

MASTER OF SCIENCE IN ENGINEERING
Vertiefungsmodul I

Tragverhalten von
Stahlbetontragwerken

Grundlagen

Pascal Gitz

Horw, Donnerstag, 7. September 2023

Advisor: Prof. FH, Dr. Daniel Heinzmann
Experte: Dr. Thomas Jäger

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Sämtliche verwendeten Textausschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet.

Horw, 21. Januar 2023

Pascal Gitz

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird eine Tragwerksanalyse des Bemessungsbeispiels aus der SIA Dokumentation D0192, Kapitel 4.2.1.1 durchgeführt. Dabei wird ein linear-elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Weiter wird die Wand nur für den Grenzzustand der Tragsicherheit Typ 2 bemessen. Die Gebrauchstauglichkeit sowie der gerissene Zustand werden in dieser Arbeit nicht betrachtet.

In dieser Arbeit wird eine Tragwerksanalyse des Bemessungsbeispiels aus der SIA Dokumentation D0192, Kapitel 4.2.1.1 durchgeführt. Dabei wird ein linear-elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Weiter wird die Wand nur für den Grenzzustand der Tragsicherheit Typ 2 bemessen. Die Gebrauchstauglichkeit sowie der gerissene Zustand werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. In dieser Arbeit wird eine Tragwerksanalyse des Bemessungsbeispiels aus der SIA Dokumentation D0192, Kapitel 4.2.1.1 durchgeführt. Dabei wird ein linear-elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Weiter wird die Wand nur für den Grenzzustand der Tragsicherheit Typ 2 bemessen. Die Gebrauchstauglichkeit sowie der gerissene Zustand werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. In dieser Arbeit wird eine Tragwerksanalyse des Bemessungsbeispiels aus der SIA Dokumentation D0192, Kapitel 4.2.1.1 durchgeführt. Dabei wird ein linear-elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Weiter wird die Wand nur für den Grenzzustand der Tragsicherheit Typ 2 bemessen. Die Gebrauchstauglichkeit sowie der gerissene Zustand werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. In dieser Arbeit wird eine Tragwerksanalyse des Bemessungsbeispiels aus der SIA Dokumentation D0192, Kapitel 4.2.1.1 durchgeführt. Dabei wird ein linear-elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Weiter wird die Wand nur für den Grenzzustand der Tragsicherheit Typ 2 bemessen. Die Gebrauchstauglichkeit sowie der gerissene Zustand werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. In dieser Arbeit wird eine Tragwerksanalyse des Bemessungsbeispiels aus der SIA Dokumentation D0192, Kapitel 4.2.1.1 durchgeführt. Dabei wird ein linear-elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Weiter wird die Wand nur für den Grenzzustand der Tragsicherheit Typ 2 bemessen. Die Gebrauchstauglichkeit sowie der gerissene Zustand werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. In dieser Arbeit wird eine Tragwerksanalyse des Bemessungsbeispiels aus der SIA Dokumentation D0192, Kapitel 4.2.1.1 durchgeführt. Dabei wird ein linear-elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Weiter wird die Wand nur für den Grenzzustand der Tragsicherheit Typ 2 bemessen. Die Gebrauchstauglichkeit sowie der gerissene Zustand werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. In dieser Arbeit wird eine Tragwerksanalyse des Bemessungsbeispiels aus der SIA Dokumentation D0192, Kapitel 4.2.1.1 durchgeführt. Dabei wird ein linear-elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Weiter wird die Wand nur für den Grenzzustand der Tragsicherheit Typ 2 bemessen. Die Gebrauchstauglichkeit sowie der gerissene Zustand werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. In dieser Arbeit wird eine Tragwerksanalyse des Bemessungsbeispiels aus der SIA Dokumentation D0192, Kapitel 4.2.1.1 durchgeführt. Dabei wird ein linear-elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Weiter wird die Wand nur für den Grenzzustand der

Tragsicherheit Typ 2 bemessen. Die Gebrauchstauglichkeit sowie der gerissene Zustand werden in dieser Arbeit nicht betrachtet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
1.1	Hintergrund	6
2	Gebrauchstauglichkeit	8
2.1	Zuggurtmodell	8
2.2	Biegeverformungen	8
2.3	Mohrsche Analogie	9
3	Zuggurtmodell	10
3.1	Verbund Schubspannungs-Schlupfbeziehung	10
4	Deformationsberechnung an Dreipunktbiegeversuch	11
4.1	Versuchsbeschrieb	11
4.2	Baustoffeigenschaften	11
4.3	Zustandslinien für Biegeträger	12
4.4	Abschätzung nach Norm	17
4.5	Numerische Integration der Krümmung	18
4.6	Erweiterung Momenten-Krümmungsdiagramm	31
	Literatur	35

1 Einleitung

1.1 Hintergrund

Aufbauend auf den bisherigen Grundlagen der Vorlesungen Beton- und Stahlbau und Betonbau und Mauerwerk behandelt dieses Modul ausgewählte weiterführende Themen im Bereich des Stahlbetonbaus. In den bisherigen Lehrveranstaltungen stand die Tragsicherheit, die Ermittlung der Traglast und die sichere Bemessung von Stahlbetontragelementen im Vordergrund. Oft werden jedoch Überlegungen bezüglich Durchbiegungen, Steifigkeiten, mögliche Zwangsbeanspruchungen und die Dauerhaftigkeit eines Bauwerks massgebend für den konzeptionellen Entwurf und die spätere Bemessung eines Tragwerks. Diese Themen werden im Rahmen der Gebrauchstauglichkeit in diesem ersten Teil der Autographie aufgegriffen. Die rechnerische Behandlung des ausgeprägten nichtlinearen Last-Verformungsverhalten von Stahlbetonbauteilen, welche mit der Rissbildung einhergeht, wird anhand von Berechnungsbeispielen aufgezeigt und mögliche konstruktive Massnahmen zur Gewährleistung der Anforderungen werden illustriert. Der vorliegende Teil der Autographie basiert auf dem Skript von Prof. Dr. Daniel Heinzmann vom FS 2018 an der Hochschule Luzern sowie diverse Forschungsarbeiten und Publikationen. Ferner gilt meinen Dank Frau Barbara Sorrentino und Herrn Gian-Luca Stecher für die Durchsicht des Skripts sowie die Erarbeitung der Beispiele und Beispiellösungen. Horw, 2020

Aufbauend auf den bisherigen Grundlagen der Vorlesungen Beton- und Stahlbau und Betonbau und Mauerwerk behandelt dieses Modul ausgewählte weiterführende Themen im Bereich des Stahlbetonbaus. In den bisherigen Lehrveranstaltungen stand die Tragsicherheit, die Ermittlung der Traglast und die sichere Bemessung von Stahlbetontragelementen im Vordergrund. Oft werden jedoch Überlegungen bezüglich Durchbiegungen, Steifigkeiten, mögliche Zwangsbeanspruchungen und die Dauerhaftigkeit eines Bauwerks massgebend für den konzeptionellen Entwurf und die spätere Bemessung eines Tragwerks. Diese Themen werden im Rahmen der Gebrauchstauglichkeit in diesem ersten Teil der Autographie aufgegriffen. Die rechnerische Behandlung des ausgeprägten nichtlinearen Last-Verformungsverhalten von Stahlbetonbauteilen, welche mit der Rissbildung einhergeht, wird anhand von Berechnungsbeispielen aufgezeigt und mögliche konstruktive Massnahmen zur Gewährleistung der Anforderungen werden illustriert. Der vorliegende Teil der Autographie basiert auf dem Skript von Prof. Dr. Daniel Heinzmann vom FS 2018 an der Hochschule Luzern sowie diverse Forschungsarbeiten und Publikationen. Ferner gilt meinen

KAPITEL 1. EINLEITUNG

Dank Frau Barbara Sorrentino und Herrn Gian-Luca Stecher für die Durchsicht des Skripts sowie die Erarbeitung der Beispiele und Beispiellösungen. Horw, 2020

Aufbauend auf den bisherigen Grundlagen der Vorlesungen Beton- und Stahlbau und Betonbau und Mauerwerk behandelt dieses Modul ausgewählte weiterführende Themen im Bereich des Stahlbetonbaus. In den bisherigen Lehrveranstaltungen stand die Tragsicherheit, die Ermittlung der Traglast und die sichere Bemessung von Stahlbetontragelementen im Vordergrund. Oft werden jedoch Überlegungen bezüglich Durchbiegungen, Steifigkeiten, mögliche Zwangsbeanspruchungen und die Dauerhaftigkeit eines Bauwerks massgebend für den konzeptionellen Entwurf und die spätere Bemessung eines Tragwerks. Diese Themen werden im Rahmen der Gebrauchstauglichkeit in diesem ersten Teil der Autographie aufgegriffen. Die rechnerische Behandlung des ausgeprägten nichtlinearen Last-Verformungsverhalten von Stahlbetonbauteilen, welche mit der Rissbildung einhergeht, wird anhand von Berechnungsbeispielen aufgezeigt und mögliche konstruktive Massnahmen zur Gewährleistung der Anforderungen werden illustriert. Der vorliegende Teil der Autographie basiert auf dem Skript von Prof. Dr. Daniel Heinzmann vom FS 2018 an der Hochschule Luzern sowie diverse Forschungsarbeiten und Publikationen. Ferner gilt meinen Dank Frau Barbara Sorrentino und Herrn Gian-Luca Stecher für die Durchsicht des Skripts sowie die Erarbeitung der Beispiele und Beispiellösungen. Horw, 2020

2 Gebrauchstauglichkeit

Folgend werden die wichtigsten Grundsätze nach [1] in eigenen Worten beschrieben.

2.1 Zuggurtmodell

Das Zuggurtmodell beschreibt das Spannungsdehnungs-Verhalten eines Beton-Betonstahl Verbundquerschnitts. Folgende Verhaltenswerte sind ausschlaggebend:

- Der Verbund verhält sich bis zum Reißen des Betons linear elastisch.
- Beim Reißen des Betons entstehen Risse. Der Rissabstand kann mittels einer Gleichung eingegrenzt werden.
- Im Riss ist der Beton Spannungsfrei.
- Zwischen den Rissen herrscht ein Gleichgewicht zwischen Betonstahlspannung und Verbundschubspannung, sowie der Einwirkung.
- Die Verbundschubspannung kann anhand einer Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung ermittelt werden. Dabei gilt, der Schlupf ist bei den Rissen maximal und führt zu null in der Mitte des Rissbereichs.
- Bei weiterer Laststeigerung beginnt der Betonstahl im Riss zu fließen.
- Durch das Fließen des Stahls entstehen weitere Risse. Sowie gilt beim Fließen, dass sich die Verbundschubspannung reduziert. Durch die Reduktion der Verbundschubspannung erhöht sich die Stahlspannung im Bereich, welcher noch nicht fließt (vom Riss richtung Zentrum des Rissbereichs).
- Aus dem Modell lassen sich mittlere Dehnungen ermitteln, welche ein Mass für die Rissbreiten geben.

Allgemein gilt es Schwinddehnungen zu berücksichtigen.

2.2 Biegeverformungen

- Aufgrund eines Momenten-Krümmungsdiagramms können Biegeverformungen bestimmt werden.
- Es gilt zwischen einer gerissenen und einer ungerissenen Biegesteifigkeit zu unterscheiden. Diese können leicht an einem Querschnitt ermittelt werden.

- Wie erwähnt, berücksichtigt das Zuggurtmodell eine Verbund Schubspannung im Rissbereich (zwischen zwei Rissen). Dies wird folgend als Zugversteifung bezeichnet.
- Marti hat einen Ansatz um die Zugversteifung bei Biegeverformungen zu berücksichtigen. Dabei wird eine Krümmungsdifferenz ermittelt. Diese ist Belastungsunabhängig und folglich eine Vereinfachung.

2.3 Mohrsche Analogie

- Wird bei einem Biegeträger die Momentenlinie zwei mal abgeleitet, so erhält man die Belastung. Dazu gilt, wird die Deformation zwei mal abgeleitet, so erhält man die Momentenlinie geteilt durch die Biegesteifigkeit.

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = M'' = -q_z$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = w'' = -\frac{M}{EI}$$

- Die Biegelinien sind für geübte Studenten einfach zu bestimmen. Die Analogie besteht in der zweimaligen Ableitung. Wird nun die Biegelinie als Einwirkung auf das System gegeben, kann daraus die Verformungslinie bestimmt werden.
- Es gilt das System mit entsprechenden Randbedingungen zu erstellen, dazu gibt es eine Tabelle für Auflager im analogen System (Analogieträger).

3 Zuggurtmodell

3.1 Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung

Die Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung wird in [1] folgendermassen postuliert: Es wird hier auf die Stahlspannung sich bezogen, nicht auf den Schlupf

$$\tau_b(\sigma_s) = \begin{cases} 0 & \text{for } \sigma_s \leq 0 \\ 0.6 f_{cc}^{\frac{2}{3}} & \text{for } f_{sy} \geq \sigma_s \\ 0.3 f_{cc}^{\frac{2}{3}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.1)$$

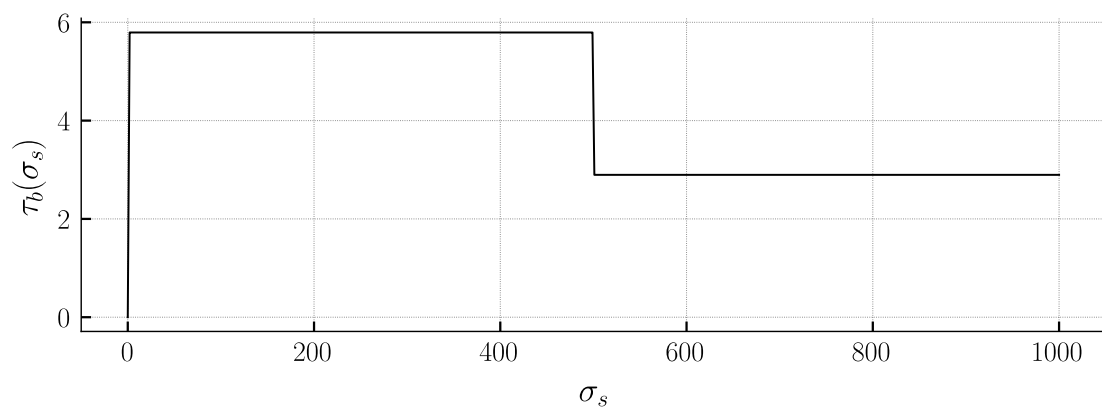


Abbildung 3.1: Verbundschubspannung als Funktion der Betonstahlspannung

4 Deformationsberechnung an Dreipunktbiegeversuch

4.1 Versuchsbeschreibung

Gewählt wird aus [2] der Versuch:

4.2 Baustoffeigenschaften

Aus den Prüfkörper ermittelten Baustoffeigenschaften sind an das Bauteil anzupassen:

4.2.1 Beton

Druckfestigkeit gemäss [3]:

$$f_c = 2.7 f_{cc}^{\frac{2}{3}} \quad (4.1)$$

$$f_c = \frac{40.827 \text{N}}{\text{mm}^2} \quad (4.2)$$

Zugfestigkeit nach [4]:

$$f_{ct} = 0.3 f_{cc}^{\frac{2}{3}} \quad (4.3)$$

$$f_{ct} = \frac{4.54 \text{N}}{\text{mm}^2} \quad (4.4)$$

Elastizitätsmodul nach [4]:

$$E_c = 10000 \sqrt[3]{f_{cc}} \quad (4.5)$$

$$E_c = \frac{38886.0\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (4.6)$$

4.3 Zustandslinien für Biegeträger

Nach [5] Kapitel 18.4:

Es wird in diesem Kapitel keine Herleitung der Beziehung zwischen Einwirkung und der Deformation dargestellt. Der Fokus liegt auf der praktischen Anwendung.

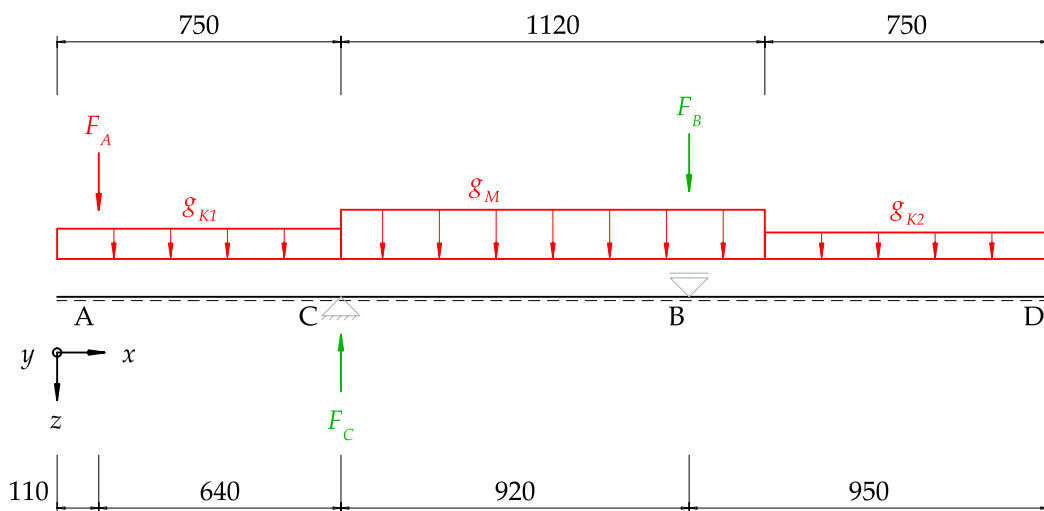


Abbildung 4.1: Statisches System der Versuchsanordnung

Das Eigengewicht wird vernachlässigt aus folgenden Gründen:

- Die Punktlast F_A ist massgebend am Biegemomentenverlauf beteiligt.
- Die Deformationen im Versuchsbericht aus [2] sind nach dem Einbau des Trägers gemessen worden. Folglich wurde die Deformation des Eigengewichts nicht aufgezeichnet.

$$g_M, g_{k1}, g_{k2} = 0 \quad (4.7)$$

Unter Berücksichtigung der Auflagerbreiten folgt das System in [Abbildung 4.2](#)

KAPITEL 4. DEFORMATIONSBERECHNUNG AN DREIPUNKTBIEGEVERSUCH

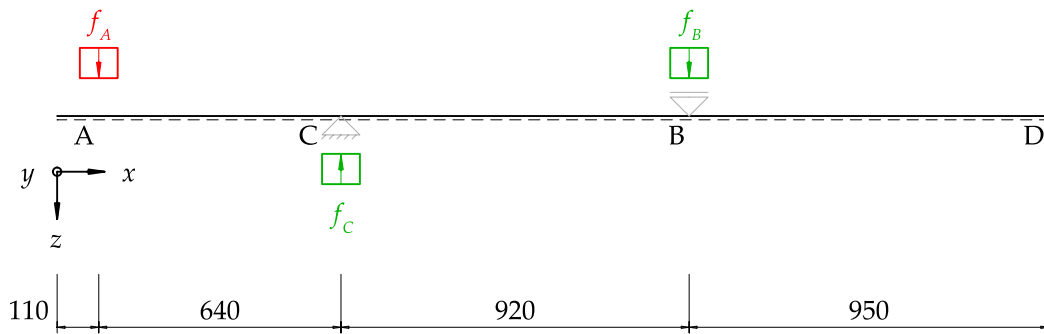


Abbildung 4.2: Angepasstes statisches System der Versuchsanordnung

Folgende Parameter werden für die Berechnung verwendet:

$a_1 = 0.11 \text{ m}$	$a_2 = 0.64 \text{ m}$
$a_3 = 0.92 \text{ m}$	$a_4 = 0.95 \text{ m}$
$b = 800.0 \text{ mm}$	$b_{\text{Auflager}} = 100 \text{ mm}$
$h = 200.0 \text{ mm}$	

4.3.1 Auflagerkräfte

Durch Gleichgewicht der Momente um Punkt C und B lassen sich die Auflagerkräfte bestimmen:

Die Balkenlänge bestimmt sich zu:

$$l_{\text{tot}} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad (4.8)$$

$$l_{\text{tot}} = 2.62 \text{ m} \quad (4.9)$$

Durch Gleichgewicht um die Auflagerpunkte folgt:

$$0 = F_A a_2 - F_B a_3 \quad (4.10)$$

$$0 = F_A (a_2 + a_3) - F_C a_3 \quad (4.11)$$

Daraus folgen die Reaktionskräfte:

$$F_B = \frac{F_A a_2}{a_3} \quad (4.12)$$

$$F_C = \frac{F_A a_2 + F_A a_3}{a_3} \quad (4.13)$$

Um die Auflagerbreite zu berücksichtigen folgen die Kräfte zu:

$$f_B = \frac{F_A a_2}{a_3 b_{\text{Auflager}}} \quad (4.14)$$

$$f_C = \frac{F_A a_2 + F_A a_3}{a_3 b_{\text{Auflager}}} \quad (4.15)$$

$$f_A = \frac{F_A}{b_{\text{Auflager}}} \quad (4.16)$$

4.3.2 Zustandslinien

Anhand der Differentialgleichung für Biegeträger können die Zustandslinien bestimmt werden:

$$q(x) = -EI^I \frac{d^4}{dx^4} w \quad (4.17)$$

4.3.2.1 Vollständig ungerissen

Die Biegesteifigkeit des ungerissenen Querschnitts folgt zu:

$$EI = \frac{E_c b h^3}{12} \quad (4.18)$$

$$EI = 2.07 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2 \quad (4.19)$$

Der Verlauf der Einwirkungen ist der folgende. Die positive Stabseite ist strichliert dargestellt. Folglich sind Einwirkungen nach "unten" positiv definiert.

KAPITEL 4. DEFORMATIONSBERECHNUNG AN DREIPUNKTBIEGEVERSUCH

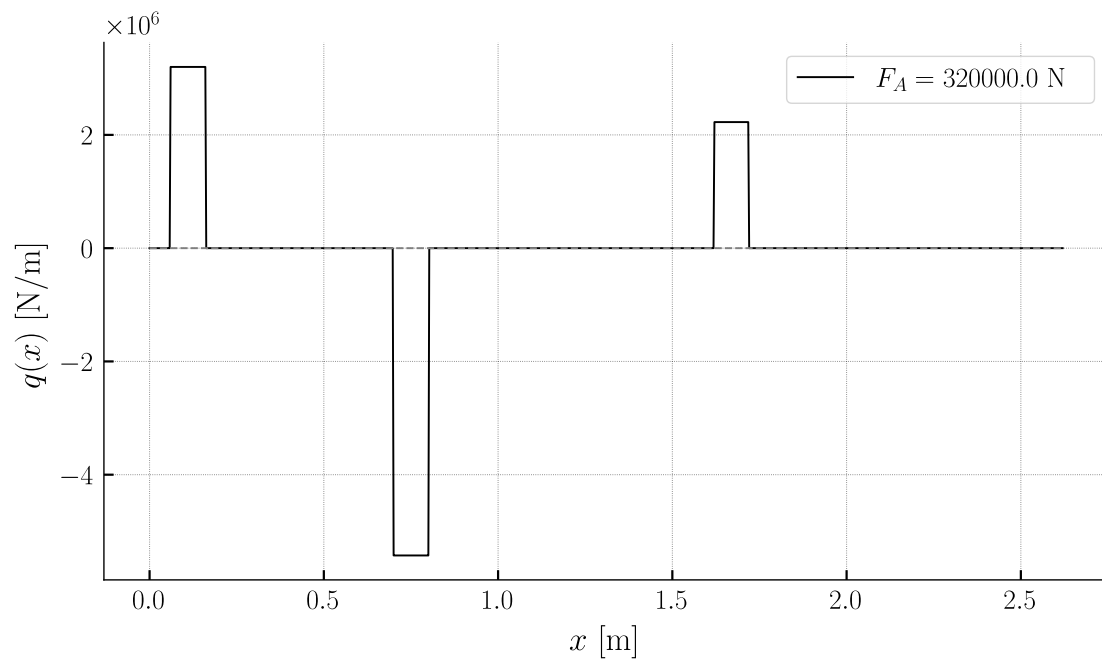


Abbildung 4.3: Verlauf der Einwirkungen und Reaktionskräften

Durch Integration der Einwirkung resultiert der Querkraftverlauf. Die Integrationskonstante ist hier null.

$$V(x) = - \int q(x) + c_1$$

Dabei kann mit der Randbedingung $V(0) = 0$ die Integrationskonstante ermittelt werden.

KAPITEL 4. DEFORMATIONSBERECHNUNG AN DREIPUNKTBIEGEVERSUCH

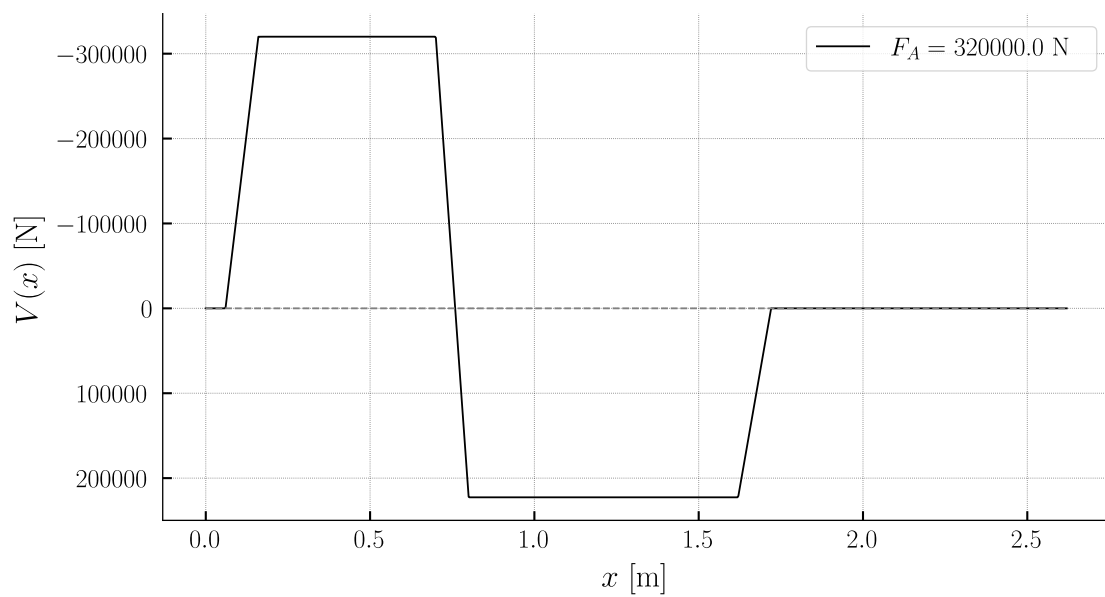


Abbildung 4.4: Verlauf der Querkräfte

Der Verlauf der Biegemomente lässt sich durch Integration der Querkräfte bestimmen:

$$M(x) = \int V(x) + c_2$$

Dabei kann mit der Randbedingung $M(0) = 0$ die Integrationskonstante ermittelt werden.

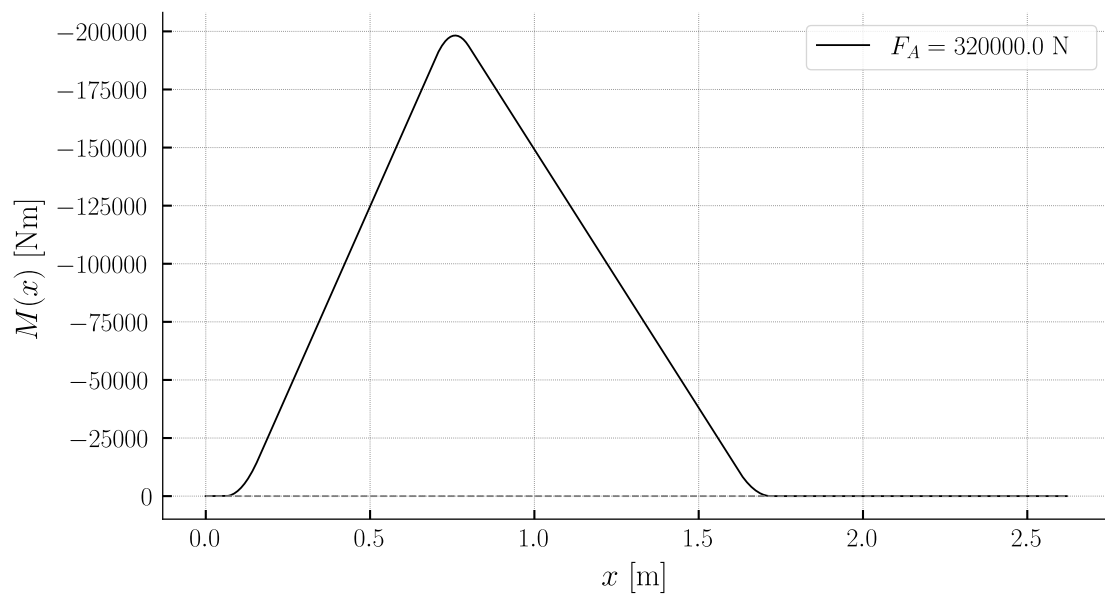


Abbildung 4.5: Verlauf der Biegemomente

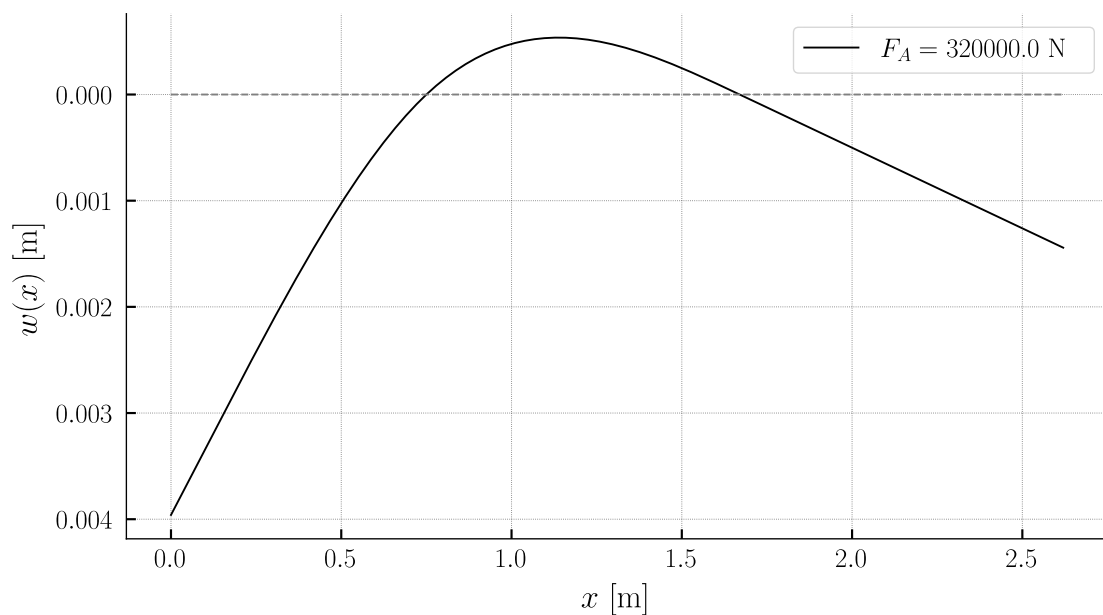
KAPITEL 4. DEFORMATIONSBERECHNUNG AN DREIPUNKTBIEGEVERSUCH

Die Deformationen entsprechen dem integrierten Verlauf der Biegemomente, dividiert durch die Biegesteifigkeit, welche als konstant angesetzt wird.

$$\phi(x) = \frac{1}{EI} \int M(x) + c_3 \quad (4.20)$$

$$w(x) = \int \phi(x) + c_4 \quad (4.21)$$

Dabei wird mit den Randbedingungen $w(C) = 0$ und $w(B) = 0$ die Integrationskonstanten ermittelt.



Dabei folgt die Deformation $w_1 = w(0.11)$. Das erhaltene Resultat entspricht einem vollumfänglich ungerissenen Verhalten.

$$20739160.3734121 \quad (4.22)$$

$$w_1 = 3.28 \text{ mm} \quad (4.23)$$

4.4 Abschätzung nach Norm

Nach der bestimmten elastischen Deformation kann die Deformation anhand des vollständig gerissenen Querschnitts nach SIA262 ermittelt werden. Ohne Druckbewehrung und Kriecheinflüsse folgt die Gleichung zu :

$$w_{1II,SIA} = \frac{0.75}{10\rho^{0.7}} \left(\frac{h}{d}\right)^3 w_1 \quad (4.24)$$

Dabei entspricht der geometrische Bewehrungsgehalt:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (4.25)$$

Die Querschnittsfläche der Stäbe:

$$A_s = 2b \frac{\pi \phi_s^2}{4s_x} \quad (4.26)$$

$$A_s = 2262.0 \text{mm}^2 \quad (4.27)$$

Die statische Höhe:

$$d = -\frac{3\phi_s}{2} - c_{nom} + h \quad (4.28)$$

$$d = 162.0 \text{mm} \quad (4.29)$$

Die Deformation entspricht abschliessend:

$$w_{1II,SIA} = 15.7 \text{mm} \quad (4.30)$$

4.5 Numerische Integration der Krümmung

4.5.1 Einführung

Ziel ist die Deformationen des Versuchs A3 in der Versuchsanordnung 2 aus [2] nachzurechnen.

4.5.2 Momenten-Krümmungsdiagramm

Das Momenten-Krümmungsdiagramm ist geeignet zur Beschreibung des Tragverhaltens von überwiegend auf Biegung beanspruchte Stabtragwerke. Zur rechnerischen Ermittlung gelten folgende Annahmen, wie in [1] beschrieben:

- Eben- und senkrechtbleiben der Querschnitte
- Die Betonzugfestigkeit f_{ct} wird, für Zustände nach dem Überschreiten von f_{ct} , vernachlässigt
- Linear elastisches Verhalten von Stahl und Beton für die Spannungs- und Verformungsberechnung
- Die Bewehrung überträgt Zug- und Druckkräfte ausschliesslich in Stabrichtung

4.5.2.1 Anwendung auf Versuchsbeispiel

Folgend wird ein Momentenkrümmungsdiagramm für den Querschnitt aus dem beschriebenen Versuch berechnet. Die vorhandene Querkraftbewehrung ist nicht dargestellt in Abbildung 4.6.

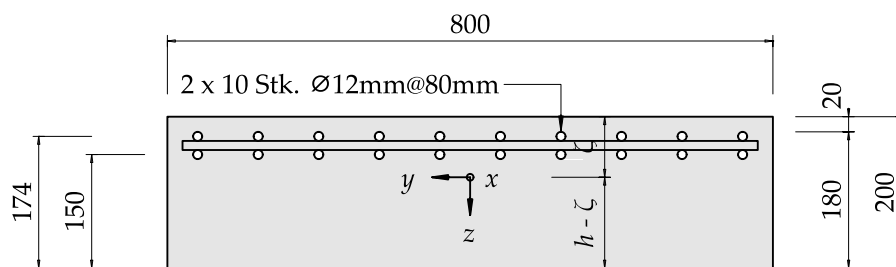


Abbildung 4.6: Querschnitt des Versuchs A3 zur Bestimmung des Momenten-Krümmungsdiagramms

Vereinfacht wird der Querschnitt folgender massen:

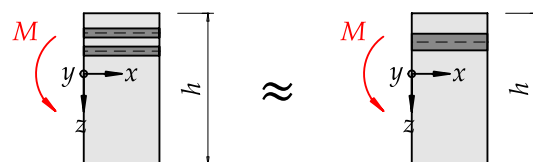


Abbildung 4.7: Vereinfachung der Bewehrungsführung

4.5.2.1.1 Verwendete Parameter

KAPITEL 4. DEFORMATIONSBERECHNUNG AN DREIPUNKTBIEGEVERSUCH

$$E_s = 200000.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$c_{nom} = 20.0 \text{ mm}$$

$$f_{su} = 630.3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$s_x = 80.0 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_{su} = 0.1117$$

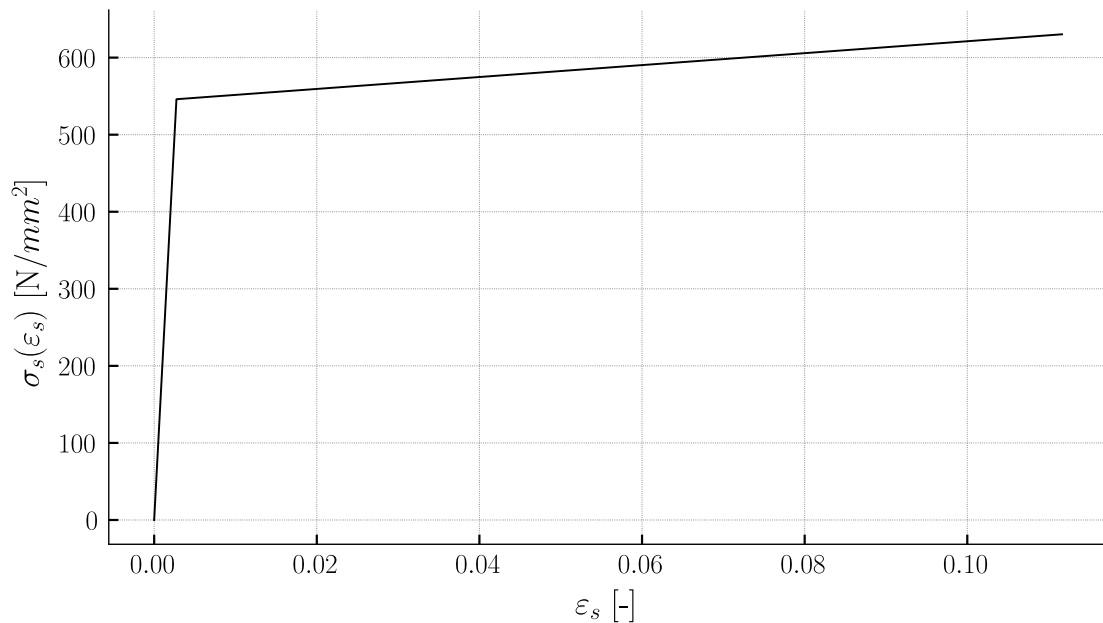
$$\varnothing_s = 12.0 \text{ mm}$$

$$f_{cc} = 58.8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$f_{sy} = 546.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\varepsilon_{cu} = 0.0023$$

4.5.2.1.2 Baustoffkennlinien



4.5.2.1.3 Schwerpunkt des Querschnitts

Durch die Bestimmung der Wertigkeit n kann der Querschnitt als homogener Betonquerschnitt zur Bestimmung des Schwerpunkts behandelt werden.

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (4.31)$$

$$n = 5.14 \quad (4.32)$$

Die Querschnittsfläche der Bewehrung:

$$A_s = 2b \frac{\pi \varnothing_s^2}{4s_x} \quad (4.33)$$

$$A_s = 2262.0 \text{ mm}^2 \quad (4.34)$$

KAPITEL 4. DEFORMATIONSBERECHNUNG AN DREIPUNKTBIEGEVERSUCH

Die Betonquerschnittsfläche:

$$A_c = bh \quad (4.35)$$

$$A_c = 160000.0 \text{mm}^2 \quad (4.36)$$

Die ideelle Querschnittsfläche resultiert zu:

$$A_i = A_c + A_s (n - 1) \quad (4.37)$$

$$A_i = 169372.0 \text{mm}^2 \quad (4.38)$$

$$\zeta_c = \frac{\frac{A_c h}{2} + A_s (1.5 \varnothing_s + c_{nom}) (n - 1)}{A_i} \quad (4.39)$$

$$\zeta_c = 96.6 \text{mm} \quad (4.40)$$

4.5.2.1.4 Flächenträgheitsmoment

Das Flächenträgheitsmoment wird ebenfalls am ideellen Querschnitt bestimmt. Die Eigentragheitsmomente der Kreisquerschnitte der Bewehrung sind nicht berücksichtigt, lediglich der Steiner-Anteil fließt in die Berechnung ein:

$$I^I = A_s (n - 1) \left(\frac{3\varnothing_s}{2} + c_{nom} - \zeta_c \right)^2 + \frac{bh^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} - \zeta_c \right)^2 \quad (4.41)$$

$$I^I = 5.67 \cdot 10^8 \text{mm}^4 \quad (4.42)$$

4.5.2.1.5 Ungerissen - Zustand 1

Der Querschnitt verbleibt elastisch. Folglich kann das Flächenträgheitsmoment mit E_c multipliziert werden und es resultiert die ungerissene Biegesteifigkeit:

$$EI^I = E_c I^I \quad (4.43)$$

$$EI^I = 2.206 \cdot 10^{13} \text{Nmm}^2 \quad (4.44)$$

4.5.2.1.5.1 Rissmoment

Durch die Ermittlung des Rissmoments kann die Krümmung vor dem Reißen des Betons ermittelt werden. Die Betonzugkraft wird nicht berücksichtigt.

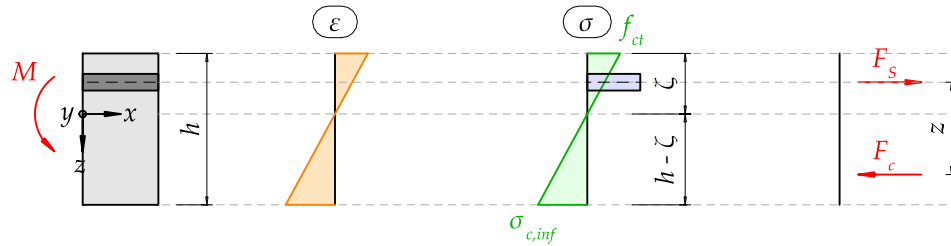


Abbildung 4.8: Querschnittsanalyse vor dem Reißen des Betons

Die Druckspannung bestimmt sich zu:

$$\sigma_{cinf,1} = \frac{f_{ct} (h - \zeta_c)}{\zeta_c} \quad (4.45)$$

$$\sigma_{cinf,1} = \frac{4.86 \text{ N}}{\text{mm}^2} \quad (4.46)$$

Der Hebelarm der inneren Kräfte:

$$z_1 = -1.5 \varnothing_s - c_{nom} + \frac{2h}{3} + \frac{\zeta_c}{3} \quad (4.47)$$

$$z_1 = 128.0 \text{ mm} \quad (4.48)$$

Die Betondruckkraft:

$$F_{c,1} = \frac{b \sigma_{cinf,1} (h - \zeta_c)}{2} \quad (4.49)$$

$$F_{c,1} = 2.01 \cdot 10^5 \text{ N} \quad (4.50)$$

Und schliesslich das Rissmoment:

$$M_r = F_{c,1} z_1 \quad (4.51)$$

$$M_r = 2.56 \cdot 10^7 \text{ Nmm} \quad (4.52)$$

KAPITEL 4. DEFORMATIONSBERECHNUNG AN DREIPUNKTBIEGEVERSUCH

Aus dem Rissmoment folgt die Krümmung beim Reißen:

$$\chi_r = \frac{M_r}{EI} \quad (4.53)$$

$$\chi_r = \frac{0.00116}{\text{m}} \quad (4.54)$$

4.5.2.1.6 Gerissen Elastisch - Zustand 2

Der Querschnitt nach dem Reißen ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Der Betonstahl hat die Fließgrenze noch nicht erreicht. Der Beton die Druckfestigkeit ebenfalls nicht.

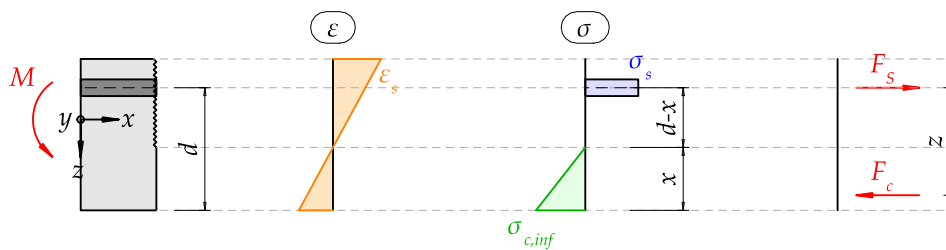


Abbildung 4.9: Querschnittsanalyse nach dem Reißen des Betons

Dabei beträgt die statische Höhe:

$$d = -\frac{3\phi_s}{2} - c_{nom} + h \quad (4.55)$$

$$d = 162.0\text{mm} \quad (4.56)$$

Nachfolgend werden bekannte Beziehungen dargestellt. Mittels Gleichgewicht der Kräfte lässt sich die Betondruckzonenhöhe und folglich die gerissene Biegesteifigkeit herleiten.

Die Betonstahlzugkraft beträgt:

$$F_{z,2} = A_s \sigma_{s,2} \quad (4.57)$$

Die Betonstahlspannung für linear elastisches Verhalten:

$$\sigma_{s,2} = E_s \varepsilon_{s,2} \quad (4.58)$$

Die Betondruckkraft anhand des dreieckigen Verlaufs in Abbildung 4.9:

KAPITEL 4. DEFORMATIONSBERECHNUNG AN DREIPUNKTBIEGEVERSUCH

$$F_{c,2} = \frac{b\sigma_{cinf,2}x_2}{2} \quad (4.59)$$

Die Betonspannung ebenfalls bestimmt durch ein linear elastisches Verhalten:

$$\sigma_{cinf,2} = E_c \varepsilon_{c,2} \quad (4.60)$$

Die Betondehnung anhand des Dehnungsverlaufs in Abbildung 4.9:

$$\varepsilon_{c,2} = \frac{\varepsilon_{s,2}x_2}{d - x_2} \quad (4.61)$$

Abschliessend sind die Kräfte ins Gleichgewicht zu setzen:

$$F_{c,2} = F_{z,2} \quad (4.62)$$

Einsetzen der bestimmten Gleichungen in die Gleichgewichtsbeziehung:

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (4.63)$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (4.64)$$

Dabei wird mit n und ρ substituiert um die Gleichung zu vereinfachen.

$$E_s b d \rho \varepsilon_{s,2} = \frac{E_s b \varepsilon_{s,2} x_2^2}{2n(d - x_2)} \quad (4.65)$$

Dies ist nach x aufzulösen:

$$x_2 = d \left(-n\rho + \sqrt{n\rho(n\rho + 2)} \right) \quad (4.66)$$

$$x_2 = 55.6\text{mm} \quad (4.67)$$

Zur Bestimmung der Krümmung ist die Betonstahldehnung erforderlich. Diese bedingt ein einwirkendes Moment. Dazu wird das bereits bekannte Rissmoment angesetzt.

$$M_2 = F_{z,2} \left(d - \frac{x_2}{3} \right) \quad (4.68)$$

$$M_2 = M_r \quad (4.69)$$

$$M_r = A_s E_s \varepsilon_{s,2} \left(d - \frac{x_2}{3} \right) \quad (4.70)$$

Daraus resultiert die Betonstahldehnung:

$$\varepsilon_{s,2} = 0.000395 \quad (4.71)$$

Die Krümmung kann anhand des Dehnungsverlaufs in Abbildung 4.9 bestimmt werden:

$$\chi^{II} = \frac{\varepsilon_{s,2}}{d - x_2} \quad (4.72)$$

$$\chi^{II} = \frac{0.00371}{\text{m}} \quad (4.73)$$

Abschliessend folgt die gerissene Biegesteifigkeit zu:

$$EI^{II} = \frac{M_2}{\chi^{II}} \quad (4.74)$$

$$EI^{II} = 6.9 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2 \quad (4.75)$$

4.5.2.1.7 Fliesen der Bewehrung - Zustand 3

Die Biegesteifigkeit EI^{II} gilt bis die Bewehrung fliesst oder der Beton beginnt zu plastifizieren.

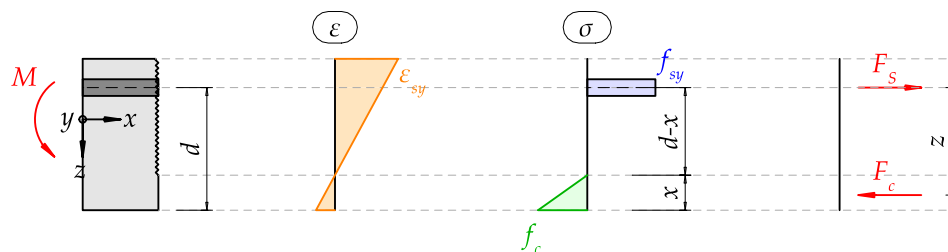


Abbildung 4.10: Querschnittsanalyse für reine Biegung beim Fliesen der Bewehrung

Dazu gilt es zuerst Gleichgewicht der Kräfte zu formulieren:

KAPITEL 4. DEFORMATIONSBERECHNUNG AN
DREIPUNKTBIEGEVERSUCH

$$\sigma_{cinf,3} = \frac{E_c f_{sy} x_3}{E_s (d - x_3)} \quad (4.76)$$

$$A_s f_{sy} = \frac{b \sigma_{cinf,3} x_3}{2} \quad (4.77)$$

Aufgelöst nach der Druckzonenhöhe:

$$x_3 = \frac{-A_s E_s + \sqrt{A_s E_s (A_s E_s + 2 E_c b d)}}{E_c b} \quad (4.78)$$

$$x_3 = 55.6 \text{ mm} \quad (4.79)$$

Daraus lässt sich das Flieissmoment bestimmen, welches den Endpunkt im Momenten-Krümmungsdiagramm für den Zustand 2 definiert:

$$M_y = A_s f_{sy} \left(d - \frac{x_3}{3} \right) \quad (4.80)$$

$$M_y = 1.77 \cdot 10^8 \text{ mmN} \quad (4.81)$$

Die Flieissdehnung des Betonstahls entspricht:

$$\varepsilon_{sy} = 0.00273 \quad (4.82)$$

Abschliessend die Krümmung für den Endpunkt des Zustands 2:

$$\chi_y = \frac{\varepsilon_{sy}}{d - x_3} \quad (4.83)$$

$$\chi_y = \frac{2.57 \cdot 10^{-5}}{\text{mm}} \quad (4.84)$$

4.5.2.1.8 Maximaler Biegewiderstand - Zustand 4

Abschliessen kann der maximale Biegewiderstand durch die plastifizierung der Betondruckzone bestimmt werden. Dem Stahl wird die statische Zugfestigkeit vorausgesetzt, dies berücksichtigt eine Verfestigung. Sowie gilt es zu kontrollieren, ob die Betonstahldehnung unterhalb der Bruchdehnung liegt.

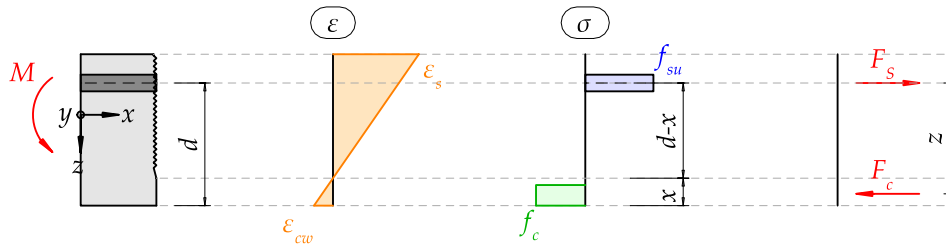


Abbildung 4.11: Querschnittsanalyse für reine Biegung beim Fließen der Bewehrung und plastifizierter Betondruckzone

Vereinfacht werden die Spannungen in der Druckzone konstant verteilt betrachtet. Dazu wird die Druckzonenhöhe abgemindert um Faktor 0.85.

Das Gleichgewicht der Kräfte führt zu:

$$A_s f_{su} = 0.85 b f_c x_4 \quad (4.85)$$

Die Druckzonenhöhe folgt zu:

$$x_4 = 51.4 \text{ mm} \quad (4.86)$$

$$M_R = A_s f_{su} (d - 0.425 x_4) \quad (4.87)$$

$$M_R = 199848.0 \text{ Nm} \quad (4.88)$$

Die Krümmung lässt sich anhand der Betonstauchung ermitteln:

$$\chi_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{x_4} \quad (4.89)$$

$$\chi_u = \frac{4.48 \cdot 10^{-5}}{\text{mm}} \quad (4.90)$$

Die Betonstahldehnung darf die Bruchdehnung nicht überschreiten:

$$\varepsilon_{s,4} = \frac{\varepsilon_{cu} (d - x_4)}{x_4} \quad (4.91)$$

$$\varepsilon_{s,4} = 0.00496 \quad (4.92)$$

Die Bruchdehnung des Stahls wird nicht überschritten. Der Querschnitt versagt im Druckbereich:

$$\varepsilon_{su} = 0.1117 \quad (4.93)$$

Die Biegesteifigkeit im Bereich 3 beträgt:

$$EI^{III} = \frac{M_R}{\chi_u} \quad (4.94)$$

$$EI^{III} = 4.46 \cdot 10^6 \text{m}^2\text{N} \quad (4.95)$$

Im Bereich drei werden die zwei definierten Punkte M_y, χ_y sowie M_R, χ_u verbunden.

$$\chi(M) = \frac{M \left(-\frac{M_y}{EI^{II}} + \frac{M_R}{EI^{III}} \right)}{M_R - M_y} + \frac{-\frac{M_R M_y}{EI^{II}} + \frac{M_R M_y}{EI^{III}}}{M_R - M_y} \quad (4.96)$$

4.5.2.1.9 Momenten-Krümmungsdiagramm

Abschliessend lässt sich daraus die Beziehung zwischen Moment und Krümmung darstellen. Der lineare verlauf im ersten Bereich ergibt sich aus der ungerissenen Biegesteifigkeit. Darauf folgt ein schlagartiger wechsel der Steifigkeit von EI^I zu EI^{II} , da der Beton reisst. Dies führt zum Plateau im unteren Bereich.

$$\chi(M) = \begin{cases} 0 & \text{for } M \geq 0 \\ \frac{M}{EI^I} & \text{for } M > -M_r \\ \frac{M}{EI^{II}} & \text{for } M > -M_y \wedge M < -M_r \\ \frac{M \left(-\frac{M_y}{EI^{II}} + \frac{M_R}{EI^{III}} \right)}{M_R - M_y} + \frac{-\frac{M_R M_y}{EI^{II}} + \frac{M_R M_y}{EI^{III}}}{M_R - M_y} & \text{for } M > -M_R \wedge M < -M_y \end{cases} \quad (4.97)$$

KAPITEL 4. DEFORMATIONSBERECHNUNG AN DREIPUNKTBIEGEVERSUCH

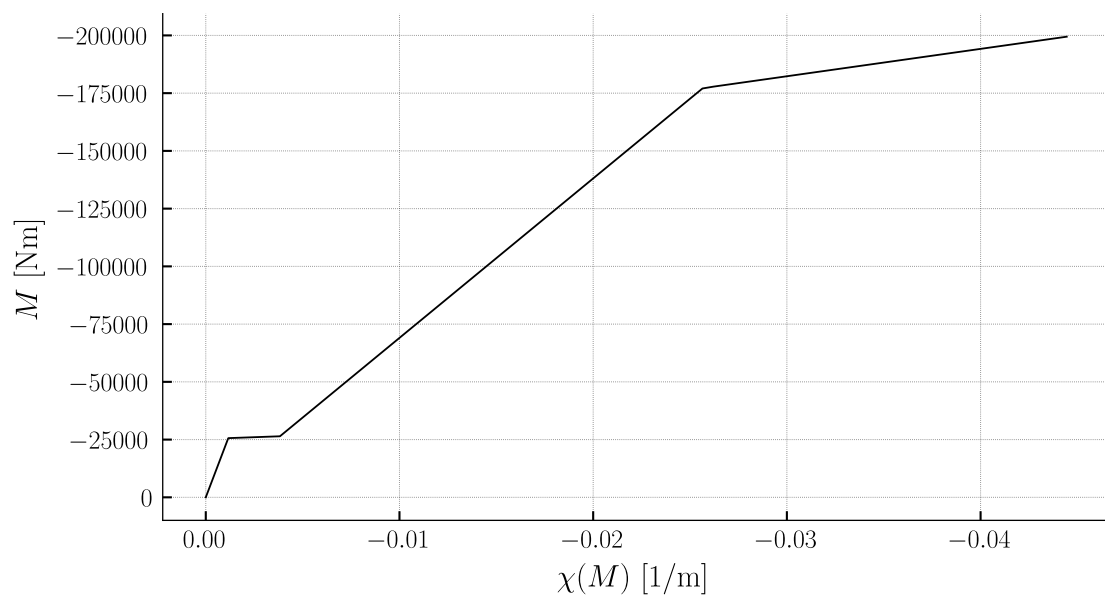


Abbildung 4.12: Momenten-Krümmungsdiagramm händisch ermittelt, definiert im positiven Bereich

4.5.2.1.10 Zustandslinien der Biegemomente

Da die Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung bestimmt ist, kann ein Krümmungsverlauf über die Stabachse ermittelt werden. Dieser ist abhängig von der Funktion der Biegemomente zur Stabachse. Die Zustandslinie der Biegemomente wird anhand des statischen Systems in [Abbildung 4.2](#).

4.5.2.1.11 Zustandslinien der Krümmung

Die Funktion der Biegemomente $M(x)$ als Eingabe in die Funktion der Krümmung $\chi(M)$ resultiert zu folgender Zustandslinie der Krümmung.

KAPITEL 4. DEFORMATIONSBERECHNUNG AN DREIPUNKTBIEGEVERSUCH

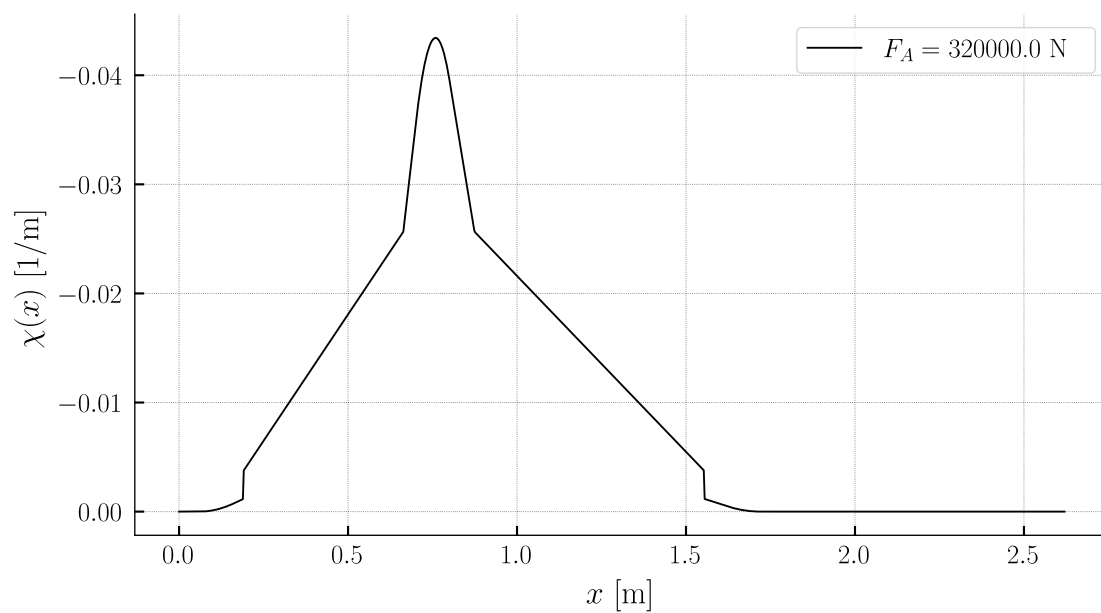


Abbildung 4.13: Krümmungsverlauf für die Laststufe LS14 entlang der Stabachse

4.5.2.2 Punktuelle Bestimmung der Deformation

Unter Anwendung der Arbeitsgleichung kann die Deformation nach Gleichung 4.98 bestimmt werden.

$$w = \int_0^l \bar{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx \quad (4.98)$$

Wobei $\frac{M(x)}{EI} = \chi(x)$ gilt.

Das heißt es gilt die Zustandslinien der Krümmung multipliziert mit der Zustandslinie der Biegemomente des virtuellen Kräftezustands über die Stablänge zu integrieren.

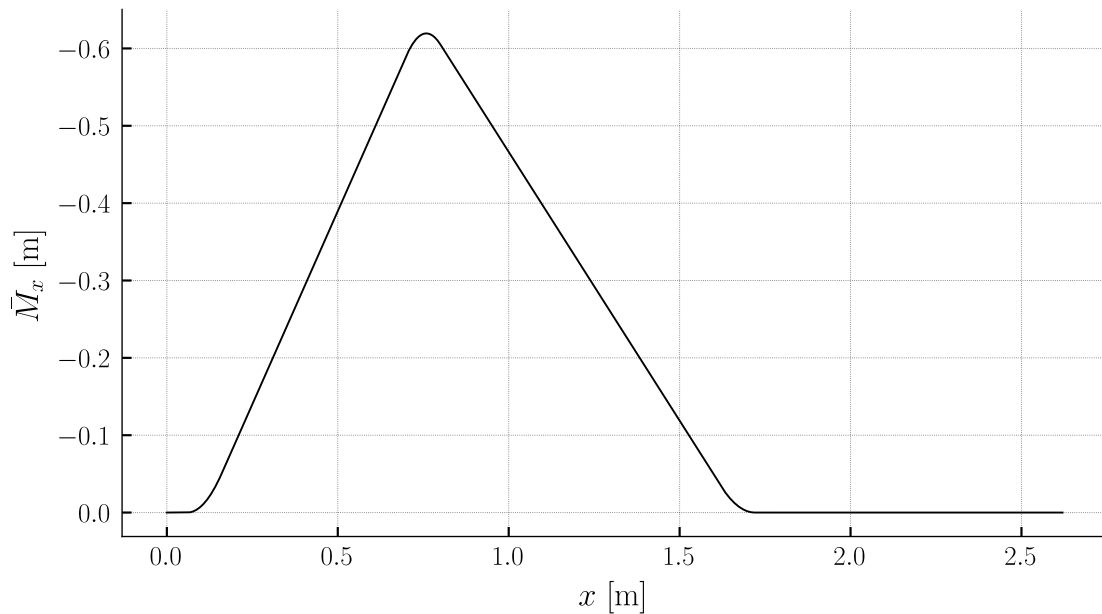


Abbildung 4.14: Biegemomentenverlauf für den virtuellen Kräftezustand

Unter Anwendung der Gleichung 4.98 folgt die Deformation bei der Krafteinleitung F_A zu:

$$w_1 = 11.0\text{mm} \quad (4.99)$$

4.6 Erweiterung Momenten-Krümmungsdiagramm

4.6.1 Zugversteifung

Die bisherige Betrachtung beschränkt sich auf einen schlagartigen Wechsel von ungerissen zu vollständig gerissen. Dabei wird der Bereich zwischen den Rissen ebenfalls als gerissen angenommen. Mittels der Zugversteifung wird ein theoretischer Rissabstand ermittelt und zwischen den Rissen eine versteifte Wirkung zwischen Betonstahl und Beton angenommen (Verbundwirkung). Dies wird folgend auf das Versuchsbeispiel angewendet. Berücksichtigt wird dies via dem Ansatz von Marti.

Die Krümmungsdifferenz nach Marti beträgt:

$$\Delta\chi(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \frac{f_{ct} (1 - \rho_{eff})}{E_s \rho_{eff} (d - x_2)} \quad (4.100)$$

KAPITEL 4. DEFORMATIONSBERECHNUNG AN
DREIPUNKTBIEGEVERSUCH

$$\rho_{eff} = \frac{1}{-n + 1 + \frac{E_s M_r (d - x_2)}{EI^{II} f_{ct}}} \quad (4.101)$$

$$s_{rm} = \frac{\mathcal{O}_s \lambda (1 - \rho_{eff})}{4 \rho_{eff}} \quad (4.102)$$

$$\sigma_{sr0} = \frac{F_{z,2}}{A_s} \quad (4.103)$$

$$w_r = \frac{s_{rm} (-\lambda \sigma_{sr0} + 2 \sigma_{sr})}{2 E_s} \quad (4.104)$$

$$\Delta \chi(\lambda) = \frac{0.00131 \lambda}{m} \quad (4.105)$$

$$\rho_{eff} = 0.0753 \quad (4.106)$$

$$s_{rm} = 36.8 \lambda \text{mm} \quad (4.107)$$

$$\chi(M) = \begin{cases} 0 & \text{for } M \geq 0 \\ \frac{M}{EI^I} & \text{for } M > -M_r \\ 0.00131 \lambda + \frac{M}{EI^{II}} & \text{for } M > -M_y \wedge M < -M_r \\ \frac{M \left(-\frac{M_y}{EI^{II}} + \frac{M_R}{EI^{III}} \right)}{M_R - M_y} + \frac{-\frac{M_R M_y}{EI^{II}} + \frac{M_R M_y}{EI^{III}}}{M_R - M_y} & \text{for } M > -M_R \wedge M < -M_y \end{cases} \quad (4.108)$$

KAPITEL 4. DEFORMATIONSBERECHNUNG AN DREIPUNKTBIEGEVERSUCH

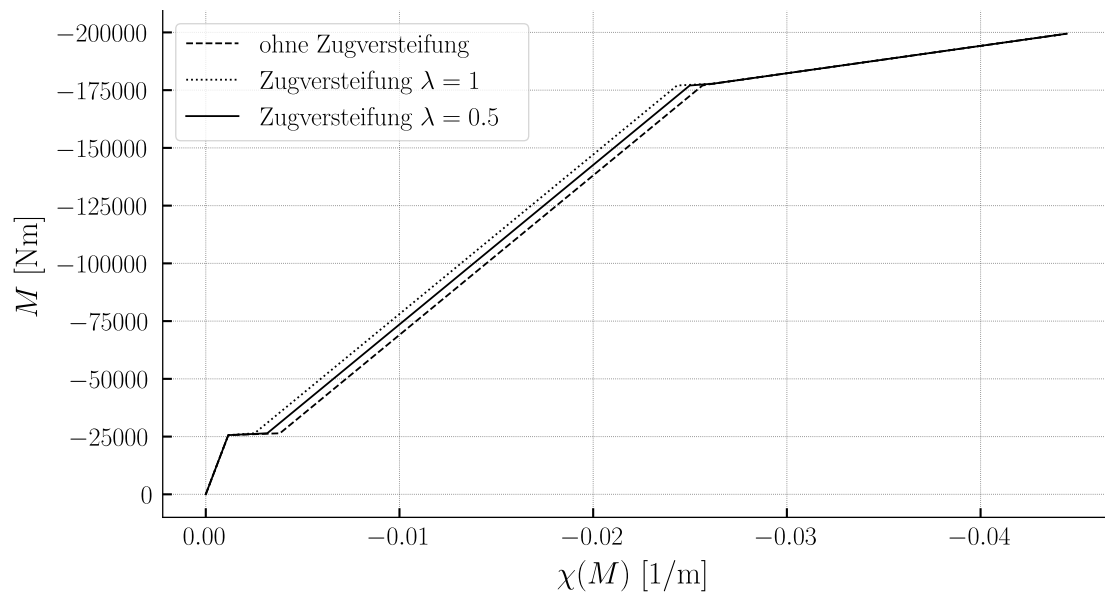


Abbildung 4.15: Momenten-Krümmungsdiagramm mit Zugversteifung ergänzt

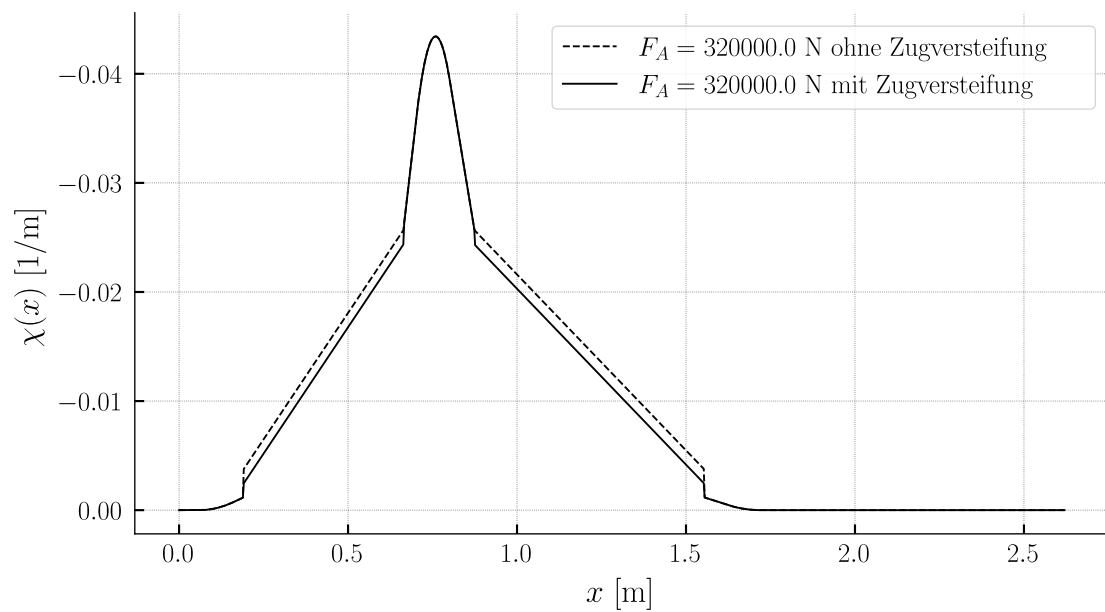


Abbildung 4.16: Krümmungsverlauf für die Laststufe mit Zugversteifung

$$w_1 = 10.5\text{mm} \quad (4.109)$$

4.6.2 Lastverformungsdiagramm

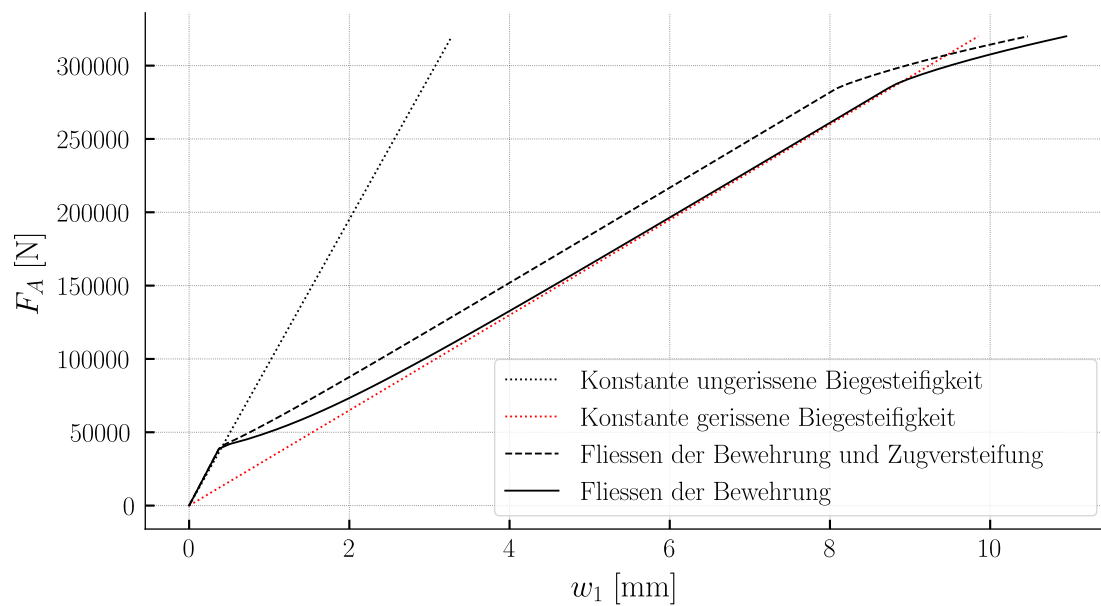


Abbildung 4.17: Last-Verformungsdiagramm bei der Krafteinleitung F_A

Literatur

1. Spathelf C (2022) Skript Teil 2: Gebrauchstauglichkeit. Betonbau - Ausgewählte Kapitel Hochschule Technik & Architektur Luzern
2. Jäger T, Marti P (2006) Versuche zum Querkraftwiderstand und zum Verformungsvermögen von Stahlbetonplatten. IBK Bericht 294. <https://doi.org/10.3929/ethz-a-005195576>
3. Jaeger T (2014) Extended sandwich model for reinforced concrete slabs: Shear strength with transverse reinforcement. Engineering Structures 74:218–228. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.05.025>
4. Jaeger T (2013) Extended sandwich model for reinforced concrete slabs: Shear strength without transverse reinforcement. Engineering Structures 56:1142–1153. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.06.035>
5. Marti P Baustatik. Wiley-VCH Verlag GmbH