

MASTER OF SCIENCE IN ENGINEERING
Vertiefungsmodul I

Tragverhalten von
Stahlbetontragwerken

Ansätze zur Verformungsberechnung

Pascal Gitz

Horw, Freitag, 19. Januar 2024

Advisor: Prof. FH, Dr. Daniel Heinzmann
Experte: Dr. Thomas Jäger

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Sämtliche verwendeten Textausschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet.

Horw, 21. Januar 2023

Pascal Gitz

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit Verformungen im Stahlbetonbau. Speziell mit den Verformungen von Stabtragwerken. Dazu sind unterschiedliche Modelle zur rechnerischen Bestimmung aufgezeigt. Als übergeordnetes Ziel gilt es praxistaugliche Berechnungsmethoden zu verwenden. Dies bedeutet möglichst geringen Berechnungsaufwand bei gleichzeitig hoher Genauigkeit.

Das einleitende Kapitel beschreibt die Hintergründe der Modelle. Es wird auf das Modell des reinen Biegeträgers, die Methode der Mohr'schen Analogie, eine Abschätzung nach der Schweizerischen Betonnorm, das Zuggurtmodell, eine Integrationsmethode zur Berücksichtigung einer nicht-linearen Momenten-Krümmungs-Beziehung, sowie abschliessend auf eine Fachwerksanalyse eingegangen. Neben den theoretischen Grundlagen zeigt die Arbeit die Anwendung der Modelle an einem Dreipunktbiegeversuch und einem Vierpunktbiegeversuch. Die Versuchsanwendung wird jeweils mit einer ausführlichen Diskussion der Ergebnisse abgeschlossen, verifiziert an den gemessenen Versuchsdaten.

Der Modellvergleich zeigt, dass mit Berechnungsmethoden mit konstanten Biegesteifigkeiten, wie in der Praxis üblich, Verformungen nur bedingt präzise berechnet werden können. Die Verwendung von einer nicht-linearen Momenten-Krümmungs-Beziehungen ist für die Nachrechnung der Verformungen von Versuchen, belastet bis zum Versagen, unerlässlich. Die Fachwerksanalyse liefert bei beiden Versuchen die treffendsten Ergebnisse, sofern die Fachwerkshöhe exakt bestimmt werden kann.

Im abschliessenden Kapitel wird das Ziel beschrieben, in einer folgenden Arbeit, die aufgezeigten Modelle auf Plattentragwerke zu erweitern. Als Ansatz dazu soll die Modellierung als Trägerrost dienen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
2	Modellbeschreibung	10
2.1	Reiner Biegeträger	10
2.2	Mohr'sche Analogie	13
2.3	Abschätzung nach Norm	14
2.4	Zuggurtmodell	15
2.5	Numerische Integration der Krümmung	19
2.6	Fachwerksanalyse	20
2.7	Versatzmass	21
3	Dreipunktbiegeversuch	22
3.1	Versuchsbeschreibung	22
3.2	Eigenschaften der Baustoffe	25
3.3	Reiner Biegeträger	25
3.4	Mohr'sche Analogie	32
3.5	Abschätzung nach Norm	33
3.6	Numerische Integration der Krümmung	34
3.7	Fachwerksanalyse	48
3.8	Modellvergleich	50
4	Vierpunktbiegeversuch	56
4.1	Versuchsbeschreibung	56
4.2	Eigenschaften der Baustoffe	57
4.3	Reiner Biegeträger	58
4.4	Mohr'sche Analogie	63
4.5	Abschätzung nach Norm	65
4.6	Numerische Integration der Krümmung	66
4.7	Fachwerksanalyse	83
4.8	Modellvergleich	86
5	Fazit	90
5.1	Rückblick	90
5.2	Ausblick	91
	Literatur	92

Abbildungsverzeichnis

2.1	Statisches System mit einer Einteilung in differentielle Elemente . . .	10
2.2	Differentielles Element des reinen Biegebalkens	11
2.3	Lagerungsbedingungen für Analogiesysteme, übernommen aus [4] . .	14
2.4	Verlauf des Vergrößerungsfaktors der Abschätzung nach Norm	15
2.5	Verlauf der effektiven Verbundschubspannungen, Betonstahlspannungen, Betonspannungen, Betonstahldehnungen, Betondehnungen und Schlupf bei einem Zugglied. Bild neu gezeichnet nach [4]	16
2.6	Idealisierte Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung	16
2.7	Einfluss der zugversteifenden Wirkung bei einem Biegeelement	17
2.8	Fallunterscheidung beim Erreichen der Zugfestigkeit des Betons . . .	18
2.9	Querschnittsanalyse für den Zustand des Biegewiderstands	19
2.10	Längszugkraft aus der Querkraft, dargestellt im Spannungsfeld, entnommen aus [7]	21
3.1	Lagerung und Belastung des Plattenstreifens, entnommen aus [1] . . .	22
3.2	Bewehrungslayout des Plattenstreifens, entnommen aus [1]	23
3.3	Last-Verformungs-Verhalten des Plattenstreifens, entnommen aus [1] .	24
3.4	Verformungsverlauf des Plattenstreifens, entnommen aus [1]	24
3.5	Statisches System des Plattenstreifens	26
3.6	Angepasstes statisches System des Plattenstreifens	26
3.7	Verlauf der Einwirkungen	28
3.8	Verlauf der Querkräfte	29
3.9	Verlauf der Biegemomente	29
3.10	Verlauf der Biegemomente, mit Versatzmass	30
3.11	Verlauf der Verformung, bestimmt mit einer konstanten ungerissenen Biegesteifigkeit	31
3.12	Verlauf der Einwirkungen des Analogiesystems	32
3.13	Einwirkungen und Lagerung des Analogiesystems	32
3.14	Verlauf der Querkräfte des Analogiesystems	33
3.15	Verlauf der Biegemomente des Analogiesystems	33
3.16	Querschnitt des Plattenstreifens dargestellt mit Zugbewehrung, ohne Schubbewehrung	34
3.17	Vereinfachung der Bewehrungsführung des Plattenstreifens	35
3.18	Linear-elastisches, linear-plastisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Betonstahls	35
3.19	Linear-elastisches, ideal-plastisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Betons	36
3.20	Querschnittsanalyse vor dem Reißen des Betons	38
3.21	Querschnittsanalyse nach dem Reißen des Betons	39

3.22	Querschnittsanalyse mit erreichter Fließspannung im Stab	42
3.23	Querschnittsanalyse mit erreichter Zugfestigkeit im Stab und plastifizierter Betondruckzone	43
3.24	Momenten-Krümmungs-Diagramm, definiert durch die Querschnittsanalyse	45
3.25	Krümmungsverlauf entlang der Stabachse	45
3.26	Biegemomentenverlauf für den virtuellen Kräftezustand	46
3.27	Momenten-Krümmungs-Diagramm mit Zugversteifung	48
3.28	Plattenstreifen mit Spannungsfeldern entsprechend dem Kraftfluss . .	48
3.29	Plattenstreifen mit Fachwerk durch das Zusammenfassen der Spannungsfelder	49
3.30	Plattenstreifen mit dargestellter Schubbewehrung und Spannungsfeldern	50
3.31	Plattenstreifen mit verformten Fachwerk	50
3.32	Momenten-Krümmungs-Diagramm zum Vergleich der unterschiedlichen Modelle	51
3.33	Krümmungsverlauf, mit unterschiedlichen Modellen ohne Versatzmass	52
3.34	Krümmungsverlauf, mit unterschiedlichen Modellen mit Versatzmass	52
3.35	Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle w_1 ohne Versatzmass . . .	53
3.36	Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle w_1 mit Versatzmass	54
3.37	Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle w_1 mit Fachwerksmodell, Fachwerkshöhe von 140 mm	55
3.38	Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle w_1 mit Fachwerksmodell, Fachwerkshöhe von 160 mm	55
4.1	Lagerung und Belastung des Balkens, nachgezeichnet nach [2]	56
4.2	Last-Verformungs-Verlauf des Balkens, entnommen aus [2]	57
4.3	Statisches System des Balkens mit berücksichtigter Auflagerbreite . .	58
4.4	Verlauf der Einwirkungen	60
4.5	Verlauf der Querkräfte	60
4.6	Verlauf der Biegemomente	61
4.7	Verlauf der Biegemomente, mit Versatzmass	62
4.8	Verlauf der Verformung, bestimmt mit einer konstanten ungerissenen Biegesteifigkeit	63
4.9	Verlauf der Einwirkungen des Analogiesystems	63
4.10	Einwirkungen und Lagerung des Analogiesystems	64
4.11	Verlauf der Querkräfte des Analogiesystems	64
4.12	Verlauf der Biegemomente des Analogiesystems	65
4.13	Querschnitt des Balkens dargestellt mit Zugbewehrung, ohne Schubbewehrung	67
4.14	Vereinfachung der Bewehrungsführung des Balkens	67
4.15	Linear-elastisches, ideal-plastisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Betonstahls	68
4.16	Linear-elastisches, ideal-plastisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Betons	68
4.17	Querschnittsanalyse vor dem Reißen des Betons	71
4.18	Querschnittsanalyse nach dem Reißen des Betons	72

4.19	Querschnittsanalyse mit erreichter Fliessspannung im Stab 2	75
4.20	Querschnittsanalyse mit erreichter Fliessspannung im Stab 1	76
4.21	Querschnittsanalyse mit erreichter Zugfestigkeit im Stab und plastifizierter Betondruckzone	78
4.22	Momenten-Krümmungs-Diagramm, definiert durch die Querschnittsanalyse	80
4.23	Krümmungsverlauf entlang der Stabachse	81
4.24	Biegemomentenverlauf für den virtuellen Kräftezustand	81
4.25	Momenten-Krümmungs-Diagramm mit Zugversteifung	83
4.26	Balken mit Spannungsfeldern entsprechend dem Kraftfluss	84
4.27	Balken mit Fachwerk durch das Zusammenfassen der Spannungsfelder	85
4.28	Balken mit dargestellter Schubbewehrung und Spannungsfeldern	85
4.29	Balken mit verformten Fachwerk	86
4.30	Momenten-Krümmungs-Diagramm zum Vergleich der unterschiedlichen Modelle	86
4.31	Krümmungsverlauf, mit unterschiedlichen Modellen ohne Versatzmass	87
4.32	Krümmungsverlauf, mit unterschiedlichen Modellen mit Versatzmass	87
4.33	Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle w_1 ohne Versatzmass	88
4.34	Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle w_1 mit Versatzmass	88
4.35	Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle w_1 mit Fachwerksmodell	89

Tabellenverzeichnis

3.1	Berechnungsparameter der Systemgeometrie	27
3.2	Berechnungsparameter Momenten-Krümmungs-Beziehung	35
4.1	Berechnungsparameter der Systemgeometrie	58
4.2	Berechnungsparameter Momenten-Krümmungs-Beziehung	67

1 Einleitung

Bei der Analyse des Tragverhaltens ist die Bestimmung von Verformungen im Stahlbetonbau in der Praxis oftmals mit Unsicherheiten verbunden. Die vorwiegend aus Biegung resultierenden Verformungen werden unter der Annahme einer konstanten Biegesteifigkeit berechnet. Diese wird grundsätzlich am gerissenen oder am ungerissenen Querschnitt bestimmt. Mit dieser Arbeit sollen die Grenzen dieser Modellvorstellung aufgezeigt werden. Des Weiteren wird versucht, mit einem möglichst pragmatischen Ansatz die eingeschränkte Modellvorstellung zu erweitern und die Verformungen präzise abzubilden.

Die Arbeit umfasst ein einleitendes Kapitel, welches die Modelle in ihren Grundeigenschaften aufgreift und erläutert, gefolgt von zwei Kapiteln, welche die Anwendung der Modelle aufzeigen. Es wird ein Dreipunktbiegeversuch aus dem Versuchsbericht [1], sowie ein Vierpunktbiegeversuch aus dem Versuchsbericht [2] analysiert. Es werden ausschliesslich Stabtragwerke betrachtet. Das Berechnungsvorgehen ist für beide Versuche analog zueinander. Die Kapitel werden mit einem Modellvergleich abgeschlossen. Der Schlusspunkt der Arbeit liefert ein Fazit, welches die Erkenntnisse der Berechnungen erneut aufgreift, zusammenfasst und interpretiert.

Abschliessend lässt sich festhalten, dass diese Arbeit das grundlegende Verständnis der Verformungen im Stahlbetonbau schärfen soll. Dazu sollen Methoden aufgezeigt werden, durch welche sich die Verformungen rechnerisch ermitteln lassen. Stets im Sinne der praktischen Anwendung.

2 Modellbeschreibung

In diesem Kapitel sind Modelle zur Bestimmung von Verformungen im Stahlbeton aufgezeigt. Es wird auf analytische Beziehungen und deren Herleitungen eingegangen. Das Ziel ist es, die grundlegenden Eigenschaften der Modelle darzulegen.

2.1 Reiner Biegeträger

Das Modell des reinen Biegeträgers ermöglicht die Ermittlung sämtlicher Zustandslinien der Schnittgrößen basierend auf differentiellen Beziehungen.

Die Verknüpfung der Gleichgewichtsbedingungen mit den kinematischen Relationen, sowie den linear elastischen Stoffgleichungen führt auf gewöhnliche Differentialgleichungen für die je nach Problemstellung relevanten Verschiebungsgrößen, und aus diesen ergeben sich die interessierenden inneren Verformungs- und Kraftgrößen in Abhängigkeit der Lage auf der Stabachse. Beschreibt [3] in seinem Kapitel Kontinua.

2.1.1 Aufbau

Der Aufbau des Modells wird an einem simplen System erläutert. Das statische System in Abbildung 2.1 beschreibt einen einfachen Balken mit einer gleichmässig verteilten Last. Berücksichtigt man ein infinitesimal kleines Element im Balken, so lassen sich an diesem differentiellen Element Beziehungen zwischen Einwirkung, Querkraft, Verdrehung und Verformung aufstellen.

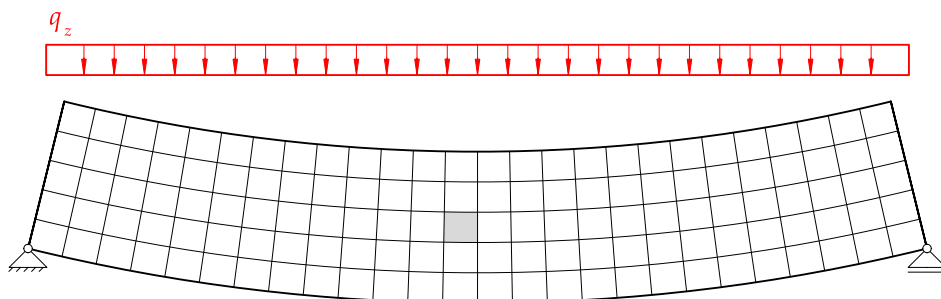


Abbildung 2.1: Statisches System mit einer Einteilung in differentielle Elemente

Die Abbildung 2.2 zeigt ein herausgeschnittenes Element mit infinit kleinen Abmessungen. An den Schnittkanten sind Schnittkräfte eingeführt. Ebenfalls ist der verformte Zustand unterhalb dargestellt. Die Darstellung im verformten Zustand liefert Auskunft über die kinematischen Relationen. Es wird angenommen, dass das Element seiner Form treu bleibt, bzw. sich als ganzes verdreht.

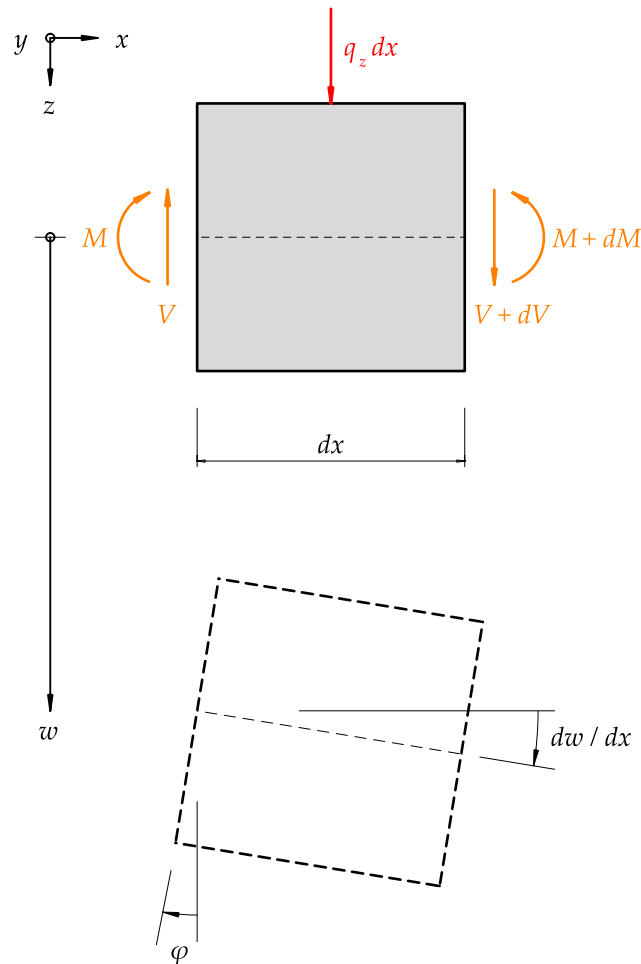


Abbildung 2.2: Differentielles Element des reinen Biegebalkens

Um die Beziehung des reinen Biegeträgers herzuleiten, sind neben den Gleichgewichtsbedingungen und kinematischen Relationen ebenfalls die Werkstoffbeziehungen erforderlich. Dies wird folgend bei der Herleitung aufgegriffen.

2.1.2 Herleitung

Beginnend bei den Gleichgewichtsbetrachtungen kann anhand des Gleichgewichts der vertikalen Kräfte die Gleichung 2.1 ermittelt werden. Diese beschreibt die Beziehung zwischen Einwirkung und Querkraft.

$$\downarrow^+ \sum F_z = 0 = q_z(x) \cdot dx - V + (V + dV)$$

$$q_z(x) \cdot dx = -dV$$

$$q_z(x) = \frac{dV}{dx} = -V(x)' \quad (2.1)$$

Aus dem Gleichgewicht der Momente folgt die Gleichung 2.2, welche die Beziehung zwischen Einwirkung und Biegemoment darstellt.

$$\sum^{\curvearrowright+} M_y = 0 = (M + dM) - M - V \cdot dx + q_z(x) \cdot dx \cdot dx/2$$

Dabei kann der Anteil aus der Einwirkung $q_z(x) \cdot dx \cdot dx/2$ vernachlässigt werden, da dieser von höherer Ordnung klein ist. Es folgt:

$$0 = dM - V \cdot dx$$

Wird diese Beziehung umgeformt, so resultiert die Beziehung zwischen Querkraft und Biegemoment:

$$V = \frac{dM}{dx}$$

Abschliessend lässt sich unter Berücksichtigung der Gleichung 2.1 die Gleichung 2.2 definieren:

$$q_z(x) = -V(x)' = -M(x)'' \quad (2.2)$$

Mittels Gleichgewicht lassen sich keine weiteren Beziehungen ermitteln. Berücksichtigt man die Werkstoffbeziehungen und kinematischen Relationen, so lassen sich Aussagen zwischen Einwirkung und Verformung definieren. Um die Herleitung abzukürzen wird die Beziehung in Gleichung 2.3 zwischen Biegemoment und Krümmung vorausgesetzt.

$$\frac{M}{EI} = \chi \quad (2.3)$$

Allgemein gilt, die Krümmung entspricht der Änderung der Verdrehung:

$$\chi = \varphi(x)' \quad (2.4)$$

Aus der verformten Lage in Abbildung 2.2 lässt sich die Verdrehung des Elements bestimmen. Da das Element seiner Form treu bleibt, entspricht die Verdrehung der Änderung der Verformung.

$$-\varphi = \frac{dw}{dx}$$

Daraus folgt die Beziehung zwischen Biegemoment und Verformung:

$$M = -EIw(x)''$$

und unter Berücksichtigung der Gleichung 2.2 folgt die Beziehung zwischen Verformung und Einwirkung, dargestellt in Gleichung 2.5.

$$q(x) = EIw(x)''' \quad (2.5)$$

Durch das Lösen der Differentialgleichung lassen sich die Zustandslinien der Querkräfte, Biegemomente, Verdrehungen und Verformungen bestimmen.

2.1.3 Grenzen der Anwendung

Das Modell berücksichtigt keine Schubverformungen. Da in der Praxis übliche Stahlbetonbauteile eine signifikant grössere Schubsteifigkeit als Biegesteifigkeit aufweisen, liefert das Modell zuverlässige Resultate. Sowie gilt, die Gleichung 2.5 lässt lediglich die Anwendung einer konstanten Biegesteifigkeit zu.

2.2 Mohr'sche Analogie

Die Mohr'sche Analogie ist an sich keine Modellvorstellung, sondern beschreibt ein handhabbares Lösungsvorgehen der Differentialgleichung für reine Biegeträger.

2.2.1 Aufbau

Aus den Beziehungen, detailliert beschrieben in Kapitel 2.1, können folgende Abhängigkeiten definiert werden:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = M'' = -q_z \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = w'' = -\frac{M}{EI} \quad (2.7)$$

Erkennbar ist die Analogie der beiden Gleichungen. Aus der Einwirkung lässt sich der Verlauf der Biegemomente bestimmen. Wird nun auf ein analoges System der Verlauf der Biegemomente dividiert durch die Biegesteifigkeit als Einwirkung angesetzt, so

lässt sich mit dem gleichen Berechnungsvorgehen die Verformung bestimmen. Lediglich den Randbedingungen ist Beachtung zu schenken, welche mit entsprechenden Lagerungsbedingungen im analogen System berücksichtigt werden. Die Anpassung der Lagerungsbedingungen für ein analoges System ist in Abbildung 2.3 gezeigt.




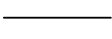



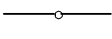
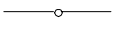
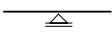
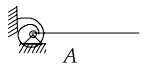
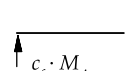
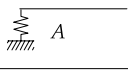
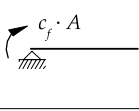
Gegebener Träger			Analogieträger		
	Einfach gelagert	$w = 0$ $w' \neq 0$		Einfach gelagert	$M^* = 0$ $V^* \neq 0$
	Eingespannt	$w = 0$ $w' = 0$		Freies Ende	$M^* = 0$ $V^* = 0$
	Freies Ende	$w \neq 0$ $w' \neq 0$		Eingespannt	$M^* \neq 0$ $V^* \neq 0$
	Zwischenaufleger	$w = 0$ $w'_l = w'_r$		Gelenk	$M^* = 0$ $V^*_l = V^*_r$
	Gelenk	$w \neq 0$ $w'_l \neq w'_r$		Zwischenaufleger	$M^* \neq 0$ $V^*_l \neq V^*_r$
	Elastische Einspannung	$w = 0$ $w' = c_f \cdot M_A$		Freies Ende mit Einzellast	$M^* = 0$ $V^* = c_f \cdot M_A$
	Elastische Auflagerung	$w = c_f \cdot M_A$ $w' \neq 0$		Einfach gelagert mit Endmoment	$M^* = c_f \cdot A$ $V^* \neq 0$

Abbildung 2.3: Lagerungsbedingungen für Analogiesysteme, übernommen aus [4]

Die Mohr'sche Analogie ermöglicht folglich die Bestimmung der Verformungen durch das Ermitteln zweier Biegemomentenverläufe, am realen und am analogen System.

2.3 Abschätzung nach Norm

Die folgende Beschreibung richtet sich nach der Masterthesis [5]. Sowie sind die Beziehungen empirischen Ursprungs.

Der Schweizerische Ingenieuren- und Architekten Verband (SIA) stellt in ihrer aktuellen Betonnorm [6] Ziffer 4.4.3.2.5 den Ansatz in Gleichung 2.9 zur Ermittlung der Verformung im gerissenen Zustand. Dazu ist die elastische ungerissene Verformung zu bestimmen und mit einem Faktor, welcher abhängig von Zug- und Druckbewehrungsgehalt, der Kriechzahl sowie der Geometrie ist, zu vergrössern. Das Verhalten

des Faktors unter Variierung der Bewehrungsgehälter mit konstanter Höhe und konstanter statischer Höhe ist in Abbildung 2.4 gezeigt.

$$w_{III,SIA} = f_g w_1 \quad (2.8)$$

$$w_{III,SIA} = \frac{1 - 20\rho'}{10\rho^{0.7}} (0.75 + 0.1\varphi) \left(\frac{h}{d}\right)^3 w_1 \quad (2.9)$$

Durch die Vernachlässigung der Druckbewehrung, sowie ohne Berücksichtigung von Langzeiteinflüssen, sprich das Kriechen, folgt die Gleichung 2.10.

$$w_{III,SIA} = \frac{0.75}{10\rho^{0.7}} \left(\frac{h}{d}\right)^3 w_1 \quad (2.10)$$

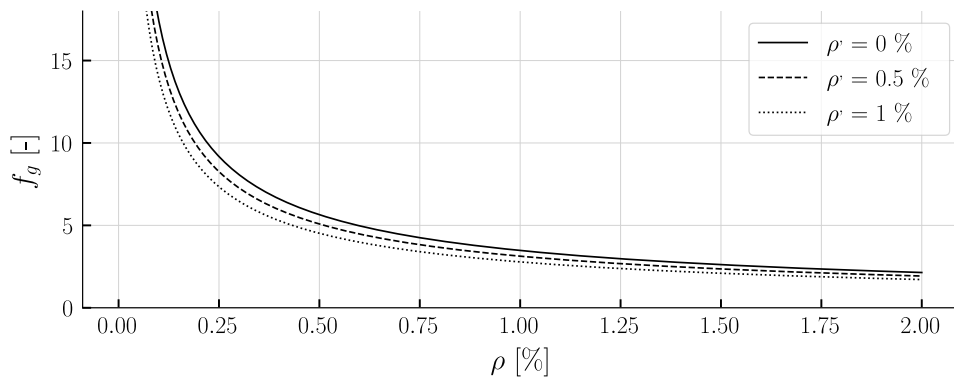


Abbildung 2.4: Verlauf des Vergrößerungsfaktors der Abschätzung nach Norm

2.4 Zuggurtmodell

Das Zuggurtmodell beschreibt das Verformungsverhalten nach dem Reißen des Betons. Das Modell findet Anwendung bei der Ermittlung der gerissenen Biegesteifigkeit.

2.4.1 Aufbau

Der folgende Abschnitt beschreibt das Zuggurtmodell anhand der Herleitungen in [4]. Das Zuggurtmodell betrachtet auf Zug beanspruchte Stahlbetonzugglieder. Das Modell erlaubt eine Eingrenzung der Rissbreiten und der Rissabstände. Im Bereich zwischen den Rissen erhöht sich die Steifigkeit des Zugglieds, da sich der Beton am Lastabtrag beteiligt. Dies wird als Zugversteifung beschrieben. Um das Verhalten des

Verbands zwischen Beton und Betonstahl im ungerissenen Bereich zu definieren, wird eine Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung dem Modell zugrunde gelegt.

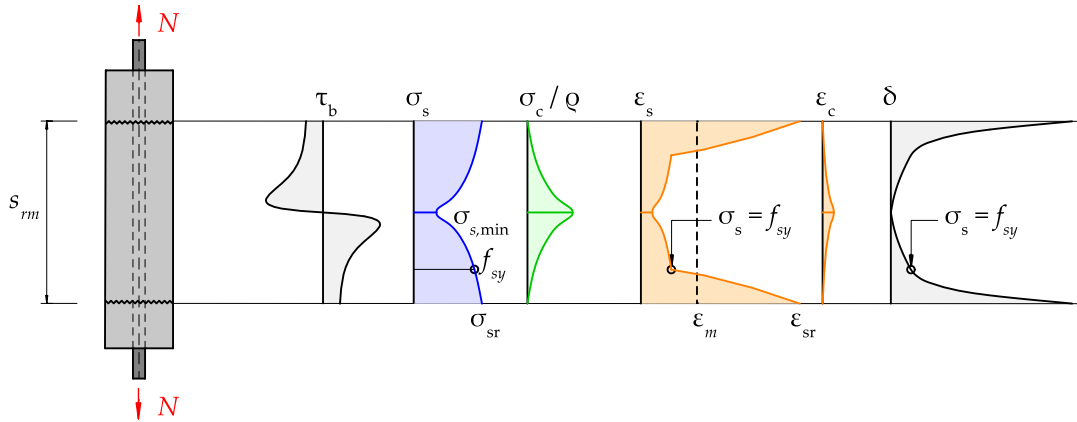


Abbildung 2.5: Verlauf der effektiven Verbundschubspannungen, Betonstahlspannungen, Betonspannungen, Betonstahldehnungen, Betondehnungen und Schlupf bei einem Zugglied. Bild neu gezeichnet nach [4]

Verwendet wird eine abgetreppte, starr-ideal-plastische Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung. Durch die Idealisierung lassen sich die Spannungen und Dehnungen ausschliesslich durch Gleichgewichtsbeziehungen ermitteln. Die Abtreppung erfolgt beim Erreichen der Fließgrenze des Betonstahls. In der Abbildung 2.5 im Verlauf des Schlupfs (rechts) ist die Position der Fließspannung dargestellt.

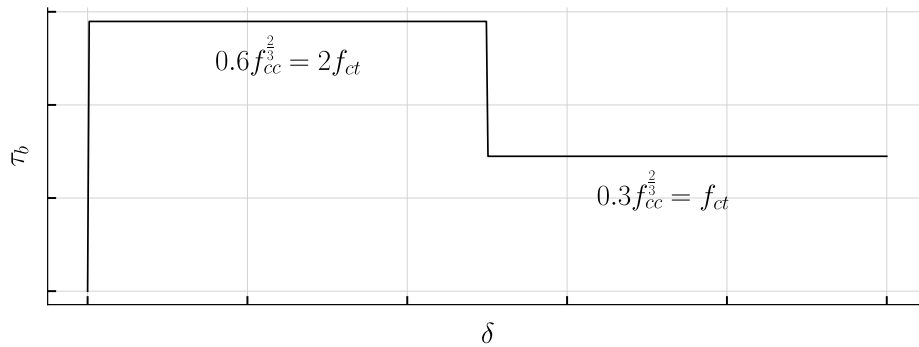


Abbildung 2.6: Idealisierte Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung

Zudem verdeutlicht der Verbundschubspannungsverlauf, in Abbildung 2.5 (links), die Rechtfertigung der Vereinfachung als abgetreppten Verlauf.

2.4.1.1 Ansatz nach Marti

In [4] wird der Ansatz von Marti zur Berücksichtigung der Zugversteifung basierend auf dem Zuggurtmodell für Biegeelemente aufgezeigt.

Vor dem Erreichen der Zugfestigkeit des Betons verbleibt das Zugglied ungerissen und verhält sich linear elastisch. Beim Reißen des Querschnitts verharrt die Betonspannung bei der Rissspannung. Eine Erhöhung der Einwirkung erhöht lediglich die Zugspannung im Betonstahl.

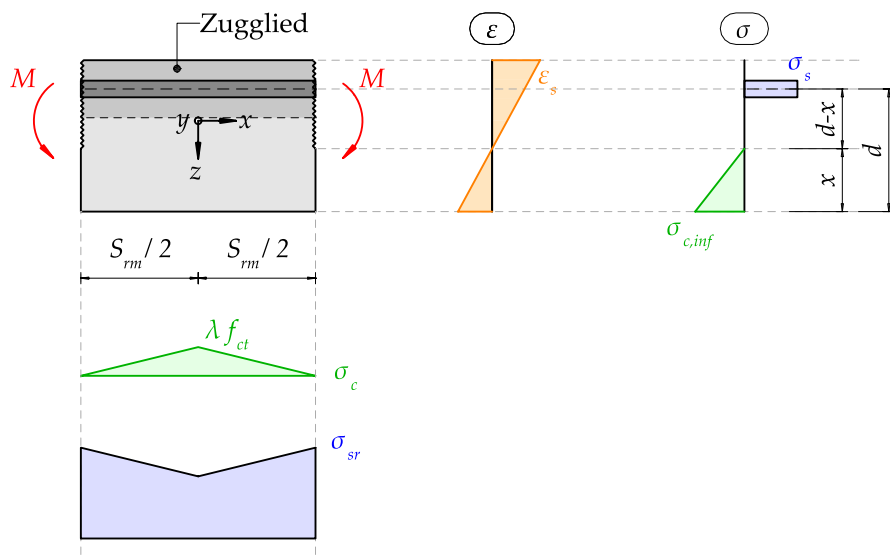


Abbildung 2.7: Einfluss der zugversteifenden Wirkung bei einem Biegeelement

In der Abbildung 2.7 ist der Spannungsverlauf des Betons und des Betonstahls gezeigt. Diese zeigt die Abnahme der Betonstahlspannung bei steigender Entfernung zum Riss. Mit der Spannungsreduktion folgt eine Dehnungsreduktion, welche mit $\Delta\varepsilon_s(\lambda)$ beschrieben wird. Aus der Dehnungsreduktion lässt sich eine Krümmungsdifferenz definieren nach Gleichung 2.11.

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{\Delta\varepsilon_s(\lambda)}{(d-x)} = \frac{\lambda}{2} \cdot \left(\frac{M_r}{EI^I} - \frac{f_{ct}}{E_c \cdot (d-x)} \right) \quad (2.11)$$

Dabei wird die gesamte Krümmung M_r/EI^{II} beim Reißen des Querschnitts durch die Krümmung beim Erreichen der Zugfestigkeit des Betons $f_{ct}/(E_c \cdot (d-x))$ reduziert. Die Gleichung 2.11 kann mittels dem effektiven Bewehrungsgehalt formuliert werden.

$$\rho_{\text{eff}} = \left[\frac{M_r(d-x) \cdot E_S}{f_{ct} \cdot EI^I} + 1 - n \right]^{-1} \quad (2.12)$$

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{f_{ct} \cdot (1 - \rho_{\text{eff}})}{\rho_{\text{eff}} \cdot E_s \cdot (d - x)} \quad (2.13)$$

Das Modell liefert ebenfalls Beziehungen zur Bestimmung der Rissweite und der Rissabstände.

$$s_{rm} = \frac{\phi_s \lambda (1 - \rho_{\text{eff}})}{4\rho_{\text{eff}}} \quad (2.14)$$

$$w_r = \frac{s_{rm} (-\lambda \sigma_{sr0} + 2\sigma_{sr})}{2E_s} \quad (2.15)$$

Der Modellbeschrieb wird mit der Erläuterung des λ -Beiwerts abgeschlossen. Grundsätzlich gilt die Annahme, dass sich ein Riss einstellt beim Erreichen der Zugfestigkeit des Betons.

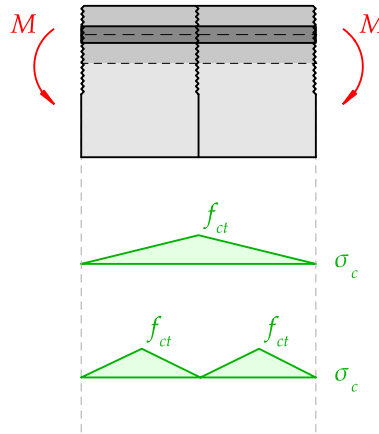


Abbildung 2.8: Fallunterscheidung beim Erreichen der Zugfestigkeit des Betons

Vor dem Erreichen der Zugfestigkeit des Betons reißt der Beton nicht. Unmittelbar beim Erreichen der Zugfestigkeit stellt sich der Riss ein. Betrachtet man die Abbildung 2.8, kann in der Elementmitte die Zugfestigkeit erreicht werden, oder sich ein erneuter Riss bilden. Der Beiwert λ dient folglich zur Unterscheidung dieser Grenzwerte.

2.4.1.2 Grenzen der Anwendung

Das Zuggurtmodell findet Anwendung bei Zuggliedern in der Biegezugzone. Es liefert Auskunft über Rissweiten und Rissbreiten, sowie eine Verfeinerung der Biegesteifigkeit im gerissenen Bereich. Das Modell beschränkt sich ausschliesslich auf normalzugbeanspruchte Bauteile.

2.5 Numerische Integration der Krümmung

Die numerische Integration der Krümmung bietet einen Ansatz, einen nicht-linearen Biegesteifigkeitsverlauf zu berücksichtigen. Mittels der Arbeitsgleichung lassen sich die Verformungen punktuell bestimmen. Für Biegeträger gilt die folgende Gleichung 2.16.

$$w = \int_0^l \bar{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx \quad (2.16)$$

Wobei $\frac{M(x)}{EI} = \chi(x)$ gilt, sprich dem Krümmungsverlauf entspricht. Die Arbeitsgleichung setzt die innere Arbeit aus dem Biegemoment multipliziert mit der Krümmung zu der äusseren Arbeit gleich, welche aus Kraft multipliziert mit dem Weg entspricht. Daraus lässt sich der Weg, sprich die Verformung herauslösen.

2.5.1 Momenten-Krümmungs-Beziehung

Eine nicht-lineare Momenten-Krümmungs-Beziehung lässt sich händisch mittels einer Querschnittsanalyse bestimmen. Zur rechnerischen Ermittlung gelten folgende Annahmen, wie in [4] beschrieben:

- Eben- und senkrechtbleiben der Querschnitte
- Die Betonzugfestigkeit f_{ct} wird für Zustände nach dem Überschreiten von f_{ct} vernachlässigt
- Die Bewehrung überträgt Zug- und Druckkräfte ausschliesslich in Stabrichtung

Dazu wird der Querschnitt bei steigender Dehnung, induziert durch Biegung, analysiert. Der entsprechende Biegezugwiderstand und die gekoppelte Krümmung wird dabei bestimmt. Grundsätzlich wird der Querschnitt vor dem Reißen des Betons, nach dem Reißen, beim Fliessbeginn der Zugbewehrung und beim Erreichen des Biegezugwiderstands betrachtet. Exemplarisch ist in Abbildung 2.9 der Zustand des Biegezugwiderstands dargestellt.

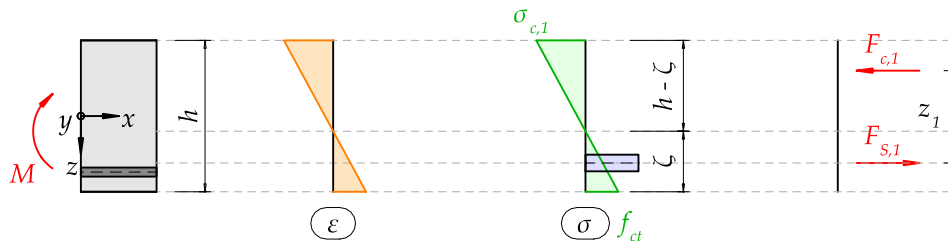


Abbildung 2.9: Querschnittsanalyse für den Zustand des Biegezugwiderstands

2.6 Fachwerksanalyse

Die Fachwerksanalyse basiert auf einer Modellierung mittels Spannungsfeldern. Das Ziel ist es, mittels Spannungsfelder den Kraftfluss im Balken nachzuverfolgen. Das Fachwerk bildet den Kraftfluss detaillierter als eine Querschnittsanalyse ab. In Anlehnung an die Modellierungsstufen in [7] gliedert sich die Fachwerksmodellierung im level of Approximation II an, eine Stufe höher als die Querschnittsanalyse. Grundsätzlich wird das Modell jedoch zur Bemessung im Grenzzustand der Tragsicherheit verwendet. Folgend wird beschrieben, wie mittels diesem Deformationen zielführend bestimmt werden können.

2.6.1 Spannungsfelder

Der Kraftfluss lässt sich für die in dieser Arbeit untersuchten Versuche mit nicht-zentrierten Fächern und Parallelfeldern modellieren. Durch die Wahl eines Neigungswinkels der Felder ergibt sich deren Breite. Bei der Bemessung im Grenzzustand der Tragsicherheit ist die Neigung der Druckfelder frei wählbar. Durch die Variation des Winkels ändert sich die Kraftaufteilung zwischen der Schubbewehrung und der Zugbewehrung.

2.6.1.1 Wahl des Neigungswinkels

Anders als beim Entwurf der Balken, ist die Wahl der Bügelbewehrung bei der Nachrechnung bereits festgelegt. Folgend wird eine Abschätzung zur Wahl des Neigungswinkels aufgezeigt. Die Querkraftbemessung der Betonnorm [6] basiert auf der Modellierung mittels Spannungsfeldern. Der Neigungswinkel der Betondruckstrebe kann in Anlehnung an die Gleichung 2.17 zur Bestimmung des Querkraftwiderstands von vertikaler Schubbewehrung, gemäss Ziffer 4.3.3.4.3, bestimmt werden.

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{sd} \cot(\alpha) \quad (2.17)$$

Wird nun ein Fachwerkmodell für die Nachrechnung von Verformungen von Versuchen verwendet, so gilt es den passenden Neigungswinkel anhand der gegebenen Schubbewehrung zu ermitteln. Dabei wird vom Bruchzustand ausgegangen. Somit wird die maximale Querkraft, der Hebelarm der inneren Kräfte des Biege- und Schubwiderstands, die Fließ- oder Bruchspannung der Bügelbewehrung und die entsprechende Querschnittsfläche in die Gleichung 2.17 eingesetzt. Daraus lässt sich die Neigung bestimmen. Mit dem bestimmten Neigungswinkel ist die Geometrie der Spannungsfelder und folglich die des Fachwerks eindeutig bestimmt.

2.6.1.2 Dehnsteifigkeiten

Abschliessend gilt es den Pendelstäben die entsprechenden Querschnittsflächen, bzw. Dehnsteifigkeiten zuzuordnen, um die passenden Verformungen zu berechnen. In den Versuchsnachrechnungen des Dreipunkt- und Vierpunktbiegeversuchs ist dies detailliert aufgezeigt.

2.7 Versatzmass

Abgeschlossen wird die Modellbeschreibung mit der Beschreibung des Versatzmasses. Die Modellierung mittels Spannungsfeldern zeigt, dass die Querkraft durch ein diagonales Druckfeld abgetragen wird. Die horizontale Komponente des diagonalen Kraftvektors erhöht die Längskraft. Eine Erhöhung der Längskraft bringt eine Erhöhung des Biegemoments mit sich.

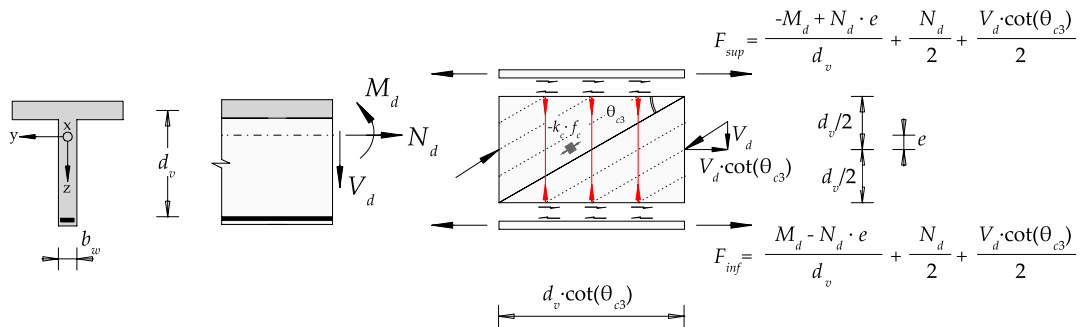


Abbildung 2.10: Längszugkraft aus der Querkraft, dargestellt im Spannungsfeld, entnommen aus [7]

Visualisiert ist dies in der Abbildung 2.10. Es ist ein freigeschnittenes Spannungsfeld gezeigt, welches mit Schnittkräften ergänzt ist, um das Gleichgewicht im System zu wahren. Die diagonal gerichtete Druckkraft, mit deren horizontalen Komponente ist am Schnittufer gezeigt. Durch das Anwenden des Gleichgewichts lassen sich die Gurtkräfte bestimmen, welche durchwegs durch den Term in der Gleichung 2.18 erhöht werden.

$$h_{versatz} = \frac{V \cdot \cot(\theta_{c3})}{2} \quad (2.18)$$

$$M_{versatz} = \frac{V \cdot \cot(\theta_{c3})}{2} \cdot z \quad (2.19)$$

Die Gleichung 2.18 beschreibt die Erhöhung der Längszugkraft aus der Querkraft. Der Einfluss auf das Biegemoment aus der erhöhten Längszugkraft zeigt die Gleichung 2.19.

3 Dreipunktbiegeversuch

In diesem Kapitel werden alle in Kapitel 2 beschriebenen Modelle auf einen Dreipunktbiegeversuch angewendet. Das primäre Ziel ist es, die Differenzen zwischen den mit den verschiedenen Modellen berechneten Verformungen und den tatsächlich gemessenen Verformungen aufzuzeigen. Der Schwerpunkt liegt auf der Anwendung der Modelle. Das Kapitel endet mit einem Vergleich der verschiedenen Modelle und einer Diskussion der Ergebnisse.

3.1 Versuchsbeschreibung

Der Versuch A3 in der zweiten Versuchsanordnung (kurz A3V2) aus [1] dient als Grundlage. Der Körper wurde in der ersten Versuchsanordnung bereits belastet, jedoch unterschiedlich gelagert. Trotzdem führt dies zu Vorverformungen in der zweiten Versuchsanordnung. Im Folgenden sind die wesentlichen Eckdaten des Versuchs dargestellt, während detaillierte Beschreibungen in [1] zu finden sind. Der Versuch beinhaltet einen Plattenstreifen, dessen Lagerung einem Dreipunktbiegeversuch entspricht. Der Plattenstreifen wird durch F_A bis zum Bruch belastet. Die maximale Last beträgt 331 kN.

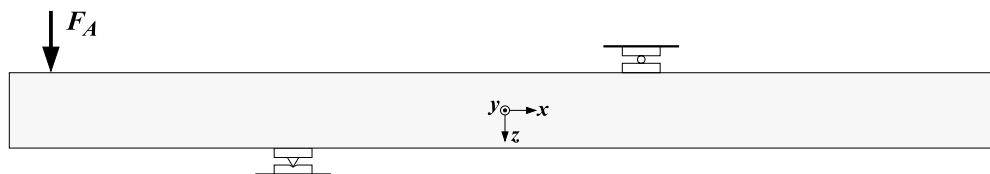


Abbildung 3.1: Lagerung und Belastung des Plattenstreifens, entnommen aus [1]

Das Bewehrungslayout ist so konzipiert, dass nur eine Zugbewehrung im Bereich der negativen Momente vorhanden ist. Die Bewehrung ist orthogonal bzw. parallel zu den Bauteilkanten verlegt. Dargestellt ist die Bewehrungsführung in der Abbildung 3.2.

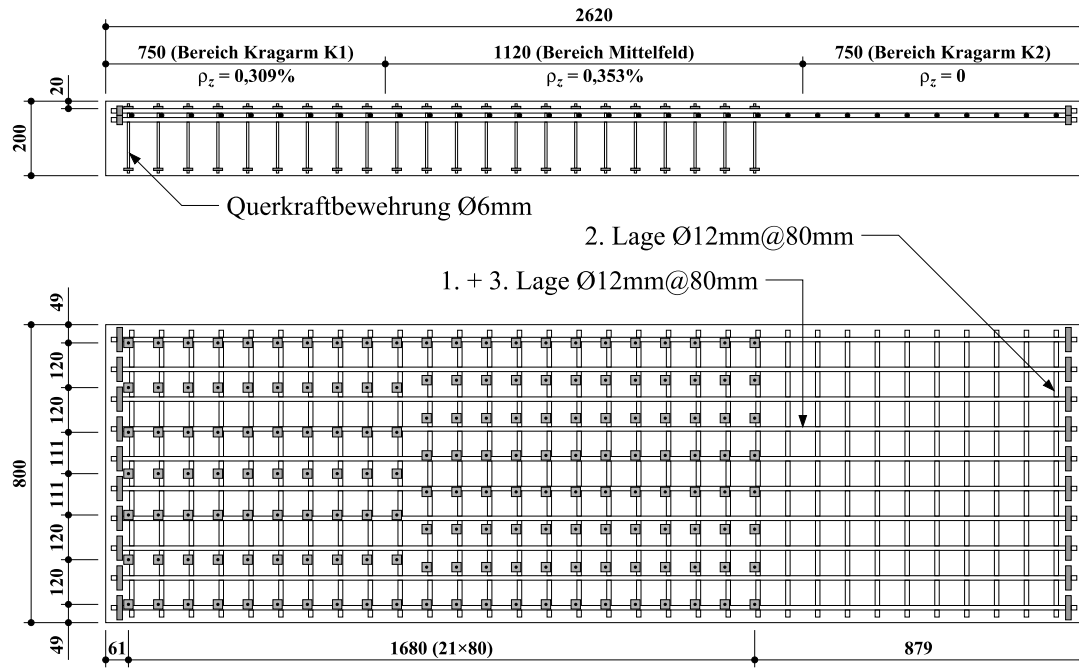


Abbildung 3.2: Bewehrungslayout des Plattenstreifens, entnommen aus [1]

Die vorhandene Querkraftbewehrung, ausgeführt als Schubdübel, ermöglicht ein weitgehend durch Biegung verursachtes Versagen. Dies entspricht der Abgrenzung, primär Biegeverformungen zu betrachten. Das Last-Verformungs-Verhalten an der Stelle w_1 ist in der Abbildung 3.3 dargestellt. Es zeigt sich ein deutlicher Bereich des Fließens der Zugbewehrung ohne vorzeitiges Querkraftversagen. Erkennbar ist dies an der Erhöhung der Verformung ohne markante Steigerung der Last. Aufgezeigt ist ebenfalls die Vorverformung aus der ersten Versuchsanordnung.

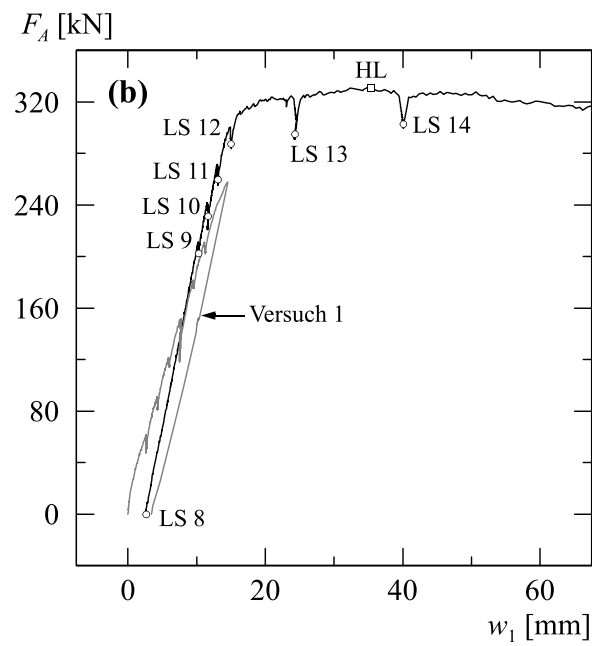


Abbildung 3.3: Last-Verformungs-Verhalten des Plattenstreifens, entnommen aus [1]

In Abbildung 3.4 ist der Verformungsverlauf entlang der Stabachse dargestellt. Der Verlauf zeigt, dass die maximalen Verformungen bei der Krafteinleitung entstehen.

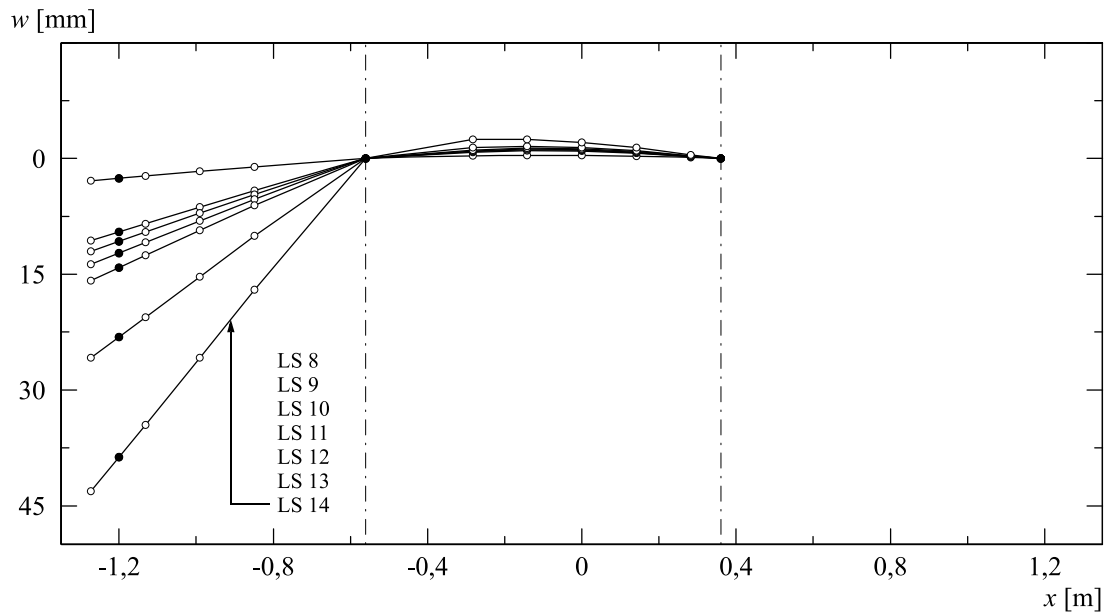


Abbildung 3.4: Verformungsverlauf des Plattenstreifens, entnommen aus [1]

3.2 Eigenschaften der Baustoffe

Die Betoneigenschaften wurden in [1] mittels Würfel- und Zylinderproben ermittelt. Ebenso wurden die Eigenschaften des Betonstahls durch Zugproben bestimmt. Um von den Druckfestigkeiten der Zylinderproben auf die Bauteildruckfestigkeit zu schliessen, sind in [8] Transformationsbeziehungen beschrieben. Folgend ist die Anwendung dieser aufgezeigt. Die Betondruckfestigkeit aufgrund der Zylinderdruckfestigkeit entspricht:

$$f_c = 2.7 f_{cc}^{\frac{2}{3}} \quad (3.1)$$

$$f_c = \frac{40.827\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (3.2)$$

Ebenfalls kann die Zugfestigkeit gemäss [9] anhand der Zylinderdruckfestigkeit bestimmt werden.

$$f_{ct} = 0.3 f_{cc}^{\frac{2}{3}} \quad (3.3)$$

$$f_{ct} = \frac{4.54\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (3.4)$$

Abschliessend wird der Elastizitätsmodul nach [9] abgeschätzt.

$$E_c = 10000 \sqrt[3]{f_{cc}} \quad (3.5)$$

$$E_c = \frac{38886.0\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (3.6)$$

3.3 Reiner Biegeträger

In diesem Abschnitt wird das in Kapitel 2.1 beschriebene Modell auf das Versuchsojekt angewendet. Zunächst wird das statische System des Versuchs in Abbildung 3.5 dargestellt.

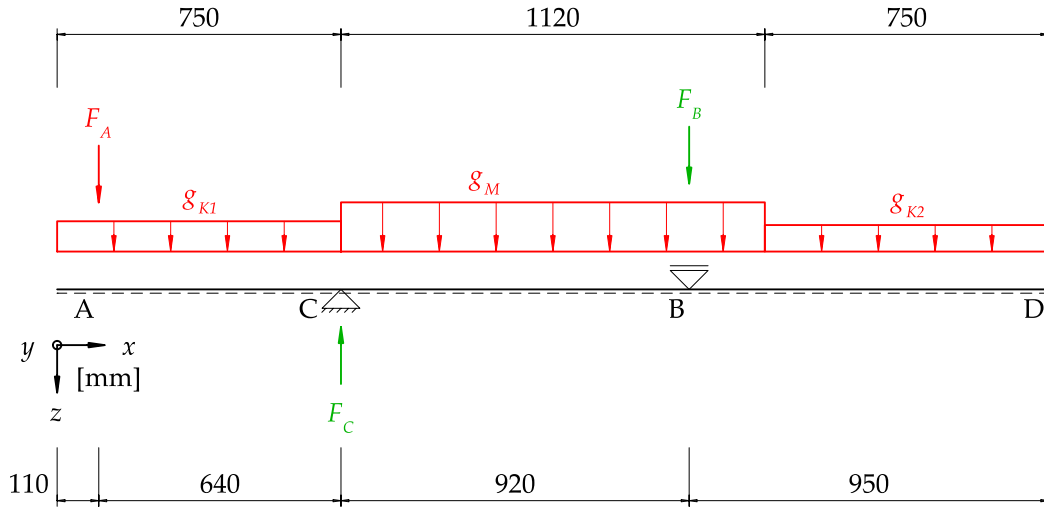


Abbildung 3.5: Statisches System des Plattenstreifens

Eine Vereinfachung des in Abbildung 3.5 dargestellten Systems ist in Abbildung 3.6 zu sehen. Dabei wird das Eigengewicht aufgrund seines minimalen Einflusses auf das Biegemoment vernachlässigt. Darüber hinaus wurden die Verformungen, die in [1] gemessen wurden, nach der Installation des Trägers erfasst. Daher spiegelt die Messung den Einfluss des Eigengewichts nicht wider.

$$g_M, g_{k1}, g_{k2} = 0 \quad (3.7)$$

Die Berücksichtigung der Lagerbreiten führt zur Streckenlast f_A , bzw. zu den Lagerreaktionen f_B und f_C . Aufgezeigt ist dies in der Abbildung 3.6.

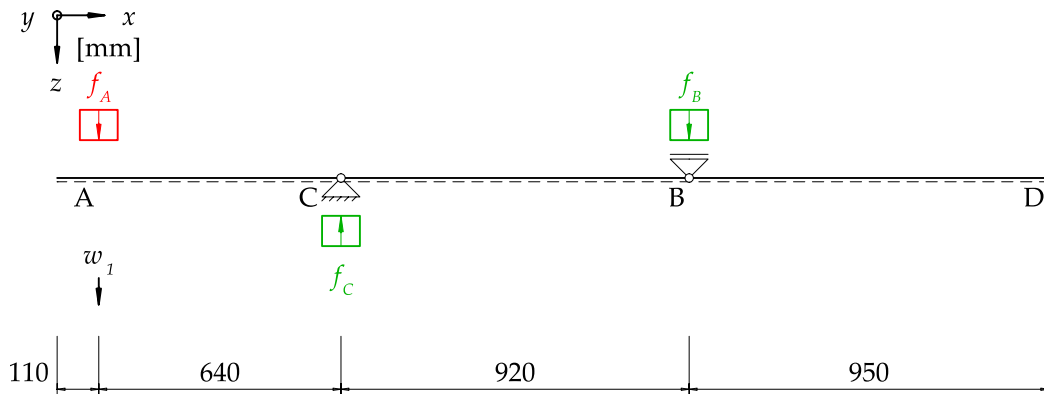


Abbildung 3.6: Angepasstes statisches System des Plattenstreifens

Die nun folgenden Berechnungen beziehen sich ausschliesslich auf das System in der Abbildung 3.6. Dabei werden die Parameter in der Tabelle 3.1 berücksichtigt.

Tabelle 3.1: Berechnungsparameter der Systemgeometrie

Parameter	
$a_1 = 0.11\text{m}$	$a_2 = 0.64\text{m}$
$a_3 = 0.92\text{m}$	$a_4 = 0.95\text{m}$
$b = 800.0\text{mm}$	$b_{\text{Auflager}} = 100\text{mm}$
$h = 200.0\text{mm}$	

3.3.1 Auflagerkräfte

Zunächst müssen die Einwirkungen auf den Stab bestimmt werden, dazu sind die Auflagerreaktionen erforderlich. Das statisch bestimmte System kann mithilfe der Gleichgewichtsbeziehungen gelöst werden. Im Folgenden wird die Gesamtlänge des Stabs bestimmt, als Kontrollgröße der gewählten Abstände.

$$l_{\text{tot}} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad (3.8)$$

$$l_{\text{tot}} = 2.62\text{m} \quad (3.9)$$

Durch das Aufstellen von Momentengleichgewichten um die Auflagerpunkte C und B können die Beziehungen zwischen den Einwirkungen und den Reaktionskräften ermittelt werden.

$$0 = F_A a_2 - F_B a_3 \quad (3.10)$$

$$0 = F_A (a_2 + a_3) - F_C a_3 \quad (3.11)$$

Durch das Auflösen der bestimmten Beziehungen folgen die Auflagerreaktionen zu:

$$F_B = \frac{F_A a_2}{a_3} \quad (3.12)$$

$$F_C = \frac{F_A a_2 + F_A a_3}{a_3} \quad (3.13)$$

Wie in Abbildung 3.6 gezeigt, gilt es die Einzelkraft der Auflagerbreite entsprechend zu verteilen. Dies zeigen die folgenden Gleichungen.

$$f_B = \frac{F_A a_2}{a_3 b_{\text{Auflager}}} \quad (3.14)$$

$$f_C = \frac{F_A a_2 + F_A a_3}{a_3 b_{\text{Auflager}}} \quad (3.15)$$

$$f_A = \frac{F_A}{b_{\text{Auflager}}} \quad (3.16)$$

3.3.2 Zustandslinien

Nach dem Bestimmen der Auflagerreaktionen können die Zustandslinien der Schnittgrößen bestimmt werden. Die Zustandslinien der Schnittgrößen resultieren aus der Bemühung der hergeleiteten Gleichungen in Kapitel 2.1. Dabei ist zu beachten, dass die Zustandslinien lediglich für die maximal gewählte Laststufe dargestellt sind. Der Verlauf der Einwirkungen ist in Abbildung 3.7 aufgezeigt.

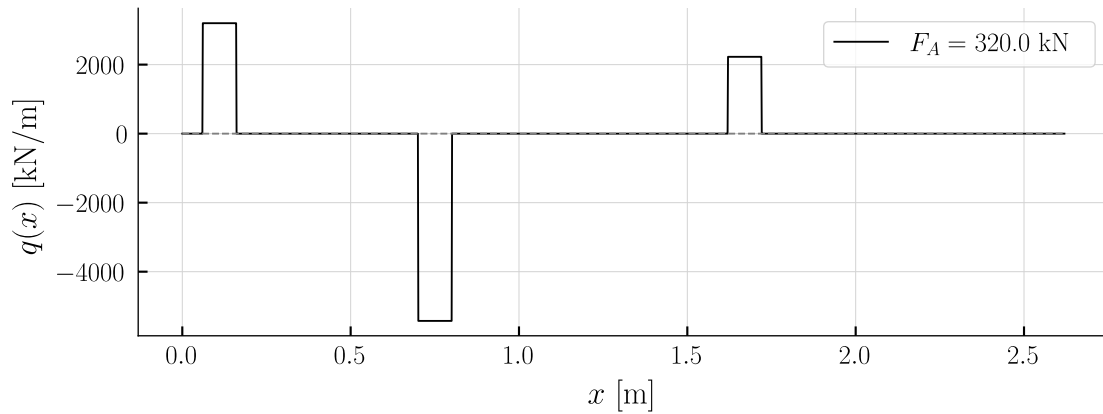


Abbildung 3.7: Verlauf der Einwirkungen

Das Vorzeichen der Streckenlast gibt die Wirkungsrichtung an. Negative Werte wirken entgegen der positiven z -Richtung. Die positive z -Richtung ist in Abbildung 3.6 dargestellt. Basierend auf dem Verlauf der Einwirkungen lässt sich der Verlauf der Querkraft bestimmen. Durch Integration der Einwirkung über die Laufvariable x ergibt sich der Verlauf, wie in Gleichung 3.17 dargestellt.

$$V(x) = - \int q(x) dx + c_1 \quad (3.17)$$

Mit der Randbedingung $V(0) = 0$ kann die Integrationskonstante bestimmt werden. Der Verlauf der Querkräfte ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Die Querkräfte wirken in z -Richtung.

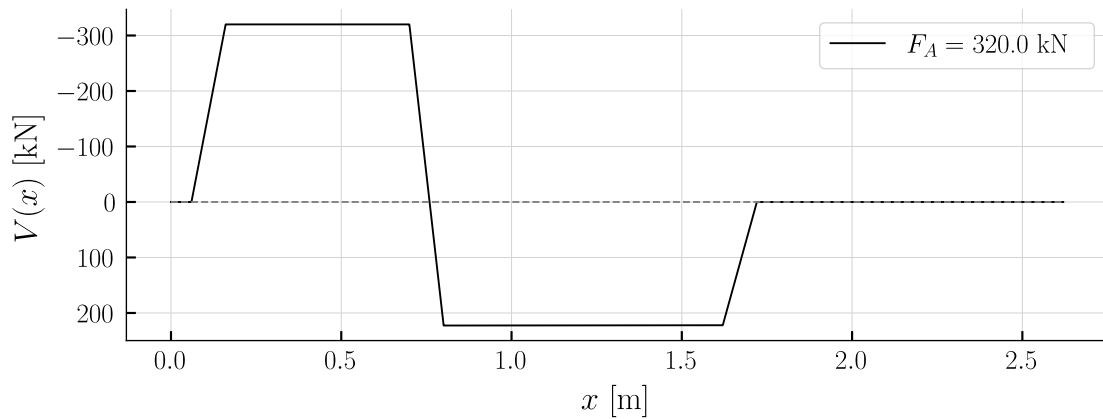


Abbildung 3.8: Verlauf der Querkräfte

Nach dem bestimmten Querkraftverlauf folgt der Biegemomentenverlauf unter der Bemühung der Gleichung 3.18. Dazu ist der Verlauf der Querkräfte zu integrieren.

$$M(x) = \int V(x) dx + c_2 \quad (3.18)$$

Mit der Randbedingung $M(0) = 0$ kann die Integrationskonstante bestimmt werden. Der Verlauf der Biegemomente ist in Abbildung 3.9 dargestellt. Es ergibt sich ein Minimum über dem Auflager C .

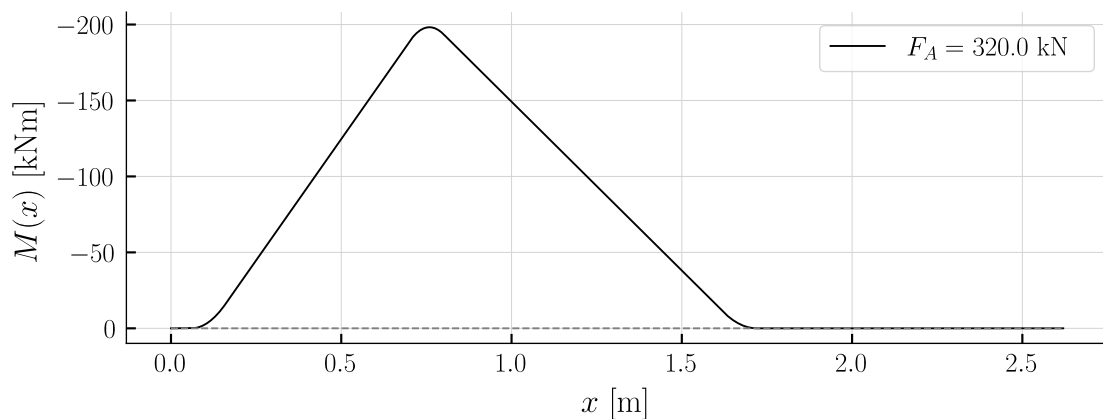


Abbildung 3.9: Verlauf der Biegemomente

Zusätzlich zu den resultierenden Biegemomenten aus der Einwirkung kann ein durch die Längszugkraft aus der Querkraft induziertes Biegemoment ermittelt werden. Dies wird mit einem Versatzmass berücksichtigt. Erläutert ist die Modellvorstellung in Kapitel 2.7. Die Gleichung 2.18 zeigt die Ermittlung des Versatzmass. Multipliziert mit der statischen Höhe ergibt sich der Versatz des Biegemoments aus Gleichung 2.19. In der Abbildung 3.10 ist die Erhöhung durch das Versatzmass gezeigt. Beim Momentenminimum bildet sich ein Plateau aus. Der notwendige Hebelarm der inneren

Kräfte ist anhand der statischen Höhe d abgeschätzt. Die statische Höhe ist in Abbildung 3.17 dargestellt.

$$d = -\frac{3\phi_s}{2} - c_{nom} + h \quad (3.19)$$

$$d = 162.0\text{mm} \quad (3.20)$$

Aus der berechneten statischen Höhe folgt der Hebelarm der inneren Kräfte z .

$$z = 0.9d \quad (3.21)$$

$$z = 146.0\text{mm} \quad (3.22)$$

Zur Bestimmung des Versatzmass gilt es die Neigung des Druckfelds zu ermitteln. Abgeschätzt wird diese mit dem unteren Grenzwert des definierten Bereichs aus der Norm [6, p. 54].

$$\theta_{c3} = 30.0^\circ \quad (3.23)$$

Unter diesen Annahmen folgt der Verlauf der Biegemomente mit dem Versatzmass, dargestellt in der Abbildung 3.10.

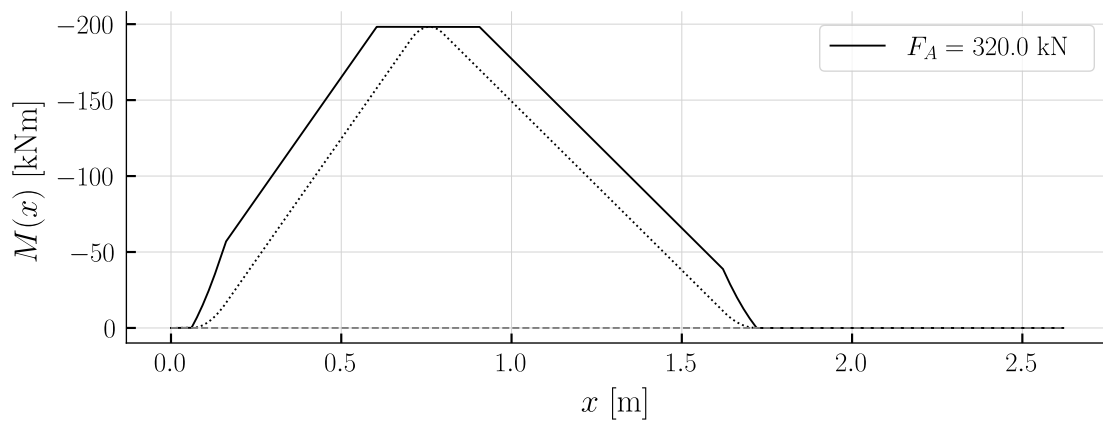


Abbildung 3.10: Verlauf der Biegemomente, mit Versatzmass

3.3.2.1 Verdrehung- und Verformungslinien

Wie in Kapitel 2.1 hergeleitet, sind die Gleichgewichtsbetrachtungen nicht ausreichend um die Verdrehung und Verformung zu beschreiben. Die Werkstoffbeziehung bedingt eine Biegesteifigkeit. Dabei wird von einer konstanten Biegesteifigkeit ausgegangen. Unter der Annahme eines ungerissenen Betonquerschnitts lässt sich die Biegesteifigkeit wie folgt berechnen:

$$EI = \frac{E_c b h^3}{12} \quad (3.24)$$

$$EI = 2.07 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2 \quad (3.25)$$

Der Verlauf der Verdrehung entspricht dem integrierten Verlauf der Biegemomente, dividiert durch die Biegesteifigkeit.

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI} \int M(x) dx + c_3 \quad (3.26)$$

Die Verformung hingegen entspricht dem integrierten Verlauf der Verdrehung.

$$w(x) = \int -\varphi(x) dx + c_4 \quad (3.27)$$

Mit den Randbedingungen $w(C) = 0$ und $w(B) = 0$ können die Integrationskonstanten bestimmt werden. Der elastische Verformungsverlauf, bzw. der mit einer über die Stabachse konstanten Biegesteifigkeit bestimmte Verformungsverlauf, ist in Abbildung 3.11 dargestellt.

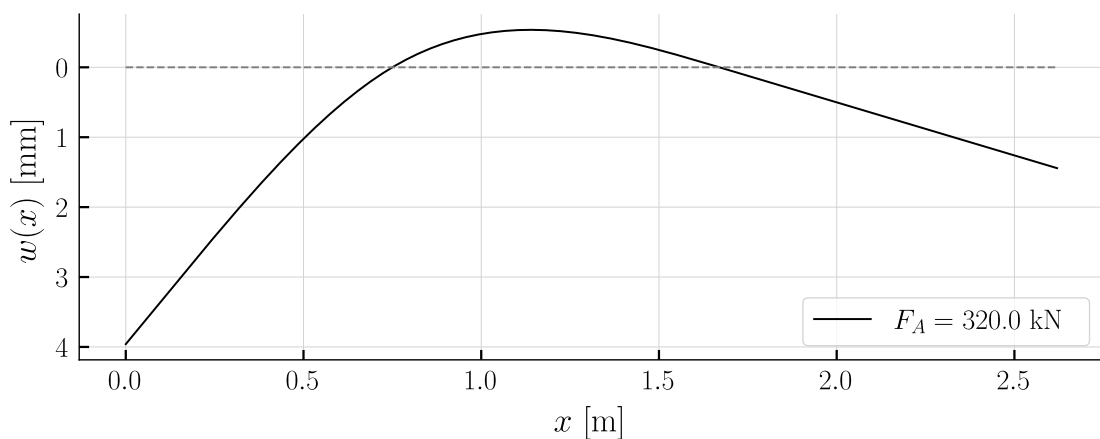


Abbildung 3.11: Verlauf der Verformung, bestimmt mit einer konstanten ungerissenen Biegesteifigkeit

3.4 Mohr'sche Analogie

In diesem Abschnitt sind die Zustandslinien der Schnittgrößen mittels der Mohr'schen Analogie bestimmt. Das Vorgehen ist in Kapitel 2.2 beschrieben. Der bereits bestimmte Momentenverlauf gemäss Abbildung 3.9, dividiert durch die ungerissene Biegesteifigkeit, ist als Einwirkung auf das System anzusetzen. Dies ist in Abbildung 3.12 dargestellt.

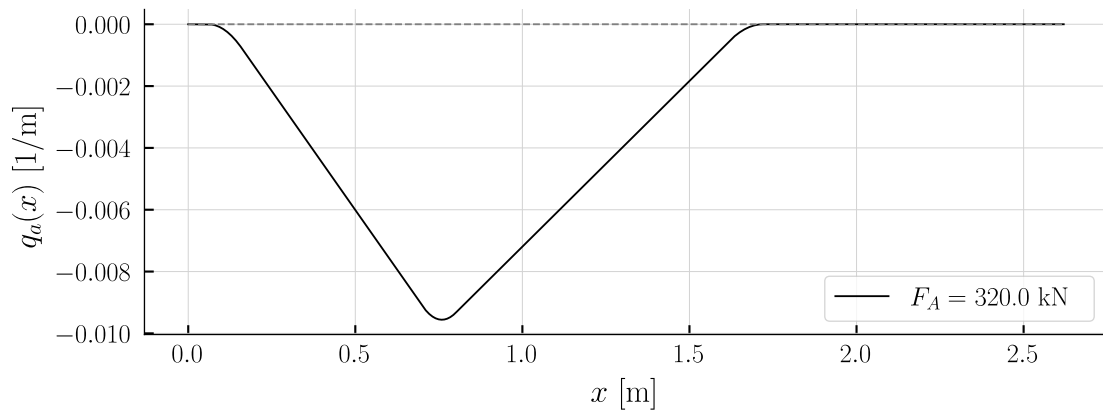


Abbildung 3.12: Verlauf der Einwirkungen des Analogiesystems

Die Randbedingungen bzw. die Lagerungen für das analoge System sind zu ermitteln. Dies kann grundsätzlich mit den Lagerungsbedingungen aus Abbildung 2.3 erfolgen. Alternativ sind die folgenden Überlegungen zu berücksichtigen. Es ist bekannt, dass die Verformung an den Auflagern null sein muss. Daher ist es notwendig, ein Biege gelenk an den Positionen der Lager einzufügen. Durch die Einspannungen an den Stab rändern resultiert der passende Verformungsverlauf.

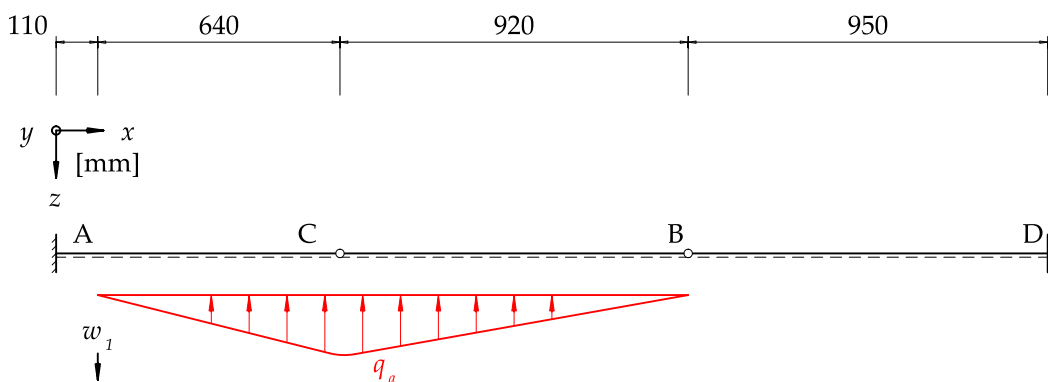


Abbildung 3.13: Einwirkungen und Lagerung des Analogiesystems

Der Querkraftverlauf für das analoge System ist in Abbildung 3.14 dargestellt. Die Querkraft ist einheitslos, da sie die Verdrehung des realen Systems repräsentiert.

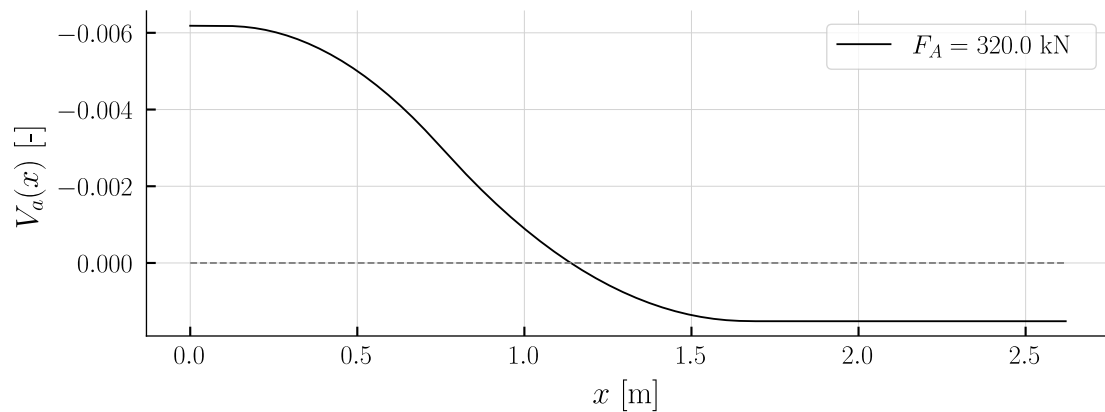


Abbildung 3.14: Verlauf der Querkräfte des Analogiesystems

Der Biegemomentenverlauf für das analoge System ist in Abbildung 3.15 dargestellt. Der Momentenverlauf entspricht der Verformung des realen Systems und ist daher in Millimeter angegeben. Der Verlauf der Verformung ist erwartungsgemäss deckungsgleich mit dem aus der Bemühung der Differentialgleichung, aufgezeigt in Abbildung 3.9.

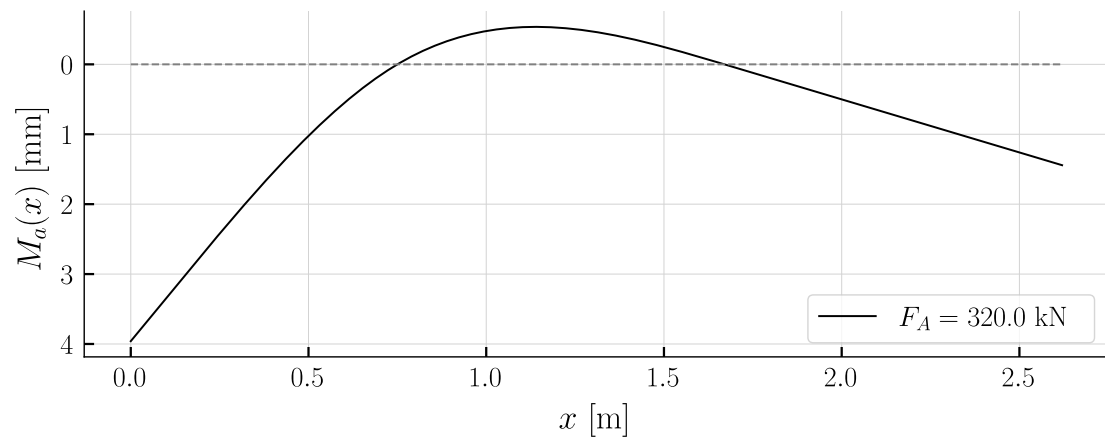


Abbildung 3.15: Verlauf der Biegemomente des Analogiesystems

3.5 Abschätzung nach Norm

Nach der Bestimmung der elastischen Verformung kann die Verformung anhand des vollständig gerissenen Querschnitts gemäss der Betonnorm [6] ermittelt werden. Erläutert ist das Vorgehen im Kapitel 2.3. Die Druckbewehrung wird für den Versuch vernachlässigt. Ebenso sind keine Langzeiteinflüsse zu berücksichtigen. Dies führt auf die Gleichung 2.10. Der geometrische Bewehrungsgehalt definiert sich folgendermassen.

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (3.28)$$

Die dazu benötigte Querschnittsfläche der Stäbe in der Zugzone entspricht dem Folgenden.

$$A_s = 2b \frac{\pi \varnothing_s^2}{4s_x} \quad (3.29)$$

$$A_s = 2262.0 \text{ mm}^2 \quad (3.30)$$

Sowie beträgt die bereits ermittelte statische Höhe, dargestellt in Abbildung 3.17:

$$d = 162.0 \text{ mm} \quad (3.31)$$

Wird für die elastische Verformung $w(0.11)$ des Verlaufs in Abbildung 3.11 eingesetzt, so folgt abschliessend die Verformung mittels der Abschätzformel für die maximale Last an der Stelle w_1 zu:

$$w_{III, SIA} = 15.7 \text{ mm} \quad (3.32)$$

3.6 Numerische Integration der Krümmung

Um sich von der Betrachtung einer konstanten Biegesteifigkeit zu lösen, gilt es eine nicht-lineare Momenten-Krümmungs-Beziehung zu bestimmen. Das Kapitel 2.5 zeigt Grundlagen dazu auf. Im Folgenden wird ein Momenten-Krümmungs-Diagramm für den Querschnitt aus dem beschriebenen Versuch berechnet.

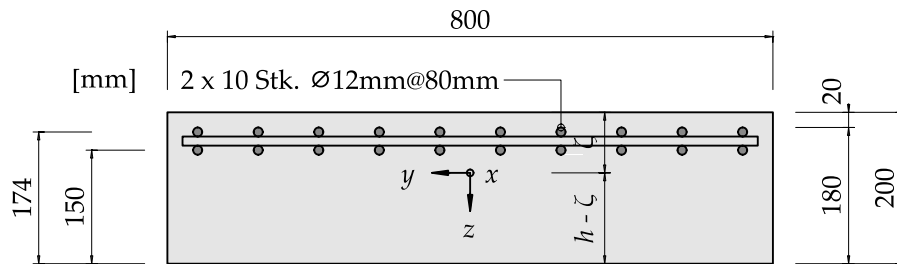


Abbildung 3.16: Querschnitt des Plattenstreifens dargestellt mit Zugbewehrung, ohne Schubbewehrung

Die vorhandene Schubbewehrung ist in Abbildung 3.16 nicht dargestellt. Zur Reduktion des Berechnungsaufwands wird der Querschnitt gemäss der Abbildung 3.17 vereinfacht.

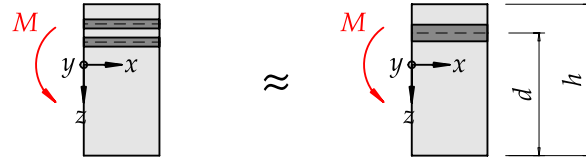


Abbildung 3.17: Vereinfachung der Bewehrungsführung des Plattenstreifens

Die Parameter aus der Tabelle 3.2 finden Einfluss in die Berechnungen. Neben den Parametern wird das Stoffgesetz für den Betonstahl in Abbildung 3.18 hinterlegt. Das bilineare, bzw. linear-elastisch linear-plastische Spannungs-Dehnungs-Diagramm für den Betonstahl hält den Rechenaufwand klein und liefert eine ausreichende Genauigkeit.

Tabelle 3.2: Berechnungsparameter Momenten-Krümmungs-Beziehung

Parameter	
$E_s = \frac{200000.0\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\phi_s = 12.0\text{mm}$
$c_{nom} = 20.0\text{mm}$	$f_{cc} = \frac{58.8\text{N}}{\text{mm}^2}$
$f_{su} = \frac{630.3\text{N}}{\text{mm}^2}$	$f_{sy} = \frac{546.0\text{N}}{\text{mm}^2}$
$s_x = 80.0\text{mm}$	$\theta_{c3} = 30.0$
$\varepsilon_{cu} = 0.005$	$\varepsilon_{su} = 0.1117$

Eine Berücksichtigung des verfestigenden Verhaltens ist essentiell, um die Verformungen nach dem Fließen des Betonstahls näherungsweise zu bestimmen. Das Diagramm ist definiert bis zur Bruchdehnung ε_{su} des Stahls. Das Verhalten gilt ebenso im negativen Spannungs-Dehnungs Bereich.

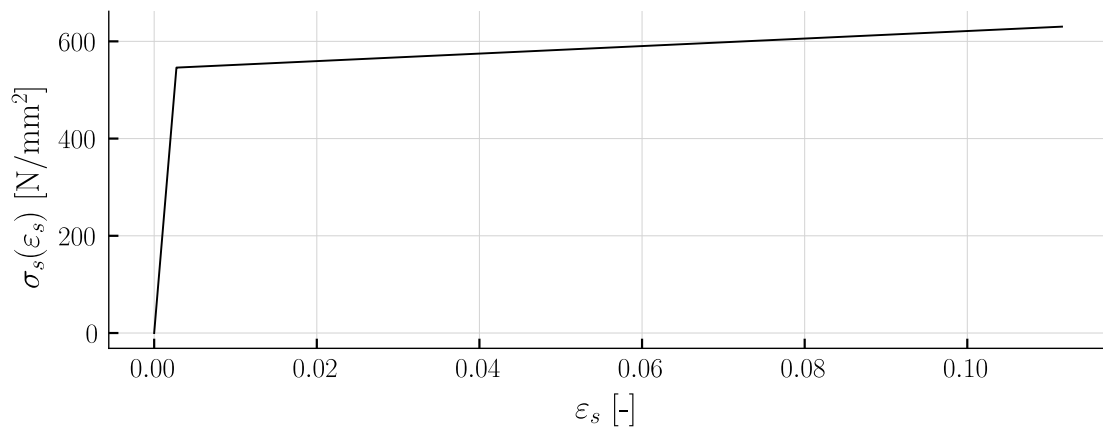


Abbildung 3.18: Linear-elastisches, linear-plastisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Betonstahls

Dem Beton wird die Betonkennlinie, die in Abbildung 3.19 dargestellt ist, hinterlegt. Diese zeigt ein linear-elastisches ideal-plastisches Verhalten. Im positiven Bereich lässt sich die Betonspannung bis zur Betonzugfestigkeit f_{ct} erhöhen, im negativen Spannungsbereich beginnt ein Plastifizieren beim Erreichen der Betondruckfestigkeit f_c . Dies ist bis zur Bruchstauchung ε_{cu} definiert.

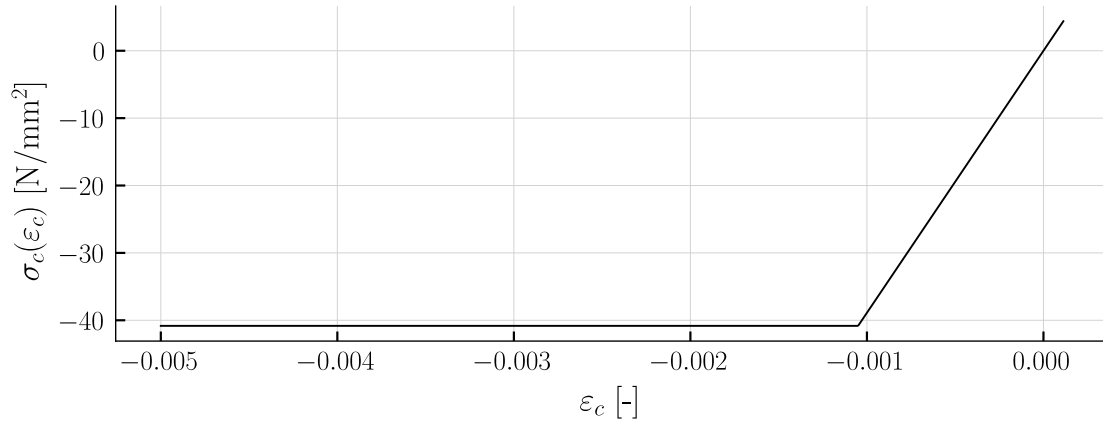


Abbildung 3.19: Linear-elastisches, ideal-plastisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Betons

3.6.1 Querschnittsanalyse

Basierend auf den eben beschriebenen Grundlagen wird folgend eine Querschnittsanalyse durchgeführt. Dabei wird der Querschnitt vor dem Reißen, nach dem Reißen, beim Fließen der Zugbewehrung und beim Versagen untersucht. Durch die Wahl aussagekräftiger Zustände im Querschnitt lässt sich eine nicht-lineare Momenten-Krümmungs-Beziehung mit überschaubarem Rechenaufwand ermitteln.

3.6.1.1 Schwerpunkt des Querschnitts

Zunächst sind die Eigenschaften des Querschnitts zu bestimmen. Die Bestimmung der Wertigkeit n ermöglicht die Betrachtung des Querschnitts als homogenen Betonquerschnitt. Diese findet Einfluss bei der Schwerpunktsbestimmung, sowie bei der Bestimmung des Flächenträgheitsmoments.

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (3.33)$$

$$n = 5.14 \quad (3.34)$$

Mithilfe der Querschnittsfläche der Zugstäbe unter Berücksichtigung der Wertigkeit sowie der Betonquerschnittsfläche, lässt sich eine ideale Querschnittsfläche ermitteln. Die Querschnittsfläche der Zugstäbe ist die folgende:

$$A_s = 2b \frac{\pi \varnothing_s^2}{4s_x} \quad (3.35)$$

$$A_s = 2262.0 \text{mm}^2 \quad (3.36)$$

Die Betonquerschnittsfläche hingegen beträgt:

$$A_c = bh \quad (3.37)$$

$$A_c = 160000.0 \text{mm}^2 \quad (3.38)$$

Und die ideelle Querschnittsfläche resultiert zu:

$$A_i = A_c + A_s (n - 1) \quad (3.39)$$

$$A_i = 169372.0 \text{mm}^2 \quad (3.40)$$

Der vertikale Abstand von der Oberkante zum Schwerpunkt, aufgezeigt in der Abbildung 3.16, beträgt:

$$\zeta_c = \frac{\frac{A_c h}{2} + A_s (1.5 \varnothing_s + c_{nom}) (n - 1)}{A_i} \quad (3.41)$$

$$\zeta_c = 96.6 \text{mm} \quad (3.42)$$

3.6.1.2 Flächenträgheitsmoment

Als weitere Querschnittseigenschaft gilt es das Flächenträgheitsmoment zu berechnen. Dieses wird ebenfalls am ideellen Querschnitt bestimmt. Die Eigenträgheitsmomente der Kreisquerschnitte der Stäbe sind nicht berücksichtigt. Da deren Einfluss vernachlässigbar klein ist. Lediglich der Steiner-Anteil fließt in die Berechnung ein:

$$I^I = A_s (n - 1) \left(\frac{3\varnothing_s}{2} + c_{nom} - \zeta_c \right)^2 + \frac{bh^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} - \zeta_c \right)^2 \quad (3.43)$$

$$I^I = 5.67 \cdot 10^8 \text{mm}^4 \quad (3.44)$$

3.6.1.3 Ungerissen - Zustand 1

Der Zustand 1 betrachtet den Querschnitt unter Biegung vor dem Erreichen der Betonzugfestigkeit. Durch das durchwegs elastische Verhalten kann die Biegesteifigkeit anhand des Elastizitätsmoduls des Betons und des Flächenträgheitsmoments des ideellen Querschnitts bestimmt werden.

$$EI^I = E_c I^I \quad (3.45)$$

$$EI^I = 2.206 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2 \quad (3.46)$$

Zugehörig zum Zustand 1 ist das Rissmoment. Das Rissmoment definiert den Endpunkt des Zustands 1 im Momenten-Krümmungs-Diagramm, sprich beim Erreichen der Zugfestigkeit des Betons. Dabei gilt die Modellierung gemäss Abbildung 3.20. Die Spannung in den Zugstäben wird vernachlässigt.

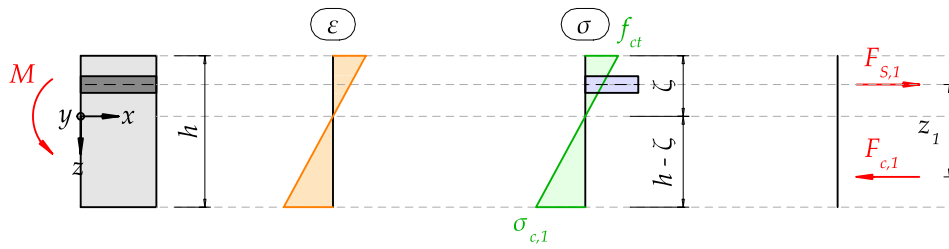


Abbildung 3.20: Querschnittsanalyse vor dem Reißen des Betons

Die Betondruckspannung lässt sich anhand der über die Querschnittshöhe linear verlaufenden Spannung bestimmen.

$$\sigma_{c1} = \frac{f_{ct} (h - \zeta_c)}{\zeta_c} \quad (3.47)$$

$$\sigma_{c1} = \frac{4.86 \text{ N}}{\text{mm}^2} \quad (3.48)$$

Zur Bestimmung des Rissmoments gilt es den Hebelarm der inneren Kräfte zu definieren:

$$z_1 = -1.5 \oslash_s - c_{nom} + \frac{2h}{3} + \frac{\zeta_c}{3} \quad (3.49)$$

$$z_1 = 128.0 \text{ mm} \quad (3.50)$$

Die Betondruckkraft lässt sich anhand der Betondruckspannung und der Betonfläche bestimmen:

$$F_{c,1} = \frac{b\sigma_{c1}(h - \zeta_c)}{2} \quad (3.51)$$

$$F_{c,1} = 201.0\text{kN} \quad (3.52)$$

Und das Rissmoment resultiert schliesslich zu:

$$M_r = F_{c,1}z_1 \quad (3.53)$$

$$M_r = 25.63\text{kNm} \quad (3.54)$$

Unter Berücksichtigung der Biegesteifigkeit lässt sich die Krümmung beim Reißen des Querschnitts bestimmen.

$$\chi_r = \frac{M_r}{EI^I} \quad (3.55)$$

$$\chi_r = \frac{0.00116}{\text{m}} \quad (3.56)$$

3.6.1.4 Gerissen elastisch - Zustand 2

Mit dem Zustand 2 wird darauf abgezielt, den gerissenen Bereich im Momenten-Krümmungs-Diagramm darzustellen. Der Querschnitt nach dem Reißen ist in der Abbildung 3.21 dargestellt. Der Betonstahl hat die Fliessgrenze noch nicht erreicht. Der Beton hat ebenfalls seine Druckfestigkeit noch nicht erreicht.

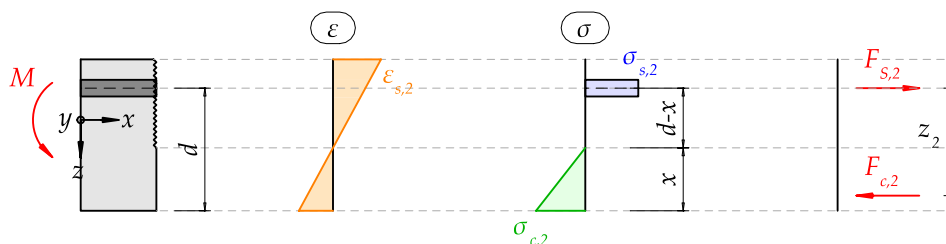


Abbildung 3.21: Querschnittsanalyse nach dem Reißen des Betons

Mittels Gleichgewicht der Kräfte lässt sich die Betondruckzonenhöhe bestimmen. Dazu wird zuerst die Beziehung zwischen der Betonstahlspannung und der Betonstahlkraft dargestellt.

$$F_{s,2} = A_s \sigma_{s2} \quad (3.57)$$

Die Betonstahlspannung für linear elastisches Verhalten folgt zu:

$$\sigma_{s2} = E_s \varepsilon_{s2} \quad (3.58)$$

Die Betondruckkraft anhand des dreieckigen Verlaufs in Abbildung 3.21 beträgt:

$$F_{c,2} = \frac{b \sigma_{c2} x_2}{2} \quad (3.59)$$

Und die Betonspannung, ebenfalls bestimmt durch ein linear elastisches Verhalten, ist definiert durch:

$$\sigma_{c2} = E_c \varepsilon_{c,2} \quad (3.60)$$

Anhand des Dehnungsverlaufs in Abbildung 3.21 lässt sich die Betondehnung bestimmen:

$$\varepsilon_{c,2} = \frac{\varepsilon_{s2} x_2}{d - x_2} \quad (3.61)$$

Werden nun die horizontalen Kräfte gleichgesetzt, dargestellt in der folgenden Beziehung:

$$F_{c,2} = F_{s,2} \quad (3.62)$$

Und mit den bestimmten Gleichungen substituiert, sowie mit n und ρ ersetzt, so folgt:

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (3.63)$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (3.64)$$

$$E_s b d \rho \varepsilon_{s2} = \frac{E_s b \varepsilon_{s2} x_2^2}{2n (d - x_2)} \quad (3.65)$$

Aus welcher abschliessend die Betondruckzonenhöhe ermittelt werden kann:

$$x_2 = d \left(-n\rho + \sqrt{n\rho (n\rho + 2)} \right) \quad (3.66)$$

$$x_2 = 55.6\text{mm} \quad (3.67)$$

Die hergeleiteten Beziehungen gelten für den gesamten gerissenen Bereich. Mit der Wahl eines Biegemoments kann die Betonstahldehnung und die erforderliche Krümmung bestimmt werden. Wird das in Zustand 1 ermittelte Rissmoment angesetzt, so lässt sich der Startpunkt des gerissenen Bereichs im Momenten-Krümmungs-Diagramm bestimmen.

$$M_2 = F_{s,2} \left(d - \frac{x_2}{3} \right) \quad (3.68)$$

$$M_2 = M_r \quad (3.69)$$

$$M_r = A_s E_s \varepsilon_{s2} \left(d - \frac{x_2}{3} \right) \quad (3.70)$$

Daraus resultiert die folgende Betonstahldehnung und die Betonstahlspannung. Die in diesem Zustand ermittelte Betonstahlspannung findet bei der Bestimmung der Rissweiten Einfluss, diese wird dort als Rissspannung angesetzt.

$$\varepsilon_{s2} = 0.000395 \quad (3.71)$$

$$\sigma_{s2} = \frac{79.0\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (3.72)$$

Der Zustand 2 wird mit der Ermittlung der Krümmung und der entsprechenden Biegesteifigkeit abgeschlossen. Die Krümmung kann anhand des Dehnungsverlaufs in Abbildung 3.21 ermittelt werden:

$$\chi^{II} = \frac{\varepsilon_{s2}}{d - x_2} \quad (3.73)$$

$$\chi^{II} = \frac{0.00371}{\text{m}} \quad (3.74)$$

Die gerissene Biegesteifigkeit folgt zu:

$$EI^{II} = \frac{M_2}{\chi^{II}} \quad (3.75)$$

$$EI^{II} = 6903.8\text{kNm}^2 \quad (3.76)$$

Mit dem Rissmoment und der Krümmung aus dem Zustand 2 ist der Anfangspunkt für den gerissenen Zustand im Momenten-Krümmungs-Diagramm definiert.

3.6.1.5 Fließen der Bewehrung - Zustand 3

Der Zustand 3 entspricht dem Zustand 2. Einzig die Stahlspannung erreicht die Fließspannung. Dargestellt ist dies in der Abbildung 3.22 .

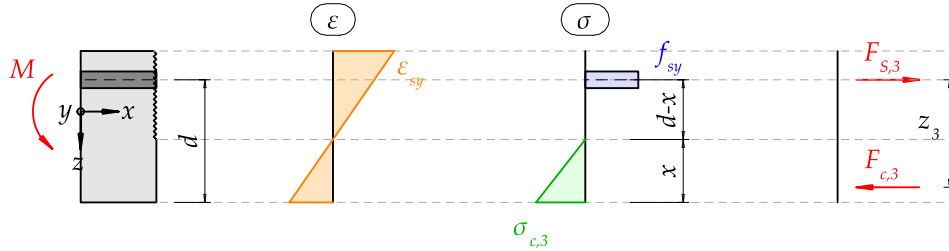


Abbildung 3.22: Querschnittsanalyse mit erreichter Fließspannung im Stab

Durch das Gleichgewicht der horizontalen Kräfte folgen die Beziehungen:

$$\sigma_{c3} = \frac{E_c f_{sy} x_3}{E_s (d - x_3)} \quad (3.77)$$

$$A_s f_{sy} = \frac{b \sigma_{c3} x_3}{2} \quad (3.78)$$

Welche durch das Auflösen die Druckzonenhöhe des Zustands 2 ergibt.

$$x_3 = \frac{-A_s E_s + \sqrt{A_s E_s (A_s E_s + 2 E_c b d)}}{E_c b} \quad (3.79)$$

$$x_3 = 55.6 \text{ mm} \quad (3.80)$$

Daraus lässt sich das Fließmoment bestimmen, welches den Endpunkt im Momenten-Krümmungs-Diagramm für den gerissenen Zustand definiert:

$$M_y = A_s f_{sy} \left(d - \frac{x_3}{3} \right) \quad (3.81)$$

$$M_y = 177.2 \text{ kNm} \quad (3.82)$$

Abschliessend lässt sich die Krümmung für den Zustand 3 bestimmen.

$$\chi_y = \frac{\varepsilon_{sy}}{d - x_3} \quad (3.83)$$

$$\chi_y = \frac{0.0257}{\text{m}} \quad (3.84)$$

3.6.1.6 Biege widerstand - Zustand 4

Der Biege widerstand des Querschnitts kann durch die Plastifizierung der Betondruckzone bestimmt werden. Vereinfacht wird dem Betonstahl die statische Zugfestigkeit vorausgesetzt, um das verfestigende Verhalten annähernd abzubilden.

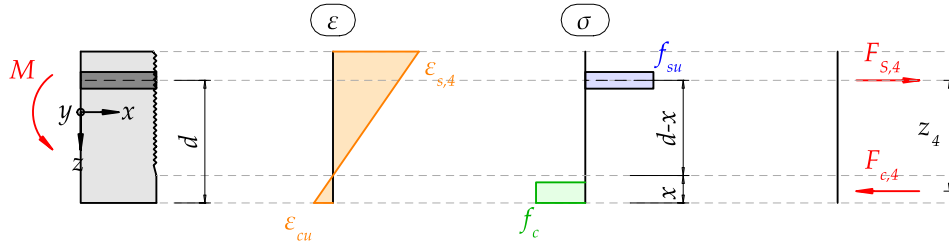


Abbildung 3.23: Querschnittsanalyse mit erreichter Zugfestigkeit im Stab und plastifizierter Betondruckzone

Der Verlauf der Betonspannung wird mit einem rechteckigen Spannungsblock idealisiert. Dazu wird die Druckzonenhöhe um den Faktor 0.85 reduziert. Aus dem Gleichgewicht der horizontalen Kräfte folgt:

$$A_s f_{su} = 0.85 b f_c x_4 \quad (3.85)$$

Aus welcher sich die Druckzonenhöhe bestimmen lässt:

$$x_4 = 51.4 \text{ mm} \quad (3.86)$$

Die Druckzonenhöhe definiert den Hebelarm der inneren Kräfte:

$$z_4 = d - 0.425 x_4 \quad (3.87)$$

$$z_4 = 140.0 \text{ mm} \quad (3.88)$$

Welche den Biege widerstand definiert:

$$M_R = A_s f_{su} z_4 \quad (3.89)$$

$$M_R = 199.8 \text{ kNm} \quad (3.90)$$

Abschliessend gilt es die Krümmung und die Biegesteifigkeit zu berechnen, sowie zu kontrollieren ob die Stahldehnung die Bruchdehnung erreicht hat, bzw. nicht überschritten hat. Die Krümmung lässt sich anhand der Betonstauchung ermitteln:

$$\chi_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{x_4} \quad (3.91)$$

$$\chi_u = \frac{0.0974}{\text{m}} \quad (3.92)$$

Die Biegesteifigkeit im Bereich 3 beträgt:

$$EI^{III} = \frac{M_R}{\chi_u} \quad (3.93)$$

$$EI^{III} = 2.05 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2 \quad (3.94)$$

Die Betonstahldehnung lässt sich anhand des linearen Dehnungsverlaufs und der Betonstauchung bestimmen:

$$\varepsilon_{s4} = \frac{\varepsilon_{cu} (d - x_4)}{x_4} \quad (3.95)$$

$$\varepsilon_{s4} = 0.0108 \quad (3.96)$$

Die Bruchdehnung des Stahls wird nicht erreicht. Der Querschnitt versagt im Druckbereich. Die Annahme, dem Betonstahl die statische Zugfestigkeit zu Grunde zu legen ist grundsätzlich nicht gerechtfertigt. Der Vergleich mit den Versuchsergebnissen zeigt jedoch, dass sich diese Annahme bewährt.

$$\varepsilon_{su} = 0.1117 \quad (3.97)$$

3.6.1.7 Momenten-Krümmungs-Diagramm

Folgend ist die Querschnittsanalyse in einem Momenten-Krümmungs-Diagramm, aufgezeigt in der Abbildung 3.24, zusammengefasst. Die punktuellen Bestimmungen der Krümmung und deren entsprechenden Biegemomente aus der Querschnittsanalyse sind miteinander linear verbunden. Die nicht-lineare Beziehung zwischen Moment und Krümmung ist erkennbar.

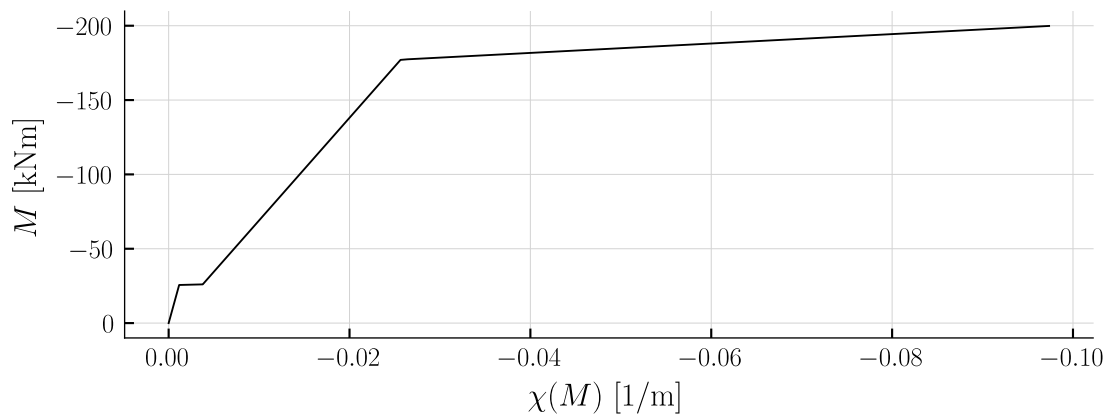


Abbildung 3.24: Momenten-Krümmungs-Diagramm, definiert durch die Querschnittsanalyse

Die erste Steigung im Diagramm beschreibt den ungerissenen Zustand 1. Dieser hat die Neigung von EI^I . Darauf folgt eine schlagartige Erhöhung der Krümmung ohne Steigerung des Moments. Dies entspricht dem Übergang vom gerissenen zum ungerissenen Zustand 2. Dabei steigt der Verlauf mit der Neigung EI^{II} bis zum Fließen der Bewehrung (Zustand 3). Ab diesem Punkt erfolgt ein verfestigendes Verhalten des Betonstahls und ein Plastifizieren der Betondruckzone bis zum Erreichen des Biegewiderstands (Zustand 4).

3.6.1.8 Zustandslinien der Krümmung

Die Momenten-Krümmungs-Beziehung wird nun zur Bestimmung des Krümmungsverlaufs verwendet. Der Biegemomentenverlauf $M(x)$, als Eingabe in die Funktion der Krümmung $\chi(M)$, führt zu den Zustandslinien der Krümmung in Abbildung 3.25. Dargestellt ist der Krümmungsverlauf exemplarisch für die Zustandslinien der Biegemomente aus der Abbildung 3.9.

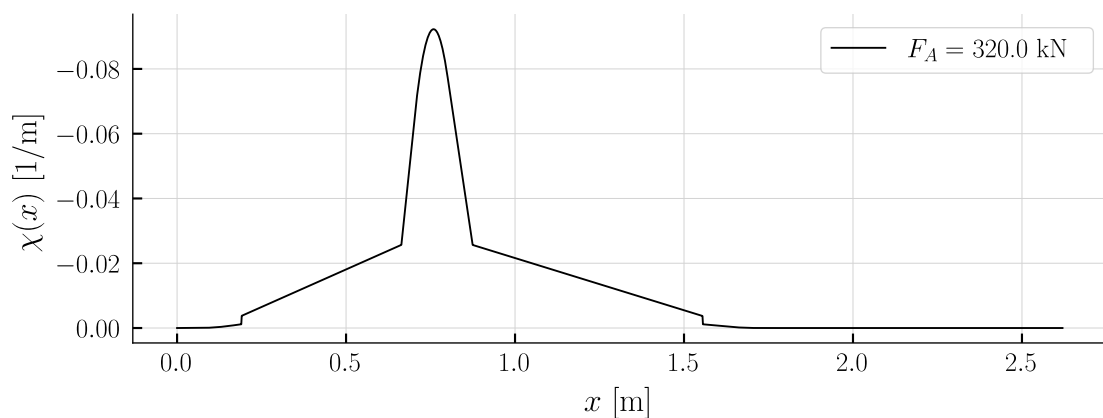


Abbildung 3.25: Krümmungsverlauf entlang der Stabachse

Über dem Auflager C ist für die dargestellte Laststufe der Biegewiderstand erreicht. Man befindet sich im Endbereich der Momenten-Krümmungs-Beziehung. Ebenfalls ersichtlich ist der sprunghafte Übergang zwischen dem ungerissenen und dem gerissenen Bereich.

3.6.1.9 Punktueller Bestimmung der Verformung

Unter Anwendung der Arbeitsgleichung kann die Verformung nach Gleichung 2.16 bestimmt werden. Die Position der fiktiven Einwirkung entspricht der Position der berechneten Verformung. Folglich ist an der Stelle $x = 0.11$ eine Einzellast $\bar{F} = 1$ angesetzt, was zum virtuellen Biegemomentenverlauf in der Abbildung 3.26 führt.

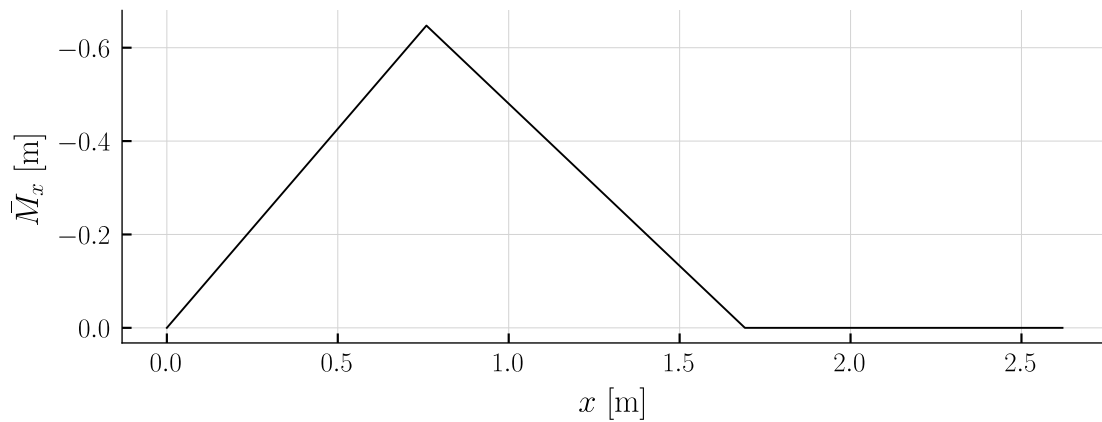


Abbildung 3.26: Biegemomentenverlauf für den virtuellen Kräftezustand

Für die maximale Last beträgt die Deformation an der Stelle w_1 beispielsweise:

$$w_1 = 15.3\text{mm} \quad (3.98)$$

3.6.2 Zugversteifung

Folgend wird die Modellbildung nach Marti aus dem Kapitel 2.4 angewendet. Die bisherige Betrachtung beschränkt sich auf einen schlagartigen Wechsel von ungerissen zu vollständig gerissen. Dabei wird der Bereich zwischen den Rissen ebenfalls als gerissen angenommen. Mittels der Zugversteifung wird ein theoretischer Rissabstand ermittelt und zwischen den Rissen eine versteifte Wirkung zwischen Betonstahl und Beton angenommen (Verbundwirkung). Die Krümmungsdifferenz beträgt:

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \frac{f_{ct}(1 - \rho_{eff})}{E_s \rho_{eff}(d - x_2)} \quad (3.99)$$

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{0.00131\lambda}{m} \quad (3.100)$$

Der mechanische Bewehrungsgehalt beschreibt sich zu:

$$\rho_{eff} = \frac{1}{-n + 1 + \frac{E_s M_r (d-x_2)}{EI^H f_{ct}}} \quad (3.101)$$

$$\rho_{eff} = 0.0753 \quad (3.102)$$

Eine Abschätzung des Rissabstands ist folgend gezeigt. Dabei sind die Resultate für $\lambda = 1$ und $\lambda = 0.5$ berechnet.

$$s_{rm} = \frac{\oslash_s \lambda (1 - \rho_{eff})}{4\rho_{eff}} \quad (3.103)$$

$$s_{rm} = 36.8\text{mm} \quad (3.104)$$

$$s_{rm} = 18.4\text{mm} \quad (3.105)$$

Die Rissbreite ist abhängig von der Betonstahlspannung. Da vor dem Reißen des Betons keine Risse vorhanden sind, darf die Rissspannung von der Betonstahlspannung subtrahiert werden. Die Rissspannung lässt sich anhand der Betonstahlkraft aus dem Zustand 2 bestimmen.

$$\sigma_{sr0} = \frac{F_{s,2}}{A_s} \quad (3.106)$$

Die Bestimmung der Rissbreite ist folgend gezeigt. Für die Stahlspannung wird die Fließspannung eingesetzt. Die Variation des Parameters $\lambda = 1; 0.5$ gilt hier ebenfalls.

$$w_r = \frac{s_{rm} (-\lambda \sigma_{sr0} + 2\sigma_{sr})}{2E_s} \quad (3.107)$$

$$w_r = 0.0933\text{mm} \quad (3.108)$$

$$w_r = 0.0485\text{mm} \quad (3.109)$$

Die Resultate sind vergleichbar mit den gemessenen Rissbreiten der Laststufe 12, die in [1] dargestellt sind. Diese liegen in einem Wertebereich von 0.15 mm bis 0.3 mm. Die Rissweiten werden folglich unterschätzt.

Der Einfluss der Zugversteifung lässt sich direkt im Momenten-Krümmungs-Diagramm darstellen. Unter Berücksichtigung der beiden λ -Grenzwerte ist der Einfluss der Zugversteifung in Abbildung 3.27 gezeigt.

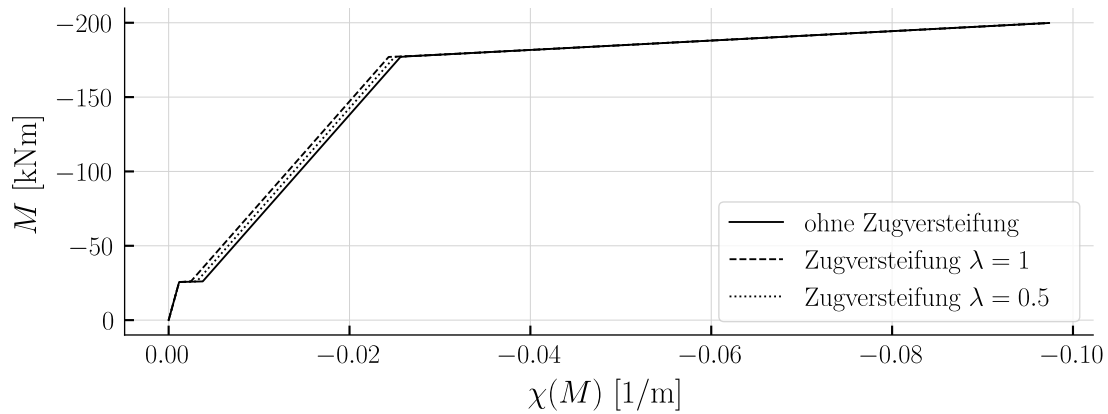


Abbildung 3.27: Momenten-Krümmungs-Diagramm mit Zugversteifung

Es zeigt sich ein steiferes Verhalten im gerissenen Bereich. Der Einfluss ist relativ gering.

3.7 Fachwerksanalyse

Abschliessend wird das Modell aus dem Kapitel 2.6 auf den Versuch angewendet. Die bisherigen Analysen beschränken sich auf eine Querschnittsbetrachtung. Der Kraftfluss lässt sich mit einem Spannungsfeld detaillierter verfolgen. Eine Einteilung in Parallelfelder und nicht-zentrierte Fächer ist in Abbildung 3.28 gezeigt.

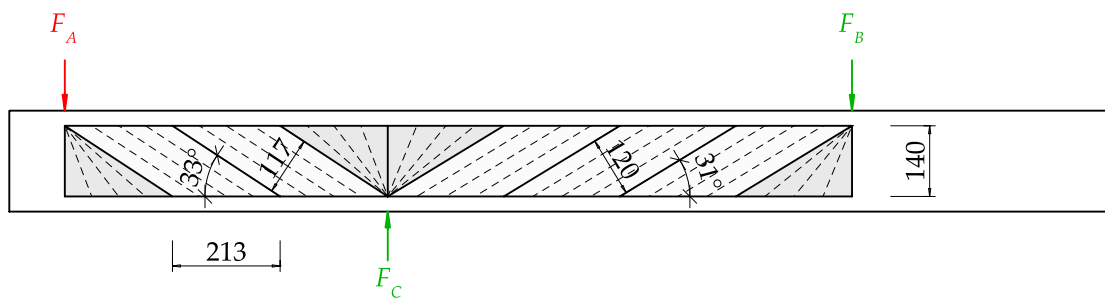


Abbildung 3.28: Plattenstreifen mit Spannungsfeldern entsprechend dem Kraftfluss

Der Neigungswinkel der Betondruckstrebe wird in Anlehnung an die Gleichung 2.17 zur Bestimmung des Querkraftwiderstands von vertikaler Schubbewehrung, gemäss Ziffer 4.3.3.4.3 [6], bestimmt. Dabei wird die Querschnittsfläche der Schubbewehrung bestimmt.

$$A_{sw} = 197.9 \text{ mm}^2 \quad (3.110)$$

Der Hebelarm der inneren Kräfte des Zustands 4 wird angesetzt.

$$z_4 = 140.0 \text{ mm} \quad (3.111)$$

Die Fließspannung wird mit der Zugfestigkeit f_{su} substituiert. Dies gewährleistet, dass die Schubbewehrung den elastischen Bereich verlässt. Der Querkraftwiderstand wird mit der maximal im System auftretenden Querkraft ersetzt. Abschliessend gilt $\alpha = \theta_{c3}$. Dies führt zu folgendem Neigungswinkel:

$$\theta_{c3,min} = \text{acot} \left(\frac{V_{R,s} s_w}{A_{sw} f_{su} z_4} \right) \quad (3.112)$$

$$\theta_{c3,min} = 0.599 \quad (3.113)$$

$$\theta_{c3,min} = 34.3^\circ \quad (3.114)$$

Der gewählte Neigungswinkel der Felder in der Abbildung 3.28 orientiert sich an dem berechneten Winkel. Ausserdem wurde darauf geachtet, dass alle Felder parallel zueinander angeordnet sind.

Durch das Zusammenfassen der Felder zu Stäben resultiert das Fachwerk in Abbildung 3.29. Um aus dem Fachwerkmodell zutreffende Verformungen zu ermitteln, gilt es den Pendelstäben passende Dehnsteifigkeiten zuzuordnen.

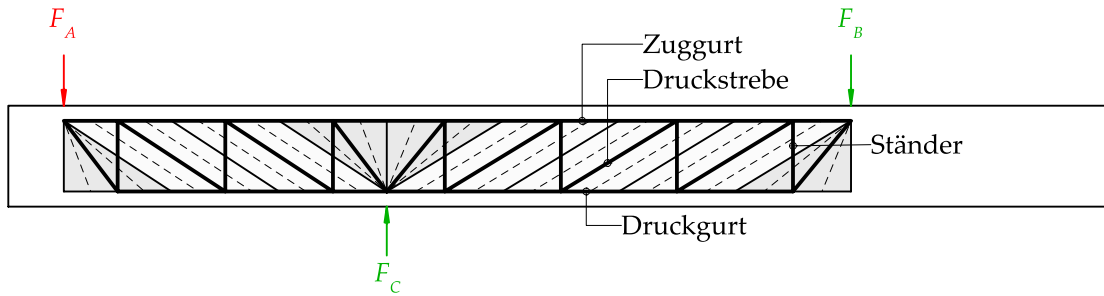


Abbildung 3.29: Plattenstreifen mit Fachwerk durch das Zusammenfassen der Spannungsfelder

Dem Zuggurt ist die Spannungs-Dehnungs-Beziehung gemäss Abbildung 3.18 hinterlegt, sowie entspricht die Querschnittsfläche jener der Zugbewehrung.

Die Querschnittsfläche des Druckgurts entspricht der Höhe des plastischen Spannungsbereichs des Zustands 4 multipliziert mit der Plattenstreifenbreite. Diese wird

als konstant über sämtliche Stäbe des Druckgurtes angenommen. Des Weiteren ist die Spannungs-Dehnungs-Beziehung gemäss Abbildung 3.19 angewendet.

Die Querschnittsfläche der Druckstreben entspricht der Streifenbreite multipliziert mit der Parallelfeldbreite, gezeigt in Abbildung 3.28. Für die Diagonalen der nicht zentrierten Fächer ist vereinfacht die gleiche Querschnittsfläche hinterlegt. Dazu gilt die Spannungs-Dehnungs-Beziehung gemäss Abbildung 3.19.

Die Ständer bilden die Schubbewehrung ab. Die Querschnittsfläche resultiert aus der Anzahl an Schubdübeln im entsprechenden Spannungsfeld. Es gilt die Spannungs-Dehnungs-Beziehung gemäss Abbildung 3.18. Die Abbildung 3.30 zeigt, dass pro Ständer drei Schubdübel umfasst sind.

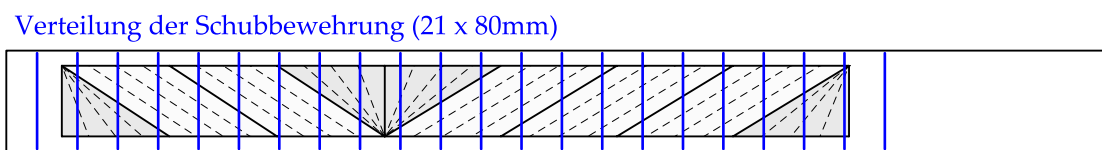


Abbildung 3.30: Plattenstreifen mit dargestellter Schubbewehrung und Spannungsfeldern

Mit der definierten Geometrie und den entsprechenden Steifigkeiten resultieren die Verformungen für die Maximallast zu 175.2 mm, aufgezeigt in der Abbildung 3.31.

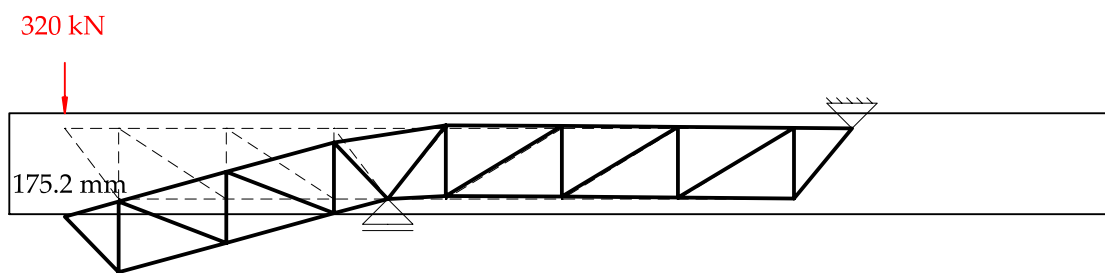


Abbildung 3.31: Plattenstreifen mit verformten Fachwerk

3.8 Modellvergleich

Abgeschlossen wird die Analyse des Dreipunktbiegeversuchs mit einer Gegenüberstellung der angewendeten Methoden. Der Fokus liegt auf dem Vergleich der experimentell ermittelten Verformungen und den Verformungen aus den Modellen.

3.8.1 Krümmung

Der Modellvergleich wird bei der Beschreibung der Krümmung der unterschiedlichen Modelle gestartet. Aus dem Vergleich der Momenten-Krümmungs-Beziehung, dargestellt in Abbildung 3.32, lassen sich die Biegesteifigkeiten herauslesen.

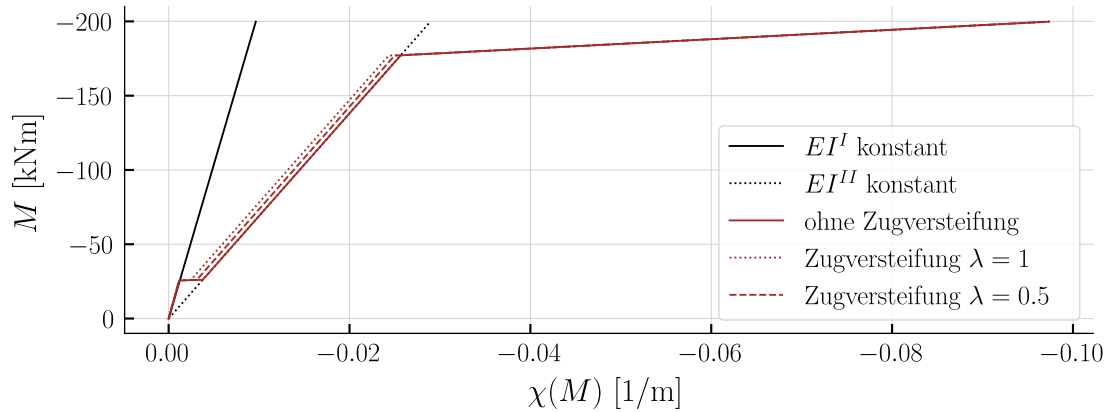


Abbildung 3.32: Momenten-Krümmungs-Diagramm zum Vergleich der unterschiedlichen Modelle

Die Unterschiede des Detaillierungsgrad der Beziehung zwischen den Modellen ist deutlich erkennbar. Ebenso ersichtlich ist der geringe Einfluss der Zugversteifung auf die Biegesteifigkeit.

Die Abbildung 3.33 zeigt den Krümmungsverlauf für den Biegemomentenverlauf aus Abbildung 3.9. Ausgehend davon, dass die nicht-lineare Momenten-Krümmungs-Beziehung den effektiven Krümmungsverlauf präzise abbilden kann, zeigen die konstanten Biegesteifigkeiten deutliche Abweichungen. Der Fließbereich über dem Auflager *C* kann nicht abgebildet werden. Des Weiteren zeigt sich ein ausgeprägter gerissener Bereich, welcher mit der konstanten ungerissenen Biegesteifigkeit als deutlich zu steif eingeschätzt wird.

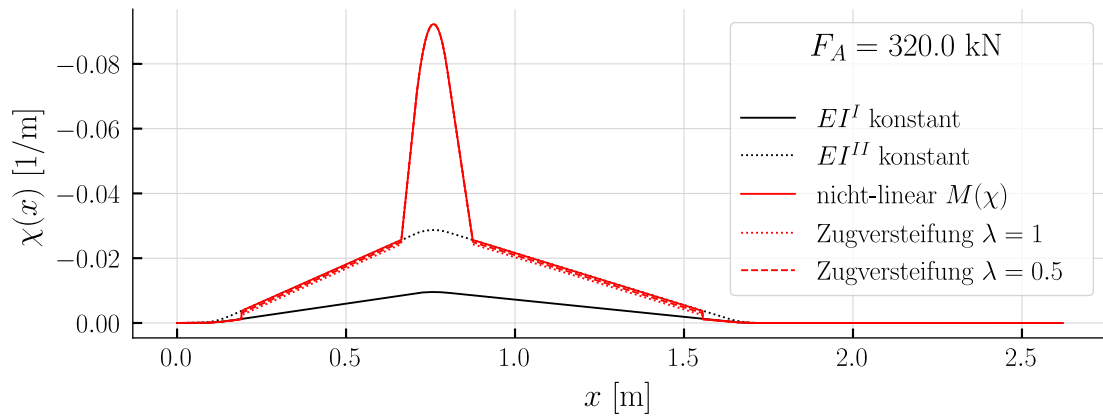


Abbildung 3.33: Krümmungsverlauf, mit unterschiedlichen Modellen ohne Versatzmass

Das analoge Vorgehen gilt für den Biegemomentenverlauf mit dem Versatzmass aus Abbildung 3.10. Dargestellt ist der Krümmungsverlauf für diesen in Abbildung 3.34.

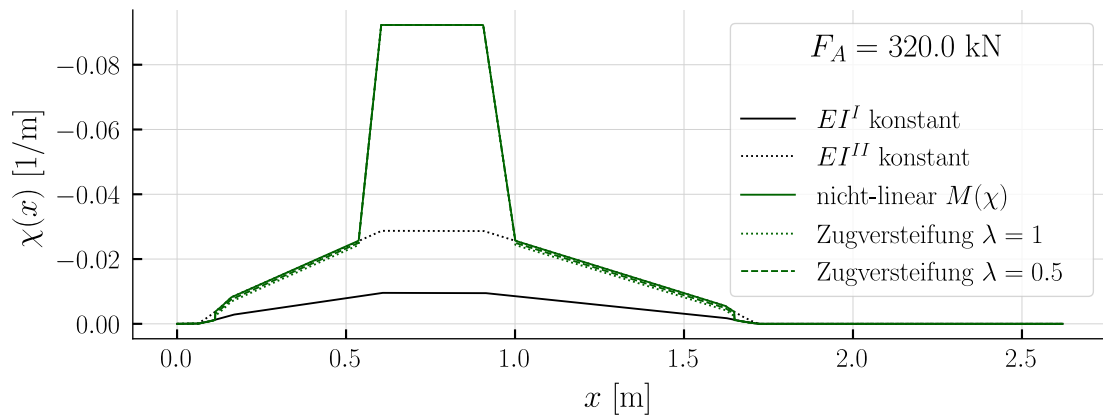


Abbildung 3.34: Krümmungsverlauf, mit unterschiedlichen Modellen mit Versatzmass

Die Schwächen der konstanten Biegesteifigkeiten zeigen sich hier ebenfalls. Auffallend dabei ist der deutlich breitere Fließbereich aus der nicht-linearen Momenten-Krümmungs-Beziehung. Die Verformung resultiert, wie in Gleichung 2.16 beschrieben, aus der Integration des Krümmungsverlaufs. Folglich hat die Verbreiterung im Fließbereich einen signifikanten Einfluss auf die Verformung.

3.8.2 Verformung

Ein direkter Vergleich der Verformungen mit den gemessenen Versuchsergebnissen ermöglicht die Erstellung von Last-Verformungs-Diagrammen. Dazu sind für die beschriebenen Modelle die Verformungen für sämtliche Laststufen bestimmt worden. In Abbildung 3.35 und Abbildung 3.36 sind diese für die Biegemomentenverläufe aus

der Abbildung 3.9 und der Abbildung 3.10 gezeigt. Welche sich in der Berücksichtigung des Versatzmasses unterscheiden. Die Verformung ist an der Stelle w_1 gemessen, dargestellt ist die Position in der Abbildung 3.6.

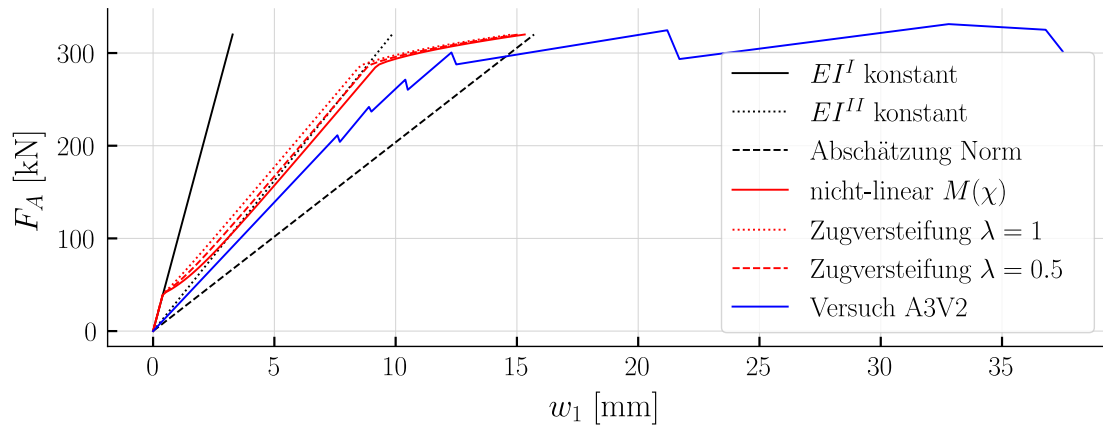


Abbildung 3.35: Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle w_1 ohne Versatzmass

Es zeigt sich, dass mit einer konstanten ungerissenen Biegesteifigkeit die Verformungen nicht zufriedenstellend abbildbar sind. Bereits im gerissenen Bereich zeigen sich deutliche Abweichungen zu den Versuchsmessungen. Die Abweichungen sind für sämtliche Laststufen deutlich. Mit einer konstanten gerissenen Biegesteifigkeit nähert man sich den Versuchsergebnissen an. Die Differenzen zu den Versuchsmessungen steigen mit steigender Laststufe. Dies ist auf die fehlende Modellierung des Fließbereichs zurückzuführen. Zudem werden die Verformungen für sämtliche Laststufen leicht unterschätzt. Die Darstellung der Normabschätzung zeigt eine konservative Abschätzung der Verformungen. Die Verformungen werden für sämtliche Laststufen bis zum Erreichen des Fließbereichs überschätzt. Bei der Berücksichtigung der nicht-linearen Momenten-Krümmungs-Beziehung (in rot dargestellt), lässt sich das Verformungsverhalten des Versuchs annähernd abbilden. Das Modell bildet ein zu steifes Verhalten ab. Die Zugversteifung wirkt der Modellgenauigkeit entgegen. Sowie zeigen sich deutliche Abweichungen im Bereich der Traglast.

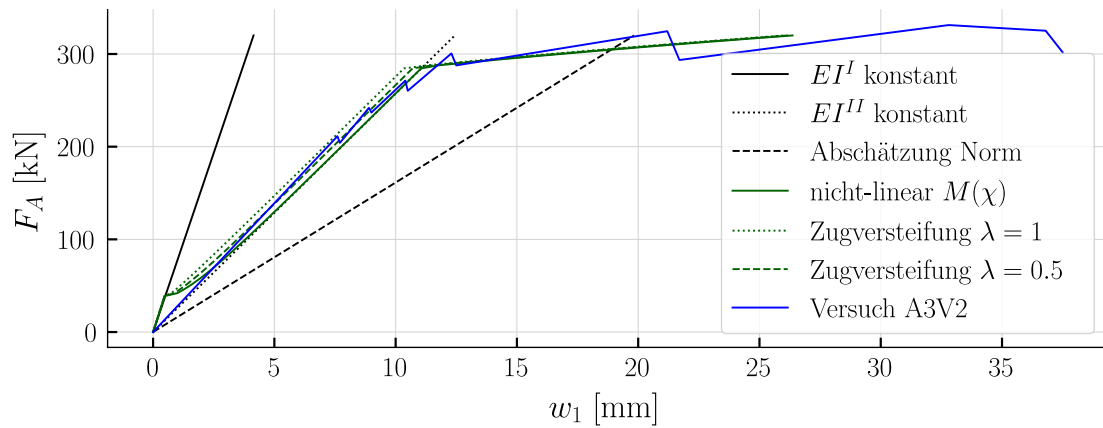


Abbildung 3.36: Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle w_1 mit Versatzmass

Die Abbildung 3.36 zeigt sämtliche Berechnungsmethoden unter Berücksichtigung der Längszugkraft aus der Querkraft, sprich dem Versatzmass. Die konstante Biegesteifigkeiten zeigen die gleichen Mängel wie bei einer Nichtberücksichtigung des Versatzmass. Ebenfalls zeigt die Normabschätzung eine deutliche Überschätzung der Verformungen bis zum Erreichen der Fließgrenze im Betonstahl. Die Verformungen mittels der nicht-linearen Momenten-Krümmungs-Beziehung zeigen eine präzise Übereinstimmung mit den Versuchsmessungen. Einzig unter der Höchstlast ist eine Abweichung vorhanden. Das Ergebnis ist jedoch vollumfänglich zufriedenstellend. Abschliessend lässt sich festhalten, dass die Berücksichtigung des Versatzmass zu einem weicherem Systemverhalten führt.

Folgend sind die Verformungen aus dem Fachwerkmodell dargestellt. Durch die Aufteilung der Traganteile in die einzelnen Fachwerkstäbe lassen sich Verformungsanteile aus der Schubbewehrung, der Gurte und der Betondruckstreben gesondert ermitteln. Beispielsweise lässt sich der Anteil der Schubbewehrung durch das Setzen der Steifigkeit der übrigen Stäbe auf ein infinit grosses Mass bestimmen. Dargestellt ist dies in Abbildung 3.37.

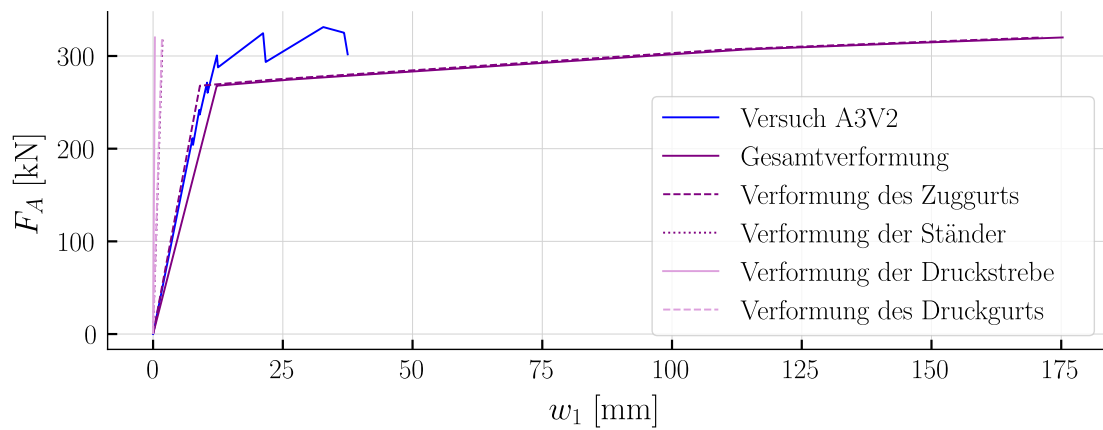


Abbildung 3.37: Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle w_1 mit Fachwerksmodell, Fachwerkshöhe von 140 mm

Das Fachwerkmodell beschreibt den Verlauf bis zum Fließpunkt der Zugbewehrung ausreichend präzise. Die maximale Verformung jedoch, die mit der rechnerisch ermittelten Höhe, sprich dem Hebelarm der inneren Kräfte aus der Querschnittsanalyse, erzielt wird, überschreitet das Ziel bei Weitem. Des Weiteren zeigt sich, dass die Verformung primär aus dem Zuggurt resultiert. Die Schubbewehrung, Druckstrebe und der Druckgurt haben einen vernachlässigbaren Einfluss.

Das Fachwerkmodell reagiert äusserst sensibel auf die gewählte Höhe. Basierend auf dieser Tatsache ist in Abbildung 3.38 der Verformungsverlauf mit der Anpassung der Fachwerkshöhe auf 160 mm gezeigt. Diese wurde nicht rechnerisch ermittelt, bzw. wurde diese mittels Iteration bis zum Erreichen des passenden Verlaufs bestimmt.

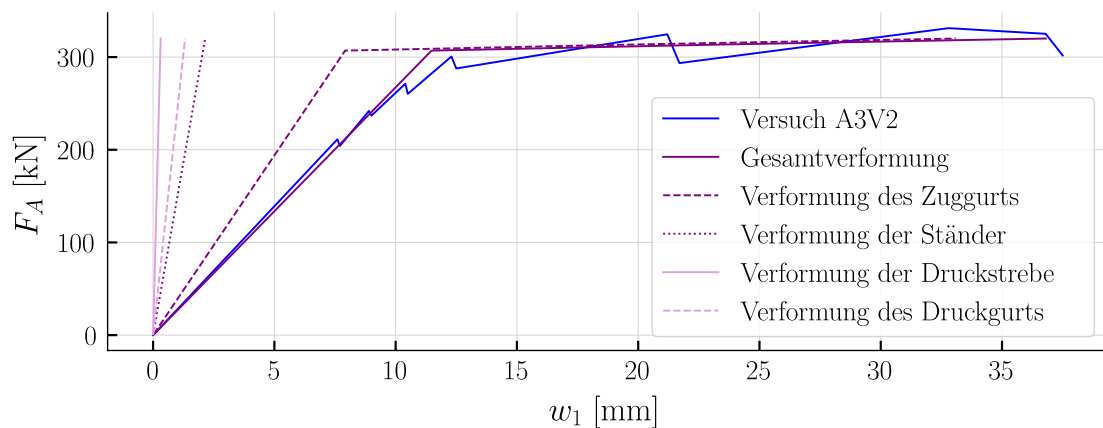


Abbildung 3.38: Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle w_1 mit Fachwerksmodell, Fachwerkshöhe von 160 mm

Das Modell mit der angepassten Höhe beschreibt den Verformungsverlauf vollumfänglich präzise. Die Verformungsanteile aus der Schubbewehrung, dem Druckgurt und der Druckstrebe sind auch hier nicht signifikant.

4 Vierpunktbiegeversuch

Dieses Kapitel zeigt alle in Kapitel 2 aufgezeigten Modelle, angewendet auf einen Vierpunktbiegeversuch. Das Vorgehen ist in grossen Teilen analog dem Berechnungsvorgehen aus dem Kapitel 3. Es wird das Ziel verfolgt, die Anwendbarkeit des Berechnungsapparats an einem weiteren Versuch zu verifizieren, bzw. die Differenzen zwischen den mit den verschiedenen Modellen berechneten Verformungen und den gemessenen Verformungen aufzuzeigen.

4.1 Versuchsbeschreibung

Entnommen ist der Versuch SV14 aus [2]. Es handelt sich um einen Vierpunktbiegeversuch. Es wird das Verhalten in Feldmitte analysiert. Im Zugbereich sind Bewehrungsstäbe mit hochfestem Stahl verlegt. Die Schubbewehrung ist minimal gehalten, sowie unterscheidet sich die Teilung im linken und rechten Bereich des Balkens. Die Bewehrung ist stets orthogonal oder parallel zu den Bauteilkanten verlegt. Dargestellt ist dies in Abbildung 4.1.

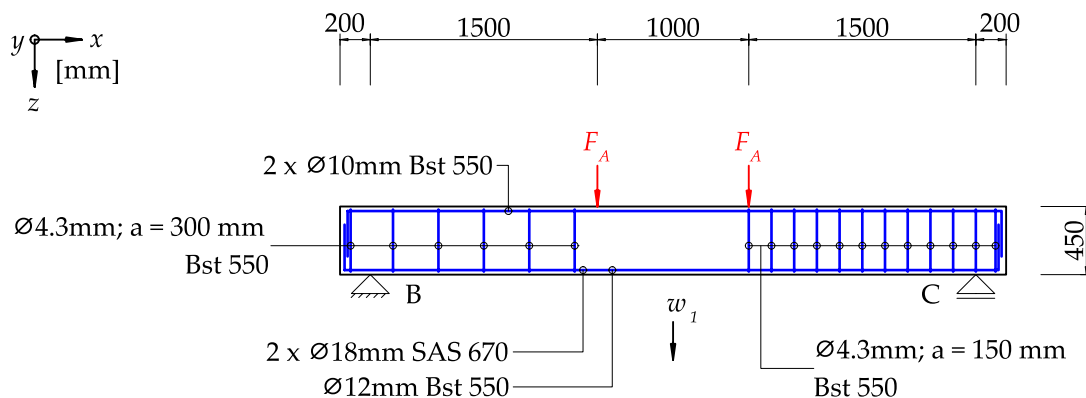


Abbildung 4.1: Lagerung und Belastung des Balkens, nachgezeichnet nach [2]

Das statische System entspricht einem einfachen Balken. Die Last wird an beiden Angriffspunkten zeit- und betragsgleich eingeleitet. Gemäss den Versuchsdaten tritt ein Biegeversagen bei einer Laststufe von 105 kN ein.



4.2 Eigenschaften der Baustoffe

$$f_c = 2.7 f_{cc}^{\frac{2}{3}} \quad (4.1)$$

Die Zugfestigkeit berechnet mittels der Gleichung nach [9] folgt zu:

$$f_{ct} = 0.3 f_{cc}^{\frac{2}{3}} \quad (4.3)$$

Die Abschätzung für den Elastizitätsmodul nach [9] resultiert zu:

57

$$E_c = \frac{36011.0\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (4.6)$$

4.3 Reiner Biegeträger

Die beschriebenen Beziehungen aus dem Kapitel 2.1 sind folgend auf den Versuch angewendet. Es sind Auflagerkräfte, sowie elastische Zustandslinien der Schnittkräfte dargestellt. Als Grundlage dient das statischen System in der Abbildung 4.3.

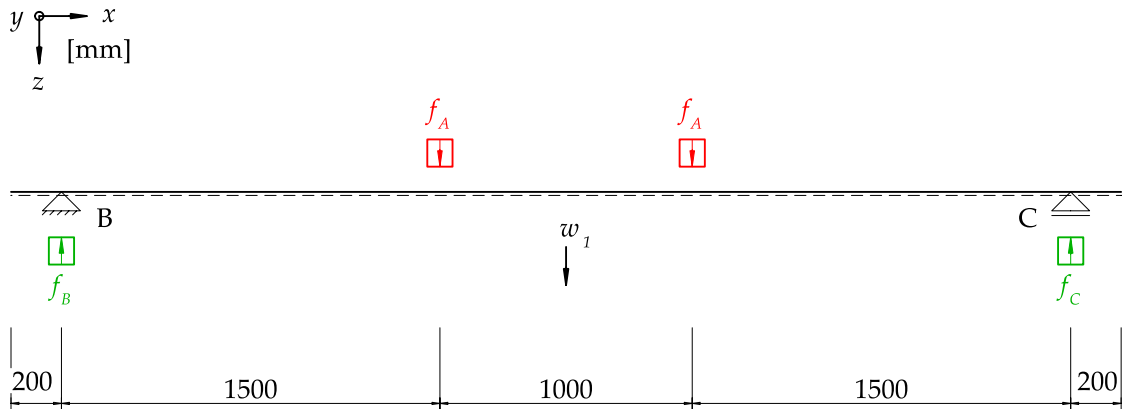


Abbildung 4.3: Statisches System des Balkens mit berücksichtigter Auflagerbreite

Tabelle 4.1: Berechnungsparameter der Systemgeometrie

Parameter	
$a_1 = 0.2\text{m}$	$a_2 = 1.5\text{m}$
$a_3 = 1.0\text{m}$	$a_4 = 1.5\text{m}$
$a_5 = 0.2\text{m}$	$b = 170.0\text{mm}$
$b_{\text{Auflager}} = 100\text{mm}$	$h = 450.0\text{mm}$

4.3.1 Auflagerkräfte

Die Auflagerkräfte lassen sich anhand der Gleichgewichtsbeziehungen am statisch bestimmten System ermitteln. Die Bestimmung derer ist für den einfachen Balken trivial und entsprechen im Betrag den angreifenden Kräften. In Anlehnung an das Vorgehen beim Dreipunktbiegeversuch im Kapitel 3 ist folgend eine Ermittlung durch die Gleichgewichtsbeziehungen gezeigt. Dazu wird zuerst die Gesamtlänge des Balkens berechnet. Dies dient als Kontrollgröße.

$$l_{\text{tot}} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \quad (4.7)$$

$$l_{tot} = 4.4\text{m} \quad (4.8)$$

Mittels dem Gleichgewicht der Momente um die Auflagerpunkte C und B folgen die Beziehungen zwischen den Einwirkungen und den Reaktionskräften:

$$0 = -F_A a_2 - F_A (a_2 + a_3) - F_C (a_2 + a_3 + a_4) \quad (4.9)$$

$$0 = F_A a_4 + F_A (a_3 + a_4) - F_B (a_2 + a_3 + a_4) \quad (4.10)$$

Werden diese nach den Reaktionskräften aufgelöst, folgen die Beziehungen:

$$F_B = \frac{F_A a_3 + 2F_A a_4}{a_2 + a_3 + a_4} \quad (4.11)$$

$$F_C = \frac{-2F_A a_2 - F_A a_3}{a_2 + a_3 + a_4} \quad (4.12)$$

Die Reaktionskräfte dividiert durch die Auflagerbreite resultieren zu den folgenden Streckenlasten, bzw. Reaktionen:

$$f_B = \frac{F_A a_3 + 2F_A a_4}{b_{Auflager} (a_2 + a_3 + a_4)} \quad (4.13)$$

$$f_C = \frac{-2F_A a_2 - F_A a_3}{b_{Auflager} (a_2 + a_3 + a_4)} \quad (4.14)$$

$$f_A = \frac{F_A}{b_{Auflager}} \quad (4.15)$$

4.3.2 Zustandslinien

Folgend wird anhand der Einwirkung die Zustandslinien der Schnittkräfte bestimmt. Dabei ist zu beachten, dass die Zustandslinien lediglich für die maximal gewählte Laststufe gelten. Der Verlauf der Einwirkungen ist in Abbildung 4.4 aufgezeigt.

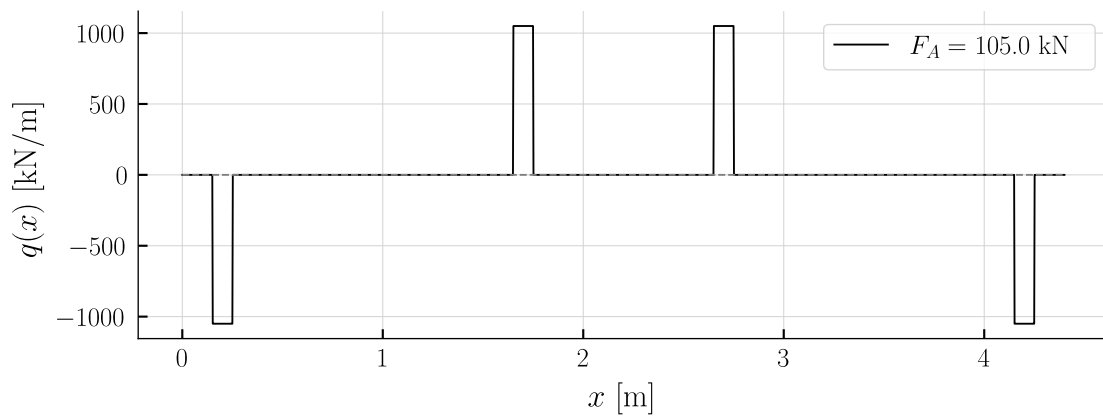


Abbildung 4.4: Verlauf der Einwirkungen

Durch Integration der Einwirkung über die Laufvariable x ergibt sich der Verlauf der Querkraft.

$$V(x) = - \int q(x) dx + c_1 \quad (4.16)$$

Dabei kann mit der Randbedingung $V(0) = 0$ die Integrationskonstante ermittelt werden. Der Verlauf der Querkräfte ist in Abbildung 4.5 dargestellt.

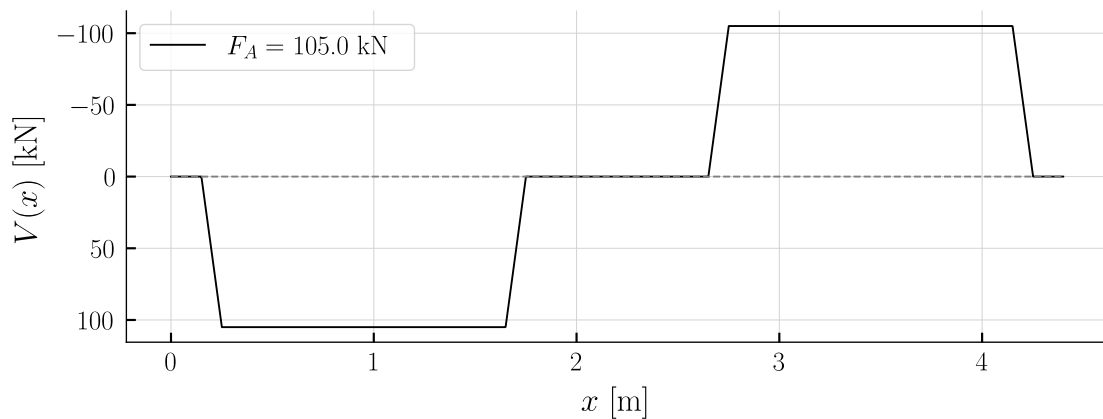


Abbildung 4.5: Verlauf der Querkräfte

Der Verlauf des Biegemoments lässt sich durch die Integration der Querkräfte bestimmen:

$$M(x) = \int V(x) dx + c_2 \quad (4.17)$$

Mit der Randbedingung $M(0) = 0$ kann die Integrationskonstante bestimmt werden. Der Verlauf der Biegemomente ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Es stellt sich ein Maximum in der Feldmitte ein.

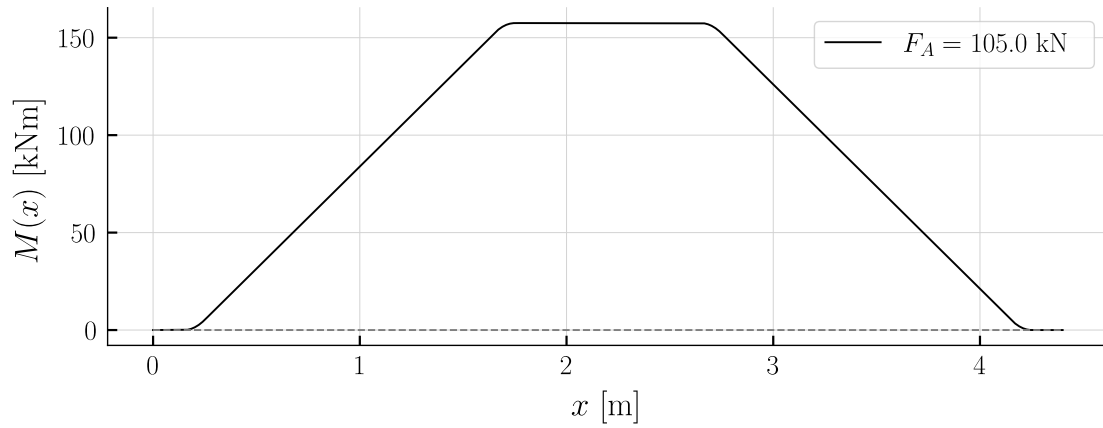


Abbildung 4.6: Verlauf der Biegemomente

Zusätzlich zu den resultierenden Biegemomenten aus der Einwirkung kann ein durch die Längszugkraft aus der Querkraft induziertes Biegemoment ermittelt werden. Dies wird mit einem Versatzmass berücksichtigt, aufgezeigt in Kapitel 2.7. In Abbildung 4.7 ist die Erhöhung durch das Versatzmass gezeigt. Der notwendige Hebelarm der inneren Kräfte wird anhand der statischen Höhe d abgeschätzt. Dabei werden zuerst die statischen Höhen der unterschiedlichen Zugstäbe gesondert ermittelt.

$$d_1 = -\frac{\oslash_{s,1}}{2} - c_{nom} + h \quad (4.18)$$

$$d_1 = 406.0\text{mm} \quad (4.19)$$

$$d_2 = -\frac{\oslash_{s,2}}{2} - c_{nom} + h \quad (4.20)$$

$$d_2 = 409.0\text{mm} \quad (4.21)$$

Die statische Höhe im Mittel der beiden Stäbe beträgt:

$$d = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} \quad (4.22)$$

$$d = 408.0\text{mm} \quad (4.23)$$

Anhand dieser wird der Hebelarm der inneren Kräfte bestimmt:

$$z = 0.9d \quad (4.24)$$

$$z = 367.0\text{mm} \quad (4.25)$$

Sowie gilt folgende Neigung des Druckfelds. Die Wahl des Winkels entspricht dem unteren Grenzwert der Norm [6, p. 54].

$$\theta_{c3} = 30.0^\circ \quad (4.26)$$

Damit ist der Verlauf der Biegemomente mit dem Versatzmass definiert.

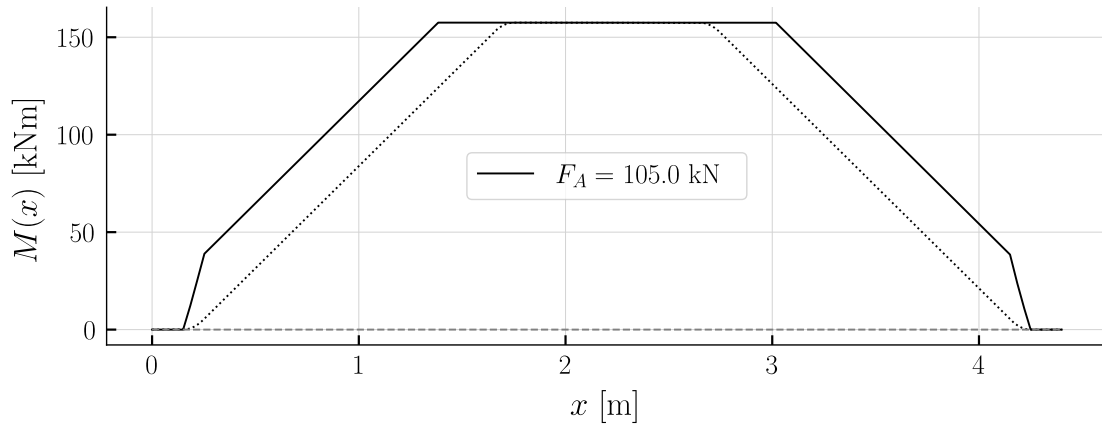


Abbildung 4.7: Verlauf der Biegemomente, mit Versatzmass

4.3.2.1 Verdrehung- und Verformungslinien

Wie in Kapitel 2.1 hergeleitet, sind die Gleichgewichtsbetrachtungen nicht ausreichend um die Verdrehung und Verformung zu beschreiben. Die Werkstoffbeziehung bedingt eine Biegesteifigkeit. Dabei wird von einer konstanten Biegesteifigkeit ausgegangen. Unter der Annahme eines ungerissenen Betonquerschnitts lässt sich die Biegesteifigkeit wie folgt berechnen:

$$EI = \frac{E_c b h^3}{12} \quad (4.27)$$

$$EI = 4.65 \cdot 10^4 \text{kNm}^2 \quad (4.28)$$

Der Verlauf der Verdrehung entspricht dem integrierten Verlauf der Biegemomente, dividiert durch die Biegesteifigkeit.

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI} \int M(x) dx + c_3 \quad (4.29)$$

Die Verformung hingegen entspricht dem integrierten Verlauf der Verdrehung.

$$w(x) = \int -\varphi(x) dx + c_4 \quad (4.30)$$

Mit den Randbedingungen $w(C) = 0$ und $w(B) = 0$ können die Integrationskonstanten bestimmt werden. Der elastische Verformungsverlauf ist in der Abbildung 4.8 dargestellt.

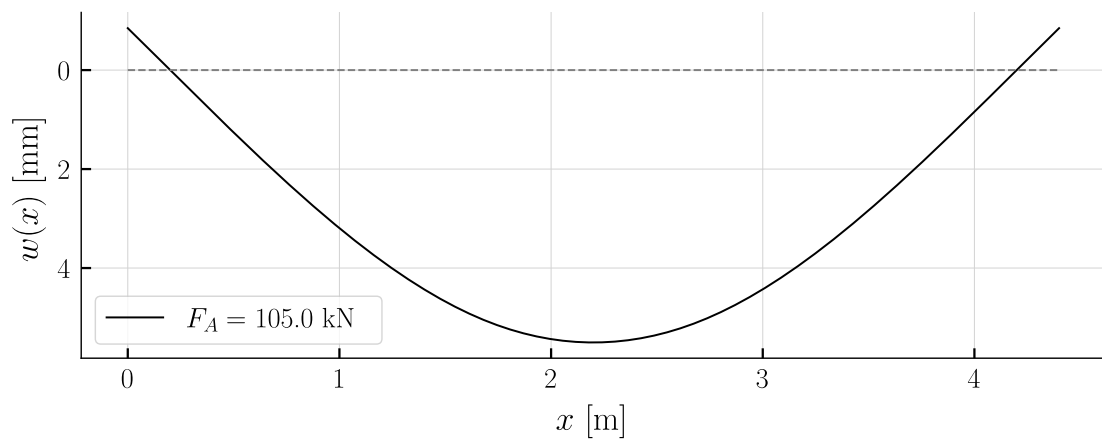


Abbildung 4.8: Verlauf der Verformung, bestimmt mit einer konstanten ungerissenen Biegesteifigkeit

4.4 Mohr'sche Analogie

Folgend sind die Zustandslinien der Verformung und Verdrehung mittels der Mohr'schen Analogie bestimmt. Das Vorgehen ist in Kapitel 2.2 beschrieben. Der bereits bestimmte Momentenverlauf gemäss Abbildung 4.6, dividiert durch die ungerissene Biegesteifigkeit, ist als Einwirkung auf das System anzusetzen. Dargestellt ist dies in Abbildung 4.9.

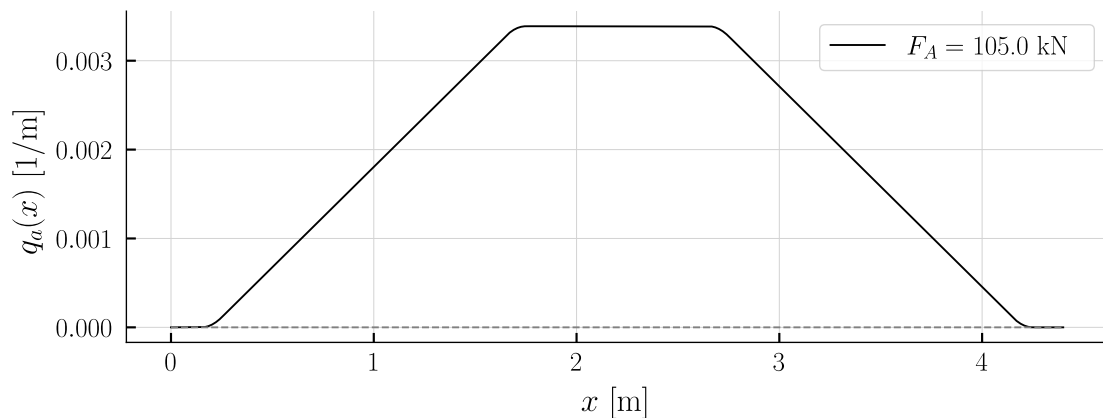


Abbildung 4.9: Verlauf der Einwirkungen des Analogiesystems

In der Abbildung 4.8 ist ersichtlich, dass für das analoge System Gelenke bei den Verformungsnullpunkten einzuführen sind, sowie Einspannungen beim Stabanfang und Ende. Grundsätzlich ist der Verformungsverlauf jedoch nicht vorgängig bekannt. Mit dieser Ausgangslage kann das analoge System mittels den Lagerungsbedingungen gemäss der Abbildung 2.3 definiert werden.

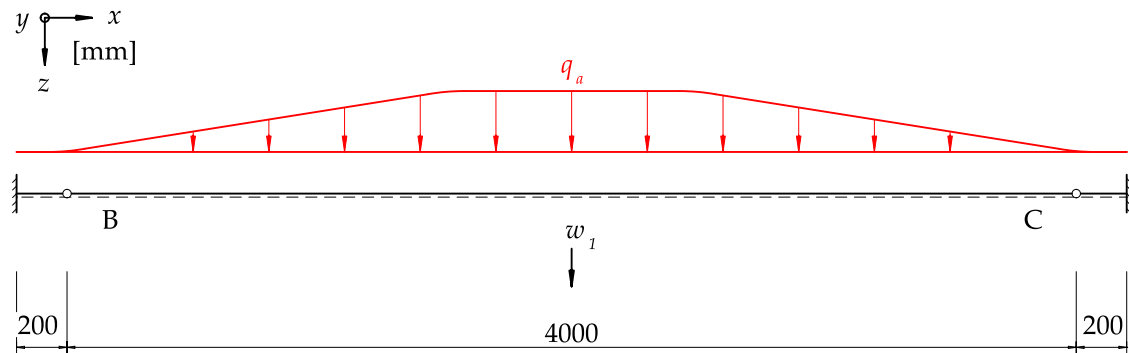


Abbildung 4.10: Einwirkungen und Lagerung des Analogiesystems

Der Querkraftverlauf für das analoge System ist in Abbildung 4.11 aufgezeigt. Die Querkraft ist einheitslos, da es sich um die Verdrehung handelt.

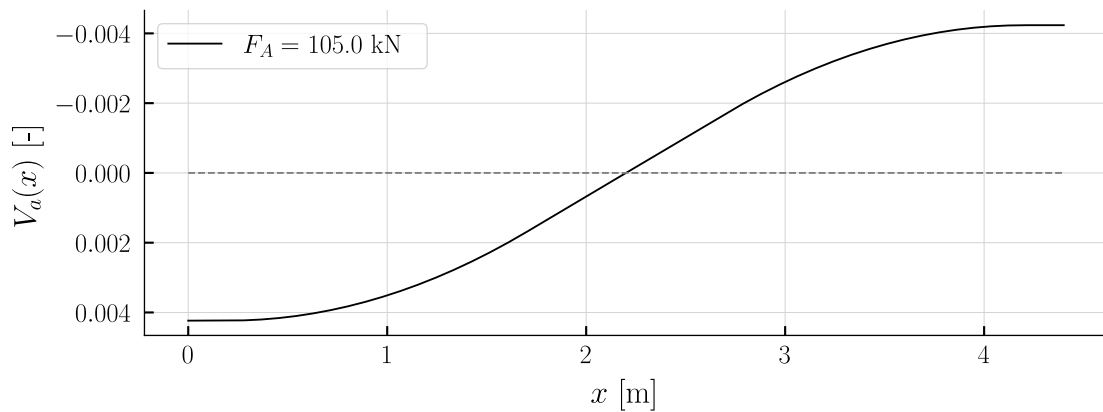


Abbildung 4.11: Verlauf der Querkräfte des Analogiesystems

Den Biegemomentenverlauf für das analoge System zeigt die Abbildung 4.12. Der Momentenverlauf entspricht der Verformung und ist folglich in Millimeter dargestellt.

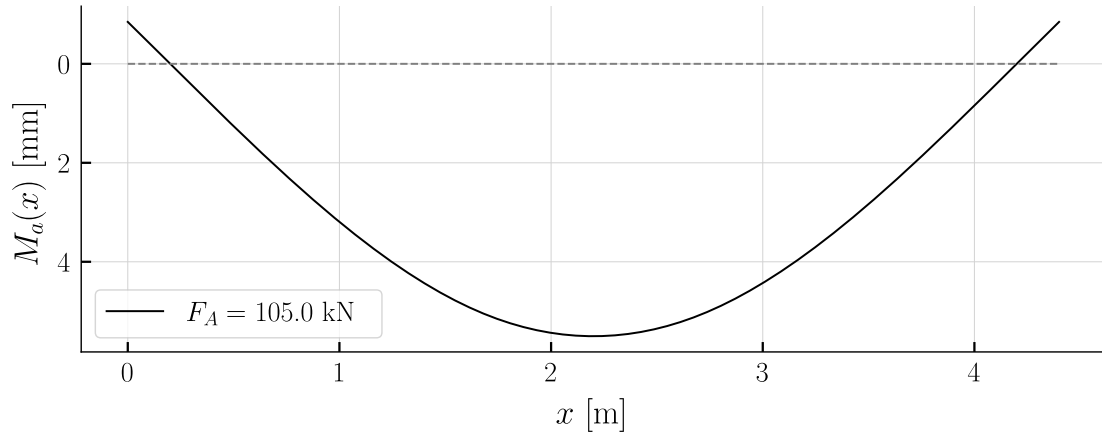


Abbildung 4.12: Verlauf der Biegemomente des Analogiesystems

Erwartungsgemäss entspricht der Verlauf der Verformung in der Abbildung 4.12 dem Verlauf in der Abbildung 4.8.

4.5 Abschätzung nach Norm

Nach der Bestimmung der elastischen Verformung kann die Verformung anhand des vollständig gerissenen Querschnitts gemäss der Norm [6] ermittelt werden. Die Kriechinflüsse werden nicht berücksichtigt, da in den Versuchsdaten die Langzeiteinflüsse nicht abgebildet werden. Zur Reduktion des Rechenaufwands wird die Druckbewehrung ebenfalls vernachlässigt. Folglich ist die Gleichung 2.10 anzuwenden. Dabei entspricht der geometrische Bewehrungsgehalt:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (4.31)$$

Die notwendige Querschnittsfläche der Zugbewehrung wird folgend berechnet. Die Querschnittsfläche des hochfesten Stabs entspricht:

$$A_{s1} = 2 \frac{\pi \sigma_{s,1}^2}{4} \quad (4.32)$$

$$A_{s1} = 509.0 \text{ mm}^2 \quad (4.33)$$

Die Querschnittsfläche des in der Mitte angeordneten Stabs entspricht:

$$A_{s2} = \frac{\pi \sigma_{s,2}^2}{2} \quad (4.34)$$

$$A_{s2} = 226.0\text{mm}^2 \quad (4.35)$$

Die Querschnittsfläche der Stäbe im Zugbereich wird abschliessend bestimmt. Vereinfacht wird der Stab in der Mitte der Zugzone der Gesamtquerschnittsfläche hinzugezählt.

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} \quad (4.36)$$

$$A_s = 735.1\text{mm}^2 \quad (4.37)$$

Die bereits bestimmte statische Höhe wird erneut aufgezeigt:

$$d = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} \quad (4.38)$$

$$d = 408.0\text{mm} \quad (4.39)$$

Damit lässt sich abschliessend die Verformung mittels der Abschätzformel für die maximale Laststufe bestimmen.

$$w_{III,SIA} = 26.7\text{mm} \quad (4.40)$$

4.6 Numerische Integration der Krümmung

Um sich von der Betrachtung einer konstanten Biegesteifigkeit zu lösen, hilft die Anwendung einer nicht-linearen Momenten-Krümmungs-Beziehung. Folgend wird ein Momenten-Krümmungs-Diagramm für den Querschnitt aus dem beschriebenen Versuch berechnet. Die vorhandene Querkraftbewehrung ist nicht dargestellt in Abbildung 4.13.

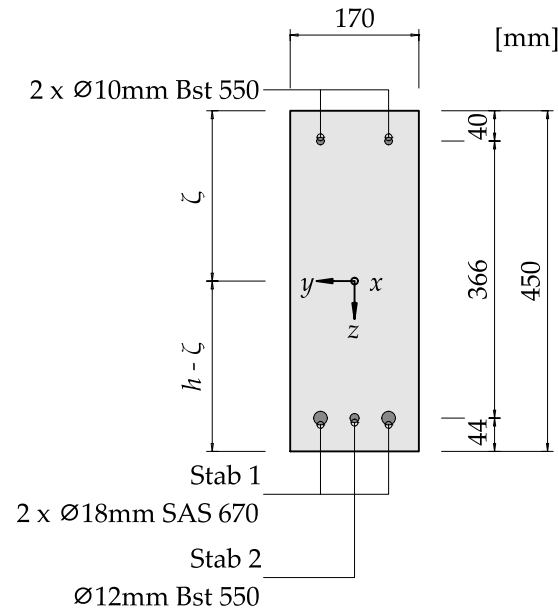


Abbildung 4.13: Querschnitt des Balkens dargestellt mit Zugbewehrung, ohne Schubbewehrung

Zur Reduktion des Rechenaufwands wird der Querschnitt gemäss der Abbildung 4.14 vereinfacht.

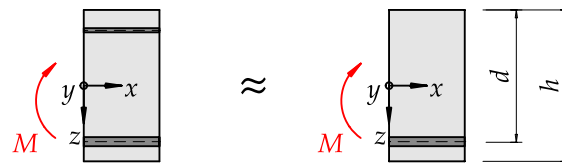


Abbildung 4.14: Vereinfachung der Bewehrungsführung des Balkens

Sowie finden die Parameter in der Tabelle 4.2 Einfluss in die Berechnungen. Die Indizes 1 und 2 der Parameter entsprechen der Beschriftung der Zugstäbe in der Abbildung 4.13.

Tabelle 4.2: Berechnungsparameter Momenten-Krümmungs-Beziehung

Parameter	
$E_s = \frac{205000.0\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\phi_{s,1} = 18.0\text{mm}$
$\phi_{s,2} = 12.0\text{mm}$	$c_{nom} = 35.0\text{mm}$
$f_{cc} = \frac{46.7\text{N}}{\text{mm}^2}$	$f_{su,1} = \frac{800.0\text{N}}{\text{mm}^2}$
$f_{su,2} = \frac{657.0\text{N}}{\text{mm}^2}$	$f_{sy,1} = \frac{670.0\text{N}}{\text{mm}^2}$
$f_{sy,2} = \frac{550.0\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\theta_{c3} = 30.0$
$\varepsilon_{cu} = 0.003$	$\varepsilon_{su} = 0.05$

Neben den Parametern wird das Stoffgesetz für den Betonstahl in Abbildung 4.15 hinterlegt. Das bilineare, bzw. linear-elastisch linear-plastische Spannungs-Dehnungs-Diagramm für den Betonstahl hält den Rechenaufwand klein und liefert eine ausreichende Genauigkeit. Eine Berücksichtigung des verfestigenden Verhaltens ist essentiell, um die Verformungen nach dem Fließen des Betonstahls näherungsweise zu bestimmen. Das Diagramm ist definiert bis zur Bruchdehnung ε_{su} des Stahls. Das Verhalten gilt ebenso im negativen Spannungs-Dehnungs Bereich. Aufgezeigt sind beide Betonstähle, mit gleichen Elastizitätsmoduli im elastischen, sowie im verfestigenden Bereich.

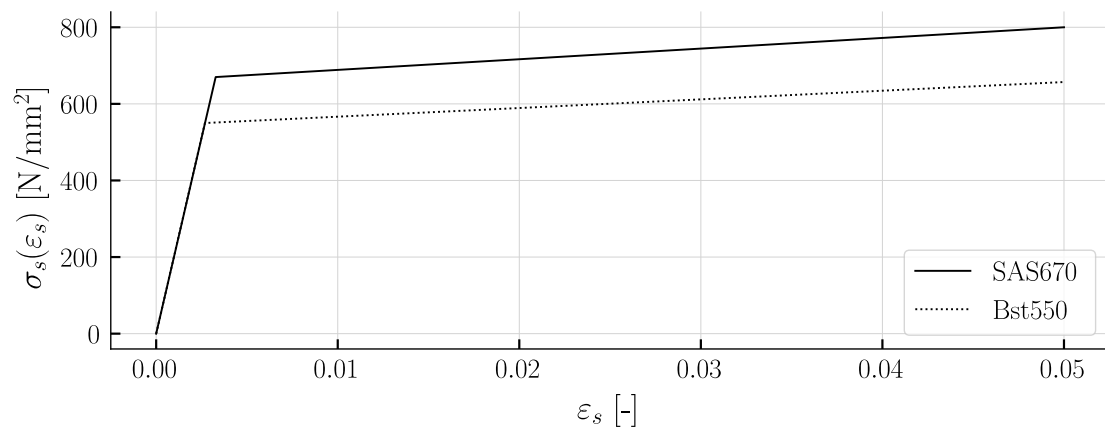


Abbildung 4.15: Linear-elastisches, ideal-plastisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Betonstahls

Die Betonkennlinie, die in Abbildung 4.16 dargestellt ist, zeigt ein linear-elastisches ideal-plastisches Verhalten. Im positiven Bereich lässt sich die Betonspannung bis zur Betonzugfestigkeit f_{ct} erhöhen, im negativen Spannungsbereich beginnt ein Plastifizieren beim Erreichen der Betondruckfestigkeit f_c . Dies ist bis zur Bruchstauchung ε_{cu} definiert.

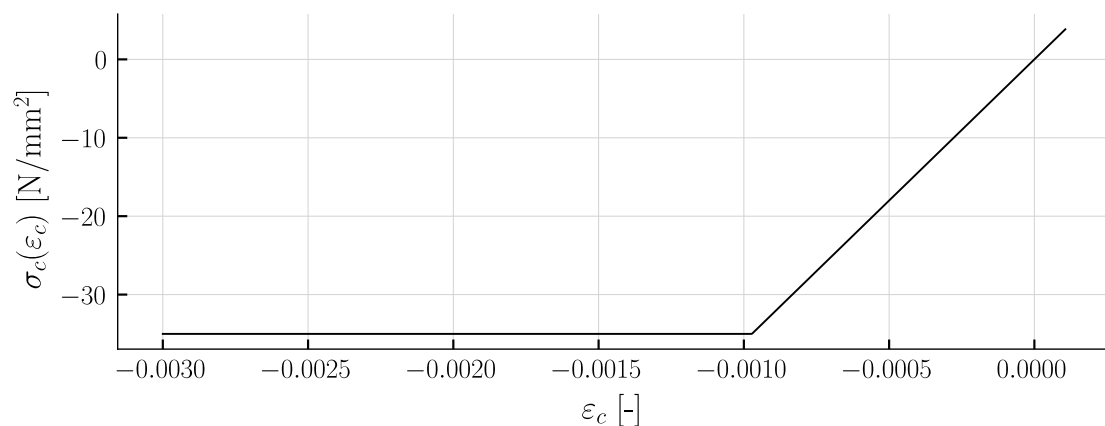


Abbildung 4.16: Linear-elastisches, ideal-plastisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Betons

4.6.1 Querschnittsanalyse

Zur Bestimmung der nicht-linearen Momenten-Krümmungs-Beziehung wird eine Querschnittsanalyse durchgeführt. Dabei wird der Querschnitt vor dem Reißen (Zustand 1), nach dem Reißen (Zustand 2), beim Fließen des Zugstabs 2 (Zustand 3), beim Fließen der Zugstäbe 1 (Zustand 4) und beim Versagen (Zustand 5) untersucht. Durch die Wahl aussagekräftiger Zustände im Querschnitt lässt sich eine Momenten-Krümmungs-Beziehung mit überschaubarem Rechenaufwand ermitteln.

4.6.1.1 Schwerpunkt des Querschnitts

Die Bestimmung der Wertigkeit n ermöglicht die Betrachtung des Querschnitts als homogenen Betonquerschnitt. Dies findet Einfluss bei der Schwerpunktsbestimmung, sowie bei der Bestimmung des Flächenträgheitsmoments.

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (4.41)$$

$$n = 5.69 \quad (4.42)$$

Mithilfe der Querschnittsfläche der Zugstäbe, sowie der Betonquerschnittsfläche lässt sich eine ideelle Querschnittsfläche ermitteln. Diese entspricht der Fläche eines reinen Betonquerschnitts. Die Querschnittsfläche der Zugstäbe ist die folgende:

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} \quad (4.43)$$

$$A_s = 735.1\text{mm}^2 \quad (4.44)$$

Dabei beträgt die Betonquerschnittsfläche:

$$A_c = bh \quad (4.45)$$

$$A_c = 76500.0\text{mm}^2 \quad (4.46)$$

Und die ideelle Querschnittsfläche resultiert zu:

$$A_i = A_c + A_s (n - 1) \quad (4.47)$$

$$A_i = 79949.7\text{mm}^2 \quad (4.48)$$

Der vertikale Abstand von der Oberkante zum Schwerpunkt, dargestellt ist dieser in der Abbildung 4.13, beträgt:

$$\zeta_c = \frac{\frac{A_c h}{2} + (n - 1) (A_{s1} (-d_1 + h) + A_{s2} (-d_2 + h))}{A_i} \quad (4.49)$$

$$\zeta_c = 217.0 \text{ mm} \quad (4.50)$$

4.6.1.2 Flächenträgheitsmoment

Das Flächenträgheitsmoment wird ebenfalls am ideellen Querschnitt bestimmt. Die Eigentragheitsmomente der Kreisquerschnitte der Stäbe sind nicht berücksichtigt, da deren Anteil überschaubar klein ist. Lediglich der Steiner-Anteil fliesst in die Berechnung ein:

$$I^I = \frac{bh^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} - \zeta_c \right)^2 + (n - 1) \left(A_{s1} \left(\frac{\varnothing_{s,1}}{2} + c_{nom} - \zeta_c \right)^2 + A_{s2} \left(\frac{\varnothing_{s,2}}{2} + c_{nom} - \zeta_c \right)^2 \right) \quad (4.51)$$

$$I^I = 1.4 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 \quad (4.52)$$

4.6.1.3 Ungerissen - Zustand 1

Durch das durchwegs elastische Verhalten kann die Biegesteifigkeit anhand des Elastizitätsmoduls des Betons und des Flächenträgheitsmoments des ideellen Querschnitts bestimmt werden.

$$EI^I = E_c I^I \quad (4.53)$$

$$EI^I = 5.042 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2 \quad (4.54)$$

Das Rissmoment definiert den Endpunkt des Zustands I im Momenten-Krümmungs-Diagramm und wird folgend bestimmt. Dabei gilt die Modellierung gemäss Abbildung 4.17. Die Spannung in den Zugstäben wird vernachlässigt.

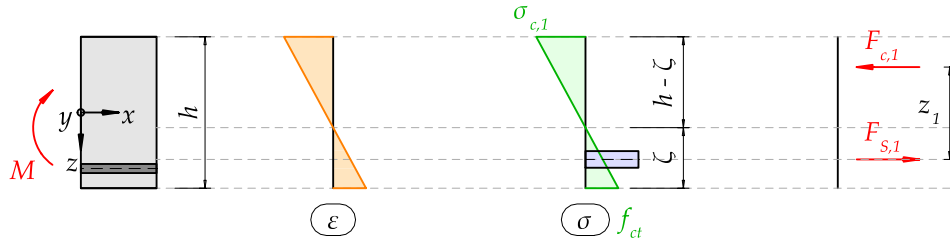


Abbildung 4.17: Querschnittsanalyse vor dem Reißen des Betons

Die Betonspannung lässt sich anhand der über die Querschnittshöhe linear verlaufenden Spannung bestimmen. Dies ist folgend dargestellt:

$$\sigma_{c1} = \frac{f_{ct} (h - \zeta_c)}{\zeta_c} \quad (4.55)$$

$$\sigma_{c1} = \frac{4.17 \text{ N}}{\text{mm}^2} \quad (4.56)$$

Zur Bestimmung des Rissmoments gilt es den Hebelarm der inneren Kräfte zu bestimmen, sowie die Betondruckkraft:

$$z_1 = \frac{2h}{3} + \frac{\zeta_c}{3} \quad (4.57)$$

$$z_1 = 372.0 \text{ mm} \quad (4.58)$$

Die Betondruckkraft ist definiert nach:

$$F_{c,1} = \frac{b \sigma_{c1} (h - \zeta_c)}{2} \quad (4.59)$$

$$F_{c,1} = 82.6 \text{ kN} \quad (4.60)$$

Und das Rissmoment resultiert schliesslich zu:

$$M_r = F_{c,1} z_1 \quad (4.61)$$

$$M_r = 30.75 \text{ kNm} \quad (4.62)$$

Unter Berücksichtigung der Biegesteifigkeit lässt sich die Krümmung beim Reißen des Querschnitts bestimmen. Gezeigt in den folgenden Gleichungen:

$$\chi_r = \frac{M_r}{EI^I} \quad (4.63)$$

$$\chi_r = \frac{0.00061}{\text{m}} \quad (4.64)$$

4.6.1.4 Gerissen elastisch - Zustand 2

Mit dem Zustand 2 wird darauf abgezielt, den gerissenen Bereich im Momenten-Krümmungs-Diagramm darzustellen. Der Querschnitt nach dem Reissen ist in der Abbildung 4.18 dargestellt. Der Betonstahl hat die Fliessgrenze noch nicht erreicht. Der Beton hat die Druckfestigkeit ebenfalls nicht erreicht. Folgend werden analytische Beziehungen hergeleitet, welche den gesamten gerissenen Bereich beschreiben.

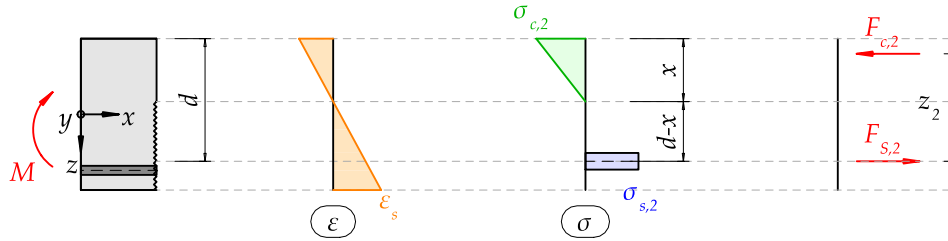


Abbildung 4.18: Querschnittsanalyse nach dem Reissen des Betons

Dabei betragen die statischen Höhen der Zugstäbe:

$$d_1 = 406.0\text{mm} \quad (4.65)$$

$$d_2 = 409.0\text{mm} \quad (4.66)$$

Mittels Gleichgewicht der Kräfte lässt sich die Betondruckzonenhöhe und folglich die gerissene Biegesteifigkeit herleiten. Die Betonstahlzugkräfte, für die Zugstäbe gesondert betrachtet, betragen:

$$F_{s2,1} = A_{s1}\sigma_{s2,1} \quad (4.67)$$

$$F_{s2,2} = A_{s2}\sigma_{s2,2} \quad (4.68)$$

Die entsprechenden Betonstahlspannungen für linear-elastisches Verhalten folgen zu:

$$\sigma_{s2,1} = E_s \varepsilon_{s2,1} \quad (4.69)$$

$$\sigma_{s2,2} = E_s \varepsilon_{s2,2} \quad (4.70)$$

Die Betondruckkraft anhand des dreieckigen Verlaufs in Abbildung 4.18 betragt:

$$F_{c,2} = \frac{b \sigma_{c2} x_2}{2} \quad (4.71)$$

Die Betonspannung ebenfalls bestimmt durch ein linear-elastisches Verhalten ist definiert durch:

$$\sigma_{c2} = E_c \varepsilon_{c,2} \quad (4.72)$$

Die Beton und Stahldehnung anhand der Stahldehnung des zweiten Stabs:

$$\varepsilon_{c,2} = \frac{\varepsilon_{s2,2} x_2}{d_2 - x_2} \quad (4.73)$$

$$\varepsilon_{s2,1} = \frac{\varepsilon_{s2,2} (d_1 - x_2)}{d_2 - x_2} \quad (4.74)$$

Unter Bemühung des Gleichgewichts der horizontalen Kräfte lässt sich die folgende Beziehung ermitteln:

$$F_{c,2} = F_{s2,1} + F_{s2,2} \quad (4.75)$$

Einsetzen der bestimmten Gleichungen in die Gleichgewichtsbeziehung und mit n substituiert, folgt:

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (4.76)$$

$$\frac{E_s b \varepsilon_{s2,2} x_2^2}{2n (d_2 - x_2)} = \frac{E_s \varepsilon_{s2,2} (A_{s1} (d_1 - x_2) + A_{s2} (d_2 - x_2))}{d_2 - x_2} \quad (4.77)$$

Mit deren Gleichung abschliessend die Betondruckzonenhöhe x bestimmt werden kann.

$$x_2 = \frac{-A_{s1}n - A_{s2}n + \sqrt{n(A_{s1}^2n + 2A_{s1}A_{s2}n + 2A_{s1}bd_1 + A_{s2}^2n + 2A_{s2}bd_2)}}{b} \quad (4.78)$$

$$x_2 = 119.0\text{mm} \quad (4.79)$$

Die hergeleiteten Beziehungen gelten für den gesamten gerissenen Bereich. Mit der freien Wahl eines Biegemoments kann die Betonstahldehnung und die erforderliche Krümmung bestimmt werden. Wird das in Zustand 1 ermittelte Rissmoment angesetzt, so lässt sich der Startpunkt des gerissenen Bereichs im Momenten-Krümmungs-Diagramm bestimmen.

$$M_2 = F_{s2,1} \left(d_1 - \frac{x_2}{3} \right) + F_{s2,2} \left(d_2 - \frac{x_2}{3} \right) \quad (4.80)$$

$$M_2 = M_r \quad (4.81)$$

$$M_r = \frac{A_{s1} E_s \varepsilon_{s2,2} (d_1 - x_2) \left(d_1 - \frac{x_2}{3} \right)}{d_2 - x_2} + A_{s2} E_s \varepsilon_{s2,2} \left(d_2 - \frac{x_2}{3} \right) \quad (4.82)$$

Daraus resultiert die Betonstahldehnung und die entsprechende Betonstahlspannung:

$$\varepsilon_{s2,2} = 0.00056 \quad (4.83)$$

$$\sigma_{s2,2} = \frac{115.0 \text{ N}}{\text{mm}^2} \quad (4.84)$$

Die Krümmung kann anhand des Dehnungsverlaufs in Abbildung 4.18 bestimmt werden:

$$\chi^{II} = \frac{\varepsilon_{s2,2}}{d_2 - x_2} \quad (4.85)$$

$$\chi^{II} = \frac{0.00193}{\text{m}} \quad (4.86)$$

Abschliessend folgt die gerissene Biegesteifigkeit zu:

$$EI^{II} = \frac{M_2}{\chi^{II}} \quad (4.87)$$

$$EI^{II} = 15932.3 \text{ kNm}^2 \quad (4.88)$$

4.6.1.5 Fließen der Bewehrung 2 - Zustand 3

Der Zustand 3 entspricht dem Zustand 2. Einzig die Stahlspannung im Stab 2 erreicht die Fließspannung. Dargestellt ist dies in der Abbildung 4.19.

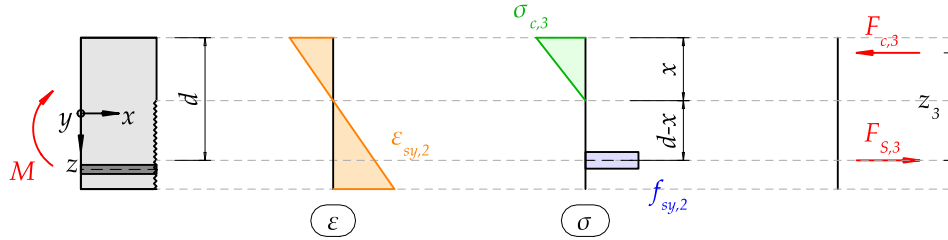


Abbildung 4.19: Querschnittsanalyse mit erreichter Fließspannung im Stab 2

Die Dehnungen in den Stäben folgen zu:

$$\varepsilon_{s3,2} = \frac{f_{sy,2}}{E_s} \quad (4.89)$$

$$\varepsilon_{s3,2} = 0.00268 \quad (4.90)$$

Die Betondruckzonenhöhe bleibt unverändert, sofern der Beton im elastischen Zustand verbleibt.

$$x_3 = 119.0\text{mm} \quad (4.91)$$

Die Betonstahldehnung anhand des linearen Dehnungsverlaufs entspricht:

$$\varepsilon_{s3,1} = \frac{\varepsilon_{s3,2} (d_1 - x_3)}{d_2 - x_3} \quad (4.92)$$

$$\varepsilon_{s3,1} = 0.00266 \quad (4.93)$$

Die Betonstauchung folgt zu:

$$\varepsilon_{c,3} = \frac{\varepsilon_{s3,1} x_3}{d_1 - x_3} \quad (4.94)$$

$$\varepsilon_{c,3} = 0.0011 \quad (4.95)$$

Die maximale elastische Dehnung ist folgend gezeigt, welche mit $\varepsilon_{c,3}$ zu vergleichen ist:

$$\frac{f_c}{E_c} = 0.000972 \quad (4.96)$$

Es zeigt sich, dass der Beton im äussersten Bereich bereits plastifiziert. Die Abweichung ist jedoch gering. Um den Rechenaufwand gering zu halten, wird diese Tatsache nicht berücksichtigt, bzw. mit einem elastischen Betonverhalten weiterverfahen. Folgend ist die Höhe des plastifizierten Bereichs berechnet, gemessen von der äussersten Faser. Diese Grösse dient dazu den Fehler der Vereinfachung abzuschätzen. Der geringe Abstand lässt die Annahme zu.

$$a = x_3 - \frac{f_c x_3}{E_c \varepsilon_{c,3}} \quad (4.97)$$

$$a = 14.0\text{mm} \quad (4.98)$$

Daraus lässt sich das Flieissmoment bestimmen, welches den Endpunkt im Momenten-Krümmungs-Diagramm für den gerissenen Zustand definiert:

$$M_{y2} = A_{s1} E_s \varepsilon_{s3,1} \left(d_1 - \frac{x_3}{3} \right) + A_{s2} E_s \varepsilon_{s3,2} \left(d_2 - \frac{x_3}{3} \right) \quad (4.99)$$

$$M_{y2} = 147.4\text{kNm} \quad (4.100)$$

Abschliessend lässt sich die Krümmung für den Endpunkt des Zustands 3 bestimmen:

$$\chi_{y2} = \frac{\varepsilon_{s3,1}}{d_1 - x_3} \quad (4.101)$$

$$\chi_{y2} = \frac{0.00925}{\text{m}} \quad (4.102)$$

4.6.1.6 Fliesen der Bewehrung 1 - Zustand 4

Der Zustand 4 entspricht dem Zustand 3. Als einzige Abweichung erreicht die Stahlspannung im Stab 1 nun ebenfalls die Flieisspannung.

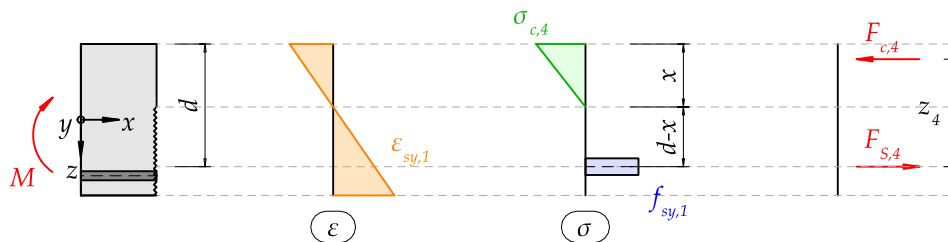


Abbildung 4.20: Querschnittsanalyse mit erreichter Flieisspannung im Stab 1

Die Dehnungen in den Stäben, vereinfacht wird die Dehnung in beiden Stäben gleichgesetzt, folgen zu:

$$\varepsilon_{s4,1} = \frac{f_{sy,1}}{E_s} \quad (4.103)$$

$$\varepsilon_{s4,1} = 0.00327 \quad (4.104)$$

$$\varepsilon_{s4,2} = \varepsilon_{s4,1} \quad (4.105)$$

Es wird weiterhin von einer dreiecksförmigen Betonspannungsverteilung ausgegangen.

$$x_4 = 119.0\text{mm} \quad (4.106)$$

Die Betonstauchung folgt zu:

$$\varepsilon_{c,4} = \frac{\varepsilon_{s4,1}x_4}{d_1 - x_4} \quad (4.107)$$

$$\varepsilon_{c,4} = 0.00136 \quad (4.108)$$

Auch hier gilt, dass der Beton eigentlich bereits plastifiziert. Der Abstand des plastischen Bereichs von der äussersten Faser ist folgend erneut berechnet und zeigt einen grösseren Bereich. Dennoch wird mit einem dreieckigen Betonspannungsverlauf weiterverfahren.

$$a = x_4 - \frac{f_c x_4}{E_c \varepsilon_{c,4}} \quad (4.109)$$

$$a = 33.7\text{mm} \quad (4.110)$$

Die Spannungen anhand des bilinearen Spannungs-Dehnungsverlauf folgen zu:

$$\sigma_{s4,1} = \frac{670.0\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (4.111)$$

$$\sigma_{s4,2} = \frac{551.0\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (4.112)$$

Es zeigt sich, dass die Spannung im Stab 2 in etwa der Fließsspannung entspricht. Daraus lässt sich das Fließmoment bestimmen, welches den Endpunkt im Momenten-Krümmungs-Diagramm für den gerissenen Zustand definiert:

$$M_{y1} = A_{s1} E_s \varepsilon_{s4,1} \left(d_1 - \frac{x_4}{3} \right) + A_{s2} f_{sy,2} \left(d_2 - \frac{x_4}{3} \right) \quad (4.113)$$

$$M_{y1} = 170.9 \text{ kNm} \quad (4.114)$$

Abschliessend lässt sich die Krümmung für den Endpunkt des Zustands 4 bestimmen:

$$\chi_{y1} = \frac{\varepsilon_{s4,1}}{d_1 - x_4} \quad (4.115)$$

$$\chi_{y1} = \frac{0.0114}{\text{m}} \quad (4.116)$$

4.6.1.7 Biegewiderstand - Zustand 5

Der Biegewiderstand kann durch die Plastifizierung der Betondruckzone bestimmt werden. Vereinfacht werden den Zugstäben die entsprechende statische Zugfestigkeit hinterlegt, um das verfestigende Verhalten annähernd abzubilden.

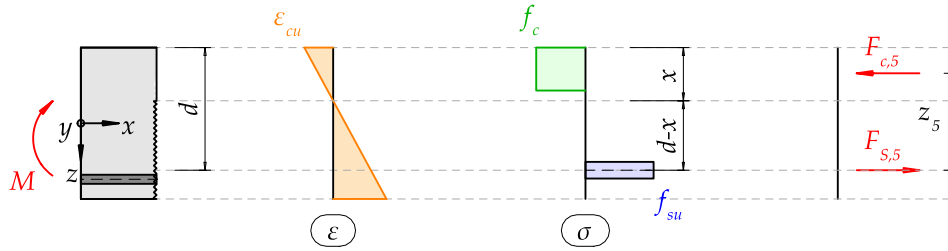


Abbildung 4.21: Querschnittsanalyse mit erreichter Zugfestigkeit im Stab und plastifizierter Betondruckzone

Es wird die Betonbruchstauchung vorausgesetzt:

$$\varepsilon_{c,5} = \varepsilon_{cu} \quad (4.117)$$

Der Druckspannungsverlauf wird als rechteckigen Spannungsblock modelliert. Dazu wird die Druckzonenhöhe um den Faktor 0.85 reduziert. Das Gleichgewicht der Kräfte führt zu:

$$A_{s1} f_{su,1} + A_{s2} f_{su,2} = 0.85 b f_c x_5 \quad (4.118)$$

Aus dem Gleichgewicht der horizontalen Kräfte folgt die Druckzonenhöhe zu:

$$x_5 = 110.0\text{mm} \quad (4.119)$$

Damit lässt sich der Hebelarm der inneren Kräfte bestimmen:

$$z_5 = d_1 - 0.425x_5 \quad (4.120)$$

$$z_5 = 359.0\text{mm} \quad (4.121)$$

Welche den Biege widerstand ermitteln lässt:

$$M_R = A_{s1}f_{su,1}(d_1 - 0.425x_5) + A_{s2}f_{su,2}(d_2 - 0.425x_5) \quad (4.122)$$

$$M_R = 200.1\text{kNm} \quad (4.123)$$

Die Krümmung lässt sich anhand der Betonstauchung ermitteln:

$$\chi_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{x_5} \quad (4.124)$$

$$\chi_u = \frac{0.0273}{\text{m}} \quad (4.125)$$

Sowie wird kontrolliert, dass die Betonstahldehnung die Bruchdehnung nicht überschreiten. Die Betonstahldehnung wird für beide Stäbe gleichgesetzt.

$$\varepsilon_{s5,1} = \frac{\varepsilon_{c,5}(d_1 - x_5)}{x_5} \quad (4.126)$$

$$\varepsilon_{s5,2} = \varepsilon_{s5,1} \quad (4.127)$$

$$\varepsilon_{s5,1} = 0.00809 \quad (4.128)$$

$$\varepsilon_{su} = 0.05 \quad (4.129)$$

Die Bruchdehnung des Stahls wird nicht erreicht. Der Querschnitt versagt im Druckbereich. Die Annahme, dem Betonstahl die statische Zugfestigkeit zugrunde zu legen ist nicht gerechtfertigt. Dies wird vernachlässigt zur Reduktion des Rechenaufwands. Abschliessend lässt sich die Biegesteifigkeit für den verfestigenden Bereich bestimmen:

$$EI^{III} = \frac{M_R}{\chi_u} \quad (4.130)$$

$$EI^{III} = 7.33 \cdot 10^3 \text{kNm}^2 \quad (4.131)$$

4.6.1.8 Momenten-Krümmungs-Diagramm

Die definierten Krümmungen mit den entsprechenden Biegemomenten aus der Querschnittsanalyse sind in Abbildung 4.22 aufgezeigt.

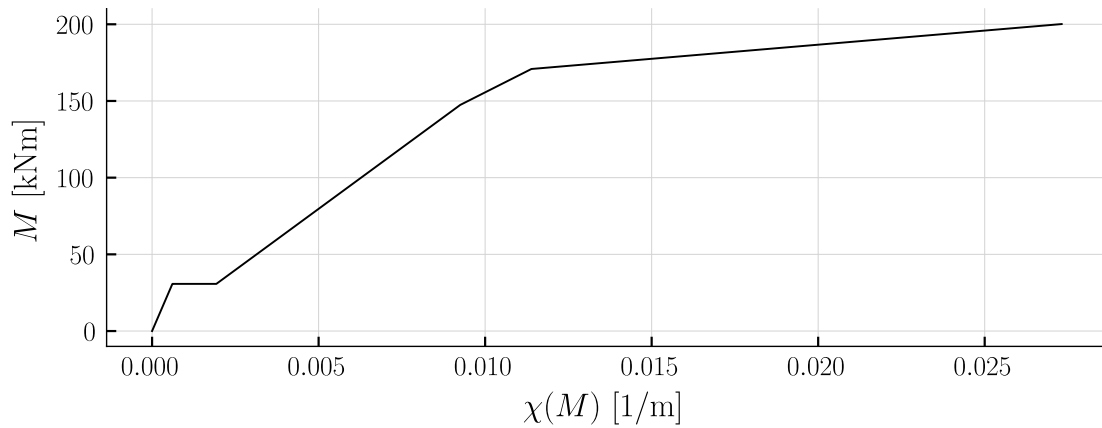


Abbildung 4.22: Momenten-Krümmungs-Diagramm, definiert durch die Querschnittsanalyse

Die erste Steigung im Diagramm beschreibt den ungerissenen Zustand. Dieser hat die Neigung von EI^I . Darauf folgt eine schlagartige Erhöhung der Krümmung ohne Steigerung des Moments. Dies entspricht dem Übergang vom ungerissenen zum gerissenen Zustand. Dabei steigt der Verlauf mit der Neigung EI^{II} bis zum Fließen der Bewehrung 2. Der folgende Knick resultiert aus den unterschiedlichen Fließpunkten der Zugbewehrung. Nach dem Erreichen des Fließens in beiden Stäben folgt ein verfestigendes Verhalten des Betonstahls und ein Plastifizieren der Betondruckzone bis zum Erreichen des Biegewiderstands.

4.6.1.9 Zustandslinien der Krümmung

Mittels der nicht-linearen Momenten-Krümmungs-Beziehung lässt sich der Krümmungsverlauf bestimmen. Der Biegemomentenverlauf $M(x)$, als Eingabe in die Funktion der Krümmung $\chi(M)$, führt zu den Zustandslinien der Krümmung in Abbildung 4.23. Dargestellt ist der Krümmungsverlauf exemplarisch für die Zustandslinien der Biegemomente aus der Abbildung 4.6.

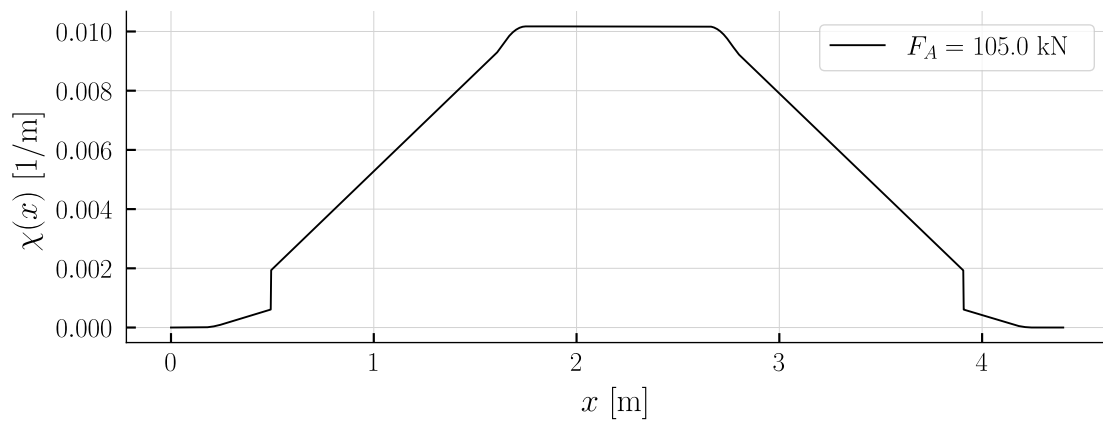


Abbildung 4.23: Krümmungsverlauf entlang der Stabachse

In der Feldmitte zeigt sich allmählich ein Fließen des Stabs 2. Vereinfachend lässt sich festhalten, dass die Bewehrung nicht ins Fließen kommt.

4.6.1.10 Punktuelle Bestimmung der Verformung

Unter Anwendung der Arbeitsgleichung kann die Verformung nach Gleichung 2.16 bestimmt werden. Die virtuelle Kraft $\bar{F} = 1$ wird in der Feldmitte angesetzt und resultiert zum virtuellen Biegemomentenverlauf, dargestellt in der Abbildung 4.24.

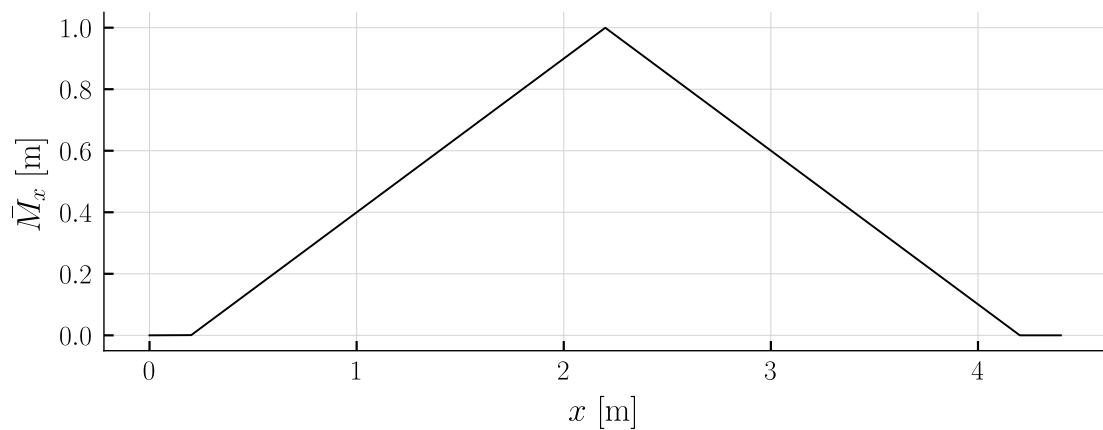


Abbildung 4.24: Biegemomentenverlauf für den virtuellen Kräftezustand

Mit dem bestimmen Krümmungsverlauf lässt sich die Deformation an der Stelle w_1 für die Maximallast exemplarisch bestimmen:

$$w_1 = 16.3 \text{ mm} \quad (4.132)$$

4.6.2 Zugversteifung

In diesem Abschnitt wird die Modellbildung nach Marti, gemäss Kapitel 2.4, angewendet. Dazu wird die Krümmungsdifferenz, der Rissabstand und die Rissweiten bestimmt. Im Versuchsbericht [2] sind keine Rissweiten aufgeführt, welche mit den Berechnungen verglichen werden können. Die Krümmungsdifferenz nach Marti mit der mittleren statischen Höhe in Abhängigkeit des λ -Parameters beträgt:

$$d = 407.5\text{mm} \quad (4.133)$$

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \frac{f_{ct}(1 - \rho_{eff})}{E_s \rho_{eff}(d - x_2)} \quad (4.134)$$

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{0.000779\lambda}{\text{m}} \quad (4.135)$$

Der mechanische Bewehrungsgehalt folgt zu:

$$\rho_{eff} = \frac{1}{-n + 1 + \frac{E_s M_r (d - x_2)}{EI^I f_{ct}}} \quad (4.136)$$

$$\rho_{eff} = 0.0406 \quad (4.137)$$

Eine Abschätzung des Rissabstands in Abhängigkeit ist folgend gezeigt. Dabei sind die Resultate für $\lambda = 1$ und $\lambda = 0.5$ berechnet.

$$s_{rm} = \frac{\lambda(1 - \rho_{eff})(\oslash_{s,1} + \oslash_{s,2})}{8\rho_{eff}} \quad (4.138)$$

$$s_{rm} = 88.7\text{mm} \quad (4.139)$$

$$s_{rm} = 44.4\text{mm} \quad (4.140)$$

Die Rissbreite ist abhängig von der Betonstahlspannung. Da vor dem Reißen des Betons keine Risse vorhanden sind, darf die Rissspannung von der Betonstahlspannung subtrahiert werden. Die Rissspannung lässt sich anhand der Betonstahlkraft aus dem Zustand 2 bestimmen.

$$\sigma_{sr0} = \frac{F_{s2,2}}{A_{s2}} \quad (4.141)$$

Die Bestimmung der Rissbreite ist folgend gezeigt. Für die Stahlspannung wird die Fließspannung des Stabs 2 eingesetzt.

$$w_r = \frac{s_{rm} (-\lambda \sigma_{sr0} + 2\sigma_{sr})}{2E_s} \quad (4.142)$$

Die Variation des Parameters $\lambda = 1; 0.5$ gilt hier ebenfalls.

$$w_r = 0.213\text{mm} \quad (4.143)$$

$$w_r = 0.113\text{mm} \quad (4.144)$$

Abgeschlossen wird die Anwendung der Zugversteifung mit dem Einfluss im Momenten-Krümmungs-Diagramm. Unter Berücksichtigung der beiden λ -Grenzwerte ist der Einfluss der Zugversteifung in der Abbildung 4.25 gezeigt.

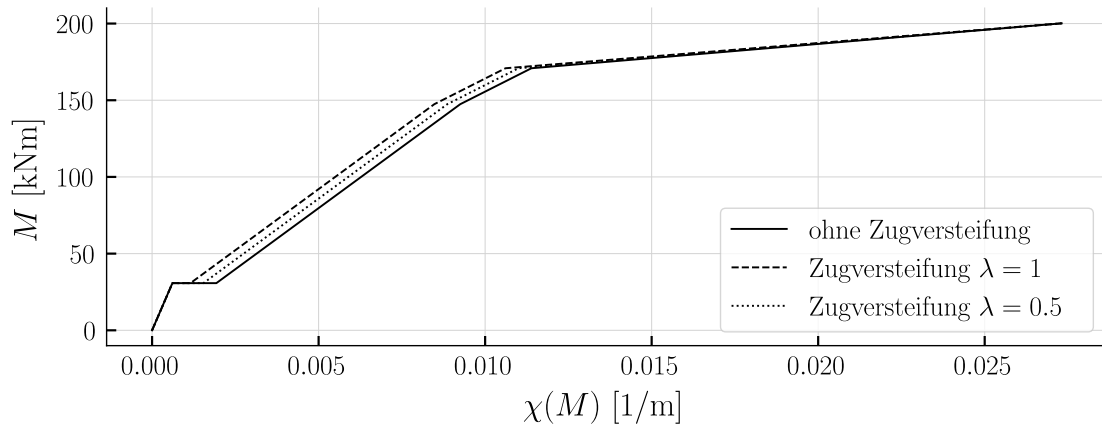


Abbildung 4.25: Momenten-Krümmungs-Diagramm mit Zugversteifung

Es zeigt sich ein leicht steiferes Verhalten im gerissenen Bereich.

4.7 Fachwerksanalyse

Die Anwendung der Modelle wird mit dem Modell aus Kapitel 2.6 abgeschlossen, welche sich von der Beschränkung der Querschnittsbetrachtung löst. Der Kraftfluss wird mit Spannungsfeldern modelliert. Eine Einteilung in Parallelfelder und Fächer ist in Abbildung 4.26 gezeigt.

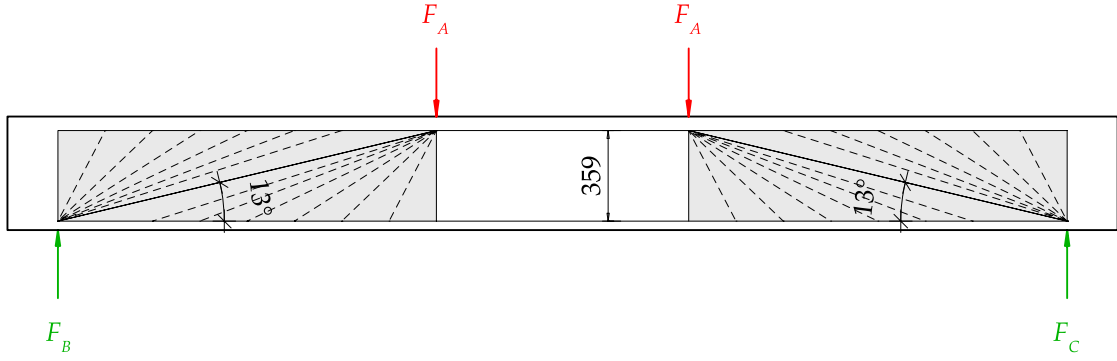


Abbildung 4.26: Balken mit Spannungsfeldern entsprechend dem Kraftfluss

Der Neigungswinkel der Betondruckstrebe wird in Anlehnung an die Gleichung 2.17 zur Bestimmung des Querkraftwiderstands von vertikaler Schubbewehrung, gemäss Ziffer 4.3.3.4.3 [6], bestimmt. Dabei beträgt die Querschnittsfläche der Schubbewehrung:

$$A_{sw} = 29.0\text{mm}^2 \quad (4.145)$$

Die Fachwerkshöhe wird entsprechend dem Hebelarm der inneren Kräfte des Zustands 5, bzw. dem Bruchzustand gewählt.

$$z_5 = 359.0\text{mm} \quad (4.146)$$

Die Fliessspannung wird mit der Zugfestigkeit $f_{su,2}$, welche dem Verhalten der Schubbewehrung entspricht, substituiert. Dies gewährleistet, dass die Schubbewehrung den elastischen Bereich verlässt. Der Querkraftwiderstand wird mit der maximal im System auftretenden Querkraft ersetzt. Abschliessend gilt $\alpha = \theta_{c3}$, was zum folgenden Neigungswinkel führt:

$$\theta_{c3,min} = \text{acot} \left(\frac{V_{R,s} s_w}{A_{sw} f_{su,2} z_5} \right) \quad (4.147)$$

$$\theta_{c3,min} = 0.214 \quad (4.148)$$

$$\theta_{c3,min} = 12.3^\circ \quad (4.149)$$

Der gewählte Neigungswinkel der Felder in der Abbildung 4.26 orientiert sich an dem berechneten Winkel. Sowie sind die Felder parallel zueinander angeordnet.

Das Fachwerk in Abbildung 4.27 resultiert durch das Zusammenfassen der Felder zu Stäben. Um aus dem Fachwerkmodell zutreffende Verformungen zu ermitteln, gilt es den Pendelstäben passende Dehnsteifigkeiten zuzuordnen.

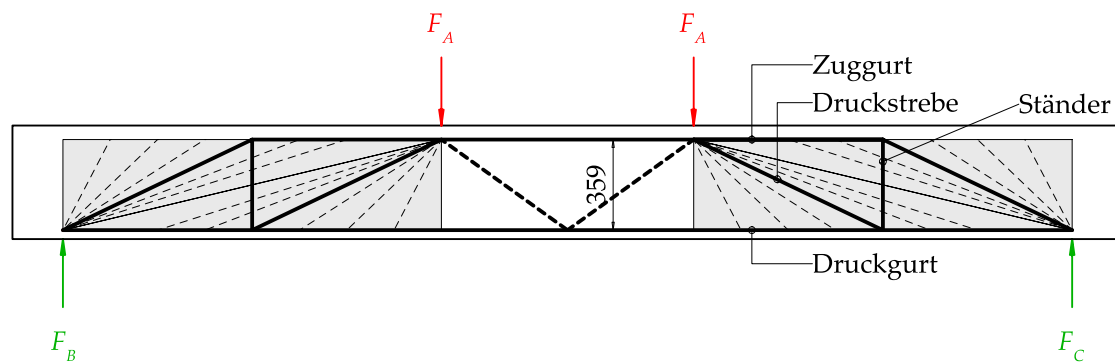


Abbildung 4.27: Balken mit Fachwerk durch das Zusammenfassen der Spannungsfelder

Dem Zuggurt ist die Spannungs-Dehnungs-Beziehung gemäss Abbildung 4.15 hinterlegt, sowie entspricht die Querschnittsfläche jener der Zugbewehrung.

Die Querschnittsfläche des Druckgurtes entspricht der Höhe des plastischen Spannungsbereichs des Zustands 5 multipliziert mit der Plattenstreifenbreite. Diese wird als konstant über sämtliche Stäbe des Druckgurtes angenommen. Des Weiteren wird die Spannungs-Dehnungs-Beziehung gemäss Abbildung 4.16 angewendet.

Die Querschnittsfläche der Druckstreben entspricht der Streifenbreite multipliziert mit der Parallelfeldbreite, gezeigt in Abbildung 4.26. Für die Diagonalen der nicht zentrierten Fächer ist vereinfacht die gleiche Querschnittsfläche hinterlegt. Dazu gilt die Spannungs-Dehnungs-Beziehung gemäss Abbildung 4.16.

Die Ständer bilden die Schubbewehrung ab. Die Querschnittsfläche resultiert aus der Anzahl an Schubhügel im entsprechenden Spannungsfeld. Es gilt die Spannungs-Dehnungs-Beziehung gemäss Abbildung 4.15. Die Abbildung 4.28 zeigt, dass links für den Ständer 5 Schubhügel umfasst sind und rechts 11 Schubhügel. Die Steifigkeit der Ständer unterscheidet sich folglich für den linken und den rechten Bereich des Balkens.

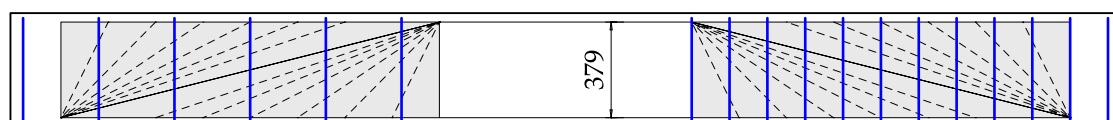


Abbildung 4.28: Balken mit dargestellter Schubbewehrung und Spannungsfeldern

Abschliessend lassen sich mit dem Modell Verformungen bestimmen. Für die Maximallast ist die Verformungsfigur in Abbildung 4.29 dargestellt. Die Verformung ist in der Feldmitte maximal.

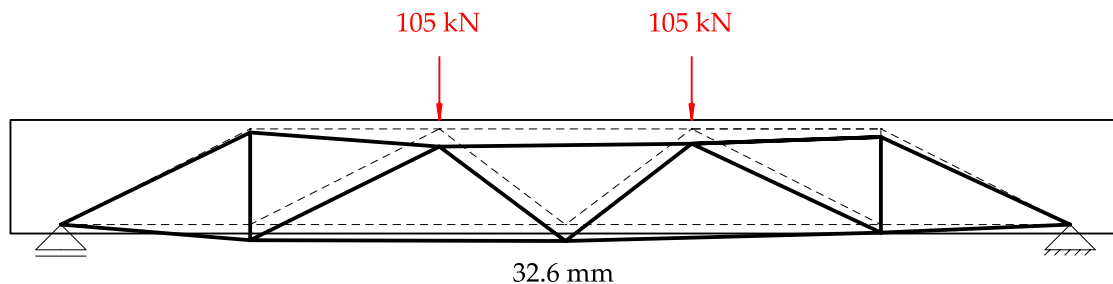


Abbildung 4.29: Balken mit verformten Fachwerk

4.8 Modellvergleich

Abgeschlossen wird die Analyse des Versuchs mit einer Gegenüberstellung der angewendeten Methoden.

4.8.1 Krümmung

Betrachtet man zunächst die Momenten-Krümmungs-Beziehung anhand der unterschiedlichen Modelle, aufgezeigt in der Abbildung 4.30. So zeigt sich der minimale Einfluss der Zugversteifung. Ebenso ist die nicht-linearität der Beziehung aus der Querschnittsanalyse zu erkennen.

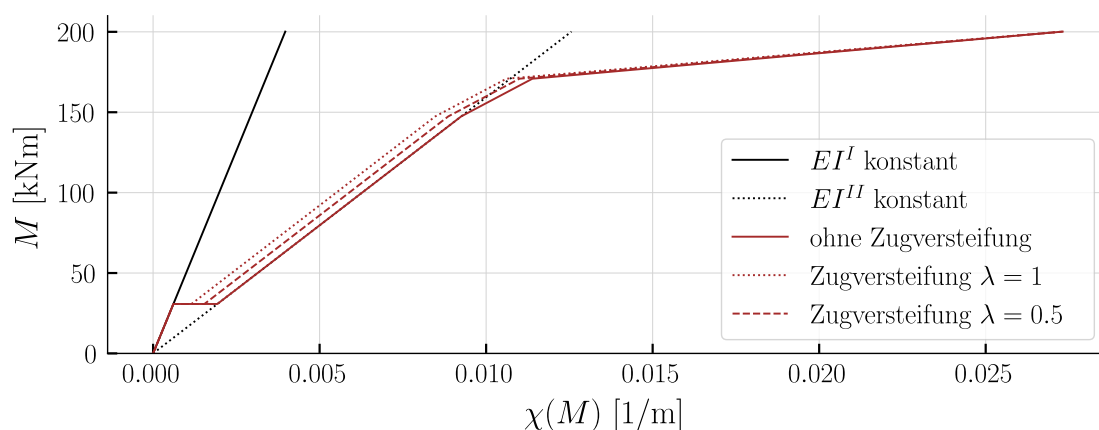


Abbildung 4.30: Momenten-Krümmungs-Diagramm zum Vergleich der unterschiedlichen Modelle

Die Abbildung 4.31 zeigt den Krümmungsverlauf für den Biegemomentenverlauf aus Abbildung 4.6. Dadurch dass die Bewehrung den Fließbereich praktisch nicht erreicht, zeigt sich eine Übereinstimmung mit dem nicht-linearen Verlauf aus der Querschnittsanalyse und der konstanten gerissenen Biegesteifigkeit.

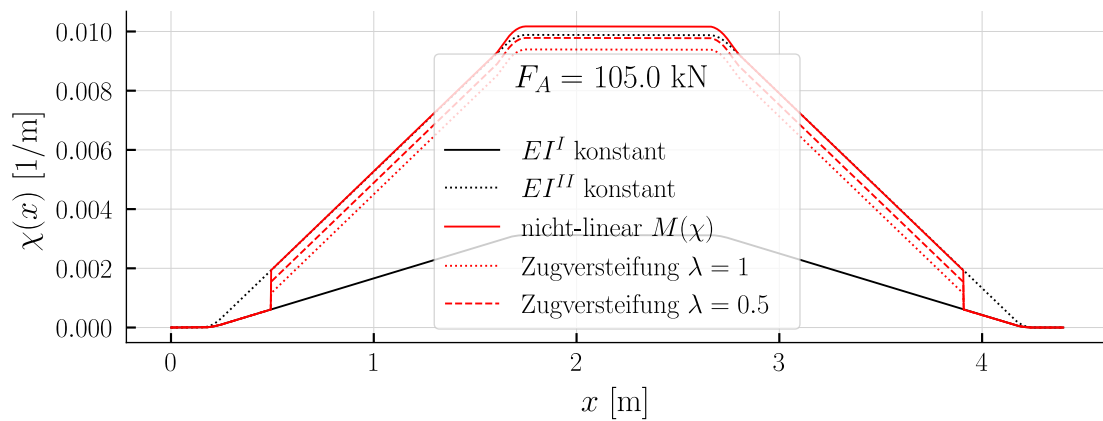


Abbildung 4.31: Krümmungsverlauf, mit unterschiedlichen Modellen ohne Versatzmass

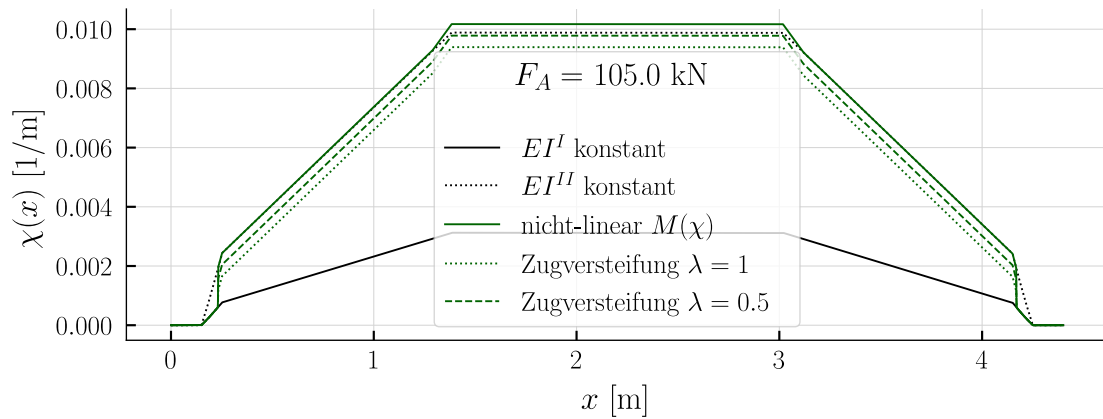


Abbildung 4.32: Krümmungsverlauf, mit unterschiedlichen Modellen mit Versatzmass

Das Versatzmass hat auf die Übereinstimmung der nicht-linearen Beziehung und der konstanten gerissenen Steifigkeit keinen Einfluss. Dies ist in der Abbildung 4.32 gezeigt. Ebenso ist der geringe Einfluss der Zugversteifung zu erkennen.

4.8.2 Verformung

Ein direkter Vergleich der Verformungen mit den gemessenen Versuchsergebnisse ermöglichen die Last-Verformungs-Diagramme. Dazu sind für die beschriebenen Modelle die Verformungen für sämtliche Laststufen bestimmt worden. In Abbildung 4.33 und Abbildung 4.34 sind diese für die Biegemomentenverläufe aus der Abbildung 4.6 und der Abbildung 4.7 gezeigt. Welche sich in der Berücksichtigung des Versatzmasses unterscheiden. Die Verformung ist an der Stelle w_1 gemessen, dargestellt ist die Position in der Abbildung 4.3.

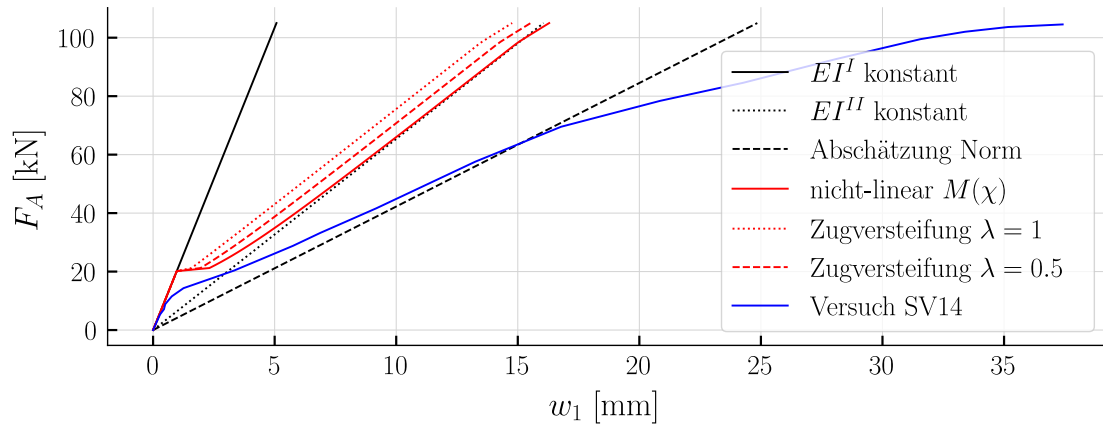


Abbildung 4.33: Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle w_1 ohne Versatzmass

In der Abbildung 4.33 ist zu erkennen, dass der Verlauf der gemessenen Verformungen in etwa linear steigt. Dies verdeutlicht, dass die Zugbewehrung nicht fließt. Aufgrund dessen sind die Resultate mit der nicht-linearen Beziehung und der konstanten gerissenen Biegesteifigkeit in etwa gleich. Auffallend ist jedoch die starke gesamte Abweichung des Verlaufs von den Messungen. Das System wird mit dieser Modellierung zu steif eingeschätzt. Des Weiteren zeigt die Normabschätzung eine überraschende Genauigkeit, bzw. beschreibt diese das Tragverhalten annähernd präzise. Sowie zeigt die Modellierung mit der konstante ungerissenen Biegesteifigkeit keine Übereinstimmung mit dem Versuch.

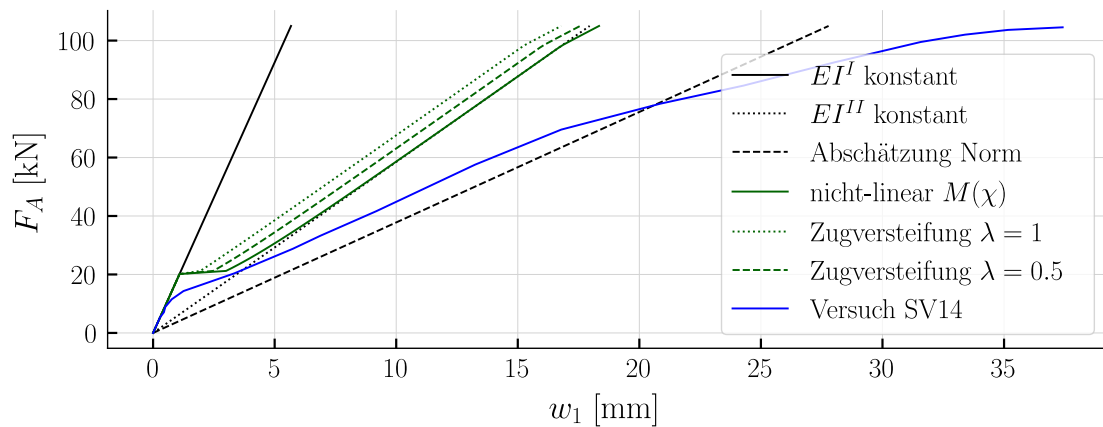


Abbildung 4.34: Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle w_1 mit Versatzmass

Wie bereits im Kapitel 3 aufgezeigt, führt das Versatzmass zu einem weicheren Verhalten. Die Abbildung 3.36 zeigt sämtliche Berechnungsmethoden unter Berücksichtigung dessen. Die Modelle zeigen eine Verbesserung hinsichtlich den Resultaten aus der Abbildung 4.33. Weiterhin liefert die Normabschätzung eine präzise Übereinstimmung mit den Messungen. Jedoch lässt sich festhalten, dass die Modellierungen mit Ausnahme der Normabschätzung keine treffenden Beschreibungen des Verformungsverhaltens darstellen.

Der Vierpunktbiegeversuch wird mit der Beschreibung der Resultate aus dem Fachwerkmodell abgeschlossen. Durch die Aufteilung der Traganteile in die einzelnen Fachwerkstäbe lassen sich Verformungsanteile aus der Schubbewehrung, der Gurte und der Betondruckstreben gesondert ermitteln, aufgezeigt ist dies in der Abbildung 4.35.

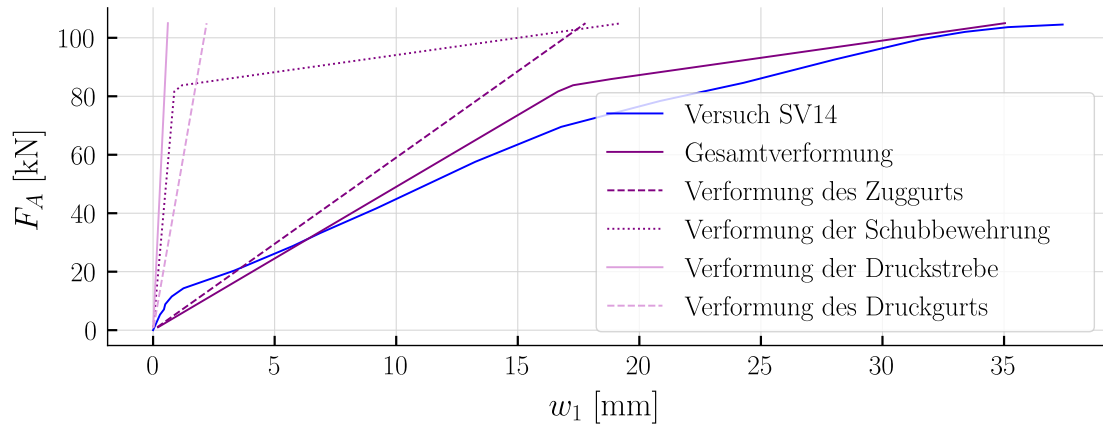


Abbildung 4.35: Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle w_1 mit Fachwerksmodell

Das Fachwerkmodell liefert einen treffenden Beschrieb des Verformungsverlaufs. Es zeigt sich, dass die Schubbewehrung einen relevanten Verformungsanteil trägt. Dies erklärt die Differenzen der vorangegangenen Modelle mit den gemessenen Verformungen, da diese keine Schubverformungen berücksichtigen. Lässt man die Verformung der Schubbewehrung aussen vor, so zeigt ein Vergleich des Zuggurtverlaufs in der Abbildung 4.35 mit den Verläufen Abbildung 4.34 eine Übereinstimmung. Des Weiteren ist ein Knick im Verformungsverlauf zu erkennen. Dieser ist auf das Fließen der Schubbewehrung zurückzuführen. Die Druckstrebe und der Druckgurt spielen eine untergeordnete Rolle.

Zu hinterfragen gilt es, dass in der Abbildung 4.2 ein Biegeversagen dokumentiert ist. Gemäss dem Fachwerkmodell stellt sich ein Versagen der Schubbewehrung ein.

5 Fazit

5.1 Rückblick

Das einleitende Kapitel der Modellvorstellung bietet einen breiten Überblick der Modelle zum Beschreiben von Verformungen im Stahlbetonbau. Die Komplexität der Modellbeschreibungen ist gering gehalten, was im Sinne der Anwendung dieser steht.

Die darauf folgende Anwendung am Dreipunktbiegeversuch zeigt die Stärken und Schwächen der Modelle vollumfänglich. Der Versuch zeigt, dass der Verformungsverlauf mit überschaubarem Rechenaufwand durchaus präzise abgebildet werden kann, vorzugsweise mit der numerischen Integration der Krümmung, basierend auf der nicht-linearen Momenten-Krümmungs-Beziehung. Die Stärke in diesem pragmatischen Ansatz liegt darin, dass komplexere Berechnungen damit verifiziert werden können, sofern aussagekräftige Querschnittsanalysen getroffen werden. Des Weiteren wird aufgezeigt, dass Verformungen primär durch Biegung verursacht, mit sämtlichen Modellen ansatzweise beschrieben werden können. Ausführlich beschrieben ist die Schwäche der Modellierung mittels der konstanten gerissenen oder ungerissenen Biegesteifigkeit, welche den Verformungsverlauf nur ansatzweise beschreiben. Die Fachwerksanalyse liefert bei diesem Versuch keine passenden Ergebnisse. Lediglich bei einer Anpassung der Fachwerkshöhe sind zutreffende Ergebnisse angetroffen worden. Das empfindliche Verhalten auf die gewählte Fachwerkshöhe ist als problematisch einzuschätzen. Denn in der Praxis fehlt ein vorgängiges Bild des Verformungsverlaufs, an welchem diese abgestimmt werden kann.

Der anschliessende Vierpunktbiegeversuch liefert weniger passende Ergebnisse für die Biegemodelle. Problematisch dabei ist, dass die Verformung primär nicht nur aus den Biegeverformungen resultieren, sondern auch Schubverformungen einen beträchtlichen Anteil liefern. Lediglich das Fachwerkmodell ist in der Lage einen präzisen Verformungsverlauf zu beschreiben. Die rechnerisch ermittelte Fachwerkshöhe hat in diesem Fall erfreulich passende Ergebnisse geliefert. Unsicherheiten bleiben hierbei bei der Wahl des Neigungswinkels der Spannungsfelder, welcher unrealistisch klein gewählt ist. Dies ist möglicherweise auf die gering gehaltene Schubbewehrung zurückzuführen, welche deutlich unter der Mindestquerkraftbewehrung liegt.

Es lässt sich abschliessend festhalten, dass die Arbeit eine Förderung des Grundverständnisses der Verformungen im Stahlbetonbau bietet, sowie praxistaugliche Werkzeuge zur rechnerischen Beschreibung dieser liefert.

5.2 Ausblick

Basierend auf dieser Arbeit, gilt es sich in einer folgenden Arbeit von den Stabtragwerken zu lösen. Es wird angestrebt, die beschriebenen Modelle auf Plattentragwerke zu erweitern. Unter der Verwendung gängiger Finite-Element-Programmen wird versucht, Verformungen mittels nicht-linearen Beziehungen zu beschreiben. Ein möglicher Ansatz zur Modellierung von Platten, basierend auf den erlangten Erkenntnissen, ist die Anordnung der Stabtragwerke als Trägerrost. Weiterhin wird das übergeordnete Ziel verfolgt, pragmatische Ansätze zu verfolgen.

Literatur

1. Jäger T, Marti P (2006) Versuche zum Querkraftwiderstand und zum Verformungsvermögen von Stahlbetonplatten. IBK Bericht 294. <https://doi.org/10.3929/ethz-a-005195576>
2. Tue NV, Ehmann R, Betschoga C, Tung ND (2019) Einfluss geringer Querkraftbewehrung auf die Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonbalken unterschiedlicher M/V-Kombinationen. Beton- und Stahlbetonbau 114(4):217–230. <https://doi.org/10.1002/best.201800075>
3. Marti P Baustatik. Wiley-VCH Verlag GmbH
4. Spathelf C (2022) Skript Teil 2: Gebrauchstauglichkeit. Betonbau - Ausgewählte Kapitel Hochschule Technik & Architektur Luzern
5. Stecher G-L (2022) Gebrauchstauglichkeit von Stahlbetonplatten: Ansätze zur Verformungsberechnung. Mathesis, HSLU Hochschule Luzern, MSE Master of Science in Engineering
6. SIA (2013) Norm SIA 262:2013 Betonbau. Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein
7. Thoma K (2020) Skript Balkentheorie. Stahlbeton
8. Jaeger T (2014) Extended sandwich model for reinforced concrete slabs: Shear strength with transverse reinforcement. Engineering Structures 74:218–228. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.05.025>
9. Jaeger T (2013) Extended sandwich model for reinforced concrete slabs: Shear strength without transverse reinforcement. Engineering Structures 56:1142–1153. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.06.035>
10. Annahütte (2023) [Grundlagen der hochfesten Bewehrungstechnik](#)