

MASTER OF SCIENCE IN ENGINEERING
Vertiefungsmodul I

Tragverhalten von Stahlbetontragwerken
Grundlagen

Pascal Gitz

Horw, Donnerstag, 7. September 2023

Advisor: Prof. FH, Dr. Daniel Heinzmann
Experte: Dr. Thomas Jäger

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Sämtliche verwendeten Textausschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet.

Horw, 21. Januar 2023

Pascal Gitz

Kurzfassung

Diese Arbeit untersucht das Tragverhalten von Stahlbetontragwerken und stellt verschiedene Modelle und Methoden vor, die zur Beschreibung und Berechnung der Verformungen verwendet werden können. Wir werden die Grundlagen der Kontinua-, Mohrschen Analogie-, Zuggurt- und Fachwerkmodelle erläutern und sie auf zwei Versuchsexperimente anwenden: einen Dreipunktbiegeversuch und einen Vierpunktbiegeversuch. Die Ergebnisse der verschiedenen Modelle werden mit den gemessenen Verformungen aus den Versuchen verglichen und die Vor- und Nachteile sowie die Anwendbarkeit der Modelle diskutiert. Es wird gezeigt, dass die Modelle unterschiedliche Genauigkeiten und Komplexitäten aufweisen und dass die Wahl des geeigneten Modells von den Randbedingungen, der Bewehrungsführung, der Querkraftbewehrung und der Zugversteifung abhängt.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Hintergrund	5
2	Modellbeschreibung	6
2.1	Kontinua - reine Biegeträger	6
2.2	Mohrsche Analogie	9
2.3	Zuggurtmodell	10
2.4	Numerische Integration der Krümmung	13
2.5	Versatzmass	14
2.6	Fachwerk	14
3	Verformung an Dreipunktbiegeversuch	15
3.1	Versuchsbeschreibung	15
3.2	Eigenschaften der Baustoffe	18
3.3	Reiner Biegeträger	18
3.4	Mohrsche Analogie	25
3.5	Abschätzung nach Norm	27
3.6	Numerische Integration der Krümmung	28
3.7	Fachwerk	43
3.8	Modellvergleich	46
4	Verformung an einem Vierpunktbiegeversuch	51
4.1	Versuchsbeschreibung	51
4.2	Eigenschaften der Baustoffe	52
4.3	Reiner Biegeträger	52
4.4	Mohrsche Analogie	59
4.5	Abschätzung nach Norm	61
4.6	Numerische Integration der Krümmung	62
4.7	Fachwerk	79
4.8	Modellvergleich	81
	Literatur	85

1 Einleitung

1.1 Hintergrund

Diese Arbeit untersucht das Tragverhalten von Stahlbetontragwerken und stellt verschiedene Modelle und Methoden vor, die zur Beschreibung und Berechnung der Verformungen verwendet werden können. Wir werden die Grundlagen der Kontinuua-, Mohrschen Analogie-, Zuggurt- und Fachwerkmodelle erläutern und sie auf zwei Versuchsexperimente anwenden: einen Dreipunktbiegeversuch und einen Vierpunktbiegeversuch. Die Ergebnisse der verschiedenen Modelle werden mit den gemessenen Verformungen aus den Versuchen verglichen und die Vor- und Nachteile sowie die Anwendbarkeit der Modelle diskutiert. Es wird gezeigt, dass die Modelle unterschiedliche Genauigkeiten und Komplexitäten aufweisen und dass die Wahl des geeigneten Modells von den Randbedingungen, der Bewehrungsführung, der Querkraftbewehrung und der Zugversteifung abhängt.

2 Modellbeschreibung

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Modelle und Methoden erläutert, die verwendet werden können, um das Tragverhalten von Stahlbeton mithilfe von Berechnungen zu analysieren.

2.1 Kontinua - reine Biegeträger

2.1.1 Aufbau

Die Verknüpfung der Gleichgewichtsbedingungen mit den kinematischen Relationen, sowie den linear elastischen Stoffgleichungen führt auf gewöhnliche Differentialgleichungen für die je nach Problemstellung relevanten Verschiebungsgrößen, und aus diesen ergeben sich die interessierenden inneren Verformungs- und Kraftgrößen in Abhängigkeit der Lage auf der Stabachse. Beschreibt [1] in seinem Kapitel Kontinua.

Das System in Abbildung 2.1 beschreibt einen einfachen Balken mit einer gleichmäßig verteilten Last. Berücksichtigt man ein infinitesimal kleines Element im Balken, so lassen sich an diesem differentiellen Element Beziehungen zwischen Einwirkung, Querkraft, Verdrehung und Verformung aufstellen.

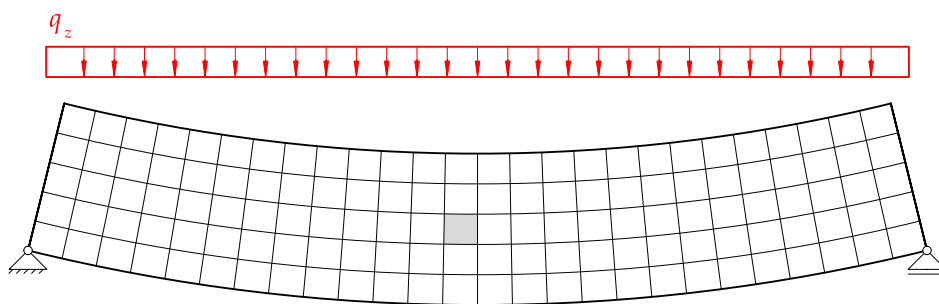


Abbildung 2.1: Statisches System mit finiten Elementen

Der Vorteil dieser Beziehungen liegt darin, dass diese allgemein für Biegeprobleme angewendet werden können. Als Gedankenexperiment kann man sich folgendes vorstellen. Man kann die differentiellen Elemente beliebig anordnen und weitere statische Systeme zu bilden, die differentiellen Beziehungen bleiben jedoch die selben.

Die Schnittkräfte am Differentiellen Element sind in Abbildung 2.2 gezeigt. Ebenfalls ist der verformte Zustand dargestellt, dieser bietet Auskunft über die kinematischen Relationen.

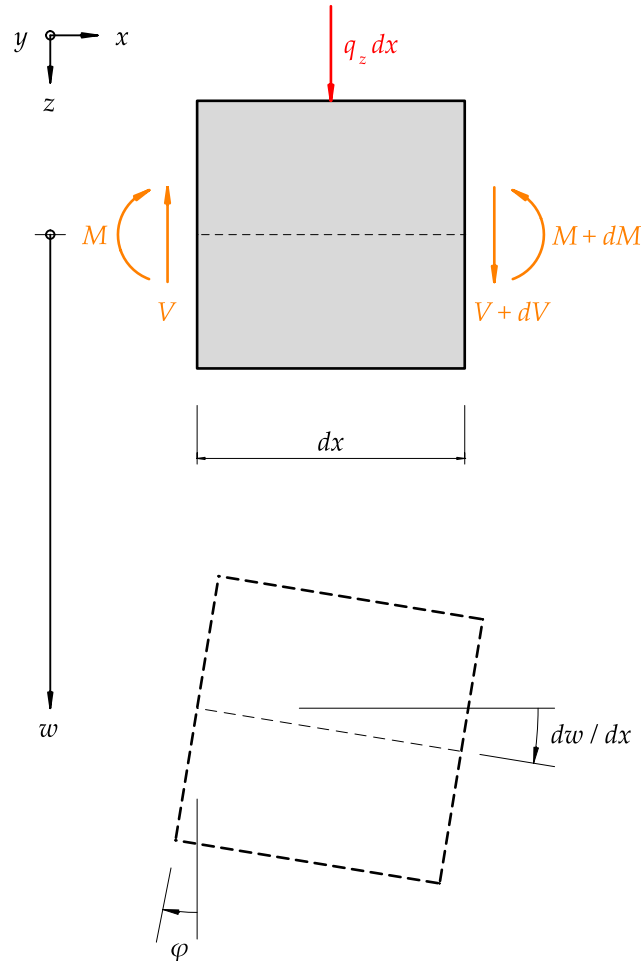


Abbildung 2.2: Differentielles Element des reinen Beigebalkens

Um die Beziehung für den reinen Biegeträger herzuleiten, sind neben den Gleichgewichtsbedingungen und kinematischen Relationen ebenfalls die Werkstoffbeziehungen erforderlich.

2.1.2 Herleitung

Beginnend bei den Gleichgewichtsbetrachtungen kann anhand des Gleichgewichts der vertikalen Kräfte die Beziehung in Gleichung 2.1 zwischen Einwirkung und Querkraft ermittelt werden:

$$\downarrow^+ \sum F_z = 0 = q_z(x) \cdot dx - V + (V + dV)$$

$$q_z(x) \cdot dx = -dV$$

$$q_z(x) = \frac{dV}{dx} = -V(x)' \quad (2.1)$$

Aus dem Gleichgewicht der Momente folgt die Gleichung 2.2, welche die Beziehung zwischen Einwirkung und Biegemoment erläutert.

$$\sum^{\curvearrowright+} M_y = 0 = (M + dM) - M - V \cdot dx + q_z(x) \cdot dx \cdot dx/2$$

Dabei kann der Anteil aus der Einwirkung $q_z(x) \cdot dx \cdot dx/2$ vernachlässigt werden, da dieser von höherer Ordnung klein ist, es folgt:

$$0 = dM - V \cdot dx$$

Umgeformt resultiert die Beziehung zwischen Querkraft und Biegemoment:

$$V = \frac{dM}{dx}$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung 2.1 folgt die Gleichung 2.2:

$$q_z(x) = -V(x)' = -M(x)'' \quad (2.2)$$

Weitere Beziehungen lassen sich mittels Gleichgewicht nicht ermitteln. Berücksichtigt man die Werkstoffbeziehungen und kinematischen Relationen, so lassen sich Aussagen zwischen Einwirkung und Verformung ermitteln. Um die Herleitung abzukürzen wird die Beziehung in Gleichung 2.3 zwischen Biegemoment und Krümmung vorausgesetzt.

$$\frac{M}{EI} = \chi \quad (2.3)$$

Allgemein gilt, die Krümmung entspricht der Änderung der Verdrehung:

$$\chi = \varphi(x)' \quad (2.4)$$

Aus der verformten Lage in Abbildung 2.2, lässt sich die Verdrehung des Elements bestimmen. Da das Element seiner Form treu bleibt, entspricht die Verdrehung der Änderung der Verformung.

$$-\varphi = \frac{dw}{dx}$$

Daraus folgt die Beziehung zwischen Biegemoment und Verformung:

$$M = -EIw(x)''$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung 2.2 folgt die Beziehung zwischen Verformung und Einwirkung.

$$q(x) = EIw(x)''' \quad (2.5)$$

2.1.3 Anwendungen und Grenzen

Das angewendete Modell berücksichtigt keine Schubverformungen. Da in der Praxis übliche Stahlbetonbauteile eine signifikant grössere Schubsteifigkeit, als Biegesteifigkeit aufweisen, liefert das Modell zuverlässige Resultate. Dazu gelten die Beziehungen lediglich für konstante Biegesteifigkeiten.

2.2 Mohrsche Analogie

2.2.1 Aufbau

Die Mohrsche Analogie beschreibt ein handhabbares Lösungsvorgehen der Differentialgleichung für reine Biegeträger. Aus den Beziehungen, detailliert beschrieben in Kapitel 2.1, können folgende Abhängigkeiten definiert werden:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = M'' = -q_z$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = w'' = -\frac{M}{EI}$$

Erkennbar ist die Analogie der beiden Gleichungen. Aus der Einwirkung lässt sich der Verlauf der Biegemomente bestimmen. Wird nun auf ein analoges System der Verlauf der Biegemomente dividiert durch die Biegesteifigkeit als Einwirkung angesetzt, so lässt sich mit dem gleichen Berechnungsvorgehen die Verformung bestimmen. Lediglich den Randbedingungen ist Beachtung zu schenken, welche mit entsprechenden Lagerungsbedingungen im analogen System berücksichtigt werden.

Die Anpassung der Lagerungsbedingungen für ein analoges System ist in Abbildung 2.3 gezeigt.


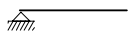

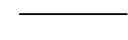
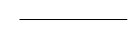
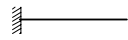
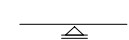
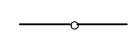
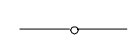
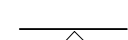
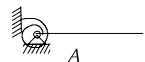
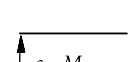
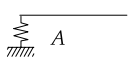
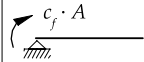
Gegebener Träger			Analogieträger		
	Einfach gelagert	$w = 0$ $w' \neq 0$		Einfach gelagert	$M^* = 0$ $V^* \neq 0$
	Eingespannt	$w = 0$ $w' = 0$		Freies Ende	$M^* = 0$ $V^* = 0$
	Freies Ende	$w \neq 0$ $w' \neq 0$		Eingespannt	$M^* \neq 0$ $V^* \neq 0$
	Zwischenaufleger	$w = 0$ $w'_l = w'_r$		Gelenk	$M^* = 0$ $V^*_l = V^*_r$
	Gelenk	$w \neq 0$ $w'_l \neq w'_r$		Zwischenaufleger	$M^* \neq 0$ $V^*_l \neq V^*_r$
	Elastische Einspannung	$w = 0$ $w' = c_f \cdot M_A$		Freies Ende mit Einzellast	$M^* = 0$ $V^* = c_f \cdot M_A$
	Elastische Auflagerung	$w = c_f \cdot M_A$ $w' \neq 0$		Einfach gelagert mit Endmoment	$M^* = c_f \cdot A$ $V^* \neq 0$

Abbildung 2.3: Lagerungsbedingungen für Analogiesysteme, übernommen aus [2]

2.3 Zuggurtmodell

2.3.1 Aufbau

Der folgende Abschnitt beschreibt das Zuggurtmodell anhand der Herleitungen in [2]. Das Zuggurtmodell betrachtet auf Zug beanspruchte Stahlbetonzuglieder. Das Modell erlaubt eine Eingrenzung der Rissbreiten und der Rissabständen. Im Bereich zwischen den Rissen erhöht sich die Steifigkeit des Zugglieds, da der Beton sich am Lastabtrag beteiligt. Dies wird als Zugversteifung beschrieben. Um das Verhalten des Verbunds zwischen Beton und Betonstahl im ungerissenen Bereich zu definieren, wird eine Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung dem Modell zu Grunde gelegt.

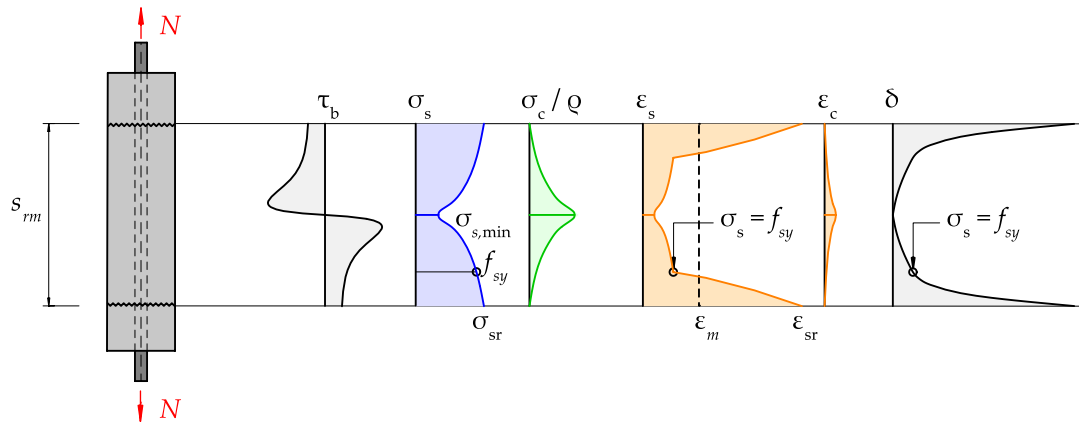


Abbildung 2.4: Verlauf der Verbundschubspannungen, Betonstahlspannungen, Betondehnungen, Betonstahldehnungen und Schlupf bei einem Zugversuch. Bild neu gezeichnet nach [2]

Verwendet wird eine abgetreppte, starr-ideal plastische Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung. Durch die Idealisierung lassen sich die Spannungen und Dehnungen durch Gleichgewichtsbetrachtungen ermitteln. Die Abtreppung erfolgt beim Erreichen der Fließgrenze des Betonstahls.

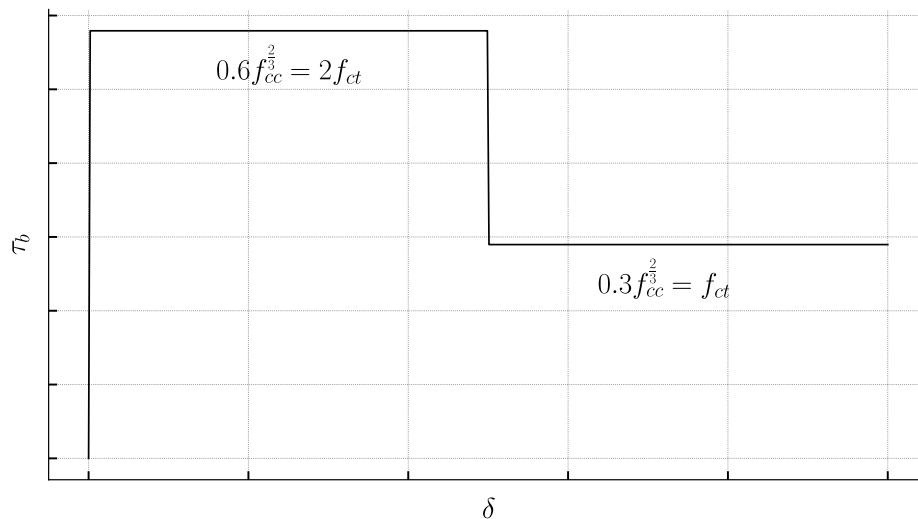


Abbildung 2.5: idealisierte Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung

2.3.1.1 Verhalten unter Belastung

Vor dem Erreichen der Zugfestigkeit des Betons, verbleibt das Zugglied ungerissen und verhält sich linear elastisch. Beim Reißen des Querschnitts verharrt die Beton-

spannung bei der Rissspannung, eine Erhöhung der Einwirkung erhöht lediglich die Zugspannung im Betonstahl.

Marti hat in [xx] ein Ansatz zur Berücksichtigung der Zugversteifung basierend auf dem Zuggurtmodell für Biegeelemente entwickelt.

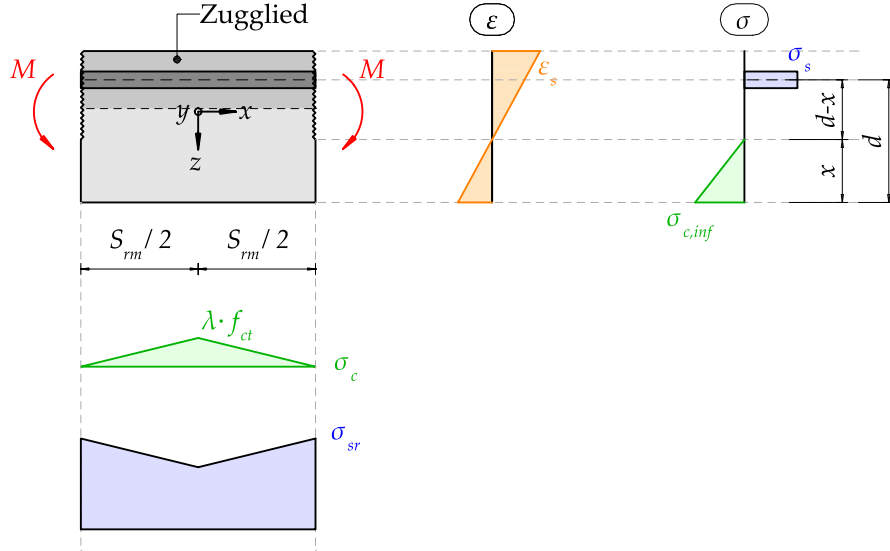


Abbildung 2.6: Einfluss der Zugversteifenden Wirkung bei einem Biegeelement

Vereinfacht lässt sich eine Dehnungsreduktion im Betonstahl durch die Zugversteifung beschreiben, welche mit $\Delta\varepsilon_s(\lambda)$ beschrieben wird. Die Krümmungsdifferenz infolge der Dehnungsreduktion folgt nach Gleichung 2.6.

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{\Delta\varepsilon_s(\lambda)}{(d-x)} = \frac{\lambda}{2} \cdot \left(\frac{M_r}{EI^{II}} - \frac{f_{ct}}{E_c \cdot (d-x)} \right) \quad (2.6)$$

Dabei wird die gesamte Krümmung $\frac{M_r}{EI^{II}}$ beim Reißen des Querschnitts durch die Krümmung beim Erreichen der Zugfestigkeit des Betons $\frac{f_{ct}}{E_c \cdot (d-x)}$ reduziert.

Die Gleichung 2.6 kann mittels dem effektiven Bewehrungsgehalt formuliert werden.

$$\rho_{\text{eff}} = \left[\frac{M_r(d-x) \cdot E_s}{f_{ct} \cdot EI^{II}} + 1 - n \right]^{-1} \quad (2.7)$$

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{f_{ct} \cdot (1 - \rho_{\text{eff}})}{\rho_{\text{eff}} \cdot E_s \cdot (d-x)}$$

Der Beiwert λ dient zur Fallunterscheidung. Grundsätzlich gilt die Annahme, dass sich ein Riss einstellt beim Erreichen der Zugfestigkeit des Betons.

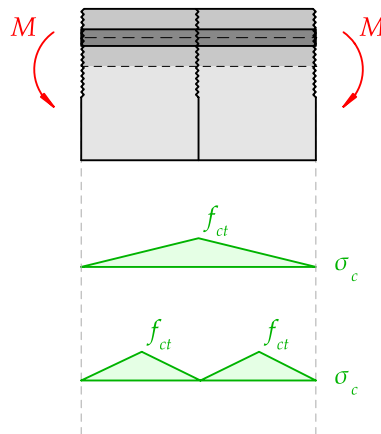


Abbildung 2.7: Fallunterscheidung beim Erreichen der Zugfestigkeit des Betons

Betrachtet man die Darstellung in Abbildung 2.7, so müsste sich in der Elementmitte ein Riss einstellen. Dabei wird zwischen unmittelbar vor dem Reißen unterschieden und unmittelbar nach dem Reißen. Dies kann mit Beiwert unterschieden werden.

2.3.1.2 Anwendungen und Grenzen

Das Zuggurtmodell findet Anwendung Biegebeanspruchungen. Es liefert Auskunft über Rissweiten und Rissbreiten, sowie eine Verfeinerung der Biegesteifigkeit im gerissenen Bereich. Das Modell beschränkt sich ausschliesslich auf normalzugbeanspruchte Bauteile.

2.4 Numerische Integration der Krümmung

2.4.1 Momenten-Krümmungsdiagramm

Das Momenten-Krümmungsdiagramm ist geeignet zur Beschreibung des Tragverhaltens von überwiegend auf Biegung beanspruchte Stabtragwerke. Zur rechnerischen Ermittlung gelten folgende Annahmen, wie in [2] beschrieben:

- Eben- und senkrechtbleiben der Querschnitte
- Die Betonzugfestigkeit f_{ct} wird, für Zustände nach dem Überschreiten von f_{ct} , vernachlässigt
- Linear elastisches Verhalten von Stahl und Beton für die Spannungs- und Verformungsberechnung
- Die Bewehrung überträgt Zug- und Druckkräfte ausschliesslich in Stabrichtung

2.5 Versatzmass

2.6 Fachwerk

3 Verformung an Dreipunktbiegeversuch

In diesem Kapitel werden alle in Kapitel 2 beschriebenen Modelle auf einen Dreipunktbiegeversuch angewendet. Das primäre Ziel ist es, die Differenzen zwischen den mit den verschiedenen Modellen berechneten Verformungen und den tatsächlich gemessenen Verformungen aufzuzeigen. Der Schwerpunkt liegt auf der Anwendung der Modelle. Das Kapitel endet mit einem Vergleich der verschiedenen Modelle und einer Diskussion der Ergebnisse.

3.1 Versuchsbeschreibung

Der Versuch A3 in der zweiten Versuchsanordnung (kurz A3V2) aus [3] dient als Grundlage. Im Folgenden sind die wesentlichen Eckdaten des Versuchs dargestellt, während detaillierte Beschreibungen in [3] zu finden sind. Der Versuch beinhaltet einen Plattenstreifen, dessen Lagerung einem Dreipunktbiegeversuch entspricht. Der Plattenstreifen wird durch F_A bis zum Bruch belastet. Die maximale Last beträgt 331 kN.

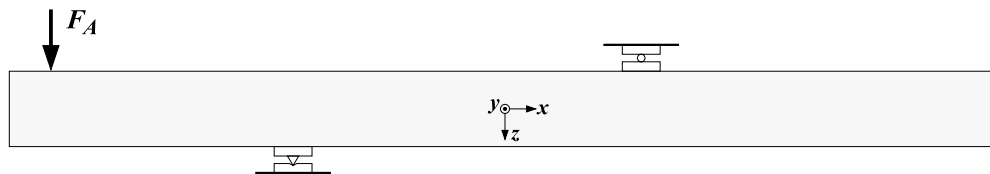


Abbildung 3.1: Lagerung und Belastung des Plattenstreifens Versuch A3V2, entnommen aus [3]

Das Bewehrungslayout ist so konzipiert, dass nur eine Zugbewehrung im Bereich der negativen Momente vorhanden ist. Die Bewehrungsrichtung ist orthogonal bzw. parallel zu den Bauteilkanten verlegt.

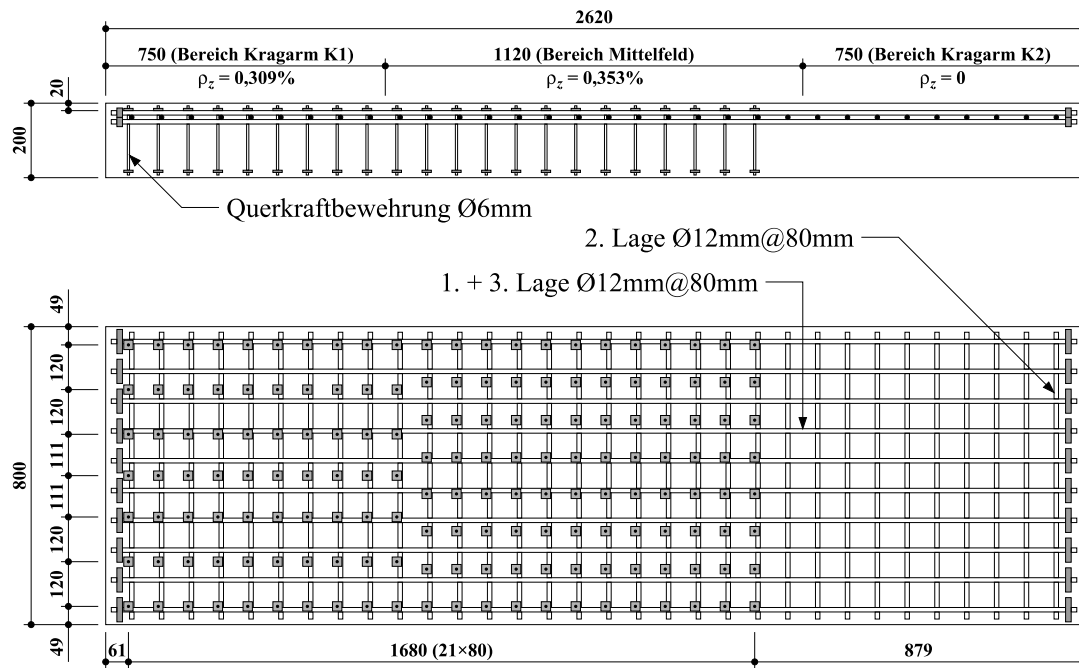


Abbildung 3.2: Bewehrungslayout des Plattenstreifens Versuch A3V2, entnommen aus [3]

Die vorhandene Querkraftbewehrung ermöglicht ein weitgehend durch Biegung verursachtes Versagen. Dies entspricht der Abgrenzung, primär Biegeverformungen zu betrachten. Das Last-Verformungsverhalten ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Es zeigt sich ein deutlicher Bereich des Fliessens der Zugbewehrung ohne vorzeitiges Querkraftversagen.

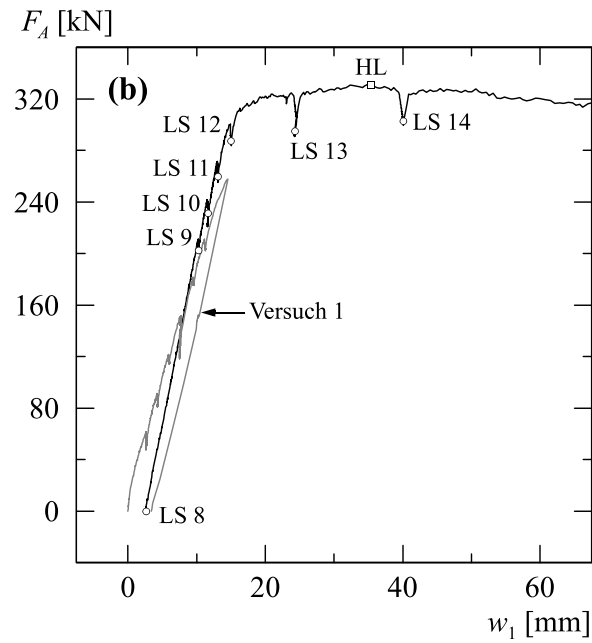


Abbildung 3.3: Last-Verformungsverhalten des Plattenstreifens Versuch A3V2, entnommen aus [3]

In Abbildung 3.4 ist der Verformungsverlauf entlang der Stabachse dargestellt. Es zeigt sich ein deutlicher Anstieg der Verformung ab der Laststufe 9. Dies deckt sich mit dem Fließen der Bewehrung aus Abbildung 3.3.

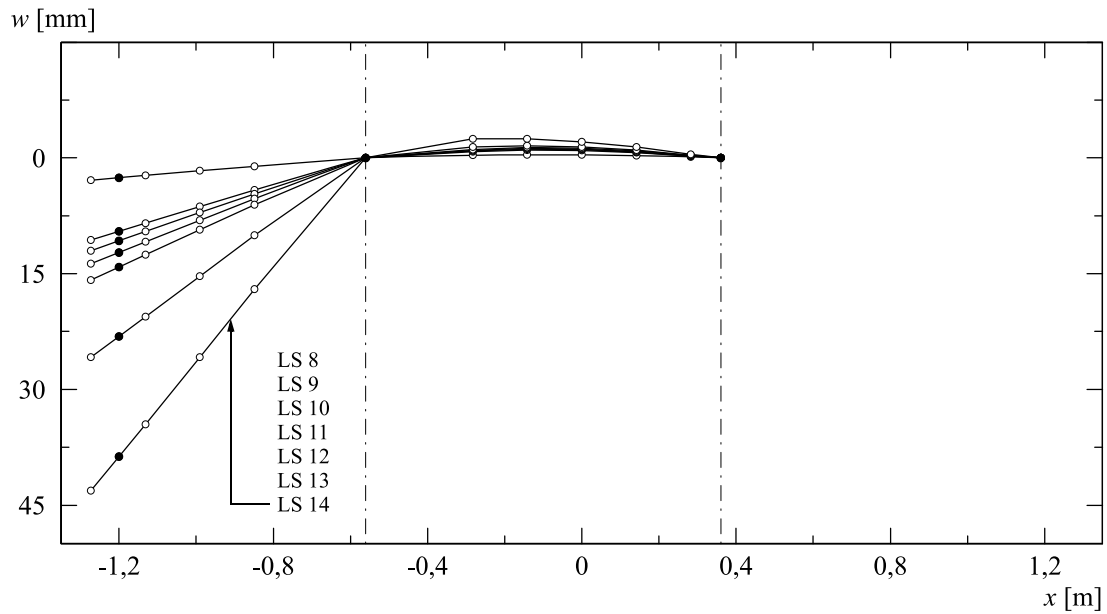


Abbildung 3.4: Verformungsverlauf des Plattenstreifens Versuch A3V2, entnommen aus [3]

3.2 Eigenschaften der Baustoffe

Die Betoneigenschaften wurden in [3] mittels Würfel- und Zylinderproben ermittelt. Ebenso wurden die Eigenschaften des Betonstahls durch Zugproben bestimmt. Die Eigenschaften des Betons im Würfel stimmen nicht direkt mit den Eigenschaften des Betons im Bauteil überein. Durch Transformationen aus [4] wurden die Eigenschaften des Bauteils bestimmt. Folgend ist die Bestimmung der Bauteildruckfestigkeit aufgezeigt.

$$f_c = 2.7 f_{cc}^{\frac{2}{3}} \quad (3.1)$$

$$f_c = \frac{40.827\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (3.2)$$

Die Zugfestigkeit kann gemäss [5] anhand der Zylinderdruckfestigkeit bestimmt werden.

$$f_{ct} = 0.3 f_{cc}^{\frac{2}{3}} \quad (3.3)$$

$$f_{ct} = \frac{4.54\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (3.4)$$

Der Elastizitätsmodul wird ebenfalls nach [5] abgeschätzt.

$$E_c = 10000 \sqrt[3]{f_{cc}} \quad (3.5)$$

$$E_c = \frac{38886.0\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (3.6)$$

3.3 Reiner Biegeträger

In diesem Abschnitt wird das in Kapitel 2.1 beschriebene Modell auf das Versuchsojekt angewendet. Zunächst wird das statische System des Versuchs in Abbildung 3.5 dargestellt.

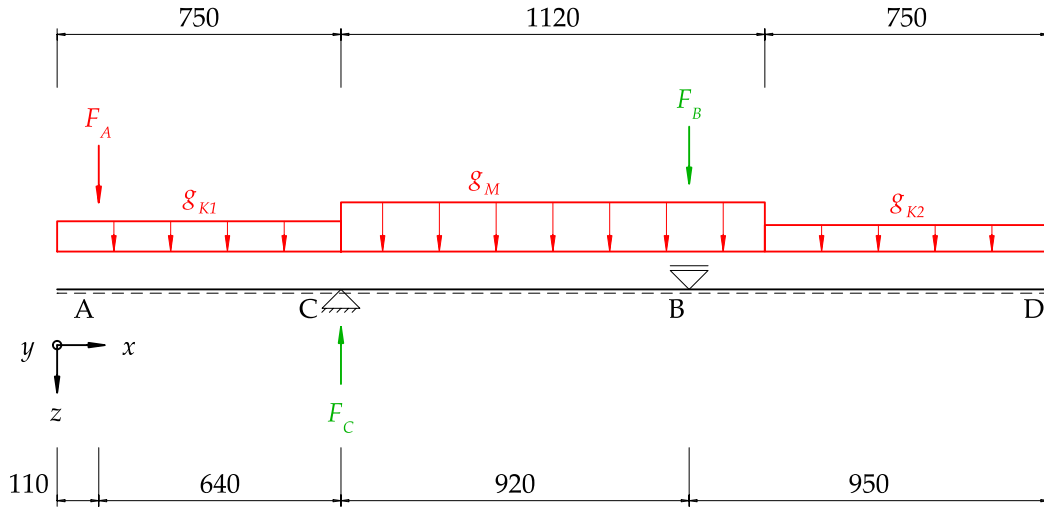


Abbildung 3.5: Statisches System der Versuchsanordnung

Eine Vereinfachung des in Abbildung 3.5 dargestellten Systems ist in Abbildung 3.6 zu sehen. Dabei wird das Eigengewicht aufgrund seines minimalen Einflusses auf das Biegemoment vernachlässigt. Darüber hinaus wurden die Verformungen, die in [3] gemessen wurden, nach der Installation des Trägers erfasst. Daher spiegelt die Messung den Einfluss des Eigengewichts nicht wider.

$$g_M, g_{k1}, g_{k2} = 0 \quad (3.7)$$

Die Berücksichtigung der Lagerbreiten führt zu der Streckenlast f_A , bzw. zu den Lagerreaktionen f_B und f_C .

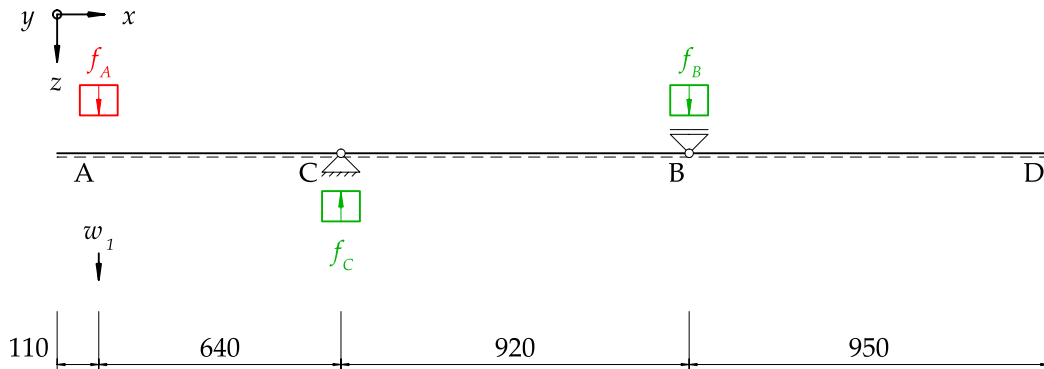


Abbildung 3.6: Angepasstes statisches System der Versuchsanordnung

Die Berechnungen beziehen sich ausschliesslich auf Abbildung 3.6. Dabei werden die Parameter in Tabelle 3.1 berücksichtigt.

Tabelle 3.1: Versuchsparameter für den reinen Biegeträger

Parameter	
$a_1 = 0.11\text{m}$	$a_2 = 0.64\text{m}$
$a_3 = 0.92\text{m}$	$a_4 = 0.95\text{m}$
$b = 800.0\text{mm}$	$b_{\text{Auflager}} = 100\text{mm}$
$h = 200.0\text{mm}$	

3.3.1 Auflagerkräfte

Zunächst müssen die Einwirkungen auf den Stab bestimmt werden, dazu sind die Auflagerreaktionen erforderlich. Das statisch bestimmte System kann mithilfe von drei Gleichgewichtsbeziehungen gelöst werden. Im Folgenden wird die Gesamtlänge des Stabs bestimmt, als Kontrollgrösse der gewählten Abstände.

$$l_{tot} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad (3.8)$$

$$l_{tot} = 2.62\text{m} \quad (3.9)$$

Durch das Aufstellen von Momentengleichgewichten um die Auflagerpunkte C und B können die Beziehungen zwischen den Einwirkungen und den Reaktionskräften ermittelt werden.

$$0 = F_A a_2 - F_B a_3 \quad (3.10)$$

$$0 = F_A (a_2 + a_3) - F_C a_3 \quad (3.11)$$

Durch das Auflösen der bestimmten Beziehungen folgen die Auflagerreaktionen.

$$F_B = \frac{F_A a_2}{a_3} \quad (3.12)$$

$$F_C = \frac{F_A a_2 + F_A a_3}{a_3} \quad (3.13)$$

Wie in Abbildung 3.6 gezeigt, gilt es die Punktkräfte der Auflagerbreite entsprechend zu verteilen. Dies zeigen die folgenden Gleichungen.

$$f_B = \frac{F_A a_2}{a_3 b_{\text{Auflager}}} \quad (3.14)$$

$$f_C = \frac{F_A a_2 + F_A a_3}{a_3 b_{Auflager}} \quad (3.15)$$

$$f_A = \frac{F_A}{b_{Auflager}} \quad (3.16)$$

3.3.2 Zustandslinien

Die Zustandslinien der Schnittkräfte resultieren aus der Bemühung der hergeleiteten Gleichungen in Kapitel 2.1. Dabei ist zu beachten, dass die Zustandslinien lediglich für die maximal gewählte Laststufe gelten. Der Verlauf der Einwirkungen ist in Abbildung 3.7 aufgezeigt.

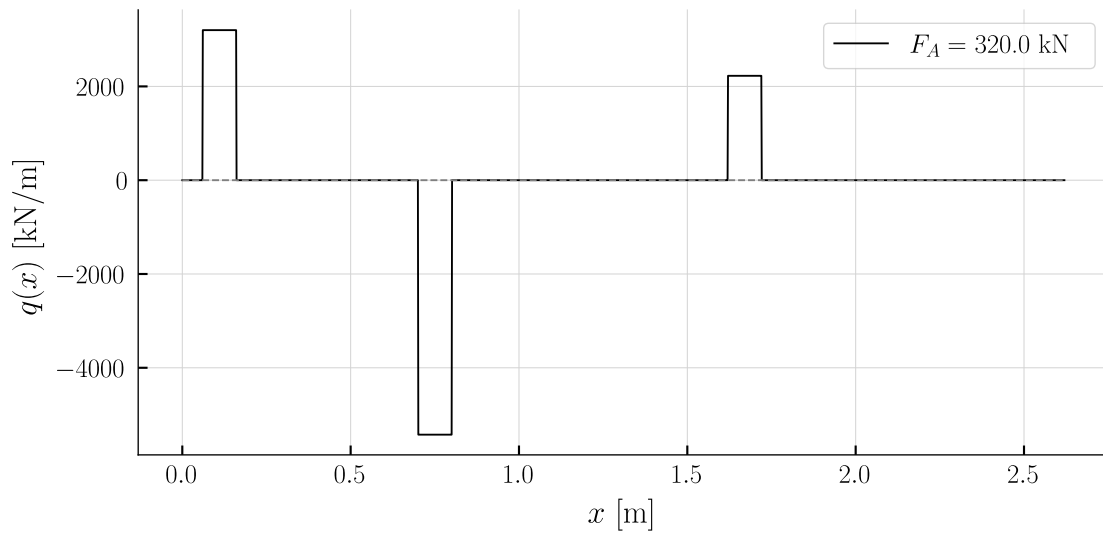


Abbildung 3.7: Verlauf der Einwirkungen und Reaktionskräften

Durch Integration der Einwirkung über die Laufvariable x ergibt sich der Verlauf der Querkraft.

$$V(x) = - \int q(x) dx + c_1 \quad (3.17)$$

Mit der Randbedingung $V(0) = 0$ kann die Integrationskonstante bestimmt werden. Der Verlauf der Querkräfte ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Nach dem Auflager B ist der Plattenstreifen unbelastet.

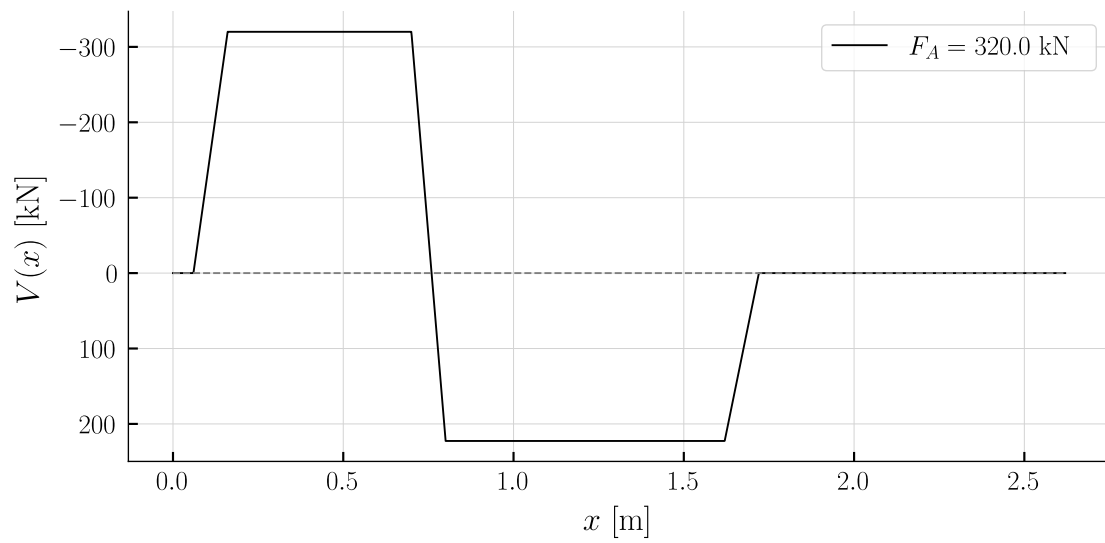


Abbildung 3.8: Verlauf der Querkräfte

Der Verlauf des Biegemoments lässt sich durch Integration der Querkräfte bestimmen:

$$M(x) = \int V(x) dx + c_2 \quad (3.18)$$

Mit der Randbedingung $M(0) = 0$ kann die Integrationskonstante bestimmt werden. Der Verlauf der Biegemomente ist in [Abbildung 3.9](#) dargestellt. Es ergibt sich ein Minimum über dem Auflager C .

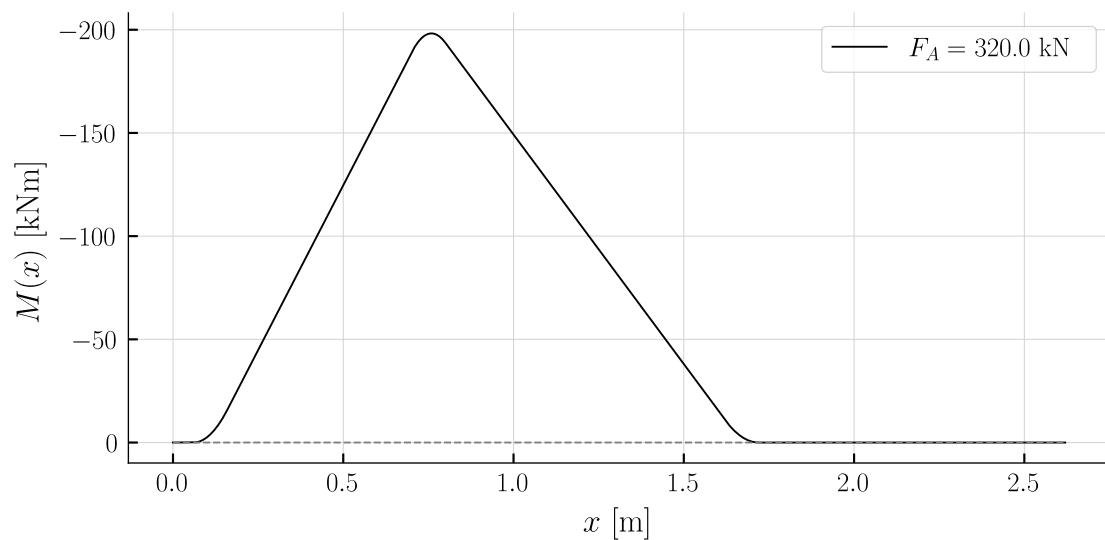


Abbildung 3.9: Verlauf der Biegemomente

Zusätzlich zu den resultierenden Biegemomenten aus der Einwirkung kann ein durch die Längszugkraft aus der Querkraft induziertes Biegemoment ermittelt werden. Dies wird mit einem Versatzmass berücksichtigt. Die Gleichung Gleichung 3.19 zeigt die Ermittlung des Versatzmass. Multipliziert mit der statischen Höhe ergibt sich der Versatz des Biegemoments aus Gleichung 3.20.

$$h_{versatz} = \frac{V \cdot \cot(\theta_{c3})}{2} \quad (3.19)$$

$$M_{versatz} = \frac{V \cdot \cot(\theta_{c3})}{2} \cdot z \quad (3.20)$$

In Abbildung 3.10 ist die Erhöhung durch das Versatzmass gezeigt. Beim Momentenminimum bildet sich ein Plateau aus. Der notwendige Hebelarm der inneren Kräfte anhand der statischen Höhe d abgeschätzt. Die statische Höhe ist in Abbildung 3.17 dargestellt.

$$d = -\frac{3\mathcal{O}_s}{2} - c_{nom} + h \quad (3.21)$$

$$d = 162.0\text{mm} \quad (3.22)$$

Daraus folgt der Hebelarm der inneren Kräfte z .

$$z = 0.9d \quad (3.23)$$

$$z = 146.0\text{mm} \quad (3.24)$$

Die Wahl der Neigung der Druckstrebe entspricht dem unteren Grenzwert der [6].

$$\theta_{c3} = 30.0^\circ \quad (3.25)$$

Daraus folgt der Verlauf der Biegemomente mit dem Versatzmass, dargestellt ist dies in Abbildung 3.10.

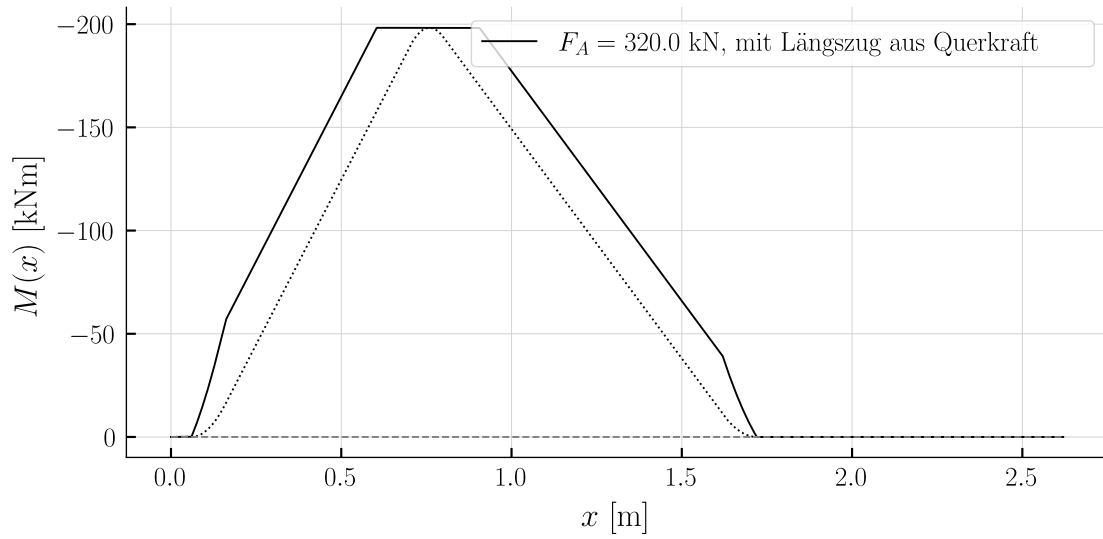


Abbildung 3.10: Verlauf der Biegemomente mit Längszugkraft aus Querkraft

3.3.2.1 Verdrehung- und Verformungslinien

Wie in Kapitel 2.1 hergeleitet, sind die Gleichgewichtsbetrachtungen nicht ausreichend um die Verdrehung und Verformung zu beschreiben. Die Werkstoffbeziehung bedingt eine Biegesteifigkeit. Dabei wird von einer konstanten Biegesteifigkeit ausgegangen. Unter Annahme eines ungerissenen Betonquerschnitts lässt sich die Biegesteifigkeit wie folgt berechnen:

$$EI = \frac{E_c b h^3}{12} \quad (3.26)$$

$$EI = 2.07 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2 \quad (3.27)$$

Der Verlauf der Verdrehung entspricht dem integrierten Verlauf der Biegemomente, dividiert durch die Biegesteifigkeit.

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI} \int M(x) dx + c_3 \quad (3.28)$$

Die Verformung hingegen entspricht dem integrierten Verlauf der Verdrehung.

$$w(x) = \int -\varphi(x) dx + c_4 \quad (3.29)$$

Mit den Randbedingungen $w(C) = 0$ und $w(B) = 0$ können die Integrationskonstanten bestimmt werden. Die elastische Verformung, bzw. die Verformung mit einer konstanten Biegesteifigkeit bestimmt, ist in Abbildung 3.11 dargestellt.

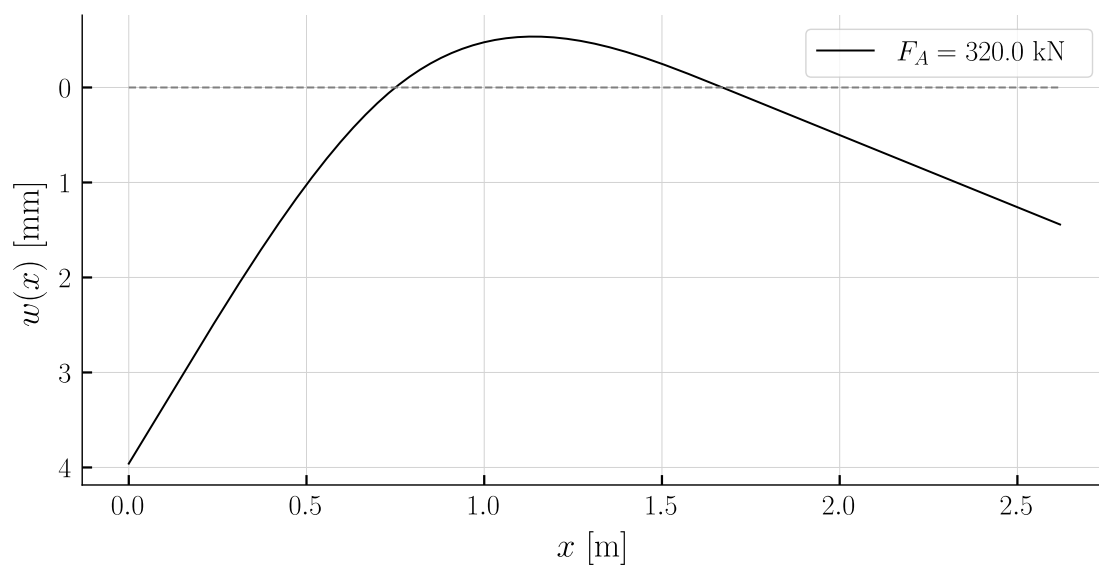


Abbildung 3.11: Verlauf der Verformung für eine konstante ungerissene Biegesteifigkeit

3.4 Mohrsche Analogie

Das Vorgehen ist in Kapitel 2.2 beschrieben. Der bereits bestimmte Momentenverlauf gemäss Abbildung 3.9, dividiert durch die ungerissene Biegesteifigkeit, ist als Einwirkung auf das System anzusetzen. Dies ist in Abbildung 3.12 dargestellt.

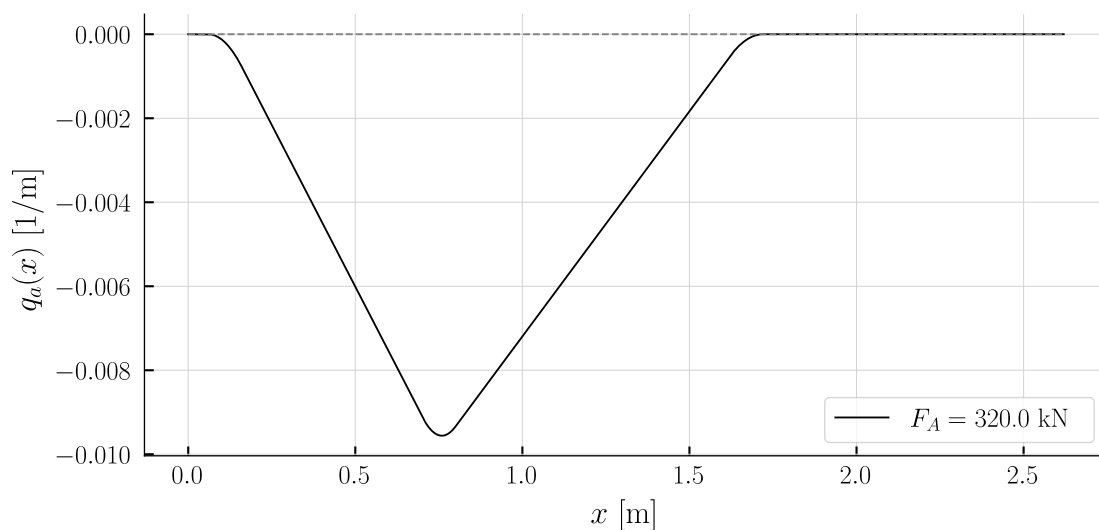


Abbildung 3.12: Verlauf der Einwirkungen auf das analoge System

Die Randbedingungen bzw. die Lagerungen für das analoge System sind zu ermitteln. Dies kann grundsätzlich mit den Lagerungsbedingungen aus Abbildung 2.3

erfolgen. Dabei sind die folgenden Überlegungen zu berücksichtigen. Es ist bekannt, dass die Verformung an den Auflagern null sein muss. Daher ist es notwendig, ein Biege gelenk an den Positionen der Lager einzufügen. Durch die Einspannungen an den Stab rändern resultiert der passende Verformungsverlauf.

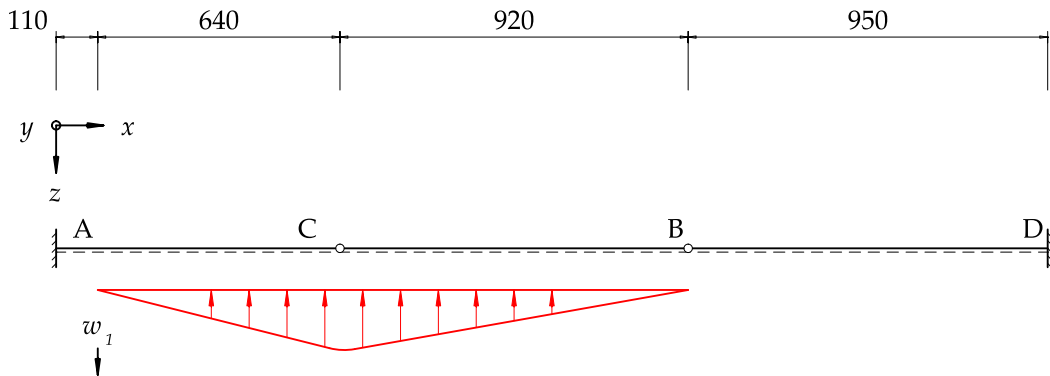


Abbildung 3.13: Analoges System mit entsprechender Einwirkung und Lagerungsbedingungen

Der Querkraftverlauf für das analoge System ist in Abbildung 3.14 dargestellt. Die Querkraft ist einheitslos, da sie die Verdrehung repräsentiert.

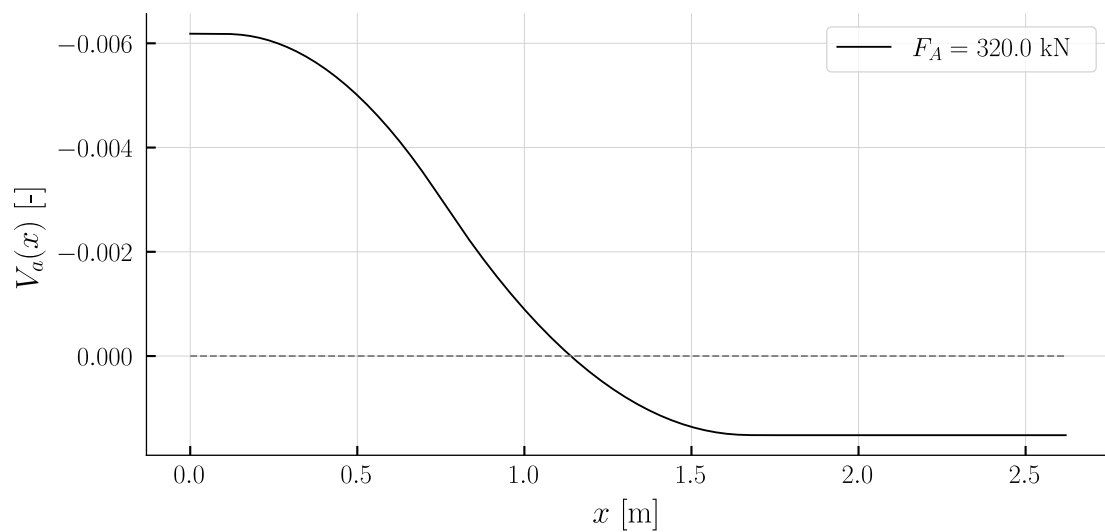


Abbildung 3.14: Verlauf der Querkräfte für das Analogiesystem

Der Biegemomentenverlauf für das analoge System ist in Abbildung 3.15 dargestellt. Der Momentenverlauf entspricht der Verformung und ist daher in [mm] angegeben.

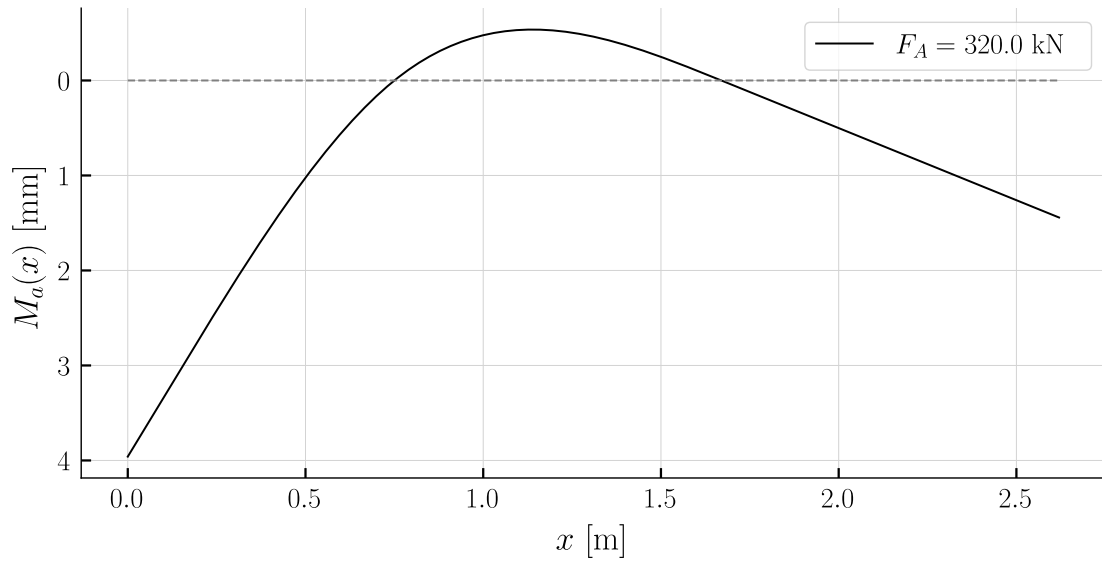


Abbildung 3.15: Verlauf der Biegemomente für das Analogiesystem

3.5 Abschätzung nach Norm

Nach der Bestimmung der elastischen Verformung kann die Verformung anhand des vollständig gerissenen Querschnitts gemäss [6] ermittelt werden. Ohne Druckbewehrung und Kriecheinflüsse ergibt sich die folgende Gleichung:

$$w_{III, SIA} = \frac{0.75}{10\rho^{0.7}} \left(\frac{h}{d}\right)^3 w_1 \quad (3.30)$$

Der geometrische Bewehrungsgehalt definiert sich folgendermassen.

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (3.31)$$

Die Querschnittsfläche der Stäbe in der Zugzone entsprechen dem Folgenden.

$$A_s = 2b \frac{\pi \phi_s^2}{4s_x} \quad (3.32)$$

$$A_s = 2262.0 \text{ mm}^2 \quad (3.33)$$

Die bereits ermittelte statische Höhe, dargestellt in Abbildung 3.17, beträgt:

$$d = 162.0 \text{ mm} \quad (3.34)$$

Damit lässt sich abschliessend die Verformung mittels der Abschätzformel bestimmen.

$$w_{1II,SIA} = 15.7\text{mm} \quad (3.35)$$

3.6 Numerische Integration der Krümmung

3.6.1 Grundlagen

Um sich von der Betrachtung einer konstanten Biegesteifigkeit zu lösen, hilft die Anwendung einer verfeinerten Momenten-Krümmungsbeziehung. Im Folgenden wird ein Momentenkrümmungsdiagramm für den Querschnitt aus dem beschriebenen Versuch berechnet. Die vorhandene Schubbewehrung ist in Abbildung 3.16 nicht dargestellt.

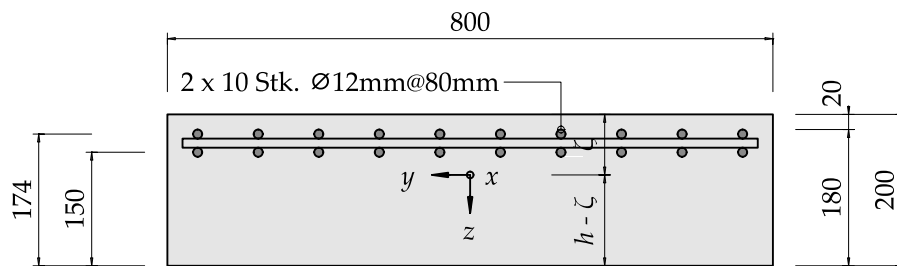


Abbildung 3.16: Querschnitt des Versuchs A3 zur Bestimmung des Momenten-Krümmungsdiagramms

Der Querschnitt wird wie folgt vereinfacht:

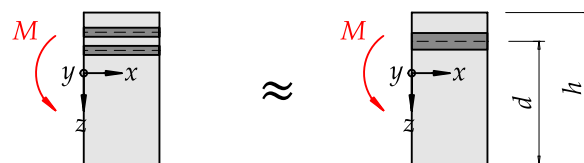


Abbildung 3.17: Vereinfachung der Bewehrungsführung

Die Parameter aus der Tabelle 3.2 finden Einfluss in die Berechnungen.

Tabelle 3.2: Versuchsparameter für die verfeinerte Momenten-Krümmungsbeziehung

Parameter	
$E_s = \frac{200000.0\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\phi_s = 12.0\text{mm}$

Parameter	
$c_{nom} = 20.0\text{mm}$	$f_{cc} = \frac{58.8\text{N}}{\text{mm}^2}$
$f_{su} = \frac{630.3\text{N}}{\text{mm}^2}$	$f_{sy} = \frac{546.0\text{N}}{\text{mm}^2}$
$s_x = 80.0\text{mm}$	$\theta_{c3} = 30.0$
$\varepsilon_{cu} = 0.005$	$\varepsilon_{su} = 0.1117$

Neben den Parametern wird das Stoffgesetz für den Betonstahl in Abbildung 3.18 hinterlegt. Das bilineare, bzw. linear-elastisch linear-plastische Spannungs-Dehnungsdiagramm für den Betonstahl hält den Rechenaufwand klein und liefert eine ausreichende Genauigkeit. Eine Berücksichtigung des verfestigenden Verhaltens ist essentiell, um die Verformungen nach dem Fließen des Betonstahls näherungsweise zu bestimmen. Das Diagramm ist definiert bis zur Bruchdehnung des Stahls. Das Verhalten gilt ebenso im negativen Spannungs-Dehnungs Bereich.

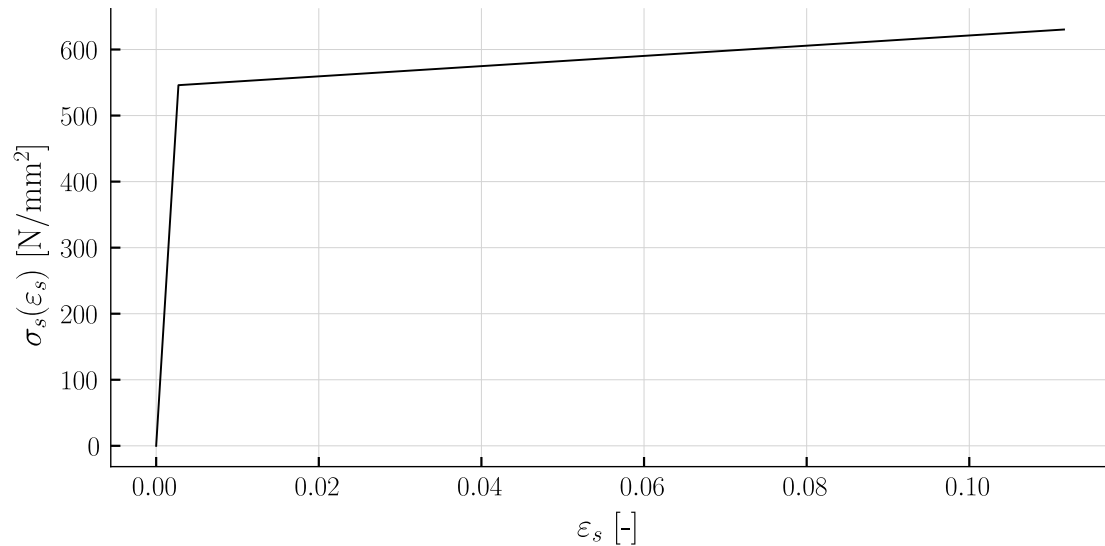


Abbildung 3.18: Spannungs-Dehnungs Diagramm des Betonstahls linear-elastisch linear-plastisch

Die Betonkennlinie, die in Abbildung 3.19 dargestellt ist, zeigt ein linear-elastisches ideal-plastisches Verhalten. Im positiven Bereich lässt sich die Betonspannung bis zur Betonzugfestigkeit erhöhen, im negativen Spannungsbereich beginnt ein Plastifizieren beim Erreichen der Betondruckfestigkeit. Dies ist bis zur Bruchstauchung definiert.

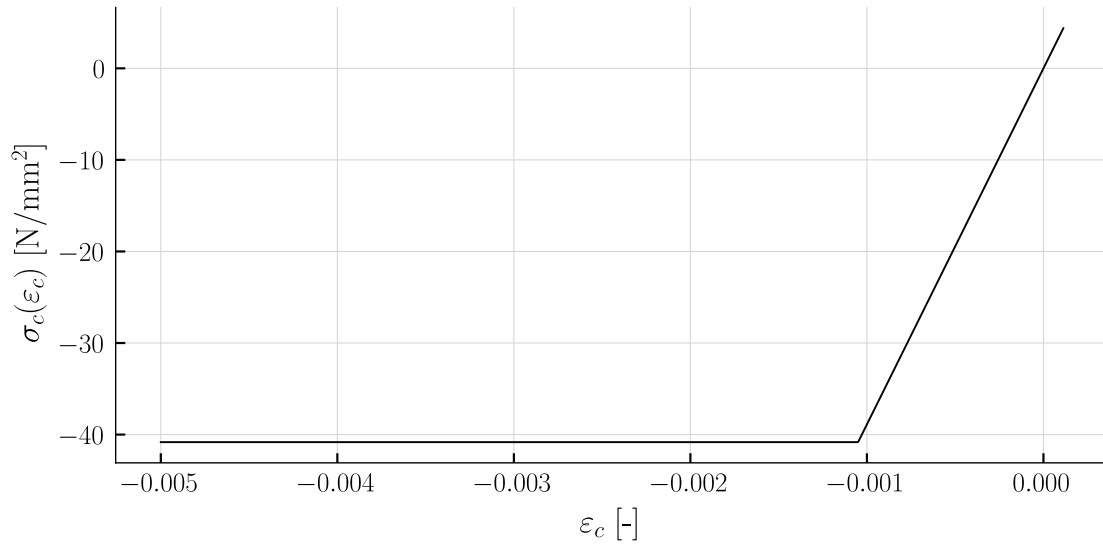


Abbildung 3.19: Spannungs-Dehnungs Diagramm des Betons linear-elastisch ideal-plastisch

3.6.2 Querschnittsanalyse

Folgend wird eine Querschnittsanalyse durchgeführt. Dabei wird der Querschnitt vor dem Reißen, nach dem Reißen, beim Fließen der Zugbewehrung und beim Versagen untersucht. Durch die Wahl aussagekräftiger Zustände im Querschnitt lässt sich eine Momentenkrümmungsbeziehung mit überschaubarem Rechenaufwand ermitteln.

3.6.2.1 Schwerpunkt des Querschnitts

Die Bestimmung der Wertigkeit n ermöglicht die Betrachtung des Querschnitts als homogenen Betonquerschnitt. Dies findet Einfluss bei der Schwerpunktsbestimmung, sowie bei der Bestimmung des Flächenträgheitsmoments.

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (3.36)$$

$$n = 5.14 \quad (3.37)$$

Mithilfe der Querschnittsfläche der Zugstäbe, sowie der Betonquerschnittsfläche lässt sich eine ideelle Querschnittsfläche ermitteln. Diese entspricht der Fläche eines reinen Betonquerschnitts. Die Querschnittsfläche der Zugstäbe ist die folgende:

$$A_s = 2b \frac{\pi \varnothing_s^2}{4s_x} \quad (3.38)$$

$$A_s = 2262.0\text{mm}^2 \quad (3.39)$$

Die Betonquerschnittsfläche beträgt:

$$A_c = bh \quad (3.40)$$

$$A_c = 160000.0\text{mm}^2 \quad (3.41)$$

und die ideelle Querschnittsfläche resultiert zu:

$$A_i = A_c + A_s (n - 1) \quad (3.42)$$

$$A_i = 169372.0\text{mm}^2 \quad (3.43)$$

Der vertikale Abstand von der Oberkante zum Schwerpunkt, vergleiche Abbildung 3.16 , beträgt:

$$\zeta_c = \frac{\frac{A_c h}{2} + A_s (1.5 \varnothing_s + c_{nom}) (n - 1)}{A_i} \quad (3.44)$$

$$\zeta_c = 96.6\text{mm} \quad (3.45)$$

3.6.2.2 Flächenträgheitsmoment

Das Flächenträgheitsmoment wird ebenfalls am ideellen Querschnitt bestimmt. Die Eigenträgheitsmomente der Kreisquerschnitte der Stäbe sind nicht berücksichtigt, lediglich der Steiner-Anteil fließt in die Berechnung ein:

$$I^I = A_s (n - 1) \left(\frac{3\varnothing_s}{2} + c_{nom} - \zeta_c \right)^2 + \frac{bh^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} - \zeta_c \right)^2 \quad (3.46)$$

$$I^I = 5.67 \cdot 10^8 \text{mm}^4 \quad (3.47)$$

3.6.2.3 Ungerissen - Zustand 1

Durch das durchwegs elastische Verhalten kann die Biegesteifigkeit anhand des Elastizitätsmoduls des Betons und des Flächenträgheitsmoments des ideellen Querschnitts bestimmt werden.

$$EI^I = E_c I^I \quad (3.48)$$

$$EI^I = 2.206 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2 \quad (3.49)$$

3.6.2.3.1 Rissmoment

Das Rissmoment definiert den Endpunkt des Zustands I im Momentenkrümmungsdiagramm. Dabei gilt die Modellierung gemäss Abbildung 3.20. Die Spannung in den Zugstäben wird vernachlässigt.

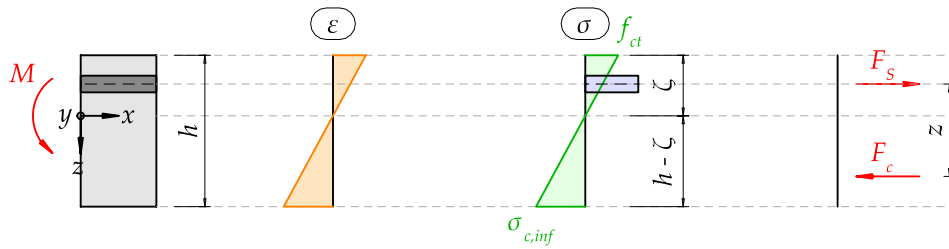


Abbildung 3.20: Querschnittsanalyse vor dem Reißen des Betons

Die Betonspannung lässt sich anhand der über die Querschnittshöhe linear verlaufenden Spannung bestimmen.

$$\sigma_{c1} = \frac{f_{ct}(h - \zeta_c)}{\zeta_c} \quad (3.50)$$

$$\sigma_{c1} = \frac{4.86 \text{ N}}{\text{mm}^2} \quad (3.51)$$

Zur Bestimmung des Rissmoments gilt es den Hebelarm der inneren Kräfte zu bestimmen, sowie die Betondruckkraft:

$$z_1 = -1.5 \mathcal{O}_s - c_{nom} + \frac{2h}{3} + \frac{\zeta_c}{3} \quad (3.52)$$

$$z_1 = 128.0 \text{ mm} \quad (3.53)$$

Die Betondruckkraft ist definiert nach:

$$F_{c,1} = \frac{b\sigma_{c1}(h - \zeta_c)}{2} \quad (3.54)$$

$$F_{c,1} = 201.0\text{kN} \quad (3.55)$$

Und das Rissmoment resultiert schliesslich zu:

$$M_r = F_{c,1}z_1 \quad (3.56)$$

$$M_r = 25.63\text{kNm} \quad (3.57)$$

Unter Berücksichtigung der Biegesteifigkeit lässt sich die Krümmung beim Reißen des Querschnitts bestimmen.

$$\chi_r = \frac{M_r}{EI^I} \quad (3.58)$$

$$\chi_r = \frac{0.00116}{\text{m}} \quad (3.59)$$

Die ermittelte Krümmung und das Rissmoment definieren den Endpunkt des Zustand 1 im Momentenkrümmungsdiagramm.

3.6.2.4 Gerissen Elastisch - Zustand 2

Mit dem Zustand 2 wird darauf abgezielt, den gerissenen Bereich im Momentenkrümmungsdiagramm darzustellen. Der Querschnitt nach dem Reißen ist in der Abbildung Abbildung 3.21 dargestellt. Der Betonstahl hat die Fließgrenze noch nicht erreicht. Der Beton hat ebenfalls seine Druckfestigkeit noch nicht erreicht.

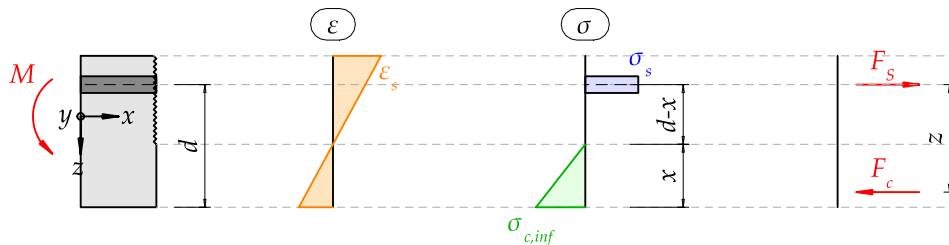


Abbildung 3.21: Querschnittsanalyse nach dem Reißen des Betons

Mittels Gleichgewicht der Kräfte lässt sich die Betondruckzonenhöhe bestimmen. Dazu wird zuerst die Beziehung zwischen der Betonstahlspannung und der Betonstahlkraft dargestellt.

$$F_{s,2} = A_s \sigma_{s2} \quad (3.60)$$

Die Betonstahlspannung für linear elastisches Verhalten folgt zu:

$$\sigma_{s2} = E_s \varepsilon_{s2} \quad (3.61)$$

Die Betondruckkraft anhand des dreieckigen Verlaufs in Abbildung 3.21 beträgt:

$$F_{c,2} = \frac{b \sigma_{c2} x_2}{2} \quad (3.62)$$

Die Betonspannung ebenfalls bestimmt durch ein linear elastisches Verhalten ist definiert durch:

$$\sigma_{c2} = E_c \varepsilon_{c,2} \quad (3.63)$$

Die Betondehnung anhand des Dehnungsverlaufs in Abbildung 3.21:

$$\varepsilon_{c,2} = \frac{\varepsilon_{s2} x_2}{d - x_2} \quad (3.64)$$

Unter der Berücksichtigung des horizontalen Gleichgewichts folgt:

$$F_{c,2} = F_{s,2} \quad (3.65)$$

Durch das Einsetzen der bestimmten Gleichungen in die Gleichgewichtsbeziehung und mit n und ρ substituiert, folgt:

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (3.66)$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (3.67)$$

$$E_s b d \rho \varepsilon_{s2} = \frac{E_s b \varepsilon_{s2} x_2^2}{2n (d - x_2)} \quad (3.68)$$

Durch die Auflösung nach x resultiert die Betondruckzonenhöhe:

$$x_2 = d \left(-n\rho + \sqrt{n\rho(n\rho + 2)} \right) \quad (3.69)$$

$$x_2 = 55.6 \text{ mm} \quad (3.70)$$

Die hergeleiteten Beziehungen gelten für den gesamten gerissenen Bereich. Mit der Wahl eines Biegemoments kann die Betonstahldehnung und die erforderliche Krümmung bestimmt werden. Wird das in Zustand 1 ermittelte Rissmoment angesetzt, so lässt sich der Startpunkt des gerissenen Bereichs im Momentenkrümmungsdiagramm bestimmen.

$$M_2 = F_{s,2} \left(d - \frac{x_2}{3} \right) \quad (3.71)$$

$$M_2 = M_r \quad (3.72)$$

$$M_r = A_s E_s \varepsilon_{s2} \left(d - \frac{x_2}{3} \right) \quad (3.73)$$

Daraus resultiert die Betonstahldehnung und die Betonstahlspannung:

$$\varepsilon_{s2} = 0.000395 \quad (3.74)$$

$$\sigma_{s2} = \frac{79.0 \text{ N}}{\text{mm}^2} \quad (3.75)$$

Die Krümmung kann anhand des Dehnungsverlaufs in Abbildung 3.21 bestimmt werden:

$$\chi^{II} = \frac{\varepsilon_{s2}}{d - x_2} \quad (3.76)$$

$$\chi^{II} = \frac{0.00371}{\text{m}} \quad (3.77)$$

Abschliessend folgt die gerissene Biegesteifigkeit zu:

$$EI^{II} = \frac{M_2}{\chi^{II}} \quad (3.78)$$

$$EI^{II} = 6903.8 \text{ kNm}^2 \quad (3.79)$$

Mit dem Moment und der Krümmung aus dem Zustand 2 ist der Anfangspunkt für den gerissenen Zustand im Momentenkrümmungsdiagramm definiert.

3.6.2.5 Fliesen der Bewehrung - Zustand 3

Der Zustand 3 entspricht dem Zustand 2. Einzig die Stahlspannung erreicht die Flie遢spannung. Dargestellt ist dies in der Abbildung 3.22 .

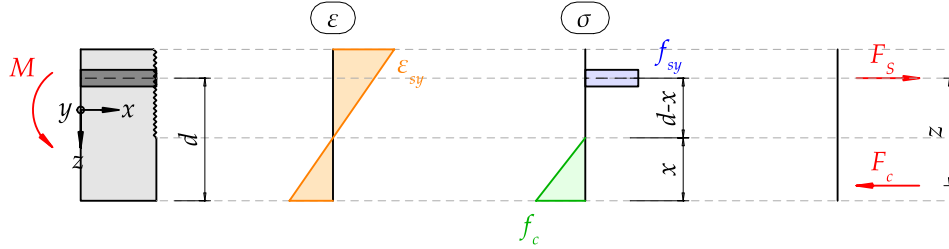


Abbildung 3.22: Querschnittsanalyse mit erreichter Flie遢spannung im Stab

Durch Gleichgewicht der horizontalen Kräfte folgen die Beziehungen:

$$\sigma_{c3} = \frac{E_c f_{sy} x_3}{E_s (d - x_3)} \quad (3.80)$$

$$A_s f_{sy} = \frac{b \sigma_{c3} x_3}{2} \quad (3.81)$$

Aufgelöst nach der Druckzonenhöhe:

$$x_3 = \frac{-A_s E_s + \sqrt{A_s E_s (A_s E_s + 2 E_c b d)}}{E_c b} \quad (3.82)$$

$$x_3 = 55.6 \text{ mm} \quad (3.83)$$

Daraus lässt sich das Flie遢moment bestimmen, welches den Endpunkt im Momenten-Krümmungsdiagramm für den gerissenen Zustand definiert:

$$M_y = A_s f_{sy} \left(d - \frac{x_3}{3} \right) \quad (3.84)$$

$$M_y = 177.2 \text{ kNm} \quad (3.85)$$

Die Flie遢dehnung des Betonstahls entspricht:

$$\varepsilon_{sy} = 0.00273 \quad (3.86)$$

Abschliessend lässt sich die Krümmung für den Zustand 3 bestimmen.

$$\chi_y = \frac{\varepsilon_{sy}}{d - x_3} \quad (3.87)$$

$$\chi_y = \frac{0.0257}{m} \quad (3.88)$$

Der Zustand 3 beschreibt lediglich den Endpunkt des gerissenen Bereichs im Momenten-Krümmungsdiagramm.

3.6.2.6 Maximaler Biege widerstand - Zustand 4

Der maximale Biege widerstand kann durch die Plastifizierung der Betondruckzone bestimmt werden. Vereinfacht wird dem Betonstahl die statische Zugfestigkeit vorausgesetzt, um das verfestigende Verhalten annähernd abzubilden.

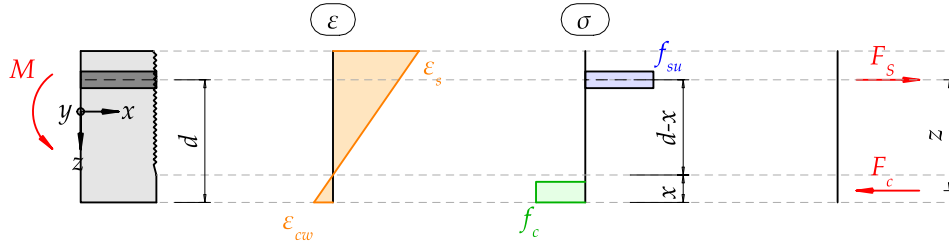


Abbildung 3.23: Querschnittsanalyse mit erreichter Zugfestigkeit im Stab und plastifizierter Betondruckzone

Die Druckspannungen sind konstant verteilt angenommen, dazu wird die Druckzonenhöhe um den Faktor 0.85 reduziert.

$$A_s f_{su} = 0.85 b f_c x_4 \quad (3.89)$$

Die Druckzonenhöhe folgt zu:

$$x_4 = 51.4 \text{ mm} \quad (3.90)$$

Damit lässt sich der Hebelarm der inneren Kräfte bestimmen:

$$z_4 = d - 0.425 x_4 \quad (3.91)$$

$$z_4 = 140.0 \text{ mm} \quad (3.92)$$

Der maximale Biege widerstand folgt zu:

$$M_R = A_s f_{su} z_4 \quad (3.93)$$

$$M_R = 199.8 \text{ kNm} \quad (3.94)$$

Die Krümmung lässt sich anhand der Betonstauchung ermitteln:

$$\chi_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{x_4} \quad (3.95)$$

$$\chi_u = \frac{0.0974}{\text{m}} \quad (3.96)$$

Die Betonstahldehnung darf die Bruchdehnung nicht überschreiten:

$$\varepsilon_{s4} = \frac{\varepsilon_{cu} (d - x_4)}{x_4} \quad (3.97)$$

$$\varepsilon_{s4} = 0.0108 \quad (3.98)$$

Die Bruchdehnung des Stahls wird nicht erreicht. Der Querschnitt versagt im Druckbereich. Die Annahme, dem Betonstahl die statische Zugfestigkeit zu Grunde zu legen ist grundsätzlich nicht gerechtfertigt. Der Vergleich mit den Versuchsergebnissen zeigt jedoch, dass sich diese Annahme bewährt.

$$\varepsilon_{su} = 0.1117 \quad (3.99)$$

Die Biegesteifigkeit im Bereich 3 beträgt:

$$EI^{III} = \frac{M_R}{\chi_u} \quad (3.100)$$

$$EI^{III} = 2.05 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2 \quad (3.101)$$

Der Zustand 4 beschreibt den Endpunkt des Momenten-Krümmungsdiagramm.

3.6.2.7 Momenten-Krümmungsdiagramm

Die definierten Krümmungen mit den entsprechenden Biegemomenten aus der Querschnittsanalyse sind in Abbildung 3.24 aufgezeigt.

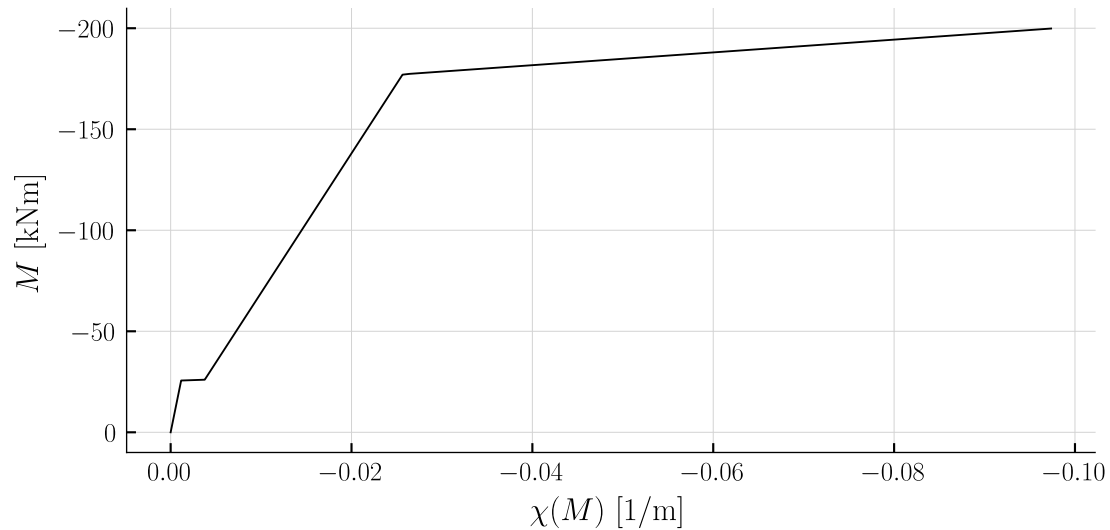


Abbildung 3.24: Momenten-Krümmungsdiagramm händisch ermittelt, definiert im positiven Bereich

Die erste Steigung im Diagramm beschreibt den ungerissenen Zustand. Dieser hat die Neigung von EI^I . Darauf folgt eine schlagartige Erhöhung der Krümmung ohne Steigerung des Moments. Dies entspricht dem Übergang vom gerissenen zum ungerissenen Zustand. Dabei steigt der Verlauf mit der Neigung EI^{II} bis zum Fließen der Bewehrung. Ab diesem Punkt erfolgt ein verfestigendes Verhalten des Betonstahls und ein Plastifizieren der Betondruckzone bis zum Erreichen des Biegezugwiderstands.

3.6.2.8 Zustandslinien der Krümmung

Der Biegemomentenverlauf $M(x)$, als Eingabe in die Funktion der Krümmung $\chi(M)$, führt zu den Zustandslinien der Krümmung in Abbildung 3.25. Dargestellt ist der Krümmungsverlauf exemplarisch für die Zustandslinien der Biegemomente aus der Abbildung 3.9.

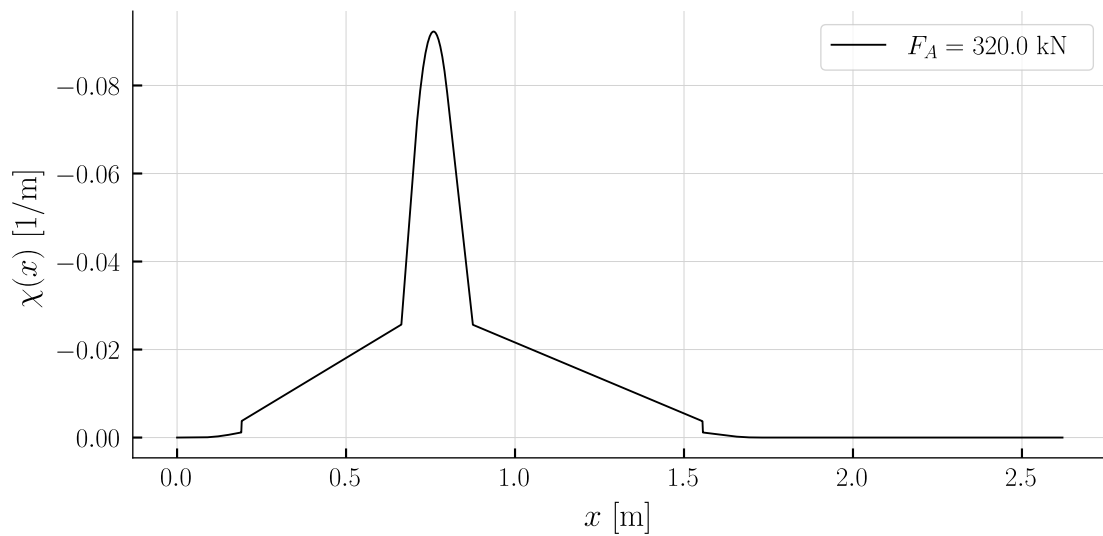


Abbildung 3.25: Krümmungsverlauf entlang der Stabachse

Über dem Auflager C ist für die dargestellte Laststufe der Biege Widerstand erreicht. Man befindet sich im Endbereich der Momenten-Krümmungsbeziehung. Ebenfalls ersichtlich ist der sprunghafte Übergang zwischen dem ungerissenen und dem gerissenen Bereich.

3.6.2.9 Punktuelle Bestimmung der Verformung

Unter Anwendung der Arbeitsgleichung kann die Verformung nach Gleichung 4.131 bestimmt werden. Die Wahl der Position der fiktiven Einwirkung entspricht der Position der berechneten Verformung.

$$w = \int_0^l \bar{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx \quad (3.102)$$

Wobei $\frac{M(x)}{EI} = \chi(x)$ gilt.

Es gilt die Zustandslinien der Krümmung multipliziert mit der Zustandslinie der Biegemomente in Abbildung 3.26 des virtuellen Kräftezustands über die Stablänge zu integrieren.

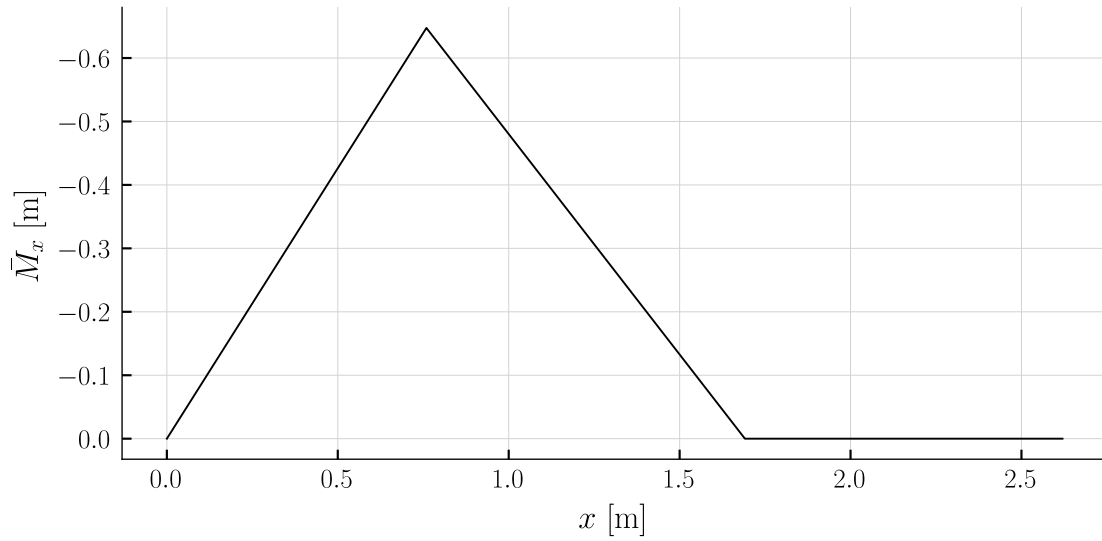


Abbildung 3.26: Biegemomentenverlauf für den virtuellen Kräftezustand

Für die maximale Last beträgt die Deformation an der Stelle w_1 beispielsweise:

$$w_1 = 15.3\text{mm} \quad (3.103)$$

3.6.3 Zugversteifung

Die bisherige Betrachtung beschränkt sich auf einen schlagartigen Wechsel von ungerissen zu vollständig gerissen. Dabei wird der Bereich zwischen den Rissen ebenfalls als gerissen angenommen. Mittels der Zugversteifung wird ein theoretischer Rissabstand ermittelt und zwischen den Rissen eine versteifte Wirkung zwischen Betonstahl und Beton angenommen (Verbundwirkung). Dies wird folgend auf das Versuchsbeispiel angewendet. Berücksichtigt wird dies unter dem Ansatz von Marti, beschrieben in [2].

Die Krümmungsdifferenz nach Marti beträgt:

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \frac{f_{ct}(1 - \rho_{eff})}{E_s \rho_{eff}(d - x_2)} \quad (3.104)$$

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{0.00131\lambda}{\text{m}} \quad (3.105)$$

Der mechanische Bewehrungsgehalt folgt zu:

$$\rho_{eff} = \frac{1}{-n + 1 + \frac{E_s M_r (d - x_2)}{EI^H f_{ct}}} \quad (3.106)$$

$$\rho_{eff} = 0.0753 \quad (3.107)$$

Eine Abschätzung des Rissabstands in Abhängigkeit ist folgend gezeigt. Dabei sind die Resultate für $\lambda = 1$ und $\lambda = 0.5$ berechnet.

$$s_{rm} = \frac{\mathcal{D}_s \lambda (1 - \rho_{eff})}{4\rho_{eff}} \quad (3.108)$$

$$s_{rm} = 36.8\text{mm} \quad (3.109)$$

$$s_{rm} = 18.4\text{mm} \quad (3.110)$$

Die Rissbreite ist abhängig von der Betonstahlspannung. Da vor dem Reißen des Betons keine Risse vorhanden sind, darf die Rissspannung von der Betonstahlspannung subtrahiert werden. Die Rissspannung lässt sich anhand der Betonstahlkraft aus dem Zustand 2 bestimmen.

$$\sigma_{sr0} = \frac{F_{s,2}}{A_s} \quad (3.111)$$

Die Bestimmung der Rissbreite ist folgend gezeigt. Für die Stahlspannung wird die Fließspannung eingesetzt.

$$w_r = \frac{s_{rm} (-\lambda \sigma_{sr0} + 2\sigma_{sr})}{2E_s} \quad (3.112)$$

Die Variation des Parameters $\lambda = 1; 0.5$ gilt hier ebenfalls.

$$w_r = 0.0933\text{mm} \quad (3.113)$$

$$w_r = 0.0485\text{mm} \quad (3.114)$$

Die Resultate sind vergleichbar mit den gemessenen Rissbreiten der Laststufe 12, die in [3] dargestellt sind. Diese liegen in einem Wertebereich von 0.15 mm bis 0.3 mm.

Unter Berücksichtigung der beiden λ -Grenzwerte ist der Einfluss der Zugversteifung im Momente-Krümmungsdiagramm in Abbildung 3.27 gezeigt.

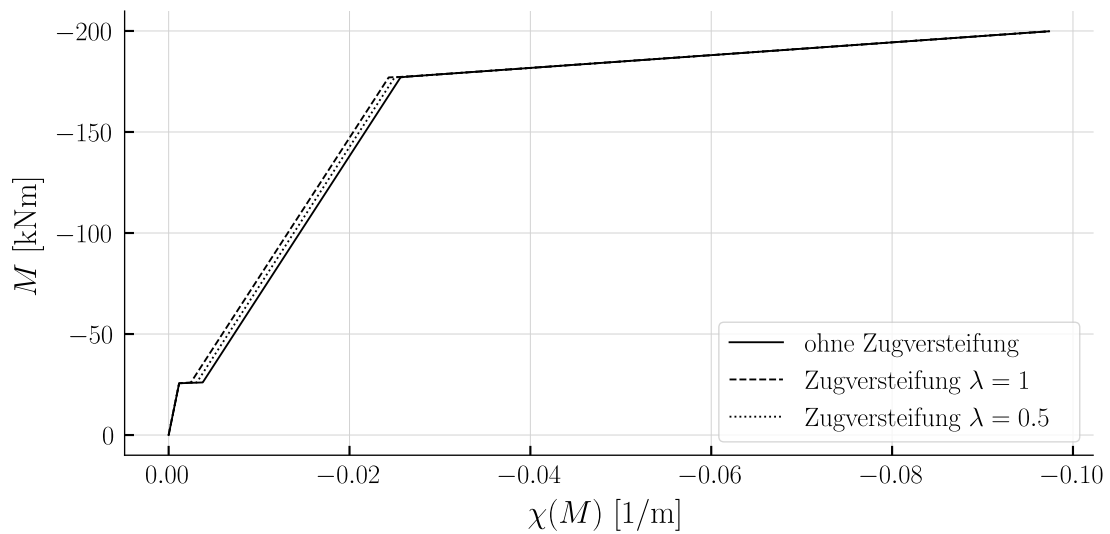


Abbildung 3.27: Momenten-Krümmungsdiagramm mit Zugversteifung ergänzt

Es zeigt sich ein steiferes Verhalten im gerissenen Bereich. Der Einfluss ist relativ gering.

3.7 Fachwerk

Die bisherigen Analysen beschränken sich auf eine Querschnittsbetrachtung. Der Kraftfluss lässt sich mit einem Spannungsfeld detaillierter verfolgen. Eine Einteilung in Parallelfelder und Fächer ist in Abbildung 3.28 gezeigt.

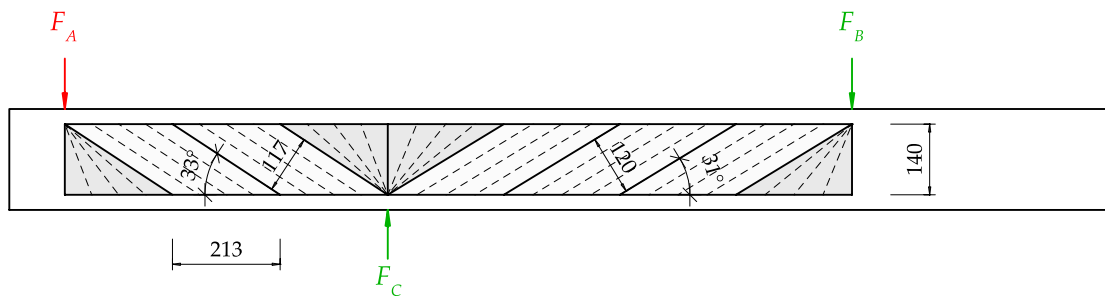


Abbildung 3.28: Spannungsfeld mit flacher Feldneigung

Der Neigungswinkel der Betondruckstrebe wird in Anlehnung an die Gleichung 3.115 zur Bestimmung des Querkraftwiderstands von vertikaler Schubbewehrung, gemäss Ziffer 4.3.3.4.3 [6], bestimmt.

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{sd} \cot(\alpha) \quad (3.115)$$

Dabei wird die Querschnittsfläche der Schubbewehrung bestimmt.

$$A_{sw} = 197.9 \text{ mm}^2 \quad (3.116)$$

Der Hebelarm der inneren Kräfte des Zustands 4 wird angesetzt.

$$z_4 = 140.0 \text{ mm} \quad (3.117)$$

Die Fliessspannung wird mit der Zugfestigkeit f_{su} substituiert. Dies gewährleistet, dass die Schubbewehrung den elastischen Bereich verlässt. Der Querkraftwiderstand wird mit der maximal im System auftretenden Querkraft ersetzt. Abschliessend gilt $\alpha = \theta_{c3}$.

$$\theta_{c3,min} = \text{acot} \left(\frac{V_{R,s} s_w}{A_{sw} f_{su} z_4} \right) \quad (3.118)$$

$$\theta_{c3,min} = 0.599 \quad (3.119)$$

$$\theta_{c3,min} = 34.3^\circ \quad (3.120)$$

Der gewählte Neigungswinkel der Felder in Abbildung 3.28 orientiert sich an dem berechneten Winkel. Ausserdem wurde darauf geachtet, dass alle Felder parallel zueinander angeordnet sind.

Durch das Zusammenfassen der Felder zu Streben resultiert das Fachwerk in Abbildung 3.29. Um aus dem Fachwerkmodell zutreffende Verformungen zu ermitteln, gilt es den Pendelstäben passende Dehnsteifigkeiten zu zuordnen.

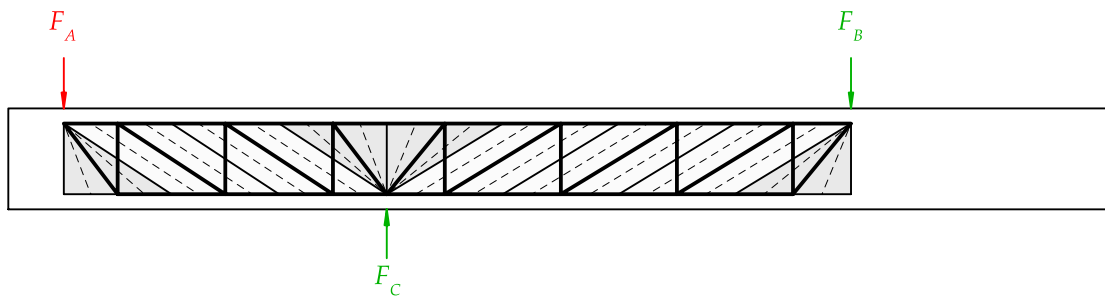


Abbildung 3.29: Spannungsfelder zu einem Fachwerk zusammengeführt

Dem Zuggurt ist die Spannungs-Dehnungsbeziehung gemäss Abbildung 3.18 hinterlegt, sowie entspricht die Querschnittsfläche jener der Zugbewehrung.

Die Querschnittsfläche des Druckgurts entspricht der Höhe des plastischen Spannungsbereichs des Zustands 4 multipliziert mit der Plattenstreifenbreite. Diese wird

als konstant über sämtliche Stäbe des Druckgurtes angenommen. Des Weiteren ist die Spannungs-Dehnungsbeziehung gemäss Abbildung 3.19 angewendet.

Die Querschnittsfläche der Druckstreben entspricht der Streifenbreite multipliziert mit der Parallelfeldbreite, gezeigt in Abbildung 3.28. Für die Diagonalen der nicht zentrierten Fächer ist vereinfacht die gleiche Querschnittsfläche hinterlegt. Dazu gilt die Spannungs-Dehnungsbeziehung gemäss Abbildung 3.19.

Die Ständer bilden die Schubbewehrung ab. Die Querschnittsfläche resultiert aus der Anzahl an Schubdübeln im entsprechenden Spannungsfeld. Es gilt die Spannungs-Dehnungsbeziehung gemäss Abbildung 3.18. Die Abbildung 3.30 zeigt, dass pro Ständer drei Schubdübel umfasst sind.

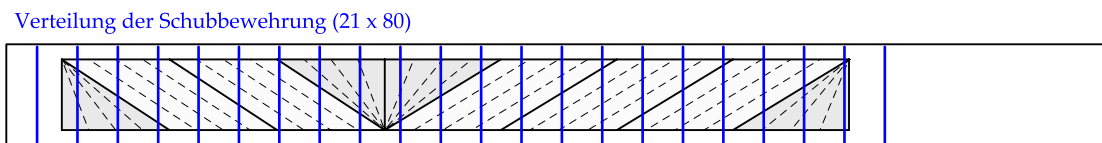


Abbildung 3.30: Anordnung der Schubbewehrung im Fachwerk mit flacher Neigung

Am Fachwerkmodell lassen sich die Verformungsanteile aus der Schubbewehrung, der Gurte und der Betondruckstreben ermitteln. Beispielsweise lässt sich der Anteil der Schubbewehrung durch das Setzen der Steifigkeit der übrigen Stäbe auf ein infinit grosses Mass bestimmen. Dargestellt ist dies in Abbildung 3.36.

Verformung für Maximallast zeichnen:

3.8 Modellvergleich

Abgeschlossen wird die Analyse des Dreipunktbiegeversuchs mit einer Gegenüberstellung der angewendeten Methoden. Der Fokus liegt auf der darauf, die experimentell ermittelten Verformungen mit den Verformungen aus den Modellen zu vergleichen.

3.8.1 Krümmung

Der Modellvergleich wird bei der Beschreibung der Krümmung der unterschiedlichen Modelle gestartet. Aus dem Vergleich der Momentenkrümmungsbeziehung, dargestellt in Abbildung 3.31, lassen sich die Biegesteifigkeiten herauslesen. Die Unterschiede des Detaillierungsgrad der Beziehung zwischen den Modellen ist deutlich erkennbar.

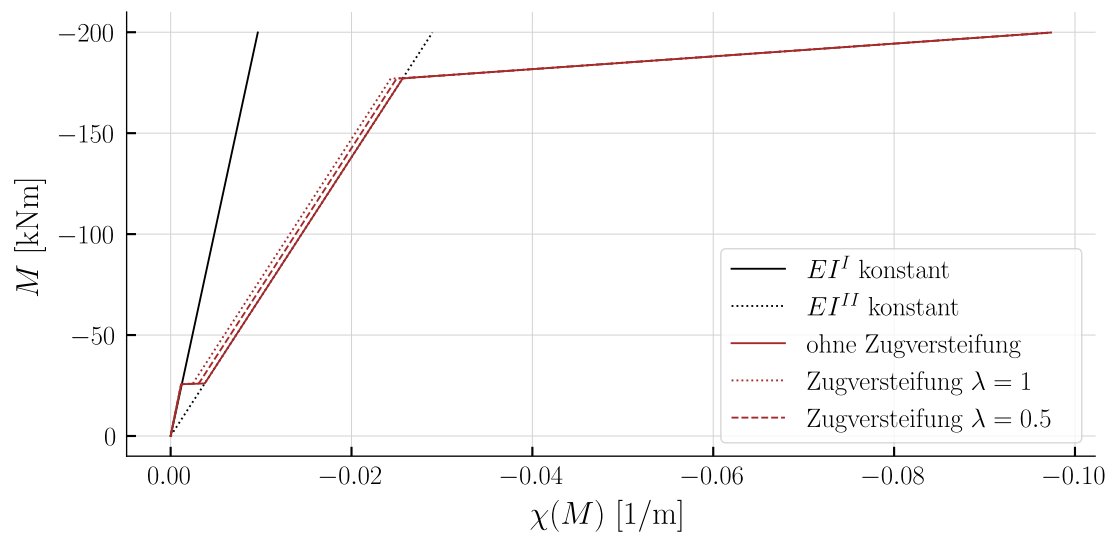


Abbildung 3.31: Momenten-Krümmungsdiagramm der unterschiedlichen Methoden

Die Abbildung 3.32 zeigt den Krümmungsverlauf für den Biegemomentenverlauf aus Abbildung 3.9. Ausgehend davon, dass die erweiterte Momentenkrümmungsbeziehung aus der Querschnittsanalyse den effektiven Krümmungsverlauf präzise abbilden kann, zeigen die konstanten Biegesteifigkeiten deutliche Abweichungen. Der Fließbereich über dem Auflager C kann nicht abgebildet werden. Des Weiteren zeigt sich ein ausgeprägter gerissener Bereich, welcher mit der konstanten ungerissenen Biegesteifigkeit als deutlich zu steif eingeschätzt wird.

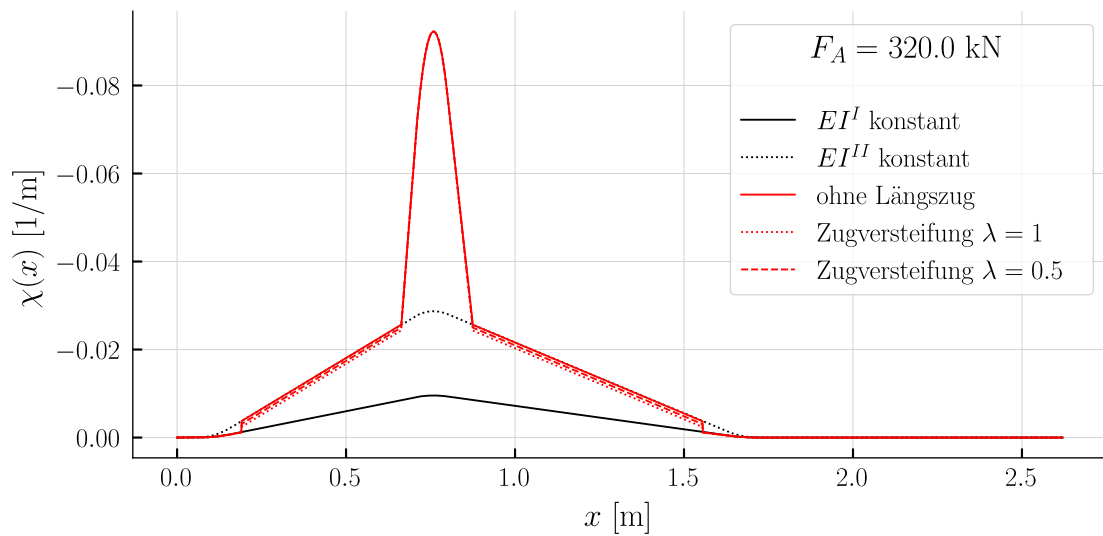


Abbildung 3.32: Krümmungsverlauf für die maximale Laststufe ohne Längzugkraft

Das analoge Vorgehen gilt für den Biegemomentenverlauf aus Abbildung 3.10. Dargestellt ist der Krümmungsverlauf für diesen in Abbildung 3.33.

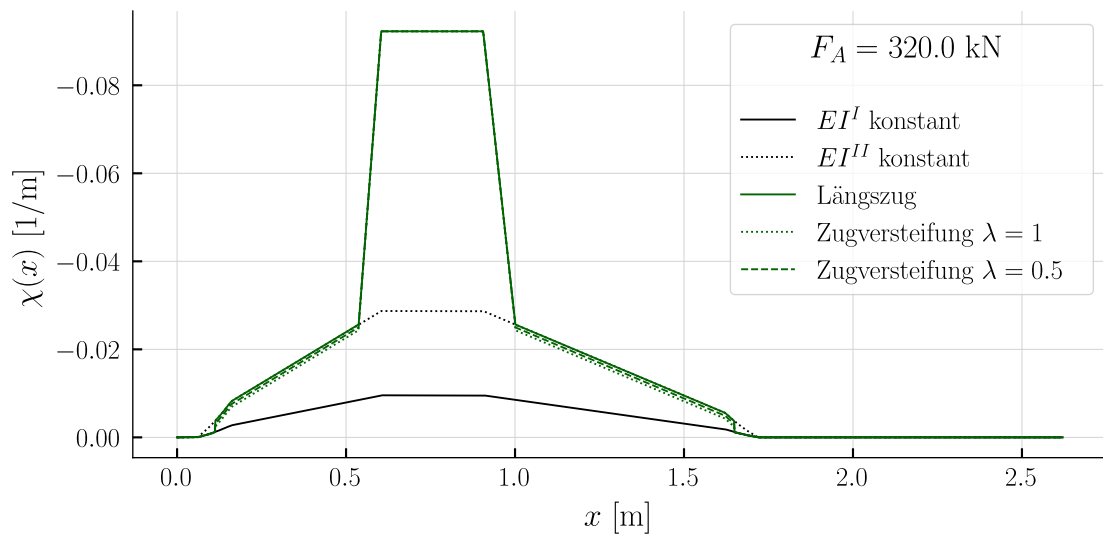


Abbildung 3.33: Krümmungsverlauf für die maximale Laststufe mit Längzugkraft durch Querkraft

Die Schwächen der konstanten Biegesteifigkeiten zeigen sich hier ebenfalls. Auffallend dabei ist der deutlich breitere Fließbereich aus der detaillierten Momentenkrümmungsbeziehung. Die Verformung resultiert, wie in Gleichung 4.131 beschrieben, aus der Integration des Krümmungsverlaufs. Folglich hat die Verbreiterung im Fließbereich einen signifikanten Einfluss auf die Verformung.

3.8.2 Verformung

Aussagekräftig sind vor allem die Last-Verformungsdiagramme. Diese ermöglichen einen direkten Vergleich mit den gemessenen Verformungen des Versuchs. In Abbildung 3.34 und Abbildung 3.35 sind diese für die Biegemomentenverläufe Abbildung 3.9 und Abbildung 3.10 gezeigt. Welche sich in der Berücksichtigung des Versatzmasses unterscheiden. Die Verformung ist an der Stelle w_1 gemessen, vergleiche Abbildung 3.6.

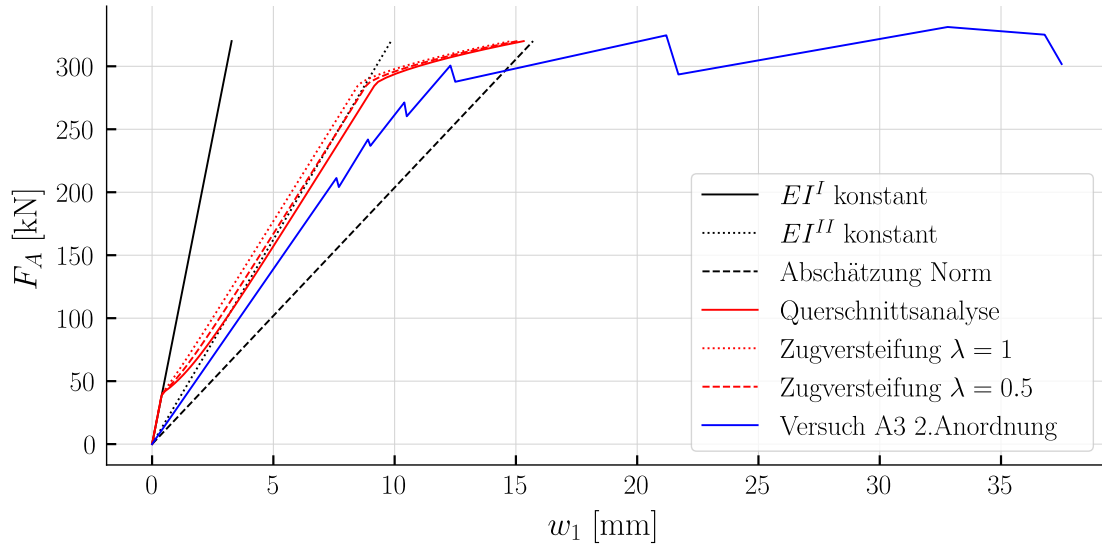


Abbildung 3.34: Last-Verformungsdiagramm bei der Krafteinleitung F_A

Es zeigt sich, dass mit einer konstanten ungerissenen Biegesteifigkeit die Verformungen nicht zufriedenstellend abbildbar sind. Bereits im gerissenen Bereich zeigen sich deutliche Abweichungen zu den Versuchsmessungen.

Mit einer konstanten gerissenen Biegesteifigkeit nähert man sich den Versuchsergebnissen an. Die Differenzen zu den Versuchsmessungen steigen mit steigender Laststufe.

Die Darstellung der Normabschätzung zeigt eine konservative Abschätzung der Verformungen. Die Verformungen werden für sämtliche Laststufen bis zum Erreichen des Fließbereichs überschätzt.

Bei der Berücksichtigung des verfeinerten Momenten-Krümmungsdiagramms in rot dargestellt, lässt sich das Verformungsverhalten des Versuchs annähernd abbilden. Das Modell bildet ein zu steifes Verhalten ab. Die Zugversteifung wirkt der Modellgenauigkeit entgegen.

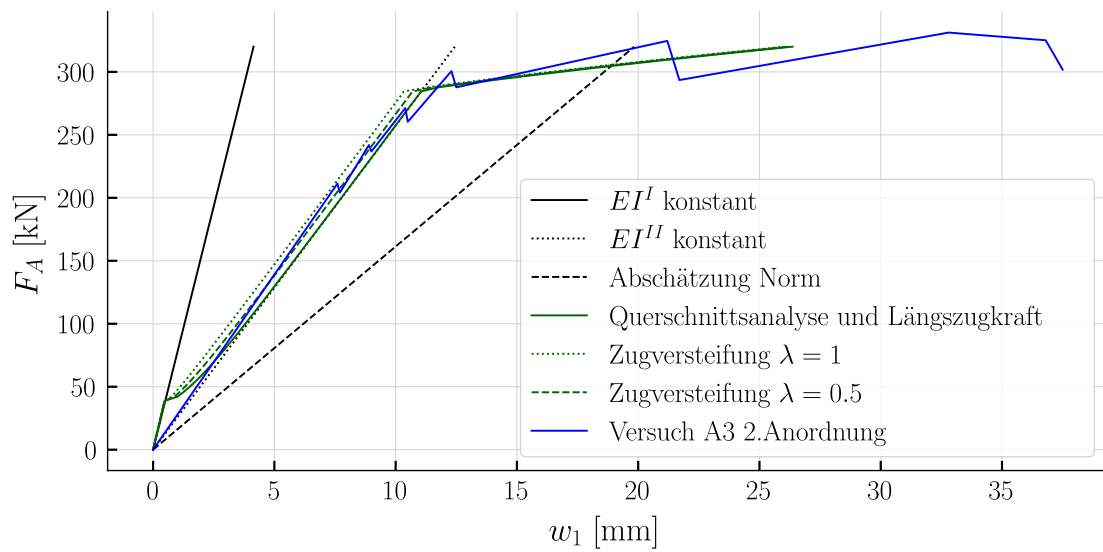


Abbildung 3.35: Last-Verformungsdiagramm bei der Krafteinleitung F_A mit Längszugkraft aus Querkraft

Die Abbildung 3.35 zeigt sämtliche Berechnungsmethoden unter Berücksichtigung der Längszugkraft aus der Querkraft. Es zeigt sich deutlich, dass das Berechnungsmodell mit der Zugversteifung den Versuchsverlauf zufriedenstellend abbildet. Lediglich Abweichungen im Höchstlastbereich sind vorhanden.

Die Normabschätzung zeigt deutliche Abweichungen zu den gemessenen Verformungen. Zwar liegen diese auf der sicheren Seite, sind jedoch äusserst konservativ.

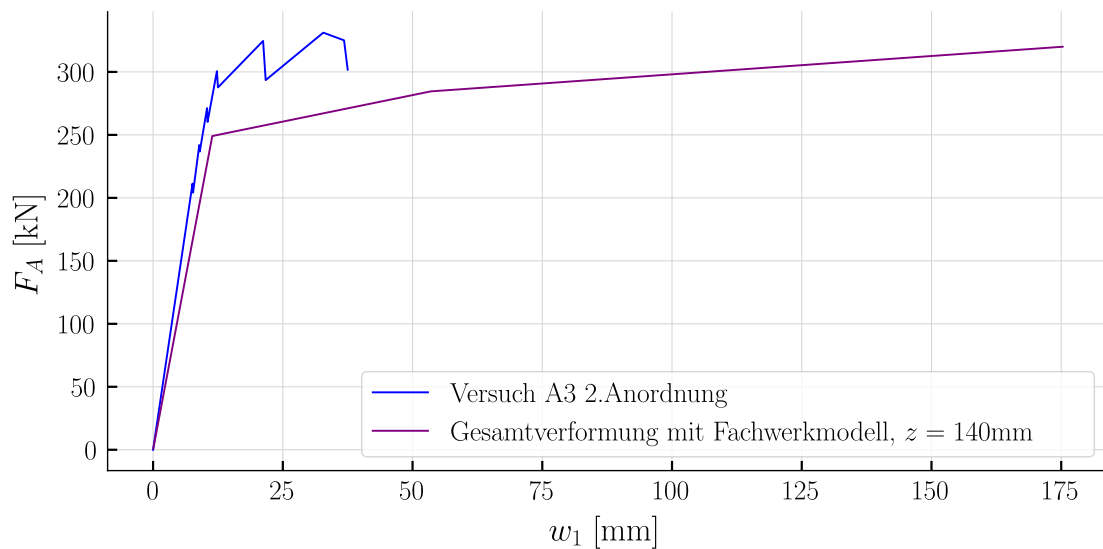


Abbildung 3.36: Last-Verformungsdiagramm bei der Krafteinleitung F_A mittels Fachwerkmodell

Das Fachwerkmodell beschreibt den Verlauf ausreichend präzise. Die maximale Deformation, die mit der rechnerisch ermittelten Höhe, sprich dem inneren Hebelarm aus der Querschnittsanalyse, erzielt wird, überschreitet das Ziel bei Weitem. Das Fachwerkmodell reagiert äusserst sensibel auf die gewählte Höhe. Der Verformungsverlauf lässt sich mit einer Fachwerkshöhe von 160 mm präzise abbilden. Ohne Kenntnisse der Versuchsergebnisse wäre jedoch eine präzise Bestimmung der Verformung im Bereich des Fließens der Zugbewehrung nicht möglich.

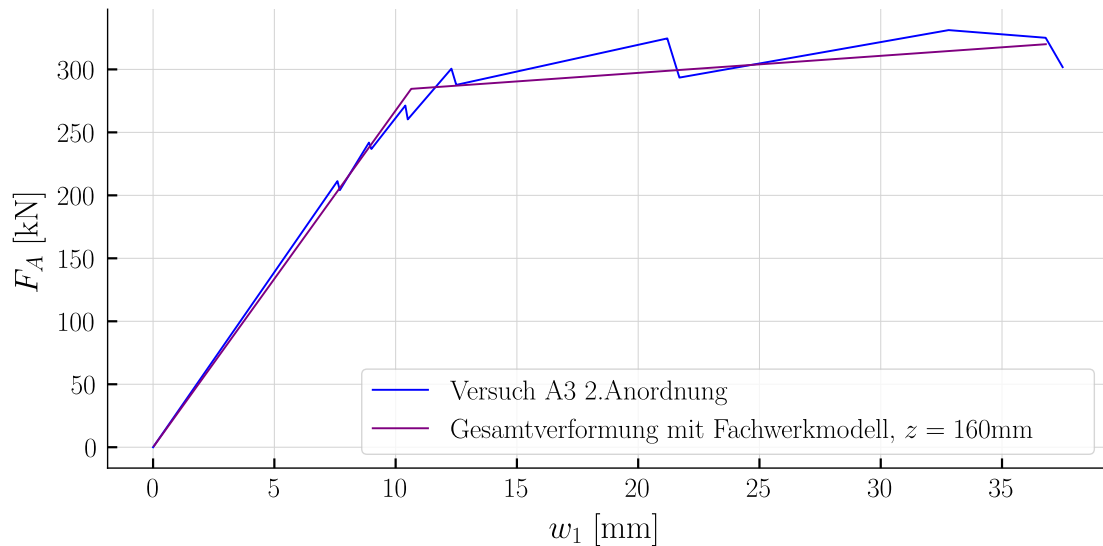


Abbildung 3.37: Last-Verformungsdiagramm bei der Krafteinleitung F_A mittels Fachwerkmodell

Des Weiteren zeigt sich, dass die Gesamtverformung primär aus der Verformung der Zugbewehrung resultiert. Die Schubverformung ist für die dünne Platte unbedeutend.

4 Verformung an einem Vierpunktbiegeversuch

Dieses Kapitel zeigt alle in Kapitel 2 aufgezeigten Modelle, angewendet auf einen Vierpunktbiegeversuch. Das Vorgehen ist in grossen Teilen analog dem Berechnungsvorgehen aus dem Kapitel 3. Es wird das Ziel verfolgt, die Anwendbarkeit des Berechnungsapparats an einem weiteren Versuch zu verifizieren, bzw. die Differenzen zwischen den mit den verschiedenen Modellen berechneten Verformungen und den gemessenen Verformungen aufzuzeigen.

4.1 Versuchsbeschreibung

Entnommen ist der Versuch SV14 aus [7]. Es handelt sich um einen Vierpunktbiegeversuch. Es wird das Verhalten in Feldmitte analysiert. Im Zugbereich sind Bewehrungsstäbe mit hochfestem Stahl verlegt. Die Schubbewehrung ist minimal gehalten, sowie unterscheidet sich die Teilung im linken und rechten Bereich des Balkens. Dargestellt ist dies in Abbildung 4.1.

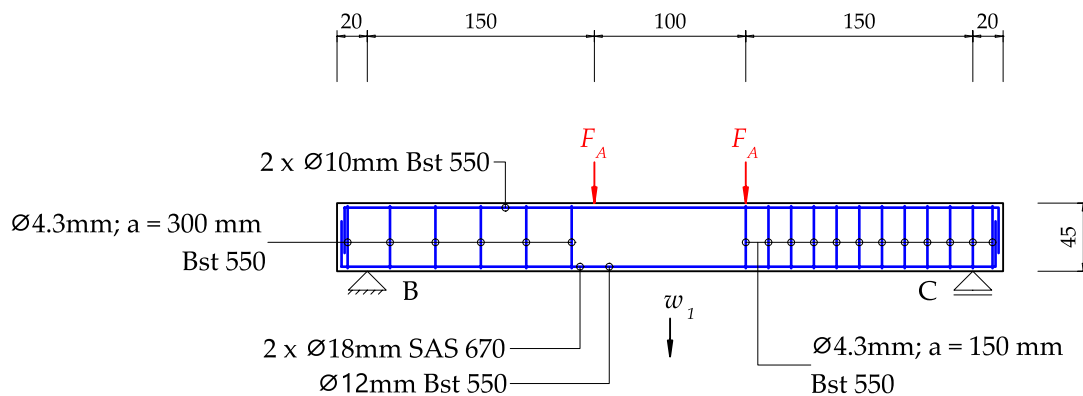


Abbildung 4.1: Lagerung und Belastung des Balkens Versuch SV 14, nachgezeichnet nach [7]

Das statische System entspricht einem einfachen Balken. Die Last wird an beiden Angriffspunkten zeit- und betragsgleich eingeleitet. Gemäss den Versuchsdaten tritt ein Biegeversagen bei einer Laststufe von 105 kN ein.

4.2 Eigenschaften der Baustoffe

Die Eigenschaften des hochfesten Betonstahls sind aus [8] entnommen. Für den Bst 550 sind Eigenschaften gemäss dem B500B aus der [6] angesetzt mit einer Erhöhung der Fließgrenze auf 550 N/mm². Lediglich die Betondruckfestigkeit ist im Versuchsbericht [7] beschrieben. Diese wird als Zielfestigkeit $f_c = 35 \text{ N/mm}^2$ deklariert. Die Zylinderdruckfestigkeit, sowie Zugfestigkeit und Elastizitätsmodul sind folgend rechnerisch ermittelt. Die Zylinderdruckfestigkeit ist entsprechend gewählt, um die Zielfestigkeit zu erreichen:

$$f_c = 2.7 f_{cc}^{\frac{2}{3}} \quad (4.1)$$

$$f_c = \frac{35.0 \text{ N}}{\text{mm}^2} \quad (4.2)$$

Die Zugfestigkeit berechnet mittels Gleichung nach [5] folgt zu:

$$f_{ct} = 0.3 f_{cc}^{\frac{2}{3}} \quad (4.3)$$

$$f_{ct} = \frac{3.89 \text{ N}}{\text{mm}^2} \quad (4.4)$$

Die Abschätzung für den Elastizitätsmodul nach [5] resultiert zu:

$$E_c = 10000 \sqrt[3]{f_{cc}} \quad (4.5)$$

$$E_c = \frac{36011.0 \text{ N}}{\text{mm}^2} \quad (4.6)$$

4.3 Reiner Biegeträger

Dieser Abschnitt beschreibt die Analyse des Systems als reinen Biegeträger. Es sind Auflagerkräfte, sowie elastische Zustandslinien der Schnittkräfte dargestellt. Als Grundlage dient das statischen System in Abbildung 4.2.

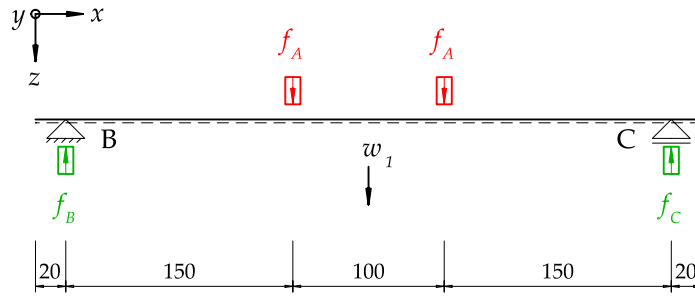


Abbildung 4.2: Statisches System des Versuchs mit berücksichtigter Auflagerbreite

Tabelle 4.1: Versuchsparameter für den reinen Biegeträger

Parameter	
$a_1 = 0.2\text{m}$	$a_2 = 1.5\text{m}$
$a_3 = 1.0\text{m}$	$a_4 = 1.5\text{m}$
$a_5 = 0.2\text{m}$	$b = 170.0\text{mm}$
$b_{Auflager} = 100\text{mm}$	$h = 450.0\text{mm}$

4.3.1 Auflagerkräfte

Die Auflagerkräfte lassen sich anhand der Gleichgewichtsbeziehungen am statisch bestimmten System ermitteln. Die Bestimmung derer ist für den einfachen Balken trivial und entsprechen im Betrag den angreifenden Kräften. In Anlehnung an das Vorgehen beim Dreipunktbiegeversuch Kapitel 3 ist folgend eine Ermittlung durch die Gleichgewichtsbeziehungen gezeigt.

Die Gesamtlänge des Balkens beträgt:

$$l_{tot} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \quad (4.7)$$

$$l_{tot} = 4.4\text{m} \quad (4.8)$$

Durch Momentengleichgewicht um die Auflagerpunkte C und B folgen die Beziehungen zwischen Einwirkung und Reaktionskräfte:

$$0 = -F_A a_2 - F_A (a_2 + a_3) - F_C (a_2 + a_3 + a_4) \quad (4.9)$$

$$0 = F_A a_4 + F_A (a_3 + a_4) - F_B (a_2 + a_3 + a_4) \quad (4.10)$$

Durch Auflösung nach den Reaktionskräften folgt:

$$F_B = \frac{F_A a_3 + 2F_A a_4}{a_2 + a_3 + a_4} \quad (4.11)$$

$$F_C = \frac{-2F_A a_2 - F_A a_3}{a_2 + a_3 + a_4} \quad (4.12)$$

Die Reaktionskräfte dividiert durch die Auflagerbreite resultieren zu den folgenden Streckenlasten, bzw. Reaktionen:

$$f_B = \frac{F_A a_3 + 2F_A a_4}{b_{Auflager} (a_2 + a_3 + a_4)} \quad (4.13)$$

$$f_C = \frac{-2F_A a_2 - F_A a_3}{b_{Auflager} (a_2 + a_3 + a_4)} \quad (4.14)$$

$$f_A = \frac{F_A}{b_{Auflager}} \quad (4.15)$$

4.3.2 Zustandslinien

Die Zustandslinien der Schnittkräfte resultieren aus der Bemühung der hergeleiteten Gleichungen in Kapitel 2.1. Dabei ist zu beachten, dass die Zustandslinien lediglich für die maximal gewählte Laststufe gelten. Der Verlauf der Einwirkungen ist in Abbildung 4.3 aufgezeigt.

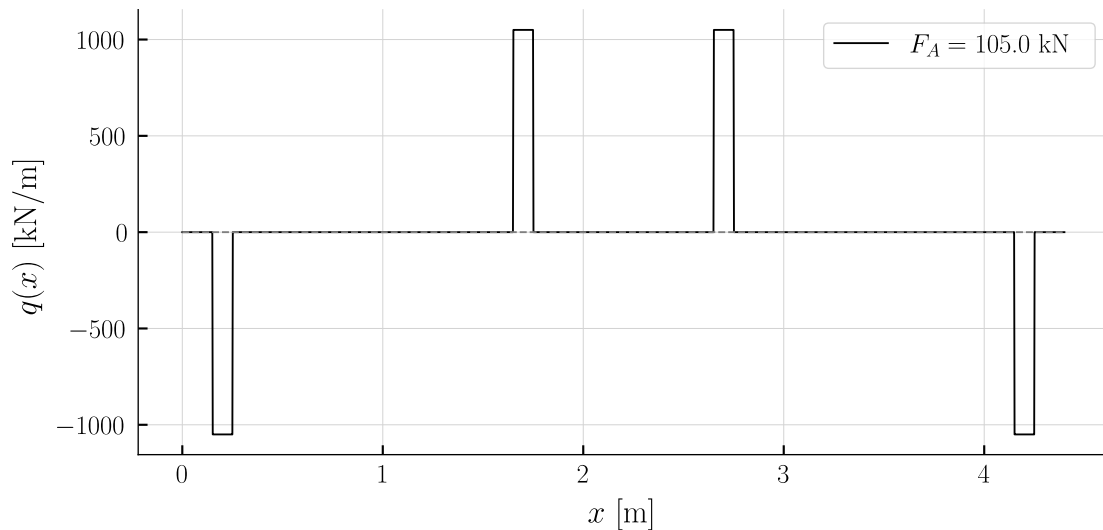


Abbildung 4.3: Verlauf der Einwirkungen und Reaktionskräften

Durch Integration der Einwirkung über die Laufvariable x ergibt sich der Verlauf der Querkraft.

$$V(x) = - \int q(x) dx + c_1 \quad (4.16)$$

Dabei kann mit der Randbedingung $V(0) = 0$ die Integrationskonstante ermittelt werden. Der Verlauf der Querkräfte ist in Abbildung 4.4 dargestellt.

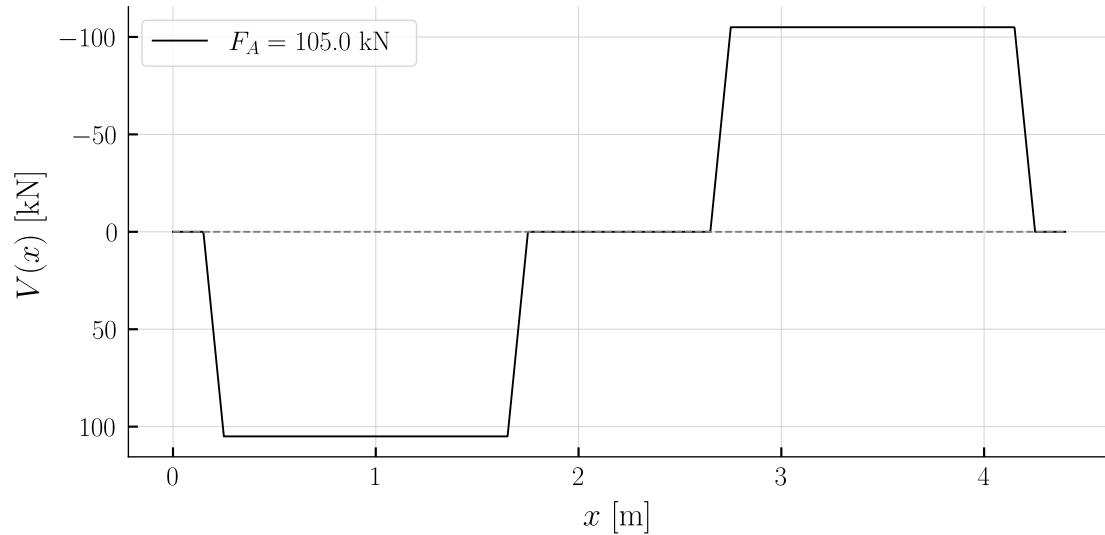


Abbildung 4.4: Verlauf der Querkräfte

Der Verlauf des Biegemoments lässt sich durch Integration der Querkräfte bestimmen:

$$M(x) = \int V(x) dx + c_2 \quad (4.17)$$

Mit der Randbedingung $M(0) = 0$ kann die Integrationskonstante bestimmt werden. Der Verlauf der Biegemomente ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Es stellt sich ein Maximum in der Feldmitte ein.

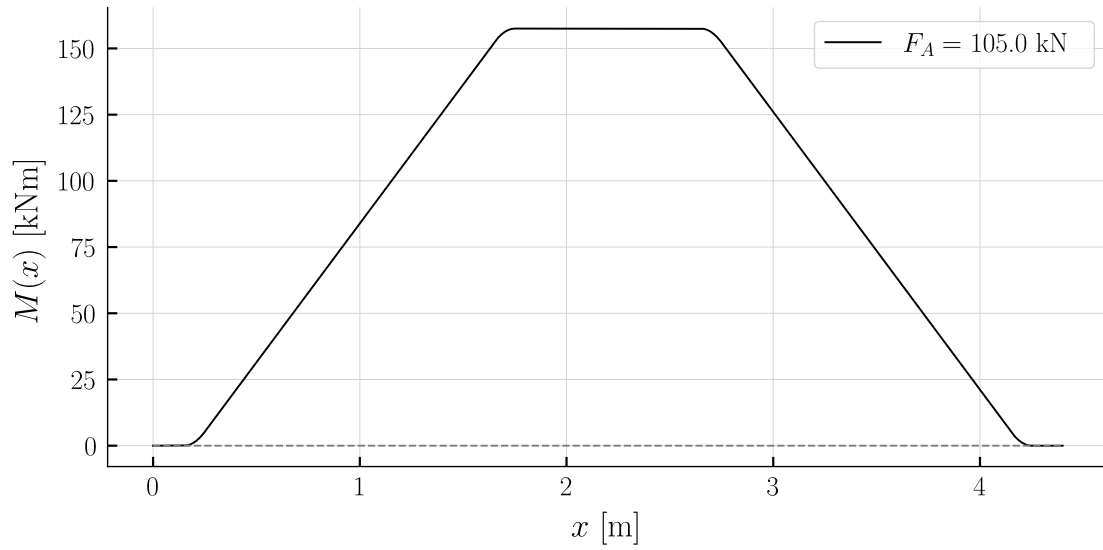


Abbildung 4.5: Verlauf der Biegemomente

Zusätzlich zu den resultierenden Biegemomenten aus der Einwirkung kann ein durch die Längszugkraft aus der Querkraft induziertes Biegemoment ermittelt werden. Dies wird mit einem Versatzmass berücksichtigt. Die Gleichung Gleichung 4.18 zeigt die Ermittlung des Versatzmass. Multipliziert mit der statischen Höhe ergibt sich der Versatz des Biegemoments aus Gleichung 4.19.

$$h_{versatz} = \frac{V \cdot \cot(\theta_{c3})}{2} \quad (4.18)$$

$$M_{versatz} = \frac{V \cdot \cot(\theta_{c3})}{2} \cdot z \quad (4.19)$$

In Abbildung 4.6 ist die Erhöhung durch das Versatzmass gezeigt. Beim Momentenminimum bildet sich ein Plateau aus. Der notwendige Hebelarm der inneren Kräfte anhand der statischen Höhe d abgeschätzt.

$$d_1 = -\frac{\mathcal{O}_{s,1}}{2} - c_{nom} + h \quad (4.20)$$

$$d_1 = 406.0\text{mm} \quad (4.21)$$

$$d_2 = -\frac{\mathcal{O}_{s,2}}{2} - c_{nom} + h \quad (4.22)$$

$$d_2 = 409.0\text{mm} \quad (4.23)$$

Die mittlere statische Höhe folgt zu:

$$d = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} \quad (4.24)$$

$$d = 408.0\text{mm} \quad (4.25)$$

Der Hebelarm der inneren Kräfte:

$$z = 0.9d \quad (4.26)$$

$$z = 367.0\text{mm} \quad (4.27)$$

Sowie gilt folgende Neigung des Druckfelds. Die Wahl des Winkels entspricht dem unteren Grenzwert der [6].

$$\theta_{c3} = 30.0^\circ \quad (4.28)$$

Daraus folgt der Verlauf der Biegemomente mit dem Versatzmass, dargestellt ist dies in Abbildung 3.10.

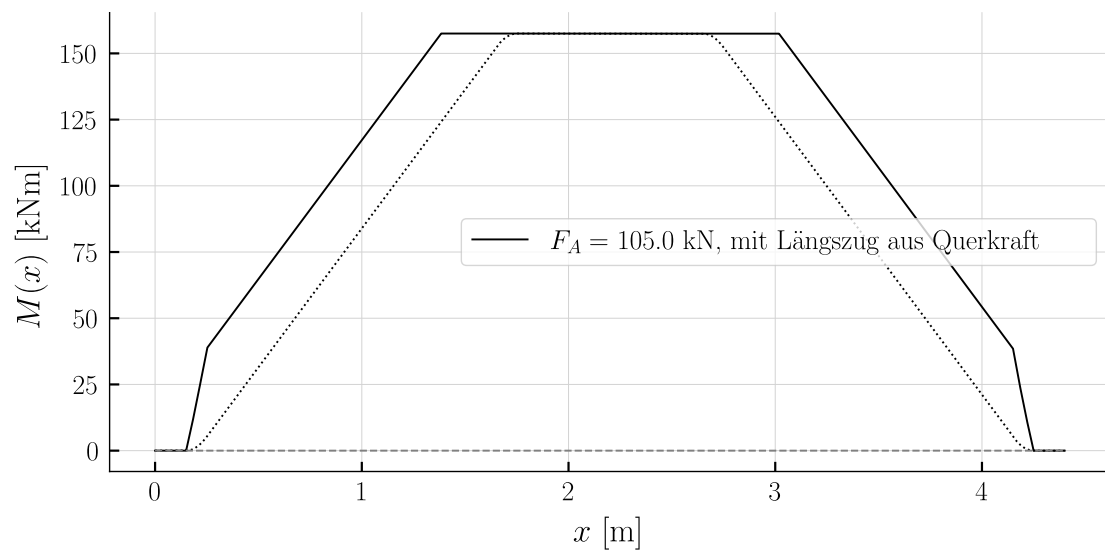


Abbildung 4.6: Verlauf der Biegemomente mit Längszugkraft aus Querkraft

4.3.2.1 Verdrehung- und Verformungslinien

Wie in Kapitel 2.1 hergeleitet, sind die Gleichgewichtsbetrachtungen nicht ausreichend um die Verdrehung und Verformung zu beschreiben. Die Werkstoffbeziehung bedingt eine Biegesteifigkeit. Dabei wird von einer konstanten Biegesteifigkeit ausgegangen. Unter Annahme eines ungerissenen Betonquerschnitts lässt sich die Biegesteifigkeit wie folgt berechnen:

$$EI = \frac{E_c b h^3}{12} \quad (4.29)$$

$$EI = 4.65 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2 \quad (4.30)$$

Der Verlauf der Verdrehung entspricht dem integrierten Verlauf der Biegemomente, dividiert durch die Biegesteifigkeit.

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI} \int M(x) dx + c_3 \quad (4.31)$$

Die Verformung hingegen entspricht dem integrierten Verlauf der Verdrehung.

$$w(x) = \int -\varphi(x) dx + c_4 \quad (4.32)$$

Mit den Randbedingungen $w(C) = 0$ und $w(B) = 0$ können die Integrationskonstanten bestimmt werden. Die elastische Verformung, bzw. die Verformung mit einer konstanten Biegesteifigkeit bestimmt, ist in Abbildung 4.7 dargestellt.

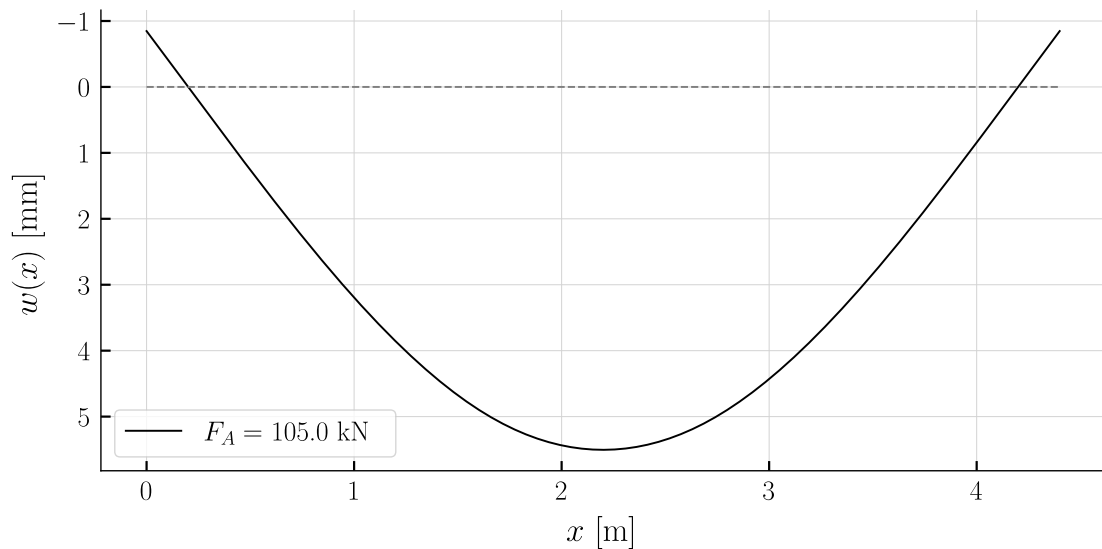


Abbildung 4.7: Verlauf der Verformung für eine konstante ungerissene Biegesteifigkeit

4.4 Mohrsche Analogie

Das Vorgehen ist in Kapitel 2.2 beschrieben. Der bereits bestimmte Momentenverlauf gemäss Abbildung 4.5, dividiert durch die ungerissene Biegesteifigkeit, ist als Einwirkung auf das System anzusetzen. Dargestellt ist dies in Abbildung 4.8.

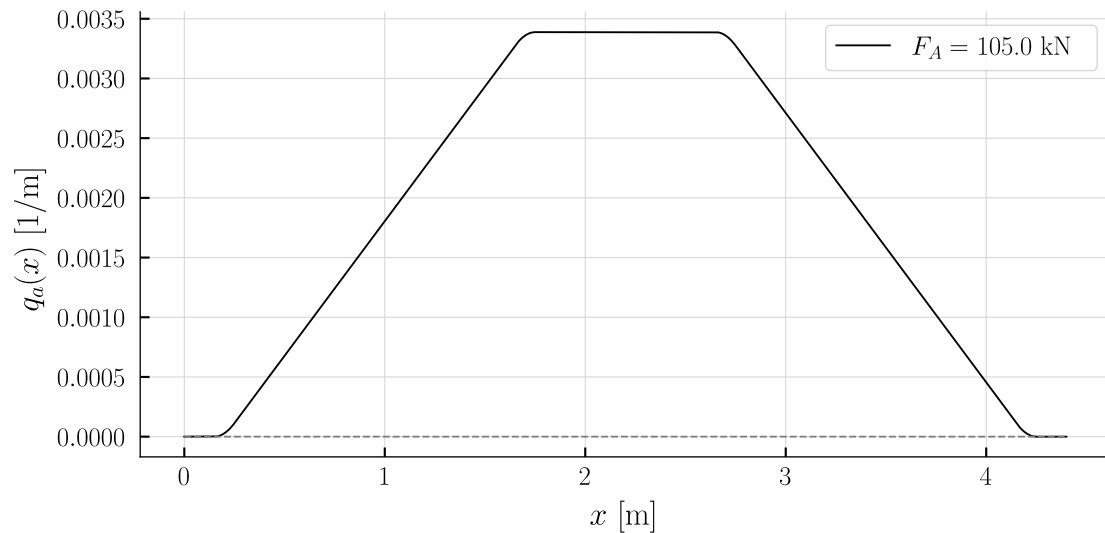


Abbildung 4.8: Verlauf der Einwirkungen auf das analoge System

Aufgrund des bereits bekannten Verlaufs der Verformungen gemäss Abbildung 4.7 sind für das analoge System Gelenke bei den Verformungsnullpunkten einzuführen sowie Einspannungen beim Stabanfang und Ende. Dies entspricht den Lagerungsbedingungen gemäss Abbildung 2.3.

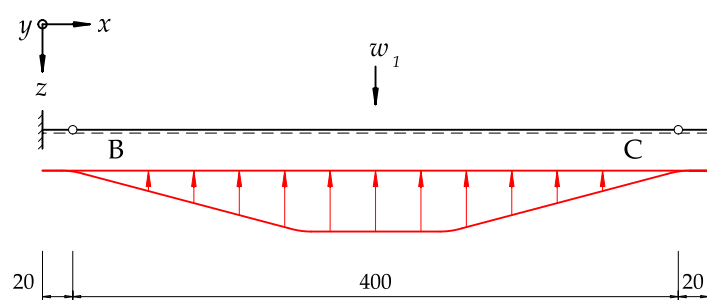


Abbildung 4.9: Analoges System mit entsprechender Einwirkung und Lagerungsbedingungen

Der Querkraftverlauf für das analoge System ist in Abbildung 4.10 aufgezeigt. Die Querkraft ist einheitslos, da es sich um die Verdrehung handelt.

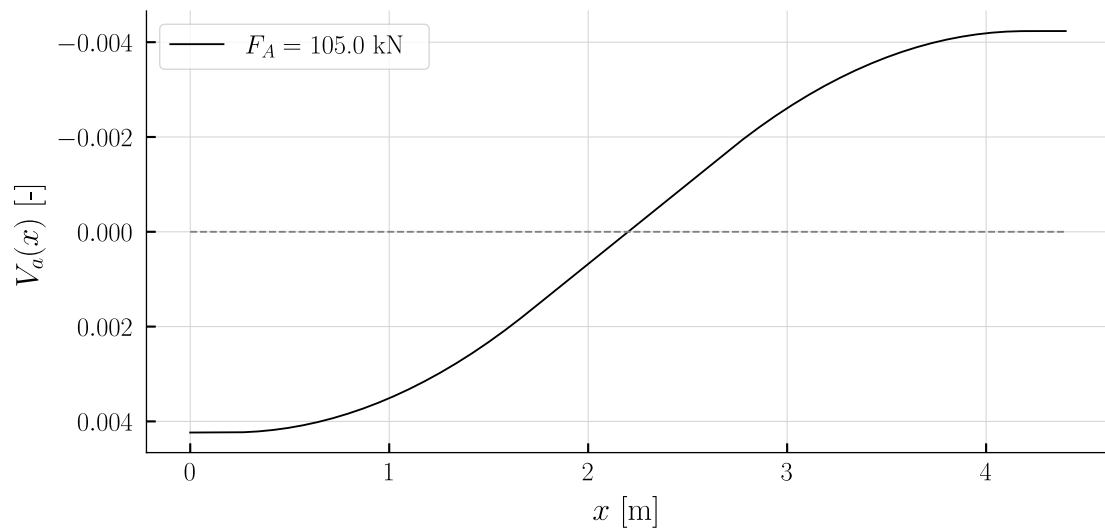


Abbildung 4.10: Verlauf der Querkräfte für das Analogiesystem

Der Biegemomentenverlauf für das analoge System zeigt die Abbildung 4.11. Der Momentenverlauf entspricht der Verformung und ist folglich in [mm] dargestellt.

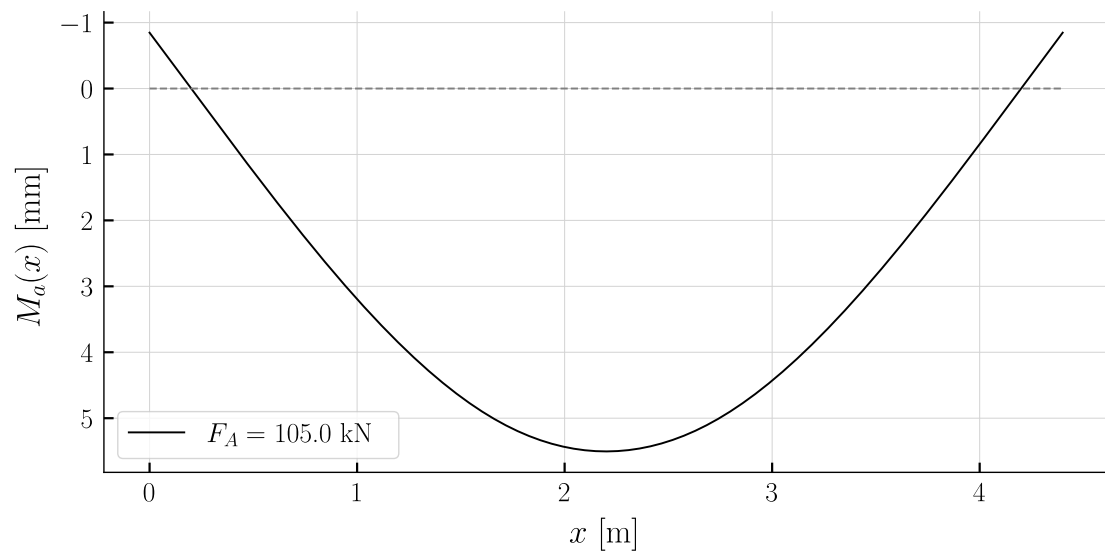


Abbildung 4.11: Verlauf der Biegemomente für das Analogiesystem

Erwartungsgemäss entspricht der Verlauf der Verformung Abbildung 4.11 dem in Abbildung 4.7.

4.5 Abschätzung nach Norm

Nach der bestimmten elastischen Verformung kann die Verformung anhand des vollständig gerissenen Querschnitts nach [6] ermittelt werden. Ohne Druckbewehrung und Kriechinflüsse folgt die Gleichung zu:

$$w_{III,SIA} = \frac{0.75}{10\rho^{0.7}} \left(\frac{h}{d}\right)^3 w_1 \quad (4.33)$$

Dabei entspricht der geometrische Bewehrungsgehalt:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (4.34)$$

Vereinfacht wird der Stab in der Mitte der Zugzone der Querschnittsfläche hinzugezählt, unter Berücksichtigung der kleineren Fließgrenze. Die Querschnittsfläche der Stäbe im Zugbereich folgt zu:

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} \quad (4.35)$$

$$A_s = 735.1\text{mm}^2 \quad (4.36)$$

Die mittlere statischen Höhen für beide Stäbe in der Zugzone entspricht:

$$d = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} \quad (4.37)$$

$$d = 408.0\text{mm} \quad (4.38)$$

Die Verformung entspricht abschliessend:

$$w_{III,SIA} = 26.7\text{mm} \quad (4.39)$$

4.6 Numerische Integration der Krümmung

4.6.1 Grundlagen

Um sich von der Betrachtung einer konstanten Biegesteifigkeit zu lösen, hilft die Anwendung einer verfeinerten Momenten-Krümmungsbeziehung. Folgend wird ein Momentenkrümmungsdiagramm für den Querschnitt aus dem beschriebenen Versuch berechnet. Die vorhandene Querkraftbewehrung ist nicht dargestellt in Abbildung 4.12.

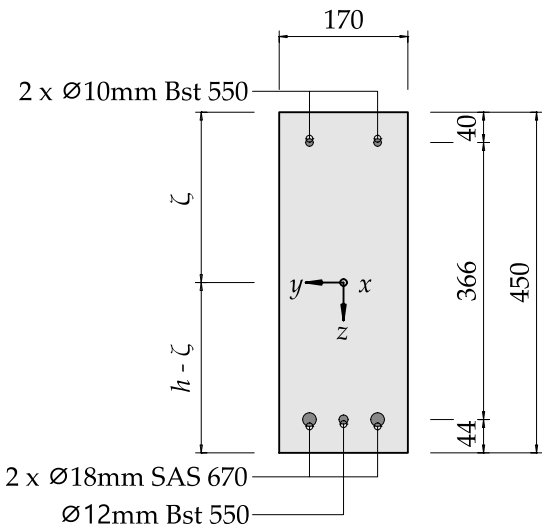


Abbildung 4.12: Querschnitt des Versuchs A3 zur Bestimmung des Momenten-Krümmungsdiagramms

Vereinfacht wird der Querschnitt folgender massen:

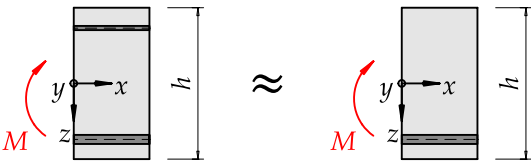


Abbildung 4.13: Vereinfachung der Bewehrungsführung

Die Parameter in Tabelle 4.2 finden Einfluss in die Berechnungen.

Tabelle 4.2: Versuchsparameter für die verfeinerte Momenten-Krümmungsbeziehung

Parameter	
$E_s = \frac{205000.0\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\phi_{s,1} = 18.0\text{mm}$

Parameter	
$\phi_{s,2} = 12.0\text{mm}$	$c_{nom} = 35.0\text{mm}$
$f_{cc} = \frac{46.7\text{N}}{\text{mm}^2}$	$f_{su,1} = \frac{800.0\text{N}}{\text{mm}^2}$
$f_{su,2} = \frac{657.0\text{N}}{\text{mm}^2}$	$f_{sy,1} = \frac{670.0\text{N}}{\text{mm}^2}$
$f_{sy,2} = \frac{550.0\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\theta_{c3} = 30.0$
$\varepsilon_{cu} = 0.003$	$\varepsilon_{su} = 0.05$

Neben den Parametern wird das Stoffgesetz für den Betonstahl in Abbildung 4.14 hinterlegt. Das Bilineare, bzw. linear-elastisch linear-plastische Spannungs-Dehnungsdiagramm für den Betonstahl hält den Rechenaufwand klein und liefert eine ausreichende Genauigkeit. Eine Berücksichtigung des verfestigenden Verhaltens ist essentiell um die Verformungen nach dem Fließen des Betonstahls näherungsweise zu bestimmen. Das Diagramm ist definiert bis zur Bruchdehnung des Stahls. Das Verhalten gilt ebenso im negativen Spannungs-Dehnungs Bereich.

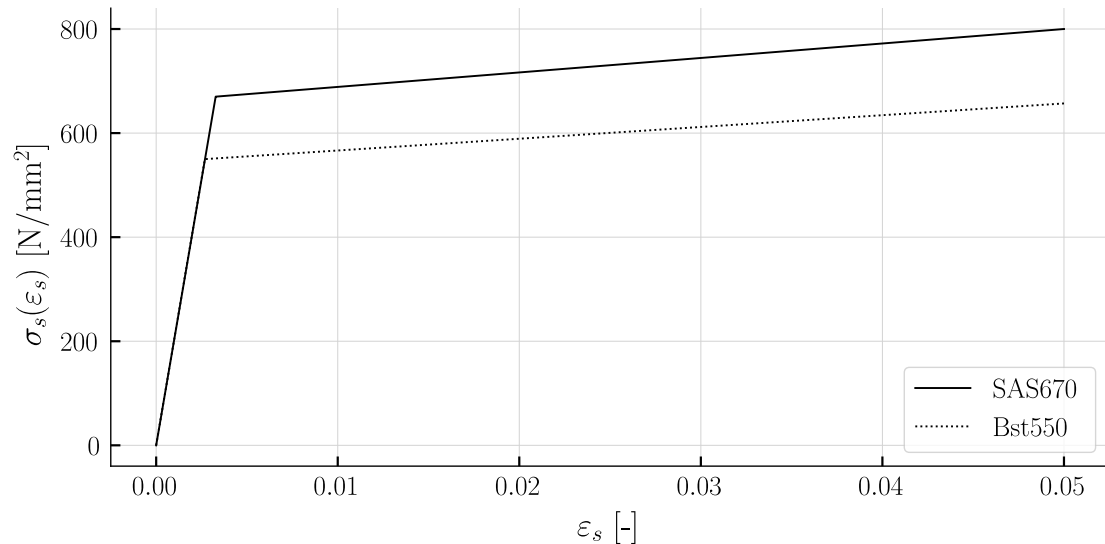


Abbildung 4.14: Spannungs-Dehnungs Diagramm des Bewehrungsstahls linear elastisch-linear verfestigend plastisch

Die Betonkennlinie in Abbildung 4.15 zeigt ein linear-elastisches ideal-plastisches Verhalten. Im positiven Bereich lässt sich die Betonspannung bis zur Betonzugfestigkeit erhöhen, im negativen Spannungsbereich beginnt ein Plastifizieren beim Erreichen der Betondruckfestigkeit. Bis zur Bruchstauchung ist dies definiert.

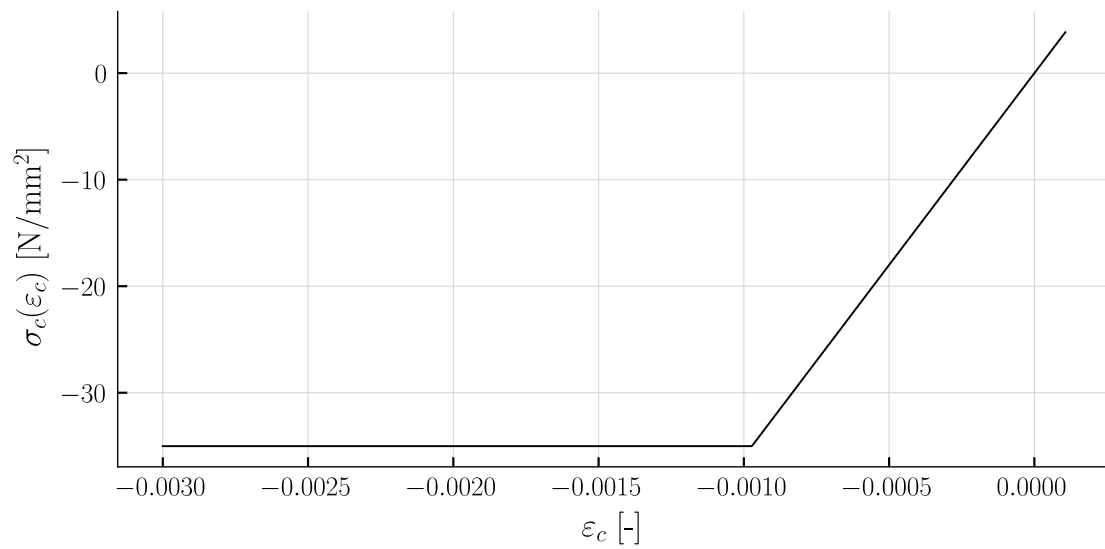


Abbildung 4.15: Spannungs-Dehnungs Diagramm des Betons linear elastisch-ideal plastisch

4.6.2 Querschnittsanalyse

Mittels einer Querschnittsanalyse lassen sich die unterschiedlichen Zustände des Momenten-Krümmungsdiagramms ermitteln.

4.6.2.1 Schwerpunkt des Querschnitts

Durch die Bestimmung der Wertigkeit n kann der Querschnitt als homogener Betonquerschnitt zur Bestimmung des Schwerpunkts behandelt werden.

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (4.40)$$

$$n = 5.69 \quad (4.41)$$

Die Querschnittsfläche der Bewehrung beträgt:

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} \quad (4.42)$$

$$A_s = 735.1 \text{ mm}^2 \quad (4.43)$$

Die Betonquerschnittsfläche:

$$A_c = bh \quad (4.44)$$

$$A_c = 76500.0\text{mm}^2 \quad (4.45)$$

Die ideelle Querschnittsfläche resultiert zu:

$$A_i = A_c + A_s (n - 1) \quad (4.46)$$

$$A_i = 79949.7\text{mm}^2 \quad (4.47)$$

Und die z-Koordinate des Schwerpunkts folgt abschliessend zu:

$$\zeta_c = \frac{\frac{A_c h}{2} + (n - 1) (A_{s1} (-d_1 + h) + A_{s2} (-d_2 + h))}{A_i} \quad (4.48)$$

$$\zeta_c = 217.0\text{mm} \quad (4.49)$$

4.6.2.2 Flächenträgheitsmoment

Das Flächenträgheitsmoment wird ebenfalls am ideellen Querschnitt bestimmt. Die Eigentragheitsmomente der Kreisquerschnitte der Bewehrung sind nicht berücksichtigt, lediglich der Steiner-Anteil fliesst in die Berechnung ein:

$$I^I = \frac{bh^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} - \zeta_c \right)^2 + (n - 1) \left(A_{s1} \left(\frac{\mathcal{O}_{s,1}}{2} + c_{nom} - \zeta_c \right)^2 + A_{s2} \left(\frac{\mathcal{O}_{s,2}}{2} + c_{nom} - \zeta_c \right)^2 \right) \quad (4.50)$$

$$I^I = 1.4 \cdot 10^9 \text{mm}^4 \quad (4.51)$$

4.6.2.3 Ungerissen - Zustand 1

Der Querschnitt verbleibt elastisch. Folglich kann das Flächenträgheitsmoment mit E_c multipliziert werden und es resultiert die ungerissene Biegesteifigkeit:

$$EI^I = E_c I^I \quad (4.52)$$

$$EI^I = 5.042 \cdot 10^4 \text{kNm}^2 \quad (4.53)$$

4.6.2.3.1 Rissmoment

Durch die Ermittlung des Rissmoments kann die Krümmung vor dem Reißen des Betons ermittelt werden. Die Betonzugkraft wird nicht berücksichtigt.

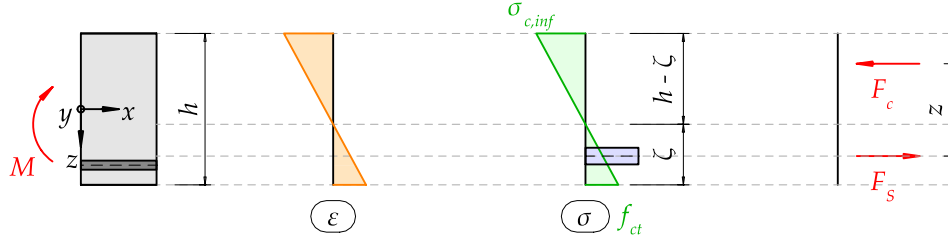


Abbildung 4.16: Querschnittsanalyse vor dem Reißen des Betons

Die Betondruckspannung beträgt:

$$\sigma_{c1} = \frac{f_{ct}(h - \zeta_c)}{\zeta_c} \quad (4.54)$$

$$\sigma_{c1} = \frac{4.17\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (4.55)$$

Der Hebelarm der inneren Kräfte unter Vernachlässigung der Zugbewehrung folgt zu:

$$z_1 = \frac{2h}{3} + \frac{\zeta_c}{3} \quad (4.56)$$

$$z_1 = 372.0\text{mm} \quad (4.57)$$

Die Betondruckkraft ist definiert nach:

$$F_{c,1} = \frac{b\sigma_{c1}(h - \zeta_c)}{2} \quad (4.58)$$

$$F_{c,1} = 82.6\text{kN} \quad (4.59)$$

Und das Rissmoment resultiert schliesslich zu:

$$M_r = F_{c,1}z_1 \quad (4.60)$$

$$M_r = 30.75\text{kNm} \quad (4.61)$$

Aus dem Rissmoment folgt die Krümmung beim Reissen:

$$\chi_r = \frac{M_r}{EI} \quad (4.62)$$

$$\chi_r = \frac{0.00061}{\text{m}} \quad (4.63)$$

Die Neigung linearen Funktion des ungerissenen Zustands im Momentenkrümmungsdiagramm ist durch die Biegesteifigkeit definiert. Der Endpunkt des Zustand 1 definiert das Rissmoment mit der entsprechenden Krümmung.

4.6.2.4 Gerissen Elastisch - Zustand 2

Der Querschnitt nach dem Reissen ist in Abbildung 3.21 dargestellt. Der Betonstahl hat die Fließgrenze noch nicht erreicht. Der Beton die Druckfestigkeit ebenfalls nicht.

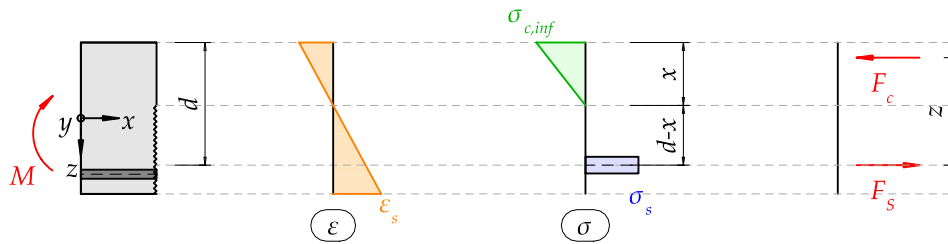


Abbildung 4.17: Querschnittsanalyse nach dem Reissen des Betons

Dabei beträgt die statische Höhe:

$$d_1 = -\frac{\mathcal{O}_{s,1}}{2} - c_{nom} + h \quad (4.64)$$

$$d_1 = 406.0\text{mm} \quad (4.65)$$

$$d_2 = -\frac{\mathcal{O}_{s,2}}{2} - c_{nom} + h \quad (4.66)$$

$$d_2 = 409.0\text{mm} \quad (4.67)$$

Mittels Gleichgewicht der Kräfte lässt sich die Betondruckzonenhöhe und folglich die gerissene Biegesteifigkeit herleiten. Die Betonstahlzugkraft beträgt:

$$F_{s2,1} = A_{s1} \sigma_{s2,1} \quad (4.68)$$

$$F_{s2,2} = A_{s2}\sigma_{s2,2} \quad (4.69)$$

Die Betonstahlspannung für linear elastisches Verhalten folgt zu:

$$\sigma_{s2,1} = E_s \varepsilon_{s2,1} \quad (4.70)$$

$$\sigma_{s2,2} = E_s \varepsilon_{s2,2} \quad (4.71)$$

Die Betondruckkraft anhand des dreieckigen Verlaufs in Abbildung 3.21 beträgt:

$$F_{c,2} = \frac{b\sigma_{c2}x_2}{2} \quad (4.72)$$

Die Betonspannung ebenfalls bestimmt durch ein linear elastisches Verhalten ist definiert durch:

$$\sigma_{c2} = E_c \varepsilon_{c,2} \quad (4.73)$$

Die Beton und Stahldehnung anhand der Stahldehnung des zweiten Stabs:

$$\varepsilon_{c,2} = \frac{\varepsilon_{s2,2}x_2}{d_2 - x_2} \quad (4.74)$$

$$\varepsilon_{s2,1} = \frac{\varepsilon_{s2,2}(d_1 - x_2)}{d_2 - x_2} \quad (4.75)$$

Unter Bemühung des Gleichgewichts der horizontalen Kräfte lässt sich die folgende Beziehung ermitteln.

$$F_{c,2} = F_{s2,1} + F_{s2,2} \quad (4.76)$$

Einsetzen der bestimmten Gleichungen in die Gleichgewichtsbeziehung und mit n substituiert, folgt:

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (4.77)$$

$$\frac{E_s b \varepsilon_{s2,2} x_2^2}{2n(d_2 - x_2)} = \frac{E_s \varepsilon_{s2,2} (A_{s1}(d_1 - x_2) + A_{s2}(d_2 - x_2))}{d_2 - x_2} \quad (4.78)$$

Durch die Auflösung nach x folgt die Betondruckzonenhöhe:

$$x_2 = \frac{-A_{s1}n - A_{s2}n + \sqrt{n(A_{s1}^2n + 2A_{s1}A_{s2}n + 2A_{s1}bd_1 + A_{s2}^2n + 2A_{s2}bd_2)}}{b} \quad (4.79)$$

$$x_2 = 119.0\text{mm} \quad (4.80)$$

Zur Bestimmung der Krümmung ist die Betonstahldehnung erforderlich. Diese bedingt ein einwirkendes Moment. Der Übergang zwischen ungerissenem zu gerissenem Verhalten erfolgt beim Rissmoment. Folglich kann das Rissmoment in Abbildung 3.21 angesetzt werden.

$$M_2 = F_{s2,1} \left(d_1 - \frac{x_2}{3} \right) + F_{s2,2} \left(d_2 - \frac{x_2}{3} \right) \quad (4.81)$$

$$M_2 = M_r \quad (4.82)$$

$$M_r = \frac{A_{s1}E_s\varepsilon_{s2,2}(d_1 - x_2)\left(d_1 - \frac{x_2}{3}\right)}{d_2 - x_2} + A_{s2}E_s\varepsilon_{s2,2} \left(d_2 - \frac{x_2}{3} \right) \quad (4.83)$$

Daraus resultiert die Betonstahldehnung:

$$\varepsilon_{s2,2} = 0.00056 \quad (4.84)$$

Die Krümmung kann anhand des Dehnungsverlaufs in Abbildung 3.21 bestimmt werden:

$$\chi^{II} = \frac{\varepsilon_{s2,2}}{d_2 - x_2} \quad (4.85)$$

$$\chi^{II} = \frac{0.00193}{\text{m}} \quad (4.86)$$

Abschliessend folgt die gerissene Biegesteifigkeit zu:

$$EI^{II} = \frac{M_2}{\chi^{II}} \quad (4.87)$$

$$EI^{II} = 15932.3\text{kNm}^2 \quad (4.88)$$

Die Neigung der linearen Funktion im gerissenen Bereich ist durch die gerissene Biegesteifigkeit definiert. Der Beginn ist durch das Rissmoment definiert.

4.6.2.5 Fliesen der Bewehrung 2 - Zustand 3

Nun wird der Punkt im Momentenkrümmungsdiagramm bestimmt, an dem der Stab 2 fließt.

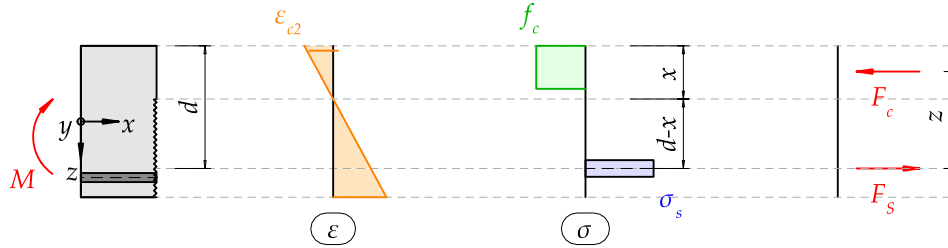


Abbildung 4.18: Querschnittsanalyse für reine Biegung beim Fließen der Bewehrung

Die Dehnungen in den Stäben folgen zu:

$$\varepsilon_{s3,2} = \frac{f_{sy,2}}{E_s} \quad (4.89)$$

$$\varepsilon_{s3,2} = 0.00268 \quad (4.90)$$

Die Betondruckzonenhöhe bleibt unverändert, sofern der Beton im elastischen Zustand verbleibt.

$$x_3 = 119.0\text{mm} \quad (4.91)$$

Die Betonstahldehnung anhand des linearen Dehnungsverlaufs:

$$\varepsilon_{s3,1} = \frac{\varepsilon_{s3,2}(d_1 - x_3)}{d_2 - x_3} \quad (4.92)$$

$$\varepsilon_{s3,1} = 0.00266 \quad (4.93)$$

Die Betonstauchung folgt zu:

$$\varepsilon_{c,3} = \frac{\varepsilon_{s3,1}x_3}{d_1 - x_3} \quad (4.94)$$

$$\varepsilon_{c,3} = 0.0011 \quad (4.95)$$

Es zeigt sich, dass der Beton im äussersten Bereich bereits plastifiziert, die Abweichung ist jedoch gering. Um den Rechenaufwand gering zu halten wird diese

Tatsache nicht berücksichtigt, bzw. mit einem elastischen Betonverhalten weiterverfahren. Folgend ist die Höhe des plastifizierten Bereichs berechnet, gemessen von der äussersten Faser.

$$a = x_3 - \frac{f_c x_3}{E_c \varepsilon_{c,3}} \quad (4.96)$$

$$a = 14.0\text{mm} \quad (4.97)$$

$$\frac{f_c}{E_c} = 0.000972 \quad (4.98)$$

Daraus lässt sich das Flieissmoment bestimmen, welches den Endpunkt im Momenten-Krümmungsdiagramm für den gerissenen Zustand definiert:

$$M_{y2} = A_{s1} E_s \varepsilon_{s3,1} \left(d_1 - \frac{x_3}{3} \right) + A_{s2} E_s \varepsilon_{s3,2} \left(d_2 - \frac{x_3}{3} \right) \quad (4.99)$$

$$M_{y2} = 147.4\text{kNm} \quad (4.100)$$

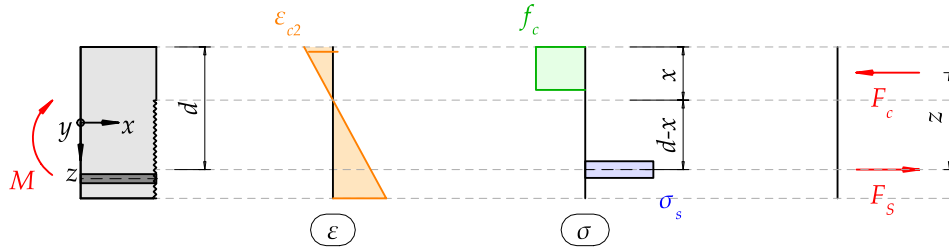
Abschliessend lässt sich die Krümmung für den Endpunkt des Zustands 2 folgend bestimmen:

$$\chi_{y2} = \frac{\varepsilon_{s3,1}}{d_1 - x_3} \quad (4.101)$$

$$\chi_{y2} = \frac{0.00925}{\text{m}} \quad (4.102)$$

4.6.2.6 Fliesen der Bewehrung 1 - Zustand 4

Nun wird der Punkt im Momentenkrümmungsdiagramm bestimmt, an dem der Stab



1

Die Dehnungen in den Stäben folgen zu, vereinfacht wird die Dehnung in beiden Stäben gleichgesetzt:

$$\varepsilon_{s4,1} = \frac{f_{sy,1}}{E_s} \quad (4.103)$$

$$\varepsilon_{s4,1} = 0.00327 \quad (4.104)$$

$$\varepsilon_{s4,2} = \varepsilon_{s4,1} \quad (4.105)$$

Es wird weiterhin von einer dreiecksförmigen Betonspannungsverteilung ausgegangen.

$$x_4 = 119.0\text{mm} \quad (4.106)$$

Die Betonstauchung folgt zu:

$$\varepsilon_{c,4} = \frac{\varepsilon_{s4,1}x_4}{d_1 - x_4} \quad (4.107)$$

$$\varepsilon_{c,4} = 0.00136 \quad (4.108)$$

Es zeigt sich, dass der Beton im äussersten Bereich bereits plastifiziert, die Abweichung ist jedoch gering. Um den Rechenaufwand gering zu halten wird diese Tatsache nicht berücksichtigt, bzw. mit einem elastischen Betonverhalten weiterverfahren. Folgend ist die Höhe des plastifizierten Bereichs berechnet, gemessen von der äussersten Faser.

$$a = x_4 - \frac{f_c x_4}{E_c \varepsilon_{c,4}} \quad (4.109)$$

$$a = 33.7\text{mm} \quad (4.110)$$

Die Spannungen anhand des bilinearen Spannungs-Dehnungsverlauf folgen zu:

$$\sigma_{s4,1} = \frac{670.0\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (4.111)$$

$$\sigma_{s4,2} = \frac{551.0\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (4.112)$$

Daraus lässt sich das Fliessmoment bestimmen, welches den Endpunkt im Momenten-Krümmungsdiagramm für den gerissenen Zustand definiert:

$$M_{y1} = A_{s1}E_s\varepsilon_{s4,1}\left(d_1 - \frac{x_4}{3}\right) + A_{s2}f_{sy,2}\left(d_2 - \frac{x_4}{3}\right) \quad (4.113)$$

$$M_{y1} = 170.9\text{kNm} \quad (4.114)$$

Abschliessend lässt sich die Krümmung für den Endpunkt des Zustands 2 folgend bestimmen:

$$\chi_{y1} = \frac{\varepsilon_{s4,1}}{d_1 - x_4} \quad (4.115)$$

$$\chi_{y1} = \frac{0.0114}{\text{m}} \quad (4.116)$$

4.6.2.7 Maximaler Biege widerstand - Zustand 5

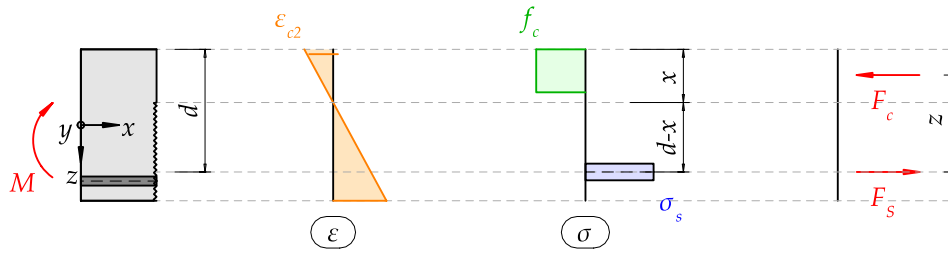


Abbildung 4.19: Querschnittsanalyse für reine Biegung mit der Bewehrung bei der Bruchspannung und plastifizierter Betondruckzone

Es wird die Betonbruchstauchung vorausgesetzt:

$$\varepsilon_{c,5} = \varepsilon_{cu} \quad (4.117)$$

Das Gleichgewicht der Kräfte führt zu:

$$A_{s1}f_{su,1} + A_{s2}f_{su,2} = 0.85bf_cx_5 \quad (4.118)$$

Die Druckzonenhöhe folgt zu:

$$x_5 = 110.0\text{mm} \quad (4.119)$$

$$z_5 = 359.0\text{mm} \quad (4.120)$$

Der maximale Biege widerstand folgt zu:

$$M_R = A_{s1}f_{su,1}(d_1 - 0.425x_5) + A_{s2}f_{su,2}(d_2 - 0.425x_5) \quad (4.121)$$

$$M_R = 200.1\text{kNm} \quad (4.122)$$

Die Krümmung lässt sich anhand der Betonstauchung ermitteln:

$$\chi_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{x_5} \quad (4.123)$$

$$\chi_u = \frac{0.0273}{\text{m}} \quad (4.124)$$

Die Betonstahldehnung darf die Bruchdehnung nicht überschreiten:

$$\varepsilon_{s5,1} = \frac{\varepsilon_{c,5}(d_1 - x_5)}{x_5} \quad (4.125)$$

$$\varepsilon_{s5,2} = \varepsilon_{s5,1} \quad (4.126)$$

$$\varepsilon_{s5,1} = 0.00809 \quad (4.127)$$

$$\varepsilon_{su} = 0.05 \quad (4.128)$$

Die Bruchdehnung des Stahls wird nicht erreicht. Der Querschnitt versagt im Druckbereich. Die Annahme, dem Betonstahl die statische Zugfestigkeit zu Grunde zu legen ist grundsätzlich nicht gerechtfertigt. Der Vergleich mit den Versuchsergebnissen zeigt jedoch, dass sich diese Annahme bewährt.

Die Biegesteifigkeit im Bereich 3 beträgt:

$$EI^{III} = \frac{M_R}{\chi_u} \quad (4.129)$$

$$EI^{III} = 7.33 \cdot 10^3 \text{kNm}^2 \quad (4.130)$$

Der Zustand 4 beschreibt den Endpunkt des Momenten-Krümmungsdiagramm.

4.6.2.8 Momenten-Krümmungsdiagramm

Abschliessend lässt sich aus der Querschnittsanalyse die Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung ermitteln. Der lineare Verlauf im ersten Bereich ergibt sich aus der ungerissenen Biegesteifigkeit. Darauf folgt ein schlagartiger Wechsel der Steifigkeit von EI^I zu EI^{II} , da der Beton reisst. Dies führt zum Plateau im unteren Bereich. Im Bereich drei werden die zwei definierten Punkte M_y, χ_y sowie M_R, χ_u linear verbunden.

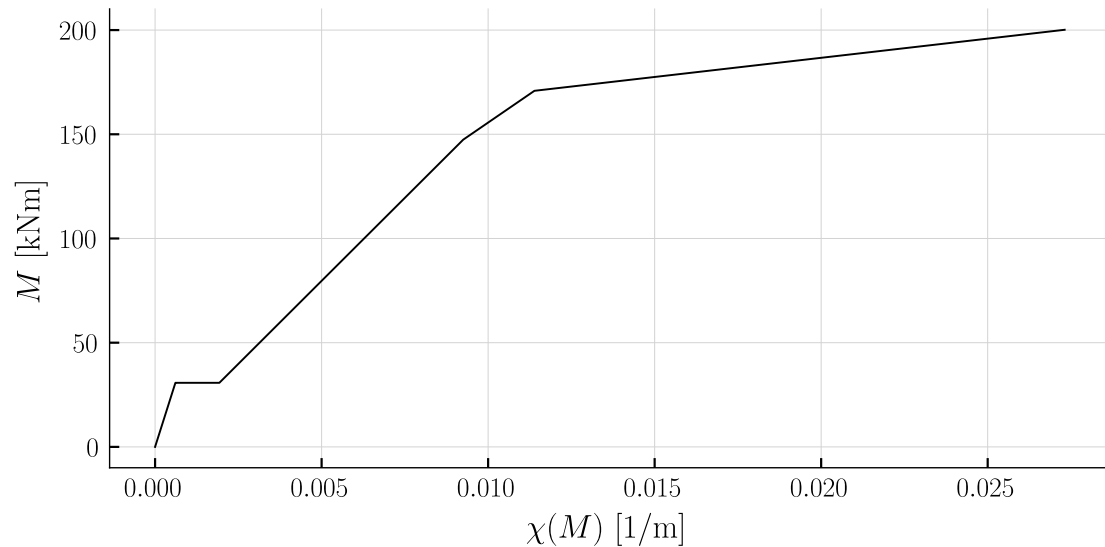


Abbildung 4.20: Momenten-Krümmungsdiagramm händisch ermittelt, definiert im positiven Bereich

4.6.2.9 Zustandslinien der Krümmung

Der Biegemomentenverlauf $M(x)$ als Eingabe in die Funktion der Krümmung $\chi(M)$ resultiert zu den Zustandslinie der Krümmung in Abbildung 3.25. Dargestellt sind die Krümmungsverläufe für die Biegemomentenverläufe aus Abbildung 3.9 und Abbildung 3.10.

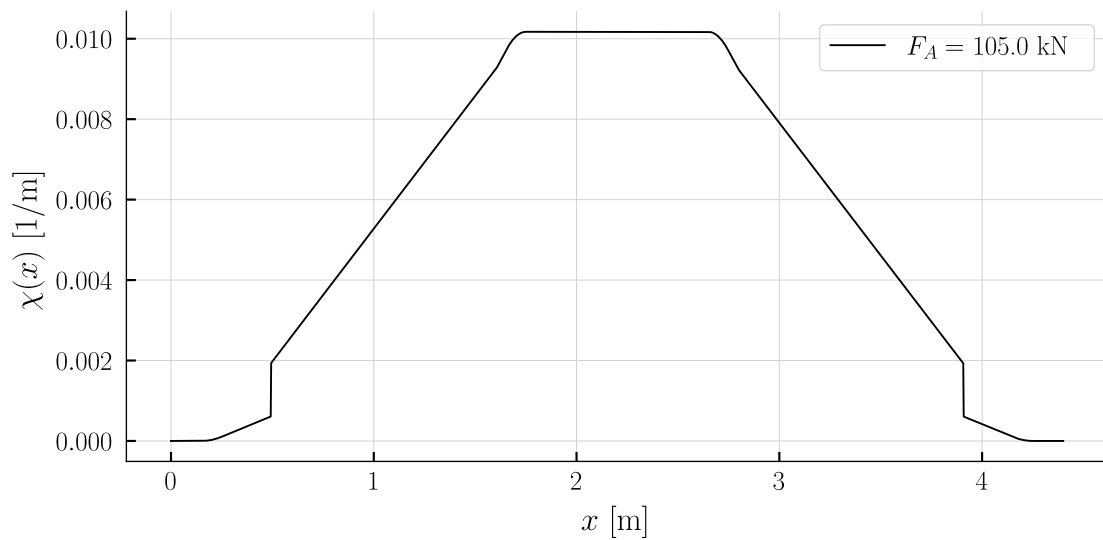


Abbildung 4.21: Krümmungsverlauf entlang der Stabachse

4.6.2.10 Punktuelle Bestimmung der Verformung

Unter Anwendung der Arbeitsgleichung kann die Verformung nach Gleichung [4.131](#) bestimmt werden.

$$w = \int_0^l \bar{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx \quad (4.131)$$

Wobei $\frac{M(x)}{EI} = \chi(x)$ gilt.

Es gilt die Zustandslinien der Krümmung multipliziert mit der Zustandslinie der Biegemomente in [Abbildung 3.26](#) des virtuellen Kräftezustands über die Stablänge zu integrieren.

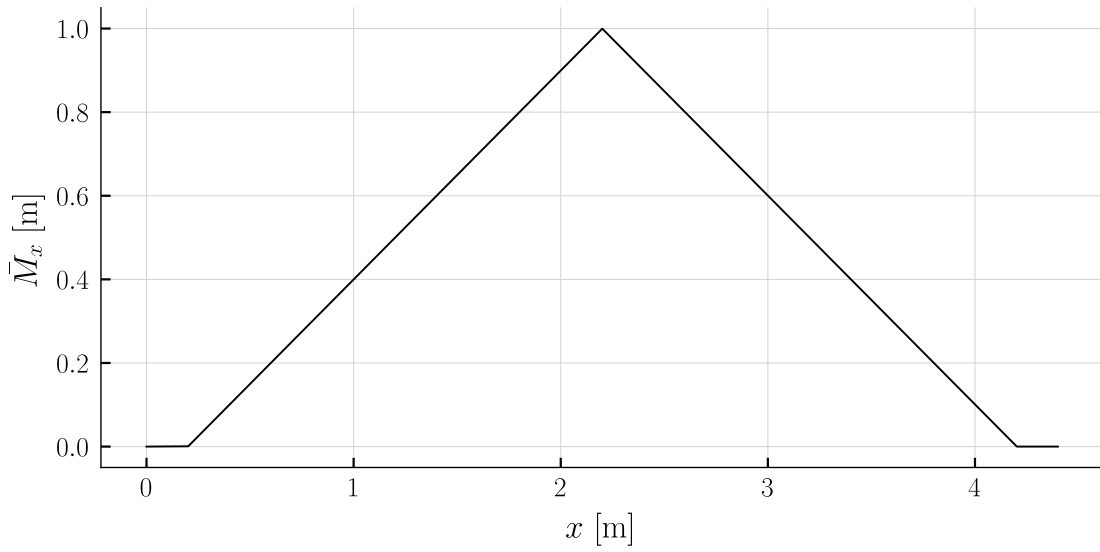


Abbildung 4.22: Biegemomentenverlauf für den virtuellen Kräftezustand

Für die maximale Last beträgt die Deformation an der Stelle w_1 beispielsweise:

$$w_1 = 16.3\text{mm} \quad (4.132)$$

4.6.3 Zugversteifung

Die bisherige Betrachtung beschränkt sich auf einen schlagartigen Wechsel von ungerissen zu vollständig gerissen. Dabei wird der Bereich zwischen den Rissen ebenfalls als gerissen angenommen. Mittels der Zugversteifung wird ein theoretischer Rissabstand ermittelt und zwischen den Rissen eine versteifte Wirkung zwischen Betonstahl und Beton angenommen (Verbundwirkung). Dies wird folgend auf das Versuchsbeispiel angewendet. Berücksichtigt wird dies unter dem Ansatz von Marti, beschrieben in [2].

Die Krümmungsdifferenz nach Marti beträgt:

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \frac{f_{ct} (1 - \rho_{eff})}{E_s \rho_{eff} (d_1 - x_2)} \quad (4.133)$$

Der mechanische Bewehrungsgehalt folgt zu:

$$\rho_{eff} = \frac{1}{-n + 1 + \frac{E_s M_r (d_1 - x_2)}{E I^H f_{ct}}} \quad (4.134)$$

Eine Abschätzung des Rissabstands ist der folgende:

$$s_{rm} = \frac{\mathcal{O}_{s,1} \lambda (1 - \rho_{eff})}{4\rho_{eff}} \quad (4.135)$$

Die Rissspannung beträgt:

$$\sigma_{sr0} = \frac{F_{s,2}}{A_s} \quad (4.136)$$

und die Rissbreiten lässt sich folgend beschreiben:

$$w_r = \frac{s_{rm} (-\lambda \sigma_{sr0} + 2\sigma_{sr})}{2E_s} \quad (4.137)$$

Durch das Einsetzen der Versuchsparameter ergeben sich folgende Werte:

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{0.000777\lambda}{m} \quad (4.138)$$

$$\rho_{eff} = 0.0408 \quad (4.139)$$

$$1.0s_{rm} = -\lambda (65.8\text{mm}^{1.0} - 172.0\text{mm}) \quad (4.140)$$

Unter Berücksichtigung der beiden λ -Grenzwerte ist der Einfluss der Zugversteifung im Momente-Krümmungsdiagramm in Abbildung 3.27 gezeigt.

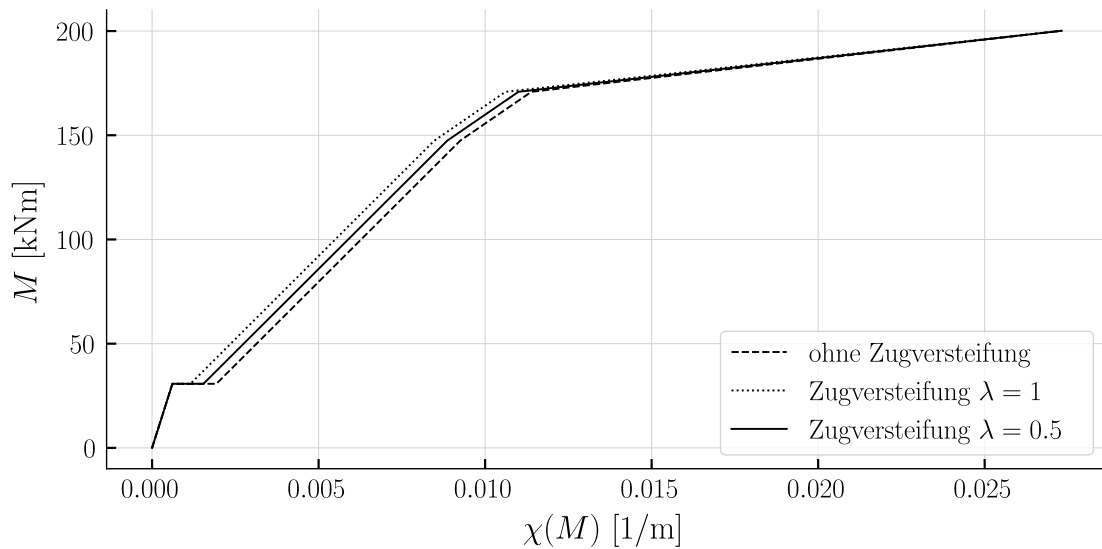


Abbildung 4.23: Momenten-Krümmungsdiagramm mit Zugversteifung ergänzt

Es zeigt sich ein steiferes Verhalten im ungerissenen Bereich.

4.7 Fachwerk

Die bisherigen Analysen beschränken sich auf eine Querschnittsbetrachtung. Der Kraftfluss lässt sich mit einem Spannungsfeld detaillierter verfolgen. Eine Einteilung in Parallelfelder und Fächer ist in Abbildung 4.24 gezeigt. Dabei ist der Neigungswinkel maximal steil gewählt. Die Höhe der Spannungsfelder entspricht dem Hebelarm der inneren Kräfte. Grundsätzlich ist dieser abhängig von der Druckzonenhöhe und der statischen Höhe. Dies zeigte sich bereits bei der Querschnittsanalyse zwischen den Zuständen 1 bis 4. Als Vereinfachung wird eine konstante Höhe vorausgesetzt.

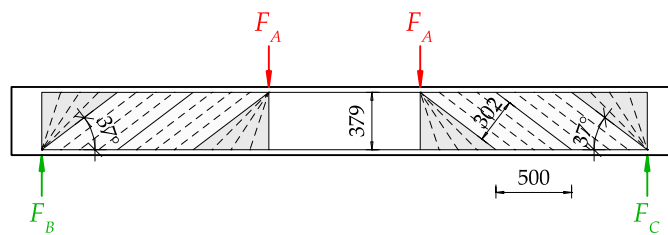


Abbildung 4.24: Spannungsfeld mit steiler Feldneigung

Durch das Zusammenfassen der Felder zu Streben resultiert das Fachwerk in Abbildung 4.25. Um aus dem Fachwerkmodell zutreffende Deformation zu ermitteln, gilt es den Pendelstäben passende Dehnsteifigkeiten zuzuordnen.

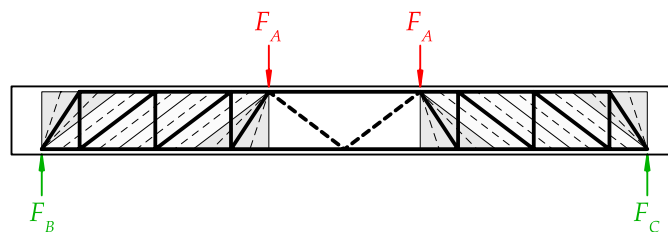


Abbildung 4.25: Fachwerk aus den ermittelten Spannungsfeldern

Zuggurt:

Die Steifigkeit des Zuggurts resultiert aus der Querschnittsfläche der Biegebewehrung und dem Elastizitätsmodul. Dabei wird die Spannungs-Dehnungs-Beziehung gemäss Abbildung 3.18 hinterlegt.

Druckgurt:

Die Querschnittsfläche des Druckgurts entspricht der Druckzonenhöhe multipliziert mit der Plattenstreifenbreite. Diese wird als konstant über sämtliche Stäbe des Druckgurtes angenommen. Der Elastizitätsmodul folgt aus der Kennlinie in Abbildung 3.19.

Druckdiagonalen:

Die Breite der Druckdiagonalen entspricht der Breite des Spannungsfelds. Vereinfacht gilt dies auch für die Fächer. Die Breite Multipliziert mit der Plattenbreite resultiert zur Querschnittsfläche. Der Elastizitätsmodul folgt ebenfalls aus Abbildung 3.19.

Zugstreben:

Die vertikalen Zugstreben bilden die Schubbewehrung ab. Die Querschnittsfläche resultiert aus der Anzahl an Schubdübeln im entsprechenden Spannungsfeld.

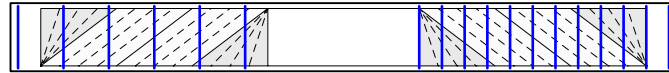


Abbildung 4.26: Anordnung der Schubbewehrung im Fachwerk mit steiler Neigung

Das Spannungsfeld für die gewählte Neigung umfasst zwei Stabreihen. Es ist ein linear elastisches Stoffgesetz hinterlegt.

$$A_{sw} = 29.0\text{mm}^2 \quad (4.141)$$

Bei Gleichsetzung des Querkraftwiderstands mit der Einwirkung kann die nötige Neigung des Betondruckfeldes analytisch bestimmt werden:

$$\theta_{c3,min} = \text{acot} \left(\frac{V_{R,s} s_w}{A_{sw} f_{su,2} z_5} \right) \quad (4.142)$$

$$\theta_{c3,min} = 0.214 \quad (4.143)$$

$$\theta_{c3,min} = 12.3^\circ \quad (4.144)$$

4.8 Modellvergleich

Abgeschlossen wird die Analyse des Dreipunktbiegeversuchs mit einer Gegenüberstellung der angewendeten Methoden.

Der Vergleich im Momentenkrümmungsdiagramm Abbildung 3.31 ist Belastungsunabhängig. Es zeigt den minimalen Einfluss der Zugversteifung.

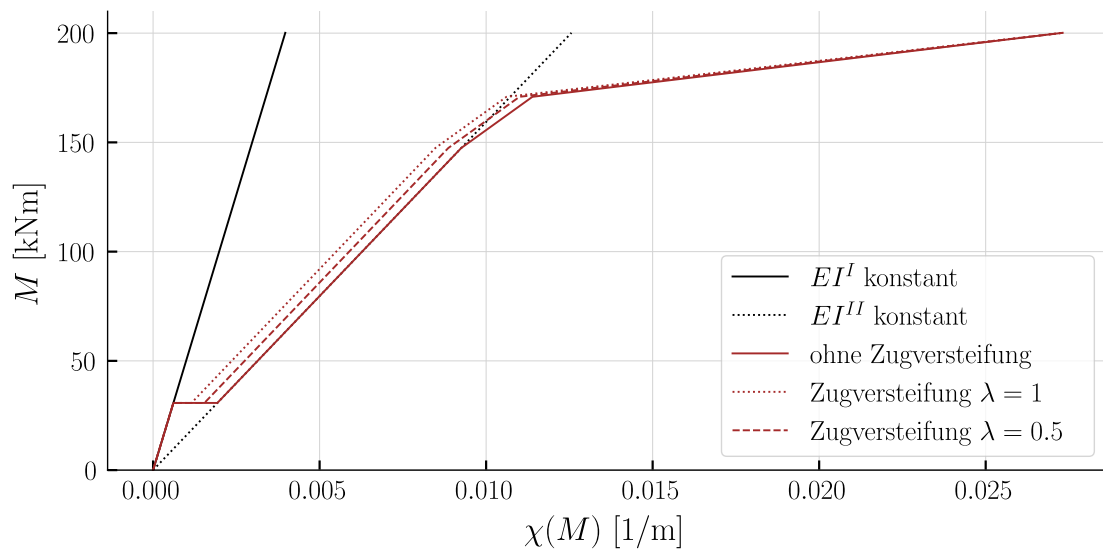


Abbildung 4.27: Momenten-Krümmungsdiagramm der unterschiedlichen Methoden

Der Krümmungsverlauf bedingt einen Biegemomentenverlauf. Unterschieden wird zwischen der Berücksichtigung der Längszugkraft aus Querkraft, siehe Abbildung 3.32 und Abbildung 3.33.

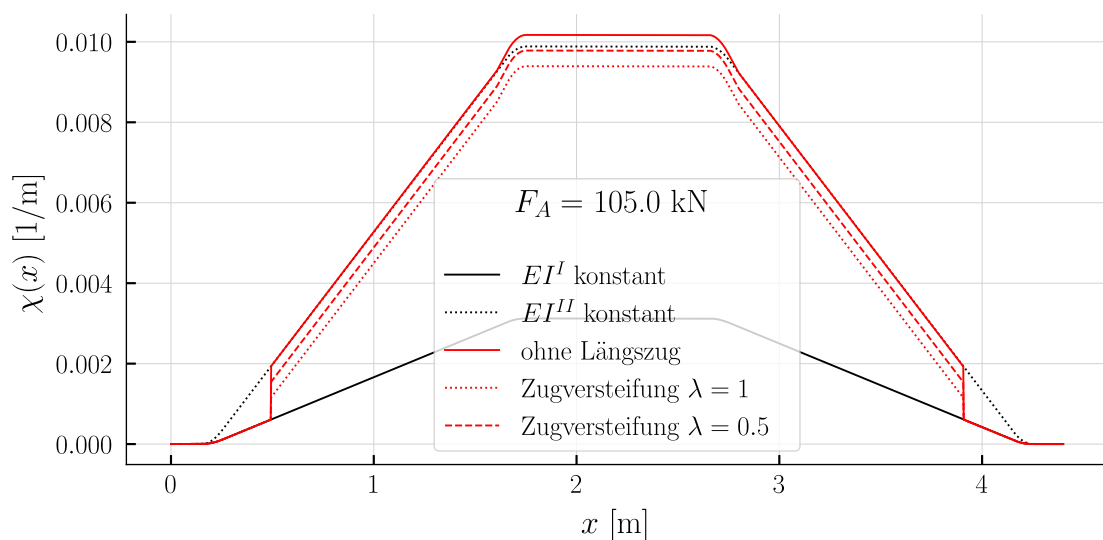


Abbildung 4.28: Krümmungsverlauf für die maximale Laststufe ohne Längszugkraft

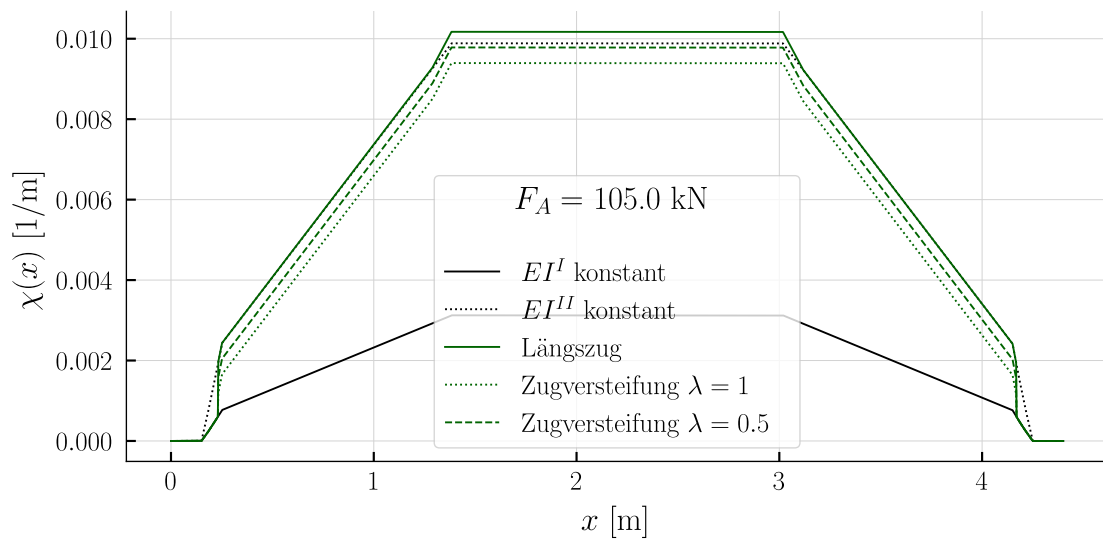


Abbildung 4.29: Krümmungsverlauf für die maximale Laststufe mit Längszugkraft durch Querkraft

Der Vergleich der Krümmungsverläufe zeigt, dass mit einer konstanten Biegesteifigkeit im Bereich des Fließens signifikante Unterschiede zum verfeinerten Momenten-Krümmungsdiagramm entstehen.

Aussagekräfte sind vor allem die Last-Verformungsdiagramme in [Abbildung 3.34](#) und [Abbildung 3.35](#). Diese unterscheiden sich in der Berücksichtigung der Längszugkraft aus Querkraft.

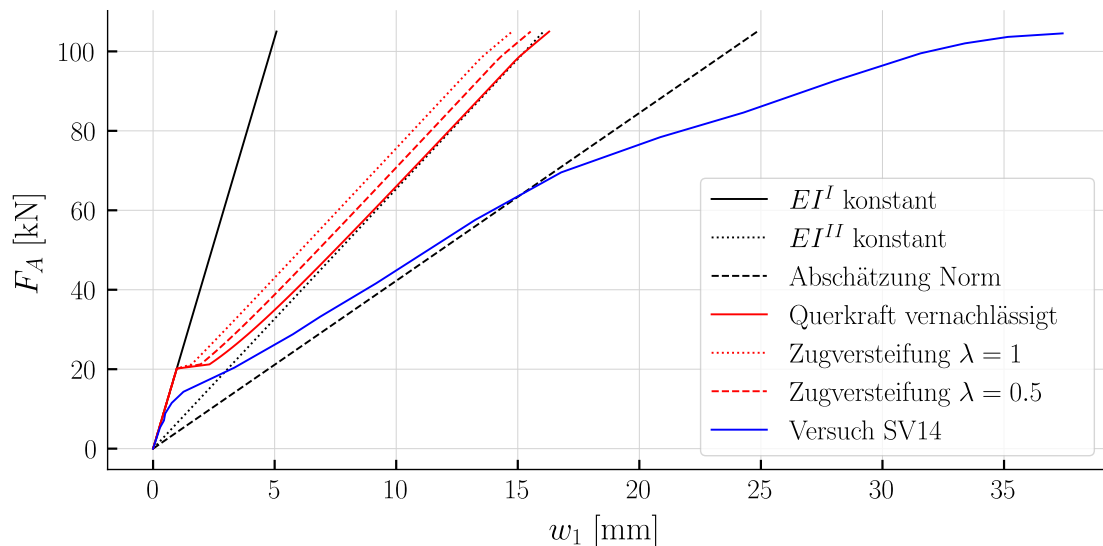


Abbildung 4.30: Last-Verformungsdiagramm bei der Krafteinleitung F_A

Es zeigt sich, dass mit einer konstanten ungerissenen Biegesteifigkeit die Verformungen nicht zufriedenstellend abbildbar sind. Vor allem im Bereich des Fließens ist das

Modell grundsätzlich nicht mehr zielführend anwendbar.

Mit einer konstanten gerissenen Biegesteifigkeit nähert man sich den Versuchsergebnissen an. Auch hier ist klar der Bereich des Fließens des Betonstahls nicht abgedeckt. Für eine Bemessung ist dies jedoch zutreffend, da die Bauteile grundsätzlich nicht bis in den Fließbereich zu belasten sind.

Die Darstellung der Normabschätzung zeigt eine konservative Abschätzung der Verformungen. Dies führt grundsätzlich zu einer Überbemessung. Die Anwendung des Berechnungsalgorithmus ist jedoch simpel und somit eine solide Grundabschätzung.

Bei der Berücksichtigung des verfeinerten Momenten-Krümmungsdiagramms in rot dargestellt, lässt sich das Verformungsverhalten des Versuchs annähernd abbilden. Das Modell bildet ein zu steifes Verhalten ab. Die Zugversteifung wirkt der Modellgenauigkeit entgegen.

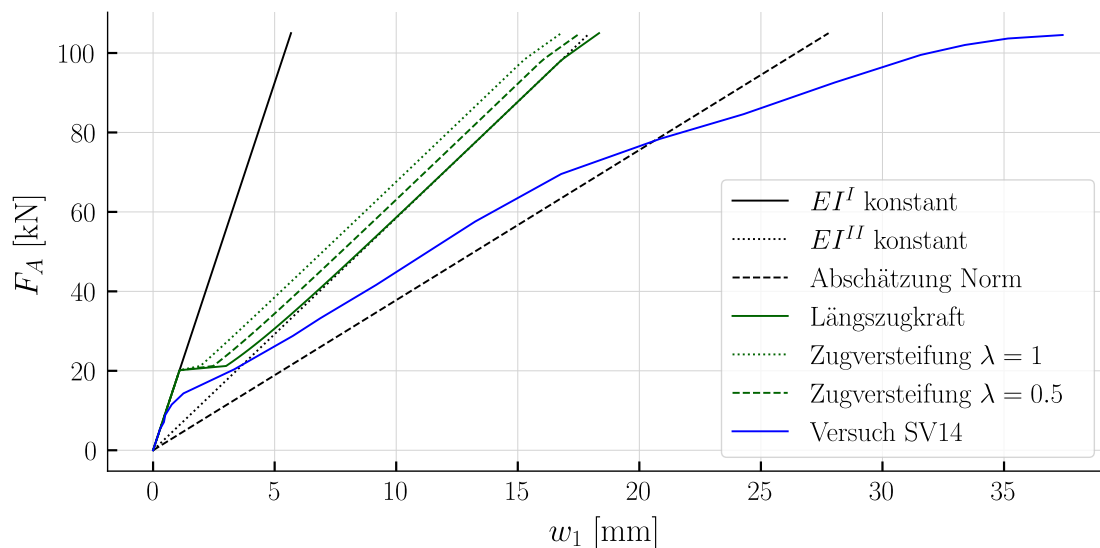


Abbildung 4.31: Last-Verformungsdiagramm bei der Krafteinleitung F_A mit Längszugkraft aus Querkraft

Die Abbildung 3.35 zeigt sämtliche Berechnungsmethoden unter Berücksichtigung der Längszugkraft aus Querkraft. Es zeigt sich deutlich, dass das Berechnungsmodell mit der Zugversteifung den Versuchsverlauf zufriedenstellend abbildet. Lediglich Abweichungen im höchstlastbereich sind vorhanden.

Die Normabschätzung zeigt deutliche Abweichungen zu den gemessenen Verformungen. Zwar liegen diese auf der sicheren Seite, sind jedoch äusserst konservativ.

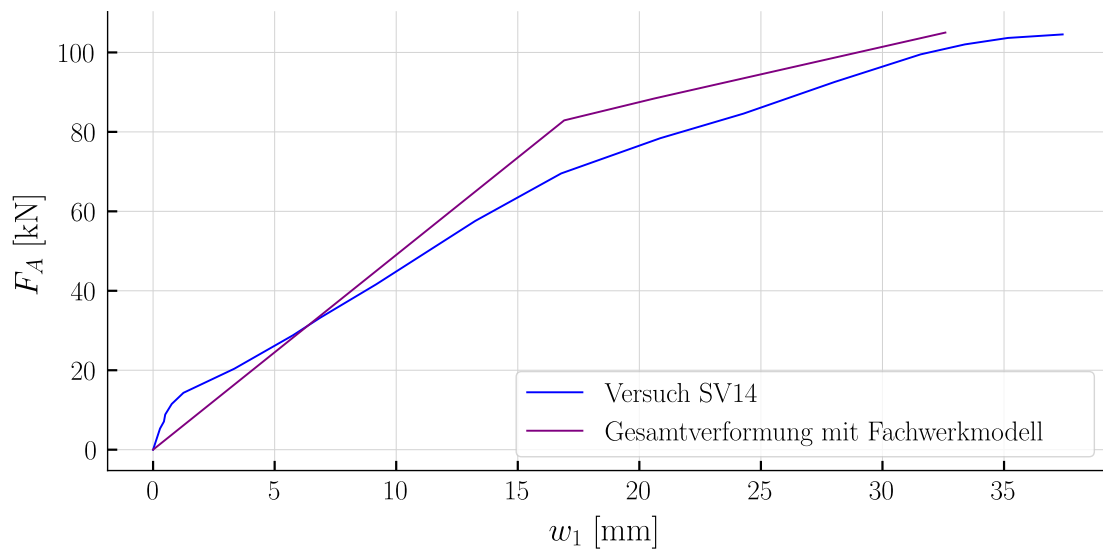


Abbildung 4.32: Last-Verformungsdiagramm bei der Krafteinleitung F_A mittels Fachwerkmodell

Das Fachwerkmodell beschreibt den Verlauf ausreichend präzise. Die maximale Deformation mit der rechnerisch ermittelten Höhe, sprich innerem Hebelarm aus der Querschnittsanalyse überschiesst das Ziel bei Weitem. Das Fachwerkmodell reagiert äusserst sensitiv auf die gewählte Höhe. Der Verformungsverlauf lässt sich mit einer Fachwerkshöhe von 160mm präzise abbilden. Ohne Kenntnisse der Versuchsergebnisse wäre jedoch eine präzise Bestimmung der Verformung im Bereich des Fließens der Zugbewehrung nicht möglich.

Literatur

1. Marti P Baustatik. Wiley-VCH Verlag GmbH
2. Spathelf C (2022) Skript Teil 2: Gebrauchstauglichkeit. Betonbau - Ausgewählte Kapitel Hochschule Technik & Architektur Luzern
3. Jäger T, Marti P (2006) Versuche zum Querkraftwiderstand und zum Verformungsvermögen von Stahlbetonplatten. IBK Bericht 294. <https://doi.org/10.3929/ethz-a-005195576>
4. Jaeger T (2014) Extended sandwich model for reinforced concrete slabs: Shear strength with transverse reinforcement. Engineering Structures 74:218–228. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.05.025>
5. Jaeger T (2013) Extended sandwich model for reinforced concrete slabs: Shear strength without transverse reinforcement. Engineering Structures 56:1142–1153. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.06.035>
6. SIA (2013) Norm SIA 262:2013 Betonbau. Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein
7. Tue NV, Ehmann R, Betschoga C, Tung ND (2019) Einfluss geringer Querkraftbewehrung auf die Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonbalken unterschiedlicher M/V-Kombinationen. Beton- und Stahlbetonbau 114(4):217–230. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/best.201800075>
8. Annahütte (2023) [Grundlagen der hochfesten Bewehrungstechnik](#)