine Reduktion beispielsweise auf 25° muss einher gehen mit einer verminderten Betondruckfestigkeit im Trägersteg [Sigrist & Hackbarth (2010)]. Für Platten mit Querkraftbewehrung schlägt Jäger (2007) infolge experimenteller Beobachtungen eine untere Grenze der Druckfeldneigung von $\cot(\theta) = 1.75$ ($\theta = 29.7^\circ$) vor.

Die untere Grenze der Beziehung (3.87) ist in Bild 3.20(d) ebenfalls eingetragen. Zusammen mit der Bedingung (3.84) für die obere Grenze der Druckfeldneigung wird die Wahlmöglichkeit des Stababstands der Querkraftbewehrung in Abhängigkeit der Druckfeldneigung stark eingeschränkt. Für eine Hochbaudecke mit einer Stärke von $l_y = 250$ mm beträgt der maximal mögliche Stababstand 97 mm bei einer Druckfeldneigung gemäss (3.87). Wird ein Stababstand von 75 mm gewählt, beschränkt sich die mögliche Wahl der Druckfeldneigung auf das Intervall zwischen 30° und 33° . Mit der Beziehung (3.84) zur Verhinderung eines spröden Betondruckbruchs ergeben sich für die Baupraxis Einschränkungen, die die konstruktive Durchbildung erschweren; eine Querkraftbewehrung in einer sehr schlanken Hochbaudecke mit 200 mm Deckenstärke bedürfte eines Stababstands von 68 mm bei einer Druckfeldneigung von 30° . Hingegen garantieren die Beziehungen (3.82) und (3.83) zusammen mit den Grenzen in (3.87) eine sichere Bemessung der Querkraftbewehrung mit Berücksichtigung des endlichen Stababstands der Querkraftbewehrung.

Diskussion

In den Bemessungsvorschriften ACI 318 (2008) und Model Code (2010) setzt sich der Querkraftwiderstand für Stahlbetonträger aus den Anteilen der Querkraftbewehrung sowie des Betons zusammen. Diese kombinierte Tragwirkung wurde experimentell [Jäger & Marti (2006)] und theoretisch [Jäger (2007)] auch für Stahlbetonplatten auf Grundlage des sogenannten Erweiterten Sandwichmodells bestätigt. Gemäss derartigen Modellvorstellungen wird ein Teil der Querkraft über Rissverzahnung im Beton übertragen.

Für die Überprüfung bestehender Tragstrukturen sind solche Modellvorstellungen vernünftig. Hingegen sollte der Betonanteil bei der Bemessung einer Querkraftbewehrung in Trägern und Platten vernachlässigt werden, was zu einer sicheren und vernünftigen Bemessung der Querkraftbewehrung führt. Dabei sollte der Einfluss des endlichen Stababstands der Querkraftbewehrung insbesondere bei Trägern und Platten mit geringer Querschnittshöhe berücksichtigt werden. Bei einer Bemessung auf Grundlage der Beziehungen (3.82), (3.83) und (3.87) entfallen zusätzliche Vorschriften hinsichtlich des Stababstands.

Die Auswirkungen der endlichen Stababstände der Querkraftbewehrung auf den Querkraftwiderstand von Stahlbetonträgern werden in Nielsen & Hoang (2011) diskutiert. Für die Querkraftabtragung wird dabei eine kombinierte Tragwirkung von Querkraftbewehrung und Beton angenommen. Mit der gleichen Modellvorstellung schlagen Loov & Peng (2000) Anpassungen der Bemessungsvorschriften in einer vorangegangenen Version von ACI 318 (2008) vor, basierend auf den Betrachtungen einer kinematischen Diskontinuität. Ichinose & Hanya (1995) weisen auf Grundlage der Auswertung von Versuchsergebnissen darauf hin, dass der endliche Stababstand der Querkraftbewehrung verantwortlich ist für einen Teil (bis 25%) der reduzierten Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonträgern; ihre Nachrechnungen basieren ebenfalls auf dem kinematischen Grenzwert der Traglastverfahren, die angenommenen Bruchflächen setzen sich jedoch aus mehreren Teilebenen faltwerkartig zusammen, was die Berechnungen erschwert.

Der eigene Beweggrund zur Betrachtung der Problemstellung endlicher Stababstände von Querkraftbewehrungen liegt in einer Durchstanzversuchsreihe [Heinzmann et al. (2011)], bei der sich bei einem Versuchskörper (SP3) ein Bruchbild entsprechend Bild 3.20(b) einstellte, siehe Kapitel 3.8.

3.7 Fließbedingungen für Stahlbeton-Platten- und Schalenelemente

3.7.1 Statische und kinematische Beziehungen von Plattenelementen

Statische Beziehungen, Spannungserresultierende

Die an einem Plattenelement angreifenden Spannungen können durch Integration über die Plattenstärke zu Spannungserresultierenden zusammengefasst werden. Aus den Normalspannungen σ_{xx} und σ_{yy} sowie den Schubspannungen $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ parallel zur Plattenmittelebene (Bild 3.21(a)) resultieren die Membrankräfte n_{xx} , n_{yy} , n_{xy} und die Biegemomente m_{xx} , m_{yy} , m_{xy}

$$\begin{aligned} n_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz, & n_{yy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz, & n_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = n_{yx} \\ m_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} \cdot z dz, & m_{yy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} \cdot z dz, & m_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z dz = m_{yx} \end{aligned} \quad (3.88)$$

und die Integration der Schubspannungen τ_{zx} resp. τ_{zy} in Dickenrichtung der Platte führt auf die Querkräfte v_{zx} resp. v_{zy} (Bild 3.21(b)).

$$v_{zx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dz, \quad v_{zy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} dz \quad (3.89)$$

Insgesamt resultieren die acht Schnittkräfte, die am Plattenelement in Bild 3.21(b) angreifen.

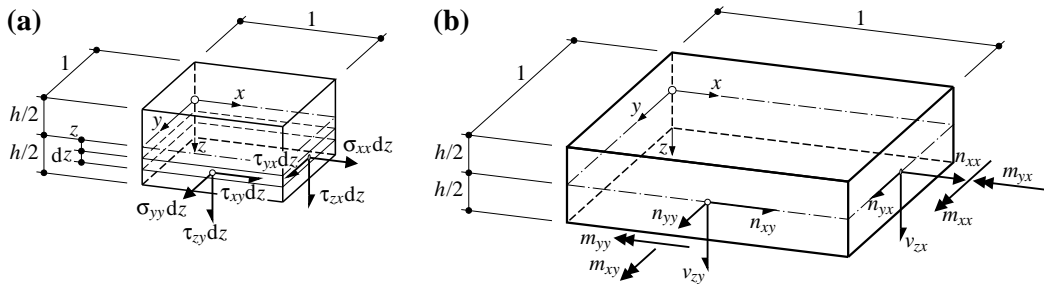


Bild 3.21 Plattenelement: (a) Spannungen; (b) Spannungserresultierende.

Notation und Vorzeichenkonvention

Bei den doppelten Indizes bezeichnet jeweils der erste Index die Richtung, in welcher die Spannung wirkt; der zweite Index bezeichnet die Normalenrichtung des Flächenelements, an welchem die Spannung angreift; Indizes nach einem Komma bezeichnen partielle Ableitungen nach den entsprechenden Variablen.

Für die Spannungen und deren Resultierenden werden die in Bild 3.21 dargestellten Vorzeichenkonventionen verwendet. Positive Spannungen wirken am Element mit positiver Normalenrichtung in positiver Koordinatenrichtung; mithin sind Normalzugspannungen positiv, und positive Momente entsprechen positiven Spannungen für positive Werte der Koordinate z .

Kinematische Relationen

Die Betrachtung dünner, ebener Platten, setzt üblicherweise voraus, dass die Durchbiegung w senkrecht zur Plattenmittelebene klein ist gegenüber der Plattenstärke h . Im Weiteren kann analog zur Annahme von BERNOLLI-NAVIER über das Eben- und Senkrechtbleiben bei Stabtragwerken, in Platten vorausgesetzt werden, dass Normalen zur unverformten Mittelebene gerade und senkrecht zur verformten Mittelebene der Platte bleiben. Der Abstand z_P zwischen zwei beliebigen Punkten auf der Normalen zur verformten Mittelebene ist invariant, Bild 3.22(a). Diese Annahmen führen demzufolge auf eine schubstarre Betrachtung der Platte, wodurch die Schubverzerrungen und die Verzerrungen in der z -Richtung der Platte verschwinden

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0 \quad (3.90)$$

Folglich bildet z eine Hauptachse des Verzerrungszustands der Platte, und in jeder Parallelebene (Lamelle) zur Bezugsebene x, y des kartesischen Koordinatensystems herrscht ein ebener Verzerrungszustand, d.h. $z \equiv 2$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon_{zz} = 0$.

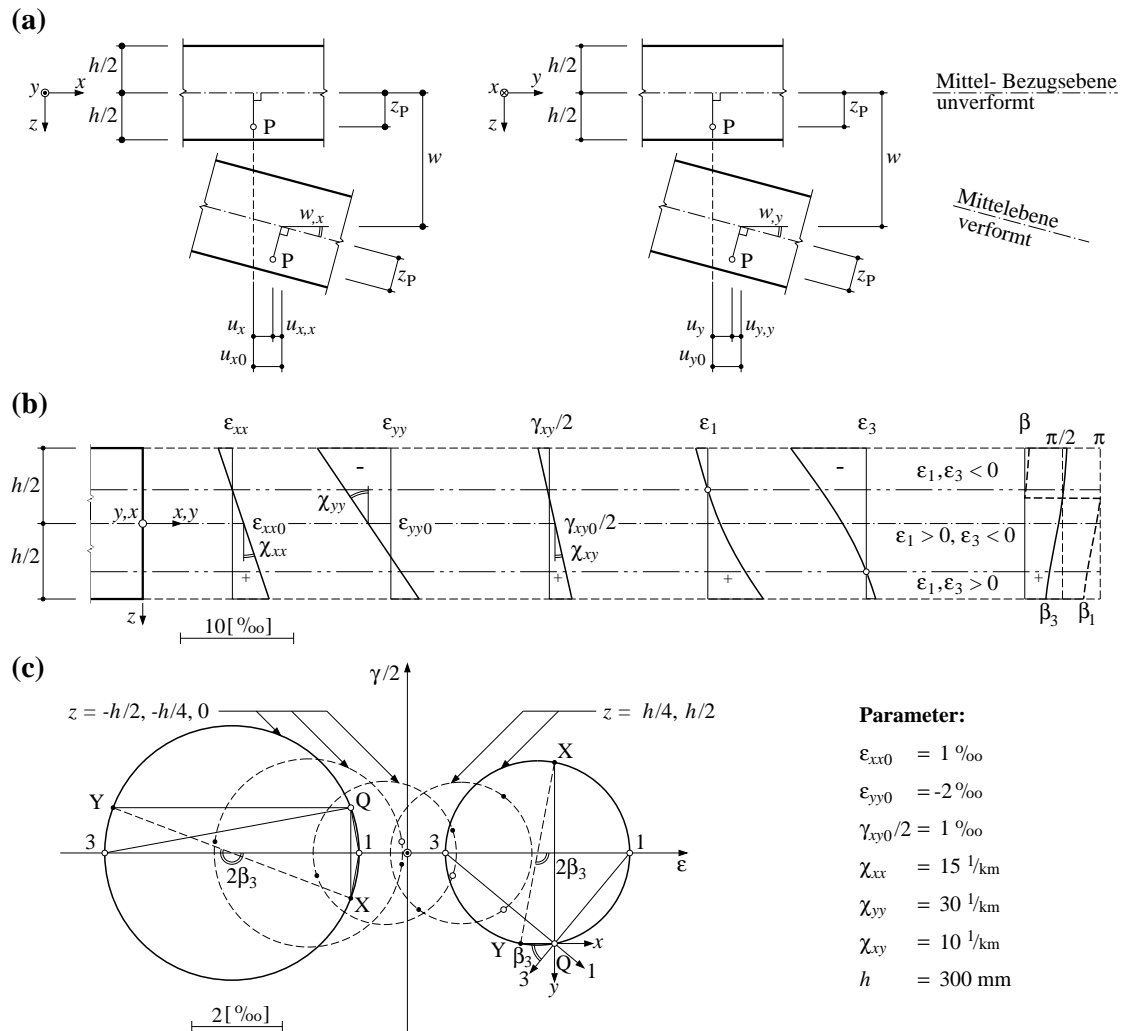


Bild 3.22 Kinematische Beziehungen: (a) Plattenverformung; (b) Verzerrungen, Hauptverzerrungen und Richtungen der Hauptverzerrungen; (c) MOHRscher Verzerrungskreis.

Die Verschiebungen eines beliebigen Punktes P auf einer Parallelebene zur Bezugsebene sind in Bild 3.22(a) dargestellt und ergeben sich zu

$$u_x = u_{x0} - z \cdot w_{,x} \quad , \quad u_y = u_{y0} - z \cdot w_{,y} \quad , \quad u_z = w \quad (3.91)$$

wobei u_{x0} und u_{y0} die Verschiebungen in der Bezugsebene bezeichnen. Die Verzerrungen können mit den kinematischen Relationen und mit der in der Baupraxis üblichen Näherung, dass die Krümmungen χ den negativen, partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Durchbiegung w entsprechen, bestimmt werden zu

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}(z) &= u_{x,x} = \varepsilon_{xx0} + z \cdot \chi_{xx} \\ \varepsilon_{yy}(z) &= u_{y,y} = \varepsilon_{yy0} + z \cdot \chi_{yy} \\ \gamma_{xy}(z) &= u_{x,y} + u_{y,x} = \gamma_{xy0} + 2 \cdot z \cdot \chi_{xy} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Folglich variieren die Verzerrungen linear mit der Dickenrichtung z der Platte; die zugehörigen Dehnungsebenen sind in Bild 3.22(b) dargestellt. Mit den drei Verzerrungen der Mittelebene ε_{xx0} , ε_{yy0} und γ_{xy0} , den zwei Krümmungen χ_{xx} , χ_{yy} sowie der Drillung χ_{xy} lassen sich die Verformungen eines Plattenelements unter Biege- und Drillmomenten zusammen mit den Membrankräften vollständig beschreiben und entsprechen demnach verallgemeinerten Verformungen nach Kapitel 3.2.1, Bild 3.22(b).

Mit (3.53) angewendet auf (3.92) resultieren die Hauptverzerrungen ε_1 und ε_3

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(z) &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\varepsilon_{xx}(z) + \varepsilon_{yy}(z) \right] + \sqrt{\left[\varepsilon_{xx}(z) - \varepsilon_{yy}(z) \right]^2 + \gamma_{xy}(z)^2} \right\} \\ \varepsilon_3(z) &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\varepsilon_{xx}(z) + \varepsilon_{yy}(z) \right] - \sqrt{\left[\varepsilon_{xx}(z) - \varepsilon_{yy}(z) \right]^2 + \gamma_{xy}(z)^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.93)$$

wobei die Konvention $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_1$ gilt. Bild 3.22(b) zeigt den Verlauf der Hauptverzerrungen für einen bestimmten Satz kinematischer Parameter eines Plattenelements. Die Hauptverzerrungen (3.93) sind hyperbolische Funktionen und die zweite Ableitung nach z ist für ε_1 negativ und für ε_3 positiv definiert. Das Krümmungsverhalten ist für $\varepsilon_1(z)$ demnach konvex und für $\varepsilon_3(z)$ konkav.

Weiter sind in Bild 3.22 (b) die Winkel β_3 resp. β_1 dargestellt, welche die Richtungen der kleineren Hauptverzerrung ε_3 resp. der grösseren Hauptverzerrung ε_1 bezüglich der x -Achse beschreiben (positiv im Uhrzeigersinn). In Anlehnung an (3.54) resultieren die Winkel

$$\beta_3(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{\varepsilon_{yy}(z) - \varepsilon_{xx}(z)}{\gamma_{xy}(z)} \right) & (\gamma_{xy}(z) \geq 0) \\ \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{\varepsilon_{yy}(z) - \varepsilon_{xx}(z)}{\gamma_{xy}(z)} \right) + \frac{\pi}{2} & (\gamma_{xy}(z) < 0) \end{cases} \quad (3.94)$$

und $\beta_1 = \beta_3 \pm \pi/2$ für $\gamma_{xy} > 0$ resp. < 0 , Bild 3.22(c).

Für die Bedingung $\varepsilon_{xx} \cdot \varepsilon_{yy} = (\gamma_{xy}/2)^2$ verschwindet eine der beiden Hauptverzerrungen, und es entsteht eine quadratische Gleichung für die Nullstellen z_1 und z_3 der Hauptverzerrungen.

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 (\chi_{xx} \chi_{yy} - \chi_{xy}^2) + z (\varepsilon_{y0} \chi_{xx} + \varepsilon_{x0} \chi_{yy} - \gamma_{xy0} \chi_{xy}) + (\varepsilon_{x0} \varepsilon_{y0} - 1/4 \cdot \gamma_{xy0}^2) \\ z_1 &= \frac{\gamma_{xy0} \chi_{xy} - (\varepsilon_{y0} \chi_{xx} + \varepsilon_{x0} \chi_{yy}) + \sqrt{(\varepsilon_{y0} \chi_{xx} - \varepsilon_{x0} \chi_{yy})^2 + (\gamma_{xy0} \chi_{xx} - 2\varepsilon_{x0} \chi_{xy})(\gamma_{xy0} \chi_{yy} - 2\varepsilon_{y0} \chi_{xy})}}{2(\chi_{xx} \chi_{yy} - \chi_{xy}^2)} \\ z_3 &= \frac{\gamma_{xy0} \chi_{xy} - (\varepsilon_{y0} \chi_{xx} + \varepsilon_{x0} \chi_{yy}) - \sqrt{(\varepsilon_{y0} \chi_{xx} - \varepsilon_{x0} \chi_{yy})^2 + (\gamma_{xy0} \chi_{xx} - 2\varepsilon_{x0} \chi_{xy})(\gamma_{xy0} \chi_{yy} - 2\varepsilon_{y0} \chi_{xy})}}{2(\chi_{xx} \chi_{yy} - \chi_{xy}^2)} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Morley (1966) vermerkte, dass im Intervall über die Plattendicke ($-h/2 \leq z \leq h/2$), abgesehen von Spezialfällen, an maximal zwei Stellen z_1 und z_3 eine der beiden Hauptverzerrungen verschwinden kann. Damit ergeben sich über die Plattendicke im Maximum drei, durch die Nullstellen z_1 und z_3 begrenzte Bereiche mit Verzerrungszuständen (ε_1 und $\varepsilon_3 < 0$), (ε_1 und $\varepsilon_3 > 0$) und ($\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_3 < 0$) und insgesamt neun verschiedene, in Seelhofer (2009) dargestellte Verzerrungszustände. Genau zwei Bereiche mit Verzerrungszuständen gleichen Vorzeichens resultieren, wenn die Diskriminante in (3.95) verschwindet. Für den Spezialfall, dass (3.95) für mehr als zwei Werte von z erfüllt ist, müssen alle drei Klammerwerte rechterhand in (3.95)₁ verschwinden. Mehr als zwei Werte von z , bei denen die Hauptverzerrungen verschwinden, existieren nur, falls alle drei Klammerausdrücke in (3.95)₁ rechterhand verschwinden und demnach $\varepsilon_{xx0} \cdot \gamma_{yy} = \varepsilon_{yy0} \cdot \gamma_{xx}$ gelten muss. Dies kann nur für den Fall einachsiger Verzerrungszustände mit über die Plattendicke konstanter Richtung eintreten.

Unter der Voraussetzung eines isotropen Materialverhaltens ist die z -Richtung nicht nur eine Hauptachse des Verzerrungszustands sondern auch eine Hauptrichtung verträglicher Spannungszustände. Als Folgerung der Schubstarren Betrachtung des Plattenelements mit (3.90) üben einzelne Parallelebenen (Lamellen) parallel zur Bezugsebene innerhalb des Plattenelements aufeinander keine Kräfte aus ($\tau_{xz}/\gamma_{xz} \rightarrow \infty$, $\tau_{yz}/\gamma_{yz} \rightarrow \infty$). Die Querkkräfte sind als für das Gleichgewicht notwendige verallgemeinerte Reaktionen zu betrachten, Kapitel 3.2.2. Für eine vernachlässigbare Volumenkraft k_{zz} in z -Richtung resultiert aus der Gleichgewichtsbeziehung $\sigma_{zz,z} + k_{zz} = 0$ und der Randbedingung an den Plattenrändern ($z \pm h/2$), wonach σ_{zz} verschwinden muss ($\sigma_{zz} = \sigma_3 = 0$), dass der Spannungszustand in jeder Lamelle des Plattenelements näherungsweise eben ist, gleich wie er bei Stäben näherungsweise einachsig ist. Zusammengefasst führen die eingangs dieses Kapitels formulierten Annahmen zu den dünnen Platten direkt auf die Aufteilung der Plattenelemente in einzelne Lamellen, wobei sich diese mit (3.95) üblicherweise in drei Bereiche aufteilen lassen.

Gleichgewichtsbedingungen

Das Kräftegleichgewicht in z -Richtung am differentiellen Element in Bild 3.23(a) liefert

$$v_{zx,x} + v_{zy,y} + q_z = 0 \quad (3.96)$$

und mit der Formulierung des Momentengleichgewichts bezüglich der x - resp. y -Achse resultieren

$$\begin{aligned} m_{xx,x} + m_{xy,y} - v_{zx} &= 0 \\ m_{yy,y} + m_{yx,x} - v_{zy} &= 0 \end{aligned} \quad (3.97)$$

Durch Differentiation von (3.97) und Einsetzen in (3.96) entsteht die Gleichgewichtsbedingung für Plattenelemente im kartesischen Koordinatensystem als inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$m_{xx,xx} + 2 \cdot m_{xy,xy} + m_{yy,yy} + q_z = 0 \quad (3.98)$$

unter Beachtung von $m_{xy} = m_{yx}$.

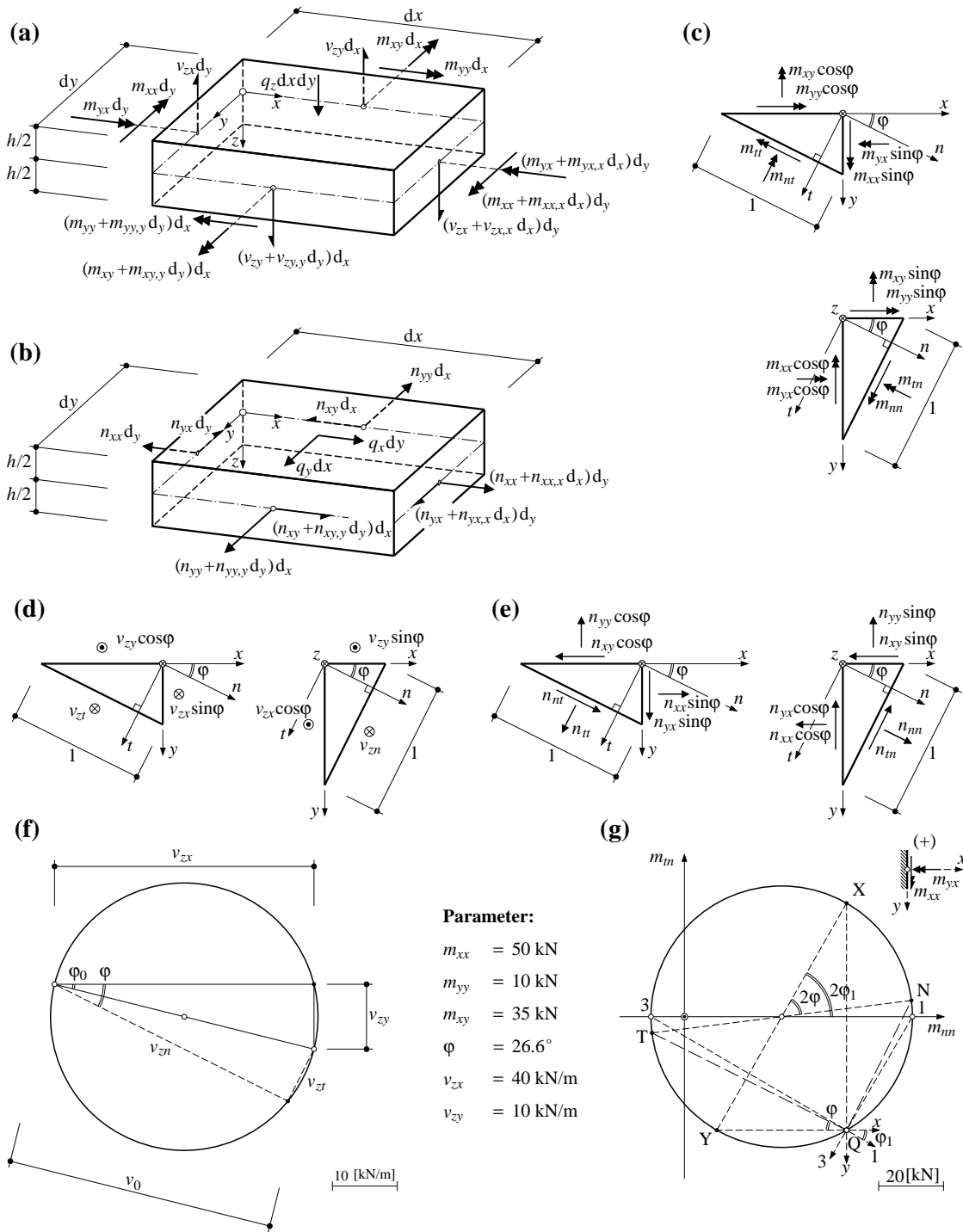


Bild 3.23 Gleichgewicht am Plattenelement: (a) Beanspruchung senkrecht zur Plattenmittelebene und daraus resultierende Momente und Querkräfte; (b) Beanspruchung in der Plattenmittelebene daraus resultierende Membrankräfte; (c), (d), (e) Spannungstransformation der Momente, Querkräfte und Membrankräfte; (f) THALESkreis zur Transformation der Querkräfte; (g) MOHRscher Kreis zur Transformation der Biege- und Drillmomente resp. Membrankräfte.

Spannungstransformation der Momente und Membrankräfte

Betrachtet werden die beiden Schnittkörperdiagramme in Bild 3.23(c) mit einem beliebigen Schnitt mit der Normalen n , deren Richtung mit der x -Achse den Winkel φ einschliesst. Formu-

lierung des Momentengleichgewichts an den beiden Schnittkörpern in Richtung der Koordinaten x und y liefert

$$\begin{Bmatrix} m_{nn} \\ m_{nt} \\ m_{tn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -2 \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (3.99)$$

Die Beziehung (3.99) stellt, in Analogie zu (3.48), die Transformationsbeziehung für Biege- und Drillmomente dar; eine analoge Transformationsbeziehung für die Membrankräfte resultiert durch den Austausch von m und n in (3.99), (Bild 3.23(e)). Geometrisch lässt sich diese Transformationsbeziehung durch den MOHRschen Kreis der Biege- und Drillmomente in Bild 3.23(g) darstellen.

Die Hauptmomente m_1 und m_3 , in deren Richtungen die Drillmomente verschwinden ($m_{tn} = m_{nt} = 0$), betragen

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{m_{xx} + m_{yy}}{2} + \frac{\sqrt{(m_{xx} - m_{yy})^2 + 4m_{xy}^2}}{2} \\ m_3 &= \frac{m_{xx} + m_{yy}}{2} - \frac{\sqrt{(m_{xx} - m_{yy})^2 + 4m_{xy}^2}}{2} \end{aligned} \quad (3.100)$$

wobei die Konvention $m_1 \geq m_3$ gilt. Die zugehörige Richtung φ_1 zwischen der x -Achse und der Hauptachse 1 ergibt sich aus

$$\tan(2\varphi_1) = \frac{2m_{xy}}{m_{xx} - m_{yy}} \quad (3.101)$$

und ist in Bild 3.23(g) dargestellt.

Spannungstransformation der Querkräfte

Gleichgewicht in z -Richtung an den Schnittkörperdiagrammen in Bild 3.23(d) liefert die Transformationsbeziehungen für die Querkräfte, welche geometrisch mit Hilfe des THALESkreises interpretiert werden können (Bild 3.23(f)).

$$\begin{Bmatrix} v_{zn} \\ v_{zt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_{zx} \\ v_{zy} \end{Bmatrix} \quad (3.102)$$

Den Komponenten v_{zx} und v_{zy} der Querkraft kommt physikalisch keine Bedeutung zu. Die Querkraft wird an jeder Stelle der Platte in Richtung der Hauptquerkraft v_0 abgetragen.

$$v_{zn}^2 + v_{zt}^2 = v_{zx}^2 + v_{zy}^2 = v_0^2 \quad (3.103)$$

Die Richtung der Hauptquerkraft schliesst mit der x -Achse den Winkel φ_0 ein

$$\varphi_0 = \arctan \frac{v_{zy}}{v_{zx}} \quad (3.104)$$

wobei senkrecht dazu die Querkraft verschwindet. Im Allgemeinen unterscheiden sich die Richtungen der Hauptquerkraft und der Hauptmomente, $\varphi_0 \neq \varphi_1$. Mit der Abtragung der Hauptquerkraft in Richtung φ_0 geht im Allgemeinen eine Änderung der Biege- und Drillmomenten einher (3.97). Nur in Spezialfällen, bei einachsiger Biegung, fallen die beiden Richtungen φ_1 und φ_0 zusammen.

3.7.2 Biegewiderstand

Zur Beschreibung des Biegeverhaltens von Stäben wird üblicherweise die BERNOULLI-NAVIER Hypothese zum Eben- und Senkrechtbleiben der Querschnitte vorausgesetzt. Zusammen mit den Werkstoffbeziehungen und der Formulierung des Gleichgewichts sind unter Vorgabe bestimmter verallgemeinerter Verzerrungen (Achsdehnungen und Krümmungen) die verallgemeinerten Spannungen (Normalkraft und Biegemomente) mittels Integration zu bestimmen (Kapitel 3.2.1). Für vereinfachte Werkstoffbeziehungen sind die verallgemeinerten Spannungs-Verzerrungsbeziehungen darstellbar.

Nachfolgend soll der Biegewiderstand für den in Bild 3.24(c) dargestellten, rechteckförmigen Plattenausschnitt mit der Höhe h und der bezogenen Breite $b = 1.0$ m auf der Grundlage der in den Bildern (a) und (b) dargestellten, starr-ideal plastischen Werkstoffbeziehungen für den Betonstahl und den Beton bestimmt werden. Die kinematischen Relationen und mithin eine allfällige Begrenzung der Verzerrungen bleiben unberücksichtigt. Der Biegewiderstand resultiert somit einzig aus der Formulierung des Gleichgewichts am Schnittkörperdiagramm in Bild 3.24(c). Die Biegebewehrung soll parallel, im Abstand von z_s zur Plattenmittelebene verlaufen und lediglich Kräfte in ihrer Richtung übernehmen.

Für den Biegewiderstand m_u ohne Berücksichtigung der Bewehrung auf der Biegedruckseite resultiert

$$m_u = f_c h^2 \omega_b \left(\frac{1}{2} + \frac{z_{sb}}{h} - \frac{\omega_b}{2} \right) \quad (3.105)$$

wobei für den mechanischen Bewehrungsgehalt $\omega_b = (a_{sb} f_{sy}) / (h f_c)$ gilt und die Höhe der Biegedruckzone $t_t = h \omega_b$ beträgt. Wird eine Bewehrung auf der Biegedruckseite berücksichtigt, Bild 3.24(d), bedarf es einer Fallunterscheidung für die Bestimmung der Druckzonenhöhe und somit des Biegewiderstands. Für den Fall, dass $t_t < (h/2 + z_{st})$, d. h. die Höhe der Biegedruckzone kleiner ist als der Abstand des Schwerpunkts der Druckbewehrung vom gedrückten Querschnittsrand, bleibt die Bewehrung auf Zug beansprucht mit $\sigma_s = +f_{sy}$ (Bild 3.24(d), Fall I). Entspricht die Höhe der Biegedruckzone gerade dem erwähnten Abstand, bleibt die Bewehrung auf der Biegedruckseite elastisch mit $\sigma_s = (f_{sy}/\omega_t) \cdot (1/2 + z_{st}/h - \omega_b)$ (Bild 3.24(d), Fall II). Darüber hinaus, d. h. für den Fall, dass $t_t > (h/2 + z_{st})$, ist die entsprechende Bewehrung auf Druck beansprucht mit $\sigma_s = -f_{sy}$ (Bild 3.24(d), Fall III). Der Biegewiderstand lässt sich demnach wie folgt bestimmen

$$\begin{aligned} m_u &= f_c h \left[(\omega_b + \omega_t) \left(\frac{h}{2} + z_{sb} - \frac{(\omega_b + \omega_t)h}{2} \right) - \omega_t (z_{sb} - z_{st}) \right] & \left(\omega_b + \omega_t < \frac{1}{2} + \frac{z_{st}}{h} \right) \\ m_u &= f_c h \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{z_{st}}{h} \right) \cdot \left(\frac{h}{4} + \frac{z_{st}}{2} \right) + \omega_b (z_{sb} - z_{st}) \right] & \left(\omega_b + \omega_t = \frac{1}{2} + \frac{z_{st}}{h} \right) \\ m_u &= f_c h \left[(\omega_b - \omega_t) \left(\frac{h}{2} + z_{sb} - \frac{(\omega_b - \omega_t)h}{2} \right) + \omega_t (z_{sb} - z_{st}) \right] & \left(\omega_b - \omega_t > \frac{1}{2} + \frac{z_{st}}{h} \right) \end{aligned} \quad (3.106)$$

Dieses an sich mühsame Vorgehen mit Fallunterscheidung lässt sich mit den heutzutage zur Verfügung stehenden Computerprogrammen einfach behandeln. In (3.106) schliesst die Druckzone die Bewehrungsfläche mit ein; der daraus entstehende Fehler ist gering und wird vernachlässigt. Die Differenzen der Biegewiderstände im Fall II resp. III zum Fall I betragen

$$\begin{aligned}
\Delta m_u &= \frac{f_c}{8} (h + 2 \cdot z_{st} - 2 \cdot h \omega_b - 2 \cdot h \omega_t)^2 & \left(\omega_b + \omega_t = \frac{1}{2} + \frac{z_{st}}{h} \right) \\
\Delta m_u &= -f_c h \omega_t (h + 2 \cdot z_{st} - 2 \cdot h \omega_b) & \left(\omega_b + \omega_t > \frac{1}{2} + \frac{z_{st}}{h} \right).
\end{aligned} \tag{3.107}$$

Grenzen der Biegebewehrung

Eine Mindestbewehrung und der damit einhergehende Biegewiderstand muss mindestens dem beim Reißen des Betons aufgetragenen Moment entsprechen; ansonsten kann ein spröder Bruch bei der Erstrissbildung nicht ausgeschlossen werden. Der notwendige mechanische Bewehrungshalt unter Vernachlässigung der Bewehrung auf der Biegedruckseite und der Annahme für die Zugfestigkeit des Betons gemäss (2.6) beträgt

$$\omega_{\min} = \frac{d}{h} \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1}{10} \left(\frac{1}{f_c} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{h}{d} \right)^2} \right] \tag{3.108}$$

wobei vereinfachend mit Bruttoquerschnittswerten gerechnet wurde und d der statischen Höhe der Biegebewehrung entspricht mit $d = h/2 + z_s$.

Für die maximale Bewehrung auf Basis der starr - ideal plastischen Werkstoffbeziehungen entspricht die Höhe der Biegedruckzone dem Abstand der Bewehrung vom gedrückten Querschnittsrand, $t_t = h/2 + z_{sb}$ in Bild 3.24(d) Fall III.

$$\omega_{b\max} = \frac{d}{h} + \omega_t \quad , \quad \omega_{t\max} = \frac{d}{h} + \omega_b \tag{3.109}$$

Unter Vernachlässigung der Bewehrung auf der Biegedruckseite ($\omega_t = 0$ resp. $\omega_b = 0$) resultiert eine obere Schranke für den mechanischen Bewehrungsgehalt von $\omega_{\max} \cong 0.8$ bis 0.9 .

In Bemessungsnormen, z. B. SIA 262 (2003), wird die Dehnungsbegrenzung bei den Werkstoffbeziehungen mitberücksichtigt, so dass ein Versagen des Betons auf der Biegedruckseite vor dem Fließen der Bewehrung auf der Biegezugseite ausgeschlossen werden kann. Daraus ergibt sich eine obere Schranke für den Bewehrungsgehalt von $\omega_{b\max} \cong 0.35$ bis 0.5 .

Einfluss einer Bewehrung auf der Biegedruckseite

Die beiden Diagramme in Bild 3.24(e) und (f) zeigen exemplarisch die markante Steigerung des Biegewiderstands mit einer zunehmenden Bewehrung auf der Biegezugseite ω_b für eine definierte Querschnittshöhe h des Rechteckquerschnitts. Kleine Biegebewehrungsgehalte ω_b haben einen verschwindenden Einfluss auf den Klammerausdruck der Beziehung (3.105) und das Biegemoment variiert annähernd linear zum Bewehrungsgehalt ω_b , Bild 3.24(e). Demgegenüber ist die Steigerung des Biegewiderstands infolge einer zusätzlich eingelegten Biegebewehrung auf der Biegedruckseite gering, insbesondere für moderate Bewehrungsgehalte der Druckbewehrung ω_t . Für geringe Bewehrungsgehalte auf der Biegezugseite ω_b nimmt bei deren Steigerung das Verhältnis zwischen den Biegewiderständen mit und ohne Berücksichtigung der Biegedruckbewehrung ab, Bild 3.24(f). Dieser Effekt tritt jedoch bei sehr geringen Bewehrungsgehalten auf der Biegezugseite auf.

Der Einsatz einer Bewehrung auf der Biegedruckseite wirkt sich vor allem positiv auf das Langzeitverhalten aus. Der gedrückte Beton kriecht und entzieht sich bei einer vorhandenen Bewehrung der Last, wodurch eine Lastumlagerung vom Beton in die Bewehrung eintritt und somit die Verformungen aus Kriechen eingeschränkt werden. Des Weiteren begrenzt der Einsatz einer Bewehrung auf der Biegedruckseite die Ausdehnung der Druckzonenhöhe. Üblicher-

weise sollte die Bewehrung auf der Biegedruckseite zusammen mit einer Umschnürungsbewehrung eingesetzt werden. Die Gefahr des Ausknickens der gedrückten Bewehrung kann dadurch gebannt werden, und das Verformungsvermögen der gedrückten Zone nimmt markant zu [Marti et al. (1999)].

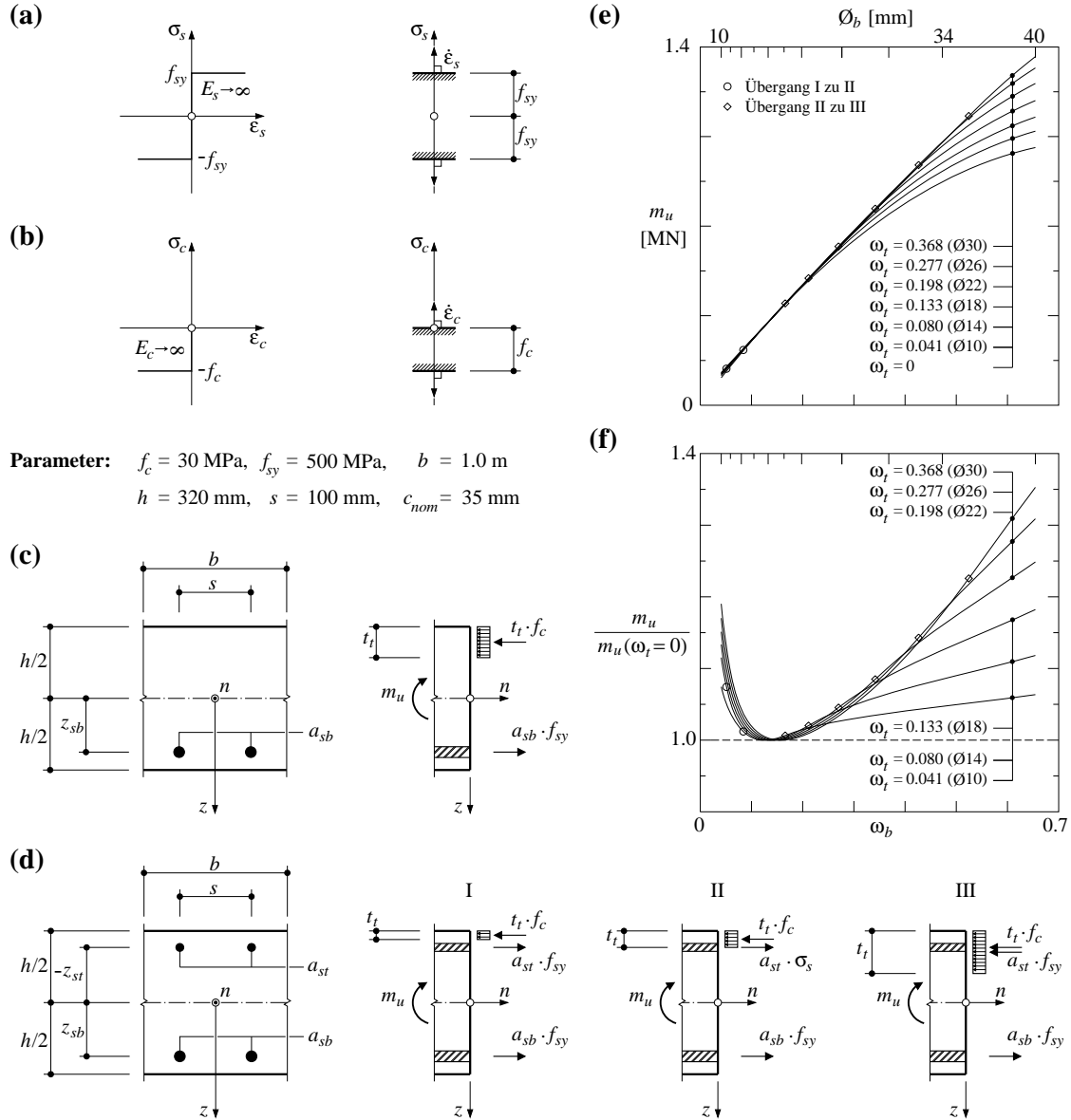


Bild 3.24 Biegewaterstand eines Plattenelements: (a) Betonstahl unter einachsiger Beanspruchung, starr-ideal plastisches Verhalten, Fließbedingung; (b) Beton unter einachsiger Beanspruchung, starr-ideal plastisches Verhalten, Fließbedingung; (c) Schnittkörperdiagramm ohne Bewehrung auf der Biegedruckseite; (d) Schnittkörperdiagramme mit Berücksichtigung einer Bewehrung auf der Biegedruckseite; (e) Biegewaterstand, (f) Verhältnis der Biegewaterstände in Funktion der Bewehrungen.

Vorzeichenkonvention für negative Biegewaterstände

In der vorliegenden Arbeit werden die negativen Biegewaterstände mit einem Apostroph versehen, beispielsweise m'_u . Sie sind negativ definiert und lassen sich mit obigen Beziehungen für die positiven Biegemomente sinngemäss ermitteln.

3.7.3 Fließbedingungen nach dem unteren Grenzwertsatz (Sandwichmodell)

Modellvorstellung

In Anlehnung an die Modellvorstellung für Stahlbetonbiegeträger, wonach der Trägerquerschnitt in einen Druck- resp. Zugstringer sowie eine Stegscheibe aufgeteilt wird [Marti (1985)], kann ein Stahlbetonplattenelement ebenfalls in drei Tragelemente (Schichten, Scheiben) unterteilt werden. Das Plattenelement in Bild 3.25(a) wird in drei zur Plattenmittelebene parallele Schichten aufgeteilt. Den einzelnen Schichten werden auf Grundlage des statischen Grenzwertsatzes der Traglastverfahren (Kapitel 3.2.2) spezifische Tragwirkungen bezüglich der am Plattenelement angreifenden verallgemeinerten Spannungen (Biege-, Drillmomente, Quer- und Membrankräfte) zugeordnet. Die Biegemomente m_{xx} , m_{yy} und das Drillmoment m_{xy} werden vorzugsweise den oberflächennahen Schichten (Deckeln) mit dem grösstmöglichen Hebelarm zugeordnet. Die Querkraften, welche gemäss der Theorie dünner Platten zur Gewährleistung des Gleichgewichts als verallgemeinerte Reaktionen in Erscheinung treten, werden der mittleren Schicht (Kern) zugewiesen. Membrankräfte können dem Kern, den Deckeln oder einer Kombination der beiden zugewiesen werden. Die Zuordnung der Membrankräfte wird am Schluss dieses Kapitels diskutiert. Aus dem vorangegangenen Kapitel ist bekannt, dass Lamellen parallel zur Mittelebene eines Plattenelements unter der Voraussetzung, dass es sich um dünne Platten handelt, einem ebenen Spannungszustand unterworfen sind. Die oberflächennahen Schichten (Deckel) können demnach als Scheibenelemente betrachtet werden, mit über die Deckeldicken konstanten Betonspannungszuständen. Das Tragverhalten dieser Scheibenelemente kann mit der bekannten Fließbedingung für Scheiben (Kapitel 3.6) beschrieben werden.

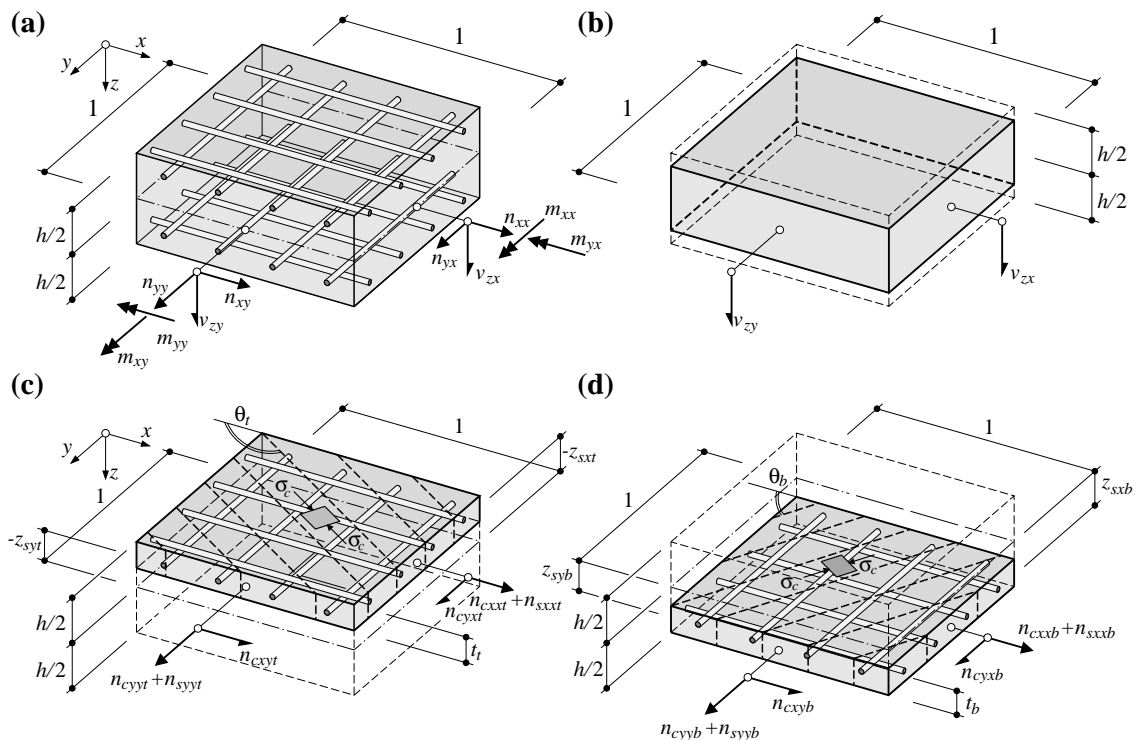


Bild 3.25 Sandwichmodell: (a) Plattenelement mit verallgemeinerten Spannungen; (b), (c), (d) Kern, oberer und unterer Sandwichdeckel.

Die beschriebene Aufteilung in drei Schichten resp. zwei Scheiben parallel und eine Scheibe senkrecht zur Plattenmittelebene, wobei letztere sich parallel zur Richtung der Hauptquerkraft orientiert, ist als Sandwichmodell [Marti (1990)] in der Literatur bekannt und stellt

eine geeignete Modellvorstellung für die Bestimmung von Fließbedingungen für Plattenelemente unter allgemeiner Beanspruchung (Biege- und Drillmomenten sowie Membrankräfte) dar. Ein geschichtlicher Abriss zu den bisherigen Arbeiten zum Sandwichmodell ist in Seelhofer (2009) enthalten. Zu erwähnen bleibt, dass bereits Flügge (1930), in den Schlussbemerkungen seiner Abhandlung über die Spannungsermittlung in Scheiben, die Modellvorstellung des Aufteilens einer Platte in einzelne Schichten erwähnte.

Grundlegende Annahmen und Notation

In den nachfolgenden Ausführungen werden die folgenden Voraussetzungen getroffen. Betrachtet wird ein vierlagig bewehrtes Stahlbetonplattenelement, dessen Bewehrungen senkrecht zueinander stehen und in Richtung der Koordinatenachsen x und y orientiert sind, Bild 3.25(a). Die Querschnittsfläche der einzelnen Bewehrungslagen bezogen auf eine Einheitsbreite wird mit a_{sxb} , a_{sxt} , a_{syb} und a_{syt} bezeichnet. Die Indizes t und b stehen für den oberen (top) und unteren (bottom) Sandwichdeckel. Die Bewehrungen genügen der in Bild 3.26(a) dargestellten starr-ideal plastischen Werkstoffbeziehung. Für den Beton im oberen und unteren Sandwichdeckel wird die in Bild 3.26(b) dargestellte, starr-ideal plastische Werkstoffbeziehung vorausgesetzt. Der Kern in Bild 3.25(b) zur Abtragung der Querkräfte innerhalb des Plattenelements wird als ungerissen vorausgesetzt.

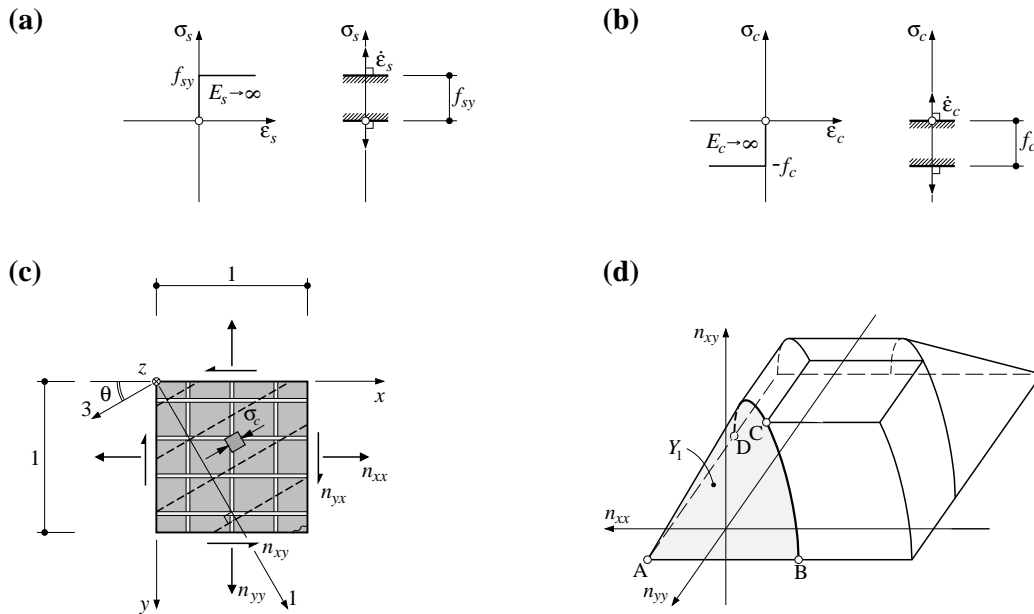


Bild 3.26 Deckelscheibe eines Plattenelements: (a) Werkstoffbeziehung für den Betonstahl; (b) Werkstoffbeziehung für den Beton; (c) Schnittkörperdiagramm des Scheibenelements; (d) Fließfigur der Deckelscheibe.

Formulierung des Gleichgewichts am Plattenelement in Bild 3.25 verlangt

$$\begin{aligned}
 n_{xx} &= n_{cxb} + n_{cxt} + n_{sxb} + n_{sxt}, \\
 n_{yy} &= n_{cyb} + n_{cyl} + n_{syb} + n_{syl}, \\
 n_{xy} &= n_{yx} = n_{cxyb} + n_{cxyl}, \\
 m_{xx} &= n_{cxb} \frac{1}{2}(h - t_b) + n_{cxt} \frac{1}{2}(t_t - h) + n_{sxb} z_{sxb} + n_{sxt} z_{sxt}, \\
 m_{yy} &= n_{cyb} \frac{1}{2}(h - t_b) + n_{cyl} \frac{1}{2}(t_t - h) + n_{syb} z_{syb} + n_{syl} z_{syl}, \\
 m_{xy} &= m_{yx} = n_{cxyb} \frac{1}{2}(h - t_b) + n_{cxyl} \frac{1}{2}(t_t - h)
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

mit

$$\begin{Bmatrix} n_{cxj} \\ n_{cyxj} \\ n_{cyj} \end{Bmatrix} = \sigma_c t_j \cdot \begin{Bmatrix} \cos^2(\theta_j) \\ \sin^2(\theta_j) \\ -\sin(\theta_j)\cos(\theta_j) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n_{sxxj} \\ n_{syyj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{sxxj} a_{sxxj} \\ \sigma_{syyj} a_{syyj} \end{Bmatrix} \quad (3.111)$$

wobei der Index j stellvertretend für den oberen Sandwichdeckel t oder den unteren Sandwichdeckel b steht. Als unbekannte Grössen treten in den Sandwichdeckeln die Dicken t_b und t_t , die Druckfeldrichtungen θ_b und θ_t , der Betonspannungszustand σ_c sowie die Betonstahlspannungen σ_s in allen vier Bewehrungslagen in Erscheinung [Heinzmann & Marti (2010)].

Für den Beton und den Betonstahl in den Deckelscheiben werden, wie bereits erwähnt, die in Bild 3.26(a) und (b) dargestellten starr-ideal plastischen Werkstoffbeziehungen vorausgesetzt. Mithin werden die Spannungen im Betonstahl aller vier Bewehrungslagen als konstant mit $+f_{sy}$ vorausgesetzt, d. h. sämtliche Bewehrungen im Plattenelement fliessen auf Zug ($\sigma_{sxxb} = \sigma_{sxt} = \sigma_{syyb} = \sigma_{syyt} = +f_{sy}$). Zusammen mit dem konstanten Betonspannungszustand von $\sigma_c = -f_c$ und unter der Voraussetzung eines starren Verbunds zwischen dem Beton und dem Betonstahl, beschreibt die Raumkurve durch die Punkte B, C und D in Bild 3.26(d) der Fliessbedingung für Scheibenelemente das Tragverhalten der Sandwichdeckel vollständig, und die Verknüpfung mit den Werkstoffbeziehungen in (3.111) ist eindeutig bestimmt.

Mithin bleiben in den Sandwichdeckeln die Dicken t_b , t_t sowie die Druckfeldrichtungen θ_b , θ_t unbekannt. Diesen vier unbekannten Grössen stehen die sechs am Plattenelement in Bild 3.25(a) angreifenden verallgemeinerten Spannungen (m_{xx} , m_{yy} , m_{xy} , n_{xx} , n_{yy} , n_{xy}) gegenüber. Werden die Membrankräfte gleich null gesetzt resp. vernachlässigt ($n_{xx} = n_{yy} = n_{xy} = 0$), resultiert ein einfach statisch unbestimmtes System zur Bestimmung der Fliessbedingung für die zwei Biegemomente m_{xx} , m_{yy} sowie das Drillmoment m_{xy} . Als freier Parameter wird nachfolgend die Druckfeldrichtung im unteren Sandwichdeckel θ_b gewählt, die innerhalb der Grenzen $0 \leq \theta_b \leq \pi/2$ variiert. Aus (3.110)₁₋₃ resultieren für die Druckfeldrichtung im oberen Sandwichdeckel θ_t sowie für die Sandwichdeckeldicken t_b resp. t_t in Abhängigkeit der Druckfeldrichtung θ_b die Beziehungen

$$\sin(2\theta_t) = -\frac{t_b}{t_t} \sin(2\theta_b), \quad (3.112)$$

$$t_b = \frac{2h\bar{\omega}_x\bar{\omega}_y}{\sin^2(\theta_b)\bar{\omega}_x + \cos^2(\theta_b)\bar{\omega}_y}, \quad t_t = 2h(\bar{\omega}_x + \bar{\omega}_y) - t_b$$

wobei der mittlere Bewehrungsgehalt für die jeweilige Richtung $\bar{\omega} = 1/2(\omega_b + \omega_t)$ beträgt und sich der Bewehrungsgehalt ω auf die Querschnittshöhe h bezieht. Der maximal mögliche Bewehrungsgehalt kann aus (3.112)₃ mit $t_b + t_t = h$ bestimmt werden zu

$$(\bar{\omega}_x + \bar{\omega}_y) \leq \frac{1}{2} \quad (3.113)$$

Durch Einsetzen von (3.112) in (3.110) resultieren die Biege- und Drillmomente in Abhängigkeit des freien Parameters θ_b zu

$$\begin{aligned} m_{xx} &= \left(\frac{m_{cxx}}{\bar{\omega}_x - \bar{\omega}_y} \right) \cdot \left((\bar{\omega}_x + \bar{\omega}_y) - \frac{2\bar{\omega}_x\bar{\omega}_y}{\bar{\omega}_x \sin^2\theta_b + \bar{\omega}_y \cos^2\theta_b} \right) + m_{sxx} \\ m_{yy} &= \left(\frac{m_{cyy}}{\bar{\omega}_y - \bar{\omega}_x} \right) \cdot \left((\bar{\omega}_x + \bar{\omega}_y) - \frac{2\bar{\omega}_x\bar{\omega}_y}{\bar{\omega}_x \sin^2\theta_b + \bar{\omega}_y \cos^2\theta_b} \right) + m_{syy} \\ m_{xy} &= f_c h^2 (1 - \bar{\omega}_x - \bar{\omega}_y) \cdot \frac{\bar{\omega}_x\bar{\omega}_y \sin(2\theta_b)}{\bar{\omega}_x \sin^2\theta_b + \bar{\omega}_y \cos^2\theta_b} \end{aligned} \quad (3.114)$$

Der erste Summand in (3.114)_{1,2} bezeichnet den Anteil der Betondruckfelder in den Sandwichdeckeln mit

$$\begin{aligned} m_{cxx} &= f_c h^2 \bar{\omega}_x (1 - 2\bar{\omega}_x) \\ m_{cyy} &= f_c h^2 \bar{\omega}_y (1 - 2\bar{\omega}_y) \end{aligned} \quad (3.115)$$

und der zweite Summand in (3.114)_{1,2} steht für den Anteil der Bewehrung mit

$$\begin{aligned} m_{sxx} &= f_c h (\omega_{xb} z_{sxb} + \omega_{xt} z_{sxt}) \\ m_{syy} &= f_c h (\omega_{yb} z_{syb} + \omega_{yt} z_{syt}) \end{aligned} \quad (3.116)$$

Die Beziehungen (3.112) und (3.114) werden für das orthogonale, anisotrop bewehrte Platten-element gemäss Bild 3.28(a) mit den definierten geometrischen Grössen und Werkstoffparametern veranschaulicht und diskutiert. Bild 3.28(b) zeigt die Verläufe der Biegemomente m_{xx} , m_{yy} und des Drillmoments m_{xy} in Abhängigkeit der Druckfeldrichtung im unteren Sandwichdeckel θ_b basierend auf (3.114). Die Sandwichdeckeldicken t_b und t_t sowie die zugehörige Druckfeldrichtung θ_t (3.112) sind in Bild 3.28(c) und (d) dargestellt. Im Allgemeinen sind die beiden Druckfeldrichtungen nicht orthogonal zueinander orientiert. Orthogonale Druckfeldrichtungen resultieren für die Spezialfälle in (3.112)₁ mit $\theta_b = \pi/2$ (Punkt a), $\theta_b = 0$ (Punkt c) sowie mit $t_b/t_t = 1$ (Punkt b), dargestellt in Bild 3.28(e), wobei der Punkt b den maximalen Drillwiderstand bezeichnet. Dieser kann aus (3.114)₃ mit $dm_{xy}/d\theta_b = 0$ bestimmt werden zu

$$m_{xy_max} = f_c h^2 (1 - \bar{\omega}_x - \bar{\omega}_y) \sqrt{\bar{\omega}_x \bar{\omega}_y} \leq \frac{f_c h^2}{8} \quad (3.117)$$

Die Beziehung (3.117) entspricht dem von Nielsen (1964) angegebenen unteren Grenzwert der Traglast unter der Voraussetzung, dass $\bar{\omega}_x = \omega_{xb} = \omega_{xt}$, $\bar{\omega}_y = \omega_{yb} = \omega_{yt}$, $z_{sxb} = -z_{sxt}$ und $z_{syb} = -z_{syt}$. Marti (1980) bestimmte die Traglast für die reine Drillmomentbeanspruchung und zeigte, dass die Beziehung (3.117) mit den erwähnten Voraussetzungen von Nielsen eine sehr gute Näherung liefert. Die Begrenzung in (3.117) ist gleichbedeutend mit (3.113). Für die Druckfeldrichtung in Punkt b des unteren Sandwichdeckels gilt

$$\sin^2 \theta_b = \frac{\bar{\omega}_y}{\bar{\omega}_x - \bar{\omega}_y} \quad (3.118)$$

und die Druckfeldrichtung im oberen Sandwichdeckel ist um $\pi/2$ grösser (Bild 3.28 (j)). Die Koordinaten des Punktes b' in Bild 3.28 (f) entsprechen dem Bewehrungsanteil (zweiter Summand in (3.114)). Somit entsprechen dem maximalen Drillmoment im Allgemeinen die Biegemomente m_{sxx} und m_{syy} gemäss (3.116).

Die Punkte auf Grundlage der Beziehungen (3.114) beschreiben eine Raumkurve und befinden sich im (m_{xx}, m_{yy}, m_{xy}) -Raum auf einer zur m_{xy} -Achse parallelen Fläche, welche mit der m_{xx} -Achse den Winkel δ einschliesst, Bild 3.28(f), (g). Dieser Winkel kann aus dem Anteil der Betondruckfelder, erster Summand in (3.114), bestimmt werden zu

$$\tan \delta = \frac{\bar{\omega}_y (1 - 2\bar{\omega}_y)}{\bar{\omega}_x (1 - 2\bar{\omega}_x)} \quad (3.119)$$

In Bild 3.28(f) und (g) sind zusätzlich die Biegegewiderstände basierend auf (3.106) eingezeichnet. Im Allgemeinen sind diese Biegegewiderstände nicht identisch mit den Beziehungen in (3.114) für $m_{xy} = 0$. Die Differenzen zwischen den Punkten a und D resp. c und B folgen aus der unterschiedlichen Voraussetzung des starr-ideal plastischen Werkstoffverhaltens des Betonstahls. Während bei der Ermittlung der Biegegewiderstände in (3.106) Betonstahlspannungen zwischen $\pm f_{sy}$ möglich sind, wurde in den Scheibenelementen der Sandwichdeckel die Spannung im Betonstahl auf $+f_{sy}$ festgelegt (3.111). Demnach entsprechen die Differenzen zwischen a und D

sowie c und B den Differenzen zwischen den Fällen I, II und III bei der Ermittlung der Biege-
widerstände in (3.107). Wird bei der Ermittlung der Biege- und Drillmomente in (3.106) der Fall I mas-
gebend, sind a und D resp. c und B identisch, d. h. $m_y(\theta_b = \pi/2) = m'_{yu}$ resp. $m_y(\theta_b = 0) = m_{yu}$,
siehe Bild 3.28(g).

Tab. 3.27 fasst die Zahlenwerte für das in Bild 3.28 dargestellte Plattenelement mit
 $\delta = 32^\circ$, $m_{xx} = 0.43$ MN, $m'_{xx} = -0.15$ MN, $m_{yy} = 0.21$ MN, $m'_{yy} = -0.13$ MN zusammen:

Punkt	m_{xx}	m_{yy}	m_{xy}	θ_b	θ_t	t_b	t_t
a	0.42	-0.13	0	$\pi/2$	π	41	76
b	0.14	0.04	0.22	36°	144°	58	58
c	-0.14	0.21	0	0°	$\pi/2$	76	41
	MN	MN	MN			mm	mm

Tab. 3.27 Zahlenwerte für die Punkte a, b, c in Bild 3.28.

Fließbedingung (Sandwichmodell)

Aufbauend auf den in Kapitel 3.2 beschriebenen Folgerungen bezüglich Konvexität von Fließ-
flächen kann die Fließbedingung für Biege- und Drillmomente im Bereich positiver bis negati-
ver Biege- und Drillmomente auf Basis der Sandwichmodellvorstellung beschrieben werden. Die Li-
nien AB, BC und CD in Bild 3.28(f) oder (g) entsprechen, wie in Kapitel 3.7.4 näher erläutert,
vollständigen Lösungen auf Grundlage der Traglastverfahren. Die hergeleitete Raumkurve abc
in Bild 3.28(f) beruht auf der Sandwichmodellvorstellung und entspricht demnach einem unte-
ren Grenzwert. Der Punkt a entspricht, unter bestimmten Voraussetzungen (3.117), ebenfalls
einer vollständigen Lösung. Sämtliche Verbindungen zwischen den Linien AB, BC, DC und
DA und der Raumkurve abc können nicht ausserhalb der wahren, konvexen Fließfläche liegen
und bilden somit einen unteren Grenzwert der Traglast für Plattenelemente unter Biege- und
Drillmomentbeanspruchungen. Jede dieser Verbindungslinien entspricht, wie nachfolgend ge-
zeigt, der Erzeugenden einer Kegelfläche mit Spitzen in den Punkten A resp. C und der Leitkur-
ve abc. Im allgemeinen Fall sind die Punkte a und D resp. c und B in Bild 3.28(g) nicht iden-
tisch, und die Verbindungslinien zwischen AB, BC, DC und DA und abc entsprechen Tangenti-
alebene, erzeugt durch die Basisgeraden AB, BC, DC und DA und Punkten tangential auf abc.
Nachfolgend werden diese Kegelflächen und Tangentialebenen anhand des in Bild 3.29(a) dar-
gestellten, anisotrop und orthogonal bewehrten Plattenelements hergeleitet. Die Parameter in
Bild 3.29 werden für möglichst grosse Differenzen zwischen den Punkten a und D sowie c und
B gewählt. Die Bewehrungsmenge von $\bar{\omega}_x + \bar{\omega}_y = 0.493$ entspricht annähernd dem maximal
möglichen Wert aus (3.113).

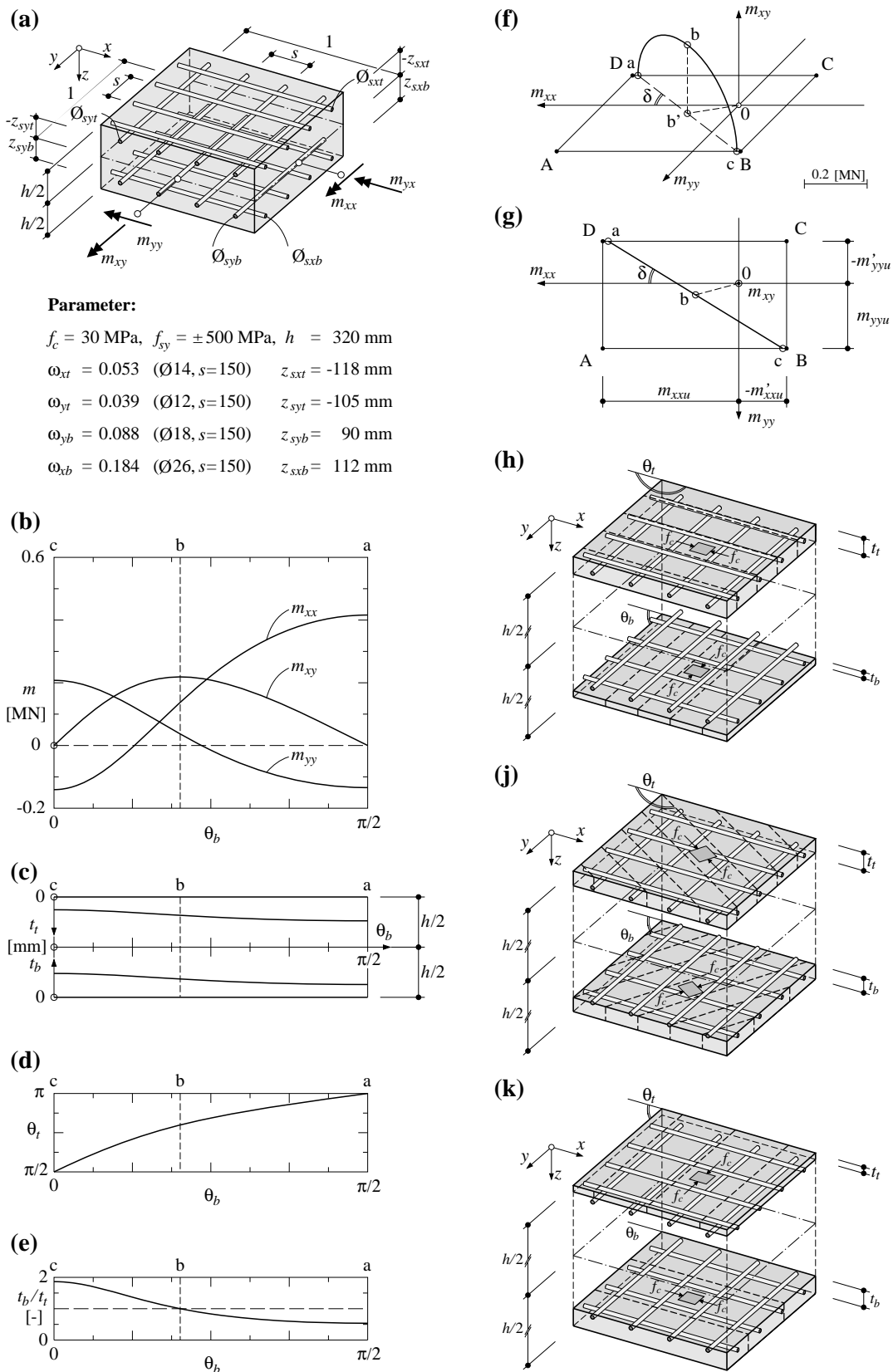


Bild 3.28 Beispiel Plattenelement: (a) Bezeichnungen und Parameter; (b), (c), (d) und (e) Resultate als Funktion der Druckfeldrichtung im unteren Sandwichdeckel; (f) und (g) Axonometrische und planare Darstellung; (h), (j) und (h) Druckfeldrichtungen in den Punkten a, b und c.

Die Tangentialebenen, in Bild 3.29(b) grau hinterlegt, sind durch die Basisgeraden AB, BC, DC und DA und Punkten tangential auf abc eindeutig bestimmt. Diese Punkte werden, wie in Bild 3.29(c) dargestellt, mit G, H, J und K bezeichnet. Die Beziehung (3.114) kann als Vektor m in Parameterform dargestellt werden

$$m(\theta_b) = \begin{pmatrix} m_{xx}(\theta_b) \\ m_{yy}(\theta_b) \\ m_{xy}(\theta_b) \end{pmatrix} \quad (3.120)$$

Mit der Bedingung, dass die Ableitung $m(\theta_b)_{,\theta_b}$ des Vektors m nach dessen Parameter θ_b identisch mit der Neigung der Tangentialebenen sein muss, welche durch die Basisgeraden AB, BC oder CD aufgespannt werden, resultiert die Druckfeldrichtung im unteren Sandwichdeckel für die Punkte H und K in Bild 3.29

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{bH} &= \frac{\bar{\omega}_y (m_{xxu} - m_{sxx} + m_{cxx})}{(m_{xxu} - m_{sxx})(\bar{\omega}_x + \bar{\omega}_y) - m_{cxx}(\bar{\omega}_x - \bar{\omega}_y)} \\ \sin^2 \theta_{bK} &= \frac{\bar{\omega}_y (m_{yyu} - m_{syy} - m_{cyy})}{(m_{yyu} - m_{syy})(\bar{\omega}_x + \bar{\omega}_y) + m_{cyy}(\bar{\omega}_x - \bar{\omega}_y)} \end{aligned} \quad (3.121)$$

mit m_{cxx} , m_{cyy} und m_{sxx} , m_{syy} gemäss (3.115) und (3.116). Die Koordinaten der Punkte H und K betragen

$$\begin{aligned} m_{xxH} &= \frac{m_{cxx}^2}{m_{xxu} - m_{sxx}} + m_{sxx}, & m_{yyH} &= -\frac{m_{cxx} m_{cyy}}{m_{xxu} - m_{sxx}} + m_{syy}, & m_{xyH} &= m_{xy \max} \sqrt{1 - \frac{m_{cxx}^2}{(m_{xxu} - m_{sxx})^2}} \\ m_{xxK} &= -\frac{m_{cxx} m_{cyy}}{m_{yyu} - m_{syy}} + m_{sxx}, & m_{yyK} &= \frac{m_{cyy}^2}{m_{yyu} - m_{syy}} + m_{syy}, & m_{xyK} &= m_{xy \max} \sqrt{1 - \frac{m_{cyy}^2}{(m_{yyu} - m_{syy})^2}} \end{aligned} \quad (3.122)$$

Für die Punkte J und G sind in (3.121) und (3.122) m_{xxu} und m_{yyu} durch m'_{xxu} und m'_{yyu} zu ersetzen. Die Kegelflächen in Bild 3.29(c) sind durch die Spitzen in den Punkten A, B, C und D und die Leitkurve abc eindeutig bestimmt. Schliesslich lassen sich die Fliessbedingungen geometrisch aus den vier Tangentialebenen und den vier Kegelflächen bestimmen.

$$\begin{aligned} Y_1 &= \lambda_1 m_{xy} - m_{xy}(\theta_{b1}) = 0 \\ Y_2 &= \lambda_2 m_{xy} - m_{xy}(\theta_{b2}) = 0 \\ Y_3 &= m_{xx} + m_{xy} \frac{\sqrt{(m_{xxu} - m_{sxx})^2 - m_{cxx}^2}}{m_{xy \max}} - m_{xxu} = 0 \\ Y_4 &= m_{yy} + m_{xy} \frac{\sqrt{(m_{yyu} - m_{syy})^2 - m_{cyy}^2}}{m_{xy \max}} - m_{yyu} = 0 \end{aligned} \quad (3.123)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{(m_{xxu} - m_{sxx})m_{cyy} + (m_{yyu} - m_{syy})m_{cxx}}{(m_{xxu} - m_{sxx})m_{cyy} + (m_{yyu} - m_{syy})m_{cxx}} \\
 \lambda_2 &= \frac{(m_{xxu} - m_{sxx})m_{cyy} + (m'_{yyu} - m_{syy})m_{cxx}}{(m_{xxu} - m_{sxx})m_{cyy} + (m'_{yyu} - m_{syy})m_{cxx}} \\
 \sin^2 \theta_{b1} &= \frac{\bar{\omega}_y [(m_{xxu} - m_{sxx} + m_{cxx}) - \lambda_1 (m_{xxu} - m_{sxx})]}{(\bar{\omega}_x + \bar{\omega}_y)m_{cxx} - (\bar{\omega}_x - \bar{\omega}_y)[(m_{xxu} - m_{sxx}) - \lambda_1 (m_{xxu} - m_{sxx})]} \\
 \sin^2 \theta_{b2} &= \frac{\bar{\omega}_y [(m_{xxu} - m_{sxx} + m_{cxx}) - \lambda_2 (m_{xxu} - m_{sxx})]}{(\bar{\omega}_x + \bar{\omega}_y)m_{cxx} - (\bar{\omega}_x - \bar{\omega}_y)[(m_{xxu} - m_{sxx}) - \lambda_2 (m_{xxu} - m_{sxx})]}
 \end{aligned} \tag{3.124}$$

Die Flie遥bedingungen Y'_1 bis Y'_4 können analog bestimmt werden, wobei in (3.123) und (3.124) m_{xxu} und m_{yyu} mit m'_{xxu} und m'_{yyu} vertauscht werden müssen.

Y_1 bis Y_4 resp. Y'_1 bis Y'_4 in (3.123) beschreiben die Flie遥bedingung für die an einem Plattenelement angreifenden Biege- und Drillmomente innerhalb der positiven resp. negativen Biege widerstände auf der Grundlage des unteren Grenzwertsatzes der Traglastverfahren vollständig. Sie sind abhängig von der Plattenstärke h sowie den orthogonalen, in den Koordinatenrichtungen x und y eingelegten Bewehrungen mit der Querschnittsfläche a_s sowie deren Abständen zur Mittelebene z_s und schliesslich von der Betondruckfestigkeit f_c und der Flie遥grenze des Betonstahls f_{sy} .

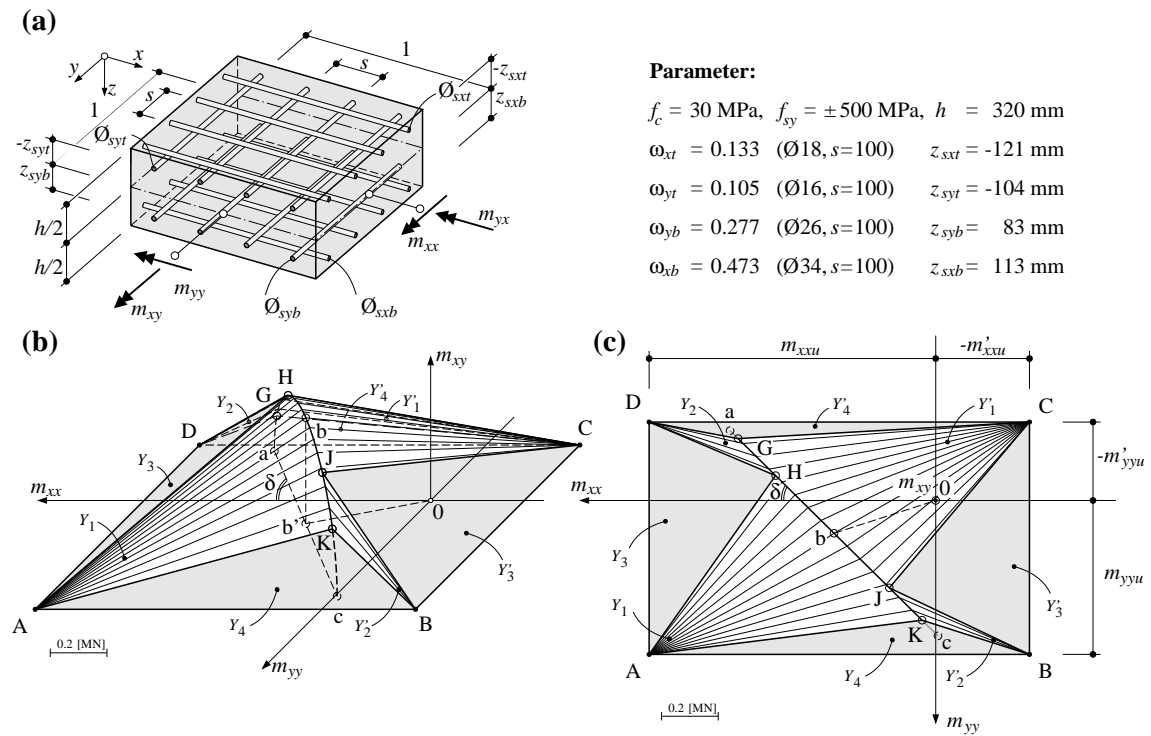


Bild 3.29 Flie遥figur für ein Plattenelement auf Grundlage der Sandwichmodellvorstellung: (a) Bezeichnungen und Parameter; (b) und (c) Axonometrische und planare Darstellung der Flie遥bedingung.

Die Biege widerstände in (3.123) können mit (3.106) bestimmt werden. Wird bei der Bestimmung der positiven und negativen Biege widerstände in x - und y -Richtung ausschliesslich der Fall I, II oder III massgebend, vereinfachen sich die Beziehungen in (3.123) wesentlich. Bei geringen Bewehrungsgehalten, infolge derer die Biegedruckzone innerhalb der Bewehrungs-

überdeckung zu liegen kommt (Fall I in (3.106)₁), fallen die Punkte D, G, und H resp. B, J und K zusammen und die Fliessbedingung reduziert sich auf die Kegelflächen Y_1 und Y'_1

$$\begin{aligned} Y_1 &= \lambda_1 m_{xy} - m_{xy} (\theta_{b1}) = 0 \\ Y'_1 &= \lambda'_1 m_{xy} - m_{xy} (\theta_{b1}) = 0, \end{aligned} \quad (3.125)$$

mit den Abkürzungen gemäss (3.124)₁. Für den Spezialfall isotroper Biege- und Drillmomente verschwinden die Fliessbedingungen Y_2 und Y'_2 .

Interaktion von Biege- und Drillmomente mit Membrankräften

Treten als verallgemeinerte Spannungen zusätzlich zu den Biege- und Drillmomenten (m_{xx} , m_{yy} , m_{xy}) auch Membrankräfte (n_{xx} , n_{yy} , n_{xy}) in Erscheinung, bezeichnet man das in Bild 3.25(a) dargestellte Plattenelement auch als Schalenelement. Nachfolgend wird ein iteratives Vorgehen vorgestellt, das die Bemessung der Bewehrung eines Schalenelements auf Grundlage des statischen Grenzwertsatzes der Traglastverfahren (Kapitel 3.2.2) ermöglicht.

Für das orthogonal bewehrte Plattenelement in Bild 3.28(a) kann die Fliessbedingung für Biege- und Drillmomente für eine gewählte Bewehrung mit der Beziehung (3.123) bestimmt werden. Bild 3.28(e) zeigt den zugehörigen Verlauf der Sandwichdeckeldicken in Funktion der Druckfeldrichtung im unteren Sandwichdeckel, d. h. entlang der Raumkurve abc in Bild 3.28(f). In Abhängigkeit des Biegebewehrungsgehalts verbleibt eine relativ grosse Schichtdicke des Sandwichkerns spannungslos, abgesehen von der Querkraftabtragung im Sandwichkern (Kapitel 3.7.3). Diesem Sandwichkern werden in der Folge allfällige Membrandruckkräfte zugeordnet. Den Anteil der Membranzugkräfte aus n_{xx} , n_{yy} und n_{xy} übernehmen die Bewehrungen in den Sandwichdeckeln. Analog der Bemessung von Scheibenelementen (3.61) betragen die Komponenten der Membranzugkräfte in den Koordinatenrichtungen x und y

$$\begin{aligned} n_{sxx} &= n_{xx} + \cot \theta_n |n_{xy}| \\ n_{syy} &= n_{yy} + \frac{1}{\cot \theta_n} |n_{xy}| \end{aligned} \quad (3.126)$$

Die daraus erforderlichen Bewehrungen

$$\begin{aligned} a_{sxb_n} &= \frac{n_{sxx}}{f_{sy} \left(1 - \frac{z_{sxb}}{z_{sxt}} \right)}, & a_{sxt_n} &= \frac{n_{sxx}}{f_{sy} \left(1 - \frac{z_{sxt}}{z_{sxb}} \right)} \\ a_{syb_n} &= \frac{n_{syy}}{f_{sy} \left(1 - \frac{z_{syb}}{z_{syt}} \right)}, & a_{syt_n} &= \frac{n_{syy}}{f_{sy} \left(1 - \frac{z_{syt}}{z_{syb}} \right)} \end{aligned} \quad (3.127)$$

sind abhängig von deren Höhenlage (z -Koordinate) innerhalb des Plattenelements. Für identische Höhenlagen je Richtung werden die Membranzugkräfte aus (3.126) hälftig auf die obere und untere Bewehrungslage aufgeteilt. Aus der Differenz zwischen der effektiv vorhandenen Bewehrung im Plattenelement und der Bewehrung zur Aufnahme der Membranzugkräfte (3.127) resultiert eine Restbewehrung, mit welcher die Biege- und Drillmomente aufgenommen werden können. Durch Einsetzen dieser Bewehrung in (3.123) ergibt sich die Fliessfigur für Biege- und Drillmomente.

Die Druckspannung im Sandwichkern, herrührend aus den Membrankräften ist begrenzt auf

$$\sigma_{c3} = -\frac{1}{t_k} \left(\frac{|n_{xy}|}{\sin \theta_n \cos \theta_n} \right) = \frac{1}{t_k} (n_{xx} + n_{yy} - n_{sxx} - n_{syy}) \geq -f_c \quad (3.128)$$

Dabei bestimmt sich die Schichtstärke t_k des Sandwichkerns aus der Differenz zwischen der Plattenstärke h und den oberen und unteren Sandwichdeckeldicken. Letztere werden maximal, wenn in der Beziehung (3.112) die Druckfeldrichtung θ_b mit null und $\pi/2$ berücksichtigt wird. Für die minimale Schichtstärke des Sandwichkerns resultiert

$$\begin{aligned} t_k &= h(1 - 4 \cdot \bar{\omega}_x) & (\bar{\omega}_x \geq \bar{\omega}_y) \\ t_k &= h(1 - 4 \cdot \bar{\omega}_y) & (\bar{\omega}_y \geq \bar{\omega}_x). \end{aligned} \quad (3.129)$$

Innerhalb des Sandwichkerns entsteht ein einachsiges Druckspannungsfeld in Richtung des frei wählbaren Winkels θ_n . Diese Druckspannungen bewirken eine Zunahme der Querkrafttragfähigkeit im Sandwichkern. Besteht der angreifende Membranspannungszustand aus einer Normalzugkraft, beispielsweise in x -Richtung, wird diese durch die beiden Bewehrungen in x -Richtung mit (3.127)₁ aufgenommen, und die Druckspannung im Sandwichkern verschwindet. Membranzugkräfte bewirken in der Regel eine Zunahme der Rissbreiten und damit einhergehend eine Abnahme der mittels Rissverzahnung übertragbaren Schubspannung [Jäger (2007)]. Zur Sicherstellung der Querkrafttragfähigkeit ist eine Querkraftbewehrung angezeigt.

Für eine gewählte Bewehrung eines Plattenelements garantiert diese Vorgehensweise einen sicheren, vollständig auf dem unteren Grenzwertsatz der Traglastverfahren basierenden Nachweis der Tragsicherheit für Biege- und Drillmomente zusammen mit Membrankräften.

Näherungslösung Sandwichmodell

Werden im Gegensatz zur Beziehung (3.110) die resultierenden Membrankräfte aus den einachsigen Betondruckfeldern in den Sandwichdeckeln sowie die resultierenden Kräfte in den Bewehrungen näherungsweise in der gleichen Ebene wirkend angenommen (Bild 3.25), können daraus Beziehungen zur Abschätzung der Bewehrungsmengen im Plattenelement hergeleitet werden. Der Abstand dieser beiden Ebenen von der Mittelebene des Plattenelements soll $d_v/2$ betragen. Mit der Wahl der oberen und unteren Sandwichdeckeldicke t_t und t_b ist d_v mit $h - (t_t/2) - (t_b/2)$ bestimmt. Somit lassen sich die am Plattenelement in Bild 3.25(a) angreifenden, verallgemeinerten Spannungen in statisch äquivalente Membrankräfte in den beiden Ebenen wirkend ausdrücken [Nielsen (1964)]. Wird dabei von einem gerissenen Plattenkern ausgegangen, Bild 3.30(b), kann in Analogie zur Querkraftabtragung bei Biegeträgern [Marti (1985)] in Richtung φ_0 die Hauptquerkraft v_0 über ein einachsiges Betondruckfeld, welches bezüglich der Plattenmittelebene den Winkel θ_v aufweist, abgetragen werden. Im Kern der Platte entsteht demnach wiederum eine Scheibe in Richtung φ_0 . Die Komponente $v_0 \cot \theta_v$ in Richtung der Mittelebene der geneigten Druckkraft in Bild 3.30(b) bedingt, zur Wahrung des Gleichgewichts, die zusätzlichen Membranzugkräfte im unteren und oberen Sandwichdeckel vom Betrage $1/2 \cdot v_0 \cot \theta_v$ in Richtung der Hauptquerkraft. Diese Membranzugkräfte können mit (3.48) in die entsprechenden Bewehrungsrichtungen transformiert werden. Schliesslich führt die Berücksichtigung aller Membrankräfte im jeweiligen Sandwichdeckel zusammen mit der Fließbedingung des Regimes 1 für Scheibenelemente (3.61) auf die Bedingungen

$$\begin{aligned}
a_{sxb} &\geq \frac{1}{f_{sy}} \left(\frac{m_{xx}}{d_v} + \frac{v_0 \cot \theta_v \cos^2 \varphi_0}{2} + \frac{n_{xx}}{2} + k \cdot \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_0 \cot \theta_v \sin(2\varphi_0)}{4} \right| \right) \\
a_{syb} &\geq \frac{1}{f_{sy}} \left(\frac{m_{yy}}{d_v} + \frac{v_0 \cot \theta_v \sin^2 \varphi_0}{2} + \frac{n_{yy}}{2} + \frac{1}{k} \cdot \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_0 \cot \theta_v \sin(2\varphi_0)}{4} \right| \right) \\
a_{sxt} &\geq \frac{1}{f_{sy}} \left(-\frac{m_{xx}}{d_v} + \frac{v_0 \cot \theta_v \cos^2 \varphi_0}{2} + \frac{n_{xx}}{2} + k \cdot \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_0 \cot \theta_v \sin(2\varphi_0)}{4} \right| \right) \\
a_{syt} &\geq \frac{1}{f_{sy}} \left(-\frac{m_{yy}}{d_v} + \frac{v_0 \cot \theta_v \sin^2 \varphi_0}{2} + \frac{n_{yy}}{2} + \frac{1}{k} \cdot \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_0 \cot \theta_v \sin(2\varphi_0)}{4} \right| \right)
\end{aligned} \tag{3.130}$$

zur Bestimmung der Bewehrungsmengen a_{si} im oberen und unteren Sandwichdeckel [Marti (1990)]. Der Faktor k kann innerhalb der in Kapitel 3.6.3 angegebenen Schranken, für den oberen resp. unteren Sandwichdeckel unterschiedlich, gewählt werden.

Für relativ kleine nominelle Schubspannungen in dünnen Platten, die die Bedingung

$$\frac{v_0}{d_v} \leq \frac{\sqrt{f_{cc}}}{6} \tag{3.131}$$

mit der Zylinderdruckfestigkeit f_{cc} in MPa einhalten, kann der Kern als ungerissen betrachtet werden. Im Plattenkern ergibt sich ein Zustand reinen Schubes mit unter $\pi/4$ geneigten Hauptspannungen $\pm v_0/d_v$, und die Zusatzkräfte in den Sandwichdeckeln (3.130) infolge der Querkraft entfallen (Bild 3.30(b)). Werden zusätzlich die am Plattenelement angreifenden Membrankräfte in (3.130) vernachlässigt und die Beziehung (3.130) mit d_v multipliziert, resultiert daraus die im nachfolgenden Kapitel beschriebene Normalmomenten-Fließbedingung, als oberer Grenzwert der Traglastverfahren [Nielsen (1964)]. Der Unterschied zwischen den Fließbedingungen für Plattenelemente auf Grundlage der Sandwichmodellvorstellung (unterer Grenzwert der Traglastverfahren) und derjenigen auf Basis des oberen Grenzwerts der Traglastverfahren ist demzufolge einzig auf die korrekt in Rechnung gestellten Lagen der Bewehrungen sowie auf die Abmessungen und Lagen der Sandwichdeckel zurückzuführen.

Wird die Bedingung (3.131) nicht eingehalten, ist eine Querkraftbewehrung senkrecht zur Plattenmittelebene mit

$$\rho_z = \frac{v_0}{f_{sy} d_v \cot \theta_v} \tag{3.132}$$

nötig, die gemäss Jäger (2007) mindestens 0.15% betragen sollte. Die Bedingung (3.131) stützt sich auf experimentelle Beobachtungen. Für die Wahl des Neigungswinkels θ_v des Betondruckspannungsfeldes im Plattenkern resp. die konstruktive Durchbildung der Querkraftbewehrung (insbesondere des Stababstands) sind die Ausführungen in Kapitel 3.6.5 zu beachten.

Für die Sandwichdeckeldicken t_t und t_b kann in guter Näherung der doppelte Schwerpunktsabstand der Bewehrung vom näherliegenden Plattenrand eingesetzt und mit der Bedingung (3.63) bezüglich der Betondruckspannung in den Sandwichdeckeln verifiziert werden [Marti (1990)].

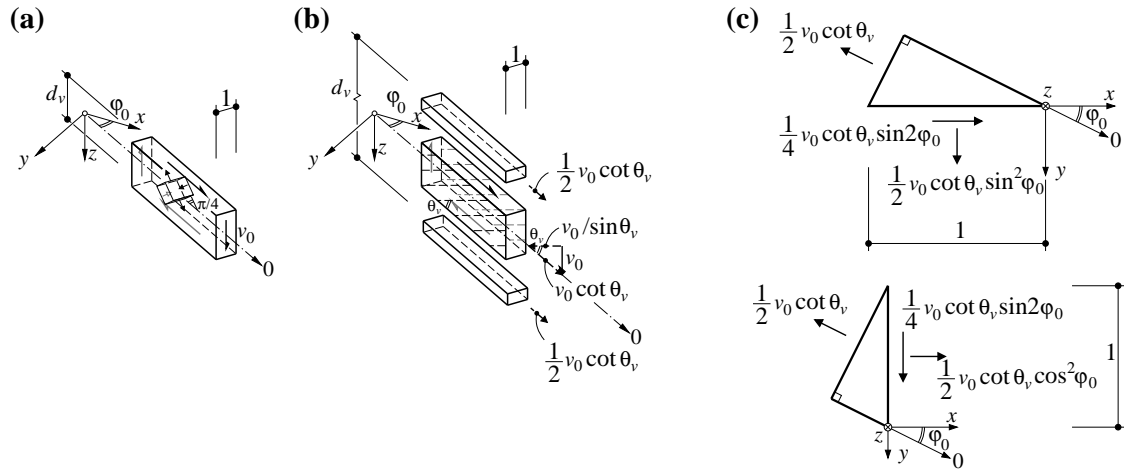


Bild 3.30 Querkraftabtragung im Plattenkern: (a) ungerissener Kern; (b) gerissener Kern; (c) Schnittkörperdiagramme der Sandwichdeckel zur Ermittlung der Membrankräfte infolge der Querkraftabtragung im gerissenen Kern.

3.7.4 Fließbedingung nach dem oberen Grenzwertsatz

Normalmomenten-Fließbedingung

Grundlage für die Normalmomenten-Fließbedingung bildet das in Bild 3.25(a) dargestellte, orthogonal bewehrte Plattenelement, dessen Bewehrungsrichtungen mit den kartesischen Koordinaten x und y übereinstimmen. In der Folge wird der Spannungszustand diskutiert, der durch Überlagerung der gesondert betrachteten Biege widerstände m_{xxu} und m_{yyu} (Bild 3.31(a)) entsteht. Am Schnittkörperdiagramm in Bild 3.31(b) greifen die plastischen Momente m_{xxu} und m_{yyu} an. Für einen beliebigen Schnitt in t -Richtung, dessen Normale n mit der x -Achse den Winkel φ einschliesst, resultieren aus den Momentengleichgewichtsbedingungen in n - und t -Richtung die Spannungser resultierenden $m_{nn} = m_{xxu} \cdot \cos^2 \varphi + m_{yyu} \cdot \sin^2 \varphi$, $m_{tn} = (m_{yyu} - m_{xxu}) \sin \varphi \cdot \cos \varphi$.

Die Druckzonendicken c_x und c_y in Bild 3.31(a) sind im Allgemeinen nicht gleich gross. Aufbauend auf den Voraussetzungen für dünne Platten (Kapitel 3.7.1) und unter der Voraussetzung eines isotropen Materialverhaltens des Plattenelements ist die Dickenrichtung z eine Hauptrichtung verträglicher Spannungszustände, d. h. der Spannungszustand jeder Lamelle parallel zur Mittelebene des Plattenelements ist eben. Der Beton genügt dabei der quadratischen Fließbedingung (Bild 3.6). Innerhalb der kleineren Druckzonenhöhe ist der Beton einem orthogonalen Spannungszustand unterworfen, Punkt D in Bild 3.6(b); darüber hinaus herrscht ein einachsiger Druckspannungszustand bis die Grenze der grösseren Druckzonenhöhe erreicht ist, Punkt C in Bild 3.6(b). Der somit resultierende Spannungszustand ist statisch zulässig (quadratische Fließbedingung).

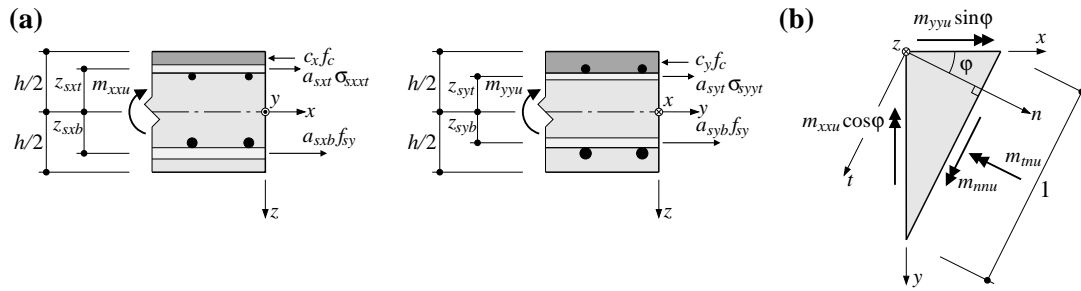


Bild 3.31 Orthogonal bewehrte Stahlbetonplatte: (a) Biege widerstände (plastische Momente) in den Bewehrungsrichtungen x und y ; (b) Überlagerung der beiden Spannungszustände.

In der Folge wird in t -Richtung ein Fließgelenklinienmechanismus⁵ betrachtet. Die Dissipationsarbeit in der Fließgelenklinie beträgt $D = m_n \dot{\omega}_n + n_n \dot{\delta}_n$. Dabei bezeichnet $\dot{\omega}$ die inkrementelle Rotation und $\dot{\delta}$ die inkrementelle Verschiebung (Öffnung) auf Höhe der Plattenmittelebene ($z = 0$) im Fließgelenk. Das Drillmoment m_{tn} und die Membranschubkraft n_{tn} leisten keinen Beitrag zur Dissipation im Fließgelenk und treten als verallgemeinerte Reaktionen in Erscheinung. Für den Spezialfall gleicher Druckzonendicken ($c_x = c_y$) lässt sich dem oben erwähnten, statisch zulässigen Spannungszustand ein verträglicher Fließgelenklinienmechanismus zuordnen. Im allgemeinen Fall unterschiedlicher Druckzonendicken $c_x \neq c_y$ ist der zugehörige Mechanismus nicht verträglich. Für das plastische Moment in n -Richtung gilt somit die Relation

$$m_{nnu} \geq m_{xxu} \cos^2 \varphi + m_{yyu} \sin^2 \varphi \quad (3.133)$$

gemäß dem unteren Grenzwertsatz der Traglastverfahren. Die Abweichung zwischen den Druckzonendicken ist üblicherweise gering, so dass die obige Relation auf der sicheren Seite liegend durch

$$m_{nnu} = m_{xxu} \cos^2 \varphi + m_{yyu} \sin^2 \varphi \quad (3.134)$$

ersetzt werden kann (Marti et al. 1999). Für verschwindende Membrankräfte ($n_{nn} = 0$) folgt somit für die Dissipationsarbeit der Ausdruck $D = (m_{xxu} \cos^2 \varphi + m_{yyu} \sin^2 \varphi) \dot{\omega}_n dt = m_{nnu} \dot{\omega}_n dt$

Für die am Schnittkörperdiagramm in Bild 3.21(b) aufgebrachten Biege- und Drillmomente m_{xx} , m_{yy} , m_{xy} unter Vernachlässigung der Membran- und Querkräfte erhält man die Beanspruchungen in der n -Richtung mit Hilfe von (3.99). Die Fließbedingung lässt sich nun für einen beliebigen Richtungswinkel φ ausdrücken als

$$m_{nn} \leq m_{nnu} \quad (3.135)$$

Für den Winkel φ_u , bei dem die Beanspruchung und der Widerstand identisch sein sollen, muss $m_{nnu} - m_{nn} = 0$ gelten, und damit die Relation (3.135) eingehalten wird, müssen die partiellen Ableitungen $m_{nnu, \varphi}$ und $m_{nn, \varphi}$ gleich sein (Bild 3.33(e)). Diese Bedingungen führen zusammen mit der Substitution von $\tan \varphi = t$ zu folgendem Gleichungssystem

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t^2 & -2 \cdot t \\ -t & t & t^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_{xxu} - m_{xx} \\ m_{yyu} - m_{yy} \\ m_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.136)$$

Durch Multiplikation von (3.136)₁ mit s und Addition mit (3.136)₂ respektive Multiplikation von (3.136)₂ mit s und Subtraktion mit (3.136)₁ kann s und somit der Winkel φ eliminiert wer-

⁵ Den Begriff „Bruchlinien“ erwähnte erstmals Ingerslev (1923) aufgrund experimenteller Beobachtung zur Traglast kreuzweise bewehrter Stahlbetonplatten. Umfassend beschrieb Johansen (1932) und (1962) die Traglast von Stahlbetonplatten mit der Modellvorstellung der Fließgelenklinien.

den und es entsteht die Fließbedingung Y . Analog lässt sich die Fließfunktion Y' für negative Biegemomente aus der Bedingung $-m'_{nnu} \leq m_{nn}$ bestimmen.

$$\begin{aligned} Y &= m_{xy}^2 - (m_{xxu} - m_{xx})(m_{yyu} - m_{yy}) = 0 \\ Y' &= m_{xy}^2 - (m'_{xxu} + m_{xx})(m'_{yyu} + m_{yy}) = 0 \end{aligned} \quad (3.137)$$

Es gilt zu beachten, dass die Klammerausdrücke in (3.137) nicht negativ sein können. Zudem sind die negativen Biegegrößen (beispielsweise m'_{xxu}) positiv definiert. Die beiden Fließbedingungen $Y=0$ und $Y'=0$ beschreiben im (m_{xx}, m_{yy}, m_{xy}) -Raum zwei elliptische Kegelflächen, Bild 3.33(c). Aus der Beziehung (3.136)₁ entsteht für den Winkel φ_u folgender, vom Drillmoment unabhängiger Ausdruck

$$\begin{aligned} \tan \varphi_u &= \sqrt{\frac{m_{xxu} - m_{xx}}{m_{yyu} - m_{yy}}} \\ \tan \varphi'_u &= \sqrt{\frac{m'_{xxu} + m_{xx}}{m'_{yyu} + m_{yy}}} \end{aligned} \quad (3.138)$$

Die Richtungen der Fließgelenklinien (3.138) sind im Allgemeinen (orthotrope Platten) nicht identisch mit den Richtungen der Hauptmomente (3.101), $\varphi_u \neq \varphi_1$, Bild 3.33(e). Nur für den Fall einer quasi-isotropen Platte mit $m_{xxu} = m_{yyu} = m_u$ und $m'_{xxu} = m'_{yyu} = m'_u$ fallen die beiden Richtungen zusammen.

Nach der Theorie des plastischen Potentials (Kapitel 3.2) sind der Fließfläche (3.137) über das zugeordnete Fließgesetz (3.9) folgende Krümmungssinkremente zugeordnet

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_{xx} &= \kappa Y_{,m_{xx}} = \kappa(m_{yyu} - m_{yy}) \\ \dot{\chi}_{yy} &= \kappa Y_{,m_{yy}} = \kappa(m_{xxu} - m_{xx}) \\ 2\dot{\chi}_{xy} &= \kappa Y_{,m_{xy}} = \kappa \cdot 2m_{xy} \end{aligned} \quad (3.139)$$

wobei $\kappa \geq 0$. In Bild 3.33(e) sind die Krümmungssinkremente für einen Punkt P auf der Fließfläche dargestellt. Einsetzen von (3.139) in (3.137)₁ bringt

$$\dot{\chi}_{xy}^2 = \dot{\chi}_{xx} \cdot \dot{\chi}_{yy} \quad (3.140)$$

was mit einem MOHRschen Kreis der Krümmungssinkremente verifiziert werden kann. Mithin muss

$$\dot{\chi}_1 \cdot \dot{\chi}_2 = 0 \quad (3.141)$$

gelten und somit eines der beiden Hauptkrümmungssinkremente verschwinden; für verträgliche Bruchmechanismen ergeben sich demnach abwickelbare Flächen. Für die Singularitäten in der Fließfigur Y (Schnittellipse der beiden Kegelflächen, Kegelspitzen) ist die Zuordnung nicht eindeutig; weiterführende Beziehungen sind in Marti (2012) zu finden.

Wegen der Analogie der Fließbedingung (3.137) für Plattenelemente und der Fließbedingung (3.56) für Scheibenelemente (Regime 1) kann die erstgenannte Fließbedingung in Parameterform

$$\begin{aligned} m_{xxu} &\geq m_{xx} + k|m_{xy}|, & m_{yyu} &\geq m_{yy} + \frac{1}{k}|m_{xy}| \\ m'_{xxu} &\geq -m_{xx} + k|m_{xy}|, & m'_{yyu} &\geq -m_{yy} + \frac{1}{k}|m_{xy}| \end{aligned} \quad (3.142)$$

ausgedrückt werden. Die Beziehung (3.142) eignet sich für die Bemessung der Bewehrung, wobei üblicherweise $k = 1$ gesetzt wird (linearisierte Fließbedingung, Bild 3.33(e)) und somit m_{xxu} und m_{yyu} unabhängig voneinander bestimmt werden können.

Der Punkt E in Bild 3.33(d) mit den Koordinaten $m_{xx} = (m_{xxu} - m'_{xxu})/2$, $m_{yy} = (m_{yyu} - m'_{yyu})/2$ und

$$m_{xyu_max} = \frac{1}{2} \sqrt{(m_{xxu} + m'_{xxu})(m_{yyu} + m'_{yyu})} \quad (3.143)$$

symbolisiert den maximalen Drillmomentwiderstand auf der Grundlage des kinematischen Grenzwertsatzes der Traglastverfahren.

Modifizierte Normalmomenten-Fließbedingung

Mit der Normalmomenten-Fließbedingung (3.137) wird der Drillmomentwiderstand im Vergleich zur Lösung auf Grundlage des Sandwichmodells (3.123) überschätzt. Bild 3.32(a) zeigt das Verhältnis zwischen den maximalen Drillmomentwiderständen auf Grundlage der Normalmomenten-Fließbedingung (3.143) und der Sandwichmodellvorstellung (3.117). Insbesondere bei grossen Biegebewehrungsgehalten und einer Abweichung der Hauptmomentenrichtung φ_1 von den Bewehrungsrichtungen wird der Tragwiderstand mit der Normalmomenten-Fließbedingung überschätzt. Dieses Faktum sollte insbesondere in Plattenbereichen mit beachtlicher Drillmomentbeanspruchung bezüglich der Bewehrungsrichtungen berücksichtigt werden. Khalifa (1986) schlägt vor, das Drillmoment m_{xy} in (3.137) durch den Ausdruck $k_m \cdot m_{xy}$ zu ersetzen. Der Faktor k_m entspricht dem Quotienten aus (3.143) und (3.117)

$$k_m = \frac{m_{xyu_max}}{m_{xy_max}} = \frac{\sqrt{(m_{xxu} + m'_{xxu})(m_{yyu} + m'_{yyu})}}{2 \cdot f_c h^2 \sqrt{\bar{\omega}_x \cdot \bar{\omega}_y} (1 - \bar{\omega}_x - \bar{\omega}_y)} \quad (3.144)$$

Mithin entsteht für die Fließbedingung

$$\begin{aligned} Y &= m_{xy}^2 \cdot \frac{(m_{xxu} + m'_{xxu})(m_{yyu} + m'_{yyu})}{4 \cdot h^4 f_c^2 \bar{\omega}_x \bar{\omega}_y (1 - \bar{\omega}_x - \bar{\omega}_y)^2} - (m_{xxu} - m_{xx})(m_{yyu} - m_{yy}) = 0 \\ Y' &= m_{xy}^2 \cdot \frac{(m_{xxu} + m'_{xxu})(m_{yyu} + m'_{yyu})}{4 \cdot h^4 f_c^2 \bar{\omega}_x \bar{\omega}_y (1 - \bar{\omega}_x - \bar{\omega}_y)^2} - (m'_{xxu} + m_{xx})(m'_{yyu} + m_{yy}) = 0. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Die zugehörige Fließfläche entspricht einer gestauchten Kegelfläche und ist in Bild 3.37 mit der Bezeichnung (UB_{mod}) dargestellt. In Bild 3.32(b) ist der Faktor k_m für verschiedene Bewehrungsmengen in x - und y -Richtung aufgezeichnet. Bei einer gleichzeitigen Zunahme der Bewehrungsmengen in x - und y -Richtung nimmt der Drillmomentwiderstand (3.143) auf Basis der Normalmomenten-Fließbedingung im Vergleich zum Drillmomentwiderstand (3.117) auf Grundlage der Sandwichmodellvorstellung überproportional zu.

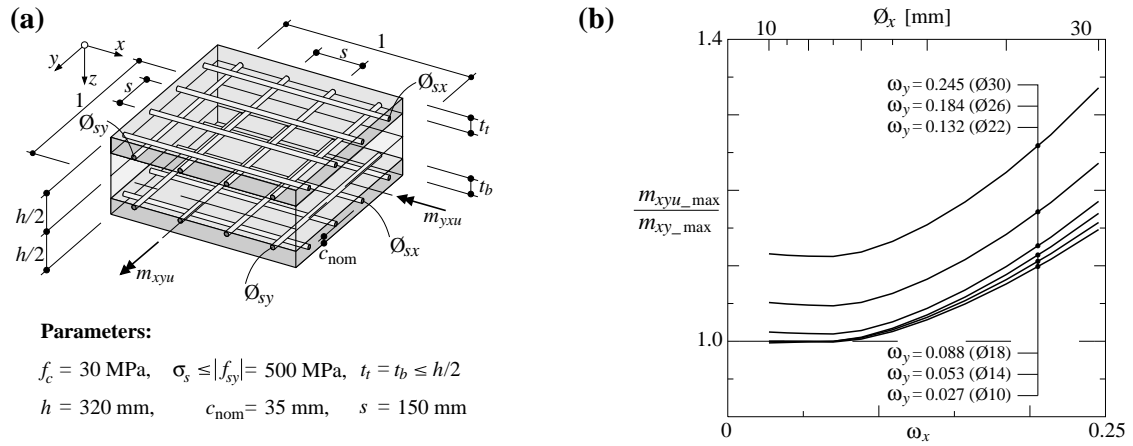


Bild 3.32 Modifizierte Normalmomenten-Fließbedingung: (a) Orthogonal bewehrtes Plattenelement mit Bezeichnungen; (b) Quotient der maximalen Drillmomenten in Abhängigkeit der Bewehrungsmengen.

Die Bemessungsbeziehungen (3.142) auf Basis der Normalmomenten-Fließbedingung können mit (3.144) ergänzt werden zu

$$\begin{aligned} m_{xxu} &\geq m_{xx} + k \cdot k_m |m_{xy}|, & m_{yyu} &\geq m_{yy} + \frac{1}{k} \cdot k_m |m_{xy}| \\ m'_{xxu} &\geq -m_{xx} + k \cdot k_m |m_{xy}|, & m'_{yyu} &\geq -m_{yy} + \frac{1}{k} \cdot k_m |m_{xy}|. \end{aligned} \quad (3.146)$$

Grundlage der modifizierten Normalmomenten-Fließbedingung bildet zwar die Betrachtung einer Fließgelenklinie, die zugeordneten Verzerrungsinkremente sind jedoch kinematisch nicht verträglich. Die modifizierte Fließbedingung entspricht, Ausnahmen ausgeschlossen, näherungsweise einem oberen Grenzwert der Traglast. Diese Ausnahmen bilden die Linien AB, BC, CD und DA sowie der Punkt b in der Fließfigur in Bild 3.37. Diese entsprechen vollständigen Lösungen im Sinne der Traglastverfahren, Kapitel 3.7.3.

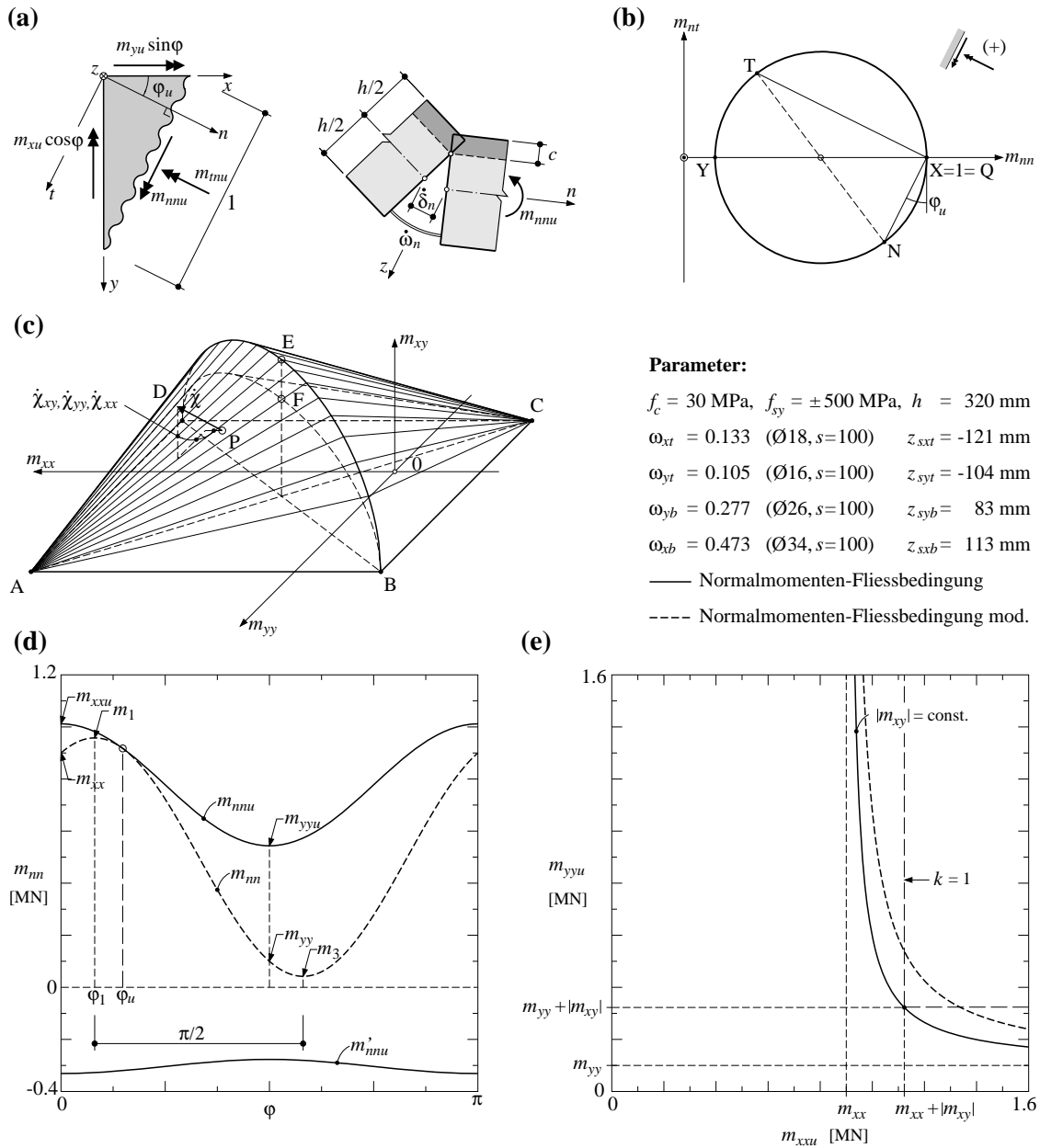


Bild 3.33 Normalmomenten-Fließbedingung: (a) Fließgelenklinie; (b) Zugehöriger MOHRscher Kreis; (c) Fließfläche; (d) Normalmomente und Widerstände; (e) Bemessungsdiagramm.

3.7.5 Numerische Verfahren

Elasto-plastisches Verfahren

Wie in Kapitel 3.7.3 beschrieben, ist der Spannungszustand in jeder Lamelle ($z = \text{const}$) von Elementen dünner Stahlbetonplatten eben. Werden beispielsweise die verallgemeinerten Verzerungen ($\varepsilon_{xx0}, \varepsilon_{yy0}, \gamma_{xy0}/2, \chi_{xx}, \chi_{yy}, \chi_{xy}$) in Bild 3.22(b) vorgegeben, können die Spannungen im Plattenelement (Bild 3.21(a)) mit Hilfe von Werkstoffbeziehungen ermittelt werden. Die Integration dieser Spannungen führt auf die verallgemeinerten Spannungen ($n_{xx}, n_{yy}, n_{xy}, m_{xx}, m_{yy}, m_{xy}$) in Bild 3.21(b).

Ein iteratives, numerisches Vorgehen ist nötig, wenn die verallgemeinerten Spannungen vorgegeben werden und der zugehörige Verzerrungszustand (verallgemeinerte Verformungen) gesucht wird. Der Beton im Plattenelement wird dabei in dünne Schichten mit konstanten, ebenen Spannungszuständen unterteilt, und die Integration über die Plattenstärke h erfolgt numerisch. Mit den heutzutage zur Verfügung stehenden Computerprogrammen stellt dieses numerische Vorgehen keine besondere Schwierigkeit dar. Seelhofer (2009) verglich dieses numerische Vorgehen mit Versuchen, die an der Universität in Toronto [Marti & Kong (1987)] durchgeführt wurden. Für den Werkstoff Beton wurde dabei die Zugfestigkeit sowie die verbundbedingte Zugversteifung vernachlässigt, was auf das in Kapitel 4.6.2 beschriebene, klassische Druckfeldmodell führt. Für die Bewehrung wurden die in Kapitel 2.1 dargestellten, bilinearen Spannungs-Dehnungscharakteristiken verwendet. Trotz dieser stark vereinfachten Werkstoffbeziehungen konnte das Last-Verformungsverhalten schrittweise in guter Übereinstimmung zu den Versuchsergebnissen abgebildet werden. Kollegger (1991) entwickelte einen rechnergestützten Algorithmus zur Ermittlung des Verzerrungszustands eines Plattenelements bei vorgegebenem, verallgemeinertem Spannungszustand.

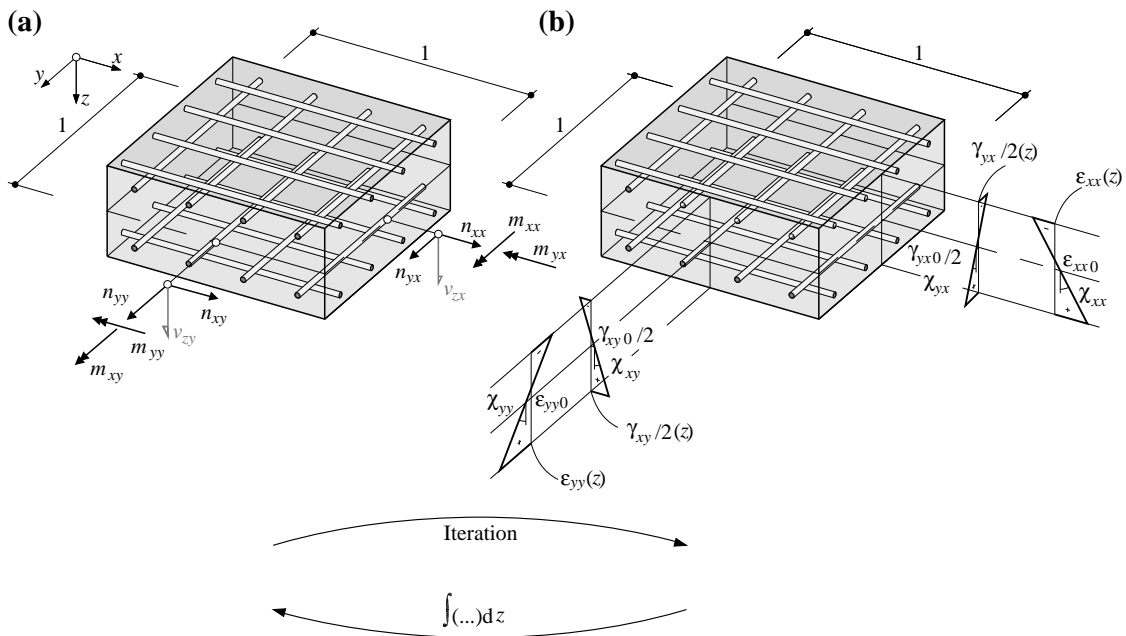


Bild 3.34 Plattenelement: (a) Verallgemeinerte Spannungen; (b) Verallgemeinerte Verzerrungen.

Plastisches Verfahren

Allgemeine Fließbedingungen für Plattenelemente können punktweise numerisch bestimmt werden [Marti (2012)]. Für dünne Platten sind die Verzerrungsinkremente

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \dot{\epsilon}_{xx0} + z\dot{\chi}_{xx} \quad , \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \dot{\epsilon}_{yy0} + z\dot{\chi}_{yy} \quad , \quad \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} = \frac{\dot{\gamma}_{xy0}}{2} + z\dot{\chi}_{xy} \quad (3.147)$$

in jeder Plattenschicht definiert (Bild 3.35(a)); dabei können die Verzerrungsinkremente $\dot{\epsilon}_{xx0}$, $\dot{\epsilon}_{yy0}$, $\dot{\gamma}_{xy0}/2$ der Mittelebene und den Krümmungsinkrementen $\dot{\chi}_{xx}$, $\dot{\chi}_{yy}$ und $\dot{\chi}_{xy}$ im Sinne von Kapitel 3.2 als verallgemeinerte Verformungsinkremente betrachtet werden. In formaler Analogie zu den Beziehungen (3.93) variieren die Hauptverzerrungsinkremente $\dot{\epsilon}_1$ und $\dot{\epsilon}_3$ hyperbolisch über die Plattenstärke h ; für die Haupttrichtungen sowie die Nullstellen der Hauptverzerrungsinkremente sei auf die Beziehungen in Kapitel 3.7.1 verwiesen. $\dot{\epsilon}_1$ und $\dot{\epsilon}_3$ verschwinden inner-

halb des Plattenelements im Allgemeinen auf höchstens zwei Niveaus (3.95), und das Plattenelement beinhaltet maximal drei Schichten mit unterschiedlichen Betonspannungszuständen. Bei vorgegebenen Fließbedingungen in jeder Schicht des Plattenelements kann die elementare Dissipationsarbeit (Kapitel 3.2) bestimmt werden zu

$$\dot{D} = n_{xx} \dot{\epsilon}_{xx0} + n_{yy} \dot{\epsilon}_{yy0} + n_{xy} \dot{\gamma}_{xy0} + m_{xx} \dot{\chi}_{xx} + m_{yy} \dot{\chi}_{yy} + m_{xy} 2 \cdot \dot{\chi}_{xy} \quad (3.148)$$

Wird für den Werkstoff Beton die in Bild 3.35(b) dargestellte quadratische Fließbedingung vorausgesetzt, resultieren über die Plattenstärke verschiedene Zonen, die den Regimes O, A und B entsprechen. In Bild 3.35(a) ist die oberste Schicht im Plattenelement einem zweiachsigen Druckspannungszustand ($\dot{\epsilon}_1$ und $\dot{\epsilon}_3$ negativ, Regime B) und die Schicht in der Mitte der Platte einem einachsigen Druckspannungszustand ($\dot{\epsilon}_1$ positiv und $\dot{\epsilon}_3$ negativ, Regime A) unterworfen. In der untersten Schicht ist der Beton spannungslos mit $\dot{\epsilon}_1$ und $\dot{\epsilon}_3$ positiv (Regime O). Für einen bekannten Satz von verallgemeinerten Verformungssinkrementen ($\dot{\epsilon}_{xx0}$, $\dot{\epsilon}_{yy0}$, $\dot{\gamma}_{xy0}/2$, $\dot{\chi}_{xx}$, $\dot{\chi}_{yy}$, $\dot{\chi}_{xy}$) können die verallgemeinerten Spannungen (n_{xx} , n_{yy} , n_{xy} , m_{xx} , m_{yy} , m_{xy}) mit (3.148) bestimmt werden zu

$$\begin{aligned} n_{xx} &= \dot{D}_{,\dot{\epsilon}_{xx0}} & n_{yy} &= \dot{D}_{,\dot{\epsilon}_{yy0}} & n_{xy} &= \dot{D}_{,\dot{\gamma}_{xy0}} \\ m_{xx} &= \dot{D}_{,\dot{\chi}_{xx}} & m_{yy} &= \dot{D}_{,\dot{\chi}_{yy}} & m_{xy} &= \dot{D}_{,\dot{\chi}_{xy}} \end{aligned} \quad (3.149)$$

Dabei steht der Index nach dem Komma für die partielle Ableitung nach der entsprechenden Variablen.

Im Gegensatz dazu ist ein iterativ numerisches Verfahren erforderlich, wenn für einen Satz verallgemeinerter Spannungen die verallgemeinerten Verformungssinkremente bestimmt werden sollen. Die Fließfläche im (m_{xx} , m_{yy} , m_{xy})-Raum lässt sich punktweise bestimmen, indem für jeden angenommenen Satz von Krümmungssinkrementen $\dot{\chi}_{xx}$, $\dot{\chi}_{yy}$ und $\dot{\chi}_{xy}$ die Dehnungs- und Schiebungsinkremente $\dot{\epsilon}_{xx0}$, $\dot{\epsilon}_{yy0}$, $\dot{\gamma}_{xy0}/2$ variiert werden, bis die Membrankräfte n_{xx} , n_{yy} und n_{xy} verschwinden. Sämtliche Verbindungslinien zwischen den somit ermittelten Punkten im (m_{xx} , m_{yy} , m_{xy})-Raum, liefern untere Grenzwerte der Traglastverfahren. Die in Kapitel 3.7.3 hergeleitete Raumkurve abc in Bild 3.28(f) entspricht dem hier vorgestellten numerischen Verfahren.

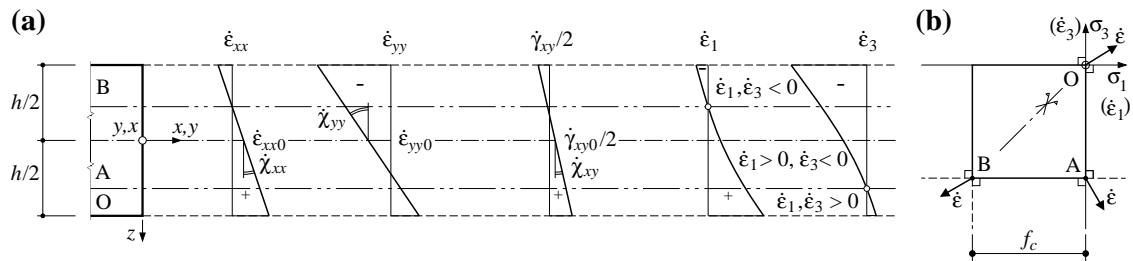


Bild 3.35 Plattenelement: (a) Verallgemeinerte Verformungssinkremente; (b) Quadratische Fließbedingung für den Beton.

Im anschliessenden Vergleich der verschiedenen Fließbedingungen wurde dieses iterativ numerische Vorgehen mit Hilfe des Computerprogramms Mathcad (2011) angewendet. Unter anderen entwickelten Khalifa (1986) und Lourenco & Figueiras (1993), (1995) rechnergestützte Algorithmen zur punktweisen Ermittlung der Fließbedingung resp. der Bewehrung für Schalelemente mit Biege- und Drillmomenten sowie Membrankräften auf Grundlage der Sandwichmodellvorstellung.

3.7.6 Vergleich der Fließbedingungen

Nachfolgend werden die in den vorigen Kapiteln beschriebenen Fließbedingungen für Biege- und Drillmomente im Bereich positiver bis negativer Biegegewiderstände verglichen. Dies soll am Beispiel eines sehr stark anisotrop und orthogonal bewehrten Plattenelements erfolgen, Bild 3.37(a). Die Bewehrungsmenge entspricht annähernd dem maximal möglichen Wert aus (3.113) oder zirka 149 kg pro Kubikmeter Betonvolumen (exkl. Übergreifungsstöße).

In Bild 3.37(b) resp. (c) ist die Fließbedingung basierend auf der Sandwichmodellvorstellung (3.123) dargestellt (LB). Im Vergleich dazu sind in Bild 3.37(d) die Normalmomenten-Fließbedingung (UB), (3.137) sowie deren Modifikation (UB_{mod}), (3.145) ebenfalls eingetragen. In den entsprechenden Bildern (e) bis (j) sind Schnitte durch die Fließfiguren entlang ausgewählter Achsen dargestellt. Bild 3.37(h) beinhaltet ausserdem die im vorigen Kapitel 3.7.5 numerisch, mit dem plastischen Verfahren, ermittelten Punkte 1 bis 6, welche einem unteren Grenzwert der Traglast entsprechen. Punkte auf der Linie abc in Bild 3.37(j) entsprechen exakt den numerisch bestimmaren Punkten.

In Tab. 3.36 sind die Zahlenwerte für das in Bild 3.37 dargestellte Plattenelement mit $\delta = 44^\circ$, $m_{xxu} = 1.01 \text{ MN}$, $m'_{xxu} = -0.33 \text{ MN}$, $m_{yyu} = 0.54 \text{ MN}$, $m'_{yyu} = -0.28 \text{ MN}$, $m_{xyu_max} = 0.52 \text{ MN}$ aufgeführt.

Punkt	m_{xx}	m_{yy}	m_{xy}	θ_b	θ_t	t_b	t_t
a	0.73	-0.25	0	$\pi/2$	π	122	194
b	0.36	0.12	0.37	38°	128°	158	158
c	-0.08	0.48	0	0	$\pi/2$	194	122
E	0.34	0.13	0.52				
F	0.34	0.13	0.37				
G	0.70	-0.22	0.14	76°			
H	0.57	-0.09	0.31	56°			
J	0.16	0.31	0.32	24°			
K	0.05	0.42	0.20	13°			
	MN	MN	MN			mm	mm

Tab. 3.36 Zahlenwerte für die Punkte a, b, c in Bild 3.37.

Diskussion

Die Beziehungen (3.123) auf Basis der Sandwichmodellvorstellung beschreiben eine vollumfängliche, auf dem statischen Grenzwert der Traglastverfahren basierende Fließbedingung. Die Übereinstimmung mit den numerisch bestimmten Punkten 1 bis 6 (Kapitel 3.7.5 plastisches Verfahren) ist gut und für die Raumkurve durch die Punkte abc in Bild 3.37(b) exakt. Die modifizierte Normalmomenten-Fließbedingung (3.145) korrespondiert im Bereich relativ grosser Drillmomente gut mit den unteren Grenzwerten der Sandwichmodellvorstellung. Die auf dem oberen Grenzwertsatz der Traglastverfahren basierende Normalmomenten-Fließbedingung (3.137) überschätzt den Tragwiderstand im Bereich grosser Drillbeanspruchung um maximal $m_{xyu_max} / m_{xy_max} - 1 = 40\%$.

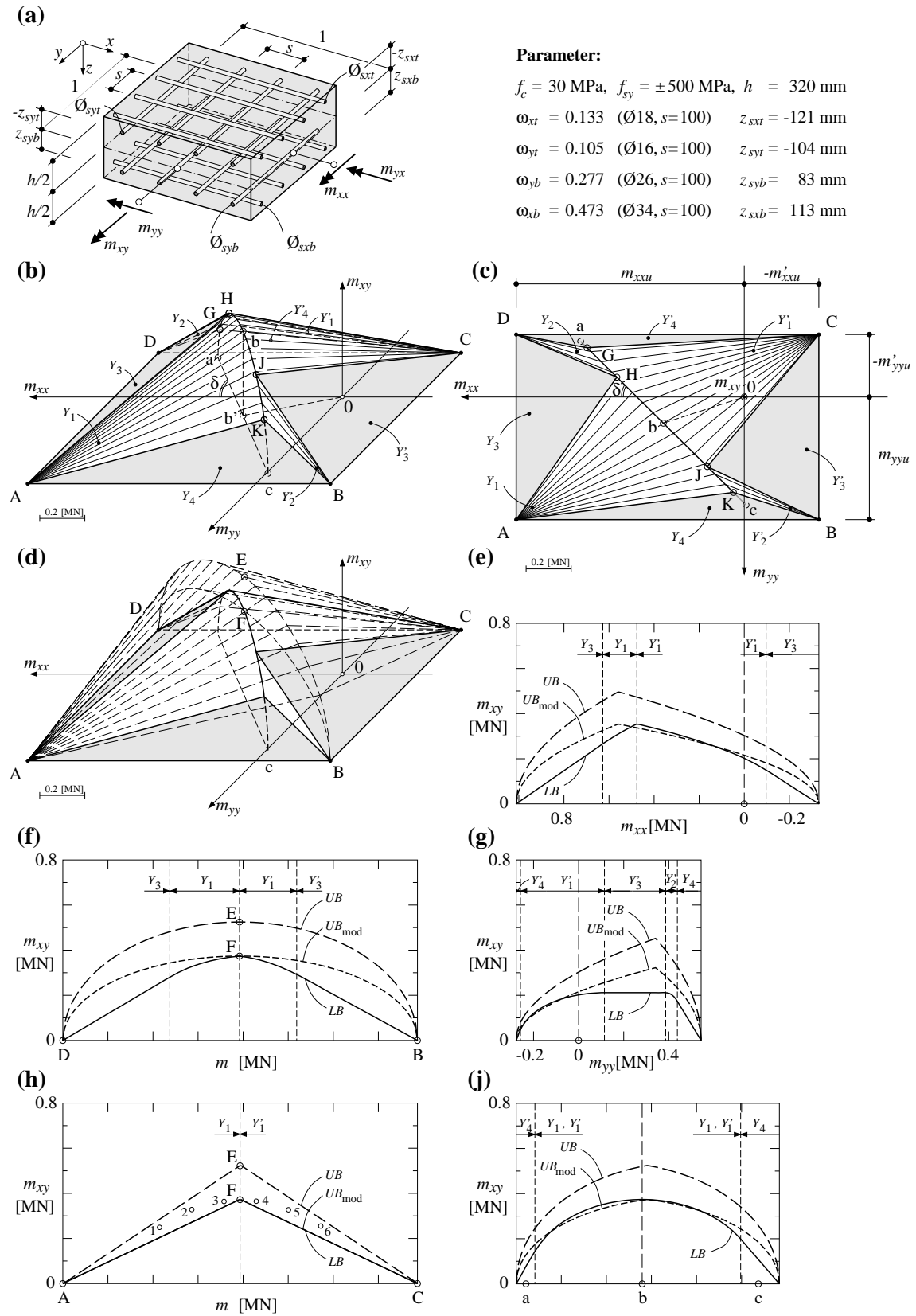


Bild 3.37 Vergleich der Fließbedingungen Plattenelement: (a) Bezeichnungen und Parameter; (b) (c) und (d) Axonometrische und planare Darstellung der Fließbedingungen; (e) Schnitt bei $m_y = 0$; (f) Schnitt D – B; (g) Schnitt bei $m_x = 0$; (h) Schnitt A – C; (j) Schnitt entlang a – c.

3.7.7 Beispiel Quadratplatte

Anhand der in Bild 3.38(a) dargestellten Quadratplatte sollen die Differenzen in den Fliessbedingungen für Plattenelemente auf die Relevanz hinsichtlich der Baupraxis diskutiert werden. Bild 3.38(a) zeigt die an den Kanten AB und BC frei aufgelegte Quadratplatte mit der Seitenlänge l und der Plattendicke h . Auf die Platte wirkt eine verteilte Belastung von

$$q = 15 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} + h \cdot 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \quad (3.150)$$

Gleichgewichtslösungen für die Platten können durch geeignete Ansatzfunktionen für die Biege- und Drillmomente für einfache Belastungs- und Lagerungskonfigurationen angegeben werden. Eine Übersicht solcher Gleichgewichtslösungen für Quadratplatten ist in Marti et al. (1999) enthalten. Für das vorliegende Beispiel wird die Ansatzfunktion

$$\begin{aligned} m_{xx} &= \frac{3}{2} m_u \xi (1 - \xi) \\ m_{yy} &= \frac{3}{2} m_u \eta (1 - \eta) \\ m_{xy} &= -\frac{3}{4} m_u (\xi + \eta - \xi \eta) \end{aligned} \quad (3.151)$$

gemäss Nielsen (1964) verwendet, Bild 3.38(b) bis (d). Die parabolischen Biegemomentenverläufe entsprechen der Tragwirkung einfacher Balken. Mit (3.97) resultiert die Querkraftverteilung

$$v_{zx} = \frac{3 \cdot m_u}{4 \cdot l} (1 - 3 \cdot \xi) \quad , \quad v_{zy} = \frac{3 \cdot m_u}{4 \cdot l} (1 - 3 \cdot \eta) \quad (3.152)$$

und die Hauptquerkraft $v_0^2 = v_{zx}^2 + v_{zy}^2$. Die Hauptquerkraftrichtung φ_0 kann mit (3.103) und (3.104) bestimmt werden, womit der Kraftfluss innerhalb der Platte in Bild 3.38(g) veranschaulicht werden kann. Als Lagerreaktionen entstehen die in Bild 3.38(e) dargestellten Eckkräfte in den Punkten A, B und C sowie die konstant verteilten Linienlasten entlang AB und BC. Für einen vorgegebenen, isotropen Biege- und Drillwiderstand von m_u vermag die Platte eine Belastung von

$$q = \frac{9 \cdot m_u}{2 \cdot l^2} \quad (3.153)$$

(unterer Grenzwert der Traglast) aufzunehmen [Nielsen (1964)]. Die Punkte A, B und C erfahren dabei eine reine Drillmomentbeanspruchung von

$$m_{xy} = -\frac{3}{4} m_u = -\frac{1}{6} q l^2 \quad (3.154)$$

Durch Gleichsetzen von (3.154) mit dem maximalen Drillwiderstand auf Grundlage der Sandwichmodellvorstellung (3.117) kann daraus die erforderliche Bewehrung unter der Voraussetzung gleicher Bewehrungen in den beiden Koordinatenrichtungen x und y bestimmt werden. Durch Einsetzen dieser Bewehrung in die Beziehung (3.143) resultiert der maximale Drillwiderstand auf Grundlage der Normalmomenten-Fliessbedingung. Das Verhältnis dieser maximalen Drillwiderstände ist in Bild 3.38(h) in Abhängigkeit der Spannweite l aufgetragen, für verschiedene, in der Baupraxis übliche Plattenstärken h von 1/25 bis 1/30 der Spannweite.

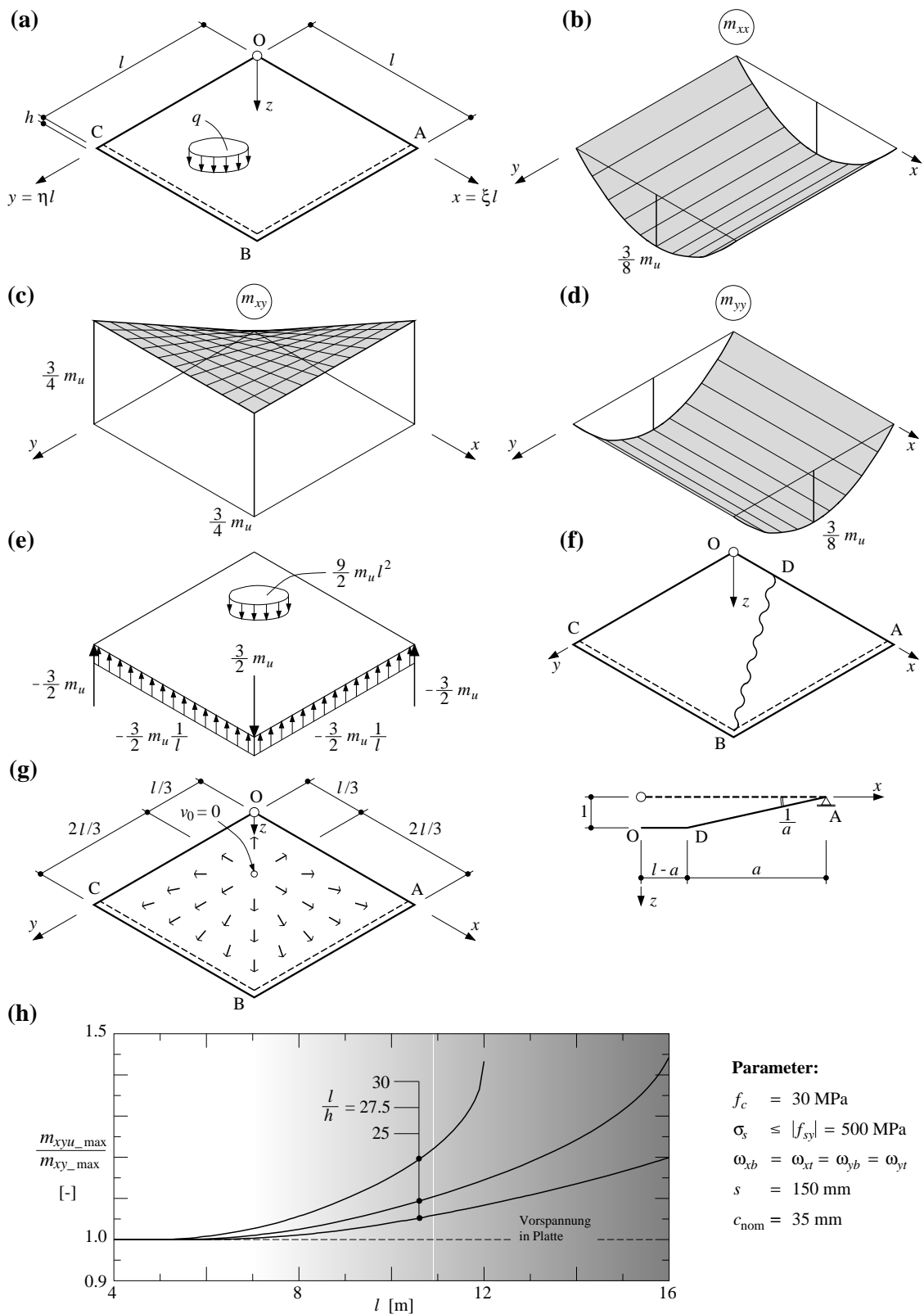


Bild 3.38 Beispiel Quadratplatte: (a) Statisches System und Bezeichnungen; (b) (c) (d) und (e) Ansätze für die Biege- und Drillmomente mit zugehörigem unteren Grenzwert der Traglast; (f) Fließgelenklinienmechanismus; (g) Hauptquerkraft resp. Kraftfluss; (h) Verhältnis der maximalen Drillwiderstände.

Dem Bild 3.38(h) ist zu entnehmen, dass für Spannweiten, welche mit schlaffer Bewehrung vernünftig erreicht werden können, die Unterschiede zwischen der Fliessbedingung nach dem oberen Grenzwertsatz der Traglastverfahren (Normalmomenten-Fliessbedingung) und derjenigen nach dem unteren Grenzwertsatz der Traglastverfahren (Sandwichmodell) gering ausfallen. Beispielsweise resultieren für eine Spannweite von 8 m und Plattenstärken von 32, 29 und 27 cm Verhältniszahlen von 1.01, 1.03 und 1.06. Mit Hilfe des in Bild 3.38(f) dargestellten Fliessgelenklinienmechanismus resultiert ein oberer Grenzwert der Traglast der Platte von

$$q_u \approx 5.55 \cdot \frac{m_u}{l^2} \quad (3.155)$$

Der in (3.153) hergeleitete untere Grenzwert der Traglast der Platte beträgt 81% des hier ermittelten oberen Grenzwerts (3.155). Der korrekten Bestimmung des Spannungszustands einer Platte kommt in diesem Beispiel eine grössere Bedeutung zu, als einer verfeinerten Fliessbedingung. Für die in der Baupraxis vorkommenden Platten ist das in der Regel anisotrope Verhalten sowie der Einfluss der Bewehrungsabstufungen weiter von Bedeutung.

Auf Basis lediglich dieses einen Beispiels kann keine abschliessende Empfehlung für die Verwendung der verschiedenen Fliessbedingungen abgeleitet werden. Die Normalmomenten-Fliessbedingung (3.137) liefert für übliche Stahlbetonplatten vernünftige Resultate, und sie bietet zudem den Vorteil eines zugehörigen, verträglichen Fliessgelenklinienmechanismus unter der Voraussetzung gleicher Druckzonendicken in x - und y -Richtung. Für Stahlbetonplatten mit hoher Drillmomentbeanspruchung, wie dies beispielsweise in den stumpfen Ecken einer schief gelagerten Platte vorkommen kann, sind für die Bemessung, die Fliessbedingungen nach der Sandwichmodellvorstellung zu verwenden. Implementiert in ein Computerprogramm, liefert die Fliessbedingung (3.123) sichere, untere Grenzwerte der Traglast eines Plattenelements und erlaubt darüber hinaus die Berücksichtigung von Membrankräften. Für eine Bemessung mittels Handrechnung sind die Bemessungsbeziehungen (3.130) mit einem vorsichtig gewählten Hebelarm der inneren Kräfte angezeigt. Bereits eine gute Näherung liefert die modifizierte Normalmomenten-Fliessbedingung (3.145), welche anstelle der Normalmomenten-Fliessbedingung in entsprechenden Normvorschriften berücksichtigt werden könnte.

3.8 Oberer Grenzwert des Durchstanzwiderstands

Auf der Grundlage der in Kapitel 3.5 beschriebenen Fliessbedingungen für den Werkstoff Beton sowie aufbauend auf den Ausführungen zu den kinematischen Diskontinuitätslinien (Kapitel 3.3.1) kann das Durchstanzen einer konzentrierten Flächenlast (Stützenlast) durch eine Platte beschrieben werden. Der resultierende Durchstanzwiderstand entspricht einem oberen Grenzwert der Traglast (Kapitel 3.2.2). Bild 3.39(a) illustriert das Durchstanzen einer konzentrierten Flächenlast p durch eine Platte der Dicke h an einem rotationssymmetrischen Modell. Die Platte soll eine Biegebewehrung enthalten, die einen Biegebruch auszuschliessen vermag; die Platte soll jedoch keine Querkraftbewehrung aufweisen.

Ein oberer Grenzwert des Durchstanzwiderstands kann durch Gleichsetzen der äusseren Arbeit

$$W_e = P \cdot \dot{\delta} = p r_0^2 \pi \cdot \dot{\delta} \quad (3.156)$$

mit der inneren Arbeit innerhalb der Bruchfläche

$$W_i = \int \dot{D} \cdot d \, dA \quad (3.157)$$

gefunden werden. Der Stützenquerschnitt wird als kreisrund mit dem Radius r_0 vorausgesetzt. Für ein Element der Bruchfläche gilt

$$dA = 2 \cdot \pi r \frac{d\zeta}{\cos \alpha} \quad (3.158)$$

mit $\tan \alpha = dr/d\zeta = r'$.

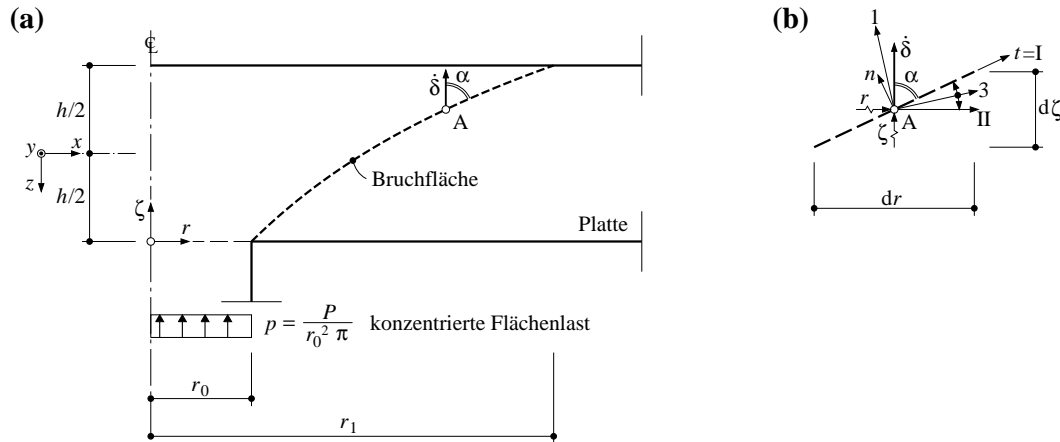


Bild 3.39 Durchstanzen am rotationssymmetrischen Modell: (a) Meridianschnitt mit Geometrie und Bruchfläche; (b) differentielles Element der Bruchfläche (kinematische Diskontinuität) mit Bezeichnungen.

3.8.1 Durchstanzen mit hyperbolischer Hüllkurve

Einsetzen der spezifischen Dissipationsarbeit (3.37) in (3.157) und Gleichsetzen von (3.156) und (3.157) liefert die Beziehung für den Durchstanzwiderstand

$$P_H = 2 \cdot \pi \int_0^h \left(C_1 r' - (C_1 - f_{ct}) \sqrt{(r')^2 - \tan^2 \varphi} \right) \cdot r \, d\zeta \quad (3.159)$$

mit der Werkstoffkonstanten C_1 aus (3.35). Aufsuchen des Minimums von P_H führt auf ein Variationsproblem, wonach das Integral in (3.159) ein Extremum aufweisen soll. Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung muss der Integrand $F(r, r')$ in (3.159) die EULERSche Differentialgleichung

$$F_{,r} - \frac{d}{d\zeta}(F_{,r'}) = 0 \quad (3.160)$$

erfüllen. Einsetzen von $F(r, r')$ aus (3.159) in die Differentialgleichung (3.160) liefert die gesuchte Form der Bruchfläche

$$r(\zeta) = C_3 \tan \varphi \cdot \sinh \left(\frac{\zeta + C_5}{C_3} \right) \quad (3.161)$$

Die Konstanten C_3 und C_5 lassen sich aus den Randbedingungen der Bruchfläche $r(0) = r_0$ und $r(h) = r_1$ bestimmen. Es entstehen die beiden transzendenten Gleichungen

$$\begin{aligned} r_0 &= C_3 \tan \varphi \cdot \sinh \left(\frac{C_5}{C_3} \right) \\ r_1 &= C_3 \tan \varphi \cdot \sinh \left(\frac{h + C_5}{C_3} \right) \end{aligned} \quad (3.162)$$

deren Lösungen numerisch bestimmt werden müssen. Mit der bekannten Bruchfläche (3.161) eingesetzt in (3.159) resultiert P_H in Abhängigkeit des Radius des Durchstanzkegels r_1

$$P_H = \pi C_3^2 \tan^2 \varphi \left[C_1 \sinh^2 \left(\frac{h + C_5}{C_3} \right) - C_1 \sinh^2 \left(\frac{C_5}{C_3} \right) - \frac{C_1 - f_{ct}}{2} \sinh \left(\frac{2h + 2C_5}{C_3} \right) + \frac{C_1 - f_{ct}}{2} \sinh \left(\frac{2C_5}{C_3} \right) + \frac{C_1 - f_{ct}}{C_3} h \right] \quad (3.163)$$

Zusammen mit (3.162) vereinfacht sich (3.163) zu

$$P_H = \pi C_1 (r_1^2 - r_0^2) + \pi (C_1 - f_{ct}) \left(r_0 \sqrt{r_0^2 + C_3^2 \tan^2 \varphi} - r_1 \sqrt{r_1^2 + C_3^2 \tan^2 \varphi} + C_3 h \tan^2 \varphi \right) \quad (3.164)$$

Der noch unbekannte Radius r_1 kann numerisch mit $dP_H/dr_1 = 0$ bestimmt werden, und durch Einsetzen in (3.163) oder (3.164) resultiert der minimale obere Grenzwert für den Durchstanzwiderstand auf der Basis der hyperbolischen Hüllkurve.

Näherungslösung

Für die Konstanten C_3 und C_5 sowie für den Radius r_1 können Näherungslösungen in algebraischer Form ermittelt werden. Wird der Hyperbelsinus in (3.162)₁ durch ein TAYLOR-Polynom vom Grad eins angenähert, entsteht

$$C_5 \cong \frac{r_0}{\tan \varphi} \quad (3.165)$$

Durch Einsetzen von (3.165) in (3.162)₂ und Ersetzen des Hyperbelsinus durch ein TAYLOR-Polynom vom Grad zwei erhält man

$$C_3 \cong \frac{r_0 + h \tan \varphi}{\sqrt{6} \cdot \tan \varphi \sqrt{\frac{r_1}{r_0 + h \tan \varphi} - 1}} \quad (3.166)$$

Für den noch unbekannten Radius r_1 kann mit $dP_H/dr_1 = 0$ und (3.166) sowie (3.165) eine Näherung bestimmt werden zu

$$r_1 \cong (r_0 + h \tan \varphi) \left(\frac{1}{3} + C_4 + \frac{1}{9C_4} \right) \text{ mit} \quad (3.167)$$

$$C_4 = \left[\frac{1}{27} + \frac{1}{12} \frac{\left(\frac{C_1}{f_{ct}} - 1 \right)^2}{2 \frac{C_1}{f_{ct}} - 1} + \sqrt{\frac{1}{144} \frac{\left(\frac{C_1}{f_{ct}} - 1 \right)^4}{\left(2 \frac{C_1}{f_{ct}} - 1 \right)^2} + \frac{1}{162} \frac{\left(\frac{C_1}{f_{ct}} - 1 \right)^2}{2 \frac{C_1}{f_{ct}} - 1}} \right]^{1/3}$$

Bild 3.40(a) zeigt den Durchstanzwiderstand in Abhängigkeit der Form resp. des Radius der Bruchfläche r_1 für verschiedene Zugfestigkeiten des Betons. Wird die Bruchfläche mit (3.165) und (3.166) angenähert, resultieren daraus die gestrichelten Linien. Die Näherung mit den TAYLOR-Polynomen zeigt eine gute Übereinstimmung insbesondere für übliche Verhältnisse zwischen der Betondruck- und Zugfestigkeit. Bild 3.40(b) veranschaulicht die zugehörige Bruchfläche mit dem minimalen oberen Grenzwert des Durchstanzwiderstands P_H , und in Bild 3.40(c) sowie (d) ist der Spannungszustand in der Bruchfläche an der Plattenunter- ($\zeta = 0$) und -oberseite ($\zeta = h$) für $f_{ct} = 3.2$ MPa dargestellt; dieser resultiert aus der Bruchfläche (3.161) und der Beziehung (3.36).

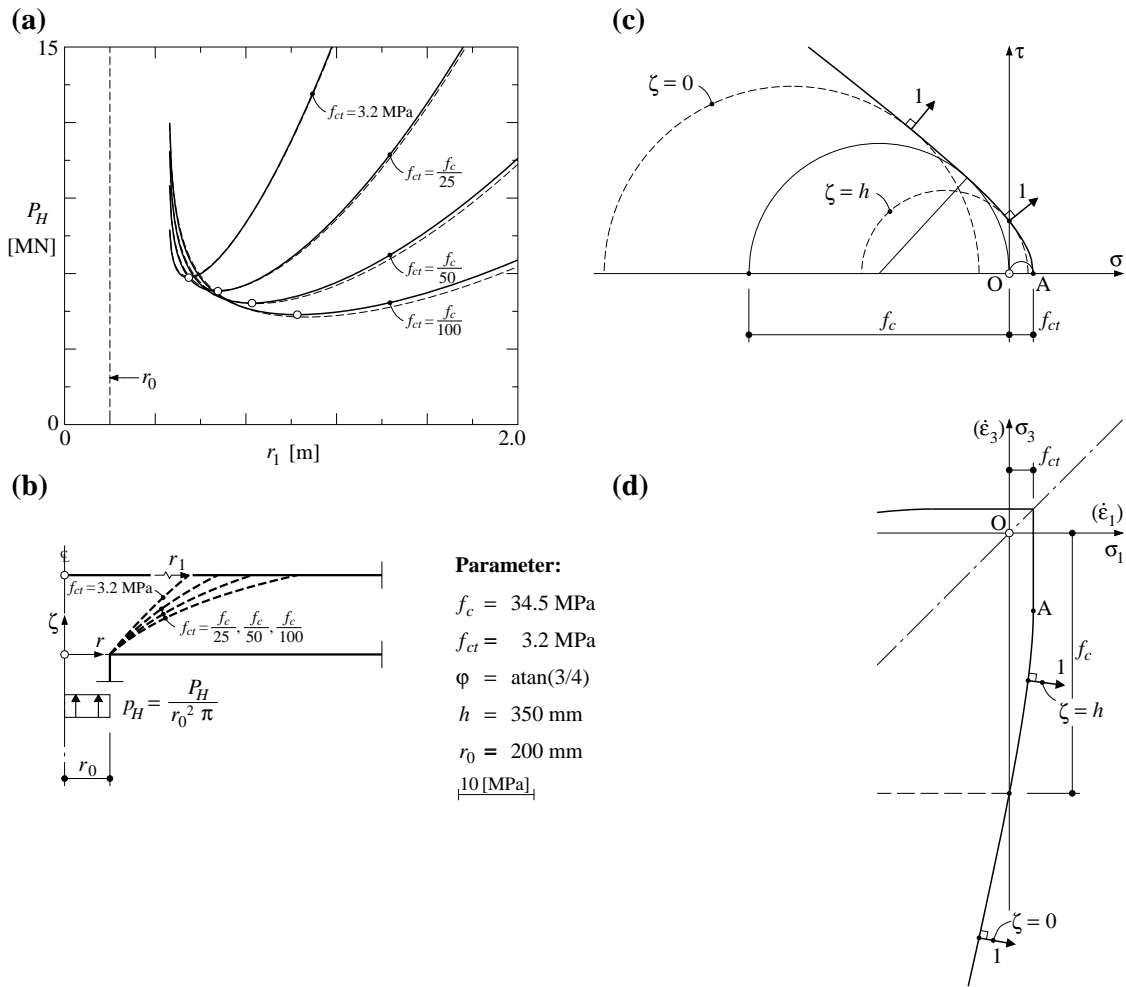


Bild 3.40 Durchstanzen mit hyperbolischer Hüllkurve: (a) Durchstanzwiderstand in Abhängigkeit von der Geometrie der Bruchfläche; (b) Bruchflächen mit minimalen Durchstanzwiderständen; (c), (d) Spannungszustand an der Bruchfläche in der Spannungsebene und im Hauptspannungsraum.

3.8.2 Durchstanzen mit parabolischer Hüllkurve

In gleicher Weise kann für die in Kapitel 3.5.2 definierte parabolische Hüllkurve ein oberer Grenzwert für den Durchstanzwiderstand bestimmt werden. Einsetzen von (3.32) in (3.157) und Gleichsetzen von (3.156) und (3.157) liefert die Beziehung

$$P_p = 2 \cdot \pi \cdot f_{ct} \int_0^h \left(\frac{\left(\sqrt{1 + \frac{f_c}{f_{ct}}} - 1 \right)^2}{4 \cdot r'} + r' \right) \cdot r \, d\zeta \quad (3.168)$$

Einsetzen von $F(r, r')$ aus (3.168) in die Differentialgleichung (3.160) und Berücksichtigung der Randbedingungen $r(0) = r_0$ und $r(h) = r_1$ liefert die gesuchte Form der Bruchfläche

$$r(\zeta) = r_0 \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{\zeta/h} \quad (3.169)$$

als Exponentialfunktion. Durch Einsetzen der nun bekannten Bruchfläche aus (3.169) in (3.168) resultiert P_P in Abhängigkeit des Radius des Durchstanzkegels r_1 .

$$P_P = \pi f_{ct} \left(\frac{h^2 \left(\sqrt{1 + \frac{f_c}{f_{ct}}} - 1 \right)^2}{2 \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} + r_1^2 - r_0^2 \right) \quad (3.170)$$

Schliesslich führt das Aufsuchen des Minimums von P_P mit $dP_P/dr_1 = 0$ auf den noch unbekannten Radius des Durchstanzkegels r_1 auf die transzendente Gleichung

$$r_1 \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right) = \frac{h}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{f_c}{f_{ct}}} - 1 \right) \quad (3.171)$$

Die Bestimmung des minimalen, oberen Grenzwerts des Durchstanzwiderstands aus (3.170) bedarf demnach einer numerischen Iteration für r_1 in (3.171).

Wird die Form des Bruchkörpers als Kreiskegelstumpf vorausgesetzt, resultiert eine kubische Gleichung zur Bestimmung der Neigung von dessen Mantellinie [Salim & Sebastian (2002)]. Der Durchstanzwiderstand lässt sich ohne numerische Iteration ermitteln, jedoch ist ein beträchtlicher Rechenaufwand erforderlich. Diese nicht optimale Form des Kreiskegelstumpfs liefert im Vergleich zu (3.168) höhere obere Grenzwerte des Durchstanzwiderstands.

Näherungslösung in algebraischer Form

Die bisherigen Beziehungen für den Durchstanzwiderstand sind mit einem grossen Rechenaufwand verbunden ((3.159) bis (3.167)) oder lassen sich nur implizit lösen ((3.168) bis (3.171)). Eine algebraische Lösung kann mit einer Näherung zur Bestimmung des Radius r_1 der Bruchfläche angegeben werden. Wird der natürliche Logarithmus in (3.171) durch ein TAYLOR-Polynom vom Grad eins angenähert und der daraus resultierende Ausdruck für r_1 in (3.170) eingesetzt, entsteht eine Näherung für den Durchstanzwiderstand

$$P_P \cong 2 \cdot \pi f_{ct} r_0^2 \left(16 \frac{C_6^2}{\ln C_7} + \frac{C_7^2 - 1}{2} \right) \quad \text{mit} \quad (3.172)$$

$$C_6 = \frac{h \left(\sqrt{1 + \frac{f_c}{f_{ct}}} - 1 \right)}{8 \cdot r_0}, \quad C_7 = C_6 + \frac{1}{2} + \sqrt{C_6^2 + 3 \cdot C_6 + \frac{1}{4}}$$

in algebraischer Form. (3.172) ist abhängig von den Werkstoffkennwerten f_c und f_{ct} , der Plattenstärke h sowie dem Stützenradius resp. dem Radius r_0 der gestützten Fläche (Kapitel 3.8.4).

Bild 3.41(a) zeigt den Durchstanzwiderstand in Abhängigkeit der Form resp. des Radius der Bruchfläche r_1 für verschiedene Zugfestigkeiten des Betons, und Bild 3.41(b) veranschaulicht die zugehörige Bruchfläche mit dem minimalen, oberen Grenzwert des Durchstanzwiderstands P_P . Der Spannungszustand innerhalb der Bruchfläche an der Plattenunter- ($\zeta = 0$) und -oberseite ($\zeta = h$) ist in Bild 3.41(c) resp. (d) für $f_{ct} = 3.2$ MPa dargestellt.

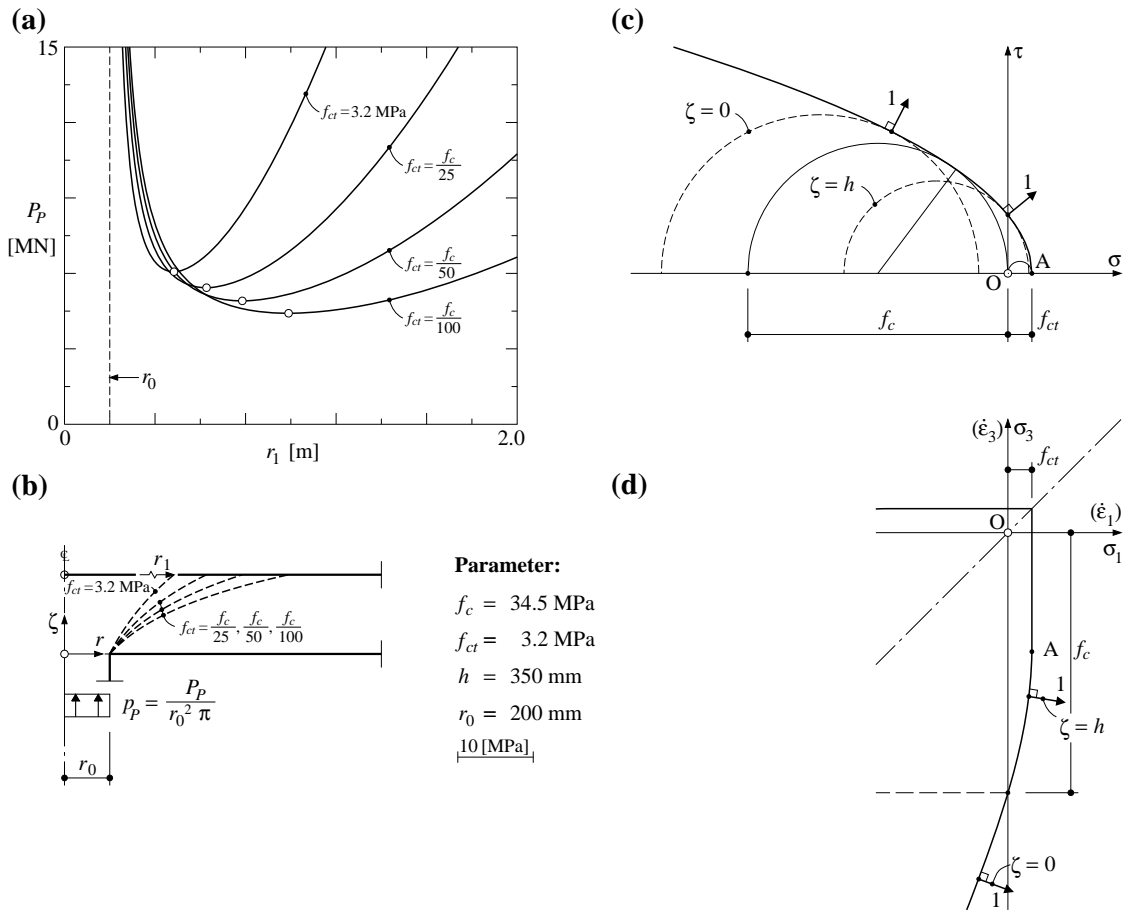


Bild 3.41 Durchstanzen mit parabolischer Hüllkurve: (a) Durchstanzwiderstand in Abhängigkeit von der Geometrie der Bruchfläche; (b) Bruchflächen mit minimalen Durchstanzwiderständen; (c), (d) Spannungszustand an der Bruchfläche in der Spannungsebene und im Hauptspannungsraum.

3.8.3 Durchstanzen mit modifizierter Fließbedingung von COULOMB

Bræstrup et al. (1976) entwickelten einen oberen Grenzwert des Durchstanzwiderstands auf der Grundlage der in Kapitel 3.4 beschriebenen modifizierten Fließbedingung von COULOMB. Der Durchstanzkörper setzt sich, in Abhängigkeit des Verhältnisses der Betondruck- zur Betonzugfestigkeit, aus einem Kreiskegelstumpf und einem Kegelstumpf mit kettenlinienförmiger Mantellinie zusammen. Die Ermittlung des Durchstanzwiderstands bedarf wiederum einer numerischen Iteration. Für den Spezialfall einer vernachlässigbaren Betonzugfestigkeit ($f_{ct} = 0$) entsteht ein Bruchkörper in Form eines Kreiskegelstumpfs, bei dem die Neigung der Mantellinie dem Winkel der inneren Reibung φ entspricht. Der Durchstanzwiderstand bestimmt sich zu

$$P_K = \pi \frac{f_c}{2} h \left(\frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) (2 \cdot r_0 + h \tan \varphi) \quad (3.173)$$

und entspricht dem in Marti & Thürlimann (1977) angegebenen Ausdruck.

3.8.4 Einflussfaktoren auf den Durchstanzwiderstand

Geometrische Einflussfaktoren

Bild 3.42 zeigt auf Grundlage der Beziehungen (3.163) bis (3.173) den Einfluss der Plattenstärke h sowie des Radius r_0 der konzentrierten Flächenlast auf den Durchstanzwiderstand. Die beiden geometrischen Einflussfaktoren verhalten sich annähernd linear zum Durchstanzwiderstand, Bild 3.42(a), (c). Dies gilt jedoch nur für die vorausgesetzte, kreisrund konzentrierte Flächenlast und dünne Platten.

Der Schubwiderstand von dicken Platten ohne Querkraftbewehrung nimmt infolge des damit einhergehenden spröden Bruchvorgangs im Vergleich zu dünnen Platten ab (Massstabseffekt), [Hillerborg (1983)]. In Bezug auf das Durchstanzen wurde diese Tatsache unter anderem mit den Versuchen von Kinnunen et al. (1980) bestätigt. Nielsen & Hoang (2011) geben an, dass sich ein substantieller Massstabseffekt einstellt, wenn die Traglast eines Bauteils stark von dessen Betonzugfestigkeit abhängt. Eine Übersicht über eine Vielzahl von Experimenten sowie ein semi-empirischer Ansatz zur Beschreibung des Effekts sind in Bazant et al. (1994) zu finden. In der Stahlbetonbauweise lässt sich der Massstabseffekt zumeist durch Einlegen einer Mindestbewehrung eliminieren oder zumindest stark einschränken, wie dies beispielsweise in den Versuchen zum Querkraftwiderstand von Platten in Jäger & Marti (2006) aufgezeigt wurde.

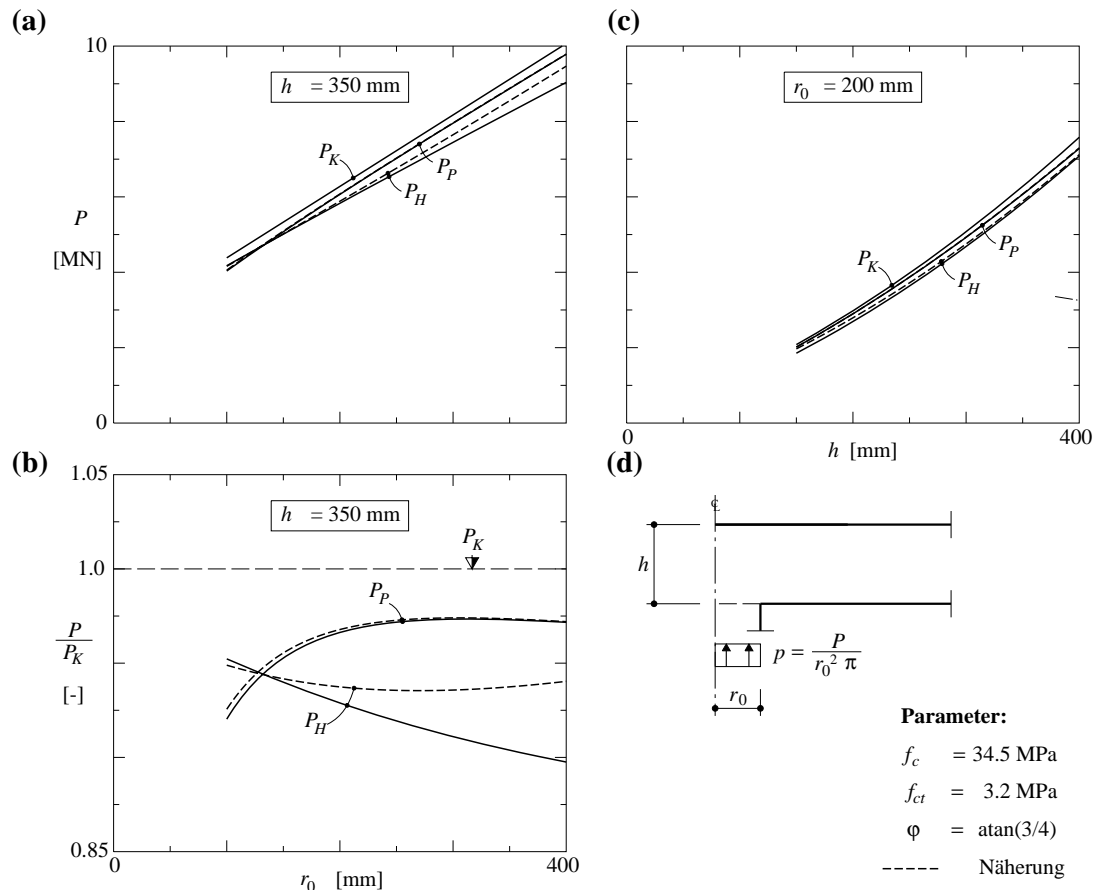


Bild 3.42 Vergleich der Durchstanzwiderstände: (a), (b) in Abhängigkeit von r_0 ; (c) in Abhängigkeit von h ; (d) Bezeichnungen.

Der Unterschied zwischen den verschiedenen Bestimmungsgleichungen für den Durchstanzwiderstand ist für die in Bild 3.42 verwendeten Parameter gering. Dies aufgrund der Tatsache,

dass die fiktive Kohäsion der Fliessbedingung mit der parabolischen resp. hyperbolischen Hüllkurve (Kapitel 3.5) für übliche Betonzugfestigkeiten gemäss (2.6) etwa gleich der fiktiven Kohäsion der modifizierten Fliessbedingung von COULOMB mit vernachlässigter Betonzugfestigkeit ist (quadratische Fliessbedingung, Kapitel 3.4.1). Wird die Betonzugfestigkeit auch bei der parabolischen resp. hyperbolischen Hüllkurve verringert, nimmt der in Bild 3.42(b) dargestellte Unterschied zwischen P_K und P_P resp. P_H zu, Bild 3.40(a) und Bild 3.41(a).

Einfluss der Betonfestigkeit

Bild 3.43(a) illustriert den annähernd linearen Zusammenhang zwischen dem Durchstanzwiderstand und der Betondruckfestigkeit f_c .

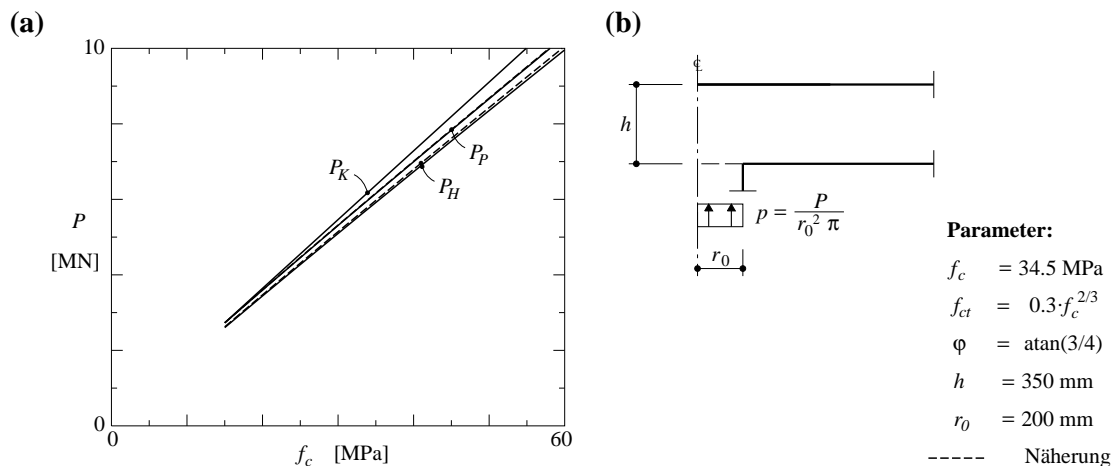


Bild 3.43 Vergleich der Durchstanzwiderstände: (a) in Abhängigkeit der Betondruckfestigkeit; (b) Bezeichnungen.

Die Vergleiche in Bild 3.42 und Bild 3.43 zeigen, dass auf der Basis der hyperbolischen Hüllkurve ((3.163) und (3.164)) insgesamt der kleinste obere Grenzwert für den Durchstanzwiderstand resultiert.

3.8.5 Vergleich mit Durchstanzversuchen

Die oben erörterten Beziehungen überschätzen allesamt den Durchstanzwiderstand im Vergleich mit Resultaten von Durchstanzversuchen [Bræstrup et al. (1976)]. Eine Übereinstimmung kann erzielt werden, wenn analog zur Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonscheiben die Werkstoffkennwerte des Betons in Abhängigkeit von dessen Verzerrungszustand angepasst werden. Für Stahlbetonscheiben kann dies beispielsweise gemäss dem gerissenen Scheibenmodell [Kaufmann (1998)] erfasst und bestimmt werden. Auf der Grundlage der Sandwichmodellvorstellung für Platten [Marti (1990)] sind in Jäger (2007) Hinweise auf den Verzerrungszustand in Platten gegeben. Im Bereich konzentrierter Lasten in Platten (Durchstanzen) fehlt jedoch eine abschliessende Arbeit. Aus diesem Grund beschränkt man sich bei der Beschreibung des Durchstanzens auf der Grundlage kinematischer Diskontinuitäten auf die Kalibrierung der Werkstoffkennwerte des Betons mit Resultaten von Durchstanzversuchen. Bræstrup (1979) schlägt vor, die effektive Druckfestigkeit des Betons mit der 4.2-fachen der Quadratwurzel der Betonzyylinderdruckfestigkeit (in MPa) zu berücksichtigen und ein Verhältnis zwischen der Be-

tonzug- und Druckfestigkeit von $1/400$ anzunehmen. Sigurdsson (1991)⁶ schlägt für die effektive Betondruckfestigkeit folgende empirische Beziehung vor

$$f_c = \mu f_{cc} \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{1.47}{\sqrt{f_{cc}}} \left(1 + \frac{0.48}{\sqrt{h}} \right) \left(1 + \frac{1}{8} \rho \right) \quad (3.174)$$

mit f_{cc} in MPa, h in m und dem Biegebewehrungsgehalt ρ in %. (3.174) berücksichtigt somit den Massstabseffekt sowie den Einfluss der Biegebewehrung und der damit zusammenhängenden Plattenverformungen auf das Durchstanzen. Salim & Sebastian (2002) empfehlen, basierend auf Vergleichen zwischen zahlreichen Durchstanzversuchen und den berechneten Widerständen (Kapitel 3.5.2), die effektive Betondruckfestigkeit mit (3.174) zu berücksichtigen und für die Betonzugfestigkeit

$$f_{ct} = \frac{\mu f_{cc}}{100} \quad (3.175)$$

anzusetzen.

3.8.6 Vergleich mit Versuchsergebnissen der ETH Zürich

Nachfolgend werden die Beziehungen (3.163) bis (3.172) mit Resultaten eigener Durchstanzversuche verglichen. Eine Darstellung der Versuchseinrichtung, der Versuchskörper und der Resultate findet man in Heinzmann et al. (2011) oder ausführlicher in Etter et al. (2009). In Bild 3.44 sind die drei Versuchskörper mit den Abmessungen und der Bewehrung dargestellt. Der Versuchskörper SP1 weist keine Querkraftbewehrung auf; beim Versuchskörper SP2 ist diese im Bereich der Stütze konzentriert angeordnet, und der Versuchskörper SP3 beinhaltet eine vollflächige Querkraftbewehrung. Als Querkraftbewehrung sind die in Bild 3.44(c) dargestellten Stäbe mit aufgestauchten Ankerköpfen (Doppelkopfanker) eingesetzt worden. Die wichtigsten Werkstoffparameter sind ebenfalls in Bild 3.44 enthalten. Alle Versuchskörper weisen eine identische Biegebewehrung auf; bezogen auf die statische Höhe der oberen Bewehrung von 294 mm beträgt der Biegebewehrungsgehalt $\rho = 1.23\%$. Alle drei Versuchskörper versagten schlagartig und spröde infolge eines Versagens des Betons. Der Versuchskörper SP1 zeigte ein für Platten ohne Querkraftbewehrung typisches Durchstanzversagen. Beim Versuchskörper SP2 stellte sich die Bruchfläche ausserhalb der querkraftbewehrten Zone ein. Beim Versuchskörper SP3, mit der vollflächigen Querkraftbewehrung, stellte sich ein Versagen des Betons auf Druck im unmittelbaren Stützenbereich ein.

⁶ siehe [Nielsen (2011)]

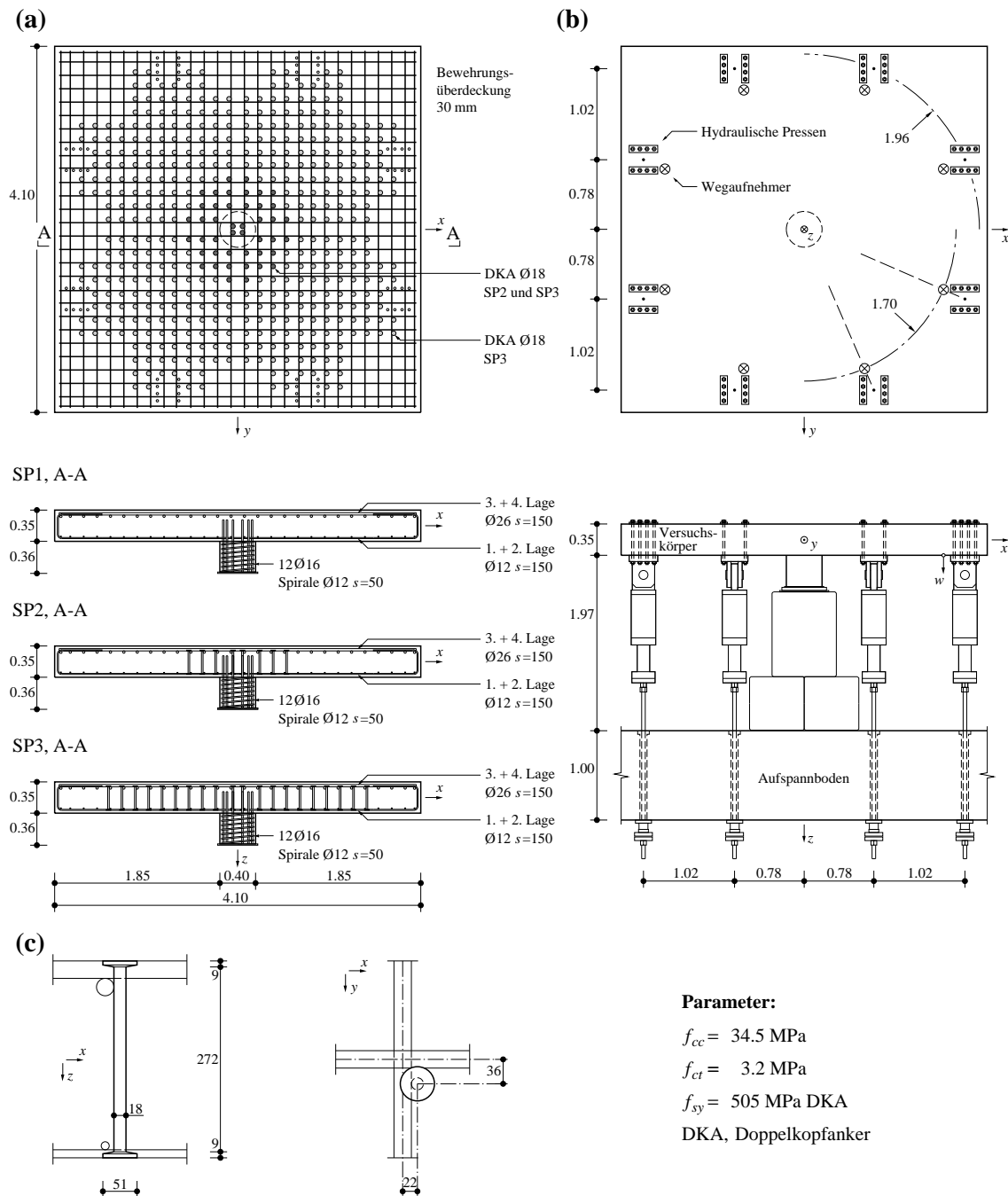


Bild 3.44 Durchstanzversuche [Etter et al. (2009)]: (a) Versuchskörper mit Bewehrung; (b) Versuchseinrichtung; (c) Querkraftbewehrung mittels Doppelkopfankern.

Effektive Betonfestigkeit

Bild 3.45 zeigt die Last-Verformungsdiagramme aller drei Versuchskörper. Der Versuchskörper SP1 versagte bei einer Stützenreaktion von 1.71 MN spröde bei einer Durchbiegung von 10.0 mm, gemessen in einem Abstand von 1.70 m vom Zentrum der Platte, Bild 3.44(b). Wird diese Stützenreaktion mit den Durchstanzwiderständen aus (3.170) bzw. (3.163) gleichgesetzt, können daraus die Beiwerte für die effektive Betondruckfestigkeit μ gemäß (3.174) unter Berücksichtigung von (3.175) bestimmt werden. Wird demnach der Durchstanzwiderstand auf

Grundlage der parabolischen Hüllkurve (3.170) bzw. hyperbolischen Hüllkurve (3.163) bestimmt, resultiert $\mu = 0.39$ bzw. 0.40 .

Die Stützenreaktion beim Versagen des Versuchskörpers SP2 betrug 3.08 MN bei einer Durchbiegung von 25.0 mm . Für den Beiwert μ der Betondruckfestigkeit resultieren mit der parabolischen Hüllkurve (3.170) resp. hyperbolischen Hüllkurve (3.163) 0.41 resp. 0.42 . Für den Radius der konzentrierten Flächenlast wurde dabei die querkraftbewehrte Zone mit $r_0 = 558 \text{ mm}$ berücksichtigt. Die Form der Bruchfläche wird im nachfolgenden Abschnitt weiter diskutiert.

Ein Vergleich der Versuchsergebnisse mit den Normvorschriften EC 2 (2004) und ACI 318 (2008) sowie der Modellvorstellung nach Muttoni (2003) ist in Heinzmann et al. (2011) enthalten.

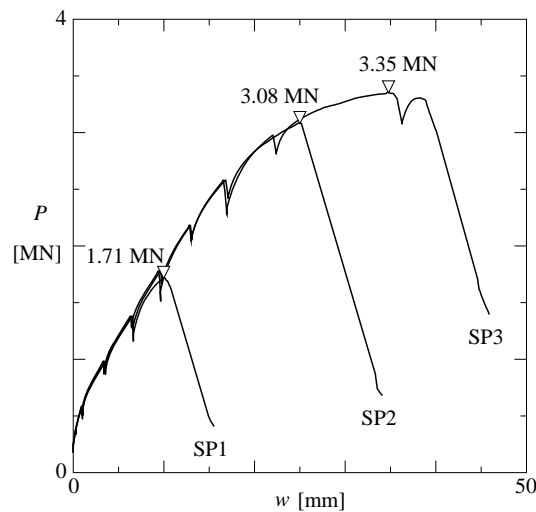


Bild 3.45 Durchstanzversuche [Etter et al. (2009)]: Last-Verformungsdiagramm.

Form der Bruchflächen

Im Anschluss an die Versuchsdurchführung wurden die Versuchskörper entlang der x -Achse aufgeschnitten. Bild 3.46 zeigt das entsprechende Rissbild der Versuchskörper SP1 und SP2 und vergleicht diese in Bild 3.47(a) mit den berechneten Bruchflächen aus den Beziehungen (3.161) sowie (3.169) für den Versuchskörper SP1 sowie in Bild 3.47(b) für den Versuchskörper SP2. Den berechneten Bruchflächen liegen die im vorigen Abschnitt ermittelten reduzierten Werkstoffkennwerte für den Beton zugrunde. Die Vergleiche in Bild 3.47 zeigen eine gute Übereinstimmung zwischen der berechneten und der effektiven Form der Bruchfläche.

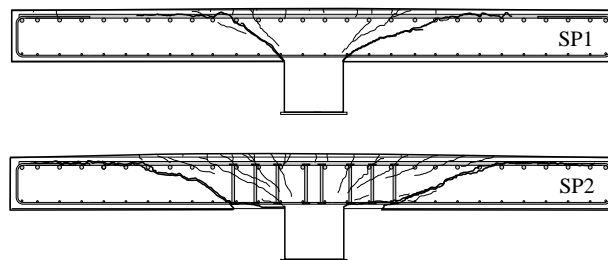


Bild 3.46 Durchstanzversuche Etter et al. (2009)]: Rissbilder der Versuchskörper SP1 und SP2.

Zudem ist in Bild 3.47 der zugehörige, auf der Basis der parabolischen Hüllkurve berechnete Spannungszustand innerhalb der Bruchfläche an der Plattenunter- ($\zeta = 0$) und -oberseite ($\zeta = h$) dargestellt. Dabei ist ersichtlich, dass an der Plattenunterseite die Hauptdruckspannung im Beton die reduzierte Betondruckfestigkeit übersteigt (SP1) oder nahezu erreicht (SP2), während an der Plattenoberseite die Hauptzugspannungen im Beton die reduzierte Betonzugfestigkeit erreichten (vgl. Bild 3.40 und Bild 3.41).

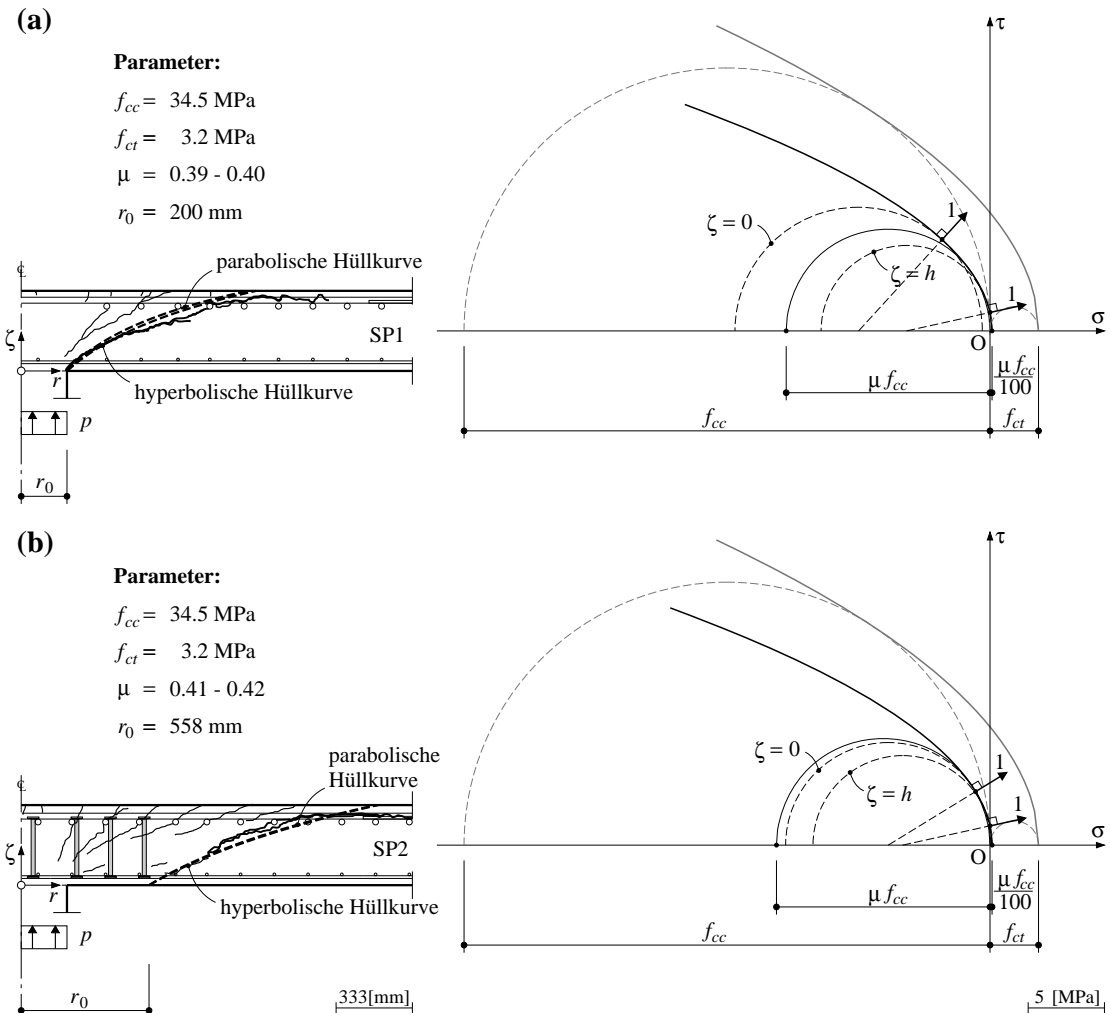


Bild 3.47 Durchstanzversuche Etter et al. (2009): Vergleich der Bruchflächen mit Nachrechnung und Spannungszustand innerhalb der Bruchfläche auf Grundlage der parabolischen Hüllkurve: (a) Versuchskörper SP1; (b) Versuchskörper SP2.

Versuchskörper SP3

Die Stützenreaktion beim Versagen des Versuchskörpers SP3 betrug 3.35 MN bei einer Durchbiegung von 34.8 mm (Bild 3.45). Die Form der Bruchfläche resp. des Durchstanzkegels beim Versuchskörper SP3 wurde durch die Querkraftbewehrung (Doppelkopfkanker) beeinflusst resp. definiert (Bild 3.48). Der Durchstanzkegel hatte seine Basis am Stützenansatz und verlief zwischen den Querkraftbewehrungsstäben hindurch mit einer Neigung der Seitenflächen zur Horizontalen von zirka 58° , womit sich der Radius r_1 mit zirka 419 mm ergibt. Entlang des Durchstanzkegels bildete sich eine 20 bis 40 mm breite Bruchzone, in der das Betongefüge zerstört war, Bild 3.49(a). Mit dem bekannten Radius r_1 und der Beziehung (3.170) kann der Beiwert für die effektive Betondruckfestigkeit μ zu 0.45 bestimmt werden.

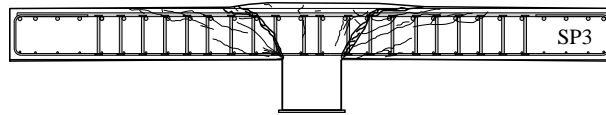


Bild 3.48 Durchstanzversuche Etter et al. (2009): Rissbild des Versuchskörpers SP3.

In Bild 3.49(a) ist die Lage der einzelnen Doppelkopfkanker für einen Ausschnitt eines Quadranten (Bild 3.49(b)) der Platte dargestellt. Bild 3.49(c) zeigt den Durchstanzwiderstand in Abhängigkeit der Form der Bruchfläche resp. des Radius r_1 . Die Bestimmung des oberen Grenzwerts des Durchstanzwiderstands und der zugehörigen Bruchfläche beruht auf den Beziehungen (3.170) und (3.171) sowie dem oben erwähnten Beiwert für die effektive Betondruckfestigkeit. Die stetige, gestrichelte Linie in Bild 3.49(c) illustriert den Anteil des Betons am Durchstanzwiderstand und die treppenförmigen, gestrichelten Linien zeigen den Anteil der als starr-ideal plastisch angenommenen Querkraftbewehrung (Doppelkopfkanker) innerhalb der Bruchfläche (Kapitel 3.6.5). Dabei wird unterschieden, ob die Doppelkopfkanker 1 und 4 mit dem Abstand zur gestützten Fläche von 71 resp. 79 mm einen Beitrag zum Durchstanzwiderstand leisten (gestrichelte Linie I in Bild 3.49(a)) oder nicht (gestrichelte Linie II in Bild 3.49(a)). Die Summenbildung der Anteile aus Beton und Querkraftbewehrung führt auf die beiden ausgezogenen Linien I und II in Bild 3.49(a). In Bild 3.49(c) dargestellt ist die Stützenreaktion beim Versagen des Versuchskörpers SP3 von 3.35 MN (strichpunktierte Linie). Theoretisch stellt sich demnach eine Bruchfläche ein, die die Doppelkopfkanker 2, 5 und 7 tangiert, wobei die Doppelkopfkanker 1 und 4 einen geringen Beitrag zur Dissipation innerhalb der Bruchfläche resp. einen geringen Beitrag am Durchstanzwiderstand liefern.

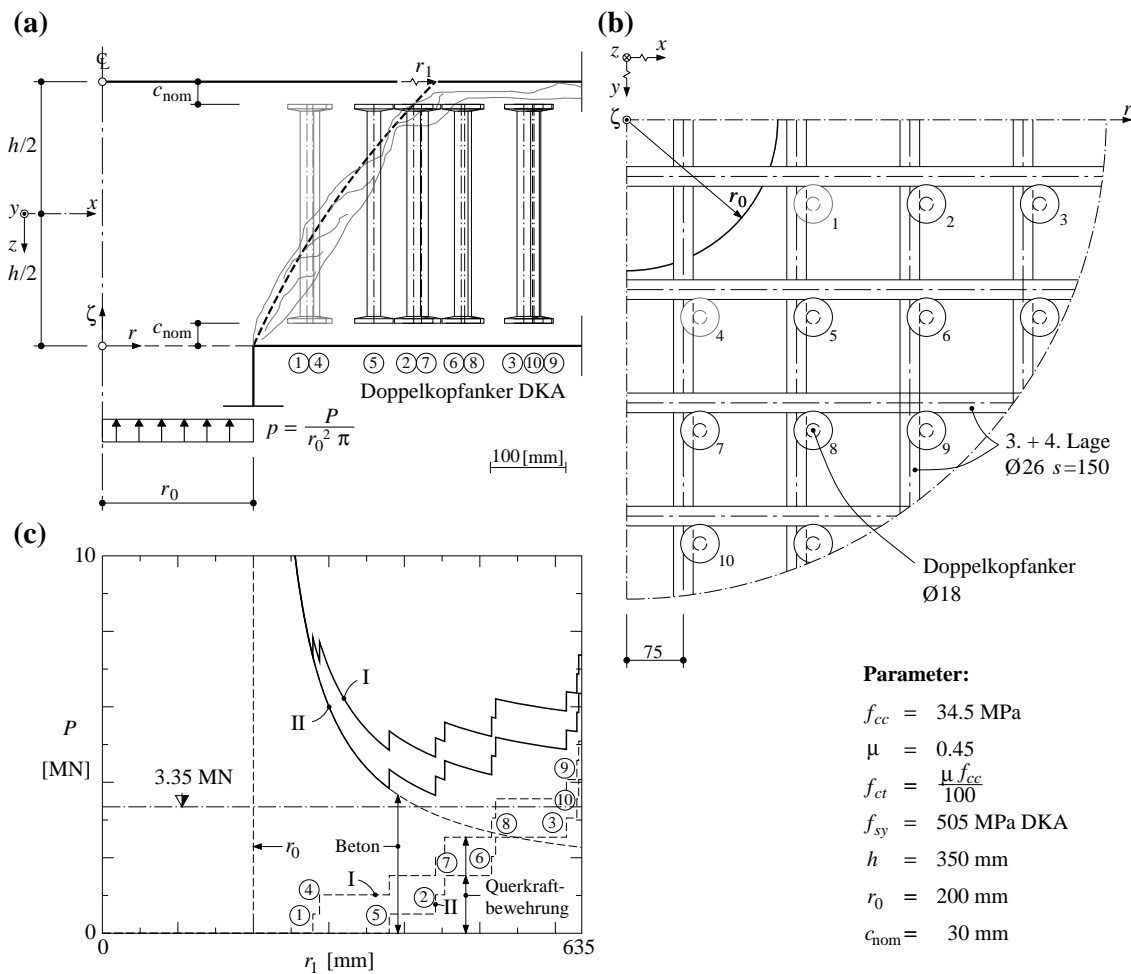


Bild 3.49 Durchstanzversuche [Etter et al. (2009)]: Versuchskörper SP3: (a) Rissbilder des Versuchskörpers SP3 und Vergleich mit Nachrechnung; (b) Grundrissausschnitt; (c) Durchstanzwiderstand in Abhängigkeit der Form der Bruchfläche.

3.8.7 Bemerkungen zur Bemessung bezüglich Durchstanzen

Durchstanzwiderstand ohne Querkraftbewehrung

Die Normvorschriften ACI 318 (2008), EC 2 (2004) und SIA 262 (2003) zur Ermittlung des Durchstanzwiderstands ohne Querkraftbewehrung beruhen auf der Bestimmung einer nominellen Schubspannung entlang eines Umfangschnitts, der in einem willkürlich definierten Abstand rund um die gestützte Fläche (konzentrierte Flächenlast) bestimmt wird. Die nominelle Schubspannung entlang dieses Umfangschnitts entspricht, beim Nichtvorhandensein einer Querkraftbewehrung, dem Schubwiderstand des Betons und ist abhängig von der Plattenstärke (ACI 318, EC 2, SIA 262), der Biegebewehrung (EC 2, SIA 262) sowie der maximalen Korngröße des Betons (SIA 262). Der nominelle Schubwiderstand basiert auf der Kalibrierung mit Durchstanzversuchen mit zumeist rotationssymmetrischen Randbedingungen. Mit der Berücksichtigung der Biegebewehrung wird indirekt der Verformung der Platte Rechnung getragen. Eine schwächer bewehrte Platte erfährt grössere Verformungen, was zu einer reduzierten Schubübertragung über die Rissufer resp. einem reduzierten Schubwiderstand führt [Jäger (2007)]. Die Erhöhung der Biegebewehrung führt demnach zu einer moderaten Erhöhung

des Durchstanzwiderstands, geht jedoch einher mit einer signifikanten Abnahme der Duktilität resp. des Verformungsvermögens der Platte [SIA D 0182 (2003)] und ist aus diesem Grund sehr zurückhaltend zu berücksichtigen. Die massgebenden Einflussfaktoren auf den Durchstanzwiderstand ohne Querkraftbewehrung sind die Plattenstärke, der Radius resp. die Ausdehnung der gestützten Fläche sowie die Betonqualität. Die Abhängigkeiten sind in Kapitel 3.8.4 diskutiert. Eine Erhöhung der Plattenstärke ist sinnvoll, wenn sich diese auf den Stützenbereich beschränkt. Vernünftig ist die Vergrößerung des Radius der gestützten Fläche. Die Kombination dieser beiden geometrischen Massnahmen führt auf die Anordnung einer Stützenkopfverstärkung, wie sie beispielsweise in der Dokumentation SIA D 0181 (2003) dargestellt ist. Bereits anfangs des 20. Jahrhunderts erkannte Maillart⁷ das Problem der lokalen Krafteinleitung in Stahlbetonplatten und löste dieses konstruktiv, indem er Pilzdecken erstellte.

Die Bestimmung des Durchstanzwiderstands ohne Querkraftbewehrung kann beispielsweise mit der Beziehung (3.172) erfolgen. Diese algebraische Beziehung beruht auf mechanischen Grundlagen (kinematische Diskontinuität mit parabolischer Hüllkurve) und ist auch für Rand- und Eckstützen mittels Multiplikation eines Bruchteils von $2 \cdot \pi$ anwendbar. Der Umfangschnitt, wie er in den erwähnten Normvorschriften definiert ist, entfällt. Es handelt sich jedoch um einen oberen Grenzwert der Traglast. Die Festlegung der effektiven Betonfestigkeit bedarf weiterer theoretischer Untersuchungen zum Verzerrungszustand der Platte bei lokaler Krafteinleitung mit Berücksichtigung des Membranspannungszustands und einer Kalibrierung mit Versuchsergebnissen. Im Weiteren fehlt in der Beziehung (3.172) die Berücksichtigung des Massstabeffekts. Dieser kann analog dem Vorgehen in der Teilrevision (1993) der SIA 162 berücksichtigt werden. Zusammengefasst lässt sich mit der Beziehung (3.172) der Durchstanzwiderstand ohne Querkraftbewehrung einfach bestimmen, und mit einer konservativen Berücksichtigung der effektiven Betonfestigkeit kann eine sichere Bemessung gewährleistet werden. Darüber hinaus kann die gleiche Modellvorstellung (kinematische Diskontinuität mit parabolischer Hüllkurve) auch auf Balken und Plattenbalken übertragen werden, so dass insgesamt eine konsistente, mechanisch fundierte Ermittlung des Querkraftwiderstands von Stahlbetonbauteilen ohne Querkraftbewehrung möglich ist.

In kürzlich veröffentlichten Normvorschriften [Model Code (2010), SIA 269/2 (2011)] ist ein verformungsabhängiges Bruchkriterium bezüglich Durchstanzen definiert [Muttoni (2003)]. Als Verformungsparameter wird die Plattenrotation im Stützenbereich in Rechnung gestellt, die mit der Verformung in einem kritischen Riss korreliert und aus der sich das Bruchkriterium ableiten lässt. Der Durchstanzwiderstand bestimmt sich aus dem Schnittpunkt der dieses Bruchkriteriums beschreibenden Kurve mit einer zu berechnenden Last-Verformungskurve. Bereits die Last-Verformungsberechnung an einem rotationsymmetrischen Modell ist aufwendig und komplex. Insgesamt ermöglichen die auf diesem Ansatz aufbauenden Bemessungsbeziehungen die Bestimmung des Durchstanzwiderstands lediglich in impliziter Form [SIA 262 (2003)]. Im Weiteren basiert das verformungsbasierte Bruchkriterium ebenfalls auf der oben erwähnten Auswertung von Versuchsergebnissen. Vergleiche mit Versuchsergebnissen an vorwiegend rotationsymmetrisch gelagerten Platten zeigen eine sehr gute Übereinstimmung (z. B. in Heinzmann et al. (2011)).

Durchstanzwiderstand mit Querkraftbewehrung

Generell sollte der Einsatz von Querkraftbewehrungen in Platten forciert werden, da der Einfluss des Massstabeffekts entfällt oder zumindest verringert und das Verformungsvermögen signifikant verbessert wird [Jäger (2007)]. Die Bemessung einer Querkraftbewehrung zur Erhö-

⁷ Übersicht der von Maillart durchgeführten Versuche und Berechnungsmethoden in Fürst & Marti (1997)

hung des Durchstanzwiderstands hat gemäss SIA 262 (2003) auf Grundlage eines Fachwerkmodells zu erfolgen. Dabei ist von einer Druckfeldneigung von 45° auszugehen. Die Querkraftbewehrung wird dabei mittels unendlich fein verteilter Einzelfasern mit verschwindendem Stababstand ($s \rightarrow 0$) in Rechnung gestellt. In Kapitel 3.6.5 ist der Einfluss des endlichen Stababstands der Querkraftbewehrung für Trägerstege diskutiert. Aufgrund der geringen Plattenstärke verstärkt sich der Einfluss des endlichen Stababstands der Querkraftbewehrung in Platten zusätzlich. Sinngemäss können die Überlegungen des Kapitels 3.6.5 auch für die Bemessung einer Querkraftbewehrung zur Erhöhung des Durchstanzwiderstands übertragen werden.

Zusammengefasst stellt das Durchstanzen ein lokales Phänomen dar, mit einem dementsprechend mässigen Stellenwert für die Bemessung gesamter Stahlbetontragstrukturen. Diesen Stellenwert gilt es auch bei der Erarbeitung von Normvorschriften zu beachten. Andererseits sind bei der Überprüfung bestehender Strukturen verfeinerte Modellvorstellungen bezüglich des Querkrafttragverhaltens vernünftig und angezeigt [Muttoni (2003), Jäger (2007)].

3.9 Zusammenfassung

In Kapitel 3.6 sind die Fliessbedingungen für Stahlbeton-Scheibenelemente aufgeführt. Diese basieren auf der Modellannahme, dass die Bewehrung mittels unendlich fein verteilter Einzelfasern idealisiert werden kann. Der Einfluss des endlichen Stababstands der Querkraftbewehrung auf den Tragwiderstand von Stahlbetonträgern wird mit Hilfe von kinematischen Diskontinuitäten in Kapitel 3.6.5 aufgezeigt. Insbesondere in Trägern und Platten mit geringen Querschnittshöhen ist dieser Einfluss bedeutend. Das Kapitel 3.6.6 enthält Vorschläge zur Bemessung der Querkraftbewehrung in Stahlbetonträgern. Einerseits kann die Druckfeldrichtung mit der Beziehung (3.84) in Abhängigkeit der Trägerabmessungen und des gewählten Bügelabstands limitiert werden. Daraus lassen sich die Beziehungen (3.85) und (3.86) zur Bestimmung des maximal möglichen Querkraftwiderstands eines Trägers mit vorgegebener Geometrie herleiten. Andererseits erlauben die Beziehungen (3.82) und (3.83) die direkte Berücksichtigung des Stababstands bei der Bemessung der Querkraftbewehrung für eine vorgegebene Beanspruchung.

Das Kapitel 3.7 enthält verschiedene Ansätze zur Bestimmung des Tragwiderstands von Platten- resp. Schalenelementen in Stahlbeton unter kombinierter Beanspruchung. Auf Basis der Sandwichmodellvorstellung ist in Kapitel 3.7.3 eine Fliessbedingung für Plattenelemente aufgeführt, mit welcher untere (statische) Grenzwerte der Traglast für Biege- und Drillmomente ermittelt werden können. Darüber hinaus wird, ebenfalls auf Grundlage des unteren Grenzwertsatzes der Traglastverfahren, ein Vorgehen zur Berücksichtigung von Membrankraftbeanspruchungen vorgestellt.

In Kapitel 3.8 werden obere Grenzwerte des Durchstanzwiderstands aufbauend auf den in Kapitel 3.5 hergeleiteten MOHRschen Hüllkurven bestimmt. Die Beziehung (3.172) erlaubt eine mechanisch begründete, algebraische Bestimmung des Durchstanzwiderstands ohne Querkraftbewehrung. Der Vergleich mit der in Kapitel 3.8.6 dargestellten Durchstanzversuchsreihe zeigt eine gute Übereinstimmung bezüglich der Form der Bruchfläche. Weiterführende Untersuchungen sind nötig zur Festlegung der Betonfestigkeit in Abhängigkeit des Verzerrungszustands im unmittelbaren Krafteinleitungsbereich, wobei der Einfluss des Membranspannungszustands beachtet werden müsste.

4 STRINGER-TAFELMODELLE

4.1 Übersicht

In Bild 3.12(a) ist eine Scheibe mit allgemeiner Geometrie und Beanspruchung dargestellt. Im vorliegenden Kapitel werden verschiedene Verfahren zur Bestimmung des Tragverhaltens derartiger Scheiben in Stahlbeton aufgezeigt und einander gegenübergestellt. Schliesslich werden Modelle zur Beschreibung des Tragverhaltens von Faltwerken und Platten in Stahlbeton aufgezeigt.

4.1.1 Elastisches Verhalten der Scheiben

Unter der Voraussetzung eines linear elastischen Werkstoffverhaltens gilt für das isotrope Scheibenelement in Bild 3.12(b)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (4.1)$$

wobei $G = E/(2(1 + \nu))$ den Schubmodul bezeichnet und die Querdehnungszahl ν dessen Zusammenhang mit dem Elastizitätsmodul E beschreibt. Differenzieren von (3.45)₁ nach x und (3.45)₂ nach y mit $f_x = f_y = \text{konstant}$ und anschliessendes Einsetzen in die Verträglichkeitsbedingung (3.52) liefert die Potentialgleichung

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (4.2)$$

mit dem LAPLACEoperator $\Delta = \cdot_{xx} + \cdot_{yy}$. (4.2) beinhaltet im Vergleich zu den Gleichgewichtsbeziehungen (3.45) nur noch die beiden Spannungen σ_{xx} und σ_{yy} . Die nach Airy (1863) benannte Spannungsfunktion F erfüllt die Gleichgewichtsbedingungen (3.45) mit

$$\sigma_{xx} = F_{,yy}, \quad \sigma_{yy} = F_{,xx}, \quad \tau_{xy} = -F_{,xy} \quad (4.3)$$

Durch Einsetzen von (4.3) in (4.2) resultiert die Bipotentialgleichung oder Scheibengleichung

$$\Delta\Delta F = 0 \quad (4.4)$$

Zur Erfüllung der geometrischen Randbedingungen sind die Verschiebungen u_x und u_y zu bestimmen, welche aus dem aus der Spannungsfunktion resultierenden Verzerrungszustand zusammen mit dem Werkstoffgesetz durch Integration ermittelt werden können und dabei die Verträglichkeitsbedingung erfüllen müssen. Zur Befriedung von (4.4) werden vorwiegend Polynome, logarithmische Funktionen sowie Produkte von Exponential- und trigonometrischen Funktionen resp. hyperbolischen Funktionen verwendet [Zweiling (1952)], wobei letztere vorteilhaft mit Hilfe von FOURIERreihen angesetzt werden.

Für die Bemessung von wandartigen Trägern in Stahlbeton sind die Kenntnis der elastischen Spannungsverteilung und die sich daraus ergebenden Folgerungen bedeutend. Nachfolgend sollen diese Folgerungen anhand eines Beispiels aufgezeigt werden.

4.1.2 Elastisches Verhalten wandartiger Träger

Als wandartige Träger werden scheibenförmige Tragkonstruktionen bezeichnet, deren Konstruktionshöhe gross ist im Verhältnis zur Stützweite. Linear elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt, resultiert in derartigen Tragkonstruktionen eine nichtlineare Dehnungs- und Spannungsverteilung. Im Gegensatz dazu wird bei Balken- oder Stabtragwerken üblicherweise vorausgesetzt, dass die Konstruktionshöhe des Trägers gegenüber der Stützweite klein ist. Die Beschreibung des Tragverhaltens von Stabtragwerken basiert zumeist auf der Hypothese von BERNOULLI und NAVIER, wonach Querschnitte, die vor der Verformung eben- und senk-

recht zur Stabachse sind, auch nach der Verformung eben- und senkrecht zur verformten Stabachse bleiben. Wird ein linear elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt, resultieren in Stabtragwerken ebene Dehnungs- und Spannungsverteilungen über den Querschnitt.

Die als gewichtslos betrachtete Wandscheibe in Bild 4.1(a) sei entlang der beiden Berandungen in y -Richtung gelagert. Die Unverschieblichkeit in x -Richtung wird bei $x = l_x/2$ vorausgesetzt. Der Querschnitt des Trägers ist ein Rechteck mit den Seitenabmessungen h und l_y , wobei $h \ll l_x$ resp. l_y vorausgesetzt und somit ein ebener Spannungszustand mit $\sigma_{zz} = 0$ angenommen wird. Das Werkstoffverhalten wird als homogen und isotrop vorausgesetzt. Die Wandscheibe erfahre an ihrem unteren Rand $y = l_y$ eine konstante Streckenlast p . Diese Streckenlast wird in Form einer FOURIERreihe wie folgt approximiert.

$$p(x) = \frac{4p}{\pi} \left[\sum_n \left(\frac{1}{n} \sin(\alpha_n x) \right) \right] \quad \text{mit} \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l_x} \quad \text{und} \quad n = 1, 3, 5 \dots \quad (4.5)$$

Spannungszustand

Zur Lösung der Scheibengleichung wird der Ansatz

$$F_n = \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n^2} \cdot [C_{11} \cosh(\alpha_n y) + C_{12} \alpha_n y \sinh(\alpha_n y) + C_{13} \sinh(\alpha_n y) + C_{14} \alpha_n y \cosh(\alpha_n y)] \quad (4.6)$$

auf Grundlage der Arbeit von Timpe (1905) verwendet, woraus mit (4.3) die Spannungen

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= F_{n,yy} = \sum_n \sin(\alpha_n x) \cdot [(C_{11} + 2C_{12} + C_{14} \alpha_n y) \cosh(\alpha_n y) + (C_{13} + 2C_{14} + C_{12} \alpha_n y) \sinh(\alpha_n y)] \\ \sigma_{yy} &= F_{n,xx} = -\sum_n \sin(\alpha_n x) \cdot [(C_{11} + C_{14} \alpha_n y) \cosh(\alpha_n y) + (C_{13} + C_{12} \alpha_n y) \sinh(\alpha_n y)] \\ \tau_{xy} &= -F_{n,xy} = -\sum_n \cos(\alpha_n x) \cdot [(C_{13} + C_{14} + C_{12} \alpha_n y) \cosh(\alpha_n y) + (C_{11} + C_{12} + C_{14} \alpha_n y) \sinh(\alpha_n y)] \end{aligned} \quad (4.7)$$

resultieren. Mit den statischen Randbedingungen $\tau_{xy}(x, 0) = 0$, $\tau_{xy}(x, l_y) = 0$, $\sigma_{yy}(x, 0) = 0$ und $\sigma_{yy}(x, l_y) = p(x)/h$ betragen die Konstanten $C_{11} = 0$ und $C_{14} = -C_{13}$ sowie

$$\begin{Bmatrix} C_{12} \\ C_{13} \end{Bmatrix} = -\frac{4p}{h\pi n \left(\sinh(\alpha_n l_y)^2 - (\alpha_n l_y)^2 \right)} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_n l_y \sinh(\alpha_n l_y) \\ \sinh(\alpha_n l_y) + \alpha_n l_y \cosh(\alpha_n l_y) \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

womit der Spannungszustand in der Wandscheibe bestimmt ist. Für die in Bild 4.1(a) definierten Parameter mit einem Verhältnis von $l_y/l_x = 0.5$ resultieren die in (c) resp. (d) dargestellten Hauptspannungen sowie die Spannungen σ_{xx} und σ_{yy} in der Mitte der Wandscheibe und die Schubspannungen τ_{xy} entlang der in y -Richtung verlaufenden Berandungen. Die aufintegrierten Schubspannungen multipliziert mit der Scheibendicke h sind gleich den Auflagerreaktionen.

Die Unterschiede in den Spannungsverteilungen aus (4.7) im Vergleich zu den Spannungsverteilungen auf Grundlage der Hypothese nach BERNOULLI und NAVIER sind für $l_y/l_x = 0.5$ gemäss Bild 4.1(d) gering. Die Spannungsverteilung $\sigma_{xx}(l_x/2, y)$ verläuft annähernd linear. Bild 4.1(f) resp. (g) zeigt die Spannungsverteilungen für $l_y/l_x = 1$ resp. $l_y/l_x = 2$. Die angesprochenen Unterschiede in den Spannungsverteilungen nehmen bei ansteigendem Verhältnis von l_y/l_x zu. Die Spannungen $\sigma_{xx}(l_x/2, y)$ verlaufen nicht linear und der Hebelarm der inneren Druck- resp. Zugkräfte vermindert sich. Zudem nimmt der Abstand der resultierenden Zugkraft von der unteren Berandung mit ansteigendem Verhältnis von l_y/l_x ab. Für die quadratische Wandscheibe ($l_y/l_x = 1$) kann die gesamte Wandscheibenhöhe resp. Konstruktionshöhe als mitwirkend betrachtet werden; für $l_y/l_x = 2$ ist die obere Hälfte der Wandscheibe ($y < l_y/2$) annähernd spannungsfrei, Bild 4.1(g).

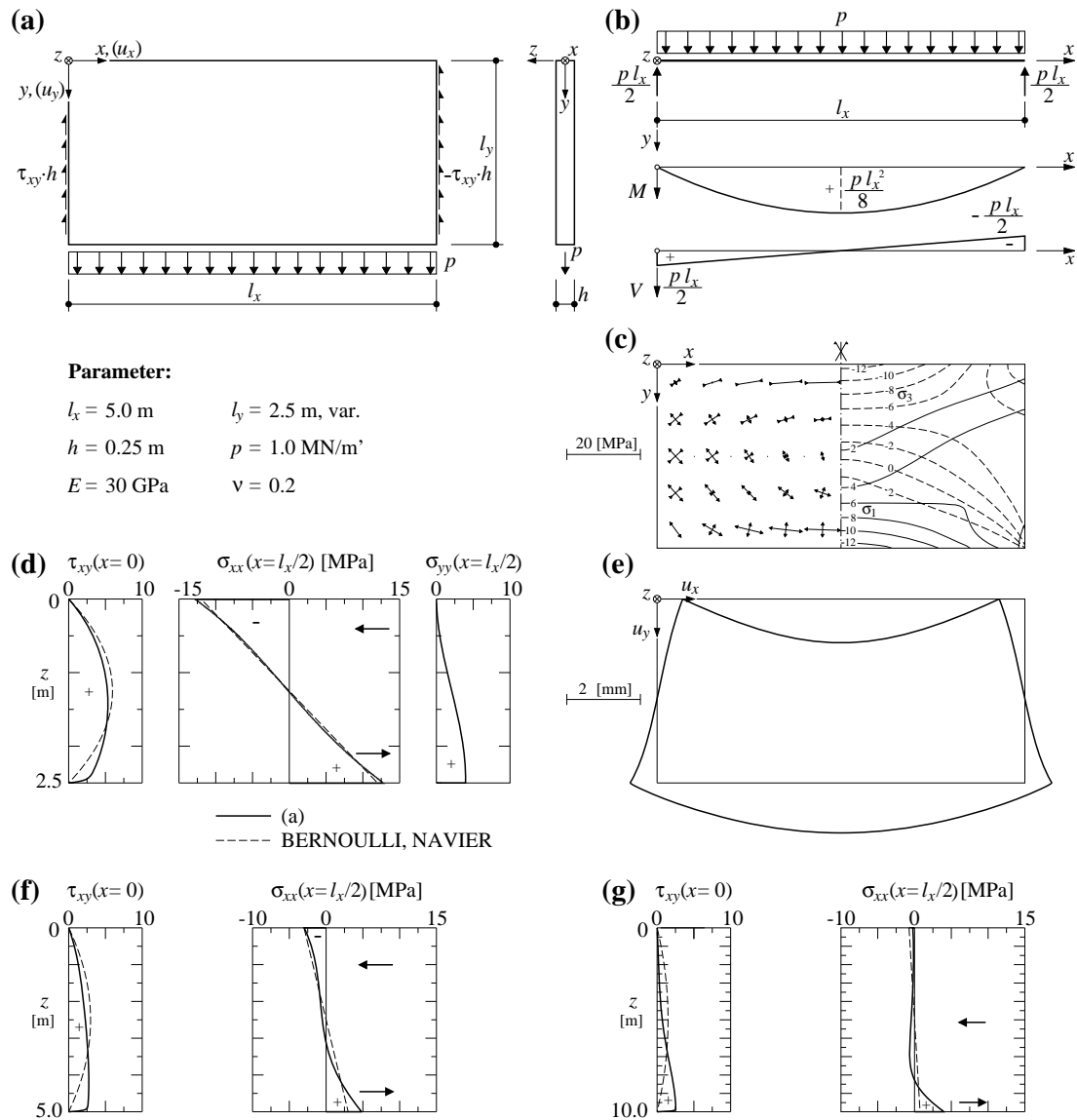


Bild 4.1 Wandscheibe: (a) Geometrie und Einwirkung, Querschnitt; (b) Statisches System; (c) Hauptspannungstrajektorien und Verlauf der Hauptspannungen σ_1 und σ_3 für $l_y/l_x = 0.5$; (d), (f), (g) Spannungen für $l_y/l_x = 0.5, 1.0, 2.0$; (e) Verschiebungen für $l_y/l_x = 0.5$.

Verschiebungszustand

Mit dem Spannungszustand (4.7) und dem Werkstoffgesetz (4.1) lassen sich die Verzerrungen und mittels partieller Integration die Verschiebungen bestimmen

$$\begin{aligned}
 u_x &= -\frac{1}{E} \sum_n \frac{\cos(\alpha_n x)}{\alpha_n} \cdot \left[(C_{11}(1+\nu) + 2C_{12} + C_{14}\alpha_n(1+\nu)y) \cosh(\alpha_n y) \dots \right. \\
 &\quad \left. + (C_{13}(1+\nu) + 2C_{14} + C_{12}\alpha_n(1+\nu)y) \sinh(\alpha_n y) \right] + \frac{1}{E} f(y) \\
 u_y &= -\frac{1}{E} \sum_n \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} \cdot \left[(C_{13}(1+\nu) + C_{14}(\nu-1) + C_{12}\alpha_n(1+\nu)y) \cosh(\alpha_n y) \dots \right. \\
 &\quad \left. + (C_{11}(1+\nu) + C_{12}(\nu-1) + C_{14}\alpha_n(1+\nu)y) \sinh(\alpha_n y) \right] + \frac{1}{E} g(x)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

mit den Konstanten C_{11} bis C_{14} gemäss (4.8). Als Integrationskonstanten treten jeweils Funktionen $f(y)$ und $g(x)$ der anderen Koordinatenrichtung auf. Die beiden Funktionen sind durch die

Verträglichkeitsbedingung (3.52) miteinander verknüpft. Mit der gewählten Spannungsfunktion (4.6) entsteht daraus die Beziehung

$$\frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = 0 \quad (4.10)$$

(4.10) ist nur erfüllt, wenn die Funktionen $f(y)$ und $g(x)$ oder deren Ableitung konstant sind. Einsetzen der kinematischen Randbedingungen $u_x(l_x/2, y) = 0$, $u_y(0, y) = 0$ und $u_y(l_x, y) = 0$ bringt $f(y) = g(x) = 0$, womit der Verschiebungszustand der Scheibe bestimmt ist; in Bild 4.1(e) ist dieser für den Fall $l_y/l_x = 0.5$ überhöht dargestellt. Die Verschiebung $u_y(l_x/2, l_y)$ beträgt 1.3 mm. Im Vergleich dazu ergibt sich die Mittendurchbiegung des in Bild 4.1(b) dargestellten einfachen Balkens zu 0.8 mm. Die Differenz ist auf die Berücksichtigung der Schubverformungen bei der Betrachtung der Wandscheibe zurückzuführen.

Biege- und Schubverformungen

Das Verhältnis zwischen den Biege- und Schubverformungen soll am Beispiel eines stabförmigen Trägers mit rechteckigem Querschnitt (Bild 4.2(a)) weiter diskutiert werden. Dabei sollen die Verschiebungen in Feldmitte eines einfachen Balkens sowie am freien Ende eines Kragarms für verteilte Belastungen resp. Einzelkräfte bestimmt werden. Das Werkstoffverhalten wird wiederum als linear elastisch vorausgesetzt. Das Verhältnis u_V/u_M der Schub- resp. Biegever-schiebung beträgt demnach

$$\frac{u_V}{u_M} = \alpha \cdot (1 + \nu) \cdot \left(\frac{l_y}{l_x} \right)^2 \quad (4.11)$$

mit $\alpha = 3.2$ für den Kragarm unter verteilter Belastung, $\alpha = 2.4$ für den Kragarm sowie den einfachen Balken unter der Einzellast und $\alpha = 1.92$ für den einfachen Balken unter verteilter Belastung. Das Verhältnis u_V/u_M ist abhängig von der Querdehnungszahl ν und im Wesentlichen durch die Schlankheit l_x/l_y gegeben. Bild 4.2(b) zeigt das Verhältnis u_V/u_M für schlanke Träger mit $l_y/l_x < 1/8$, wonach die Schubverformungen weniger als 5% der Biegeverformungen betragen. Für gedrungene Träger mit $l_y = l_x$ (Bild 4.2(c)) können die Schubverformungen näherungsweise das Dreifache der Biegeverformungen betragen. Dabei ist festzuhalten, dass die Verschiebungen derartiger Tragsysteme üblicherweise sehr klein sind. Für $l_y/l_x > 1.0$ bleiben die Verschiebungen annähernd konstant, weil, wie im vorigen Kapitel festgestellt, Teile der Wandscheibe annähernd spannungsfrei bleiben.

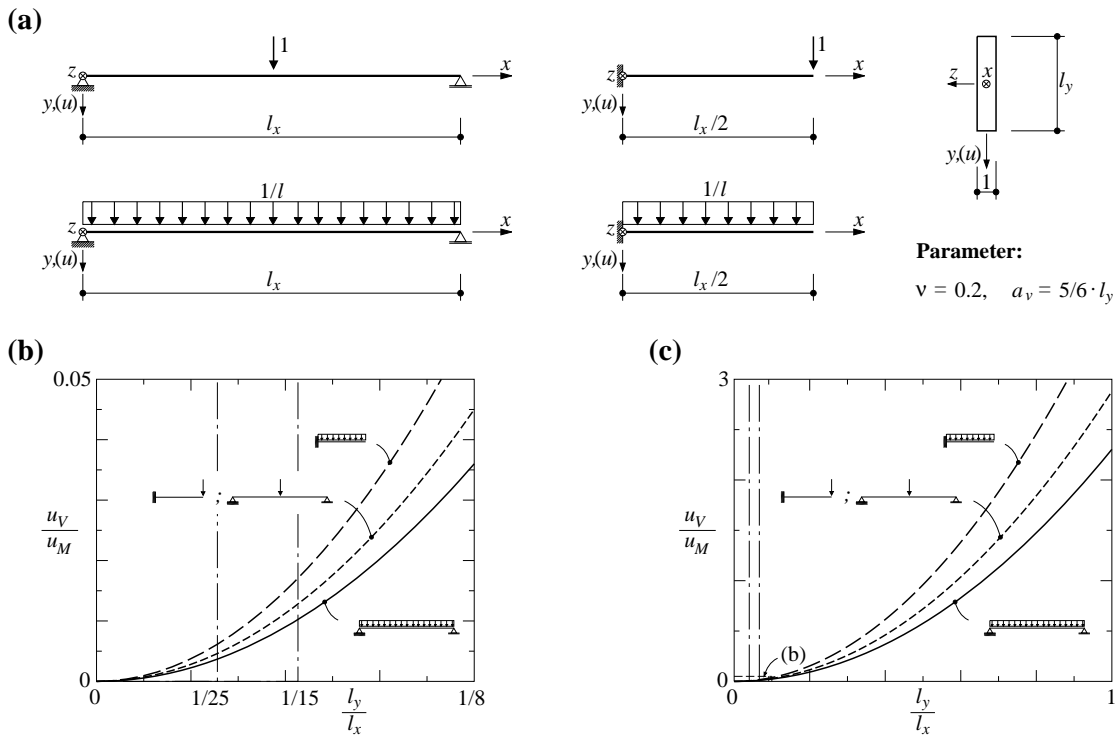


Bild 4.2 Verhältnisse der Schub- und Biegeverschiebungen: (a) Statische Systeme mit Belastungen und Querschnitt; (b), (c) Verhältnisse der Schub- und Biegeverschiebungen bei $x = l_x/2$.

In der Stahlbetonbauweise kommt es bereits bei geringen Beanspruchungen zur Rissbildung, was die Steifigkeiten (Elastizitätsmodul und Schubmodul) der Scheibe unterschiedlich stark vermindert. Auf diese Effekte wird in den letzten Abschnitten dieses Kapitels eingegangen.

Für eine sinusförmige Belastung mit Berücksichtigung des ersten Glieds der FOURIERreihe ($n = 1$ in (4.5)) diskutierte Blaauwendraad (2010) das in Bild 4.1 dargestellte Beispiel der Wandscheibe, ohne jedoch die analytischen Abhängigkeiten aufzuzeigen. Dischinger (1932) behandelte die Halbscheibe sowie den unendlich langen, wandartigen Träger und übertrug die daraus gewonnen Erkenntnisse in die Bemessung von wandartigen Stahlbetonträgern [Dischinger (1933)]. Eine Zusammenstellung verschiedener scheibenförmiger Tragkonstruktionen, basierend auf elastischem Werkstoffverhalten, ist in Girkmann (1978) zu finden.

Folgerungen für die Bemessung von Wandscheiben

Die für die Bemessung wandartiger Stahlbetonträger wichtigen Folgerungen lassen sich wie folgt zusammenfassen.

Die Spannungsverteilung in einer Wandscheibe ist bis zu einem Verhältnis von $l_y/l_x = 1$ (quadratische, einfach gelagerte Wandscheibe) annähernd linear. Damit einhergehend kann der Hebelarm der inneren Kräfte auf Grundlage der Hypothese von BERNOULLI und NAVIER bestimmt werden.

Für $l_y/l_x > 1,0$ sind Teile der Wandscheibe annähernd spannungsfrei, und der Hebelarm der inneren Kräfte entspricht der quadratischen, einfach gelagerten Wandscheibe. Basiert die Bemessung einer derartigen Wandscheibe auf der Grundlage des unteren, statischen Grenzwertsatzes der Traglastverfahren (Kapitel 3.2.2), beispielsweise unter Verwendung eines Fachwerkmodells, so ist dessen Hebelarm auf l_x zu begrenzen. Im Falle von lokalen Krafteinleitungen in

Scheiben oder Verankerungen von Spanngliedern sind derartige Fachwerkmodelle in Abstimmung mit einer vorgängig ermittelten, elastischen Lösung zu generieren.

Der Anteil der Schubverformungen für gedrungene Wandscheiben ist zu berücksichtigen.

4.1.3 Stringer-Tafelmodell, Geschichtlicher Abriss

Bereits Wagner (1929) erkannte, gestützt auf experimentelle Beobachtungen, die Tragwirkung ebener Blechwandträger in Stahl, deren dünne Stege ausbeulen und beschrieb diesen Zustand, bei dem sich im Steg sogenannte Falten ausbilden, rechnerisch mit dem Zugdiagonalenfeld. Für die Berandung des Stegs benutzte Wagner den Begriff „Holme“. Seine Abhandlung beinhaltet zudem die Grundlage für das in Kapitel 4.6.2 beschriebene Druckfeldmodell zur Beschreibung des Tragverhaltens von Stahlbeton-Scheibenelementen.

Ebner & Köller (1938) gelang die analytische Beschreibung des Kraftverlaufs in längs- und querversteiften Scheiben; derartige Blechkonstruktionen wurden insbesondere im Flugzeugbau eingesetzt. Grundlage der Idealisierung bildet die spezifische Zuordnung der Kräfte an die einzelnen Bauteile. Die Holme, Gurte oder Stringer übernehmen lediglich Kräfte (Druck oder Zug) entlang ihrer Längsachse; die Schubkräfte werden den Feldern oder Tafeln zugeordnet, die durch die Stringer eingefasst sind.

Umfassend beschrieb Argyris (1954) den Spannungs- und Verzerrungszustand eines ebenen Biegeträgers mit Stringern und Tafeln. Die Abhandlung von Argyris bildete zudem die Grundlage der heute weit verbreiteten Finite-Element-Methode, die anfänglich insbesondere bei der Dimensionierung von Flugzeugen angewendet wurde. Das Verhalten von Flugzeugflügeln und Rümpfen konnte damit rechnergestützt für verschiedene Beanspruchungssituationen simuliert werden. Insbesondere im konstruktiven Leichtbau (Flugzeugbau) sind Schubfeldträger, wie das Stringer-Tafelmodell auch genannt wird, eine häufig verwendete Idealisierung. Es ermöglicht die vereinfachte Auslegung resp. Dimensionierung dünnwandiger Strukturen [Kuhn (1956), Bruhn (1973)].

Erstmals in die Massivbauweise umgesetzt wurde die Stringer-Tafelmodellvorstellung durch Nielsen (1971) und darauf aufbauend durch Kaern (1979) zur Bemessung von Wandscheiben mit Öffnungen. Mit der Modellvorstellung eines von Stringern eingefassten schubfesten Scheibenelements entwickelten Jagd et al. (1994) ein Finites-Element (HOTCH-POTCH Element) zur Analyse von Stahlbetonstrukturen. Hoogenboom (1998) benutzte in seiner Abhandlung die diskreten Elemente, namentlich Stringer und Panel (Tafel), zur rechnergestützten, nichtlinearen Beschreibung des Tragverhaltens von Wandscheiben in Stahlbeton; siehe auch Blaauwendraad & Hoogenboom (1996) und Blaauwendraad (2010).

An der ETH in Zürich wird am Institut für Baustatik und Konstruktion seit 1960 systematisch die Plastizitätstheorie in der Massivbauweise angewendet [Marti et al. (1999)]. Beispielsweise wird die Traglast ebener Stahlbetonstrukturen mit der Anwendung des unteren (statischen) Grenzwertsatzes der Traglastverfahren durch diskontinuierliche Spannungsfelder und resultierende Fachwerkmodelle resp. mit der Anwendung des oberen (kinematischen) Grenzwertsatzes durch kinematische Diskontinuitäten eingegrenzt und in Ausnahmefällen exakt bestimmt. Darüber hinaus steht das Erfassen des Verformungsvermögens von Stahlbetonstrukturen im Vordergrund. Die Verwendung von Stringern zur Erfassung des Tragverhaltens von Stahlbetonträgern unter Biege- und Torsionsbeanspruchung wurde experimentell wie auch theoretisch durch Lampert & Thürlimann (1971) aufgezeigt, [Marti (1991)]. In Marti (2012) sind die Grundlagen des Stringer-Tafelmodells anhand eines Beispiels dargestellt. Seelhofer (2009) erwähnt die Modellvorstellung im Ausblick. Betreut durch den Autor der vorliegenden Abhandlung und unter der Leitung von Prof. Dr. Peter Marti wandte Blank (2010) im Rahmen einer

Semesterarbeit die Stringer-Tafelmodellvorstellung zur Abtragung von Erdbebeneinwirkungen in den Baugrund bei Stahlbetonhochbauten an.

4.2 Tafelformen

Tafeln übertragen in ihrer Ebene angreifende Schubeinwirkungen und sind durch gedrungene Bauteile eingefasst; diese werden als Stringer bezeichnet und sollen im Falle von ebenen Stringer-Tafelmodellen ausschliesslich Kräfte (Normalkräfte) in ihrer Längsrichtung übernehmen. Werden mehrere schubfeste Tafeln miteinander verbunden, spricht man auch von Schubwänden. In der Folge werden in der Baupraxis häufig vorkommende ebene Tafelformen am Beispiel eines Kragarms aufgezeigt.

4.2.1 Rechtecktafel

Am Beispiel des Kragarms in Bild 4.3(a) soll das Stringer-Tafelmodell diskutiert werden. Der Kragarm erfährt bei $x = l_x$ eine Einzelkraft P_y . Das Stringer-Tafelmodell beinhaltet eine ebene, rechteckförmige Tafel sowie entlang deren Ränder je zwei parallele Stringer. Bild 4.3(b) zeigt das Schnittkörperdiagramm des Stringer-Tafelmodells mit den Auflagerreaktionen in den Punkten A und B und der im Punkt C angreifenden Einzelkraft P_y .

Gleichgewicht

Aus den Kräftegleichgewichtsbedingungen in den Koordinatenrichtungen x und y sowie der Momentenbedingung um einen der Eckpunkte am Schnittkörperdiagramm der Rechtecktafel in Bild 4.3(c) resultiert

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q \quad (4.12)$$

Der Schubfluss q entlang der Ränder der Rechtecktafel ist demnach konstant, was zu einer konstanten Schubspannung τ_{xy} im inneren der Rechtecktafel, bezogen auf das gewählte Koordinatensystem, führt. Bild 4.3(g) illustriert den Spannungszustand mit

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{q}{h} = \frac{P_y}{hl_y} \quad (4.13)$$

wobei h die Scheibendicke der Tafel bezeichnet.

Das Kräftegleichgewicht am differentiellen Stringerelement in Bild 4.3(d) liefert

$$\begin{aligned} -N + qdx + N + dN &= 0 \\ \frac{dN}{dx} &= q \\ N(x) &= qx + N_0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Der Verlauf der Normalkraft in den angrenzenden Stringern der Rechtecktafel ist demnach linear. Die Integrationskonstante resp. Randbedingung N_0 lässt sich aus den Schnittkörperdiagrammen der Stringer (Bild 4.3(e) und (f)) einfach ablesen.

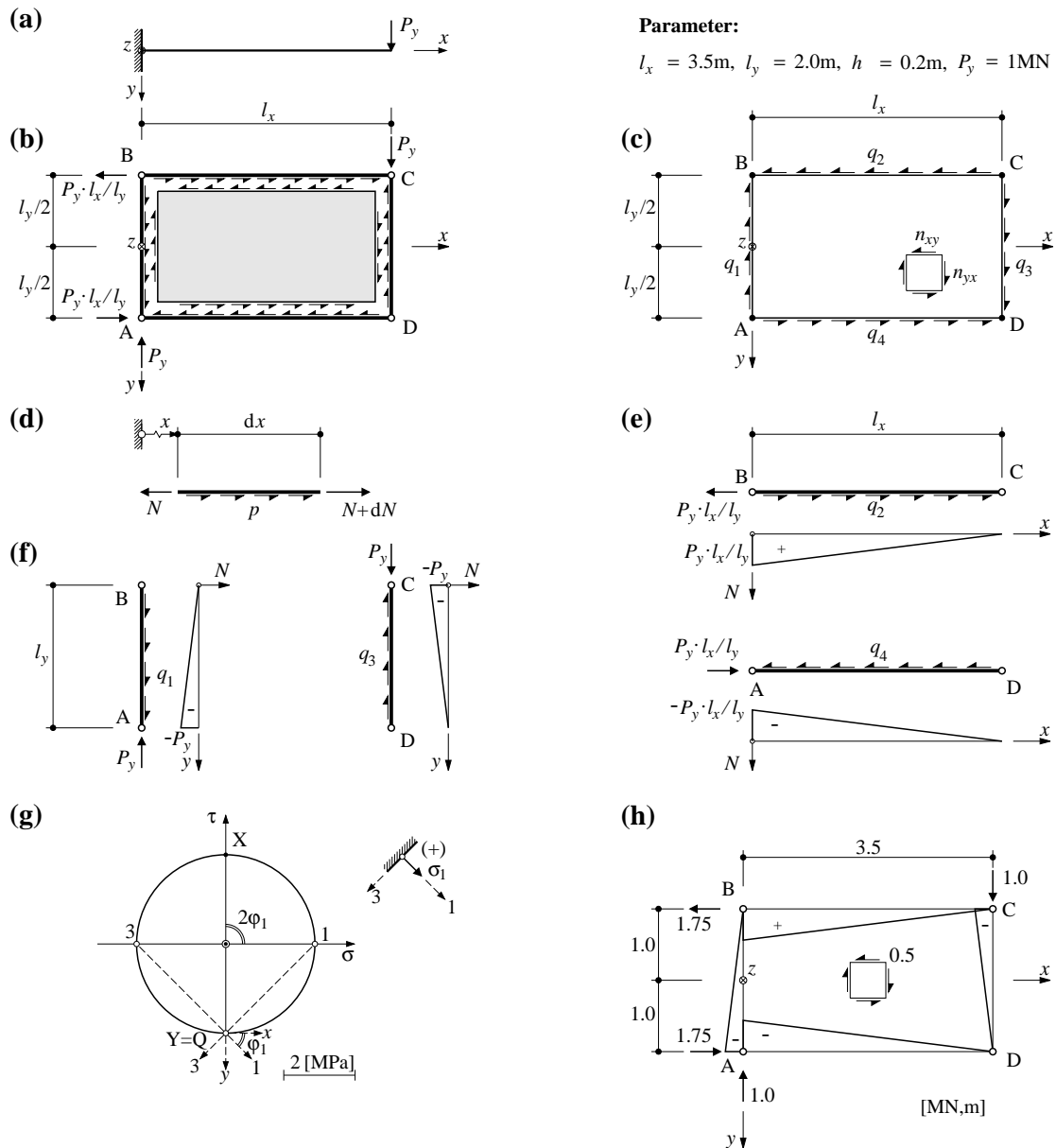


Bild 4.3 Kragarm als Stringer-Tafelmodell mit Rechtecktafel: (a) Statisches System; (b) Schnittkörperdiagramm Stringer-Tafelmodell; (c) Rechtecktafel; (d) Differentielles Stringerelement; (e), (f) Schnittkörperdiagramme der Stringer; (g) MOHRscher Spannungskreis; (h) Schubfluss und Stringernormalkraftverläufe.

Bild 4.3(h) zeigt für die gewählten Parameter den Schubfluss sowie die Verläufe der Stringernormalkräfte.

4.2.2 Parallelogrammtafel

Als statisches System soll wiederum der Kragarm in Bild 4.4(a) betrachtet werden, welcher mit einer Einzelkraft P_y am Kragarmende ($x = l_x$) belastet ist. Der Kragarm soll als Stringer-Tafelmodell mit einer ebenen, um den Winkel γ geneigten Parallelogrammtafel sowie einer ebenen Dreiecktafel und jeweils mit Stringern entlang deren Ränder modelliert werden. Bild 4.4(b) zeigt das Schnittkörperdiagramm des Stringer-Tafelmodells mit den Auflagerreaktionen in den Punkten A und B und der im Punkt D angreifenden Einzelkraft P_y .

Gleichgewicht

Die Kräftegleichgewichtsbedingungen bezüglich den Koordinatenrichtungen x und y sowie die Momentenbedingung im Punkt E am Schnittkörperdiagramm der Parallelogrammtafel in Bild 4.4(c) ergeben

$$\begin{aligned}
 &+q_1 \frac{l_y}{\sin \gamma} \cos \gamma - q_2 l_x - q_3 \frac{l_y}{\sin \gamma} \cos \gamma + q_4 l_x = 0 \\
 &-q_1 \frac{l_y}{\sin \gamma} \sin \gamma + q_3 \frac{l_y}{\sin \gamma} \sin \gamma = 0 \\
 &-q_1 \frac{l_y}{\sin \gamma} l_x \sin \gamma + q_2 l_x l_y = 0
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

woraus ein konstanter Schubfluss q an den Rändern der Parallelogrammtafel entsteht.

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q = \frac{P_y}{l_y} \tag{4.16}$$

Dementsprechend verlaufen die Normalkräfte in den Stringern, analog der Rechtecktafel (4.14), linear und die Integrationskonstante resp. Randbedingung N_0 lässt sich aus Schnittkörperdiagrammen der Stringer bestimmen. Der konstante Schubfluss q an den Rändern der Parallelogrammtafel führt auf eine konstante Schubspannungsverteilung im Inneren der Tafel mit

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{q}{h} = \frac{P_y}{hl_y}, \quad n_{xy} = n_{yx} = q = \frac{P_y}{l_y} \tag{4.17}$$

Zur Erfüllung der Gleichgewichtsbeziehung (3.47) unter Beachtung von (4.17) sind konstante Normalspannungsverteilungen σ_{xx} und σ_{yy} nötig, die mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt werden können. An den in x -Richtung verlaufenden Rändern A-E und C-D ist σ_{yy} identisch gleich null und somit verschwindet die Normalspannung σ_{yy} im Inneren der Parallelogrammtafel. Die Normalspannung σ_{xx} an den um den Winkel γ zur x -Achse geneigten Rändern A-C und D-E kann mit Hilfe der Spannungstransformation (3.48) oder mit Hilfe der Gleichgewichtsbeziehungen am Schnittkörperdiagramm ACF in Bild 4.4(e) ermittelt werden, woraus ein konstanter Druckspannungszustand σ_{xx} resultiert

$$\begin{aligned}
 n_{xx} &= -2q \cot \gamma, & \sigma_{xx} &= -\frac{2q \cot \gamma}{h} \\
 n_{yy} &= 0, & \sigma_{yy} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Der Spannungszustand im Inneren der Parallelogrammtafel ist in Bild 4.4(f) dargestellt.

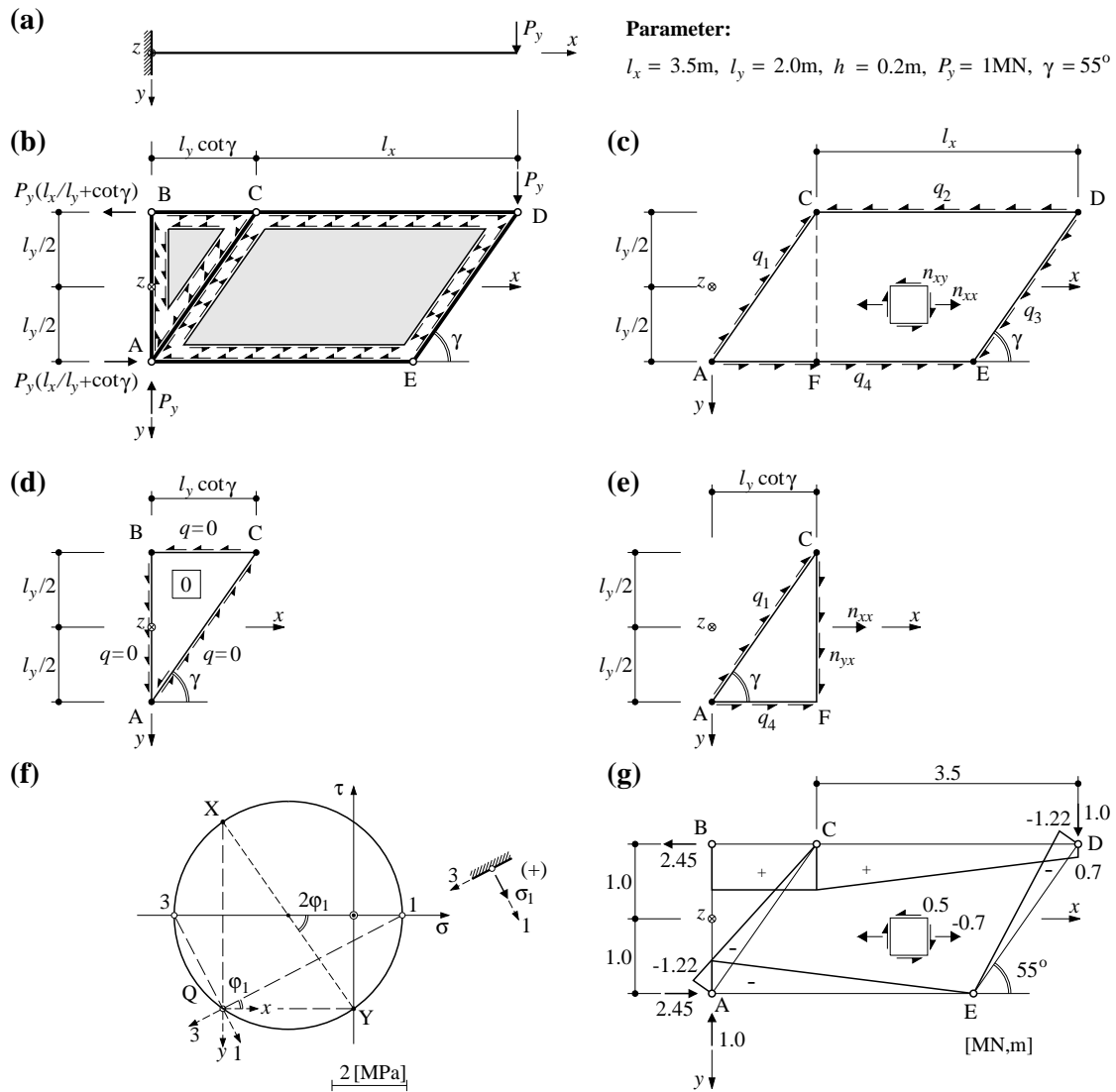


Bild 4.4 Kragarm als Stringer-Tafelmodell mit Dreiecks- und Parallelogrammtafel: (a) Statisches System; (b) Schnittkörperdiagramm Stringer-Tafelmodell; (c) Parallelogrammtafel; (d) Dreieckstafel; (e) Schnittkörperdiagramm Parallelogrammtafel; (f) MOHRscher Spannungskreis; (g) Schubfluss und Stringernormalkraftverläufe.

Bild 4.4(h) zeigt für die gewählten Parameter die Verläufe der Schubflüsse entlang der Ränder der Parallelogrammtafel sowie der Stringernormalkräfte.

4.2.3 Dreieckstafel

Die dreieckförmige Tafel in Bild 4.4(d) ist spannungsfrei. Der Schubfluss entlang der Ränder verschwindet, die Kräfte werden entlang der Stringer A-B, B-C und C-A wie bei einem Fachwerk in die Auflager A und B eingeleitet.

4.2.4 Trapeztafel

Als statisches System dient erneut der Kragarm in Bild 4.5(a), welcher mit einer Einzelkraft P_y am Kragarmende ($x = l_x$) belastet ist. Der Kragarm soll als Stringer-Tafelmodell mit einer ebe-

nen Trapeztafel und jeweils mit Stringern entlang deren Ränder modelliert werden. Die Stringer A-D resp. B-C in Bild 4.5(b) sind um den Winkel γ_4 resp. γ_2 gegenüber der x-Achse geneigt. Ihr Schnittpunkt führt zum Punkt S mit den Koordinaten $(l_{xS}; -l_{xS} \tan(\gamma_2) - l_{y1}/2)$ resp. $(l_{xS}; -l_{xS} \tan(\gamma_4) + l_{y1}/2)$. Bild 4.5(b) zeigt das Schnittkörperdiagramm des Stringer-Tafelmodells mit den Auflagerreaktionen in den Punkten A und B und der im Punkt C angreifenden Einzelkraft P_y .

Gleichgewicht

Entlang des Stringers C-D soll die Einzellast P_y gleichmässig auf die Trapeztafel übertragen werden. Dies führt auf einen konstanten Schubfluss in Bild 4.5(c) von

$$q_3 = \frac{P_y}{l_{y3}} \quad (4.19)$$

Die Momentenbedingung um den Punkt S unter Berücksichtigung des Strahlensatzes mit $(1 - l_x/l_{xS} = l_{y3}/l_{y1})$ liefert den ebenfalls konstanten Schubfluss q_1 entlang des Randes A-B der Tafel.

$$q_1 = q_3 \left(\frac{l_{y3}}{l_{y1}} \right)^2 \quad (4.20)$$

Entlang der Ränder A-D und B-C ist der Schubfluss nicht konstant. Durch Einführung eines mittleren, konstanten Schubflusses

$$q_{mi} = \frac{1}{l_i} \cdot \int q_i(s) \cdot ds \quad (4.21)$$

können Beziehungen zwischen den Schubflüssen an den Rändern der Trapeztafel durch Formulierung des Gleichgewichts am Schnittkörperdiagramm (Bild 4.5(c)) hergeleitet werden.

$$q_{m2} = q_{m4} = q_1 \frac{l_{y1}}{l_{y3}} = q_3 \frac{l_{y3}}{l_{y1}} = \sqrt{q_1 q_3} \quad (4.22)$$

Der Schubspannungszustand im Inneren der Trapeztafel mit der Abmessung $l_y(x) = l_{y1} + x(\tan\gamma_2 - \tan\gamma_4)$ in y-Richtung lässt sich ebenfalls mit Hilfe einer Momentenbedingung um den Punkt S, angewendet auf den Schnittkörper CDEF, bestimmen.

$$n_{yx} = q_3 \left(\frac{l_{y3}}{l_y(x)} \right)^2 = q_3 \left(\frac{l_{xS} - l_x}{l_{xS} - x} \right)^2 \quad (4.23)$$

n_{yx} ist unabhängig von y sowie umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes x und entspricht den Schubflüssen q_2 resp. q_4 entlang der Ränder A-D resp. C-D. Der Normalspannungszustand n_{yy} kann durch Erfüllung der Gleichgewichtsbeziehung (3.45)₂ unter Berücksichtigung der von y unabhängigen Schubspannung (4.23) bestimmt werden. Demnach muss $n_{yy,y}$ konstant sein resp. n_{yy} linear von y abhängen. Mit Hilfe der Randbedingungen entlang der Ränder A-D resp. C-D entsteht die Normalspannung

$$n_{yy} = -2q_3 \frac{(l_{xS} - l_x)^2}{(l_{xS} - x)^3} \cdot \left(y + l_{xS} \tan(\gamma_4) - \frac{l_{y1}}{2} \right) \quad (4.24)$$

mit $\sigma_{yy} = n_{yy}/h$. Der letzte Klammerausdruck in (4.24) steht für den Abstand in y-Richtung ausgehend vom Punkt S und kann durch den Ausdruck $(y + l_{xS} \tan(\gamma_2) + l_{y1}/2)$ ersetzt werden. Analog resultiert aus der Gleichgewichtsbeziehung (3.45)₁ mit (4.23) unter Berücksichtigung der

Randbedingungen entlang der Ränder A-B und C-D, dass n_{xx} resp. σ_{xx} identisch gleich null sein muss. Der Spannungszustand im Inneren der Trapeztafel ist in Bild 4.5(d) resp. (g) und (h) für die Punkte A bis D dargestellt.

Der Verlauf der Normalkräfte in den an die Trapeztafel angrenzenden Stringern ist gemäss (4.14) linear für die konstanten Schubflüsse an den Rändern A-B resp. C-D. Für den nicht konstanten Schubfluss q_2 entlang des Randes B-C führt die aufgrund von (4.14)₂ erforderliche Integration von (4.23) auf folgenden Ausdruck

$$N_2 = q_3 \frac{(l_x - x)(l_{xS} - l_x)}{(l_{xS} - x) \cos \gamma_2} = P_y \frac{l_x - x}{l_y(x) \cos \gamma_2} = \frac{M(x)}{l_y(x) \cos \gamma_2} \quad (4.25)$$

Zur Bestimmung von $-N_4$ ist in (4.25) γ_2 durch γ_4 zu ersetzen. Bild 4.5(e) zeigt die Verläufe der Schubflüsse sowie der Stringernormalkräfte.

Die Abtragung der Querkraft $V = P_y$ erfolgt zu einem Teil über die Trapeztafel V_T und zum anderen Teil über die Summe der Kraftkomponenten in y -Richtung der Stringerkräfte N_2 und N_4 , wobei sich in diesem Fall die Stringerkraft N_2 negativ auswirkt. Der Querkraftanteil der Stringerkräfte V_S lässt sich aus (4.25) multipliziert mit $\sin \gamma_2$ resp. $\sin \gamma_4$ bestimmen oder aus der Differenz zwischen der Querkraft $V = P_y$ und dem Anteil der Tafel $V_T = P_y \cdot (l_{y3}/l_y(x))$

$$V_S = -N_2 \sin \gamma_2 + N_4 \sin \gamma_4 = P_y \left(1 - \frac{l_{y3}}{l_y(x)} \right) \quad (4.26)$$

Bild 4.5(f) zeigt die Anteile der Trapeztafel sowie der beiden geneigten Stringer an der Querkraftabtragung.

Bei der Bemessung von Flugzeugstrukturen wird üblicherweise von einem konstanten Schubfluss (4.21) innerhalb der Trapeztafel ausgegangen [Kuhn (1956) und Bruhn (1973)]. Die für das Gleichgewicht im Inneren der Trapeztafel notwendige Normalspannung (4.24) wird dabei vernachlässigt.

4.2.5 Allgemeine Vierecktafel

In der Literatur, insbesondere zum Leichtbau für Tragstrukturen von Flugzeugflügeln [Garvey (1951)], werden ausser den vorgängig besprochenen Tafelformen auch allgemeine, konvexe Vierecke diskutiert. Innerhalb der Vierecktafel wird wiederum ein konstanter, die Gleichgewichtsbedingungen nicht korrekt erfüllender, Schubfluss vorausgesetzt. Neben dem allgemeinen Viereck beschrieb Garvey (1951) auch das Tragverhalten der in den vorigen Kapiteln beschriebenen Parallelogramm- und Trapeztafel. Ein zusammenfassender Vergleich verschiedener Modellvorstellungen, inklusive einer Finite-Element-Berechnung zur Bestimmung der Steifigkeit von allgemeinen Vierecktafeln, ist in Hoogenboom & Blaauwendraad (2000) zu finden. Der baupraktische Nutzen allgemeiner Vierecke als Tafelformen ist beschränkt und wird deshalb im Rahmen dieser Abhandlung nicht weiter behandelt.

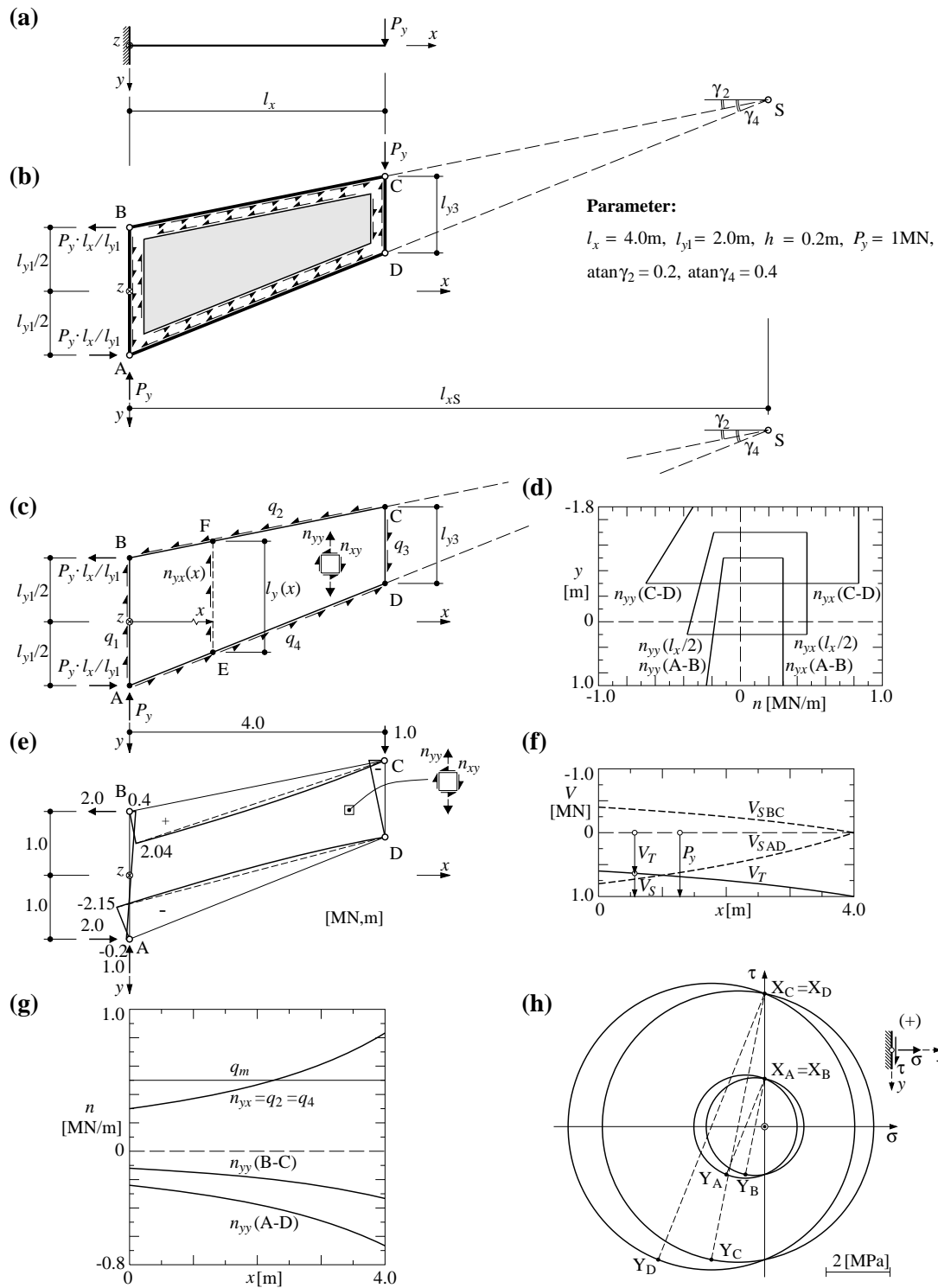


Bild 4.5 Kragarm als Stringer-Tafelmodell mit Trapeztafel: (a) Statisches System; (b) Schnittkörperdiagramm Stringer-Tafelmodell; (c) Trapeztafel; (d) Spannungen innerhalb der Trapeztafel; (e) Schubfluss und Stringernormalkraftverläufe; (f) Querkraftabtragung; (g) Spannungen innerhalb der Trapeztafel; (h) MOHRscher Spannungskreis der Punkte A bis D.

4.3 Bemessung von Biegeträgern

4.3.1 Spannungsfeld, Fachwerkmodell

Die in Kapitel 4.2 aufgezeigten Tafelformen sollen nachfolgend für die Bemessung eines Stahlbetonbiegeträgers verwendet werden. Der Stahlbetonbiegeträger beruht auf einem Beispiel von Marti (1985). Der in Bild 4.6(a) dargestellte Träger ist als einfacher Balken mit rechtsseitigem Kragarm gelagert und erfährt eine gleichmässig verteilte Streckenlast p von 180 kN/m im Feldbereich und eine Einzellast von 750 kN am Kragarmende. Der Träger wird als gewichtslos betrachtet, und die Kräfte sollen am oberen Stringer angreifen. In Bild 4.6(b) ist der linear veränderliche resp. konstante Querkraftverlauf sowie die parabolisch resp. linear veränderliche Biegemomentenverteilung dargestellt. Das in Bild 4.6(c) dargestellte Spannungsfeld beinhaltet neben dem oberen und unteren Stringer im Feldbereich vier um $\tan\theta_1 = 3/5$ geneigte, parallele Druckfelder, deren Richtung sich im Querkraftnullpunkt ändert. Im Bereich des Kragarms sind zwei parallele Druckfelder mit einer Neigung von $\tan\theta_2 = 1$ angeordnet. Jeweils bei den Einzellasten sind dreieckförmige, zentrierte Fächer mit jeweils identischer Fächerbreite platziert. Das dreieckförmige Spannungsfeld im Bereich des Querkraftnullpunkts ist mit den obigen Voraussetzungen spannungsfrei. Die Resultierenden des Spannungsfelds bilden das Fachwerkmodell in Bild 4.6(d). Aus den Stabkräften des Fachwerkmodells ergeben sich im Allgemeinen polygonal verlaufende Stringerkräfte (Bild 4.6(e) und (f)). Für die Bemessung der Bewehrung wird eine Fließspannung f_{sy} von 400 MPa vorausgesetzt. Die Verankerungslängen sollen das 50-fache des Stabdurchmessers betragen. Den Stringerkräften in Bild 4.6(e) resp. (f) sind die Widerstände (gestrichelte Linien) der gewählten Bewehrungen gegenübergestellt. Die maximale, einachsige Betondruckspannung ergibt sich im parallelen Druckfeld linksseitig des rechten Auflagers zu 13.6 MPa. Einsetzen in die Beziehung (3.81) erfordert eine Betondruckfestigkeit von 24.8 MPa. In Bild 4.6(g) sind die erforderlichen Kräfte der Querkraftbewehrung (Bügel) dargestellt. Im Falle geschlossener Bügel ist aufgrund der Abbiegeradien ein maximaler Durchmesser von 10 mm möglich, woraus eine Bewehrungsüberdeckung von 25 mm im Trägersteg mit der Breite von 150 mm resultiert. Die Abstufung der Widerstände erfolgt über die Variation der Stababstände der Bügel (gestrichelte Linien).

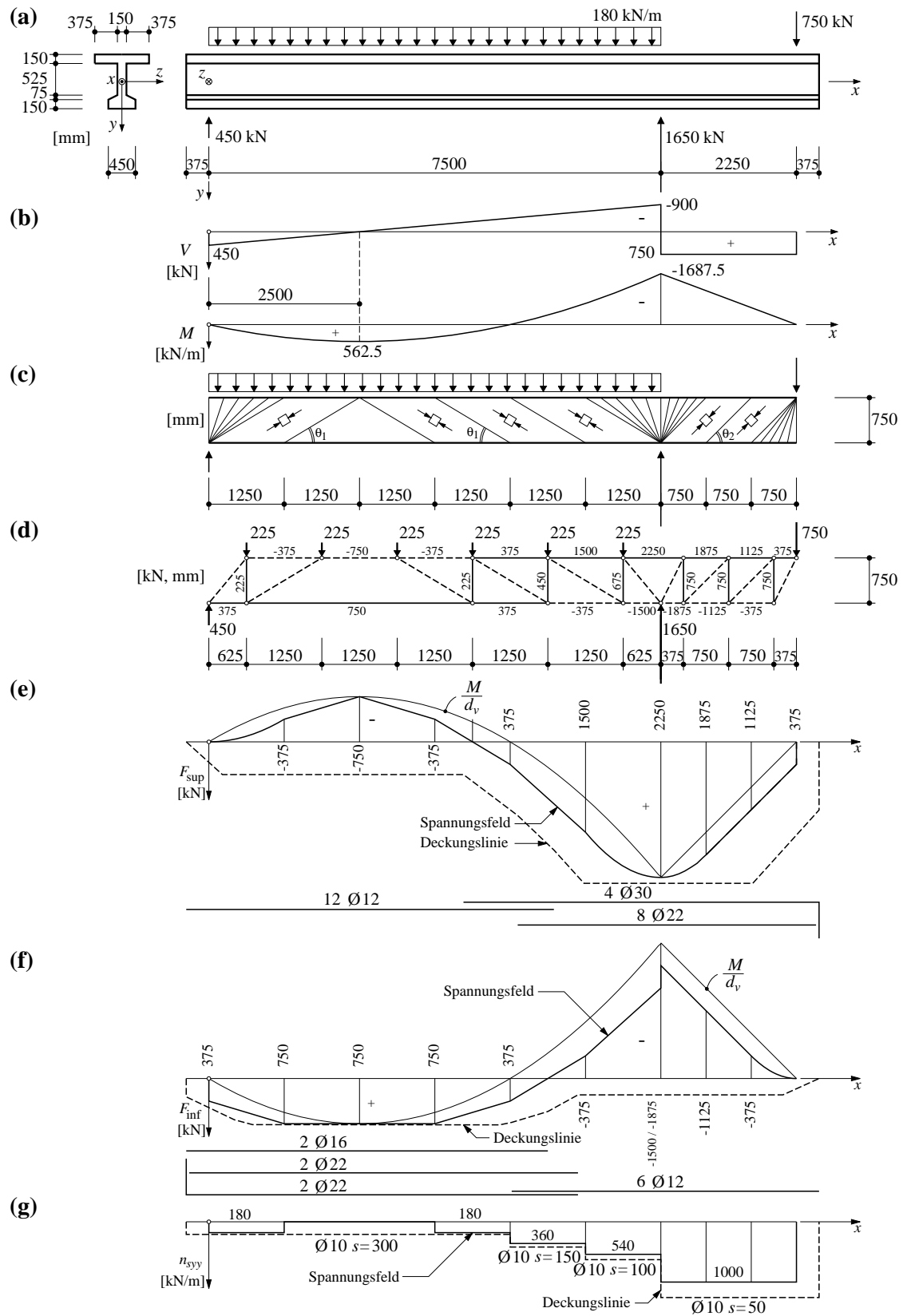


Bild 4.6 Stahlbetonbiegeträger (Marti 1985): (a) Querschnitt und statisches System mit Einwirkungen; (b) Schnittkraftverläufe; (c) Spannungsfeld; (d) Fachwerkmodell; (e) oberer Stringer mit zugehöriger Bewehrung; (f) unterer Stringer mit zugehöriger Bewehrung; (g) Querkraftbewehrung.

4.3.2 Biegeträger mit Parallelogrammtafeln

Bild 4.7(a) zeigt die Idealisierung des Biegeträgers mit Parallelogrammtafeln, die durch Stringer eingefasst sind. Deren Berechnungsgrundlagen wurden in Kapitel 4.2.2 aufgezeigt. Die Neigung γ der Parallelogramme resultiert aus der Voraussetzung, dass die äquivalenten Einzelkräfte dem im vorangegangenen Abschnitt diskutierten Fachwerkmodell entsprechen ($\tan\gamma_1 = 2 \cdot \tan\theta_1 = 6/5$, $\tan\gamma_2 = 2 \cdot \tan\theta_2 = 2$). In Bild 4.7(a) sind die aus den Gleichgewichtsbeziehungen (4.15) resultierenden, konstanten Schubflüsse der einzelnen Parallelogrammtafeln angegeben. Weiter führen Gleichgewichtsbeziehungen an Schnittkörpern der Stringer auf deren Normalkraftverläufe, welche für den oberen resp. unteren Stringer in Bild 4.7(b) resp. (c) dargestellt sind; sie entsprechen mehrheitlich den mit den Spannungsfeldern ermittelten Verläufen. Unterschiede sind in den parabolischen Verläufen bei den beiden Auflagern, herrührend aus dem Spannungsfeld, auszumachen. Exemplarisch sind die Stringerkräfte für die in Bild 4.7(e) dargestellte Parallelogrammtafel beim linken Auflager in Bild 4.7(g) dargestellt; die konstanten Schubflüsse führen auf linear verteilte Normalkräfte in den Stringern. Im Inneren der Parallelogrammtafeln herrscht ein konstanter Schubspannungszustand n_{xy} , der mit (4.17) bestimmt werden kann. Zur Erfüllung des Gleichgewichts herrscht in der Tafel zudem ein konstanter Druckspannungszustand n_{xx} , der aus (4.18) resultiert. Der Spannungszustand für die Parallelogrammtafel beim linken Auflager ist in Bild 4.7(f) mit Hilfe eines MOHRschen Kreises mit den Spannungsbildpunkten X und Y illustriert. Die erforderliche Bewehrung in der Parallelogrammtafel kann durch Einsetzen von $\tau_{xy} = n_{xy}/h$ und $\sigma_{xx} = n_{xx}/h$ in die Bemessungsbeziehungen des Regimes 1 (3.61) bestimmt werden. Wird dabei vorausgesetzt, dass keine Bewehrung in Längsrichtung des Trägerstegs erforderlich sein soll ($X = X_c$ in Bild 4.7(f)), ist der MOHRsche Spannungskreis resp. der Spannungszustand im Beton der Parallelogrammtafel eindeutig bestimmt. Die Richtung θ der Hauptdruckspannung σ_{c3} ergibt sich aus

$$\tan \theta = \frac{1}{2} \cdot \tan \gamma \quad (4.27)$$

Die erforderlichen Bewehrungskräfte n_{syy} in y -Richtung der Tafeln (Bügelkräfte) sind in Bild 4.7(d) dargestellt und entsprechen den Bügelkräften des Spannungsfelds (Bild 4.6(g)). Einziger Unterschied ist deren Abstufung, die theoretisch entlang des Stringers, wie in Bild 4.7(h) für den Stringer AB dargestellt, vorgenommen werden kann. Eine solche Bewehrungsführung ist nicht praktikabel. Dennoch müsste ein derart bewehrter Stahlbetonbiegeträger ein gutes Last-Verformungsverhalten zeigen. Diesbezüglich sei auf die Versuche von Meyboom & Marti (2001) an Stahlbetonplatten mit konzentrierter Schubbewehrung verwiesen. Werden, wie in der Baupraxis üblich, Bügel mit identischen Abmessungen verwendet, muss die jeweils erforderliche Bügelbewehrung die gesamte Parallelogrammtafel beinhalten.

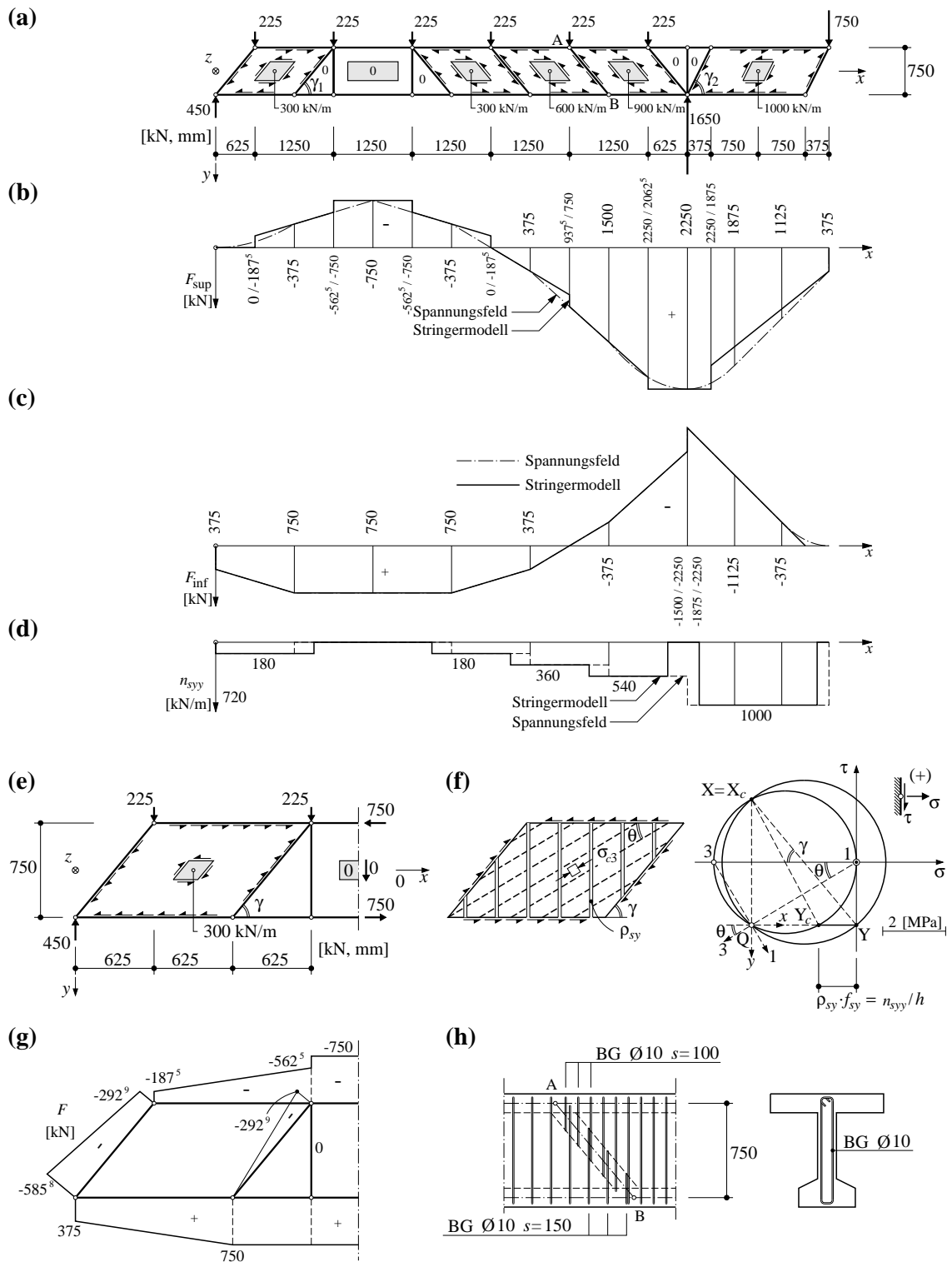


Bild 4.7 Stahlbetonbiegeträger (Marti 1985): (a) Stringer-Tafelmodell mit Parallelogrammtafeln; (b) Kraftverlauf im oberen Stringer; (c) Kraftverlauf im unteren Stringer; (d) Verlauf der Stegkräfte in y-Richtung (Bügel); (e) Stringer-Tafelmodell beim Auflager links; (f) Bemessung der Parallelogrammtafel; (g) Stringerkräfte beim Auflager links; (h) mögliche Anordnung der Bügelbewehrung.

4.3.3 Lagerung über Trapezfeld

Bild 4.8(a) zeigt ein Schnittkörperdiagramm im Bereich des linken Auflagers des Biegeträgers. Anstelle der Parallelogrammtafel soll der Träger bis zu dessen Querkraftnullpunkt x_{V0} mit einer trapezförmigen Tafel, die durch Stringer eingefasst ist, modelliert werden. Die Grundlagen für trapezförmige Tafeln wurde in Kapitel 4.2.4 aufgezeigt. In Abhängigkeit der beiden Neigungswinkel γ_1 und γ_3 , sowie des konstanten Hebelarms d_v und x_{V0} lässt sich die verteilte Streckenlast p durch die zwei statisch äquivalenten Einzellasten

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{px_{V0}}{2} \cdot \frac{x_{V0} - 2 \cdot d_v \cot \gamma_3}{x_{V0} - d_v (\cot \gamma_1 + \cot \gamma_3)} \\ F_2 &= \frac{px_{V0}}{2} \cdot \frac{x_{V0} - 2 \cdot d_v \cot \gamma_1}{x_{V0} - d_v (\cot \gamma_1 + \cot \gamma_3)} \end{aligned} \quad (4.28)$$

ausdrücken. Entlang der parallelen Stringer BC und AD resultiert der konstante Schubfluss zu

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{px_{V0}}{2 \cdot d_v} \cdot \frac{(x_{V0} - 2 \cdot d_v \cot \gamma_1)(x_{V0} - 2 \cdot d_v \cot \gamma_3)}{(x_{V0} - d_v (\cot \gamma_1 + \cot \gamma_3))^2} \\ q_4 &= \frac{px_{V0}}{2 \cdot d_v} \cdot \frac{(x_{V0} - 2 \cdot d_v \cot \gamma_1)}{(x_{V0} - 2 \cdot d_v \cot \gamma_3)} \end{aligned} \quad (4.29)$$

womit der mittlere Schubfluss (4.21) in der Trapeztafel bestimmt ist mit

$$q_{m1} = q_{m3} = \frac{px_{V0}}{2 \cdot d_v} \cdot \frac{x_{V0} - 2 \cdot d_v \cot \gamma_1}{x_{V0} - d_v (\cot \gamma_1 + \cot \gamma_3)} \quad (4.30)$$

Der Spannungszustand im inneren der Tafel lässt sich aus der Momentenbedingung um den Punkt S bestimmen; für die Schubkraft resultiert in Funktion der Koordinate y

$$n_{xy} = \frac{px_{V0}}{2 \cdot d_v} \cdot \frac{(x_{V0} - 2 \cdot d_v \cot \gamma_1)(x_{V0} - 2 \cdot d_v \cot \gamma_3)}{\left[x_{V0} - d_v (\cot \gamma_1 + \cot \gamma_3) + \left(y + \frac{d_v}{2} \right) (\cot \gamma_1 - \cot \gamma_3) \right]^2} \quad (4.31)$$

diese entspricht den Schubflüssen $q_1(y)$ resp. $q_3(y)$ entlang der Stringer AB und CD. Einsetzen von (4.31) in die Gleichgewichtsdifferentialgleichungen (3.45) mit Berücksichtigung der Randbedingungen führt auf die Normalkräfte innerhalb der Trapeztafel

$$\begin{aligned} n_{yy} &= 0 \\ n_{xx} &= -\frac{px_{V0}}{d_v} \cdot \frac{(x_{V0} - 2d_v \cot \gamma_1)(x_{V0} - 2d_v \cot \gamma_3)(x_{V0} \cot \gamma_1 - 2d_v \cot \gamma_1 \cot \gamma_3 - x(\cot \gamma_1 - \cot \gamma_3))}{\left[x_{V0} - d_v (\cot \gamma_1 + \cot \gamma_3) + \left(y + \frac{d_v}{2} \right) (\cot \gamma_1 - \cot \gamma_3) \right]^3} \end{aligned} \quad (4.32)$$

wobei n_{xx} von den Koordinaten x und y abhängig ist. Damit sind die in Bild 4.8(b) dargestellten Stringerkräfte und Spannungszustände (Bild 4.8(c)) für die gewählten Parameter bestimmt. Für die Bemessung der orthogonalen Bewehrung innerhalb der Trapeztafel stehen die Beziehungen (3.61) des Regimes 1 zur Verfügung mit $\tau_{xy} = n_{xy}/h$ und $\sigma_{xx} = n_{xx}/h$, wobei $h = 150$ mm (Stegbreite).

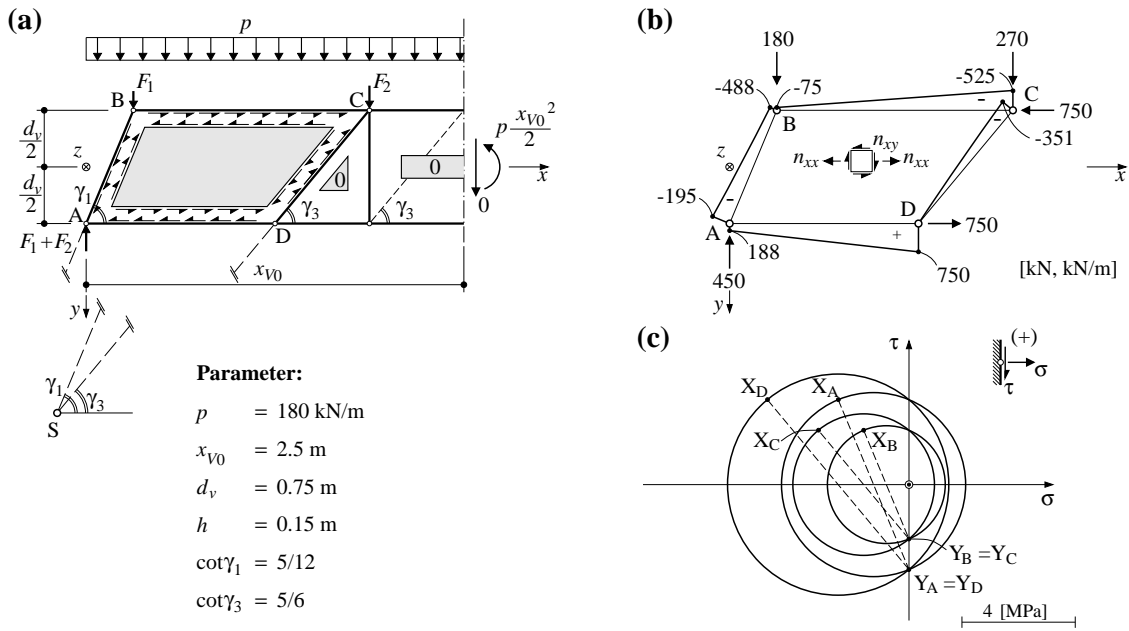


Bild 4.8 Stahlbetonbiegeträger (Marti 1985): (a) Linkes Auflager bis Querkraftnullpunkt mit Stringer-Tafelmodell mit Trapeztafel; (b) Kraftverlauf in den Stringern; (c) Spannungszustand in der Trapeztafel.

Die Zugkraft beim Auflager A ist in Funktion des Winkels γ_1 zu verankern. Für $\gamma_1 = \gamma_3$ korrespondiert das Trapez mit dem im vorigen Abschnitt gezeigten Parallelogramm, und die Normaldruckkraft n_{xx} in der Trapeztafel entspricht der Beziehung (4.18). Fällt die Richtung des Stringers AB mit der y -Richtung ($\gamma_1 = \pi/2$) zusammen, verschwindet im Punkt A des Zugstringers AD die Zugkraft, und die Bewehrung im Zugstringer muss nicht verankert werden. Für die Normalkraft n_{xx} und die Schubkraft n_{xy} in der Trapeztafel ergeben sich folgende Beziehungen

$$\begin{aligned}
 n_{xx} &= -\frac{p x_{V0}^2}{d_v} \cdot \frac{x \cot \gamma_3 (x_{V0} - 2 \cdot d_v \cot \gamma_3)}{\left[x_{V0} - \left(\frac{3}{2} d_v + y \right) \cot \gamma_3 \right]^3} \\
 n_{xy} &= \frac{p x_{V0}^2}{2 \cdot d_v} \cdot \frac{(x_{V0} - 2 \cdot d_v \cot \gamma_3)}{\left[x_{V0} - \left(\frac{3}{2} d_v + y \right) \cot \gamma_3 \right]^2}
 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Mit den Beziehungen (4.28) bis (4.32) kann bei einer gegebenen Bewehrung mit ungenügender Verankerung des Zugstringers im Auflager A ein unterer Grenzwert der Traglast p (Kapitel 3.2.2) bestimmt werden, unter Berücksichtigung der Bewehrung im Steg in Trägerlängsrichtung und unter Vernachlässigung der Gewölbetragswirkung.

4.3.4 Biegeträger mit Rechtecktafeln

Die Idealisierung des Biegeträgers mit von Stringern eingefassten Rechtecktafeln ist in Bild 4.9(a) dargestellt. Jeweils bei den statisch äquivalenten Einzellasten, analog dem Fachwerkmodell in Bild 4.6(d), sind Stringer in y -Richtung angeordnet, welche somit die Geometrie der Rechtecktafeln definieren. Die angegebenen Schubflüsse q in den Tafeln können mit den Gleichgewichtsbeziehungen (4.13) bestimmt werden. Die konstanten Schubflüsse ergeben durch Integration (4.14) lineare Verläufe der Stringerkräfte; zusammen mit den Randbedingungen resultiert der polygonale Verlauf der Stringerkraft im oberen Stringer (Bild 4.6(b)) und im

unteren Stringer (Bild 4.6(c)). Der Spannungszustand im Inneren der Rechtecktafeln entspricht einem reinen Schubspannungszustand, der mit (4.13) bestimmt werden kann. Für den Bereich des linken Auflagers sind in Bild 4.9(f) die Stringerkräfte und in Bild 4.9(g) die Bemessung der Rechtecktafel dargestellt. Dabei wurde das Regime 1 für die Scheibenbemessung (3.62) vorausgesetzt und eine Druckfeldneigung von $\cot\theta_1 = 5/3$, analog dem Spannungsfeld in Bild 4.6(c), gewählt. Der Verlauf der Stegkraft n_s in x - resp. y -Richtung ist in Bild 4.9(d) resp. (e) dargestellt. Im Vergleich zur Bemessung mit Spannungsfeldern und Fachwerkmodellen ist die Stegkraft in y -Richtung jeweils um eine halbe Druckfeldbreite versetzt identisch; bei den Auflagern muss die gesamte Querkraft mit entsprechender Bewehrung aufgenommen werden. Bei der Berechnung mit Spannungsfeldern entsteht keine Stegkraft in Trägerlängsrichtung (Bild 4.9(e)). Der Versatz in der Querkraftabtragung über das geneigte Betondruckfeld kann durch eine Verschiebung des Verlaufs der Stringerkräfte M/d_v (Kapitel 4.3.5) berücksichtigt werden. Dieser Versatz entfällt bei der Modellierung mit Stringern und rechteckförmigen Tafeln; hingegen entstehen Stegkräfte in Trägerlängsrichtung, die durch eine entsprechende Bewehrung im Trägersteg aufgenommen werden müssen. Die Aufteilung der Stegkräfte in x - und y -Richtung ist abhängig von der Wahl der Druckfeldneigung θ , welche innerhalb der in Kapitel 3.6.3 angegebenen Grenzen über die Trägerlänge beliebig erfolgen kann. Für die ursprünglich verteilte Streckenlast in Bild 4.6(a) sind die Stegkräfte in Bild 4.9(d) resp. (e) als gestrichelte Linien dargestellt, mit der konstanten Druckfeldrichtung θ_1 im Feldbereich und θ_2 im Kragarmbereich.

Zusammenfassend führt die Bemessung eines Stahlbetonbiegeträgers mit Stringern und rechteckförmigen Tafeln zur gleichen maximalen Bewehrung in den Stringern, die jedoch affin zum Biegemomentenverlauf abgestuft werden kann und keine Verankerung im Bereich der Auflager nötig macht (Bsp. Auflager links). Hingegen ist eine Bewehrung im Trägersteg in Trägerlängsrichtung erforderlich, welche im Bereich der Auflager über die Trägerhöhe verankert sein muss. In Biegeträgern befindet sich die Neutralachse häufig innerhalb des Trägerstegs. Die Verzerrungen in Längsrichtung des Trägerstegs sind meist gering; die schlaffe Bewehrung im Trägersteg in Trägerlängsrichtung kann durch eine Vorspannung ersetzt werden.

In Kapitel 4.3.6 wird die gesamte, statisch erforderliche Bewehrungsmenge der beiden Modellvorstellungen einander gegenübergestellt. Nachfolgend werden für beide Modellvorstellungen die Unterschiede in der Querschnittsbemessung aufgezeigt.

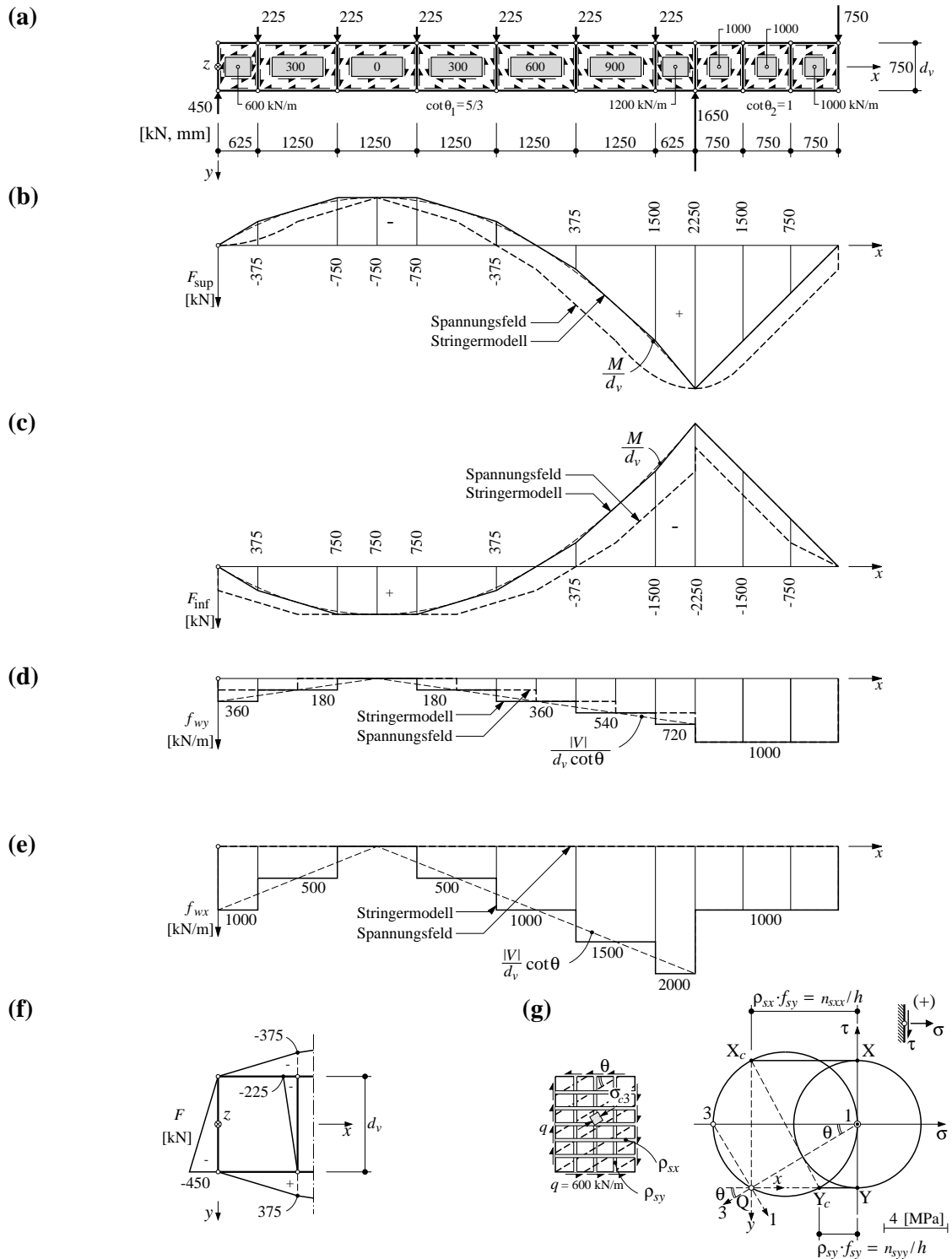


Bild 4.9 Stahlbetonbiegeträger (Marti 1985): (a) Stringer-Tafelmodell mit Rechtecktafeln; (b) Kraftverlauf im oberen Stringer; (c) Kraftverlauf im unteren Stringer; (d) Verlauf der Stegkräfte in y-Richtung (Bügel); (e) Verlauf der Stegkräfte in x-Richtung (Trägerlängsrichtung); (f) Stringerkräfte beim Auflager links; (g) Bemessung der Bewehrung in der Tafel Auflager links.

4.3.5 Querschnittsbetrachtung

Die Bemessung von Stahlbetonträgern mit Spannungsfeldern und Fachwerkmodellen zeigt den Kraftfluss auf sehr anschauliche Weise auf. Jedoch ist die Entwicklung der Spannungsfelder und Fachwerkmodelle für die einzelnen Lastfälle auch für den geübten Ingenieur relativ zeitraubend. Unter bestimmten Voraussetzungen bietet sich eine Querschnittsbetrachtung mit den in einem Schnitt resultierenden Schnittkräften an (Bild 4.10(a)). Diese rasche Bemessungsmethode für Stahlbetonträger unter kombinierter Beanspruchung von Biegemoment M , Querkraft V und Normalkraft N ist vernünftig, falls sich die geometrischen Grössen, insbesondere der Hebelarm der inneren Kräfte sowie die statischen Grössen (Schnittgrössen), nicht sprunghaft entlang der Trägerachse x verändern. Im Weiteren gilt es zu beachten, dass sich die Schnittgrössen aus einer statischen Berechnung üblicherweise auf den Schwerpunkt des Querschnitts beziehen. Diese werden in der Folge auf die Mitte der Trägersteghöhe $d_v/2$ reduziert. Zudem wird ein konstanter Hebelarm d_v sowie eine senkrecht zur Trägerlängsachse eingelegte Querkraftbewehrung (Bügel) vorausgesetzt.

Spannungsfeld und Fachwerkmodell

In Bild 4.10(b) sind die Stringerkräfte sowie die Beanspruchung des Trägerstegs infolge der Querkraft V dargestellt. Im Trägersteg stellt sich ein um den Winkel θ geneigtes, einachsiges Betondruckfeld ein, dessen Vertikalkomponenten in y -Richtung durch eine entsprechende Querkraftbewehrung aufgenommen werden muss; die Horizontalkomponenten bewirken Zugkräfte im oberen und unteren Stringer. In Bild 4.10(c) ist die obere Stringerkraft F_{sup} für den in Bild 4.6 diskutierten Träger im Bereich $x = 5.0$ bis 6.25 m dargestellt. Die aus dem Biegemoment dividiert durch den Hebelarm resultierende Stringerkraft wird infolge der Querkraft in horizontaler Richtung um den Betrag $(d_v \cot \theta)/2$ versetzt, unter der Voraussetzung, dass der Verlauf der Biegemomente linear verteilt ist. Alternativ führt auch eine vertikale Verschiebung (Translation) um den Betrag $(V \cot \theta)/2$ zum gleichen Ergebnis, wobei diese Translation auch bei nichtlinearen Biegemomentenverläufen gültig ist. Dieser versetzte Stringerkraftverlauf muss nun innerhalb der Zugkraftdeckungslinie, herrührend aus der Stringerbewehrung, liegen. Man spricht diesbezüglich in der Literatur auch vom Versatzmass.

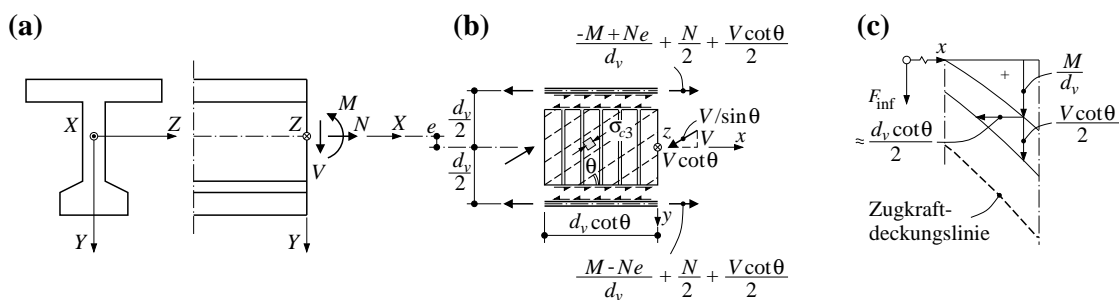


Bild 4.10 Querschnittsbemessung mit Spannungsfeldern resp. Fachwerkmodell: (a) Querschnitt mit Schnittkräften; (b) Schnittkörperdiagramm mit Stringerkräften; (c) Versatzmass für Stringerkräfte.

Stringer-Tafelmodell

Eine vereinfachte Querschnittsbetrachtung kann auch auf Grundlage der Stringer-Tafelmodellvorstellung durchgeführt werden. Vorausgesetzt werden dabei rechteckförmige Tafeln sowie die Anordnung von Stringern zur Lasteinleitung von Einzellasten und Lagerreak-

tionen. In Bild 4.11(b) sind die Stringerkräfte F sowie die Beanspruchungen des Trägerstegs dargestellt. Erstere resultieren ausschliesslich aus dem Biegemoment M und der Normalkraft N .

$$F_{\text{sup}} = \frac{-M + N \cdot e}{d_v} + \frac{N}{2}, \quad F_{\text{inf}} = \frac{M - N \cdot e}{d_v} + \frac{N}{2}, \quad (4.34)$$

Die Querkraft V verursacht, im Gegensatz zur Modellierung mit Spannungsfeldern, keine unmittelbare Kraft in den Stringern. Das im vorigen Abschnitt diskutierte Versatzmass entfällt, und die Stringerkräfte lassen sich für $N=0$ direkt aus der Division des Biegemoments M mit dem Hebelarm d_v bestimmen; dieser Stringerzugkraftverlauf hat wiederum im Maximum der Zugkraftdeckungslinie, herrührend aus der gewählten Stringerbewehrung, zu entsprechen (Bild 4.11(c)). Die Querkraft wird ausschliesslich vom Trägersteg übernommen, innerhalb dessen sich ein reiner Schubspannungszustand

$$n_{xy} = \frac{V}{d_v} \quad (4.35)$$

einstellt, der zusammen mit der orthogonalen Bewehrung im Trägersteg sowie dem einachsigen Betondruckfeld im Gleichgewicht steht. Der Steg wird dabei als Stahlbetonscheibe (Kapitel 3.6) idealisiert, und für die orthogonalen Kräfte in den Bewehrungen resultieren die Beziehungen

$$\begin{aligned} n_{sxx} &= \cot \theta \cdot |n_{xy}| \\ n_{syy} &= \frac{1}{\cot \theta} \cdot |n_{xy}| \end{aligned} \quad (4.36)$$

Die Spannung σ_{c3} des einachsigen, um den Winkel θ zur x -Achse geneigten Betondruckspannungsfelds beträgt

$$\sigma_{c3} = -\frac{|n_{xy}|}{h \cdot \sin \theta \cos \theta} \quad (4.37)$$

und soll die effektive Betondruckfestigkeit f_{ce} in (3.81) nicht übertreffen. Die Neigung des Betondruckspannungsfeldes kann innerhalb der in Kapitel 3.6 angegebenen Grenzen frei gewählt werden. Ein flaches Betondruckspannungsfeld bedarf einer stärkeren Bewehrung in Trägerlängsrichtung n_{sxx} und einer schwächeren Bewehrung senkrecht dazu n_{syy} (Bügelbewehrung). Im Übrigen gelten für die Bemessung der Querkraftbewehrung die Überlegungen in Kapitel 3.6.5 zum Einfluss der endlichen Stababstände der Querkraftbewehrung. Im Gegensatz zur Modellvorstellung mit Spannungsfeldern ist der Nachweis für die maximale erforderliche Querkraftbewehrung im Bereich direkter Auflagerung sowie Einleitstellen grosser Einzelkräfte zu führen, d. h. der Nachweisschnitt entspricht direkt den Kräfteinleitungsstellen.

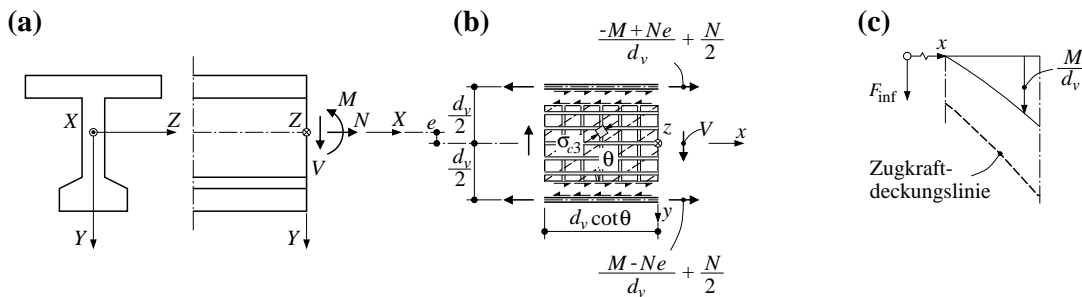


Bild 4.11 Querschnittsbemessung mit Stringer-Tafelmodell: (a) Querschnitt mit Schnittkräften; (b) Schnittkörperdiagramm mit Stringerkräften; (c) Versatzmass in den Stringerkräften.

Wirken Kräfte resp. verteilte Streckenlasten an der Balkenunterseite, ist die Bügelbewehrung konzentriert anzuordnen resp. n_{yy} entsprechend zu erhöhen. Im Übrigen sei erwähnt, dass die Normalkraft nicht zwingend je hälftig von den Stringern aufgenommen werden muss. Eine Normaldruckkraft ist vorteilhaft dem Trägersteg zuzuweisen, was die erforderliche Bewehrung im Steg in Trägerlängsrichtung reduziert und das Querkrafttragverhalten positiv beeinflusst. Normalzugkräfte sind hingegen eher den Stringern zuzuordnen.

Im Vergleich zur Querschnittsbetrachtung mit Spannungsfeldern ist die Querschnittsbetrachtung mit der Stringer-Tafelmodellvorstellung einfacher und direkter. Das Versatzmass beim Zugkraftverlauf entfällt, was die Berechnung wesentlich vereinfacht. Nachteilig wirkt sich die insgesamt grössere Bewehrungsmenge aus, die in der Folge quantitativ für die beiden Modellvorstellungen verglichen wird.

4.3.6 Vergleich der Bewehrungsmengen

Anhand des in Bild 4.12(a) dargestellten Stahlbetonbiegeträgers, der als einfacher Balken mit der Spannweite l gelagert ist und eine gleichmässig verteilte Streckenlast p erfährt, sollen die statisch erforderlichen Bewehrungsmengen verglichen werden. Zum einen soll die Bewehrung auf der Grundlage von Spannungsfeldern und Fachwerkmodellen ((Marti 1985), (Sigrist et al. 1995)) bestimmt werden, zum anderen wird die Stringer-Tafelmodellvorstellung verwendet (Kapitel 4.3.5). Vorausgesetzt wird ein konstanter Hebelarm der inneren Kräfte d_v , welcher dem Abstand der Stringerkräfte oben und unten entspricht, Bild 4.12(m). Im Weiteren wird im Biegeträger eine vertikale (y -Richtung) Querkraftbewehrung vorausgesetzt. In beiden Modellvorstellungen soll der Beton für die Bemessung der Bewehrung nicht massgebend werden, d. h. der Beton verfügt im gesamten Biegeträger über ausreichende Tragreserven.

Im Allgemeinen bestimmt sich die Bewehrungsmenge W aus dem Quotienten der Raumlast des Betonstahls γ_s und der Stahlspannung σ_s , multipliziert mit der angreifenden Kraft integriert über die zugehörige Strecke. Die Bewehrungsmenge in kN wird ohne Berücksichtigung von Verankerungslängen und Übergreifungsstössen bestimmt.

Spannungsfelder resp. Fachwerkmodelle

Bild 4.12(a) zeigt das Spannungsfeld, bestehend aus dem oberen und unteren Stringer, einem zentrierten Fächer im Auflagerbereich sowie den $n-1$ parallelen Druckfeldern der Breite Δ , deren Trajektorien mit der x -Achse den Winkel $\theta = \arctan(\Delta/d_v)$ einschliessen. Der dreieckförmige Fächer in der Mitte der Spannweite ist unter der Voraussetzung, dass die verteilte Streckenlast p auf den oberen Stringer wirkt und der Biegeträger als gewichtslos betrachtet werden kann, spannungslos. In Bild 4.12(b) ist die Querkraftverteilung (gestrichelte Linie) dargestellt. In der gleichen Darstellung sind die erforderlichen Kräfte für die Querkraftbewehrung (ausgezogene Linien) eingezeichnet. Sie lassen sich an Schnittkörperdiagrammen mit Schnitten entlang der Ränder der parallelen Druckfelder bestimmen. Der Verlauf der verteilten Kräfte für die Querkraftbewehrung (Bügelkräfte) ist treppenförmig und in der Querkraftverteilung eingeschrieben. In der Literatur findet man für diesen Effekt den Begriff „staggering effect“ (Marti 1986b). Die erforderliche Menge an Querkraftbewehrung (Bügelbewehrungsmenge) bestimmt sich zu

$$W_{xVFWM} = \frac{\gamma_s}{\sigma_s} \cdot \frac{pl^2}{4} \left(\frac{n-1}{n} \right) \tan\theta \quad (4.38)$$

In Bild 4.12(c) ist der Verlauf der Längskraft F_{inf} im unteren Stringer dargestellt. Aus dem Biegemoment M dividiert durch den Hebelarm d_v (gestrichelte Linie) resultiert die erforderliche Bewehrungsmenge

$$W_{xM} = \frac{\gamma_s}{\sigma_s} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{l}{d_v} \quad (4.39)$$

Die geneigten Druckfelder verursachen, zur Wahrung des Gleichgewichts, Längszugkräfte, die vom oberen und unteren Stringer aufgenommen werden müssen. Für den unteren Stringer des einfachen Balken resultiert ein polygonaler Verlauf der Längszugkraft, der den parabolischen Verlauf aus dem Biegemoment übersteigt, Bild 4.12(c). Die zusätzliche Bewehrungsmenge in Längsrichtung infolge der Querkraft bestimmt sich zu

$$W_{yVFWM} = \frac{\gamma_s}{\sigma_s} \left[\frac{pl^3}{8 \cdot d_v} - \frac{2}{3} \cdot \frac{pl^3}{8 \cdot d_v} - 2p\Delta^2 \cot \theta \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{i=2}^n \sum_{k=0}^{n-1} k \right) \right] = \frac{\gamma_s}{\sigma_s} \cdot \frac{pl^3}{12 \cdot d_v} \left(\frac{3n-1}{4n^2} \right) \quad (4.40)$$

Schlussendlich kann die gesamte erforderliche Bewehrungsmenge auf Grundlage der Spannungsfelder resp. des Fachwerkmodells aus der Summe von (4.38) bis (4.40) gebildet werden zu

$$W_{FWM} = W_{xM} \left[\left(\frac{3 \cdot d_v}{l \cot \theta} - \frac{6 \cdot d_v^2}{l^2} \right) + 1 + \left(\frac{3 \cdot d_v \cot \theta}{2 \cdot l} - \frac{d_v^2 \cot^2 \theta}{l^2} \right) \right] \quad (4.41)$$

die den Angaben in (Marti 1987) entsprechen. Bild 4.12(d) zeigt die einzelnen Anteile der Bewehrungsmengen in Abhängigkeit der Schlankheit l/d_v für die Neigung der Druckfelder von $\cot \theta = 45^\circ$ resp. 25° (Kapitel 3.6). Die gesamte Bewehrungsmenge ist praktisch unabhängig von der Wahl der Druckfeldneigung. Im Weiteren überwiegt der Anteil der Biegebewehrung, vor allem für schlanke Biegeträger.

Stringer-Tafelmodell

In Bild 4.12(e) ist ein Stringer-Tafelmodell dargestellt. Der als einfacher Balken gelagerte Biegeträger mit der verteilten Streckenlast p wird durch eine Tafel und vier Stringer modelliert. Entlang des Stringers AD wird die Auflagerkraft $pl/2$ mit einem über die Höhe d_v konstanten Schubfluss von $pl/(2 \cdot d_v)$ aufgenommen. Dieser Schubfluss q ist über die Trägerlängsachse entsprechend der Querkraftverteilung linear verteilt, vgl. die in Bild 4.12(e) angegebene Beziehung. Der Spannungszustand in der Tafel entspricht demzufolge einem reinen Schubspannungszustand

$$n_{xy} = q = \frac{pl}{2 \cdot d_v} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \quad (4.42)$$

der linear über die Trägerlängsachse x variiert. Vernachlässigt werden dabei die über die Trägerhöhe linear abnehmenden Normaldruckspannungen

$$n_{yy} = -p \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{d_v} \right) \quad (4.43)$$

welche aus dem Kräftegleichgewicht in y -Richtung resultieren. Die Bewehrungen in x - und y -Richtung innerhalb der Tafel können durch Einsetzen von (4.42) in die Bemessungsbeziehung für Stahlbetonscheiben des Regimes 1 (3.62) bestimmt werden, und die Bewehrungskräfte in x - resp. y -Richtung sind in Bild 4.12(f) resp. (g) dargestellt. Die zugehörigen Bewehrungsmengen ergeben sich zu

$$W_{xVSTM} = \frac{\gamma_s}{\sigma_s} \cdot \cot \theta \frac{pl^2}{4} \quad \text{resp.} \quad W_{yVSTM} = \frac{\gamma_s}{\sigma_s} \cdot \frac{1}{\cot \theta} \cdot \frac{pl^2}{4} \quad (4.44)$$

Mit dem linear verteilten Schubfluss q entlang des oberen und unteren Stringers ergeben sich parabolische Längskräfte, die dem Quotienten des Biegemoments M und des Hebelarms d_v entsprechen. Für den unteren Stringer ist der Verlauf der Längszugkraft F_{inf} in Bild 4.12(h) dargestellt. Die zugehörige Bewehrungsmenge W_{xM} entspricht der Beziehung (4.39). Schliesslich beträgt die gesamte erforderliche Bewehrungsmenge auf Grundlage der Stringer-Tafelmodellvorstellung

$$W_{STM} = W_{xM} \left[3 \frac{d_v}{l \cot \theta} + 1 + 3 \cot \theta \frac{d_v}{l} \right] \quad (4.45)$$

und die Differenz der Bewehrungsmengen aus (4.45) mit (4.41) beträgt

$$\Delta W = W_{STM} - W_{FWM} = W_{xM} \left[\left(\frac{d_v}{l} \right)^2 \cdot (6 + \cot^2 \theta) + \frac{3d_v \cot \theta}{2l} \right] \quad (4.46)$$

In Bild 4.12(j) sind analog dem Fachwerkmodell die einzelnen Anteile der Bewehrungsmengen dargestellt. Der Anteil der Bewehrung im Trägersteg im Vergleich zur Biegebewehrung ist für gedrungene Träger beträchtlich; für schlanke Träger entspricht das Verhältnis dem des Fachwerkmodells. Wird eine flache Neigung des Druckfeldes gewählt, steigt die gesamte Bewehrungsmenge an.

Diskussion

In Bild 4.12(k) ist das Verhältnis zwischen der gesamten Bewehrungsmenge gemäss Stringer-Tafelmodell und Fachwerkmodell dargestellt. Mit der Stringer-Tafelmodellvorstellung wird insbesondere für gedrungene Biegeträger und flache Druckfeldneigungen mehr Bewehrung benötigt; dies liegt primär daran, dass die Bewehrung in Längsrichtung nicht wie beim Fachwerkmodell im Stringer konzentriert wird. Für ein übliches Spannweitenverhältnis von $l/d_v = 18$ beträgt das Verhältnis der Bewehrungsmengen 1.08 resp. 1.17 für $\theta = 45^\circ$ resp. 25° . Wird beim Fachwerkmodell die ohnehin eingelegte Mindestbewehrung in Trägerlängsrichtung mitberücksichtigt, reduzieren sich diese Verhältniszahlen. Dementsprechend führt die Bemessung der Bewehrung mit der Stringer-Tafelmodellvorstellung im Vergleich zur Bemessung mit der Fachwerkmodellvorstellung für schlanke Biegeträger zu einer leicht höheren Bewehrungsmenge und für gedrungene Biegeträger zu einer höheren Bewehrungsmenge.

Zusammenfassend baut eine Bemessung mit der Stringer-Tafelmodellvorstellung auf dem unteren Grenzwertsatz der Traglastverfahren (Kapitel 3.2.2) auf. Für eine vereinfachte Bemessung von Stahlbetonbiegeträgern ist die rechteckige Tafelform vernünftig.

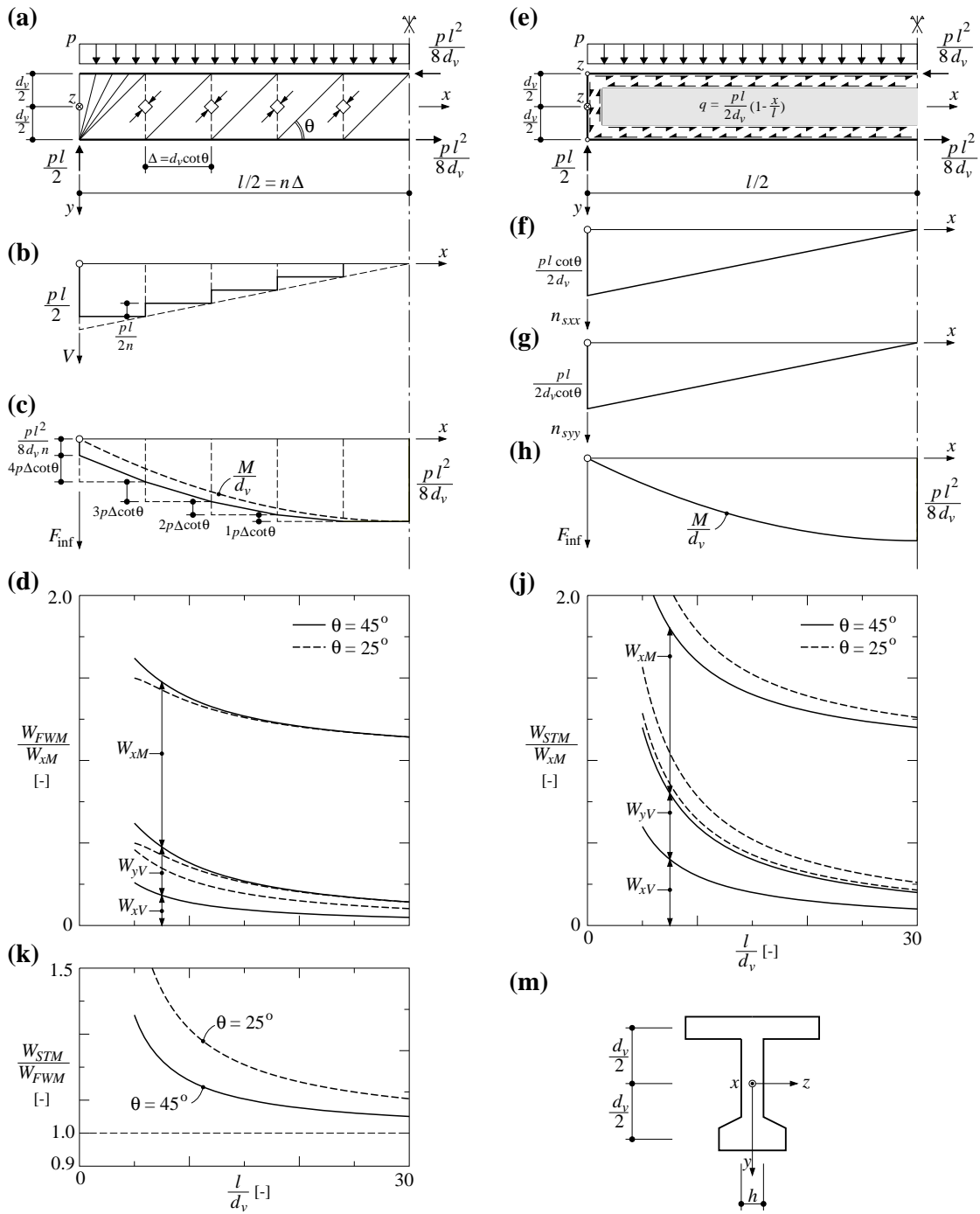


Bild 4.12 Vergleich der Bewehrungsmengen am einfachen Balken: (a) Spannungsfeld und Fachwerkmodell; (b) Bügelkräfte; (c) Längskraft im Zugstringer; (d) Bewehrungsmenge Fachwerkmodell; (e) Stringer-Tafelmodell; (f), (g) Kräfte in der Tafel (Trägersteg); (h) Längskraft im Zugstringer; (j) Bewehrungsmenge Stringer-Tafelmodell; (k) Vergleich der Bewehrungsmengen; (m) Querschnitt Biegeträger.

4.3.7 Konstruktive Durchbildung

Bild 4.13 zeigt den freien Tafelrand des in Bild 4.12(e) dargestellten Biegeträgers. Freie Scheiben- oder Plattenränder sind konstruktiv in der Regel mit Steckbügeln oder auf- resp. abgebo-

genen Bewehrungsstäbe in Verbindung mit Dübeleisen in deren Ecken zu umschliessen [SIA 262 (2003)].

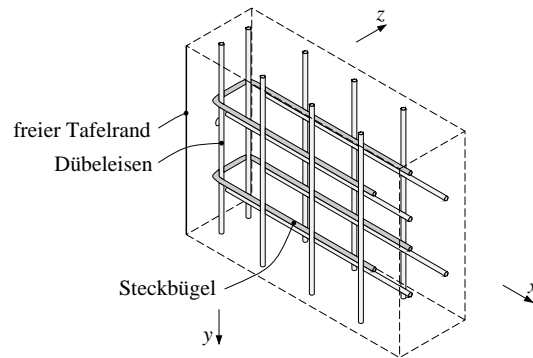


Bild 4.13 Konstruktive Durchbildung eines freien Tafelrands.

Auf Basis des Stringer-Tafelmodells muss zur Sicherstellung des Gleichgewichts die Bewehrungsmenge der Steckbügel oder der auf- resp. abgebogenen Bewehrungsstäbe an freien Tafelrändern der anzuschliessenden Bewehrungsmenge (Bild 4.13, Bewehrung in x -Richtung) entsprechen.

4.4 Bemessung von wandartigen Trägern

Bei der Bemessung von wandartigen Trägern (Wandscheiben) gelten im Allgemeinen die bereits im Kapitel 4.3 zur Bemessung von Biegeträgern aufgeführten Beziehungen. Im vorliegenden Kapitel soll auf die Bemessung von wandartigen Trägern mit Öffnungen eingegangen werden. Dazu wird das in der Literatur häufig zitierte Beispiel der Wandscheibe mit einer Öffnung in Schlaich et al. (1987) diskutiert, Bild 4.14(a). Anschliessend wird mit Hilfe von Stringern und Tafeln die Krafteinleitung in hohen Wandscheiben modelliert.

4.4.1 Wandscheibe mit Öffnung: Fachwerkmodell, Spannungsfeld

Bild 4.14(a) zeigt die als gewichtslos betrachtete Wandscheibe mit einer Öffnung im Bereich des linken Auflagers, beansprucht durch eine Einzellast P . Die Schnittgrössendiagramme der als einfacher Balken gelagerten Wandscheibe sind in Bild 4.14(b) ersichtlich. Zur Ermittlung des Spannungszustands im Inneren der Wandscheibe ist die Fachwerkmodellvorstellung mit den zugehörigen Spannungsfeldern in der Praxis etabliert und gibt den Kraftfluss auf anschauliche Art und Weise wieder. Ein statisch zulässiges Spannungsfeld und das daraus resultierende Fachwerkmodell garantiert die Bemessung auf der Grundlage des unteren Grenzwertsatzes der Traglastverfahren gemäss Kapitel 3.2.2.

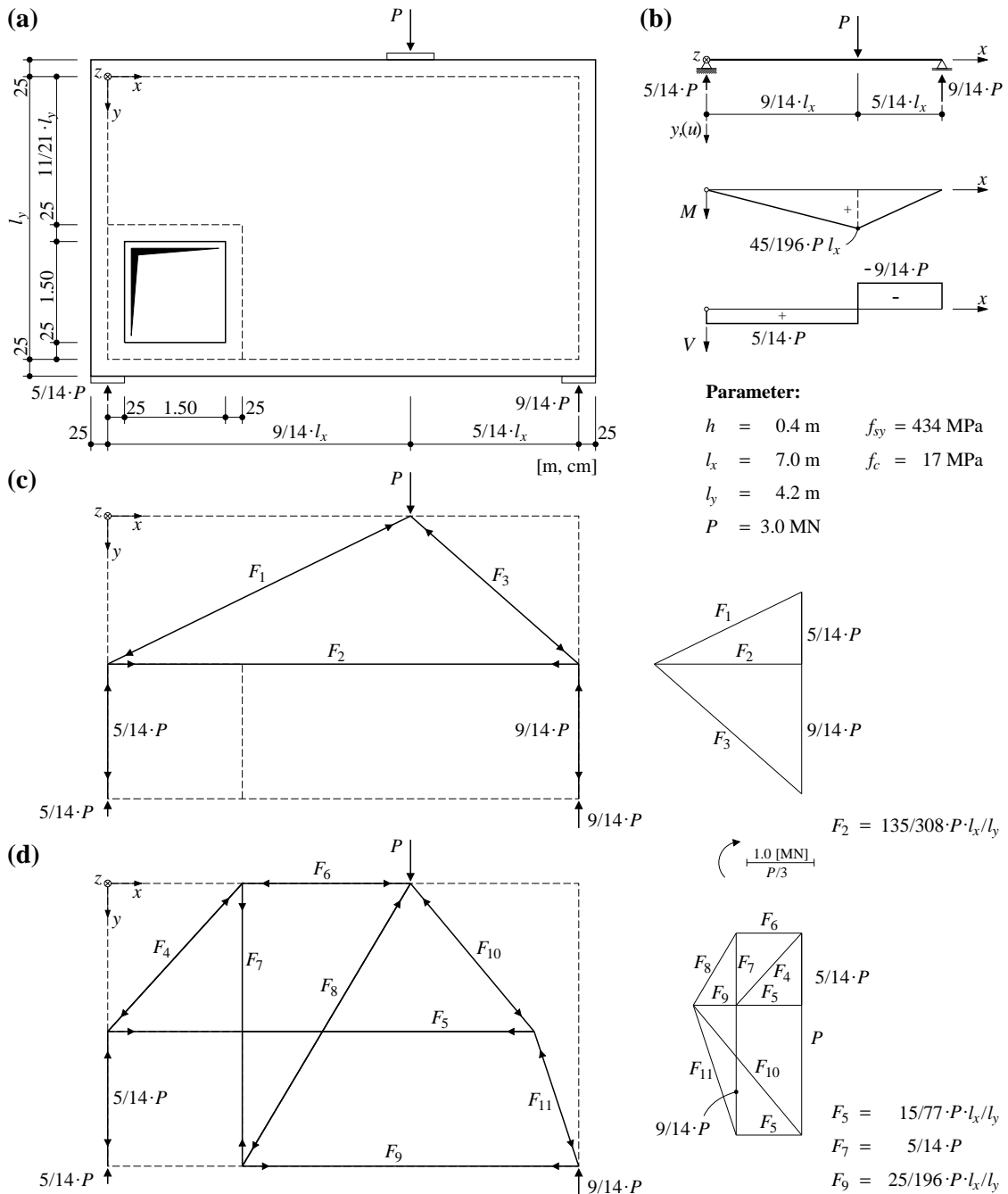


Bild 4.14 Beispiel Wandartiger Träger mit Öffnung [Schlaich et al. (1987)]: (a), (b) Wandscheibe mit statischem System und Schnittkörperdiagrammen; (c), (d) Fachwerkmodell mit zugehörigem CREMONAplan.

Bild 4.14(c) illustriert das wohl einfachste mögliche Fachwerkmodell. Der zugehörige CREMONAplan zeigt graphisch die Grössenordnung der einzelnen Kräfte in den Fachwerkstäben F_1 bis F_3 . Innerhalb der Wandscheibe wird lediglich der Teil oberhalb der Öffnung als statisch wirksam betrachtet. Entsprechend resultiert eine grosse horizontale Zugkraft F_2 von $136/308 \cdot P \cdot l_x / l_y \approx 0.44 \cdot P \cdot l_x / l_y$, die mit einer entsprechenden Bewehrung aufgenommen werden muss. Demgegenüber zeigt das Bild 4.14(d) ein mögliches Fachwerkmodell mit zugehörigem CREMONAplan unter Ausnützung der gesamten Wandscheibenhöhe d. h. dem gesamten statisch zur Verfügung stehenden Hebelarm; für die zugehörigen horizontalen Zugkräfte F_5 resp. F_9 resultieren $15/77 \cdot P \cdot l_x / l_y \approx 0.19 \cdot P \cdot l_x / l_y$ resp. $25/196 \cdot P \cdot l_x / l_y \approx 0.13 \cdot P \cdot l_x / l_y$. Dazu ist eine verti-

kale Aufhängebewehrung im Bereich der Öffnung notwendig, die mindestens die Kraft $F_7 = 5/14 P \cong 0.36 P$ aufnehmen muss. Die besprochenen Fachwerkmodelle in Bild 4.14 bedürfen, für eine endgültige Bemessung, einer weiteren Detaillierung insbesondere hinsichtlich der Druckdiagonalen, was zu einer Abstufung der erforderlichen Zugkräfte führen kann; deren Maxima bleiben jedoch unverändert.

Der Vorschlag von Schlaich et al. (1987) basiert auf einer Überlagerung resp. Superposition zweier separater Fachwerkmodelle, die je eine Hälfte der Beanspruchung P aufnehmen bzw. abtragen sollen. Dazu ist eine schräge Aufhängebewehrung notwendig. Die Beispiele zeigen, dass theoretisch unendlich viele verschiedene Fachwerkmodelle und Spannungsfelder generiert werden können, die dem unteren Grenzwertsatz der Traglastverfahren entsprechen. Voraussetzung ist dabei ein ausreichendes Verformungsvermögen sämtlicher Tragwerksteile und die entsprechende konstruktive Durchbildung, die es ermöglichen, den der Bemessung zugrundeliegenden Spannungszustand erreichen zu können. Dazu gehört eine ausreichende Mindestbewehrung ρ_{\min} innerhalb der gesamten Wandscheibe von zirka 0.2% [SIA 262 (2003)]. Die vorgängige Bestimmung des elastischen Verhaltens der Wandscheibe, analog dem Beispiel in Kapitel 4.1.2 resp. den nachfolgenden Ausführungen, gibt wertvolle Hinweise zum Tragverhalten und zur konstruktiven Durchbildung der Wandscheibe.

4.4.2 Wandscheibe mit Öffnung: Stringer-Tafelmodell

Bild 4.15(a) zeigt die Modellierung der Wandscheibe mit einem Stringer-Tafelmodell. Die Richtung der Stringer entsprechen den Wirkungslinien der Einzellasten sowie der Umrandung der Wandscheiben resp. der Öffnungen; die fünf rechteckförmigen Tafeln werden durch die Stringer eingefasst. Die Schubflüsse q in den einzelnen Tafeln, können, abgesehen von der Tafel 1, nicht ausschliesslich aus den Gleichgewichtsbeziehungen bestimmt werden. Das in Bild 4.15 dargestellte Stringer-Tafelmodell ist äusserlich statisch bestimmt gelagert, innerlich jedoch einfach statisch unbestimmt.

Grad der statischen Unbestimmtheit

Der Grad der statischen Unbestimmtheit n eines ebenen Stringer-Tafelmodells, lässt sich in Anlehnung an das Abzählkriterium für ebene Fachwerke bestimmen mit

$$n = s + c - 2 \cdot k \quad (4.47)$$

wobei s die Summe der Anzahl Stringer und der schubfesten Tafeln darstellt; c symbolisiert die Anzahl der Lagergrössen, und k steht für die Anzahl der Knoten inkl. der Lagerknoten. Stringer-Tafelmodelle mit $n = 0$ sind statisch bestimmt, solche mit $n > 0$ statisch unbestimmt. Für $n < 0$ ist das statische System kinematisch verschieblich und somit üblicherweise nicht benutzbar.

Zur Bestimmung der Schubflüsse eines innerlich statisch unbestimmten Stringer-Tafelmodells sind im Allgemeinen verschiedene baustatische Methoden anwendbar; dabei stehen die Kraftmethode oder die Traglastverfahren im Vordergrund. Erstere lässt sich beispielsweise durch die Einführung einer überzähligen Grösse X_1 in Punkt G des Stringer CL durchführen. Die Kraftgrössenzustände am Grundsystem sind in Bild 4.15(b) resp. (c) dargestellt. Die Stringersteifigkeit EA sowie die Tafel-Schubsteifigkeit Gh werden als konstant vorausgesetzt. Durch Anwenden des Arbeitssatzes resultiert

$$\begin{aligned}\delta_{10} &= \frac{P}{EA} \left(\frac{11625}{94864} \cdot \frac{l_x^3}{l_y^2} + \frac{20}{441} l_y \right) + \frac{P}{Gh} \left(\frac{15}{44} \cdot \frac{l_x}{l_y} \right) \\ \delta_{11} &= \frac{1}{EA} \left(\frac{4965}{27104} \cdot \frac{l_x^3}{l_y^2} + \frac{1}{2} l_y \right) + \frac{1}{Gh} \left(\frac{63}{88} \cdot \frac{l_x}{l_y} \right)\end{aligned}\quad (4.48)$$

und zusammen mit der Kompatibilitätsbedingung $\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \delta_{11}$ ergibt sich die überzählige Grösse zu

$$X_1 = N_{yG} = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -P \frac{\frac{1}{b} \left(\frac{11625}{94864} \cdot \frac{l_x^3}{l_y^2} + \frac{20}{441} l_y \right) + 2(1+\nu) \left(\frac{15}{44} \cdot \frac{l_x}{l_y} \right)}{\frac{1}{b} \left(\frac{4965}{27104} \cdot \frac{l_x^3}{l_y^2} + \frac{1}{2} l_y \right) + 2(1+\nu) \left(\frac{63}{88} \cdot \frac{l_x}{l_y} \right)} \simeq -1377 \text{ kN} \quad (4.49)$$

die neben der Beanspruchung P und den geometrischen Grössen l_x und l_y lediglich abhängig ist von der Querdehnungszahl ν sowie der Breite b der Stringer, wobei letztere als konstant vorausgesetzt wurde. Der Betrag der Normalkräfte N in den Stringern kann anschliessend durch Superposition $N = N_0 + X_1 N_1$ bestimmt werden; mit dem analogen Vorgehen können die Schubflüsse q in den Tafeln bestimmt werden. Die Querdehnungszahl ν resp. die Stringerbreite b wurde in (4.49) mit 0.2 resp. 0.5 m berücksichtigt, deren Einfluss auf die überzählige Grösse X_1 ist jedoch sehr gering.

Bild 4.15(d) zeigt die Normalkraftverläufe in den Stringern und die Spannungszustände (Schubflüsse) in den Tafeln auf Basis der Kraftmethode und stellt somit einen möglichen, statisch zulässigen Spannungszustand dar. Durch Überlagerung dieses im Rahmen der gemachten Annahmen einzigen, elastisch verträglichen Spannungszustands mit Eigenspannungszuständen, können unendlich viele weitere statisch zulässige Spannungszustände generiert werden [Marti et al. (1999)]. Zu deren Bestimmung bietet sich die Verwendung des unteren (statischen) Grenzwertsatz der Traglastverfahren (Kapitel 3.2.2) bei der Bemessung von Tragwerken an.

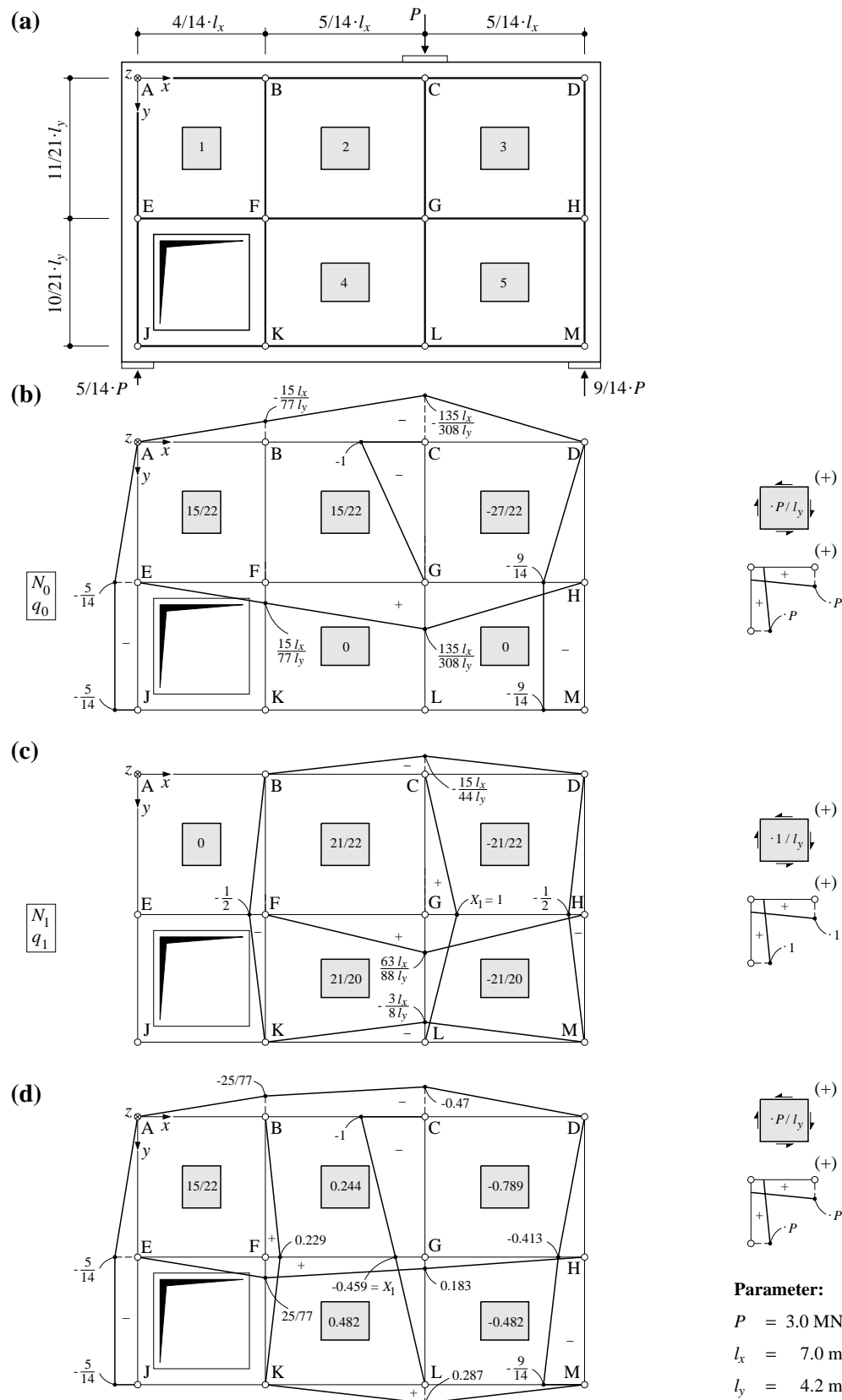


Bild 4.15 Beispiel Wandartiger Träger mit Öffnung [Schlaich et al. (1987)]: (a) Stringer-Tafelmodell; (b) und (c) Kraftgrössenzustände am Grundsystem; (d) Elastische Ermittlung des Spannungszustands innerhalb der Wandscheibe.

Die vier unabhängigen Gleichgewichtsbedingungen des Stringer-Tafelmodells in Bild 4.15(a) zur Bestimmung der fünf unbekannten Schubflüsse q ergeben sich zu

$$\begin{bmatrix} 11/21 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11/21 & 0 & 10/21 & 0 \\ 0 & 0 & -11/21 & 0 & -10/21 \\ 0 & 0 & 0 & -5/14 & -5/14 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} l_y = \begin{bmatrix} 5/14 \\ 5/14 \\ 9/14 \\ 0 \end{bmatrix} P \quad (4.50)$$

Das Gleichungssystem kann gelöst werden, wenn eine zusätzliche Bedingung formuliert wird. Diese kann beispielsweise aus dem Gleichsetzen der Schubflüsse in zwei Tafeln, der Vorgabe einer bestimmten Bewehrung resp. Kraft in einem der Stringer oder dem Gleichsetzen eines Schubflusses mit einem bestimmten Wert, beispielsweise dem minimal vorhandenen Schubwiderstand, herrührend aus der Mindestbewehrung in der Tafel, bestehen. Hier widerspiegelt sich wiederum die grosse Freiheit des Entwerfers in der Anwendung der Plastizitätstheorie auf die Stringer-Tafelmodelle.

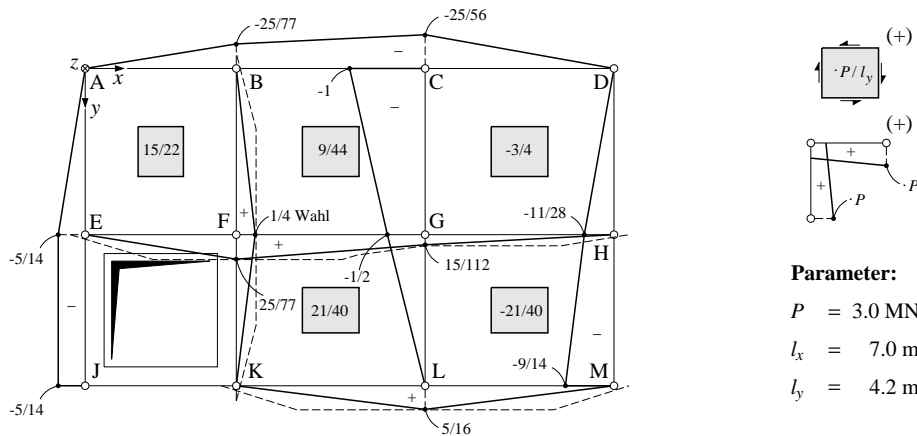


Bild 4.16 Beispiel Wandartiger Träger mit Öffnungen [Schlaich et al. (1987)], Plastische Ermittlung des Spannungszustands innerhalb der Wandscheibe mit dem Stringer-Tafelmodell in Bild 4.15(a).

Der statisch zulässige Spannungszustand in Bild 4.16 gründet auf der Bedingung, dass die Normalkraft in Punkt F des Stringers BK dem Wert $1/4 \cdot P$ entsprechen soll. Daraus resultiert eine Aufhängebewehrung bestehend aus vier Bewehrungsstäben mit einem Stabdurchmesser von 20 mm und zwei Bewehrungsstäben mit einem Stabdurchmesser von 18 mm.

Bemessung der Wandscheibe

Die Bemessung der Tafeln kann mit den in Kapitel 3.6.3 dargestellten Beziehungen des Regimes 1 für Scheibenelemente unter reiner Schubbeanspruchung erfolgen. Der Faktor k bzw. das Verhältnis der x -Bewehrung (liegend) und der y -Bewehrung (stehend) innerhalb jeder Tafel der Wandscheibe kann dabei innerhalb der in Kapitel 3.6.3 angegebenen Schranken frei gewählt werden. In Kapitel 4.6.3 ist die Beziehung (4.96) hergeleitet, die es erlaubt, die erforderliche Zylinderdruckfestigkeit f_{cc} in Abhängigkeit der Bewehrungsgehalte ρ_x und ρ_y sowie der beiden Elastizitätsmoduln E_s und E_c innerhalb einer Tafel zu bestimmen. Die Einhaltung der Bedingung (4.96) garantiert, dass beide Bewehrungen fließen und der Beton elastisch bleibt.

Die Bemessung der konzentrierten Druck- resp. Zugstringer erfolgt analog den Regeln bei der Bemessung einer Wandscheibe auf Grundlage eines Fachwerkmodells [Marti (1985)].

Konstruktive Durchbildung

In Bild 4.17 ist die Bewehrung der Wandscheibe entsprechend dem Spannungszustand in Bild 4.16 dargestellt. Zur Sicherstellung des Gleichgewichts an den freien Tafelrändern sind sämtliche Berandungen der Wandscheibe mit Streckbügeln und Dübeleisen in deren Ecken zu versehen, Bild 4.13. Diese ohnehin konstruktiv notwendige Bewehrung in Wandscheiben [SIA 262 (2003)] kann mit der Stringer-Tafelmodellierung statisch nutzbar in Rechnung gestellt werden.

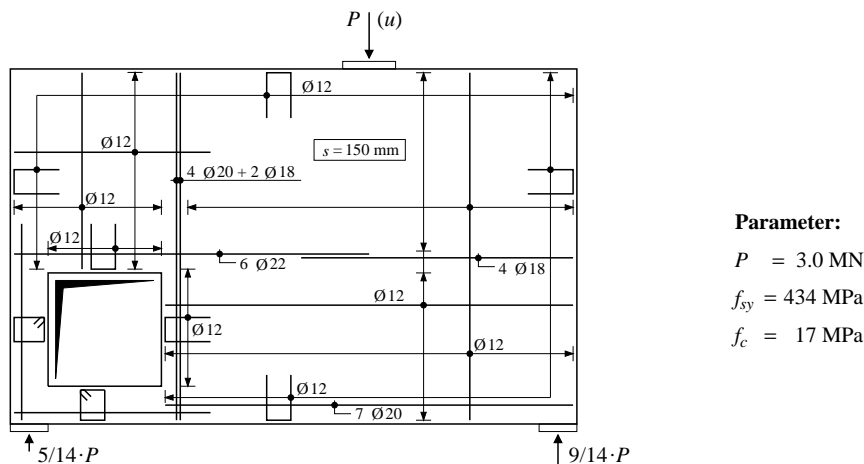


Bild 4.17 Beispiel Wandartiger Träger mit Öffnungen [Schlaich et al. (1987)], Bewehrungsskizze zum Spannungszustand in Bild 4.16 (Wanddicke $h = 0.4 \text{ m}$, Stababstand der beidseitigen verteilten Bewehrung $s = 150 \text{ mm}$).

Bei einer Bemessung auf Grundlage eines Fachwerkmodells muss üblicherweise⁸ die konzentrierte Zugbewehrung an deren Enden eine gewisse Zugkraft (Verankerungskraft) aufnehmen. Bei der Stringer-Tafelmodellierung verschwinden im Allgemeinen diese Verankerungskräfte (z. B. Punkt K in Bild 4.16). Es muss lediglich sichergestellt werden, dass die Deckungslinie der Zugkraft die Stringerzugkraft einschliesst (Kapitel 4.3.5). Diese Deckungslinien der Zugstringer mit der in Bild 4.17 aufgeführten Bewehrungen sind in Bild 4.16 mit gestrichelten Linien dargestellt. Die Bewehrung innerhalb der Tafeln in Bild 4.17 resultiert aus der Beziehung (3.62) mit $k = 1.0$.

Diskussion

Ein Bemessungsvorschlag für die in Bild 4.15(a) dargestellte Wandscheibe aufgrund der Stringer-Tafelmodellvorstellung ist auch in Blaauwendraad & Hoogenboom (1996) zu finden. Die Bemessung basiert auf der Annahme einer Beanspruchung von $P = 2 \text{ MN}$ und setzt eine rechnergestützte, elastisch verträgliche Analyse voraus. Anschliessend wurde eine nichtlineare Analyse bis zum Erreichen der Traglast der Scheibe durchgeführt.

Die Bemessung eines wandartigen Trägers oder allgemein einer ebenen Stahlbetonstruktur mit der Stringer-Tafelmodellvorstellung schränkt die Modellierungsvielfalt, herrührend aus den verschiedenen möglichen Fachwerkmodellen, etwas ein bzw. vereinfacht die Modellbildung. Die durch Anwendung der Plastizitätstheorie erlangte Freiheit des Entwerfers in der Wahl eines statisch zulässigen, mittels einfacher Handrechnung bestimmbarer Spannungszustands bleibt auch bei der Modellierung mit Stringern und Tafeln bestehen. Voraussetzung ist dabei ein

⁸ Mit einem verfeinerten Fachwerkmodell (Spannungsfeld), kann die erforderliche Verankerungskraft ebenfalls eliminiert werden.

ausreichendes Verformungsvermögen sämtlicher Tragwerksteile und eine entsprechende konstruktive Durchbildung. Auf das Verformungsvermögen der Zug- und Druckstringer sowohl als auch der Tafeln wird in den Kapiteln 4.5 und 4.6 eingegangen. Darauf aufbauend lassen sich auch Aussagen zu den Verformungen ganzer Stahlbetonstrukturen machen, Kapitel 4.7.2.

4.4.3 Krafteinleitung in Wandscheiben mit Stringer-Tafelmodell

In Kapitel 4.1.2 ist das elastische Verhalten eines wandartigen Trägers auf Grundlage der Potentialgleichung (Scheibengleichung) (4.2) beschrieben. Nachfolgend wird anhand eines Beispiels aufgezeigt, wie sich der relativ grosse Rechenaufwand in Kapitel 4.1.2 bei der Behandlung von Krafteinleitungen in hohen Wandscheiben durch Verwendung von Stringern und Tafeln reduzieren lässt. Bild 4.18(a) zeigt ein Stringer-Tafelmodell mit insgesamt vier Tafeln in Anlehnung an das Beispiel der Krafteinleitung in hohen Scheiben in Marti (2012). In der Mitte der oberen Berandung des Stringer-Tafelmodells greift eine Einzelkraft P an, und am unteren Rand soll eine gleichmässig verteilte Reaktion, für eine Wandscheibe der Breite $3/2 \cdot l_x$, resp. jeweils $P/3$ in den drei vertikalen Stringern resultieren. Ein elastisch verträglicher Spannungszustand des innerlich einfach statisch unbestimmten Stringer-Tafelmodells lässt sich durch Einführen einer überzähligen Grösse, beispielsweise dem Schubfluss in der Tafel 3, bestimmen. Die Kraftgrössenzustände am Grundsystem sind in Bild 4.18(b) resp. (c) dargestellt. Die Stringersteifigkeit EA sowie die Tafel-Schubsteifigkeit Gh werden als konstant vorausgesetzt. Durch Anwenden des Arbeitssatzes resultiert

$$\begin{aligned}\delta_{10} &= \frac{P}{EA} \left(-\frac{1}{6} \cdot \frac{l_x^3}{l_y} + \frac{1}{12} l_y^2 \right) + \frac{P}{Gh} \left(-\frac{1}{3} \cdot l_x \right) \\ \delta_{11} &= \frac{1}{EA} \left(\frac{1}{2} \cdot l_x^3 + \frac{1}{2} l_y^3 \right) + \frac{1}{Gh} (l_x l_y)\end{aligned}\quad (4.51)$$

und zusammen mit der Kompatibilitätsbedingung $\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0$ ergibt sich die überzählige Grösse zu

$$X_1 = q_3 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{P}{6l_y} \cdot \frac{2l_x^3 - l_y^3 + 8b(1+\nu)l_x l_y}{l_x^3 + l_y^3 + 4b(1+\nu)l_x l_y} \quad (4.52)$$

Unter der Voraussetzung identischer Steifigkeiten in allen Stringern mit der zugehörigen Stringerbreite $b = 0.5$ m sowie identischer Steifigkeiten in allen Tafeln mit der Querdehnungszahl $\nu = 0.2$ resultiert für die Stringerkräfte in x -Richtung in den Punkten B, E und H

$$\begin{aligned}N_{xE} &= P \frac{l_x l_y^2}{2 \left[l_x^3 + l_y^3 + 4l_x l_y b(1+\nu) \right]} \\ N_{xH} &= P \frac{l_x}{6 \cdot l_y} - \frac{N_{xE}}{2} \\ N_{xB} &= -P \frac{l_x}{6 \cdot l_y} - \frac{N_{xE}}{2}\end{aligned}\quad (4.53)$$

Bild 4.19 zeigt die Verteilung der Stringerkräfte aus (4.53) für verschiedene Seitenlängen resp. Wandhöhen l_y (ausgezogene Linien). Die Kraftgrössen werden massgeblich beeinflusst durch das Verhältnis der Seitenlängen l_x und l_y ; der Einfluss der Steifigkeiten der Stringer resp. der Tafeln in (4.53) ist unbedeutend. Mit $l_y = l_x = 4$ m und $\nu = 0.2$ variiert das Verhältnis N_{xH}/P aus (4.53) zwischen 0.22 bis 0.17 für Stringerbreiten b zwischen 0.25 m bis 0.75 m. Bei gleichblei-

benden Seitenlängen der Wandscheibe variiert das Verhältnis N_{xH}/P zwischen 0.20 bis 0.19 für Querdehnungszahlen ν zwischen 0.1 bis 0.3.

Mit der Bedingung $N_{xH} = 0$ kann die zugehörige Scheibenhöhe l_{y0} bestimmt werden zu

$$l_{y0} = \frac{l_x \left[\sqrt{1 - \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{b}{l_x} (1 + \nu) \right)^3} + 1 \right]^{2/3} + \frac{8}{3} \cdot b (1 + \nu)}{\left[\sqrt{1 - \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{b}{l_x} (1 + \nu) \right)^3} + 1 \right]^{1/3}} \quad (4.54)$$

wobei näherungsweise der zweite Summand in (4.54) vernachlässigt werden kann und somit

$$l_{y0} \cong l_x \left[\sqrt{1 - \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{b}{l_x} (1 + \nu) \right)^3} + 1 \right]^{1/3} \quad (4.55)$$

resultiert. (4.55) zeigt die Lage der ausschliesslich auf Zug beanspruchten Stringer auf.

Die resultierende Kraft aus der Summe von N_{xH} und N_{xE} ist in Bild 4.19 dargestellt; deren Lage ist mit

$$y_R = l_y \frac{2l_x^3 + 2l_y^3 + 8l_x l_y b(1 + \nu)}{2l_x^3 + 5l_y^3 + 8l_x l_y b(1 + \nu)} \quad (4.56)$$

bestimmt. Das Verhältnis y_R/l_y aus (4.56) definiert den Hebelarm der resultierenden Horizontalstringerkräfte und ist im Wesentlichen abhängig von den Seitenlängen der Wandscheibe. Für $l_x \gg l_y$ beträgt das Verhältnis zwischen y_R und l_y 1.0 und für $l_x \ll l_y$ beträgt dieses 0.4.

In Bild 4.18(b) ist ein Stringer-Tafelmodell mit den identischen Seitenlängen l_x und l_y und einer feineren Unterteilung mit insgesamt acht Tafeln dargestellt. Daraus entsteht ein innerlich dreifach statisch unbestimmtes System. Die Kraftgrössenzustände am Grundsystem sind in Bild 4.18 (e) bis (h) dargestellt. Die Stringersteifigkeit EA sowie die Tafel-Schubsteifigkeit Gh werden als konstant vorausgesetzt. Zusammen mit dem Arbeitssatz resultiert die Kompatibilitätsbedingung

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \frac{4P}{l_y} \begin{Bmatrix} -48l_x^3 + 3l_y^3 - 96b(1 + \nu)l_x l_y \\ -32l_x^3 + 3l_y^3 - 96b(1 + \nu)l_x l_y \\ -32l_x^3 + 3l_y^3 - 96b(1 + \nu)l_x l_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 96l_x^3 + 12l_y^3 + 192b(1 + \nu)l_x l_y & 32l_x^3 + 15l_y^3 + 96b(1 + \nu)l_x l_y & 48l_x^3 + 15l_y^3 + 96b(1 + \nu)l_x l_y \\ 32l_x^3 + 15l_y^3 + 96b(1 + \nu)l_x l_y & 64l_x^3 + 30l_y^3 + 192b(1 + \nu)l_x l_y & 16l_x^3 + 33l_y^3 + 96b(1 + \nu)l_x l_y \\ 48l_x^3 + 15l_y^3 + 96b(1 + \nu)l_x l_y & 16l_x^3 + 33l_y^3 + 96b(1 + \nu)l_x l_y & 64l_x^3 + 48l_y^3 + 192b(1 + \nu)l_x l_y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

woraus die überzähligen Grössen $X_1 = 0.443 \cdot P$, $X_2 = 0.213 \cdot P$ und $X_3 = 0.072 \cdot P$ resultieren mit den Parametern gemäss Bild 4.19 und $l_y = 4$ m. Die Stringerkräfte in x -Richtung in den Punkten L, O, R, U und X sind in Bild 4.19 eingetragen (gestrichelte Linien). Die Steigung der Verbindungslinien zwischen den einzelnen Kraftgrössen illustriert den Schubfluss in den dazwischenliegenden Tafeln.

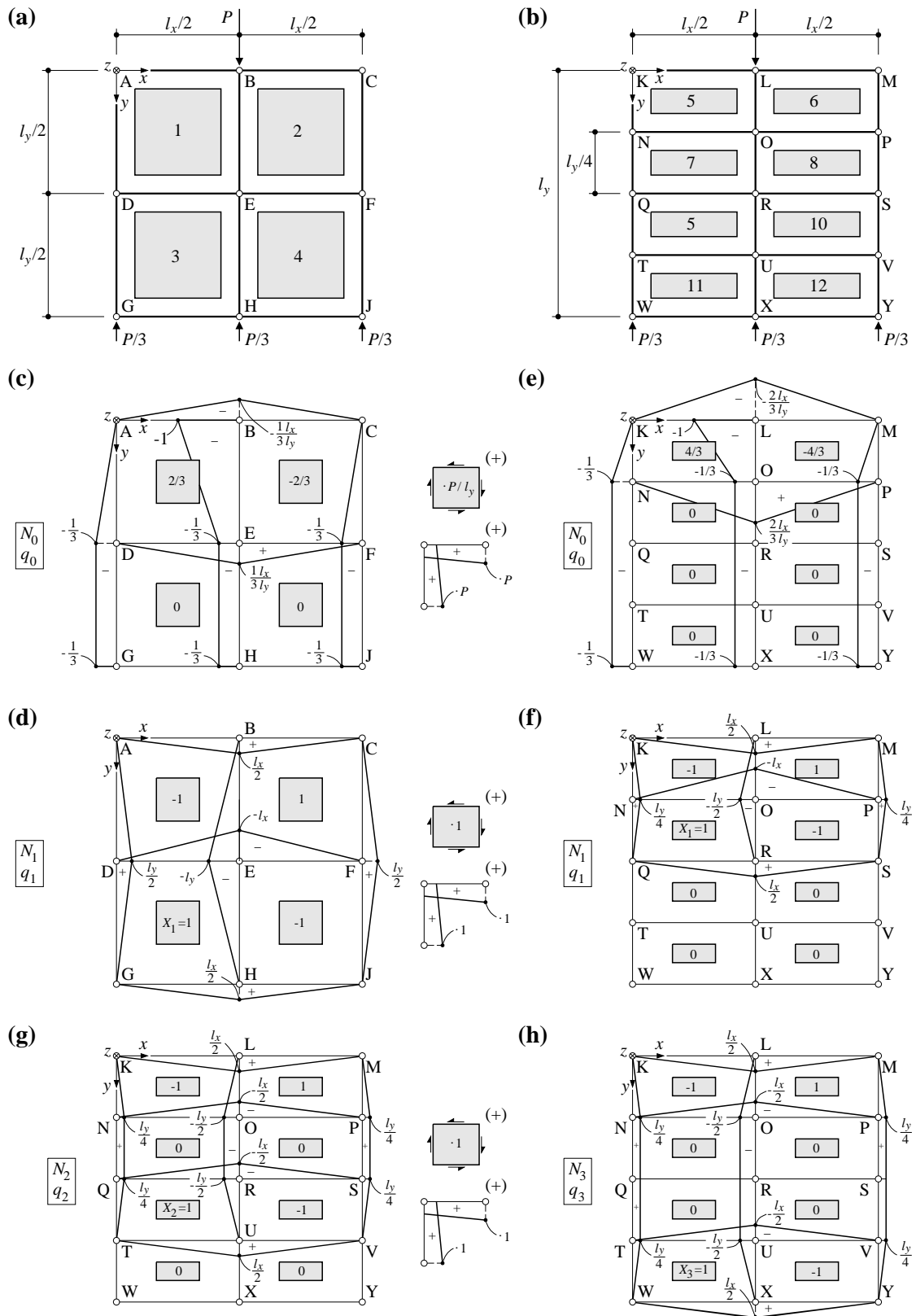


Bild 4.18 Beispiel Krafteinleitung in Wandscheiben: (a) Stringer-Tafelmodell mit vier Tafeln; (b) Stringer-Tafelmodell mit acht Tafeln; (c), (d) Kraftgrössenzustände am Grundsystem mit vier Tafeln; (e) bis (h) Kraftgrössenzustände am Grundsystem mit acht Tafeln.

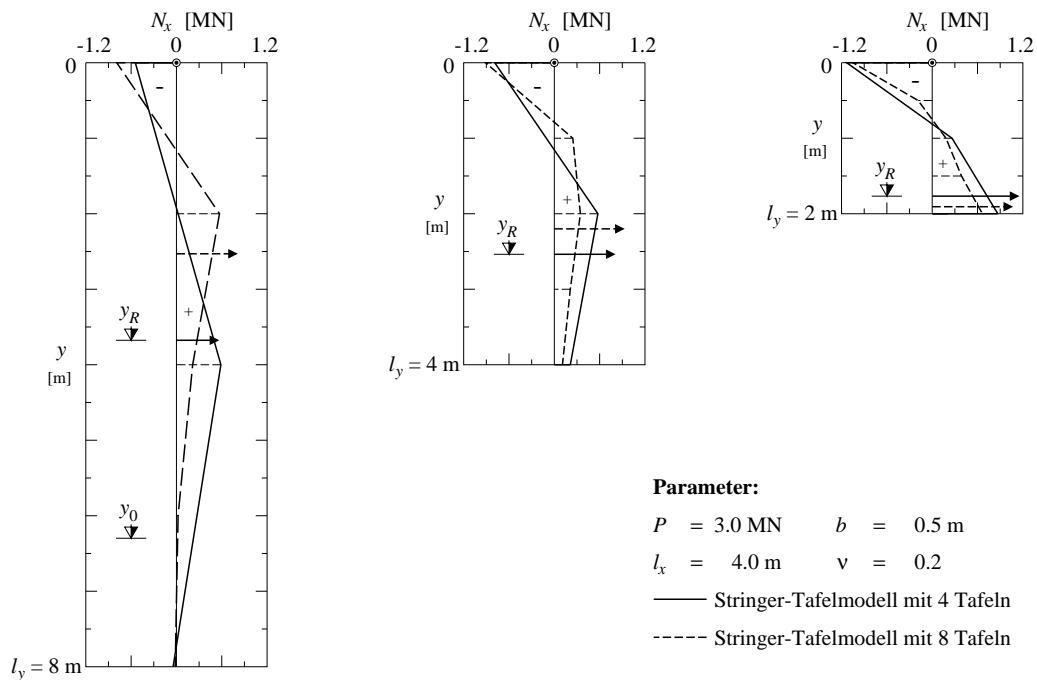


Bild 4.19 Beispiel Krafteinleitung in Wandscheiben: Stringerkräfte in x -Richtung für verschiedene Wandhöhen l_y .

Der Verlauf der Stringerkräfte in x -Richtung in Bild 4.19 bestätigt die Folgerungen in Kapitel 4.1.2 bezüglich der Wahl des Hebelarms der inneren Kräfte bei der Bemessung von wandartigen Trägern.

Diskussion

Der Spannungszustand im Inneren der Wandscheiben kann durch Einführen zusätzlicher Tafeln genauer bestimmt werden; damit verbunden ist eine Zunahme des Rechenaufwands. In Kapitel 4.7 wird das Stringer-Tafelmodell auf ein Stabstatikmodell zurückgeführt, womit sich beliebig verfeinerte Berechnungen mit Hilfe von Computerprogrammen durchführen lassen. Der Vergleich zwischen den beiden Stringer-Tafelmodellen in Bild 4.19 zeigt, dass bereits mit dem einfachen Modell, bestehend aus vier Tafeln, das Verhalten der Wandscheibe vernünftig beschrieben werden kann.

Im Gegensatz zur diskreten Modellierung mit Stringern und Tafeln kann der Spannungszustand auch auf Grundlage der Finite-Element-Methode bestimmt werden. Insbesondere in Krafteinleitungszonen resultieren daraus Spannungsspitzen, und lokal ist das Gleichgewicht zum Teil verletzt. Demgegenüber ist mit der diskreten Stringer-Tafelmodellierung in sämtlichen Elementen das Gleichgewicht erfüllt.

Die Behandlung von Krafteinleitungen in Wandscheiben oder Trägerstegen ist insbesondere bei vorgespannten Stahlbetonstrukturen relevant. Ein umfassender Überblick hierzu ist in Rogowsky & Marti (1991) zu finden.

4.5 Tragverhalten der Stringer

4.5.1 Zuggurtmodell

Das Tragverhalten eines Stahlbetonzugglieds lässt sich anschaulich mittels des sogenannten Zuggurtmodells (Tension-Chord-Model) [Sigrist (1995)] beschreiben. Grundlage dazu bildet die in Bild 2.4 dargestellte, abgetrepte, **starr - ideal plastische Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung**. Damit resultieren die Spannungen resp. die Verzerrungen sowohl des Betonstahls als auch des ihn umgebenden Betons im gerissenen Zugglied **allein aus der Formulierung des Gleichgewichts** ohne die Differentialgleichung des verschieblichen Verbunds (2.9) integrieren zu müssen. Eine umfassende Darstellung des Zuggurtmodells ist in Marti et al. (1998) zu finden.

Nachfolgend werden die relevanten Beziehungen zur Beschreibung eines Stringers unter Zugbeanspruchung beschrieben. Dabei wird der initiale Eigenspannungszustand des Zugglieds nach einem allfälligen Schwinden (durch die eingelegte Bewehrung behindert) mit dem Schwindmass ε_{cs} gemäss Kapitel 2.2.4 mitberücksichtigt. Fehsenfeld (2005) hat aufgrund experimenteller Beobachtung resp. dem Vergleich der Versuchsergebnisse mit der Nachrechnung auf Basis des Zuggurtmodells den Einfluss des Schwindens auf die mittlere Stahldehnung beschrieben. Der Einfluss des Schwindens auf die Rissbreiten resp. auf die Verformungen des gesamten Stahlbetonzugglieds wurde in Heinzmann (2005) aufgezeigt. Letztgenannte Arbeit beschreibt darüber hinaus den Einfluss des Schwindens auf die Verformungen eines Biegeträgers. Dabei zeigt sich, dass aufgrund des Schwindens im Allgemeinen initiale Krümmungen entstehen, die eine Verschiebung der Momenten-Krümmungsbeziehung hin zu einem weichen Verhalten des Biegeträgers bewirken. Der Effekt der Zugversteifung kann, wie nachfolgend am Beispiel eines Zugglieds gezeigt wird, durch den Einfluss des Schwindens aufgehoben werden. Zudem bewirkt der initiale Eigenspannungszustand eine Verringerung des Rissmoments resp. der Risszugkraft. Umfassend beschrieb Burns (2012) das Verformungsverhalten von Stahlbetonstrukturen im gerissen - elastischen Zustand unter Einbezug der Langzeiteinflüsse.

Ungerissenes Verhalten

Für geringe Zugbeanspruchungen verhält sich das Stahlbetonzugglied in Bild 4.20 annähernd linear elastisch, bis die Spannung im Beton die Zugfestigkeit f_{ct} erreicht. Zwischen dem Betonstahl und dem Beton herrscht ein starrer Verbund. Die Stahlspannung beim Reißen des Betons und die zugehörige Verzerrung des Verbundquerschnitts ergeben sich zu

$$\sigma_{sr0} = (f_{ct} - \sigma_{ci}) \frac{1 + \rho(n-1)}{\rho}, \quad \varepsilon_{sr0} = \frac{f_{ct}}{E_c} - \varepsilon_{ci} = \frac{\sigma_{sr0} \rho n}{E_s [1 + \rho(n-1)]} \quad (4.58)$$

wobei dessen Steifigkeit in Bild 4.20(a) angegeben ist.

Gerissenes Verhalten

Das gerissene Tragverhalten des Stahlbetonzugglieds ist in Bild 4.20(b) anhand der Dehnungsverteilung über ein Risselement dargestellt. Mit der abgetrepten, starr - ideal plastischen Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung (2.10) und (2.11) und unter der Voraussetzung eines linear elastischen Verhaltens des Betons sowie der bilinearen Werkstoffbeziehung für den Betonstahl (Bild 2.1c)) sind die Steigungen der Dehnungsverläufe ε_s im Betonstahl resp. ε_c im Beton eindeutig bestimmt. Der theoretische Rissabstand s_{rm} beim Erreichen der Zugfestigkeit des Betons stellt sich dabei zwischen folgenden Schranken ein.

$$s_{rm} = \lambda \frac{\varnothing(1-\rho)}{4 \cdot \rho} \quad \text{mit} \quad \lambda = \begin{cases} 1.0 & \text{maximaler Rissabstand} \\ 0.5 & \text{minimaler Rissabstand} \end{cases} \quad (4.59)$$

Die mittleren Dehnungen im Betonstahl über ein Risselement, welche den mittleren Dehnungen des gesamten Zugglieds ε_{sm} (Bild 4.20(b)) entsprechen, betragen in Abhängigkeit der Beanspruchung $\sigma_{sr} = N/A_s$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sm} &= \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\tau_{b0}s_{rm}}{E_s\varnothing} - \varepsilon_{si} \quad \text{für} \quad \sigma_{sr0} < \sigma_{sr} \leq f_{sy} \\ \varepsilon_{sm} &= \varepsilon_{sy} - \frac{\tau_{b0}s_{rm}}{E_s\varnothing} + \frac{\varnothing(\sigma_{sr} - f_{sy})^2}{4 \cdot \tau_{b1}s_{rm}E_{sh}} \left(1 - \frac{\tau_{b0}E_{sh}}{\tau_{b1}E_s}\right) + \frac{\sigma_{sr} - f_{sy}}{E_s} \left(\frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}}\right) - \varepsilon_{si} \\ &\quad \text{für} \quad f_{sy} < \sigma_{sr} \leq f_{sy} + \frac{2 \cdot \tau_{b1}s_{rm}}{\varnothing} \\ \varepsilon_{sm} &= \varepsilon_{sy} - \frac{\tau_{b1}s_{rm}}{E_{sh}\varnothing} + \frac{\sigma_{sr} - f_{sy}}{E_{sh}} - \varepsilon_{si} \quad \text{für} \quad f_{sy} + \frac{2 \cdot \tau_{b1}s_{rm}}{\varnothing} < \sigma_{sr} \leq f_{st} \end{aligned} \quad (4.60)$$

In gleicher Weise können die mittleren Betondehnungen ε_{cm} bis zum Erreichen der Zugfestigkeit des Betonstahls bestimmt werden mit $n_h = E_{sh}/E_c$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cm} &= \frac{\tau_{b0}n_s s_{rm}\rho}{E_s\varnothing(1-\rho)} - \varepsilon_{ci} = \lambda \frac{f_{ct}n}{2 \cdot E_s} - \varepsilon_{ci} \quad \text{für} \quad \sigma_{sr0} < \sigma_{sr} \leq f_{sy} \\ \varepsilon_{cm} &= \frac{(\sigma_{sr} - f_{sy})n_h\rho}{E_{sh}(1-\rho)} \left[1 - \frac{\varnothing(\sigma_{sr} - f_{sy})}{4 \cdot \tau_{b1}s_{rm}}\right] + \frac{4 \cdot \tau_{b0}n_s s_{rm}\rho}{E_s\varnothing(1-\rho)} \left[\frac{1}{2} - \frac{\varnothing(\sigma_{sr} - f_{sy})}{4 \cdot \tau_{b1}s_{rm}}\right]^2 - \varepsilon_{ci} \\ &\quad \text{für} \quad f_{sy} < \sigma_{sr} \leq f_{sy} + \frac{2 \cdot \tau_{b1}s_{rm}}{\varnothing} \\ \varepsilon_{cm} &= \frac{\tau_{b1}s_{rm}\rho n_h}{E_{sh}\varnothing(1-\rho)} - \varepsilon_{ci} \quad \text{für} \quad f_{sy} + \frac{2 \cdot \tau_{b1}s_{rm}}{\varnothing} < \sigma_{sr} \leq f_{st} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Dabei bezeichnen ε_{si} resp. ε_{ci} die in Kapitel 2.2.4 beschriebenen initialen Dehnungen im Betonstahl resp. im Beton nach einem allfälligen Schwinden.

Schliesslich sind die Rissbreiten aus der Differenz der mittleren Dehnungen

$$w_r(\varepsilon_{cs}) = \int_0^{s_{rm}} (\varepsilon_s - \varepsilon_c) dx = s_{rm} [\varepsilon_{sm}(\varepsilon_{si}) - \varepsilon_{cm}(\varepsilon_{ci})] \quad (4.62)$$

direkt dem Bild 4.20(a) zu entnehmen. Aus der Differenz zwischen den mittleren Dehnungen des Betonstahls (4.60) und den mittleren Betondehnungen (4.61) resultiert das gesamte Schwindmass ε_{cs} , das bei der Bestimmung der Rissbreiten mitberücksichtigt werden kann [Heinzmann (2005)].

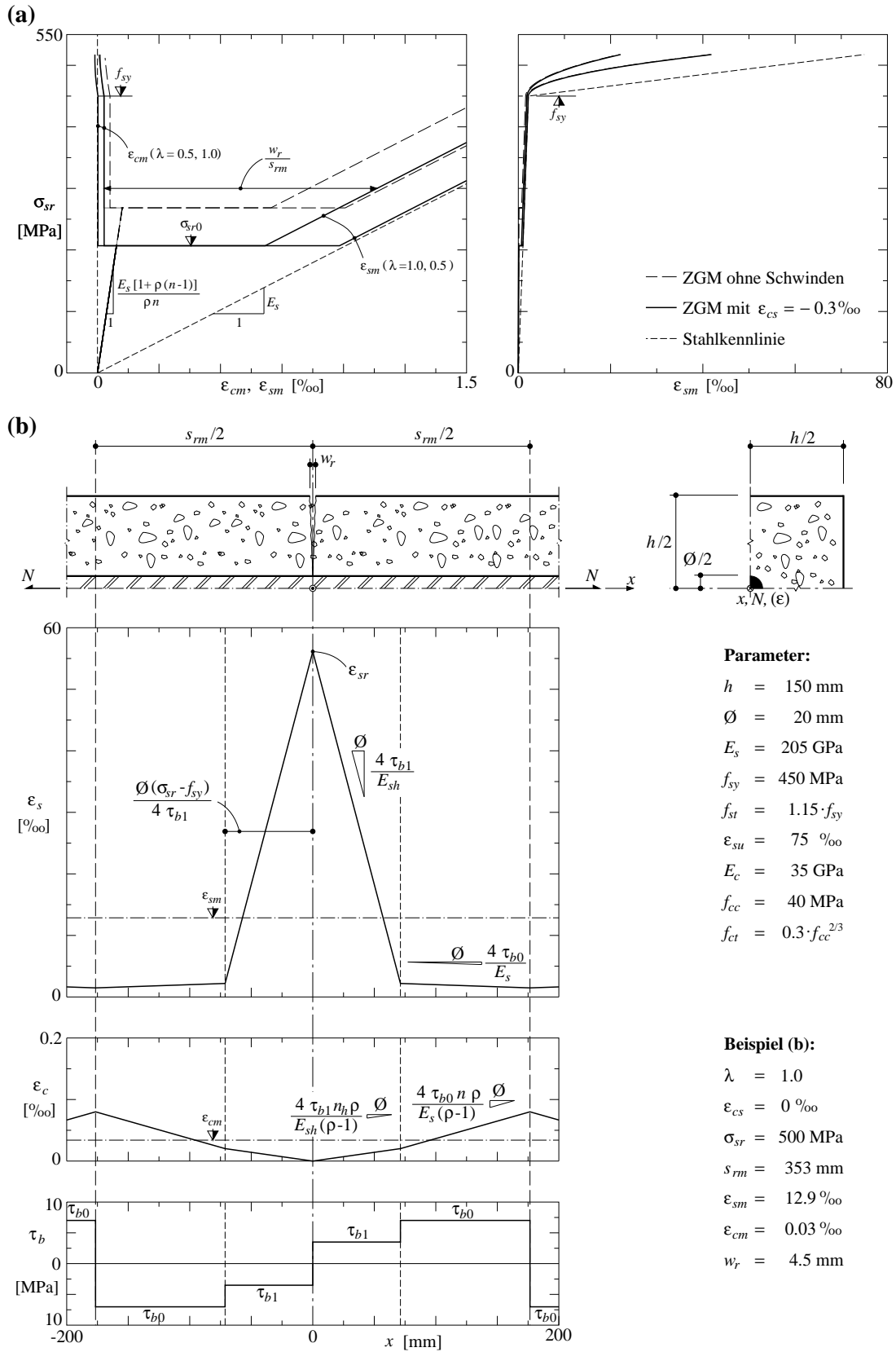


Bild 4.20 Zuggurtmodell (ZGM): (a) Last-Verformungsbeziehung im Bereich der Rissbildung sowie der plastischen Verformungen; (b) Beispiel der Verzerrungen über ein Risselement im plastischen Zustand.

Die Darstellung in Bild 4.20(b) zeigt eindrucksvoll die Lokalisierung der Stahldehnungen in den rissnahen Bereichen, welche sich, auf Grundlage der Zuggurtmodellvorstellung, bei der Verwendung von nicht ausreichend duktilem Betonstahl einstellen kann. Die gewählten Werkstoffparameter entsprechen den Vorgaben eines duktilen Betonstahls B450C gemäss SI-A 262 (2003). Für den maximalen Rissabstand mit $\lambda = 1.0$ reicht dessen Duktilität theoretisch nicht aus, um ein vollständiges Fließen des Betonstahls über die gesamte Risselementlänge zu gewährleisten; hingegen wird für den minimalen Rissabstand mit $\lambda = 0.5$ der erstrebenswerte Zustand des Fließens des Betonstahls über die gesamte Risselementlänge erreicht.

4.5.2 Vergleich mit Zugversuchen an der ETH Zürich

Die Versuchseinrichtung, sämtliche Versuchskörper sowie die Resultate sind in Alvarez & Marti (1996) dargestellt. Die Zugversuche wurden an Stahlbetonscheiben durchgeführt, deren Querschnitte in Bild 4.21(a) dargestellt sind. In beiden Versuchskörpern Z1 und Z9 wurden identische Betonstähle verwendet. In den Versuchen wurde der Bewehrungsgehalt variiert; im Vergleich zum Versuchskörper Z1 enthielt der Versuchskörper Z9 die doppelte Längsbewehrung. In geringem Masse streute auch die Betondruckfestigkeit der beiden Versuchskörper. Beim Versuchskörper Z9 versagte die Verankerung (Anschlussmuffe) der Bewehrungsstäbe bei einer nominellen Stabspannung von ca. 470 MPa.

Für die Nachrechnung wurden die in Alvarez & Marti (1996) angegebenen Werkstoffparameter verwendet, Bild 4.21. Der Elastizitätsmodul des Betonstahls von 218 GPa (Alvarez & Marti (1996)) wurde in der Nachrechnung zu 205 GPa berücksichtigt. Das Tragverhalten des Betonstahls entspricht der in Bild 2.1(c) dargestellten linear elastischen - linear verfestigend plastischen Idealisierung. Die Erweiterung des Zuggurtmodells (Kapitel 4.5.1) basiert auf der Annahme eines Schwindmasses von $\varepsilon_{cs} = -0.30\%$.

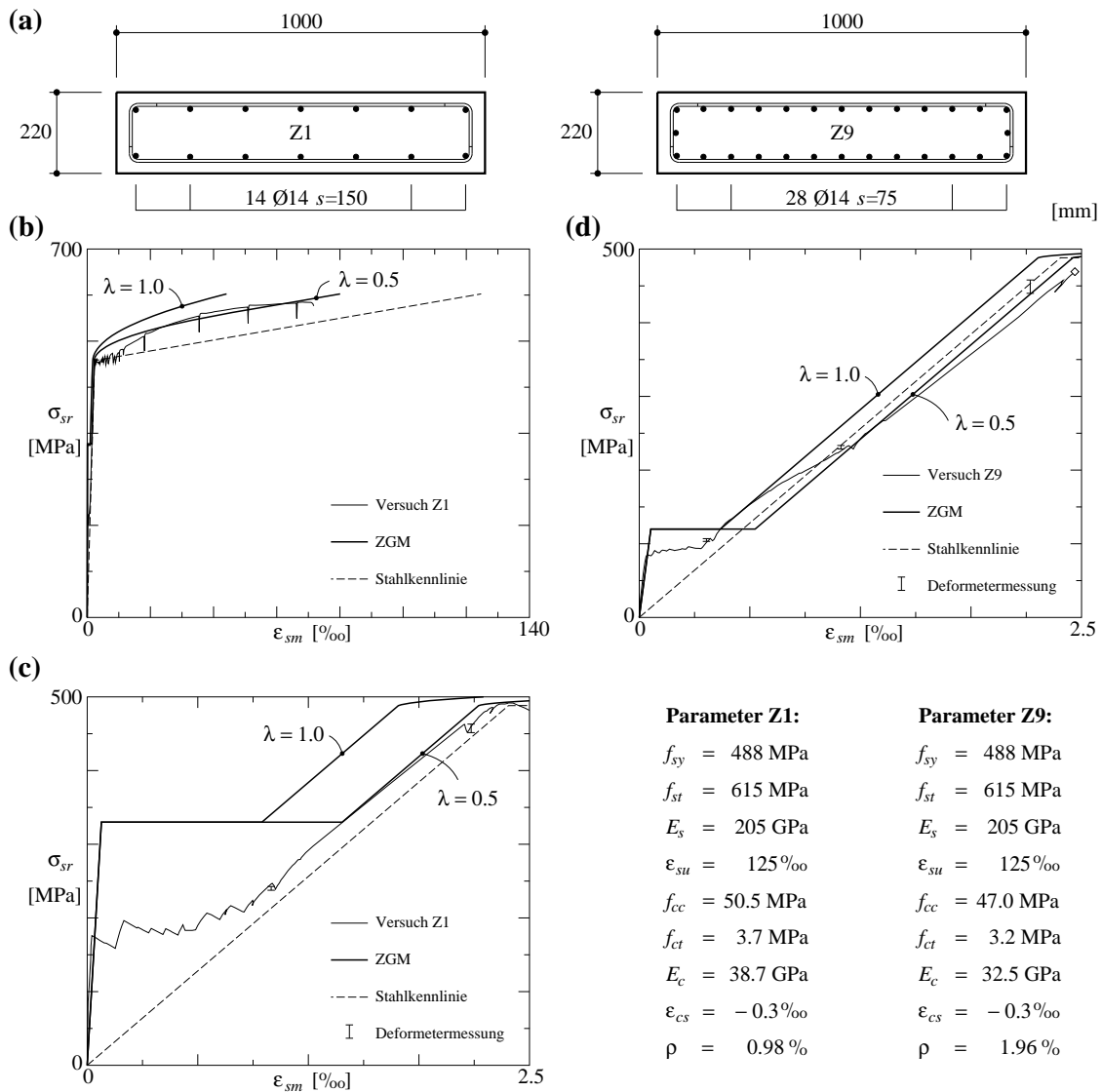


Bild 4.21 Stahlbeton-Zugversuch Z1, Z9 [Alvarez & Marti (1996)]: (a) Querschnitte der Zugglieder; (b) Z1, Vergleich bis zum Bruch; (c) Z1, Vergleich bei Rissbildung; (d) Z9, Vergleich bei Rissbildung.

Versuchskörper Z1

Der theoretische Rissabstand gemäss (4.59) beträgt 354 mm resp. 177 mm und schliesst somit den beobachteten, dem Bügelabstand entsprechenden Rissabstand von 200 mm ein. Bild 4.21(b) zeigt die Nachrechnung resp. das Tragverhalten des Stahlbetonzugglieds bis zum Versagen durch Zerreißen der Bewehrungsstäbe mit der Spannung σ_{sr} im Betonstahl und den mittleren Verzerrungen ϵ_{sm} (Dehnungen) über das Zugglied. Trotz der Vereinfachung mit der bilinearen Werkstoffcharakteristik des Betonstahls ist die Übereinstimmung zwischen der Nachrechnung auf Grundlage des Zuggurtmodells und den Versuchsergebnissen sehr gut, insbesondere auch hinsichtlich der Bruchdehnung. Mit $\lambda = 0.5$ wird ein vollplastischer Zustand des Betonstahls über die gesamte Risselementlänge erreicht (4.61)₃, während mit $\lambda = 1.0$ das Zugglied auf Grundlage des Zuggurtmodells (4.61)₂ durch Zerreißen des Betonstahls versagt, mit teilweisem Fließen des Betonstahls über die Risselementlänge. In Bild 4.21(c) ist das Tragverhalten im Bereich der Rissbildung bis zum Erreichen der Fließspannung f_{sy} des Betonstahls dargestellt. Trotz der Berücksichtigung des Schwindens des Versuchskörpers bei der Erweiterung des Zug-

gurtmodells wurde die Risslast überschätzt. Eventuell war die effektive Zugfestigkeit des Betons im Versuchskörper geringer als diejenige der Werkstoffproben in Alvarez & Marti (1996). Ein möglicher Grund könnte die unterschiedliche Festigkeit des Betons über die Scheibendicke der liegend betonierten Stahlbetonscheiben gewesen sein.

Versuchskörper Z9

Der theoretische Rissabstand für den Versuchskörper Z9 gemäss (4.59) beträgt 175 mm resp. 88 mm und unterschätzt somit den beobachteten, dem Bügelabstand entsprechenden, Rissabstand von 200 mm. Bild 4.21(d) zeigt die Nachrechnung resp. das Tragverhalten des Versuchskörpers im Bereich der Rissbildung bis zum Erreichen der Fließspannung f_{sy} des Betonstahls. Nach dem Erreichen des abgeschlossenen Rissbilds werden die Verformungen mit dem Zuggurtmodell im Vergleich zu den Versuchsergebnissen sehr gut beschrieben. Die Risslast wird dabei leicht überschätzt.

Diskussion

Insgesamt beschreibt das Zuggurtmodell das Tragverhalten eines Stahlbetonzugglieds von der Rissbildung bis hin zu den plastischen Verformungen in guter Näherung. Ähnliche Vergleiche auf Grundlage des Zuggurtmodells sind in Marti et al. (1998), Kenel (2002), Heinzmann (2005), Fehsenfeld (2008) und Burns (2012) zu finden. Aus der Modellvorstellung des Zuggurtmodells resultieren im Vergleich zu anderen Modellvorstellungen nicht zwingend genauere Beschreibungen des Tragverhaltens. Es handelt sich um ein einfaches, mechanisch begründetes, allgemein anwendbares und meist ausreichend genaues Modell, welches die wichtigsten Parameter berücksichtigt.

4.5.3 Druckgurtmodell

Das Tragverhalten von bewehrten Stahlbetonstringern unter einer Druckbeanspruchung lässt sich vereinfacht in zwei Phasen unterteilen. Bis zum Erreichen der einachsigen Druckfestigkeit verhält sich das Stahlbetondruckglied als Verbundträger. Die einachsige Druckfestigkeit f_c kann mit der Beziehung (2.1) in Abhängigkeit der Zylinderdruckfestigkeit f_{cc} abgeschätzt werden. Dank konstruktiver Massnahmen, wie beispielsweise einer Umschnürungsbewehrung, kann anschliessend die Beanspruchung weiter gesteigert werden, unter markanter Zunahme der Stauungen und somit des Verformungsvermögens, unter der Voraussetzung, dass der Druckstringer nicht ausknickt.

Aufbauend auf den Überlegungen in Kapitel 4.5.1 zum initialen Spannungszustand nach dem Erreichen einer bestimmten Verkürzung infolge Schwindens wird dieser Einfluss auch bei der nachfolgenden Beschreibung des Tragverhaltens unter einer Druckbeanspruchung berücksichtigt.

Tragverhalten bis zum Erreichen der einachsigen Druckfestigkeit

Ein längs bewehrter Stahlbetonstringer verhält sich unter einer zentrischen Normalkraft N bis zum Erreichen der einachsigen Druckfestigkeit f_c wie ein Verbundquerschnitt [Marti et al. (1999)]. Das Tragverhalten kann unter der Voraussetzung des Ebenbleibens des Querschnitts, den Werkstoffbeziehungen sowie mit Formulieren des Gleichgewichts analytisch erfasst werden. Wird die Druckbeanspruchung nach einem allfällig erfolgten Schwinden aufgebracht, kann der initiale Spannungs- resp. Verzerrungszustand im Beton mit σ_{ci} resp. ϵ_{ci} (Zugspannung) sowie im Betonstahl mit σ_{si} resp. ϵ_{si} (Druckspannung) gemäss Kapitel 2 berücksich-

tigt werden. Rechnerisch wird, gegenüber der Vernachlässigung des Schwindens, bei einer geringeren Druckbeanspruchung die Fließsspannung des Betonstahls, und bei einer höheren Druckbeanspruchung die Druckfestigkeit des Betons erreicht; entsprechendes gilt für die Verzerrungen (Stauchungen). Mit der bilinear idealisierten Werkstoffbeziehung für den Betonstahl gemäss Bild 2.1 und der parabolischen Werkstoffbeziehung für den Beton gemäss Bild 2.2 ergeben sich für eine auf den Stringer aufgebrachte Druckbeanspruchung N in Abhängigkeit von dessen Stauchung ε die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 N &= A_s \left[\varepsilon E_s + \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right) \frac{E_c \varepsilon - \sigma_{c \max} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ci}} \right)^2}{1 + \frac{E_c \varepsilon}{\sigma_{c \max}} + 2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ci}}} \right] \\
 &\quad \text{für } \left[-(\varepsilon_{sy} + \varepsilon_{si}) \leq \varepsilon \leq 0 \right] \\
 N &= A_s \left[-(f_{sy} + \sigma_{si}) + \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right) \frac{E_c \varepsilon - \sigma_{c \max} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ci}} \right)^2}{1 + \frac{E_c \varepsilon}{\sigma_{c \max}} + 2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ci}}} \right] \\
 &\quad \text{für } \left[\varepsilon < -(\varepsilon_{sy} + \varepsilon_{si}) \right]
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Die maximale Normalkraft N_{\max} , unter der Voraussetzung, dass die Bewehrung elastisch bleibt resp. fließt, ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 N_{\max} &= A_s \left[(\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ci}) E_s - \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right) (f_c + \sigma_{ci}) \right] \\
 &\quad \text{für } \left[(\varepsilon_{sy} + \varepsilon_{si}) \geq (\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ci}) \right] \\
 N_{\max} &= A_s \left[-f_{sy} - f_c \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right) \right] \\
 &\quad \text{für } \left[(\varepsilon_{sy} + \varepsilon_{si}) < (\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ci}) \right]
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

(4.64)₂ entspricht der Traglast mit f_{sy} und f_c . Übersteigt die Zylinderdruckfestigkeit f_{cc} den Wert $[f_{sy} / (0.9 \cdot E_s)]^4$ mit f_{sy} in MPa und E_s in GPa, fließt die Bewehrung beim Erreichen der theoretischen Bruchstauchung ε_{cu} gemäss (2.4) unter Vernachlässigung des Schwindens.

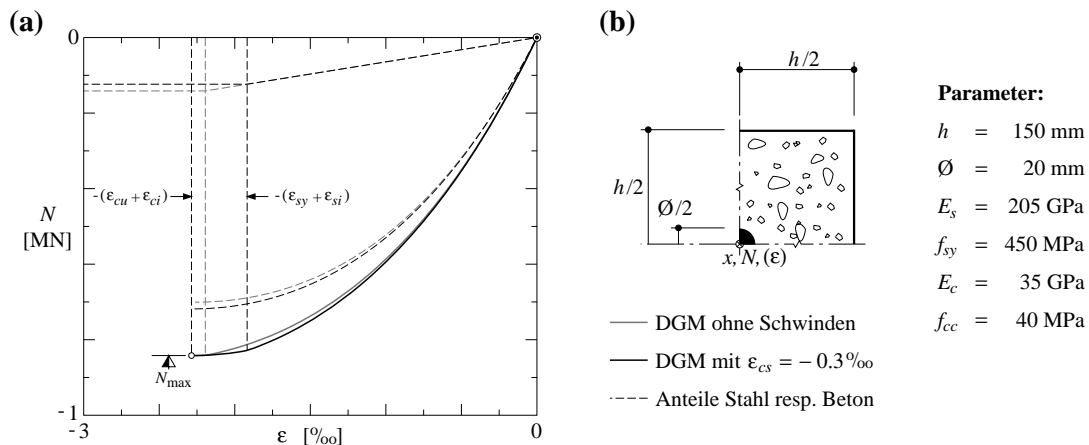


Bild 4.22 Druckgurtmodell (DGM): (a) Last-Verformungsbeziehung bis zur Erreichung der einachsigen Druckfestigkeit des Betons; (b) Querschnitt des Druckstringers..

Nachfolgend werden die vorangegangenen Beziehungen zur Beschreibung eines Stahlbetondruckstringers mit Versuchen verglichen, die an der TU Hamburg-Harburg durchgeführt wurden.

Vergleich mit Versuchen an der TU Hamburg-Harburg

Die Versuchseinrichtung, die Versuchskörper sowie die Resultate sind in Möbius (2008) dargestellt. Bild 4.23 zeigt die Stauchung ϵ in Abhängigkeit der Normalkraft N für drei (abgesehen vom Gehalt der Umschnürungsbewehrung) identische Versuche (Bezeichnungen 4.1, 4.2 und 4.3) an kreisrunden Elementen mit einer Länge von 1.0 m (Querschnittstyp 4, Serie II). Für die Nachrechnung wurden die Bruchstauchung ϵ_{cu} mit (2.4), der Elastizitätsmodul E_s der Längsbewehrung mit 205 GPa und ein Schwindmass von $-\epsilon_{cs} = 0,3\text{‰}$ angenommen. Demnach ergeben sich, nach der Schwindverkürzung und vor Aufbringen der Normalkraftbeanspruchung, initiale Spannungen in der Größenordnung von 1.0 MPa im Beton und -55 MPa in der Längsbewehrung.

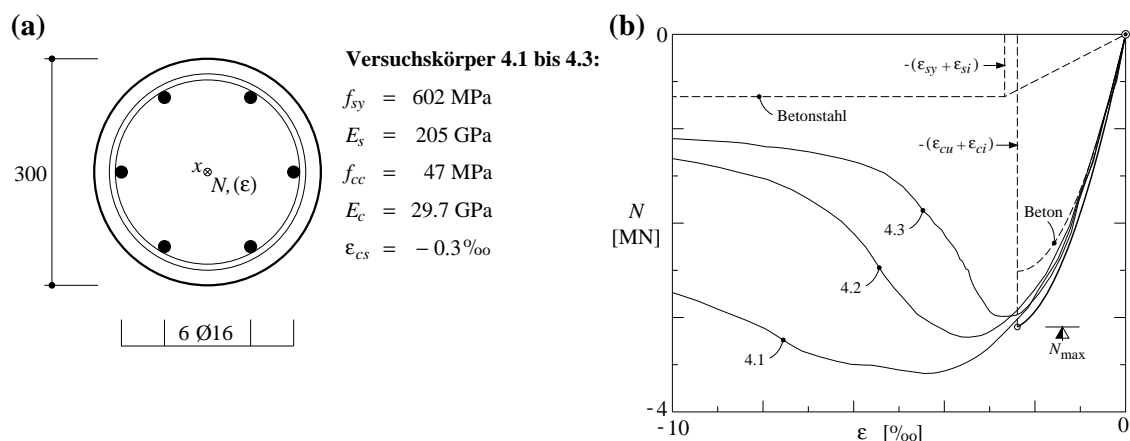


Bild 4.23 Druckversuche [Möbius (2008)]: (a) Querschnitt des Druckstringers; (b) Last-Verformungsverhalten im Vergleich zum Druckgurtmodell bis zur Erreichung der einachsigen Druckfestigkeit des Betons.

Die maximalen Druckkräfte in den Versuchen 4.1, 4.2 und 4.3 ergaben sich zu $-3,60$, $-3,21$ und $-3,01 \text{ MN}$ mit einem Mittelwert von $-3,27 \text{ MN}$. Aus der Beziehung (4.64) resultiert eine maximale Druckkraft N_{\max} von $-3,10 \text{ MN}$ oder 95% dieses Mittelwerts. Dem Bild 4.23 ist zu

entnehmen, dass die Längsbewehrung beim Erreichen der einachsigen Betondruckfestigkeit mit $\sigma_{cmax} = -(f_c + \sigma_{ci})$ und der zugehörigen Bruchstauchung $-(\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ci})$ die Fließspannung nicht erreicht. Die Bruchstauchung von -2.39% beträgt 66% des im Versuch ermittelten Mittelwerts von -3.59% .

Nach dem Erreichen der einachsigen Druckfestigkeit zeigt sich insbesondere im Versuch 4.1 eine markante Zunahme der Stauchung bei praktisch gleichbleibender Höchstlast; dies hauptsächlich aufgrund der Tragwirkung der Umschnürungsbewehrung in Form von Bügeln mit einem Stabdurchmesser von 8 mm und einem Stababstand im Versuchskörper von 50 mm; die entsprechenden Abstände in den Versuchskörpern 4.2 und 4.3 betragen 100 mm resp. 150 mm. Auf die Beschreibung dieses Tragverhaltens soll nachfolgend kurz eingegangen werden.

Tragverhalten nach Erreichen der einachsigen Druckfestigkeit

Wird ein Stahlbetondruckstringer mit einer Umschnürungsbewehrung, beispielsweise in Form von geschlossenen oder sich übergreifenden Bügeln, versehen, kann das Tragverhalten des Stringers markant verbessert werden. Nach dem Erreichen der einachsigen Druckfestigkeit platzt in der Regel der Überdeckungsбетон ab. Die Umschnürung bewirkt einen dreiachsigen Spannungszustand im Kern des Druckstringers, dessen Bruch mit der Fließbedingung nach COULOMB (Kapitel 3.4) in Abhängigkeit der Querdruckspannung beschrieben werden kann. Ein mechanisches Modell zur Beschreibung dieses Tragverhaltens basiert auf der Arbeit von Sigrist (1995). Dieses sogenannte Druckgurtmodell wurde in Sigrist (2009) weiterentwickelt und anschaulich zusammengefasst. Es beschreibt die Duktilitäts- sowie die Festigkeitssteigerung durch eine Umschnürungsbewehrung sowie die bruchmechanisch begründete Entfestigung des Betons mit der damit einhergehenden Verformungslokalisierung für runde sowohl als auch rechteckförmige Stringerquerschnitte. Das Druckgurtmodell schliesst ein Versagen durch Entfestigung des Kernbetons, Knicken der Längsbewehrung oder Zerreißen der Bügelbewehrung mit ein.

Diskussion und Ausblick

Die vorliegende Abhandlung beschränkt sich auf das im vorigen Abschnitt beschriebene Tragverhalten von Druckstringern bis zum Erreichen der einachsigen Druckfestigkeit. Insbesondere bei der Ermittlung des Verformungsvermögens von Stahlbetonstrukturen ist die Berücksichtigung des Tragverhaltens nach dem Erreichen der einachsigen Druckfestigkeit erforderlich; hier sind weiterführende Arbeiten angezeigt.

Der Einfluss des Schwindens bei Druckstringern ist weniger ausgeprägt als bei Zugstringern. Dennoch wäre dieser Einfluss bei der Nachrechnung von Druckversuchen bei nicht fließender Längsbewehrung, zumindest mit einer Parameterstudie, zu quantifizieren.

4.6 Tragverhalten der Tafeln

4.6.1 Gerissene Scheibe

Die in Kapitel 3.6 für Stahlbeton-Scheibenelemente dargestellten Beziehungen (Fließbedingungen) basieren auf der Annahme von starr-ideal plastischem Werkstoffverhalten für den Betonstahl und den Beton sowie starrem Verbund zwischen den beiden Werkstoffen, sie erlauben keine Aussagen zu den Verformungen des Scheibenelements unter einem bestimmten Beanspruchungszustand. Zur Bestimmung der Verformungen sind neben den Gleichgewichtsbeziehungen (3.45), die Verträglichkeit (3.52) und das Werkstoffverhalten (Kapitel 2) zu berücksichtigen.

sichtigen. Nachfolgend wird eine Kombination von verschiedenen, aus der Literatur bekannten, Modellvorstellungen verwendet, um die Verformungen eines Stahlbeton-Scheibenelements analytisch abzuschätzen. Diese Modellvorstellungen werden allgemein als Druckfeldmodelle bezeichnet. Das Tragverhalten der Stahlbetonscheiben im gerissenen Zustand wird durch ein Betondruckfeld parallel zur Rissrichtung und Kräfte der Bewehrungen in der Richtung beschrieben. Im Folgenden wird eine orthogonale Bewehrung in den Koordinatenrichtungen x und y vorausgesetzt.

Ungerissene Scheibe

Wird vereinfacht mit Bruttoquerschnittswerten gerechnet, ist in Kapitel 4.4 das Tragverhalten einer ungerissenen Scheibe ausführlich behandelt. Dabei wird der Einfluss der Bewehrung im ungerissenen Zustand vernachlässigt; die Steifigkeit ergibt sich näherungsweise allein aus dem Werkstoff Beton.

Gerissene Scheibe

Überschreitet die grössere Hauptspannung im Beton den Wert f_{ct} , stellen sich in der Stahlbetonscheibe Risse ein, welche etwa der Richtung senkrecht zur Hauptzugspannungsrichtung der ungerissenen Scheibe entsprechen. Die Mindestbewehrung in der Scheibe verhindert einen spröden Bruch beim Reißen. Die Rissbildung verursacht eine Umlagerung der inneren Kräfte und damit einhergehend eine Änderung der Hauptspannungsrichtung im Beton. Die Bewehrungen verbleiben bei weiterer Steigerung der Beanspruchung bis zu deren Fließbeginn elastisch. Zwischen den Rissen verursachen die gezogenen Bewehrungen über den Verbund Zugspannungen im Beton. Nach dem Erreichen der Fließspannung einer Bewehrung bewirkt deren Steifigkeitsabfall eine erneute Kräfteumlagerung. Es stellen sich neue Risse ein, welche sich, im Vergleich zu den vorangegangenen Rissen, der Richtung der elastisch verbleibenden Bewehrung annähern. Wird die Beanspruchung der Scheibe weiter erhöht, versagt entweder der Beton auf Druck oder die bis anhin elastische Bewehrung erreicht die Fließspannung, womit die Traglast der Stahlbetonscheibe erreicht ist. Darüber hinaus ist auch ein Versagen aufgrund des Erreichens der Zugfestigkeit einer Bewehrung nicht ausgeschlossen.

Mit der Steigerung der Beanspruchung stellen sich im Allgemeinen Risse mit verschiedenen Richtungen ein; entsprechen diese Richtungen nicht der Hauptspannungsrichtung, sind an den Rissufern Schubspannungen zu übertragen. Diese Schubspannungen werden über Rissverzahnung übertragen, welche im Falle von normalfestem Beton üblicherweise ausreicht; Gleitbrüche entlang der Rissufer sind vor allem bei höherfestem Beton experimentell feststellbar.

4.6.2 Klassisches Druckfeldmodell

Das klassische, linear elastische Druckfeldmodell geht zurück auf eine Abhandlung von Kupfer (1964) zur analytischen Bestimmung der Druckfeldrichtung in einem Biegeträger mit Hilfe der Fachwerkmodellvorstellung. Diese Modellvorstellung wurde durch Baumann (1972) an orthogonal bewehrten Stahlbetonscheiben verallgemeinert und experimentell verifiziert. Dabei gelten die nachfolgend aufgeführten Voraussetzungen [Marti (1982)]. Betrachtet werden fiktive, drehbare Risse mit verschwindend kleinem Rissabstand. Der Rissabstand mit $s_r \rightarrow 0$ impliziert den verschwindenden Verbund zwischen dem Betonstahl und dem Beton, womit sich ein gleichmässiger, einachsiger Druckspannungszustand im Beton einstellt. Die Risse sind spannungsfrei und verlaufen parallel zur Hauptdruckspannungsrichtung des Betons. Demzufolge

sind die Hauptrichtungen der Spannungen und Verzerrungen im Beton identisch. In Abhängigkeit der Beanspruchung können sich die Hauptrichtungen im Beton frei einstellen.

Bild 3.14(a) zeigt ein Stahlbetonscheibenelement mit dem in (f) dargestellten MOHRschen Kreis der aufgetragenen Spannungen und den MOHRschen Kreis für die im Inneren des Elements resultierenden Betonspannungen im gerissenen Zustand sowie die Spannungen der Bewehrungen in den Koordinatenrichtungen x und y . Die Gleichgewichtsbeziehungen

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \rho_x \sigma_{sxx} + \sigma_{c3} \cos^2 \theta \\ \sigma_{yy} &= \rho_y \sigma_{syy} + \sigma_{c3} \sin^2 \theta \\ \tau_{xy} &= -\sigma_{c3} \sin \theta \cos \theta = -\frac{\sigma_{c3}}{\cot \theta + \tan \theta}\end{aligned}\quad (4.65)$$

sind aus den MOHRschen Kreisen direkt ablesbar. Den drei aufgetragenen Spannungen σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} stehen die zwei unbekannten Spannungen in den Bewehrungen σ_{sxx} , und σ_{syy} , die unbekannte Betondruckspannung σ_{c3} sowie die unbekannte Druckfeldrichtung θ gegenüber; insgesamt resultiert ein einfach statisch unbestimmtes System.

Unter der Annahme von linear-elastischem Werkstoffverhalten ergeben sich die Verzerrungen aus den Beziehungen

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{sxx}}{E_s}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{syy}}{E_s}, \quad \varepsilon_{c3} = \frac{\sigma_{c3}}{E_c} \quad (4.66)$$

Da die Richtung der Hauptdruckspannung mit der Richtung der Hauptverzerrung übereinstimmt, ist der in Bild 3.14(e) dargestellte MOHRsche Verzerrungskreis eindeutig bestimmt, woraus sich analytisch die Verträglichkeitsbedingung

$$\cot^2 \theta = \frac{\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{c3}} \quad (4.67)$$

ergibt, die bereits Wagner (1929) in seiner Abhandlung zu Blechwandträgern mit dünnen Stegblechen aufstellte. Einsetzen der Werkstoffbeziehung (4.65) und der Gleichgewichtsbeziehung (4.66) in die Verträglichkeitsbeziehung (4.67) liefert die Beziehung

$$\cot^4 \theta_{cr} \cdot \rho_y (1 + n \rho_x) + \cot^3 \theta_{cr} \cdot \rho_y \frac{\sigma_{xx}}{\tau_{xy}} - \cot \theta_{cr} \cdot \rho_x \frac{\sigma_{yy}}{\tau_{xy}} - \rho_x (1 + n \rho_y) = 0 \quad (4.68)$$

$$\text{wobei } 0 < \theta_{cr} < \frac{\pi}{2} \text{ für } \tau_{xy} > 0 \quad \text{und} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_{cr} < 0 \text{ für } \tau_{xy} < 0$$

in Form eines Polynoms vierten Grades für den Kotangens des Winkels θ_{cr} , der Hauptdruckspannungsrichtung resp. Hauptverzerrungsrichtung allgemein nach dem Reißen. Dabei bezeichnet n das Verhältnis zwischen den beiden Elastizitätsmoduln des Betonstahls E_s und des Betons E_c .

Unter Vorgabe der aufgetragenen Spannungen und der Bewehrung im Scheibenelement kann mit der Beziehung (4.68) der Winkel θ_{cr} bestimmt werden und für das gerissen - elastische Tragverhalten der Stahlbetonscheibe resultiert

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{sxx}}{E_s} = \frac{1}{\rho_x E_s} (\sigma_{xx} + \tau_{xy} \cot \theta_{cr}) \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{syy}}{E_s} = \frac{1}{\rho_y E_s} (\sigma_{yy} + \tau_{xy} \tan \theta_{cr}) \\
 \varepsilon_{c3} &= \frac{\sigma_{c3}}{E_c} = -\frac{1}{E_c} \tau_{xy} (\cot \theta_{cr} + \tan \theta_{cr})
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Die Verzerrung in der Hauptrichtung 1 sowie die Schiebung γ_{xy} ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \sigma_{xx} \frac{1}{E_s \rho_x} + \sigma_{yy} \frac{1}{E_s \rho_y} + \tau_{xy} \left[\cot \theta_{cr} \left(\frac{1 + n \rho_x}{E_s \rho_x} \right) + \tan \theta_{cr} \left(\frac{1 + n \rho_y}{E_s \rho_y} \right) \right] \\
 \frac{\gamma_{xy}}{2} &= \sigma_{yy} \frac{\tan \theta_{cr}}{E_s \rho_y} + \tau_{xy} \left[\tan^2 \theta_{cr} \left(\frac{1 + n \rho_y}{E_s \rho_y} \right) + \frac{n}{E_s} \right] \text{ oder} \\
 \frac{\gamma_{xy}}{2} &= \sigma_{xx} \frac{\cot \theta_{cr}}{E_s \rho_x} + \tau_{xy} \left[\cot^2 \theta_{cr} \left(\frac{1 + n \rho_x}{E_s \rho_x} \right) + \frac{n}{E_s} \right]
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Die Beanspruchung kann soweit gesteigert werden, bis die Spannung in einer der beiden Bewehrungen die Fließspannung f_{sy} erreicht.

$$\begin{aligned}
 f_{syy} &= \varepsilon_{syy} E_s = \frac{1}{\rho_y} (\sigma_{yy} + \tau_{xy} \tan \theta_{cr}) \quad (\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{syy}) \quad \text{oder} \\
 f_{syx} &= \varepsilon_{syx} E_s = \frac{1}{\rho_x} (\sigma_{xx} + \tau_{xy} \cot \theta_{cr}) \quad (\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{syx})
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Vorausgesetzt wird dabei, dass sich der Beton weiterhin elastisch verhält.

Wird ein ideal plastisches Werkstoffverhalten des Betonstahls vorausgesetzt (Bild 2.1(b)), kann die Beanspruchung nach dem Erreichen der Fließspannung f_{sy} der einen Bewehrung weiter gesteigert werden, bis auch die zweite Bewehrung die Fließspannung erreicht. Beide Beziehungen in (4.71) sind erfüllt, und die Druckfeldrichtung resp. die Traglast resultieren einzig aus den Gleichgewichtsbeziehungen (4.65) zu

$$\begin{aligned}
 \cot^2 \theta_u &= \frac{\rho_x f_{syx} - \sigma_{xx}}{\rho_y f_{syy} - \sigma_{yy}} \\
 \tau_{xy} &= \sqrt{(\rho_x f_{syx} - \sigma_{xx})(\rho_y f_{syy} - \sigma_{yy})}
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

(4.72) entspricht den Bedingungen des Regimes 1 (3.56). Der Verzerrungszustand beim Erreichen der Traglast ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{c3u} &= -\frac{\rho_x f_{syx} - \sigma_{xx} + \rho_y f_{syy} - \sigma_{yy}}{E_c} \\
 \frac{\gamma_{xyu}}{2} &= (\varepsilon_{syx} - \varepsilon_{c3u}) \cot \theta_u \quad (\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{syx}, \quad \varepsilon_{yy} > \varepsilon_{syy}) \\
 \varepsilon_{1u} &= \varepsilon_{syx} + \frac{\gamma_{xyu}}{2} \cot \theta_u \quad (\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{syx}, \quad \varepsilon_{yy} > \varepsilon_{syy})
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

Falls beim Erreichen der Traglast die y -Bewehrung die Fließspannung f_{syy} erreicht, sind in (4.73)₂ und (4.73)₃ die Indizes xx resp. x mit yy resp. y zu vertauschen. Wird die Traglast durch

einen Druckbruch des Betons definiert, ist das klassische Druckfeldmodell, wie nachfolgend aufgezeigt, zu erweitern. Dasselbe gilt für die Abschätzung der Rissabstände und Rissweiten.

Betondruckfestigkeit bei Querdehnung

Kaufmann (1998) schlägt die bereits in Kapitel 2 angegebene Beziehung

$$f_c = -\varepsilon_{c3} E_c = \frac{f_{cc}^{2/3}}{0.4 + 30 \cdot \varepsilon_1} \leq f_{cc} \quad (f_{cc}, E_c \text{ in MPa}) \quad (4.74)$$

für die Bestimmung der Betondruckfestigkeit in Stahlbetonscheiben in Abhängigkeit der positiven Hauptdehnung ε_1 vor.

Rissabstand

Für eine orthogonale Bewehrung liefert die Beziehung

$$s_r = \frac{1}{\frac{|\sin \theta|}{s_{rmx}} + \frac{|\cos \theta|}{s_{rmy}}} \quad (4.75)$$

einen oberen Grenzwert des Rissabstands der fiktiven Risse. Diese Beziehung wurde von Vecchio & Collins (1986) vorgeschlagen und von Kaufmann & Marti (1998) auf Grundlage des gerissenen Scheibenmodells bestätigt. Die Rissabstände in den Bewehrungsrichtungen können aus dem im Kapitel 4.5.1 aufgeführten Zuggurtmodell in Abhängigkeit des Stabdurchmessers \emptyset und des Gehalts der Bewehrung bestimmt werden zu

$$s_{rmx} = \lambda \frac{\emptyset_x (1 - \rho_x)}{4 \cdot \rho_x}, \quad s_{rmy} = \lambda \frac{\emptyset_y (1 - \rho_y)}{4 \cdot \rho_y} \quad (4.76)$$

mit dem Faktor $\lambda = 0.5$ für den minimalen und 1.0 für den maximalen Rissabstand (4.59).

Mit dem Rissabstand und der Kenntnis der grösseren Hauptdehnung in Richtung der Hauptrichtung 1 kann die Rissbreite unter Vernachlässigung der Verbundwirkung zwischen Beton und Betonstahl bestimmt werden zu

$$w_r(\lambda) = s_r \cdot \varepsilon_1 \quad (4.77)$$

Versagen des Betondruckfelds von Stahlbeton-Scheibenelementen

Nach dem Erreichen der Traglast durch Fließen beider Bewehrungen (4.72) kann die Verformung der Stahlbetonscheibe weiter gesteigert werden, bis das Betondruckfeld gemäss der Beziehung (4.74) durch Zunahme der Hauptdehnung ε_1 bei konstanter Hauptdehnung ε_{c3u} (4.73)₁ versagt. Die Traglast entspricht der Beziehung (4.72)₂ und die Verzerrungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{1}{30} \left(\frac{f_{cc}^{2/3}}{\varepsilon_{c3u} E_c} + 0.4 \right) \quad (f_{cc}, E_c \text{ in MPa}) \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_{c3u} \cot^2 \theta_u}{\cot^2 \theta_u + 1}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\varepsilon_1 \cot^2 \theta_u + \varepsilon_{c3u}}{\cot^2 \theta_u + 1} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} &= (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{c3u}) \cot \theta_u = (\varepsilon_1 - \varepsilon_{yy}) \cot \theta_u \end{aligned} \quad (4.78)$$

wobei der Druckfeldwinkel θ_u gemäss (4.72)₁ zu bestimmen ist.

Versagt der Beton in der Stahlbetonscheibe auf Druck (4.74), nachdem beispielsweise die y -Bewehrung fliesst und die x -Bewehrung elastisch bleibt, resultieren durch Einsetzen von (4.65)₂ in (4.65)₃ unter Berücksichtigung der trigonometrischen Identität $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ die Beziehungen

$$\begin{aligned}\cot^2\theta &= \frac{\sigma_{yy} + f_c - \rho_y f_{syy}}{\rho_y f_{syy} - \sigma_{yy}} \\ \tau_{xy} &= \sqrt{(\sigma_{yy} + f_c - \rho_y f_{syy})(\rho_y f_{syy} - \sigma_{yy})}\end{aligned}\quad (4.79)$$

welche denjenigen des Regimes 2 der Fliessbedingungen für Stahlbeton-Scheibenelemente entsprechen (3.56). Der zugehörige Verzerrungszustand ergibt sich durch Einsetzen von

$$\varepsilon_{c3} = -\frac{\tau_{xy}}{E_c}(\cot\theta + \tan\theta) \quad (4.80)$$

und θ gemäss (4.79)₁ anstelle von ε_{c3u} und θ_u in den Beziehungen (4.78). Werden in (4.79) die Indizes yy resp. y durch xx resp. x ersetzt, resultieren die Beziehungen für das Regime 3 der Fliessbedingungen für Stahlbeton-Scheibenelemente, Kapitel 3.6.

Schliesslich ist ein Versagen des Betons unter der Voraussetzung möglich, dass beide Bewehrungen elastisch bleiben. Dies entspricht dem Regime 4 der Fliessbedingungen für Scheibenelemente und kann mit $d\tau_{xy}/d\theta = 0$ in (4.65)₃ bestimmt werden zu

$$\begin{aligned}\cot^2\theta &= 1 \\ \tau_{xy} &= \frac{f_c}{2}\end{aligned}\quad (4.81)$$

Für den zugehörigen Verzerrungszustand resultiert

$$\begin{aligned}\varepsilon_{c3} &= -\frac{2\tau_{xy}}{E_c}, \quad \varepsilon_1 = -\frac{1}{30}\left(\frac{f_{cc}^{2/3}}{\varepsilon_{c3}E_c} + 0.4\right) \quad (f_{cc}, E_c \text{ in MPa}) \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx} + \tau_{xy}}{E_s\rho_x} = \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy} + \tau_{xy}}{E_s\rho_y} = \frac{\gamma_{xy}}{2}\end{aligned}\quad (4.82)$$

Die Beziehungen (4.65) bis (4.82) beschreiben das Tragverhalten einer Stahlbetonscheibe mit den eingangs erwähnten Voraussetzungen vollständig. In Kapitel 4.6.4 ist ein Vergleich mit Versuchsergebnissen aufgeführt. In der Folge wird das Verhalten eines Stahlbeton-Scheibenelements unter reiner Schubbeanspruchung als Spezialfall diskutiert.

4.6.3 Druckfeldmodell mit reiner Schubbeanspruchung

Die Tafeln in der Stringer-Tafelmodellvorstellung sind häufig ausschliesslich durch reine Schubkräfte beansprucht. Mit

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0 \quad (4.83)$$

ergibt sich für die Hauptdruckrichtung im gerissen - elastischen Zustand aus (4.68) die Beziehung

$$\cot^4\theta_{cr} = \frac{\rho_x(1+n\rho_y)}{\rho_y(1+n\rho_x)} \quad (4.84)$$

in Abhängigkeit der Bewehrungsgehalte und der Steifigkeiten der beiden Werkstoffe und unabhängig von der Beanspruchung der Scheibe. Der Verzerrungszustand im gerissen - elastischen Zustand kann durch Einsetzen von (4.84) und (4.83) in (4.69) sowie (4.70) bestimmt werden.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{sxx}}{E_s} = \frac{\tau_{xy}}{E_s} \left[\frac{1 + n\rho_y}{\rho_x^3 \rho_y (1 + n\rho_x)} \right]^{1/4} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{syy}}{E_s} = \frac{\tau_{xy}}{E_s} \left[\frac{1 + n\rho_x}{\rho_x \rho_y^3 (1 + n\rho_y)} \right]^{1/4} \\ \varepsilon_{c3} &= -\frac{\sigma_{c3}}{E_c} = -\frac{\tau_{xy}}{E_c} \left\{ \frac{\sqrt{\rho_x (1 + n\rho_y)} + \sqrt{\rho_y (1 + n\rho_x)}}{[\rho_x \rho_y (1 + n\rho_x)(1 + n\rho_y)]^{1/4}} \right\}\end{aligned}\quad (4.85)$$

Die Verzerrung in der Hauptrichtung 1 sowie die Schiebung γ_{xy} ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\tau_{xy}}{E_s} \left\{ (1 + n\rho_x) \left[\frac{1 + n\rho_y}{\rho_x^3 \rho_y (1 + n\rho_x)} \right]^{1/4} + (1 + n\rho_y) \left[\frac{1 + n\rho_x}{\rho_x \rho_y^3 (1 + n\rho_y)} \right]^{1/4} \right\} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} &= \frac{\tau_{xy}}{E_s} \left\{ \sqrt{\frac{(1 + n\rho_x)(1 + n\rho_y)}{\rho_x \rho_y}} + n \right\}\end{aligned}\quad (4.86)$$

Die Beanspruchung kann soweit gesteigert werden, bis die Spannung in einer der beiden Bewehrungen die Fließspannung f_{sy} erreicht, d. h.

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= f_{syy} \left[\frac{\rho_x \rho_y^3 (1 + n\rho_y)}{1 + n\rho_x} \right]^{1/4} \quad (\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{syy} = \frac{f_{syy}}{E_s}) \quad \text{oder} \\ \tau_{xy} &= f_{sxx} \left[\frac{\rho_x^3 \rho_y (1 + n\rho_x)}{1 + n\rho_y} \right]^{1/4} \quad (\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{sxx} = \frac{f_{sxx}}{E_s})\end{aligned}\quad (4.87)$$

Vorausgesetzt wird dabei, dass sich der Beton weiterhin elastisch verhält.

Wird ein ideal plastisches Werkstoffverhalten des Betonstahls vorausgesetzt (Bild 2.1(b)), kann die Beanspruchung nach dem Erreichen der Fließspannung f_{sy} der einen Bewehrung weiter gesteigert werden. Mit der bekannten Fließspannung der einen Bewehrung resultiert ein statisch bestimmtes System; die Spannung in der zweiten Bewehrung, die Betondruckspannung sowie die Druckfeldrichtung lassen sich aus den drei Gleichgewichtsbeziehungen (4.65) unter Berücksichtigung von (4.83) bestimmen. Vereinfachend wird dabei eine Hilfsgrösse k eingeführt mit

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\rho_y (1 + n\rho_y)}{\rho_x (1 + n\rho_x)}} \frac{f_{syy}}{f_{sxx}} \leq k = \frac{\varepsilon_{xx} E_s}{f_{sxx}} \leq 1.0 \quad (\varepsilon_{yy} \geq \varepsilon_{syy}) \quad \text{oder} \\ \sqrt{\frac{\rho_x (1 + n\rho_x)}{\rho_y (1 + n\rho_y)}} \frac{f_{sxx}}{f_{syy}} \leq k = \frac{\varepsilon_{yy} E_s}{f_{syy}} \leq 1.0 \quad (\varepsilon_{xx} \geq \varepsilon_{sxx})\end{aligned}\quad (4.88)$$

wobei die unteren Grenzen in (4.88) den Fließbeginn aus (4.87) und (4.85) beschreiben. Für die Druckfeldrichtung entsteht

$$\begin{aligned}\cot^2\theta &= k \cdot \frac{\rho_x}{\rho_y} \frac{f_{syx}}{f_{syy}} \quad (\varepsilon_{yy} \geq \varepsilon_{syy}) \quad \text{oder} \\ \cot^2\theta &= \frac{1}{k} \cdot \frac{\rho_x}{\rho_y} \frac{f_{syx}}{f_{syy}} \quad (\varepsilon_{xx} \geq \varepsilon_{syx})\end{aligned}\quad (4.89)$$

und die aufgebrachte Schubspannung ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \sqrt{\rho_y f_{syy} \cdot k \rho_x f_{syx}} \quad (\varepsilon_{yy} \geq \varepsilon_{syy}) \\ \tau_{xy} &= \sqrt{\rho_x f_{syx} \cdot k \rho_y f_{syy}} \quad (\varepsilon_{xx} \geq \varepsilon_{syx})\end{aligned}\quad (4.90)$$

Unter der Annahme, dass die Bewehrung in y -Richtung fließt während die sich die Bewehrung in x -Richtung sowie der Beton elastisch verhalten, resultieren die Verzerrungen

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= k \frac{f_{syx}}{E_s} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{f_{syy}}{E_s} \left[k^2 \frac{f_{syx}^2}{f_{syy}^2} \frac{\rho_x}{\rho_y} (1 + n\rho_x) - n\rho_y \right] \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} &= \frac{f_{syy}}{E_s} \left[k \frac{f_{syx}}{f_{syy}} + n \left(k \rho_x \frac{f_{syx}}{f_{syy}} + \rho_y \right) \right] \sqrt{k \frac{f_{syx}}{f_{syy}} \frac{\rho_x}{\rho_y}}\end{aligned}\quad (4.91)$$

und die Hauptverzerrungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= k \frac{f_{syx}}{E_s \rho_y} (1 + n\rho_x) \left(\rho_y + \rho_x k \frac{f_{syx}}{f_{syy}} \right) \\ \varepsilon_{c3} &= -\frac{f_{syy}}{E_c} \left(\rho_y + k \rho_x \frac{f_{syx}}{f_{syy}} \right)\end{aligned}\quad (4.92)$$

Versagt der Beton in der Stahlbetonscheibe auf Druck, während dem die y -Bewehrung fließt und sich die x -Bewehrung elastisch verhält, kann eine obere Grenze für k in (4.88)₁ durch Einsetzen der Beziehungen (4.92) in (4.74) bestimmt werden

$$\begin{aligned}k &= \left[-\frac{C_9}{2} + \sqrt{\left(\frac{C_8}{3}\right)^3 + \left(\frac{C_9}{2}\right)^2} \right]^{1/3} + \left[-\frac{C_9}{2} - \sqrt{\left(\frac{C_8}{3}\right)^3 + \left(\frac{C_9}{2}\right)^2} \right]^{1/3} - \frac{2 \cdot \rho_y}{3 \cdot \rho_x} \leq \frac{f_{cc} - \rho_y f_{syy}}{\rho_x f_{syx}}, \quad 1.0 \quad \text{mit} \\ C_8 &= \frac{0.4 \cdot \rho_x E_s \rho_y f_{syy} + 30 \cdot (n\rho_x + 1) \rho_y^2 f_{syy}^2}{30 \cdot (n\rho_x + 1) \rho_x^2 f_{syx}^2} - \frac{4 \cdot \rho_y^2 f_{syy}^2}{3 \cdot \rho_x^2 f_{syx}^2} \\ C_9 &= \frac{16 \cdot \rho_y^3 f_{syy}^3}{27 \cdot \rho_x^3 f_{syx}^3} - \frac{0.4 \cdot \rho_x f_{syx} E_s \rho_y^2 f_{syy}^2 + 30 \cdot f_{syx} (n\rho_x + 1) \rho_y^3 f_{syy}^3}{45 \cdot (n\rho_x + 1) \rho_x^3 f_{syx}^4} + \frac{0.4 \cdot E_s \rho_y^2 f_{syy}^2 - E_s \rho_y f_{syy} f_{cc}^{2/3}}{30 \cdot (n\rho_x + 1) \rho_x^2 f_{syx}^3}\end{aligned}\quad (4.93)$$

mit f_{syx} , f_{syy} , f_{cc} und E_s in MPa. Falls die x -Bewehrung fließt während sich die Bewehrung in y -Richtung sowie der Beton elastisch verhalten, sind in den Beziehungen (4.91) bis (4.93) die Indizes yy resp. y durch xx resp. x zu ersetzen.

Die Beanspruchung kann unter der Voraussetzung, dass sich der Beton elastisch verhält, gesteigert werden bis beide Bewehrungen die Fließspannung erreichen; mit $k = 1.0$ in (4.88) resultiert für die Druckfeldrichtung resp. die Traglast

$$\cot^2 \theta_u = \frac{\rho_x f_{syx}}{\rho_y f_{syy}} \quad (4.94)$$

$$\tau_{xy} = \sqrt{\rho_x f_{syx} \cdot \rho_y f_{syy}}$$

Der zugehörige Verzerrungszustand ergibt sich zu

$$\varepsilon_{c3u} = -\frac{1}{E_c} (\rho_x f_{syx} + \rho_y f_{syy})$$

$$\varepsilon_{lu} = \frac{f_{sy}}{E_s \rho_y} (1 + n \rho_x) (\rho_x + \rho_y) \quad (4.95)$$

$$\frac{\gamma_{xyu}}{2} = \frac{f_{sy}}{E_s} \left[1 + n (\rho_x + \rho_y) \right] \sqrt{\frac{\rho_x}{\rho_y}}$$

Nach dem Erreichen der Traglast durch Fließen der beiden Bewehrungen (4.94) kann die Verformung der Stahlbetonscheibe weiter gesteigert werden, bis der Beton mit der Beziehung (4.74) durch Zunahme der Hauptdehnung ε_1 bei konstanter Hauptdehnung ε_{c3u} (4.95)₁ versagt. Die Traglast entspricht der Beziehung (4.94)₂, und die Verzerrungen ergeben sich mit den Beziehungen (4.78). Durch Einsetzen von (4.95)_{1,2} in (4.74) kann die minimal erforderliche Zylinderdruckfestigkeit f_{cc} zur Sicherstellung eines duktilen Verhaltens (Fließen beider Bewehrungen) des Scheibenelements für eine reine Schubbeanspruchung bestimmt werden zu

$$f_{cc} \geq \left[0.4 \cdot f_{sy} (\rho_x + \rho_y) + 30 \cdot f_{sy}^2 (\rho_x + \rho_y)^2 \left(\frac{1}{\rho_y E_s} + \frac{\rho_x}{\rho_y E_c} \right) \right]^{3/2} \quad (4.96)$$

in Abhängigkeit der Bewehrungsgehalte, der Fließspannung des Betonstahls f_{sy} in MPa sowie der beiden Elastizitätsmoduln E_c und E_s in MPa, Bild 4.24(b).

Für die Schubsteifigkeiten gilt allgemein $G = d\tau_{xy} / d\gamma_{xy}$. Im ungerissenen Zustand sowie im gerissen-elastischen Zustand des Stahlbeton-Scheibenelements unter reiner Schubbeanspruchung resultiert mit den Beziehungen (4.84) bis (4.95)

$$G = \frac{E_c}{2} \cdot \frac{1}{1 + \nu}, \quad (f_{ct} \geq \sigma_1)$$

$$G = \frac{E_c}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{(1 + n\rho_x)(1 + n\rho_y)}{n^2 \rho_x \rho_y}}}, \quad (f_{syx} \geq \sigma_{sxx}, \quad f_{syy} \geq \sigma_{syy}) \quad (4.97)$$

$$G = \frac{E_c}{2} \cdot \frac{1}{1 + k \frac{f_{syx}}{f_{syy}} \left(\frac{1 + n\rho_x}{n\rho_y} \right)}, \quad (f_{syx} \geq \sigma_{sxx}, \quad f_{syy} = \sigma_{syy})$$

sowie $G = 0$ falls beide Bewehrungen fließen. Die Tangentensteifigkeit zwischen der Traglast mit (4.94) und dem Erreichen der Fließspannung in der y -Bewehrung bestimmt sich zu

$$G = \frac{E_c}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho_y (1 + n\rho_y)}{\rho_x (1 + n\rho_x)} \right)^{1/4}}{1 + \frac{1}{n\rho_y} + \frac{\rho_x}{\rho_y} - \left(\frac{(1 + n\rho_x)(1 + n\rho_y)^3}{n^4 \rho_x^3 \rho_y} \right)^{1/4} - \left(\frac{\rho_y (1 + n\rho_y)}{\rho_x (1 + n\rho_x)} \right)^{1/4}}, \quad (f_{sy} \geq \sigma_{sxx}, \quad f_{sy} = \sigma_{syy}) \quad (4.98)$$

Falls die x -Bewehrung fließt und die y -Bewehrung elastisch bleibt, sind in (4.98)₃ die Indizes innerhalb der Terme mit rationalem Exponenten zu vertauschen. Mit $\rho_x = \rho_y = \rho$ vereinfachen sich die Beziehungen (4.97) zu

$$G = \frac{E_c}{2} \cdot \frac{1}{1+\nu} \quad , \quad (f_{ct} \geq \sigma_1)$$

$$G = \frac{E_c}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1+n\rho}{n\rho}} \quad , \quad (f_{sy} \geq \sigma_s, \quad \rho_x = \rho_y = \rho) \quad (4.99)$$

und $G = 0$ falls die Bewehrungen fließen.

Beispiel zum Tragverhalten unter reiner Schubbeanspruchung

Die in Kapitel 4.6.3 hergeleiteten Beziehungen sind für die in Bild 4.24(a) angegebenen Parameter in Bild 4.24(c) illustriert, [Jäger (2009)].

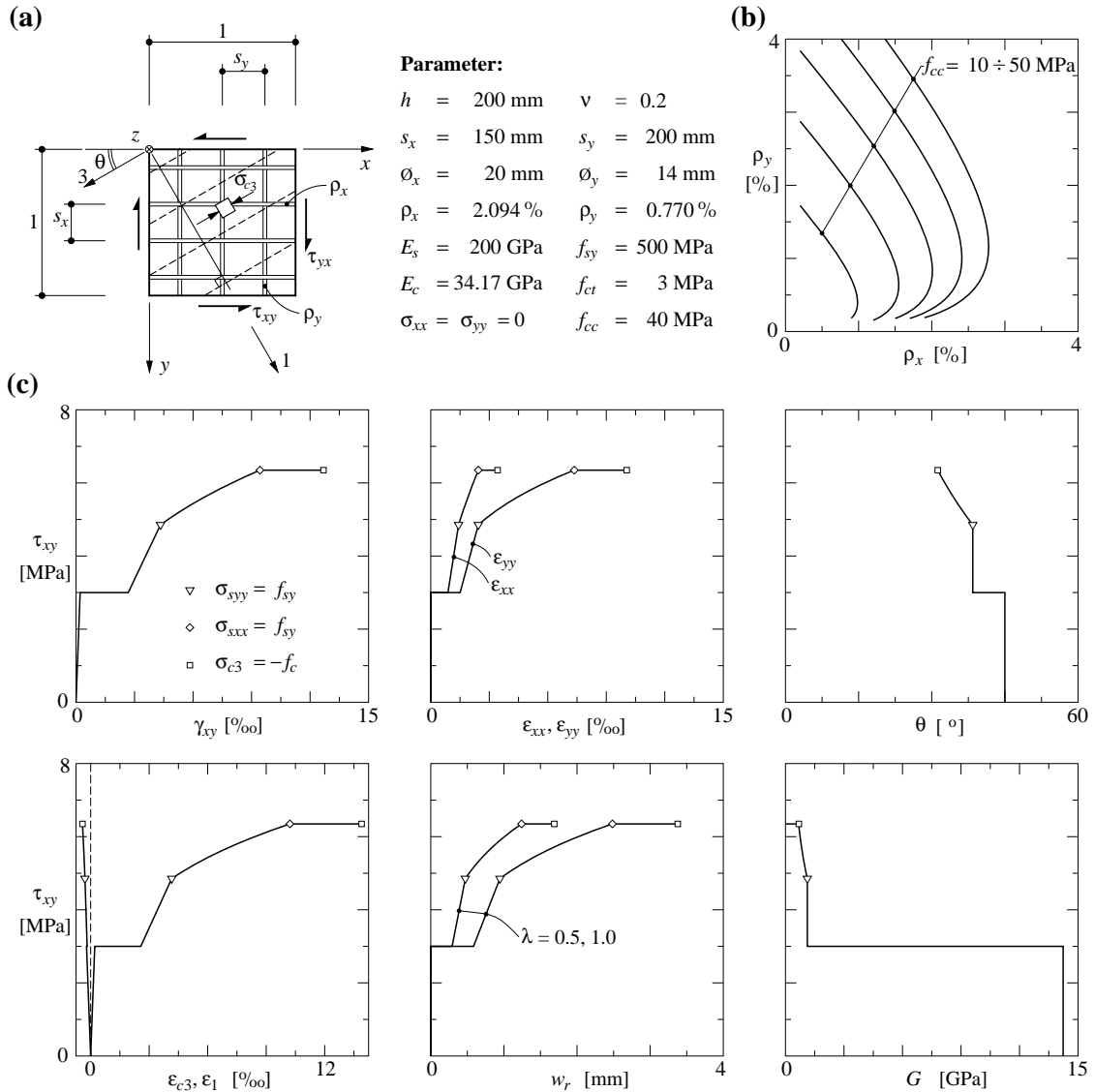


Bild 4.24 Stahlbeton-Scheibenelement unter reiner Schubbeanspruchung: (a) Bezeichnungen und Parameter; (b) Betondruckfestigkeit in Abhängigkeit der Bewehrungsgehalte; (c) Tragverhalten des Scheibenelements.

Die gerissen - elastische Schubsteifigkeit beträgt 8% resp. 2% der ungerissenen Schubsteifigkeit für den Fall, dass lediglich die y -Bewehrung fließt resp. beide Bewehrungen fließen (Tangentensteifigkeit), Bild 4.24(c).

4.6.4 Vergleich mit Versuchen im Membrane-Element-Tester in Toronto

Die Versuchseinrichtung, die Versuchskörper sowie die Resultate sind zusammengefasst in Xie et al. (2011) dargestellt. Die Resultate wurden dabei mit der sogenannten Modified-Compression-Field-Theory (MCFT) [Vecchio & Collins (1986)] sowie diversen Normbestimmungen verglichen. Alle drei Versuchskörper (PL2, PL3, PL5) wiesen dieselben Abmessungen und dieselbe orthogonale, kaltverformte Bewehrung auf, mit jeweils unterschiedlicher Fließspannung und zweilagiger Bewehrung in x -Richtung, Bild 4.25(a). Variiert wurde der Beanspruchungszustand der Scheiben, der sich aus Schubspannungen τ_{xy} sowie Normaldruck- oder Normalzugspannungen σ_{xx} zusammensetzte. In geringem Masse streute auch die Betondruckfestigkeit der einzelnen Versuchskörper. Die nachfolgende Nachrechnung mit dem klassischen Druckfeldmodell beschränkt sich auf das Tragverhalten der Stahlbetonscheiben im gerissenen Zustand. Die Werkstoffcharakteristik für die Bewehrung entspricht dabei der im Bild 4.25(b) dargestellten Idealisierung mit der Fließgrenze f_{sy} . Zur Berücksichtigung der maximal möglichen Verfestigung der Bewehrung sind die Nachrechnungen zudem mit der Zugfestigkeit f_{st} anstelle der Fließgrenze f_{sy} durchgeführt worden; woraus die in Bild 4.25(b) dargestellte gestrichelte Linie als Werkstoffbeziehung resultiert und deren Resultate nachfolgend jeweils in Klammern gesetzt resp. in den Bildern mit gestrichelten Linien dargestellt sind.

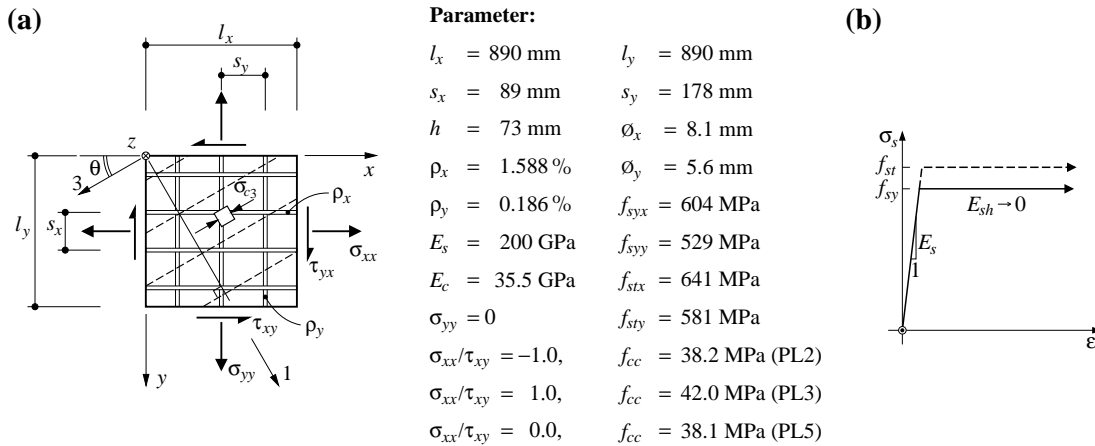


Bild 4.25 Stahlbeton-Scheibenversuche [Xie et al. (2011)]: (a) Scheibenelement mit Bezeichnungen und Parametern; (b) Idealisierte Werkstoffbeziehung für den Betonstahl.

Versuchskörper PL2

Der Versuchskörper PL2 wurde mit einer monoton zunehmenden Schubspannung τ_{xy} sowie einer Normaldruckspannung σ_{xx} mit dem konstanten Verhältnis von $\sigma_{xx}/\tau_{xy} = -1.0$ beansprucht. Bild 4.26(a) zeigt das Tragverhalten der Stahlbetonscheibe am Beispiel der Schubbeanspruchung τ_{xy} in Relation zur Schiebung γ_{xy} .

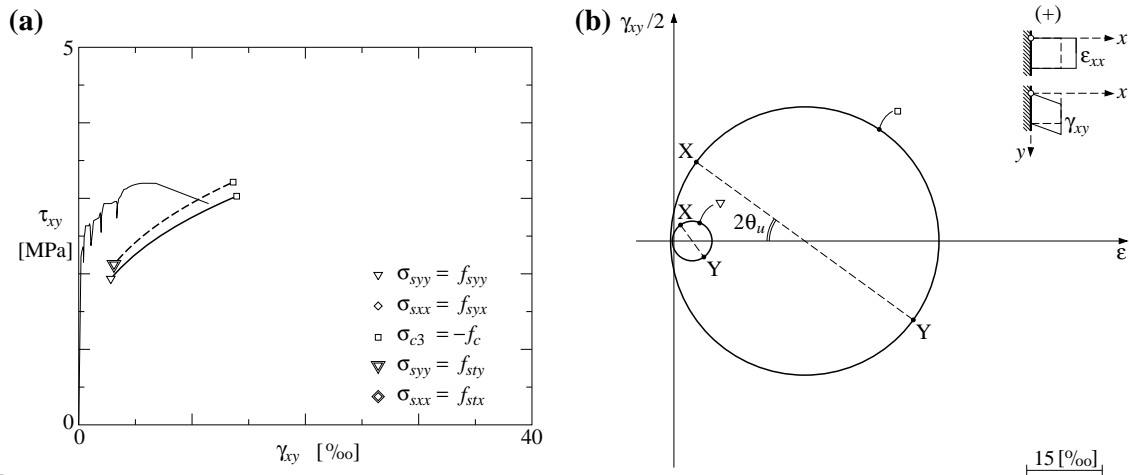


Bild 4.26 Stahlbeton-Scheibenversuch PL2 [Xie et al. (2011)]: (a) Last-Verformungsverhalten im Vergleich zum klassischen Druckfeldmodell; (b) MOHRsche Verzerrungskreise ausgewählter Punkte des klassischen Druckfeldmodells.

Nach dem klassischen Druckfeldmodell (Beziehungen in Kapitel 4.6.2) fließt die Bewehrung in y -Richtung bei einer Schubbeanspruchung von 1.93 MPa (2.12 MPa). Die Beanspruchung kann anschliessend weiter gesteigert werden, bis der Beton auf Druck bricht; dabei bleibt die Bewehrung in x -Richtung elastisch. In Bild 4.25(b) sind die MOHRschen Verzerrungskreise für die einzelnen Punkte dargestellt. Der Versuchskörper PL2 versagte bei einer Schubbeanspruchung von 3.21 MPa. Mit der Nachrechnung ergibt sich eine Traglast von 3.03 MPa (3.21 MPa). Eine Zusammenfassung der Versuchsergebnisse mit einem Vergleich auf Grundlage des klassischen Druckfeldmodells ist in Tab. 4.29 dargestellt.

Versuchskörper PL3

Der Versuchskörper PL3 wurde mit einer monoton zunehmenden Schubspannung τ_{xy} sowie einer Normalzugspannung σ_{xx} mit dem konstanten Verhältnis von $\sigma_{xx}/\tau_{xy} = 1.0$ beansprucht. Bild 4.27(a) zeigt das Tragverhalten der Stahlbetonscheibe am Beispiel der Schubbeanspruchung τ_{xy} in Relation zur Schiebung γ_{xy} .

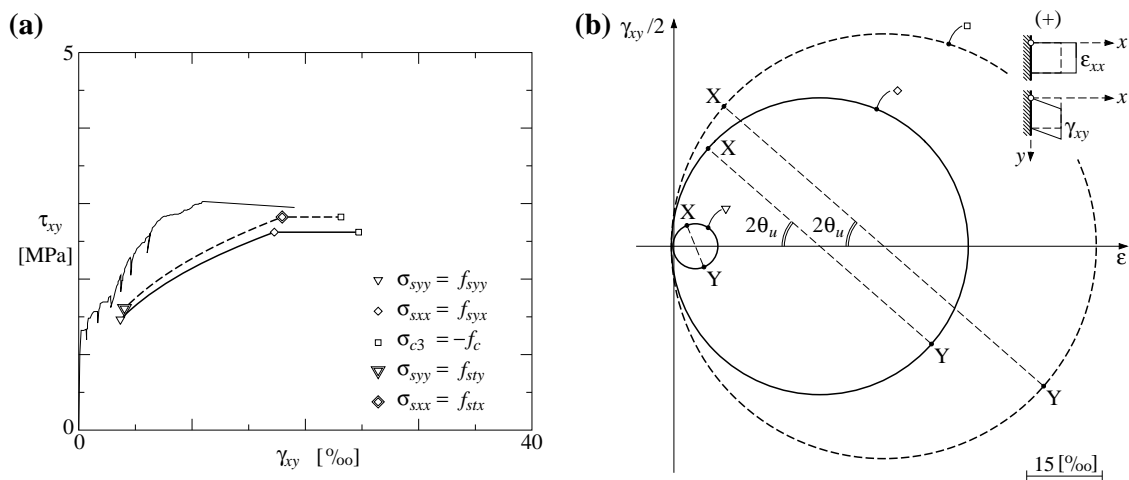


Bild 4.27 Stahlbeton-Scheibenversuch PL3 [Xie et al. (2011)]: (a) Last-Verformungsverhalten im Vergleich zum klassischen Druckfeldmodell; (b) MOHRsche Verzerrungskreise ausgewählter Punkte des klassischen Druckfeldmodells.

Nach dem klassischen Druckfeldmodell (Beziehungen in Kapitel 4.6.2) fließt die Bewehrung in y -Richtung bei einer Schubbeanspruchung von 1.47 MPa (1.61 MPa). Die Beanspruchung kann anschliessend weiter gesteigert werden, bis auch die x -Bewehrung fließt, womit die Traglast erreicht ist. Bei zunehmender Verformung bricht der Beton schliesslich auf Druck. In Bild 4.27(b) sind die MOHRschen Verzerrungskreise für die einzelnen Punkte dargestellt. Der Versuchskörper PL3 versagte bei einer Schubbeanspruchung von 3.04 MPa. Mit der Nachrechnung ergibt sich eine Traglast von 2.61 MPa (2.82 MPa). Eine Zusammenfassung der Versuchsergebnisse mit einem Vergleich auf Grundlage des klassischen Druckfeldmodells ist in Tab. 4.29 dargestellt

Versuchskörper PL5

Der Versuchskörper PL5 wurde ausschliesslich mit einer monoton zunehmenden Schubspannung τ_{xy} beansprucht. Bild 4.28(a) zeigt das Tragverhalten der Stahlbetonscheibe am Beispiel der Schubbeanspruchung τ_{xy} in Relation zur Schiebung γ_{xy} .

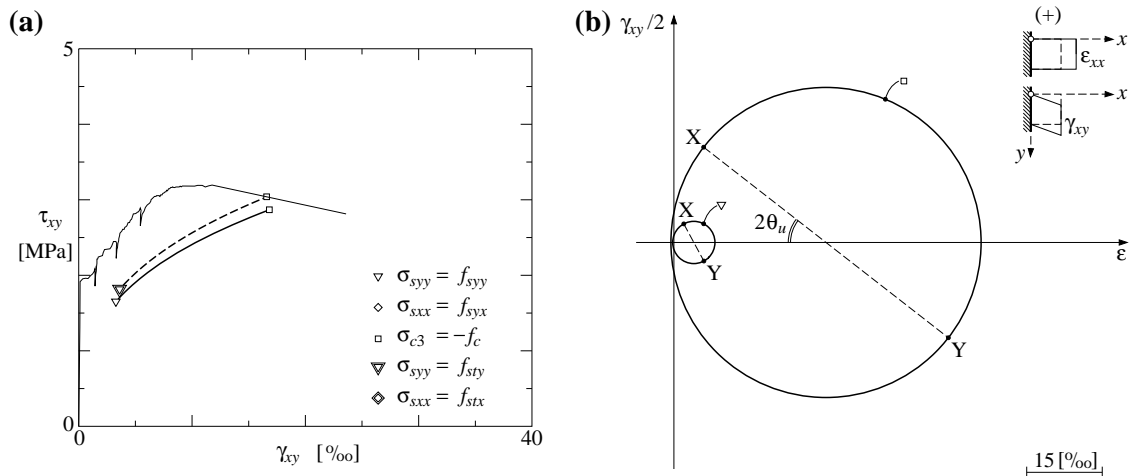


Bild 4.28 Stahlbeton-Scheibenversuch PL5 [Xie et al. (2011)]: (a) Last-Verformungsverhalten im Vergleich zum klassischen Druckfeldmodell; (b) MOHRsche Verzerrungskreise ausgewählter Punkte des klassischen Druckfeldmodells.

Auf Grundlage des klassischen Druckfeldmodells (Beziehungen in Kapitel 4.6.2) fließt die Bewehrung in y -Richtung bei einer Schubbeanspruchung von 1.65 MPa (1.81 MPa). Die Beanspruchung kann anschliessend weiter gesteigert werden, bis der Beton auf Druck bricht; bleibt die Bewehrung in x -Richtung elastisch. In Bild 4.28(b) sind die MOHRschen Verzerrungskreise für die einzelnen Punkte dargestellt. Der Versuchskörper PL5 versagte bei einer Schubbeanspruchung von 3.21 MPa. Mit der Nachrechnung ergibt sich eine Traglast von 2.87 MPa (3.04 MPa). Eine Zusammenfassung der Versuchsergebnisse mit einem Vergleich auf Grundlage des klassischen Druckfeldmodells ist in Tab. 4.29 dargestellt.

Diskussion

Mit dem klassischen Druckfeldmodell unter Berücksichtigung der Beziehungen (4.74) nach Kaufmann (1998) kann die Traglast und die Versagensart mit einer guten Genauigkeit analytisch bestimmt werden. Im Vergleich mit den Versuchsergebnissen unterschätzt das klassische Druckfeldmodell die Traglast geringfügig, dies hauptsächlich aufgrund der Vernachlässigung der Verfestigung des Betonstahls. Wird die maximal mögliche Verfestigung durch Ersetzen der Fließspannung f_{sy} mit der Zugfestigkeit f_{st} berücksichtigt, sind die Nachrechnungen und die Traglast praktisch identisch für die Versuchskörper PL2 und PL5. Etwas eigenartig ist die im

Versuch erreichte Traglast beim Versuchskörper PL3 mit 3.04 MPa. Auf Grundlage des klassischen Druckfeldmodells und mit der Berücksichtigung der Verfestigung durch den Ersatz von f_{sy} mit f_{st} in den Beziehungen (4.65) bis (4.82) erreichen beide Bewehrungen die Zugfestigkeit f_{st} und der Beton bleibt elastisch (Regime 1 der Fließbedingungen für Scheiben); die damit berechnete Traglast von 2.82 MPa liegt trotzdem 8% unterhalb der im Versuch erreichten Traglast.

Die numerischen Nachrechnungen auf Grundlage der Modified-Compression-Field-Theory oder der Normbestimmungen in Xie et al. (2011) liegen bezüglich der Traglast in derselben Größenordnung, allesamt jedoch mit einer grösseren Abweichung im Vergleich zur Nachrechnung mit dem klassischen Druckfeldmodell. Die Verformungen der Stahlbetonscheibe werden mit dem klassischen Druckfeldmodell aufgrund der Vernachlässigung des Verbunds zwischen der Bewehrung und dem Beton (zugversteifende Mitwirkung) stark überschätzt. Neben der Vernachlässigung des Verbunds spielt dabei auch die ausgeprägt schwache Bewehrung in y -Richtung der Versuchskörper PL2, PL3 und PL5 eine Rolle, welche die statisch erforderliche Mindestbewehrung unterschreitet. Die Verformungen werden mit der Modified-Compression-Field-Theory besser abgebildet.

	PL2			PL3			PL5			
	Test	DFM	Test / DFM	Test	DFM	Test / DFM	Test	DFM	Test / DFM	
τ_{xy}	3.21	3.03 (3.21)	1.06 (1.00)	3.04	2.62 (2.82)	1.16 (1.08)	3.21	2.87 (3.04)	1.12 (1.06)	MPa
ϵ_{xx}	0.64	1.98	0.32	2.73	3.02	0.90	2.32	2.63	0.88	‰
ϵ_{yy}	6.88	21.13	0.33	11.0	22.74	0.48	14.1	24.22	0.58	‰
γ_{xy}	5.32	13.94	0.38	11.0	17.26	0.64	11.7	16.82	0.70	‰
θ		18.0			20.6			19.0		°
$w_r(0.5)$		3.1			3.2			3.5		mm
$w_r(1.0)$		6.3			6.4			7.0		mm
			–			–			–	

Tab. 4.29 Stahlbeton-Scheibenversuche [Xie et al. (2011)]: Vergleich der Versuchsergebnisse beim Erreichen der Traglast mit dem klassischen Druckfeldmodell (DFM), Klammerwerte mit Berücksichtigung der Verfestigung des Betonstahls.

4.6.5 Vergleich mit Versuchen im Shell-Element-Tester in Toronto

Die Versuchsserie umfasste drei quadratische Stahlbetonscheiben mit einer Seitenabmessung von 1626 mm. Die Versuchseinrichtung, sowie die Resultate sind zusammengefasst in Marti & Meyboom (1992) dargestellt. Alle drei Versuchskörper (PP1, PP2, PP3) wiesen dieselben Abmessungen und dieselbe orthogonale, zweilagige Bewehrung auf. Die x - resp. y -Achse⁹ entspricht der Richtung der schlaffen Bewehrung, welche in den Versuchskörpern diagonal eingelegt wurde, Bild 4.30(a). Variiert wurde die Vorspannkraft der Vorspannung ohne Verbund. Der Versuchskörper PP1 wies keine Vorspannung auf, während die Versuchskörper PP2 und PP3 auf 2.07 MPa resp. 4.40 MPa vorgespannt wurden. Die nachfolgende Nachrechnung beschränkt sich auf den Versuchskörper PP1 ohne Vorspannung, der durch eine monoton zunehmende Schubspannung τ_{xy} beansprucht wurde. Die Nachrechnung mit dem klassischen Druckfeldmodell verwendet die in Bild 4.30(a) aufgeführten Parameter, mit der in Bild 4.30(b) dargestellten Werkstoffcharakteristik für die Bewehrung.

⁹ Die y -Achse entspricht der z -Achse in Marti & Meyboom (1992).

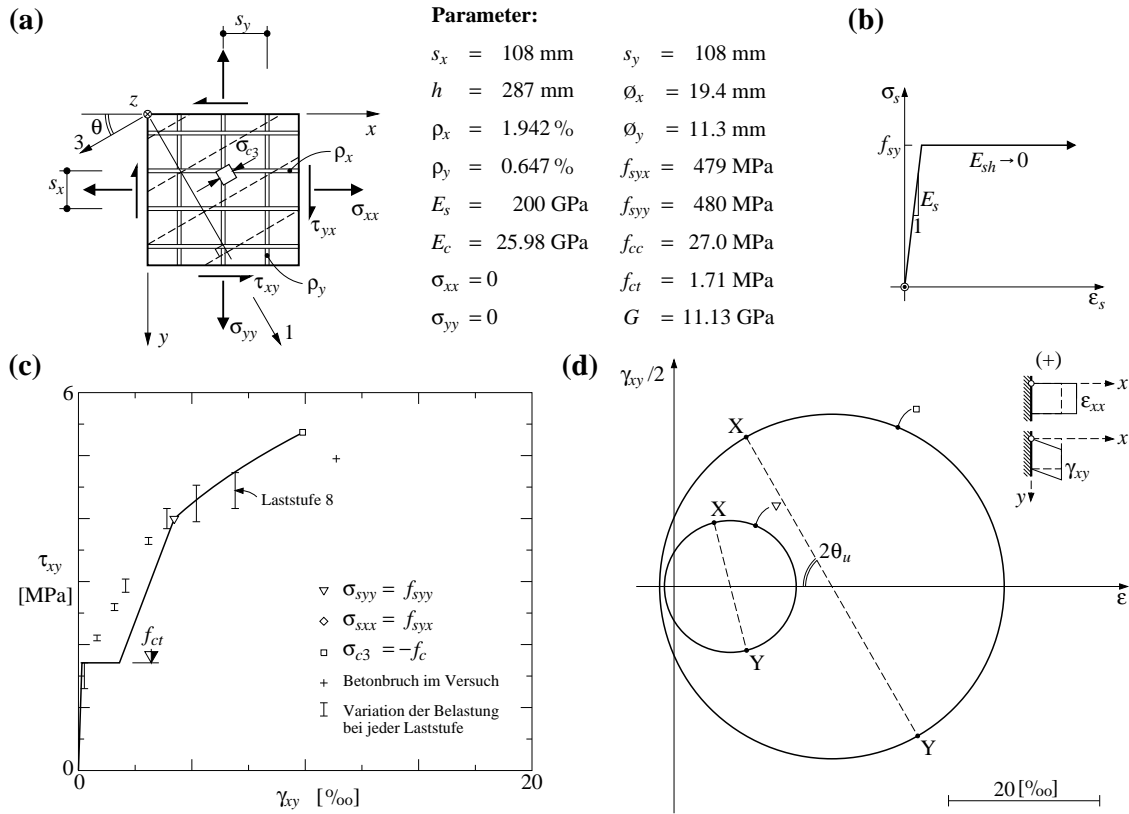


Bild 4.30 Stahlbeton-Scheibenversuch PP1 [Marti & Meyboom (1992)]: (a) Scheibenelement mit Bezeichnungen und Parametern; (b) Werkstoffcharakteristik für den Betonstahl; (c) Last-Verformungsverhalten im Vergleich zum klassischen Druckfeldmodell; (d) MOHRsche Verzerrungskreise ausgewählter Punkte des klassischen Druckfeldmodells.

Bild 4.30(c) zeigt das Tragverhalten der Stahlbetonscheibe am Beispiel der Schubbeanspruchung τ_{xy} in Relation zur Schiebung γ_{xy} . Nach dem klassischen Druckfeldmodell (Beziehungen in Kapitel 4.6.2) fließt die Bewehrung in y -Richtung bei einer Schubbeanspruchung von 4.00 MPa. Die Beanspruchung kann anschliessend weiter gesteigert werden, bis der Beton auf Druck bricht; dabei bleibt die Bewehrung in x -Richtung elastisch. In Bild 4.30(d) sind die MOHRschen Verzerrungskreise für die einzelnen Punkte dargestellt. Der Versuchskörper PP1 versagte bei einer Schubbeanspruchung von 4.95 MPa (Betonbruch) unter einer Schiebung von 11.37‰. Mit der Nachrechnung ergibt sich eine Traglast von 5.36 MPa bei einer Schiebung von 9.88‰. Eine Zusammenfassung der Versuchsergebnisse mit einem Vergleich auf Grundlage des klassischen Druckfeldmodells ist in Tab. 4.31 dargestellt.

	PP1			
	Test	DFM	Test / DFM	
τ_{xy}	4.95	5.36	0.92	MPa
ε_{xx}	1.65	2.39	0.69	‰
ε_{yy}	8.24	8.06	1.02	‰
γ_{xy}	11.37	9.88	1.15	‰
θ	30°	30°	1.00	°
$w_r(0.5)$		1.4		mm
$w_r(1.0)$		2.7		mm
			–	

Tab. 4.31 Stahlbeton-Scheibenversuch PP1 [Marti & Meyboom (1992)]: Vergleich der Versuchsergebnisse beim Erreichen der Traglast mit dem klassischen Druckfeldmodell (DFM).

Meyboom (1987) enthält Angaben zu den gemessenen Rissbreiten und Rissabständen. Bei der Laststufe 8 mit der maximalen Schubbeanspruchung von 4.73 MPa (Bild 4.30(c)) wurden maximale Rissbreiten von 1.7 bis 1.8 mm und Rissabstände zwischen ca. 100 mm und 300 mm gemessen. Aus (4.76) und (4.75) resultieren Rissabstände zwischen 120 und 240 mm und maximale Rissbreiten aus (4.77) von 0.9 bis 1.9 mm.

Diskussion

Die Nachrechnung des Versuchskörpers PP1 mit der gegenüber den Versuchskörpern PL2, PL3 und PL5 stärkeren Bewehrung zeigt eine deutlich bessere Übereinstimmung bezüglich der Verformungen im gerissenen Zustand und der Verformung beim Erreichen der Traglast.

Insgesamt beschränken sich die obigen Vergleiche auf vier Versuchskörper. Zusammenfassend überschätzt das klassische Druckfeldmodell die Verformungen bei geringen Bewehrungsgehalten. Für Stahlbetonscheiben mit in der Praxis üblichen Bewehrungsgehalten können die Verformungen mit dem klassischen Druckfeldmodell vernünftig abgeschätzt werden. Ebenfalls eine vernünftige Genauigkeit zeigt sich bei der Bestimmung der Traglast; insbesondere die Versagensart wurde korrekt wiedergegeben.

Insgesamt bietet das klassische Druckfeldmodell eine probate Modellvorstellung für die Bemessung der Bewehrung in einer Stahlbetonscheibe und der Abschätzung von deren Verformungen auf Grundlage analytischer Beziehungen. Dabei erlauben die Erweiterungen des klassischen Druckfeldmodells mit (4.74) bis (4.76) auch vernünftige Aussagen zu Rissabständen und Rissbreiten, Tab. 4.29 und Tab. 4.31.

Eine genauere Bestimmung des Tragverhaltens von Stahlbetonscheiben ist mit dem gerissenen Scheibenmodell [Kaufmann & Marti (1998)] möglich. Neben der Bestimmung der Rissabstände und Rissbreiten können mit dem gerissenen Scheibenmodell auch Aussagen zur erforderlichen Verfestigungscharakteristik des Betonstahls gemacht werden, Kapitel 3.6.6.

4.7 Last-Verformungsverhalten ebener Strukturen

4.7.1 Wandartiger Träger

Die näherungsweise Beschreibung des Last-Verformungsverhaltens ebener Stahlbetonstrukturen wird am Beispiel der Wandscheibe mit einer Öffnung in Bild 4.14(a) aufgezeigt. Grundlage

der Berechnung bildet das in Bild 4.32(a) dargestellte Stringer-Tafelmodell mit der Einzellast P und der Verformung u des Punktes C in y -Richtung.

Bis zum Erreichen der Risszugkraft der Stringer verhält sich die Wandscheibe resp. das Stringer-Tafelmodell elastisch. Für die Stringer wird eine linear elastische Steifigkeit von $EA = 6$ GN angenommen, und die Risszugkraft soll $2/15 \cdot P_y$ betragen mit $P_y = 3$ MN, Zustand I in Bild 4.32(b). Für die ungerissene Steifigkeit der Tafeln resultiert aus (4.99)₁ ein Schubmodul G von 12.5 GPa, Zustand I in Bild 4.32(c). Die Risszugkraft des Stringers E-H in Punkt F wird bei einer Risslast $P_{cr} = (2/15 \cdot P_y) \cdot (77/25) = 154/375 \cdot P_y$ erreicht, Bild 4.15(b). Die zugehörige Verformung u ergibt sich zu ca. 0.8 mm; der Anteil der Tafeln beträgt dabei 13.5%. Die Steifigkeit der gesamten Wandscheibe im ungerissenen elastischen Zustand beträgt ca. 0.68 mm/MN. Wird die Last weiter gesteigert, erreichen die Stringer K-M in Punkt L und B-K in Punkt F die Risszugkraft.

Bis zum Erreichen der angenommenen Fließzugkraft von $0.25 \cdot P_y$ (Kapitel 4.4.2) im Stringer B-K in Punkt F mit $P_y = 3$ MN verhält sich die Wandscheibe gerissen elastisch. Der zugehörige Spannungszustand ist in Bild 4.16 dargestellt. Bild 4.32(b) zeigt die Steifigkeit der gerissenen Stringer (Zustand II) mit $EA = 0.4$ GN. Die als gerissen in Rechnung gestellten Bereiche der Stringer sind in Bild 4.32(a) gestrichelt dargestellt. Für $P = 3$ MN beträgt die Hauptspannung in der Tafel 3 1.3 MPa. Werden die Tafeln als ungerissen betrachtet, ergibt sich eine Verformung der Wandscheibe von ca. 3.6 mm. Wird die Tafel 3 als gerissen in Rechnung gestellt, mit der gerissenen Steifigkeit gemäss (4.99)₂ mit $G = 0.36$ GPa (Zustand II, Bild 4.32(c)), resultiert eine Verformung der Wandscheibe von ca. 7.2 mm. Die Steifigkeit der Wandscheibe ergibt sich zu 1.22 resp. 2.41 mm/MN.

Aus dem einfach statisch unbestimmten Stringer-Tafelmodell resultiert ein unterer Grenzwert der Traglast P_u von $P_y \cdot (1 + 97/450 \cdot l_y/l_x) = 3.38$ MN durch Erreichen der angenommenen Fließzugkraft von $11/30 P_y = 1.1$ MN in Stringer E-H in Punkt F bei gleichzeitigem Fließen des Stringers B-K in Punkt F. Die Steigerung der Last von P_y zur Traglast P_u bewirkt eine Zunahme der Beanspruchung in den Tafeln 1 bis 3 und den diese Tafeln umschliessenden Stringern, Bild 4.15(b). Die zugehörige Verformung beträgt unter der Annahme ungerissener Tafeln ca. 5.5 mm und mit der gerissenen Steifigkeit der Tafeln ca. 10.9 mm.

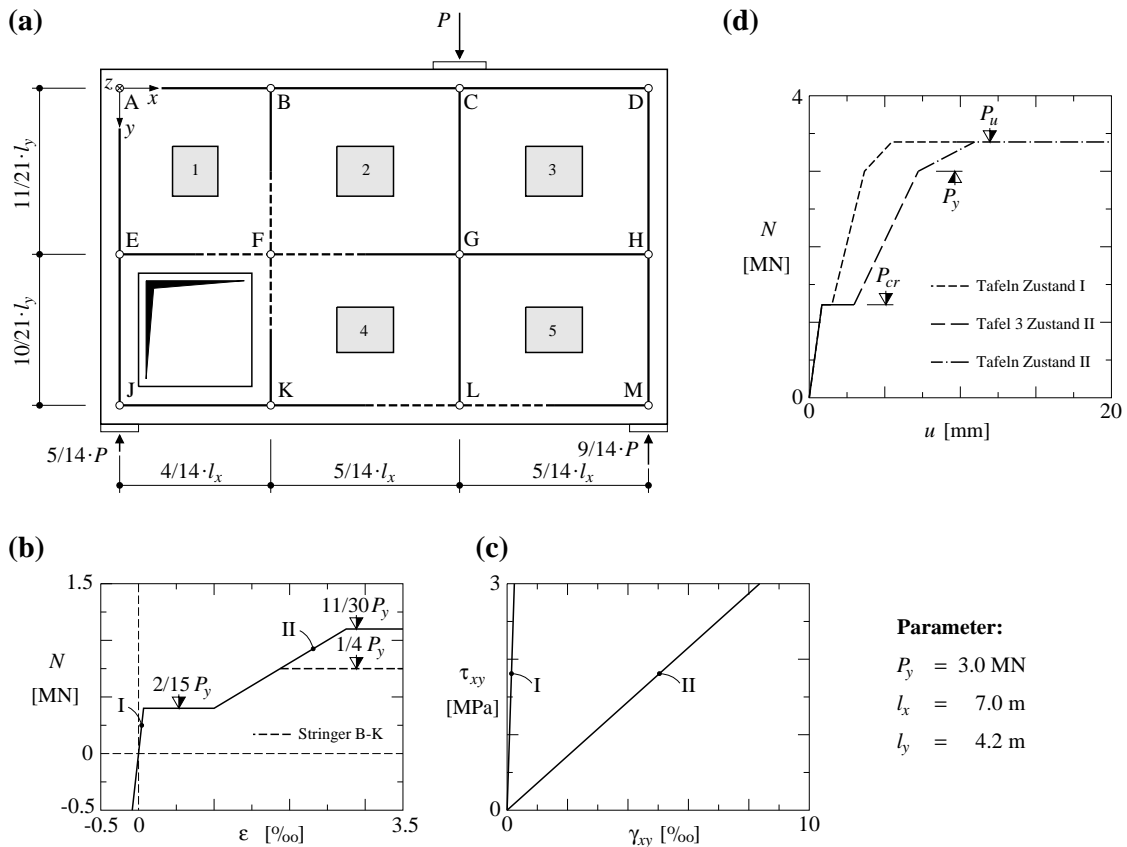


Bild 4.32 Last-Verformungsverhalten der Wandscheibe mit Öffnung [Schlaich et al. (1987)]: (a) Stringer-Tafelmodell; (b) Tragverhalten der Stringer; (c) Tragverhalten der Tafeln; (d) Last-Verformungsdiagramm.

Diskussion

Das Last-Verformungsdiagramm der Wandscheibe ist in Bild 4.32(d) dargestellt. Der Einfluss der gerissenen oder ungerissenen Steifigkeit der Tafel 1 ist evident, vgl. Kapitel 4.1.2. Stringer-Tafelmodelle erlauben die näherungsweise Beschreibung des nicht-linearen Verhaltens ebener Stahlbetonstrukturen. Der damit verbundene Rechenaufwand entspricht dem Aufwand für eine elastisch-plastische Berechnung eines Fachwerks [Marti (2012)] und nimmt mit Zunahme des Grads der statischen Unbestimmtheit stark zu. Die im nachfolgenden Kapitel dargestellte rechnergestützte Behandlung des Stringer-Tafelmodells zeigt ein sinnvolles Hilfsmittel für derartige Berechnungen auf.

4.7.2 Rechnergestützte Behandlung des Stringer-Tafelmodells

Linear elastisches, isotropes Verhalten

Das Tragverhalten von Stringer-Tafelmodellen kann rechnergestützt mit Hilfe eines konventionellen Stabstatikprogramms beschrieben werden. Dabei werden die Stringer als Fachwerkstäbe mit Gelenken an ihren Enden idealisiert, und das Tragverhalten der Tafel kann durch zwei sich in der Tafelmitte kreuzende Stabelemente (Biegestäbe), die ihrerseits gelenkig mit den Stringern

verbunden sind, behandelt werden. Bild 4.25(b) zeigt das Stabstatikmodell für das in (a) dargestellte Stringer-Tafelmodell.

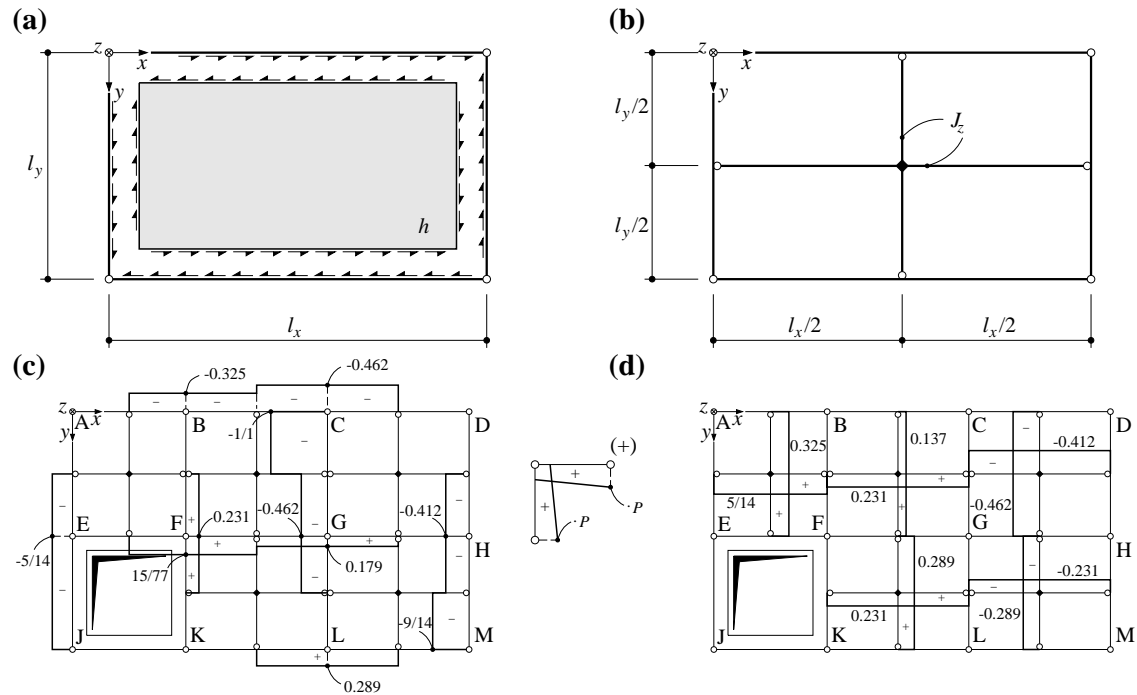


Bild 4.33 Rechnergestützte Behandlung des Stringer-Tafelmodells: (a) Stringer-Tafelmodell; (b) Stabstatikmodell; (c) resp. (d) Normalkraftverlauf in den Stringern resp. Querkraft in den Tafeln der Wandscheibe mit Öffnung [Schlaich et al. (1987)], analog Bild 4.15.

Aus der Bedingung, dass die Schubverformungen der Tafel den Verformungen der Biegestäbe entsprechen, lässt sich die Biegesteifigkeit resp. das Trägheitsmoment J_z der Biegestäbe mit der Scheibendicke h der Tafel in Anlehnung an die Bestimmung der Schubsteifigkeit eines Stockwerkrahmens [Marti (2012)] wie folgt bestimmen

$$J_z = (l_x + l_y) \frac{l_x l_y h}{24(1 + \nu)} \quad (4.100)$$

Bild 4.25(c) resp. (d) zeigt am Beispiel der in Bild 4.15 dargestellten Wandscheibe mit einer Öffnung, die Übereinstimmung der Schnittgrößen, bestimmt mit dem Stabstatikprogramm Stab2d¹⁰, mit den analytisch, mittels der Kraftmethode (Kapitel 4.4.2), bestimmten Verläufen. Für linear elastisches Verhalten der Tafeln und Stringer wird mit dem Stabstatikmodell sowohl das Gleichgewicht als auch die Verträglichkeit des Stringer-Tafelmodells korrekt berücksichtigt.

Diskussion

Für den im Modellieren mit Stringern und Tafeln geübten Ingenieur stellt die rechnergestützte Behandlung des Stringer-Tafelmodells ein sinnvolles Hilfsmittel dar. Für statisch unbestimmte Stringer-Tafelmodelle können durch Veränderung der Steifigkeiten der Stringer resp. der Tafeln beliebige Gleichgewichtszustände generiert werden.

Das Tragverhalten der Stahlbetonbauweise ist im Allgemeinen ausgeprägt nichtlinear, Bild 4.32. Mit Hilfe eines nicht linearen Stabstatikprogramms könnte das Verhalten der Stringer mit Hilfe des Zuggurtmodells resp. des Druckgurtmodells (Kapitel 4.5.1 resp. 4.5.3) und das

¹⁰ Institut für Statik und Dynamik, Leibniz Universität Hannover.

Verhalten der Tafeln mit dem Druckfeldmodell (Kapitel 4.6.2) oder dem gerissenen Scheibenmodell [Kaufmann & Marti (1998)] beschrieben werden. Damit wird eine näherungsweise Beschreibung des Tragverhaltens ebener Stahlbetonstrukturen ermöglicht. Der grosse Vorteil derartiger Stabstatik-Berechnungen besteht in der einfach möglichen Kontrolle des Gleichgewichts innerhalb der gesamten Struktur mittels Handrechnung. Das nicht lineare Verhalten kann den einzelnen Stäben zugeordnet oder konzentriert in Gelenken implementiert werden.

4.8 Bemessung allgemeiner Stahlbetonstrukturen

4.8.1 Gleichgewichtslösungen für Platten

Ein statisch zulässiger Spannungszustand einer Platte, der die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen erfüllt und die Fliessbedingungen nirgends verletzt, entspricht unter der Voraussetzung eines ausreichenden Verformungsvermögens einem unteren (statischen) Grenzwert der Traglast (Kapitel 3.2.2). Damit kann der Kraftfluss innerhalb der Platte aufgezeigt werden. Der Kraftfluss bildet die Grundlage für die konstruktive Durchbildung und die Sicherstellung des Verformungsvermögens.

In der Folge werden durch Verwendung von Stringern und Tafeln Gleichgewichtslösungen für Platten bestimmt und somit eine mögliche Grundlage für die Bemessung aufgezeigt. Eine eingehende Darstellung der Gleichgewichtslösungen von Platten ist in Marti (1981) zu finden.

Statische Diskontinuität in Platten

Im Inneren einer Platte kann eine statische Diskontinuitätslinie als Balken mit verschwindender Breite aufgefasst werden. Bild 4.34 zeigt eine in t -Richtung verlaufende statische Diskontinuitätslinie. Formulieren der Gleichgewichtsbedingungen am Schnittkörperdiagramm in Bild 4.34 liefert die Beziehungen

$$\begin{aligned} V_{t,t} - v_{zn}^i + v_{zn}^{ii} + \bar{q}_z &= 0 \\ M_{t,t} + m_{tn}^i - m_{tn}^{ii} + V_t &= 0 \\ -m_{nn}^i dt - m_{nn}^{ii} dt &= 0 \end{aligned} \quad (4.101)$$

Mit (4.101)₃ müssen die Biegemomente m_{nn} kontinuierlich sein; hingegen dürfen sowohl die Drillmomente m_{tn} als auch die Querkraft v_{zn} über die Diskontinuitätslinie eine Unstetigkeit resp. einen Sprung aufweisen. Der Sprung von m_{tn} aus (4.101)₂ entspricht einer entlang der Diskontinuitätslinie übertragenen Querkraft V_t zusammen mit einer allfälligen Änderung des Biegemoments M_t . Die statische Diskontinuität in Platten kann auch als Stringer aufgefasst werden. Die Gleichgewichtsbedingungen am Plattenelement (4.101) führen zusammen mit (3.97) auf die Beziehung

$$\bar{q}_z = v_{zn}^i - v_{zn}^{ii} - V_{t,t} = (m_{nn,n}^i + 2m_{nt,t}^i) - (m_{nn,n}^{ii} + 2m_{nt,t}^{ii}) + M_{t,tt} \quad (4.102)$$

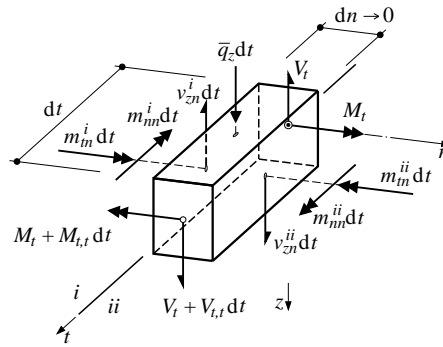


Bild 4.34 Schnittkörperdiagramm einer Diskontinuität in Platten.

An einem freien oder aufgelegten Plattenrand in t -Richtung verschwinden die Schnittgrößen ($m_{nn}^{ii} = m_{tn}^{ii} = v_{zn}^{ii} = 0$) und zusammen mit $M_t = \text{konstant}$ entspricht die Diskontinuitätslinie den statischen Randbedingungen. Für einen einfach gelagerten Rand gilt $m_{nn} = 0$ und die Querkraft sowie die Ableitung des Drillmoments sind zur Stützkraft q_{zn} zusammenzufassen mit

$$q_{zn} = v_{zn} + m_{tn,t} = m_{nn,n} + 2m_{tn,t} \quad (4.103)$$

An einer rechtwinkligen Plattenecke addieren sich die Drillmomente zu einer resultierenden ECKKRAFT von $2m_{tn}$. Beim freien oder aufgelegten Rand entsprechen die Drillmomente einer Randquerkraft

$$V_t = m_{tn} \quad (4.104)$$

Diese erfordert eine Bewehrung am Plattenrand, die beispielsweise mit Steckbügeln realisiert werden kann.

Momentenfelder für Rechteckplatten, Kraftfluss in den Tafeln

Für eine gegebene Problemstellung können mittels Ansatzfunktionen für die Biege- und Drillmomente einerseits die Gleichgewichtsbedingung (3.98) und andererseits die statischen Randbedingungen erfüllt und somit eine mögliche Gleichgewichtslösung angegeben werden. Zur Aufnahme der in der Baupraxis häufig vorkommenden verteilten Flächenlast q_z eignen sich für die Ansatzfunktionen Polynome in der Form $m_{xx} \sim x^2$, $m_{yy} \sim x^2$ und $m_{xy} \sim (xy, x, y)$. Nach dem unteren Grenzwertsatz der Traglastverfahren (Kapitel 3.2.2) kann eine Flächenlast q_z in jeweils einen Anteil von streifenförmigen Biegeelementen in zwei orthogonalen oder schiefen Richtungen sowie einen Anteil der Drillmomente aufgeteilt werden. Für den Fall, dass die Drillmomente vernachlässigt werden ($m_{xy} = 0$), spricht man von der einfachen Streifenmethode nach Hillerborg (1975). Zur Behandlung von Einzelkräften kann diese durch Verwendung von entsprechenden Momentenansätzen für punktförmig gestützte Platten erweitert werden (erweiterte Streifenmethode). Mit der Wahl der Momentenfelder ist der zugehörige Kraftfluss in der Platte durch die Hauptquerkraft v_0 (3.103) und deren Richtung φ_0 (3.104) bestimmt.

Für einfache Geometrie und Lastfälle existieren viele Ansätze, die teilweise vollständigen Lösungen im Rahmen der Plastizitätstheorie entsprechen, eine Übersicht ist in Nielsen (1964) enthalten. Bei komplexeren Problemstellungen können die Platten in einzelne Bereiche oder Tafeln unterteilt werden, die durch Stringer eingefasst sind. Den Tafeln werden die Momentenfelder, den Stringern insbesondere die statischen Randbedingungen zugeordnet. Das Vorgehen soll nachfolgend am Beispiel einer Hochbauplatte illustriert werden.

4.8.2 Beispiel Hochbauplatte

Bild 4.35(a) zeigt eine gleichförmig belastete Hochbauplatte die entlang der Ränder AB, BC, und CE einfach gelagert und in den Punkten D und F gestützt ist. Die Platte wird in Bild 4.35(b) in zwei Tafeln unterteilt, die jeweils mit umlaufenden Stringern eingefasst sind. Die Momentenansätze für die Biegemomente m_{xx} resp. m_{yy} sind in Bild 4.35(c) resp. (d) dargestellt. Für die Tafel 1 resultiert daraus eine orthogonale und gleichförmige Lastabtragung in den Koordinatenrichtungen x und y und in der Tafel 2 mit $m_{yy} = 0$ eine Lastabtragung in x -Richtung. Für das Drillmoment in Bild 4.35(e) wird in der Tafel 1 eine Ebene $m_{xy} \sim (x - y)$ angesetzt; gemäss (3.98) übernimmt m_{xy} keinen Anteil an der Last q_z und beeinflusst nur die Randbedingungen resp. die umfassenden Stringer der Tafel 1. Die Neigung der Ebene entlang der Stringer AD resp. CD soll gemäss (4.103) gerade $m_{xx,x}$ resp. $m_{yy,y}$ entsprechen. Die Drillmomente in der Tafel 2 werden ebenfalls in der Form einer Ebene mit $m_{xy} \sim y$ angesetzt, deren Neigung entlang des Stringers FG mit (4.103) gerade $m_{xx,x}$ betragen soll. Bild 4.35(g) zeigt den Kraftfluss innerhalb der Tafeln, und in Bild 4.35(f) sind die Streckenlasten resp. Einzellasten auf die Stringer aufgezeigt, womit der Spannungszustand innerhalb der Platte beschrieben ist.

Bemessung

Die Tafeln erfahren eine kombinierte Beanspruchung durch Biege- und Drillmomente. In Kapitel 3.7.3 ist auf Basis der Sandwichmodellvorstellung eine Fliessbedingung für Plattenelemente aufgeführt, mit welcher untere (statische) Grenzwerte der Traglast für Biege- und Drillmomente ermittelt werden können. Zur Abschätzung der in Rechnung gestellten Bewehrung dient die Beziehung (3.130). Auf eine Querkraftbewehrung innerhalb der Tafeln der dünnen Platte kann verzichtet werden, wenn die Bedingung (3.131) eingehalten ist.

Die Biege- und Querkraftbemessung der Stringer kann gemäss den Ausführungen in Kapitel 4.3 erfolgen. Die ohnehin konstruktiv notwendige Bewehrung in Form von Steckbügeln entlang der Plattenränder kann für die Querkraftbemessung berücksichtigt werden. Der Einfluss des endlichen Stababstands der Querkraftbewehrung (Kapitel 3.6.5) ist insbesondere im Bereich der Punktstützungen der Stringer (z. B. Punkt D und F) zu beachten. Ein oberer Grenzwert des Durchstanzwiderstands ist in Kapitel 3.8 aufgeführt, und das Kapitel 3.8.7 enthält Bemerkungen zur Bemessung bezüglich Durchstanzen.

Die Gleichgewichtslösung für die Platte in Bild 4.35 mit den gewählten Momentenansätzen innerhalb der Tafeln entspricht einem möglichen unteren (statischen) Grenzwert der Traglast. Diese Traglast kann mit einem ausreichenden Verformungsvermögen der Platte erreicht werden. Bereits eine minimale Querkraftbewehrung verbessert das Tragverhalten und das Verformungsvermögen von Platten signifikant [Jäger (2007)].

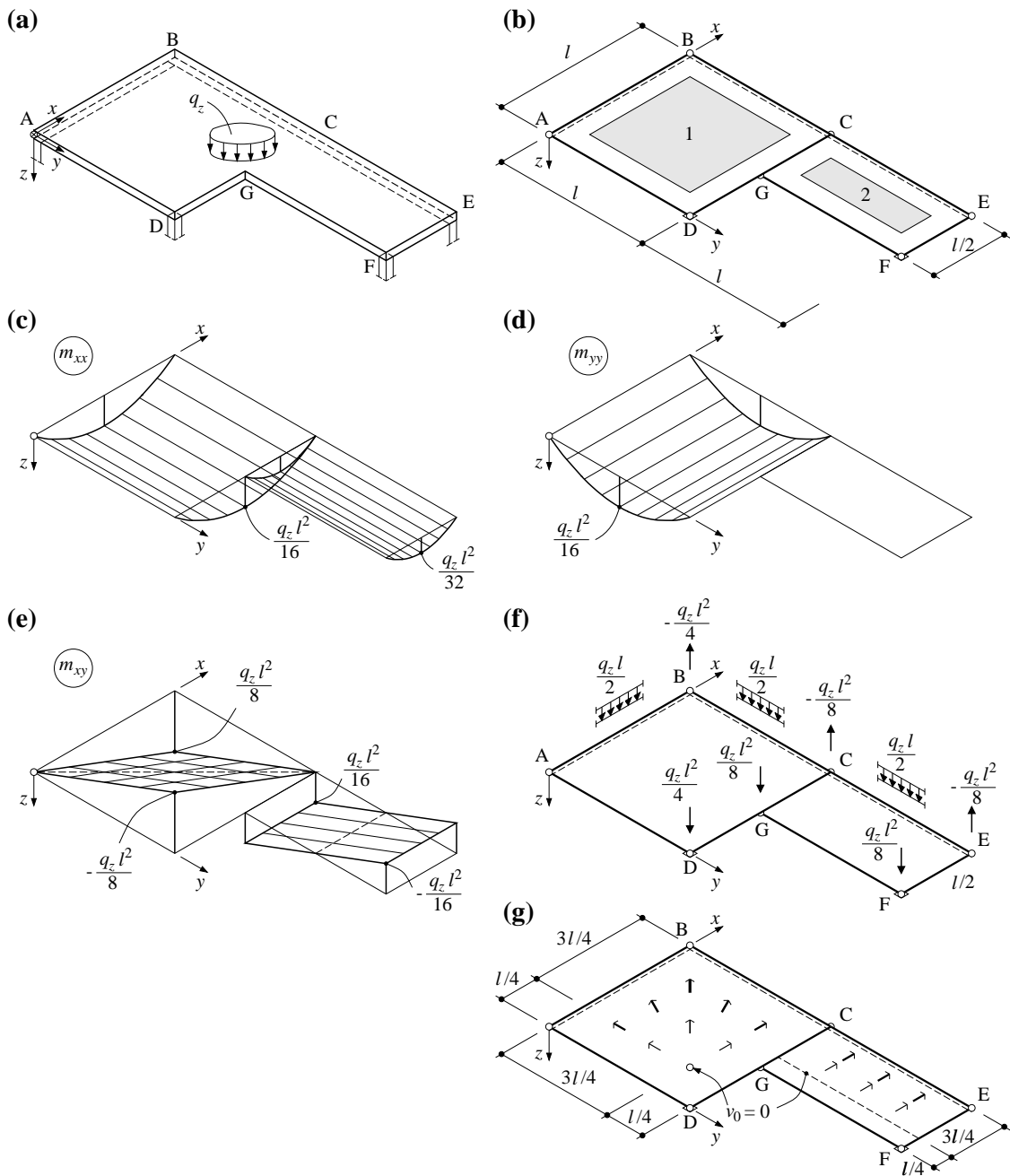


Bild 4.35 Beispiel Hochbauplatte: (a) Platte mit Einwirkung; (b) Stringer-Tafelmodell; (c) bis (e) Momentenansätze in den Tafeln; (f) Einwirkungen auf die Stringer; (g) Kraftfluss mit Hauptquerkraft in den Tafeln.

4.8.3 Rechnergestützte Behandlung der Platten mit Stringern und Tafeln

In Anlehnung an die Ausführungen zur rechnergestützten Behandlung des Stringer-Tafelmodells in Kapitel 4.7.2 lässt sich auch für Platten eine rechnergestützte Behandlung mit Stringern und Tafeln auf Grundlage eines konventionellen Stabstatikprogramms aufzeigen.

In Bild 4.36(a) ist eine Lösung für die Quadratplatte angegeben, die entlang der Ränder BCD einfach gelagert ist und in Punkt A eine Einzellast Q erfährt. Die Modellierung der Platte mit Stringern und Tafeln ist in Bild 4.36(b) dargestellt. Das Tragverhalten der Tafel kann durch

zwei sich in der Tafelmitte kreuzende Stabelemente (Biege- und Torsionsstäbe) beschrieben werden. Die Stringer (Biegestäbe) sind an ihren Enden gelenkig gelagert. Bild 4.36(c) zeigt das Stabstatikmodell für das in Bild 4.36(b) dargestellte Stringer-Tafelmodell der Platte. Die Schnittgrößen für die Stäbe sind in Bild 4.36(d) bis (f) dargestellt und zeigen den Kraftfluss mit der Randquerkraft entlang der freien Ränder der Platte.

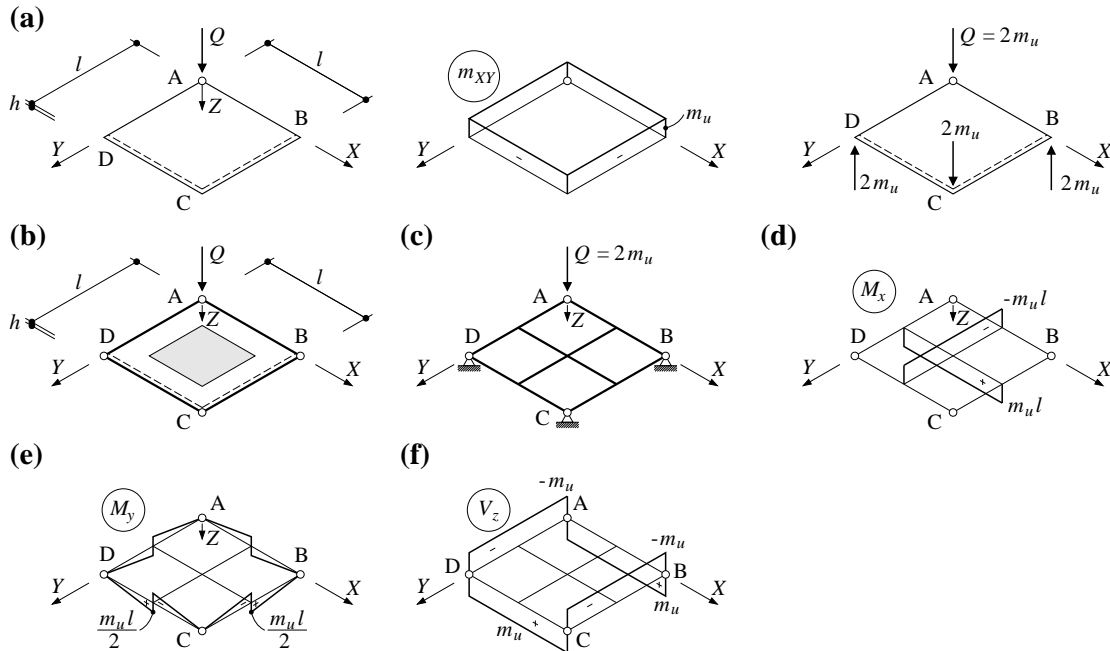


Bild 4.36 Quadratplatte mit Einzellast: (a) Lösung mit konstantem Drillmomentenansatz; (b) Stringer-Tafelmodell; (c) Stabstatikmodell; (d) bis (f) zugehörige Schnittgrößen in den Stäben.

Diskussion

Die Verwendung von Momentenansätzen insbesondere mit Berücksichtigung von Drillmomenten zur Bemessung von Platten bedarf einer gewissen Übung. Die rechnergestützte Behandlung des Stringer-Tafelmodells stellt diesbezüglich ein sinnvolles Hilfsmittel dar. Werden Platten mit statisch unbestimmten Stringer-Tafelmodellen diskretisiert, können durch Änderung der Steifigkeiten der Tafeln (Torsionsstäbe) beliebige Gleichgewichtszustände ermittelt werden.

4.8.4 Faltwerke

Faltwerke und faltwerkartige Tragwerke wie Brückenträger, Hochbauten oder Offshore-Plattformen lassen sich mit ebenen Bauteilen (Scheiben und Platten) idealisieren. Die Scheiben und Platten werden kraftschlüssig über die Kanten miteinander verbunden. Das Tragverhalten der Faltwerke wird wesentlich durch die steife Scheibentragwirkung resp. die weiche Platten-tragwirkung beeinflusst. Für die Tragwerksanalyse eines Faltwerks wird häufig die Methode der finiten Elemente eingesetzt. Alternativ dazu kann mit der Diskretisierung des Faltwerks mit Stringern und Tafeln die Bemessung sowie die näherungsweise Beschreibung des Tragverhaltens mit den in den vorangegangenen Kapiteln aufgeführten Beziehungen erfolgen. Für die Handrechnung ist der damit einhergehende Rechenaufwand beträchtlich. Eine rechnergestützte Behandlung der Stringer-Tafelmodelle mittels Stabstatik gemäss Kapitel 4.7.2 und 4.8.3 ist angezeigt. Im Gegensatz zur Methode der finiten Elemente ist das Gleichgewicht in jedem Ele-

ment des Stringer-Tafelmodells streng erfüllt und lässt sich einfach nachvollziehen. Das nicht lineare Verhalten der einzelnen Elemente kann dabei konzentriert in Gelenken oder in den Stäben verteilt implementiert werden.

Bild 4.37(a) zeigt einen typischen Hochbau, der als Faltwerk betrachtet werden kann, wobei die Plattentragwirkung in den horizontalen und die Scheibentragwirkung in den vertikalen Ebenen überwiegt. Das in Bild 4.37(b) dargestellte Stringer-Tafelmodell erlaubt die Beschreibung des Tragverhaltens des gesamten Tragwerks an einem Tragwerksmodell für beliebige Lastkonfigurationen.

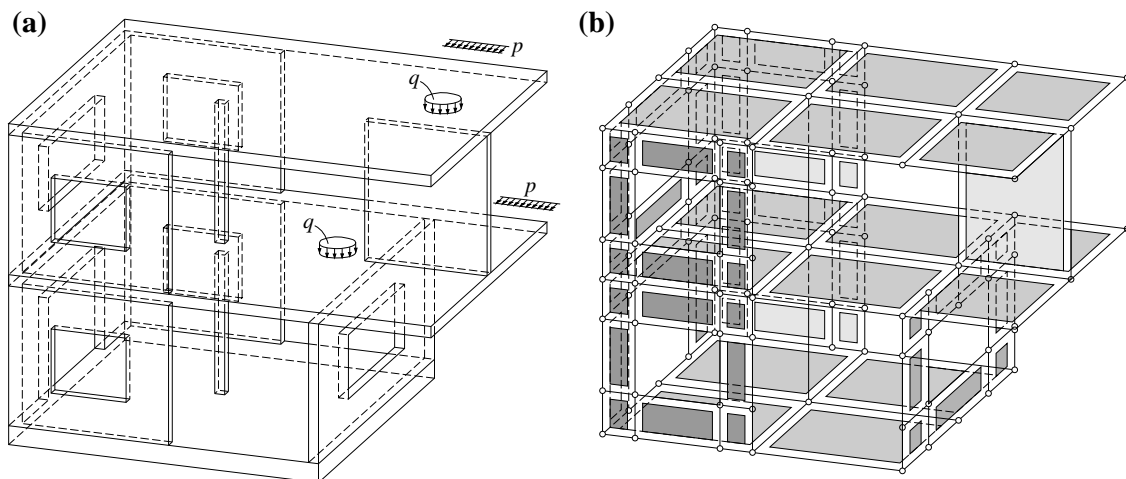


Bild 4.37 Typischer Hochbau: (a) Scheiben, Platten und Stützen mit Einwirkungen; (b) zugehöriges Stringer-Tafelmodell.

Die Stringer erfahren neben den Normalkräften infolge der Schubflüsse in den Tafeln auch konzentriert Biegemomente und Querkräfte aus der Plattentragwirkung, Kapitel 4.8.1. Die Membranschubkräfte in den Tafeln aus der Scheibenwirkung werden mit Biege- und Drillmomenten überlagert. Für diese kombinierte Beanspruchung enthält das Kapitel 3.7.3 ein Vorgehen zur Bemessung auf Grundlage des unteren (statischen) Grenzwertsatzes der Traglastverfahren.

4.9 Zusammenfassung

Anschliessend an eine Übersicht zum elastischen Verhalten von Scheiben und wandartigen Trägern und einem geschichtlichen Abriss zum Stringer-Tafelmodell sind in Kapitel 4.2 verschiedene Tafelformen beschrieben, die von baupraktischem Nutzen sind. Die dargestellten Spannungszustände für die Rechteck- das Parallelogramm- und die Trapeztafel resultieren ausschliesslich aus den Gleichgewichtsbedingungen und entsprechen jeweils einem unteren Grenzwert der Traglast.

Darauf aufbauend ist in Kapitel 4.3 ein Vergleich zwischen der Anwendung von Spannungsfeldern mit Fachwerkmodellen und der Stringer-Tafelmodellvorstellung zur Bemessung eines Biegeträgers dargestellt. Der Biegeträger wird dabei mit Rechteck- oder Parallelogrammtafeln modelliert, und die Auswirkungen auf die konstruktive Durchbildung werden aufgezeigt. Mit einer Trapeztafel im Auflagerbereich lassen sich untere Grenzwerte der Traglast für eine gegebene Bewehrung im Auflagerbereich bestimmen. Die Querschnittsbetrachtung gestaltet sich auf Grundlage des Stringer-Tafelmodells im Vergleich mit Spannungsfeldern und Fachwerkmodellen einfacher und effizienter; der Vergleich der statisch erforderlichen Bewehrungs-

mengen zeigt eine leicht höhere Menge bei der Anwendung von Rechtecktafeln in einem Biegeträger.

In Kapitel 4.4 wird das Stringer-Tafelmodell zur Bemessung von wandartigen Trägern verwendet. Hier zeigt sich die Leistungsfähigkeit dieser Modellvorstellung, insbesondere bei der Behandlung von wandartigen Trägern mit Öffnungen. Mit der gleichen Modellvorstellung lassen sich auch Krafteinleitungsprobleme beispielsweise in hohen Wandscheiben analytisch und effizient behandeln.

Die Kapitel 4.5 und 4.6 widmen sich dem Tragverhalten der Stringer und Tafeln. Erstere werden mit dem Zuggurtmodell resp. dem Druckgurtmodell idealisiert. Dabei wird jeweils der initiale Spannungszustand nach dem Schwinden mitberücksichtigt. Die Grundlage zur Beschreibung der Tafeln bildet das klassische Druckfeldmodell unter Berücksichtigung der Beziehungen von Kaufmann (1998). Für reine Schubbeanspruchung, wie sie in den Tafeln häufig vorkommen, werden analytische Beziehungen sowohl für die Steifigkeit als auch die erforderliche Betondruckfestigkeit hergeleitet. Das Zuggurt- und das Druckgurt- sowie das klassische Druckfeldmodell werden mit Versuchen aus der Literatur verglichen. Das Tragverhalten kann mit diesen Modellen vernünftig abgebildet werden.

Aufbauend auf der Beschreibung des Tragverhaltens der Stringer und Tafeln ist in Kapitel 4.7 das Last-Verformungsverhalten am Beispiel eines wandartigen Trägers mit einer Öffnung dargestellt. Zudem ist eine rechnergestützte Behandlung des Stringer-Tafelmodells mittels Stabstatik vorgestellt.

Das Kapitel 4.8 führt die Bemessung allgemeiner Stahlbetonstrukturen ein, die wiederum mit Stringern und Tafeln diskretisiert werden. Für Platten und Faltwerke lassen sich Gleichgewichtszustände resp. untere Grenzwerte der Traglast bestimmen. Auch diese Berechnungen sind rechnergestützt mittels Stabstatikmodellen möglich.

Zusammenfassend enthält das Bild 4.38 eine Übersicht über die Anwendungsmöglichkeiten des Stringer-Tafelmodells für die Bemessung resp. Abschätzung der Verformungen ebener Stahlbetonstrukturen. Bild 4.38(a) resp. (b) zeigt einen Biegeträger mit Ausklinkung resp. einen gevouteten Brückenträger modelliert mit Stringern und Tafeln. Die Bemessung mit Spannungsfeldern und Fachwerkmodellen ist in Marti (1985) dargestellt. Im Gegensatz zum Spannungsfeld ist im Bereich der Ausklinkung in Bild 4.38(a) auf Basis des Stringer-Tafelmodells eine kreuzweise Bewehrung nötig. Bild 4.38(c) zeigt eine hohe Wandscheibe mit zwei Öffnungen unter vertikalen und horizontalen Einwirkungen. Die Wandscheibe dient als Bemessungsbeispiel zur Anwendung von Fachwerkmodellen und ist in Barnes (2002) aufgeführt. Für die horizontalen und vertikalen Einwirkungen wurden getrennte Fachwerkmodelle entwickelt, welche anschliessend für die Bestimmung der erforderlichen Bewehrung überlagert wurden. Das Stringer-Tafelmodell in Bild 4.38(c) erlaubt die gleichzeitige Berücksichtigung sämtlicher Einwirkungen in einem Tragwerksmodell. Der Kraftfluss innerhalb der Wandscheibe wird mit einem Fachwerkmodell anschaulicher aufgezeigt. Bild 4.38(d) illustriert eine mögliche Aussteifung eines Hochhauses mit gekoppelten Biegeträgern, Marti (2012). Mit Hilfe des Stringer-Tafelmodells lassen sich dabei die Steifigkeiten der Kopplungsträger einfach bestimmen. Schliesslich zeigt das Bild 4.38(e) resp. (f) die Anwendung des Stringer-Tafelmodells zur Behandlung von Krafteinleitungen in Druckflanschen (mitwirkende Breite) resp. in Trägerstegen infolge einer Vorspannkraft. Dabei lassen sich elastisch verträgliche Gleichgewichtszustände bestimmen, Rogowsky & Marti (1991).

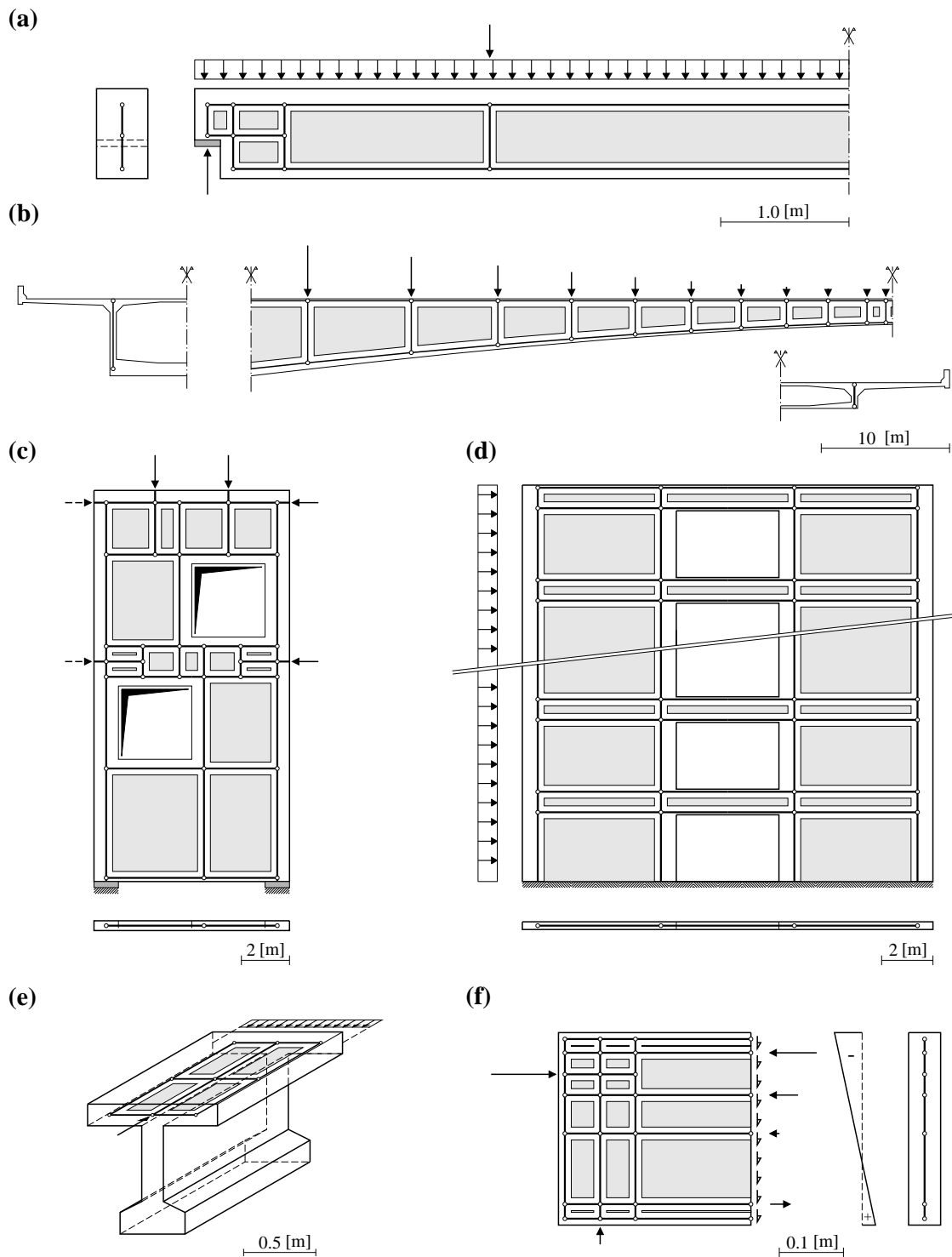


Bild 4.38 Beispiele ebener Stahlbetonstrukturen idealisiert mit Stringer-Tafelmodellen: (a) Biegeträger mit Ausklinkung [Marti (1985)]; (b) Gevouteter Brückenträger [Marti (1985)]; (c) Wandscheibe mit zwei Öffnungen als Beispiel für ACI 318 [Barnes (2002)]; (d) Hochhaus ausgesteift mit gekoppelten Biegeträgern [Marti (2012)]; (e) Krafteinleitung in Druckflansch eines Biegeträgers [Marti (1985)]; (f) Einleitung einer Vorspannkraft [Rogowsky & Marti (1991)].

5 ZUSAMMENFASSUNG UND FOLGERUNGEN

5.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Abhandlung leistet einen Beitrag zur vereinfachten Modellierung und Bemessung sowie zur näherungsweisen Beschreibung des komplexen Verformungsverhaltens von Stahlbetontragwerken. Grundlage bildet die Erfassung des Tragverhaltens von Stahlbeton-Scheiben- und Plattenelementen im ebenen Spannungszustand. Darauf aufbauend werden ebene Stahlbetonstrukturen mit Stringern und Tafeln idealisiert. In der Regel übertragen Erstere nur Kräfte in ihrer Richtung, und Letztere weisen einen Zustand reiner Schubmembrankräfte auf. Diese Idealisierung erlaubt die vereinfachte Beschreibung des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahlbetontragwerken, die aus ebenen Bauteilen zusammengefügt sind, unter allgemeiner Beanspruchung.

Der erste Teil der Abhandlung (Kapitel 2 und 3) umfasst die Grundlagen für das im Anschluss eingeführte Stringer-Tafelmodell. In Kapitel 2 werden die relevanten Eigenschaften von Stahl und Beton sowie das Zusammenwirken der beiden Werkstoffe im Allgemeinen dargestellt. Ferner wird auf den initialen Eigenspannungszustand in bewehrten Stahlbetonelementen nach dem Schwinden des Betons eingegangen.

Das Kapitel 3 beschreibt die wichtigsten Zusammenhänge zur Theorie des plastischen Potentials, die Grenzwertsätze der Traglastverfahren sowie die möglichen statischen und kinematischen Diskontinuitäten (Kapitel 3.2 und 3.3), gefolgt von einer Darstellung und Erweiterung der MOHRschen Hüllkurven zur Beschreibung des Tragverhaltens des Betons, Kapitel 3.5.

Die Fliessbedingungen für Stahlbeton-Scheibenelemente sind in Kapitel 3.6 aufgeführt. Diese basieren auf der Modellannahme, dass die Bewehrung mittels unendlich fein verteilter Einzelfasern idealisiert werden kann. Der Einfluss des endlichen Stababstands der Querkraftbewehrung auf den Tragwiderstand von Stahlbetonträgern wird mit Hilfe von kinematischen Diskontinuitäten in Kapitel 3.6.5 aufgezeigt. Insbesondere in Trägern und Platten mit geringen Querschnittshöhen ist dieser Einfluss bedeutend. Das Kapitel 3.6.6 enthält Vorschläge zur Bemessung der Querkraftbewehrung in Stahlbetonträgern. Einerseits kann die Druckfeldrichtung in Abhängigkeit der Trägerabmessungen und des gewählten Bügelabstands limitiert werden. Daraus lassen sich die Beziehungen zur Bestimmung des maximal möglichen Querkraftwiderstands eines Trägers mit vorgegebener Geometrie herleiten. Andererseits werden Beziehungen vorgeschlagen, die den Stababstand bei der Bemessung der Querkraftbewehrung für eine vorgegebene Beanspruchung berücksichtigen.

Das Kapitel 3.7 enthält verschiedene Ansätze zur Bestimmung des Tragwiderstands von Platten- resp. Schalenelementen in Stahlbeton unter kombinierter Beanspruchung. Die Betrachtung dünner Platten setzt üblicherweise voraus, dass die Durchbiegung senkrecht zur Plattenmittelebene gegenüber der Plattenstärke klein ist. Im Weiteren wird vorausgesetzt, dass Normalen zur unverformten Mittelebene gerade und senkrecht zur verformten Mittelebene der Platte bleiben. Diese kinematische Hypothese entspricht einer schubstarren Betrachtung der Platte, wonach die Schubverzerrungen und die Verzerrungen senkrecht zur Mittelebene der Platte verschwinden und die Querkräfte als verallgemeinerte Reaktionen betrachtet werden können. In Schichten parallel zur Mittelebene resultiert ein ebener Spannungszustand als Grundlage für die Sandwichmodellvorstellung. Auf Basis dieser Modellvorstellung ist in Kapitel 3.7.3 eine Fliessbedingung für Plattenelemente aufgeführt, mit welcher untere (statische) Grenzwerte der Traglast für Biege- und Drillmomente ermittelt werden können. Darüber hinaus wird, ebenfalls auf Grundlage des unteren Grenzwertsatzes der Traglastverfahren, ein Vorgehen zur Berücksichtigung von Membrankraftbeanspruchungen vorgestellt.

In Kapitel 3.8 werden obere Grenzwerte des Durchstanzwiderstands aufbauend auf den in Kapitel 3.5 hergeleiteten MOHRschen Hüllkurven bestimmt. Dabei werden Beziehungen hergeleitet, welche eine mechanisch begründete, algebraische Bestimmung des Durchstanzwiderstands ohne Querkraftbewehrung erlauben. Der Vergleich mit der in Kapitel 3.8.6 dargestellten Durchstanzversuchsreihe zeigt eine gute Übereinstimmung bezüglich der Form der Bruchfläche.

Im zweiten Teil der Abhandlung werden die vorgängig beschriebenen Elemente zum Stringer-Tafelmodell zusammengefasst. Diese Modellvorstellung erlaubt die Behandlung von Stahlbetonstrukturen, die sich aus ebenen Bauteilen (Scheiben, Platten) zusammensetzen.

Das Kapitel 4.2 beschreibt verschiedene Tafelformen, die von baupraktischem Nutzen sind. Die dargestellten Spannungszustände für die Rechteck-, die Parallelogramm- und die Trapeztafel resultieren ausschliesslich aus den Gleichgewichtsbedingungen und entsprechen jeweils einem unteren Grenzwert der Traglast.

Darauf aufbauend ist in Kapitel 4.3 ein Vergleich zwischen der Anwendung von Spannungsfeldern mit Fachwerkmodellen und der Stringer-Tafelmodellvorstellung zur Bemessung eines Biegeträgers dargestellt. Der Biegeträger wird dabei mit Rechteck-, oder Parallelogrammtafeln modelliert, und die Auswirkungen auf die konstruktive Durchbildung werden aufgezeigt. Für eine gegebene Bewehrung im Auflagerbereich lassen sich mit einer Trapeztafel untere Grenzwerte der Traglast bestimmen.

In Kapitel 4.4 wird das Stringer-Tafelmodell zur Bemessung von wandartigen Trägern mit Öffnungen verwendet. Mit der gleichen Modellvorstellung lassen sich auch Krafteinleitungsprobleme, beispielsweise in hohen Wandscheiben, analytisch und effizient behandeln.

Zur Ermittlung des Verformungsverhaltens (einschliesslich Rissabstände und Rissbreiten) ebener Stahlbetonstrukturen werden das Tragverhalten der Stringer in Kapitel 4.5 mit dem Zuggurt- resp. Druckgurtmodell und dasjenige der Tafeln in Kapitel 4.6 mit dem klassischen Druckfeldmodell beschrieben. Bei der Beschreibung des Tragverhaltens der Zug- und Druckstringer wird der initiale Spannungszustand nach dem Schwinden mitberücksichtigt. Das klassische Druckfeldmodell wird mit Beziehungen von Kaufmann (1998) ergänzt. Für reine Schubbeanspruchung, wie sie in den Tafeln häufig vorkommen, werden analytische Beziehungen sowohl für die Steifigkeit als auch die erforderliche Betondruckfestigkeit hergeleitet. Das Zuggurt- und das Druckgurt- sowie das klassische Druckfeldmodell werden mit Versuchen aus der Literatur verglichen; es zeigt sich eine befriedigende Übereinstimmung.

Aufbauend auf der Beschreibung des Tragverhaltens der Stringer und Tafeln wird in Kapitel 4.7 das Last-Verformungsverhalten am Beispiel eines wandartigen Trägers mit einer Öffnung dargestellt. Zudem wird eine rechnergestützte stabstatische Behandlung des Stringer-Tafelmodells vorgestellt. Anschliessend wird das Stringer-Tafelmodell zur Modellierung und Bemessung von Platten und Faltwerken unter allgemeiner Beanspruchung (Biege- und Drillmomente mit Membrankräften) eingesetzt. Für Platten und Faltwerke lassen sich Gleichgewichtszustände resp. untere Grenzwerte der Traglast bestimmen. Auch diese Berechnungen sind rechnergestützt mittels Stabstatikmodellen möglich.

5.2 Folgerungen und Ausblick

Abschliessend werden einige Folgerungen und Anregungen für weiterführende Arbeiten zusammengestellt:

- In der Regel basiert die Querkraftbemessung von Biegeträgern auf den Fliessbedingungen für Scheibenelemente. Diese gründen auf der Annahme, dass die Bewehrung mittels unendlich fein verteilter Einzelfasern idealisiert werden kann. Der Einfluss des endlichen Stababstands der Querkraftbewehrung kann jedoch beträchtlich sein, wie dies mittels kinematischer Diskontinuitäten aufgezeigt werden kann. Verschiedene Bemessungsvorschriften enthalten unzureichende Hinweise zum maximalen Stababstand der Querkraftbewehrung. Der Einfluss des endlichen Stababstands sollte in den Bemessungsvorschriften präzisiert werden.
- Die Betrachtung ebener Spannungszustände erlaubt die Bestimmung eines unteren (statischen) Grenzwerts der Traglast von Platten- und Schalenelementen unter kombinierten Beanspruchungen mit Biege- und Drillmomente sowie Membrankraftbeanspruchungen. Die Normalmomenten-Fliessbedingung, welche einen oberen (kinematischen) Grenzwert darstellt und in verschiedenen Bemessungsvorschriften angegeben wird, überschätzt die Traglast insbesondere bei grosser Drillmomentenbeanspruchung. Allerdings ist eine angemessene Ermittlung des Spannungszustands im Inneren einer Stahlbetonstruktur für die Bemessungspraxis bedeutender als die Berücksichtigung verfeinerter Fliessbedingungen zur Bestimmung des Tragwiderstands.
- Mit Hilfe von MOHRschen Hüllkurven kann der Durchstanzwiderstand ohne Querkraftbewehrung mechanisch begründet und analytisch fassbar bestimmt werden. Weiterführende Untersuchungen sind nötig zur Festlegung der Betonfestigkeit in Abhängigkeit des Verzerrungszustands im unmittelbaren Krafteinleitungsbereich mit Berücksichtigung des Membranspannungszustands.
- Die Stringer-Tafelmodellvorstellung basiert auf dem unteren Grenzwertsatz der Traglastverfahren. Die Bemessung von Stahlbetonbiegeträgern mit dieser Modellvorstellung ist im Vergleich zur Bemessung mit Spannungsfeldern und Fachwerkmodellen einfacher und effizienter. Das Versatzmass entfällt, und die Stringerkräfte entsprechen dem Biegemomentenverlauf dividiert durch den Hebelarm. Die konstruktiv ohnehin vorhandene Bewehrung im Steg in Trägerlängsrichtung ist zur Sicherstellung des Gleichgewichts statisch erforderlich. Im Vergleich zur Bemessung mit Spannungsfeldern und Fachwerkmodellen ist die statisch erforderliche Bewehrungsmenge für schlanke Biegeträger leicht grösser. Eine Versuchsserie an Biegeträgern mit einer Abstufung der Bewehrung im Zugstringer affin zur Momentenverteilung könnte diese Modellvorstellung sinnvoll ergänzen.
- Insbesondere zur Bemessung und der näherungsweisen Bestimmung des Verformungsverhaltens von wandartigen Trägern mit Öffnungen ist die Stringer-Tafelmodellvorstellung zweckmässig. Dabei lassen sich sowohl elastisch verträgliche als auch elastisch-plastische Last-Verformungsberechnungen durchführen. Im Vergleich zur Bemessung von wandartigen Trägern mit Spannungsfeldern und Fachwerkmodellen bildet die Stringer-Tafelmodellvorstellung die flächige Tragwirkung des Stahlbetons besser ab. Entsprechende Grossversuche an Wandscheiben mit Öffnungen könnten wichtige Hinweise zur Traglast sowie zum Verformungsvermögen derartiger Strukturen liefern.
- Die Stringer-Tafelmodellvorstellung erlaubt zudem die Ermittlung des Spannungszustands im Inneren von Stahlbetonstrukturen wie Faltwerken oder Schalen, die sich aus ebenen oder schwach gekrümmten Bauteilen (Scheiben, Platten) zusammensetzen. Die Modellvorstellung bietet insbesondere im Zusammenhang mit der Vorfabrikation der Ta-

feldn Potential. Die Tafeln könnten beispielsweise mit höherfestem Beton vorfabriziert werden und durch geschicktes Zusammenfügen der einzelnen Tafeln über Fugen in Ortbeton, die als Stringer modelliert werden könnten, ein Tragwerk bilden.

- Stahlbetonstrukturen lassen sich mit Stringern und Tafeln rechnergestützt mittels Stabstatikmodellen behandeln. Gegenüber der Finiten-Elemente-Methode bietet diese diskrete Betrachtung des Tragwerks den Vorteil, dass sämtliche Elemente streng im Gleichgewicht sind. Das Verformungsverhalten derartiger Strukturen könnte rechnergestützt genauer erfasst werden, wenn den Tafeln das gerissene Scheibenmodell sowie die nicht lineare Drillsteifigkeit auf Grundlage der Betrachtung ebener Spannungszustände eines Plattenelements implementiert würde.

LITERATUR

- ACI Committee 318 (2008), *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318M-08) and Commentary*, American Concrete Institute, 2008, 473 pp.
- Airy, G.B. (1863), „On the Strains in the Interior of Beams“, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, V. 153, 1863, pp. 49-71.
- Alvarez, M., und Marti, P. (1996), *Versuche zum Verbundverhalten von Bewehrungsstahl bei plastischen Verformungen*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 222, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, Sept. 1996, 135 pp.
- Argyris, J.H. (1954), „Energy Theorems and Structural Analysis - A Generalized Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations“, *Aircraft Engineering*, V. 26, 1954, pp. 347-356, 383-387, 394, V. 27, 1955, pp. 42-58, 80-94, 125-134, 145-158.
- Barnes, R.W. (2002), „High Wall with two Openings“, *ACI Journal*, Special Publication, V. 208, October 2002, pp. 195-212.
- Baumann, T. (1972), „Zur Frage der Netzbewehrung von Flächentragwerken“, *Bauingenieur*, V. 47, Nr. 10, 1972, pp. 367-377.
- Bažant, Z.P., Ozbolt, J., and Eligehausen, R. (1994), „Fracture Size Effect: Review of Evidence for Concrete Structures“, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, V. 120, No. 8, August 1994, pp. 2377-2398.
- Blaauwendraad, J. (2010), *Plates and FEM, Surprises and Pitfalls*, Springer, April 2010, 413 pp.
- Blaauwendraad, J. and Hoogenboom, P.C.J. (1996), „Stringer Panel Model for Structural Concrete Design“, *ACI Structural Journal*, V. 93, No. 3, May-June 1996, pp. 1-11.
- Blank, L. (2010), *Stahlbetonhochbauten: Abtragung von Erdbebeneinwirkungen in den Baugrund*, Institut für Baustatik und Konstruktion, Semesterarbeit bei Prof. Dr. P. Marti, ETH Zürich, Juli 2010, 53 pp.
- Bouma, A.L. (1993), *Mechanik schlanker Tragwerke*, Springer, April 1993, 389 pp.
- Bræstrup, M.W., Nielsen, M.P., Jensen, B.Chr., Bach, F. (1976), *Axisymmetric Punching of Plain and Reinforced Concrete*, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Serie R No. 75, Technical University of Denmark, Lyngby, 1976, 33 pp.
- Bræstrup, M.W. (1979), „Punching Shear in Concrete Slabs“, *IABSE Colloquium: Plasticity in Reinforced Concrete*, Introductory Report, Copenhagen, Denmark, 1979, pp. 115-136.
- Bruhn, E.F. (1973), *Analysis and design of flight vehicle structures*, S. R. Jacobs, 1973, 996 pp.

- Burns, C. (2012), *Serviceability Analysis of reinforced Concrete Based on the Tension Chord Model*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht, Dissertation, ETH Zürich, vdf Hochschulverlag, Zürich, 2012, in press.
- Chen, W.F., and Drucker, D.C. (1969), „Bearing Capacity of Concrete Blocks or Rock“, *Journal of the Engineering Mechanics*, Proceedings of the ASCE, V. 95, No. 4, August 1969, pp. 955-978.
- Dahl, K.K.B. (1992), *A Failure Criterion for Normal and High Strength Concrete*, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Serie R No. 286, Technical University of Denmark, Lyngby, 1992, 62 pp.
- Dischinger, F. (1932), „Beitrag zur Theorie der Halbscheibe und des wandartigen Balkens“, *IVBH Abhandlungen*, V. 1, 1932, pp. 69-93.
- Dischinger, F. (1933), „Die Ermittlung der Eiseneinlagen in wandartigen Trägern“, *Beton und Eisen*, V. 32, Nr. 15, 1933, pp. 237-239.
- Ebner, H., und Köller, H. (1938), „Über den Kraftverlauf in längs- und querversteiften Scheiben“, *Luftfahrtforschung*, V. 15, 1938, pp. 527-542.
- EC 2 (2004), *Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken - Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau*, Deutsche Fassung EN 1992-1-1:2004, 2004, 246 pp.
- Etter, S., Heinzmann, D., Jäger, T., und Marti, P. (2009), *Versuche zum Durchstanzverhalten von Stahlbetonplatten*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 324, ETH Zürich, vdf Hochschulverlag, Zürich, Dezember 2009, 64 pp.
- Model Code (2010), „First Complete Draft“, Federation Internationale du Beton, *fib Bulletin*, V. 2, No. 56, Lausanne, Switzerland, April 2010, 288 pp.
- Fehsenfeld, C. (2005), „Rissbildung in massigen Stahlbetonwänden“, 5. Forschungskolloquium des Deutschen Ausschusses für Stahlbetonbau, Tagungsband, *Beton und Stahlbetonbau*, V. 100, Oktober 2005, pp. 49-52.
- Fehsenfeld, C. (2008), *Zur Rissbildung und Mindestbewehrung in Stahlbetontragwerken*, Schriftenreihe des Instituts für Massivbau, H. 1, Technische Universität Hamburg-Harburg, Shaker Verlag, Aachen, Januar 2008, 202 pp.
- Flügge, W. (1930), „Die Spannungsermittlung in Scheiben und Schalen aus Eisenbeton“, *Ingenieur-Archiv*, V. 1, Nr. 5, 1930, pp. 481-490.
- Fürst, A., and Marti, P. (1997), „Robert Maillart’s Design Approach for Flat Slabs“, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, V. 123, No. 8, August 1997, pp. 1102-1110.

- Garvey, S.J. (1951), „The Quadrilateral ‘Shear’ Panel: The Peculiar Stressing Problems Arising in the Structure of the Non-Rectangular Swept Wing“, *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, V. 23, No. 5, 1951, pp. 134-135, 144.
- Girkmann, K. (1974), *Flächentragwerke : Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke*, 6. Aufl., Springer, Wien, 1974, 972 pp.
- Grieb, W.E., and Werner, G. (1962), „Comparison of the Splitting Tensile Strength of Concrete with Flexural and Compressive Strengths“, *Public Road*, V. 32, No. 5, December 1962, pp. 97-106.
- Heilmann, H.G. (1969), „Beziehung zwischen Zug- und Druckfestigkeit des Betons“, *Beton*, V. 2, 1969, pp. 67-70.
- Heinzmann, D. (2005), *Rissbildung und zugversteifende Mitwirkung des Betons*, Institut für Baustatik und Konstruktion, Diplomarbeit bei Prof. Dr. P. Marti, ETH Zürich, Dezember 2005, 122 pp.
- Heinzmann, D., and Marti, P. (2010), „Strength of Thin Orthogonally Reinforced Concrete Plate Elements“, *Proceedings*, 8th fib International PhD Symposium in Civil Engineering, Technical University of Denmark, Kgs. Lyngby, 2010, pp. 189-194.
- Heinzmann, D., Etter, S., Villiger S., and Jäger, T. (2011), „Punching Tests of RC Slabs with and without Shear Reinforcement“, *ACI Structural Journal*, in press.
- Heyman, J. (1972), *Coulomb’s Memoir on Statics*, University Press, Cambridge, 1972, 211 pp.
- Hillerborg, A. (1975), *Strip Method of Design*, Viewpoint, London, 1975, 256 pp.
- Hillerborg, A. (1983), „Analysis of one single crack“, *Fracture Mechanics of Concrete*, edited by F. H. Wittmann, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1983, pp. 223-249.
- Hoogenboom, P.C.J. (1998), *Discrete Elements and Nonlinearity in Design of Structural Concrete Walls*, (Doctoral Thesis), Delft University of Technology, 1998, 172 pp.
- Hoogenboom, P.C.J., and Blaauwendraad, J. (2000), „Quadrilateral shear panel“, *Engineering Structures*, V. 22, No. 12, December 2000, pp. 1690-1698.
- Ichinose, T., and Hanya, K. (1995), „Three Dimensional Shear Failure of RC Columns“, *Concrete under Severe Conditions*, E & FN Spon, 1995, pp. 1737-1747.
- Ingerslev, A. (1923), „The Strength of Rectangular Slabs“, *Journal of the Institution of Structural Engineers*, V. 1, No. 1, 1923, pp. 3-14.
- Jagd, L., Christoffersen, J., and Nielsen, M.P. (1994), *The HOTCH-POTCH Disk Element – Finite Element for Analysis of Reinforced Concrete Disks*, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Serie R No. 317, Technical University of Denmark, Lyngby, 1994, 33 pp.

- Jäger, T. (2007), *Querkraftwiderstand und Verformungsvermögen von Stahlbetonplatten*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 305, ETH Zürich, vdf Hochschulverlag, Zürich, Oktober 2007, 114 pp.
- Jäger, T. (2009), *Stahlbeton III*, Autographie zur Vorlesung, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Oktober 2009, 164 pp.
- Jäger, T., und Marti, P. (2006), *Versuche zum Querkraftwiderstand und zum Verformungsvermögen von Stahlbetonplatten*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 294, ETH Zürich, vdf Hochschulverlag, Zürich, Dezember 2005, 358 pp.
- Johansen, K.W. (1932), „Bruchmomente der kreuzweise bewehrten Platten“, *IVBH Abhandlungen*, V. 1, 1932, pp. 277-296.
- Johansen, K.W. (1962), *Brudlinieteorier*, Doctoral Thesis, Technical University of Denmark, 1943, 191 pp. (Englische Übersetzung: *Yield-line Theory*, Cement and Concrete Association, London, 1962, 181 pp.)
- Kaern, J. C. (1979), „The Stringer Method Applied to Discs with Holes“, *IABSE Colloquium: Plasticity in Reinforced Concrete*, Final Report, Copenhagen, Denmark, V. 29, 1979, pp. 87-93.
- Kaufmann, W. (1998), *Strength and Deformations of Structural Concrete Subjected to In-Plane Shear and Normal Forces*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 234, Dissertation, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1998, 147 pp.
- Kaufmann, W., and Marti, P. (1998), „Structural Concrete: Cracked Membrane Model“, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, V. 124, No. 12, 1998, pp. 1467-1475.
- Kenel, A. (2002), *Biegetragverhalten und Mindestbewehrung von Stahlbetonteilen*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 277, Dissertation, ETH Zürich, vdf Hochschulverlag, Zürich, 2002, pp. 114.
- Khalifa, J. (1986), *Limit Analysis and Design of Reinforced Concrete Shell Elements*, PhD Thesis, University of Toronto, Toronto, 1986, 314 pp.
- Kinnunen, S., Nylander, H., and Tolf, P. (1980), *Englische Übersetzung: Influence of the Slab Thickness on the Strength of Concrete Slabs at Punching: Tests with Rectangular Slabs*, Test Report No. 137, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1980, 73 pp.
- Kollegger, J. (1991), „Algorithmus zur Bemessung von Flächentragwerkelementen unter Normalkraft- und Momentenbeanspruchung“, *Beton- und Stahlbetonbau*, V. 86, Nr. 5, 1991 pp. 114-119.
- Kuhn, P. (1956), *Stresses in Aircraft and Shell Structures*, McGraw-Hill, New York, 1956, 435 pp.

- Kupfer, H. (1964), „Erweiterung der MOHRschen Fachwerkanalogie mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der Formänderungsarbeit“, *CEB Bulletin d'information*, Nr. 40, 1964, pp. 44-57.
- Kupfer, H. (1973), *Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H. 229, Ernst und Sohn, Berlin, 1973, 131 pp.
- Lampert, P., and Thürlimann, B. (1971), „Ultimate Strength and Design of Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending“, *IABSE, Publications*, V. 31-I, 1971, pp. 107-131.
- Lee, S.-K., Song, Y.-C., and Han, S.-H. (2004), „Biaxial Behavior of Plain Concrete of Nuclear Containment Building“, *Nuclear Engineering and Design*, V. 227, No. 2, January 2004, pp. 143-153.
- Loov, R.E., and Peng, L. (2000), „Shear Strength of High-Strength Concrete-ACI 318-95 versus Shear Friction“, *ACI Structural Journal*, Special Publication, V. 189, January 2000, pp. 411-430.
- Lourenço, P.B., and Figueiras, J.A. (1993), „Automatic Design of Reinforcement in Concrete Plates and Shells“, *Engineering Computations*, V. 10, 1993, pp. 519-541.
- Lourenço, P.B., and Figueiras, J.A. (1995), „Solution for the Design of Reinforced Concrete Plates and Shells“, *Journal of Structural Engineering*, V. 121, May 1995, pp. 815-823.
- Marti, P. (1980), *Zur Plastischen Berechnung von Stahlbeton*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 104, Dissertation, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1980, 76 pp.
- Marti, P. (1981), „Gleichgewichtslösungen für Flachdecken“, *Schweizer Ingenieur und Architekt*, V. 99, Nr. 38, 1981, pp. 799-809.
- Marti, P. (1982) „Strength and Deformations of Reinforced Concrete Members Under Torsion and Combined Actions“, Comité Euro-International du Béton, Bulletin d'Information No. 146, Jan. 1982, pp. 97-138.
- Marti, P. (1985), „Basic Tools of Reinforced Concrete Beam Design“, *ACI Structural Journal*, V. 82, No. 1, January 1985, pp. 46-56.
- Marti, P. (1986a), „Staggered Shear Design of Concrete Bridge Girders“, *Proceedings, International Conference on Short and Medium Span Bridges*, Ottawa, August 1986. V. 1, pp. 139-149.
- Marti, P., (1986b), „Staggered Shear Design of Simply Supported Concrete Beams“, *ACI Structural Journal*, V. 83, No. 1, January-February. 1986, pp. 36-42.
- Marti, P. (1987), *Application of Plastic Analysis to Shear Design of Reinforced Concrete Members*, Lecture Notes, University of Toronto, Toronto, February 1987, 51 pp.

- Marti, P. (1990), „Design of Concrete Slabs for Transverse Shear“, *ACI Structural Journal*, V. 87, No. 2, March 1990, pp. 180-190.
- Marti, P. (1991), „Dimensioning and Detailing“, Colloquium Report, IABSE Colloquium ‘Structural Concrete’, Stuttgart 1991, IABSE V. 62, 1991, pp. 411-443.
- Marti, P. (2012), *Baustatik*, Ernst & Sohn, Berlin, 2012, 783 pp.
- Marti, P., and Kong, K. (1987), „Response of Reinforced Concrete Slab Elements to Torsion“, *Journal of Structural Engineering*, V. 113, No. 5, 1987, pp. 976-993.
- Marti, P., and Meyboom, J. (1992), „Response of Prestressed Concrete Elements to In-Plane Shear Forces“, *ACI Structural Journal*, V. 89, No. 5, 1992, pp. 503-514.
- Marti, P., Alvarez, M., Kaufmann, W., and Sigrist, V. (1998), „Tension Chord Model for Structural Concrete“, *Structural Engineering International*, IABSE, V. 8, No. 4, November 1998, pp. 287-298.
- Marti, P., Alvarez, M., Kaufmann, W., und Sigrist, V. (1999), *Tragverhalten von Stahlbeton*, IBK Publikation SP-008, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1999, 301 pp.
- Marti, P., und Thürlimann, B. (1977), „Fließbedingung für Stahlbeton mit Berücksichtigung der Betonzugfestigkeit“, *Beton- und Stahlbetonbau*, Jg. 72, H. 1, 1977, pp. 7-12.
- Mathcad, (2011), Computeralgebrasystem, Mathcad Version 15.0, Parametric Technology Corporation, Needham, USA.
- Meyboom, J. (1987), *An Experimental Investigation of Partially Prestressed, Orthogonally Reinforced Concrete Elements Subjected to Membrane Shear*, Master Thesis, University of Toronto, Toronto, 1987, 180 pp.
- Meyboom, J., and Marti, P. (2001), *Experimental Investigation of Shear Diaphragms in Reinforced Concrete Slabs*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 263, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 2001, 165pp.
- Möbius, F. (2008), *Kraft-Verformungs-Verhalten von umschnürtem Stahlbeton*, Schriftenreihe des Instituts für Massivbau H. 2, Technische Universität Hamburg-Harburg, Shaker Verlag, Aachen, 2008, 127 pp.
- Mohr, O. (1906), *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik*, Ernst & Sohn, Berlin, 1906, 459 pp.
- Morley, C.T. (1966), „On the Yield Criterion of an Orthogonally Reinforced Concrete Slab Element“, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, V. 14, No. 1, 1966, pp. 33-47.

- Muttoni, A. (1990), *Die Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie in der Bemessung von Stahlbeton*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 83, Dissertation, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1990, 158 pp.
- Muttoni, A. (2003), „Schubfestigkeit und Durchstanzen von Platten ohne Querkraftbewehrung“, *Beton- und Stahlbetonbau*, V. 98, Nr. 2, 2003, pp. 74-84.
- Muttoni, A., Schwartz, J., und Thürlimann, B. (1996), *Bemessung von Betontragwerken mit Spannungsfeldern*, Birkhäuser, Basel, 1996, 145 pp.
- Nielsen, M.P. (1964), *Limit Analysis of Reinforced Concrete Slabs*, Acta Polytechnica Scandinavica, Civil Engineering and Building Construction Series No. 26, Danish Contribution No. 22, Copenhagen, 1964, 167 pp.
- Nielsen, M.P. (1971), On the Strength of Reinforced Concrete Discs, Acta Polytechnica Scandinavica, Civil Engineering and Building Construction Series, No. 70, Copenhagen, 1971, 261 pp.
- Nielsen, M.P., and Hoang, L.C. (2011), *Limit Analysis and Concrete Plasticity*, 3rd edition, CRC Press, Boca Raton, 2011, 788 pp.
- Popovics, S. (1973), „A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete“, *Cement and Concrete Research*, V. 3, No. 5, 1973, pp. 583-599.
- Prager, W. (1955), *Probleme der Plastizitätstheorie*, Birkhäuser, Basel, 1955, 100 pp.
- Raphael, J.M. (1984), „Tensile Strength of Concrete“, *ACI Journal Proceedings*, V. 81, No. 3, 1984, pp. 158-165.
- Ritter, W. (1899), „Die Bauweise Hennebique“, *Schweizerische Bauzeitung*, V. 17, 1899, pp. 41-43, 49-52 und 59-61.
- Rogowsky, D.M., and Marti, P. (1991), *Detailing for Post-Tensioning*, VSL International, Technical Report No. 3, Bern, 1991, 50 pp.
- Salim, W., and Sebastian, W.M., (2002), „Plasticity Model for Predicting Punching Shear Strengths of Reinforced Concrete Slabs“, *ACI Structural Journal*, V. 99, No. 6, November 2002, pp. 827-835.
- Sargin, M. (1971), *Stress-Strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete*, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo Ontario, 1971, 167 pp.
- Schlaich, J., Schäfer, K., and Jennewein, M. (1987), „Toward a Consistent Design of Structural Concrete“, *PCI Journal*, V. 32, No. 3, May-June 1987, S. 74-150.

- Seelhofer, H. (2009), *Ebener Spannungszustand im Betonbau: Grundlagen und Anwendungen*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht No. 320, Dissertation, ETH Zürich, vdf Hochschulverlag, Zürich, November 2009, 236 pp.
- SIA 162 (1968), *Technische Norm 162 Ausgabe 1968, Norm für die Berechnung, Konstruktion und Ausführung von Bauwerken aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton*, Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich, Betonbauten, 81 pp.
- SIA 162 (1993), *Norm 162 Teilrevision der Ausgabe 1989 Betonbauten*, Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich, 1993, 86 pp.
- SIA 262 (2003), *Schweizer Norm 505 262 Betonbau*, Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich, 2003, 90 pp.
- SIA 269/2 (2011), *Schweizer Norm 505 269/2 Erhaltung von Tragwerken - Betonbau*, Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich, 2011, 44 pp.
- SIA D 0181 (2003), *Grundlagen der Projektierung von Tragwerken - Einwirkungen auf Tragwerke - Einführung in die Normen SIA 260 und 261*, SIA Dokumentation, Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich, Betonbauten, 2003, 109 pp.
- SIA D 0182 (2003), *Betonbau - Einführung in die Norm SIA 262*, SIA Dokumentation, Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich, Betonbauten, 2003, 125 pp.
- SIA D 0192 (2004), *Betonbau - Bemessungsbeispiele zur Norm SIA 262*, SIA Dokumentation, Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich, Betonbauten, 2004, 156 pp.
- Sigrist, V. (1995), *Zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 210, Dissertation, Birkhäuser, Basel, Juli 1995, 159 pp.
- Sigrist, V. (2009), „Das Druckgurtmodell für Stahlbetonbauteile“, *Beton- und Stahlbetonbau*, V. 104, Nr. 8, 2009, pp. 496-504.
- Sigrist, V. (2011), „Generalized Stress Field Approach for Analysis of Beams in Shear“, *ACI Structural Journal*, V. 108, No. 4, July 2011, pp. 479-487.
- Sigrist, V., Alvarez, M., and Kaufmann, W. (1995), „Shear and Flexure in Structural Concrete Beams“, *CEB Bulletin d'information*, No. 223, June 1995, pp. 7-49.
- Sigrist, V., und Marti, P. (1993), *Versuche zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 202, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, November 1993, 90 pp.
- Sigrist, V., und Hackbarth, B. (2010), „Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonträgern“, *Beton- und Stahlbetonbau*, V. 105, 2010, pp. 686-694.

- Timpe, A. (1905), „Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion“, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, V. 52, 1905, pp. 348-383.
- Torre, C., 1951, „Über die physikalische Bedeutung der Mohrschen Hüllkurve“, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, V. 31, Nr. 8/9, S. 275-277.
- Vecchio, F.J., and Collins, M.P. (1986), „The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear“, *ACI Structural Journal*, V. 83, No. 2, March-April 1986, pp. 219-231.
- Wagner, H. (1929), „Ebene Blechwandträger mit sehr dünnem Stegblech“, *Zeitschrift für Flugtechnik und Motorschiffahrt*, V. 20, 1929, pp. 200-207, 227-233, 256-262, 279-284 und 306-314.
- Walker, S., and Bloem, D.L. (1960), „Effects of Aggregate Size on Properties of Concrete“, *ACI Structural Journal*, V. 57, No. 9, September 1960, pp. 283-298.
- Xie, L., Bentz, E.C., and Collins, M.P. (2011), „Influence of Axial Stress on Shear Response of Reinforced Concrete Elements“, *ACI Structural Journal*, V. 108, No. 6, November 2011, pp. 745-754.
- Ziegler, H. (1960), „Über den Zusammenhang zwischen der Fliessbedingung eines starrplastischen Körpers und seinem Fliessgesetz“, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, V. 11, 1960, pp. 413-426.
- Ziegler, H., Nänni, J., und Wehrli, C. (1973), „Zur Konvexität der Fliessfläche“, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, V. 24, 1973, pp. 140-144.
- Zweiling, K. (1952), *Grundlagen einer Theorie der biharmonischen Polynome*, Verlag Technik, Berlin, 1952, 129 pp.

BEZEICHNUNGEN

Lateinische Grossbuchstaben

A	Querschnittsfläche
A_c	Betonquerschnittsfläche
A_s	Bewehrungsquerschnittsfläche
$C_{1..7}$	Konstanten
$C_{11..14}$	Konstanten
D	elementare Dissipationsarbeit
E	Elastizitätsmodul
E_c	Elastizitätsmodul von Beton
E_s	Elastizitätsmodul von Stahl
E_{sh}	Verfestigungsmodul von Stahl
EJ	Biegesteifigkeit
F	Spannungsfunktion, Kraft
F_{sup}	Kraft im oberen Stringer
F_{tV}	Längszugkraft infolge Querkraft
F_{inf}	Kraft im unteren Stringer
G	Schubmodul
L	LAGRANGE-Funktion
J_z	Trägheitsmoment eines Biegestabs
M	Biegemoment
M_t	Biegemoment einer Plattendiskontinuität
N	Normalkraft; Bildpunkt auf dem MOHRschen Kreis
N_{max}	Maximale Normaldruckkraft
P	Durchstanzwiderstand, Einzellast
P_x	Einzellast in x -Richtung
P_y	Einzellast in y -Richtung
P_u	unterer (statischer) Grenzwert der Traglast
P_H	Durchstanzwiderstand mit hyperbolischer Hüllkurve
P_K	Durchstanzwiderstand mit modifizierter Fliessbedingung von COULOMB
P_P	Durchstanzwiderstand mit parabolischer Hüllkurve
Q	Einzelkraft; Pol MOHRscher Kreise
T	Bildpunkt auf dem MOHRschen Kreis
V	Querkraft
V_S	Querkraftanteil der Stringer
V_T	Querkraftanteil der Tafeln
$V_{Ry,s}$	Querkraftwiderstand der Querkraftbewehrung bezüglich der y -Richtung
$V_{Ry,c}$	Querkraftwiderstand des Betondruckfelds bezüglich der y -Richtung
$V_{xy,max}$	maximaler Querkraftwiderstand
V_t	Querkraft einer Plattendiskontinuität (in z -Richtung wirkend)
W	Bewehrungsmenge
W_{iV}	Menge der Querkraftbewehrung in i -Richtung ($i = x, y$)
W_{iM}	Menge der Biegebewehrung in i -Richtung ($i = x, y$)
W_{FWM}	Bewehrungsmenge aus der Bemessung mit einem Fachwerkmodell
W_{STM}	Bewehrungsmenge aus der Bemessung mit dem Stringer-Tafelmodell
ΔW	Differenz der Bewehrungsmengen
W_i	innere Arbeit

W_e	äussere Arbeit
X	Bildpunkt auf dem MOHRschen Kreis
X_i	Überzählige Grösse mit $i = 1, 2, 3, \dots$
X, Y, Z	Koordinatenrichtungen
Y	Fliessfunktion; Bildpunkt auf dem MOHRschen Kreis
Z	Bildpunkte auf dem MOHRschen Kreis

Lateinische Kleinbuchstaben

a	Seitenlänge; Koordinatenrichtung; Abstand von zwei Diskontinuitätsebenen
a_{sxt}	bezogene Querschnittsfläche der oberen Bewehrung in x -Richtung
a_{sxb}	bezogene Querschnittsfläche der unteren Bewehrung in x -Richtung
a_{syx}	bezogene Querschnittsfläche der oberen Bewehrung in y -Richtung
a_{syb}	bezogene Querschnittsfläche der unteren Bewehrung in y -Richtung
b	Koordinatenrichtung
b_w	Stegbreite
c	Kohäsion (Parameter der modifizierten Fliessbedingung von Coulomb); Anzahl der Lagergrössen
c_{nom}	Bewehrungsüberdeckung
c_α	fiktive Kohäsion
d	Dicke einer kinematischen Diskontinuität; Statische Höhe
d_v	Hebelarm der inneren Kräfte
e	Exzentrizität
f_c	einachsige Betondruckfestigkeit; effektive Betondruckfestigkeit
f_{cc}	Betonzylinderdruckfestigkeit
f_{ce}	effektive Betondruckfestigkeit
f_{ck}	charakteristischer Wert der Betonzylinderdruckfestigkeit
f_{ct}	Betonzugfestigkeit
f_{st}	Stahlzugfestigkeit
f_{sy}	Stahlfliessgrenze
f_t	einachsige Zugfestigkeit
f_{wy}	Stegkraft in y -Richtung
f_{wx}	Stegkraft in x -Richtung
f_x, f_y	Volumenkräfte in x - bzw. y -Richtung
h	Dicke eines ebenen Stahlbeton-Flächentragwerkelements
k	Abkürzung $k = \cot\theta$; Parameter der modifizierten Fliessbedingung von COULOMB; Parameter; Anzahl Knoten, Hilfsgrösse
k_{zz}	Volumenkraft in z -Richtung
k_m	Hilfsgrösse
l	Länge
l_x, l_y	Abmessung in x - bzw. y -Richtung
l_{ys}	Abmessung der Querkraftbewehrung
m	Biege- oder Drillmoment
m_{nn}, m_{tt}	Biegemoment in n - bzw. t -Richtung
m_{nt}	Drillmomente bezüglich der n - bzw. t -Richtung
m_{nu}, m'_{nu}	positives bzw. negatives plastisches Moment in n -Richtung
m_u	Biege widerstand
m_{xx}, m_{yy}	Biegemoment in x - bzw. y -Richtung
m_{xxu}, m_{yyu}	positives plastisches Moment in x - bzw. y -Richtung

m'_{xxu}, m'_{yyu}	negatives plastisches Moment in x - bzw. y -Richtung
m_{xy}	Drillmomente bezüglich der x - und y -Richtung
m_1, m_2	Hauptmomente
n	Grad der statischen Unbestimmtheit; Koordinatenrichtung; Wertigkeit $n = E_s/E_c$
	Membrankraft
n_c	Betonmembrannormalkraft
n_h	Wertigkeit $n_h = E_{sh}/E_c$
n_{nn}, n_{tt}	Membrannormalkräfte in n - bzw. t -Richtung
n_{nt}	Membranschubkraft bezüglich der n - und t -Richtung ($n_{nt} = n_{tn}$)
n_s	Bewehrungsmembrannormalkraft
n_{xx}, n_{yy}	Membrannormalkräfte in x - bzw. y -Richtung
n_{xy}	Membranschubkraft bezüglich der x - und y -Richtung ($n_{xy} = n_{yx}$)
p_i	Streckenlast in i -Richtung ($i = x, y, z$)
q	gleichmässig verteilte Last, Schubfluss
q_i	Schubfluss mit $i = 1, 2, 3, \dots$
q_m	mittlerer Schubfluss
r	Kreisradius
s	Stababstand; Summe der Anzahl Stringer
s_{max}	maximaler Stababstand
s_r	Rissabstand
s_{rmi}	Rissabstand in i -Richtung ($i = x, y$)
t	Koordinatenrichtung; Abkürzung $t = \tan\varphi$, Druckzonenhöhe
t_b	Dicke des unteren Betondruckfelds im Sandwichmodell
t_t	Dicke des oberen Betondruckfelds im Sandwichmodell
t_k	Schichtstärke des Sandwichkerns
u_V, u_M	Schub- und Biegeverschiebungen
v	Querkraft
v_{zx}, v_{zy}	Querkräfte in z -Richtung bezüglich der x - bzw. y -Richtung
v_0	Hauptquerkraft
w	Verformung; Durchbiegung
δ	virtuelle Verschiebung
x, y, z	Koordinatenrichtungen
x_{V0}	Querkraftnullpunkt
z_{sib}	z -Ordinate der unteren Bewehrung in i -Richtung, ($i = x, y$)
z_{sit}	z -Ordinate der oberen Bewehrung in i -Richtung, ($i = x, y$)
z_1, z_3	z -Ordinate bei der eine Hauptverzerrung verschwindet

Griechische Kleinbuchstaben

α	Winkel; fiktiver Winkel der inneren Reibung; Hilfsgrösse
β	Richtungswinkel der Querkraftbewehrung, Richtungswinkel der Hauptverzerrungen im Gegenuhrzeigersinn; [$0 \leq \beta \leq \pi$]); Abkürzung
γ	Schiebung; Richtungswinkel
$\dot{\gamma}$	Schiebungsinkrement
γ_{xy}	Schiebung bezüglich x - und y -Richtung
γ_{xy0}	Schiebung in der Mittelebene (= Bezugsebene) bezüglich x - und y -Richtung
$\dot{\gamma}_{nt}$	Schiebungsinkrement bezüglich n - und t -Richtung
$\dot{\gamma}_{xy}$	Schiebungsinkrement bezüglich x - und y -Richtung
γ_{zx}, γ_{zy}	Schubverzerrungen in z -Richtung bezüglich der x - und y -Richtung

$\dot{\gamma}_{xy0}$	Schiebungsinkrement der Mittelebene (= Bezugsebene) bezüglich x - und y -Richtung
$\dot{\delta}$	Verschiebungsinkrementenvektor einer kinematischen Diskontinuität
δ	Schlupf; Winkel; Einzelverformung
ε	Verzerrung
ε_c	Betondehnung
ε_{cm}	mittlere Betondehnung
ε_{cu}	Betonbruchdehnung
ε_{cs}	Endschwindmass des Betons
ε_{ci}	Betondehnung infolge Schwinden
$\varepsilon_{c1}, \varepsilon_{c3}$	Hauptverzerrungen des Betons
$\dot{\varepsilon}$	Verzerrungsinkrement
ε_{ij}	Verzerrungstensor
$\dot{\varepsilon}_{ij}$	Tensor der Verzerrungsinkremente
$\dot{\varepsilon}_{ij}^e$	Tensor der elastischen Verzerrungsinkremente
ε_s	Stahldehnung
ε_{si}	Stahldehnung infolge Schwinden
ε_s	mittlere Stahldehnung über ein Risselement
ε_{sr}	Stahldehnung am Riss
ε_{su}	Stahlbruchdehnung
ε_{sy}	Stahldehnung beim Fliessbeginn
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$	Verzerrungen in x - bzw. y -Richtung
$\dot{\varepsilon}_{xx}, \dot{\varepsilon}_{yy}$	Verzerrungsinkremente in x - bzw. y -Richtung
$\varepsilon_{xx0}, \varepsilon_{yy0}$	Verzerrungen der Mittelebene (= Bezugsebene) in x - bzw. y -Richtung
$\dot{\varepsilon}_{xx0}, \dot{\varepsilon}_{yy0}$	Verzerrungsinkremente der Mittelebene in x - bzw. y -Richtung
ε_{zz}	Verzerrungen in z -Richtung
$\varepsilon_1, \varepsilon_3$	Hauptverzerrungen
$\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_3$	Hauptverzerrungsinkremente
θ	Winkel; Richtungswinkel der kleineren Betonhauptspannung σ_{c3} bezüglich der x -Richtung (positiv im Gegenuhrzeigersinn); Richtungswinkel des Betondruckfelds
θ_{cr}	Hauptdruckrichtung im gerissen – elastischen Zustand
θ_{endl}	Richtungswinkel des Betondruckfelds bei endlichem Stababstand
θ_u	Hauptdruckrichtung beim Erreichen der Traglast
θ_t	Richtungswinkel einer kinematischen Diskontinuität bezüglich der x -Richtung
θ_v	Richtungswinkel des Betondruckfelds bezüglich der Mittelebene im Sandwichmodell
θ_3	Richtungswinkel der Betonhauptdruckrichtung bezüglich der x -Richtung
κ	LAGRANGEScher Multiplikator; positiver Faktor im Fliessgesetz; Abkürzung
λ	Hilfsgrössen; Parameter zur Beschreibung des Rissabstandintervalls [$0,5 \leq \lambda \leq 1$]
λ_1, λ_2	Hilfsgrössen
ν	Querdehnzahl
ξ	Koordinatenrichtung
ρ	Bewehrungsgehalt ($\rho = A_s / A_c$)
ρ_i	Bewehrungsgehalt der Bewehrungslage in i -Richtung ($i = x, y, z$)
ρ_{imax}	maximaler Bewehrungsgehalt der Bewehrungslage in i -Richtung ($i = x, y, z$)
σ	Spannung
σ_b	Normalspannung in Punkt B

σ_c	Betonspannung
σ_{ci}	Betonspannung infolge Schwinden
σ_{cmax}	maximale Betondruckfestigkeit
σ_{c1}, σ_{c3}	Betonhauptspannungen
$\sigma_{ij}, \sigma'_{ij}, \sigma^*_{ij}$	Spannungstensor
σ_{nn}, σ_{tt}	Normalspannungen in n - bzw. t -Richtung
σ_s	Stahlspannung
σ_{si}	Stahlspannung infolge Schwinden
σ_{sr}	Stahlspannung am Riss
σ_{xx}, σ_{yy}	Normalspannungen in x - bzw. y -Richtung
σ_1, σ_3	Hauptspannungen
τ	Schubspannung
τ_b	Verbundschubspannung
τ_{b0}, τ_{b1}	Verbundschubspannungen gemäss dem Zuggurtmodell
τ_{nt}	Schubspannung bezüglich der n - und t -Richtung
τ_{xy}	Schubspannung bezüglich der x - und y -Richtung
$\tau_{xy,\alpha}$	Schubspannung
$\tau_{xy,max}$	maximale Schubspannung bezüglich der x - und y -Richtung
τ_{zx}, τ_{zy}	Schubspannung bezüglich der z - und x - bzw. z - und y -Richtung
φ	Winkel; Winkel der inneren Reibung
φ_0	Winkel der Hauptquerkrafttrichtung bezüglich der x -Richtung (positiv im Uhrzeigersinn)
φ_1	Winkel der Hauptrichtungen bezüglich der x -Richtung (positiv im Uhrzeigersinn)
χ	Krümmung
$\dot{\chi}$	Krümmungsinkrement
χ_{nn}, χ_{tt}	Krümmungen in n - bzw. t -Richtung
χ_{nt}	Drillungen bezüglich der n - und t -Richtung
χ_{xx}, χ_{yy}	Krümmungen in x - bzw. y -Richtung
χ_{xy}	Drillungen bezüglich der x - und y -Richtung
ω	mechanischer Bewehrungsgehalt
ω_b	mechanischer Bewehrungsgehalt der unteren Bewehrung
ω_t	mechanischer Bewehrungsgehalt der oberen Bewehrung
ω_{max}	maximaler mechanischer Bewehrungsgehalt
ω_{min}	minimaler mechanischer Bewehrungsgehalt
$\bar{\omega}_i$	mittlerer Bewehrungsgehalt $\bar{\omega} = 1 / 2(\omega_b + \omega_t)$ in i -Richtung ($i = x, y$)

Sonderbezeichnungen

DFM	Druckfeldmodell
DGM	Druckgurtmodell
DKA	Doppelkopfanker
ZGM	Zuggurtmodell
endl	endlicher Stababstand
\emptyset	Stabdurchmesser
\emptyset_i	Stabdurchmesser einer Bewehrungslage in i -Richtung ($i = x, y, z$)
1, 2, 3	Hauptrichtungen
I, II	charakteristische Richtungen
i, ii	Bereich, Querkraftbewehrungsstab

LEBENS LAUF

Daniel Matt Heinzmann

Geboren am 20. Juni 1976 in Visp (VS)

Bürger von Visperterminen (VS)

Ausbildung

- | | |
|-----------|---|
| 1992-1996 | Berufslehre zum Tiefbauzeichner Furrer & Heinzmann AG, in Visp |
| 1996-1997 | Technische Berufsmatura an der Berufsschule in Visp |
| 1997-2000 | Bauingenieurstudium an der Fachhochschule in Luzern
Diplomarbeit „Fussgängerbrücke über die Massa“ bei Prof. Dr. Bruno Zimmerli
Auszeichnung zum Diplomabschluss |
| 2002-2006 | Studium der Bauingenieurwissenschaften an der ETH Zürich
Diplomarbeit „Rissbildung und zugversteifende Mitwirkung des Betons“ bei Prof. Dr. Peter Marti
ETH-Silber-Medaille, Willi-Studer-Preis und ausserordentlicher Preis des Studiengangs |
| 2007-2012 | Assistent und wissenschaftlicher Mitarbeiter von Prof. Dr. Peter Marti
Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich |

Berufliche Tätigkeit

- | | |
|-----------|---|
| 2000-2002 | Sachbearbeiter Bauingenieurbüro Ritz Zimmerli Sigrist AG, in Luzern |
| 2006-2009 | Projektleiter Bauingenieurbüro Furrer & Heinzmann AG, in Visp und Teyssere und Candolfi AG, in Visp |