

Testat 2 - Aufgabenstellung

Lagerkraftgrößen und Zustandslinien der Schnittgrößen

Gegeben ist das statische System in Abbildung 1.

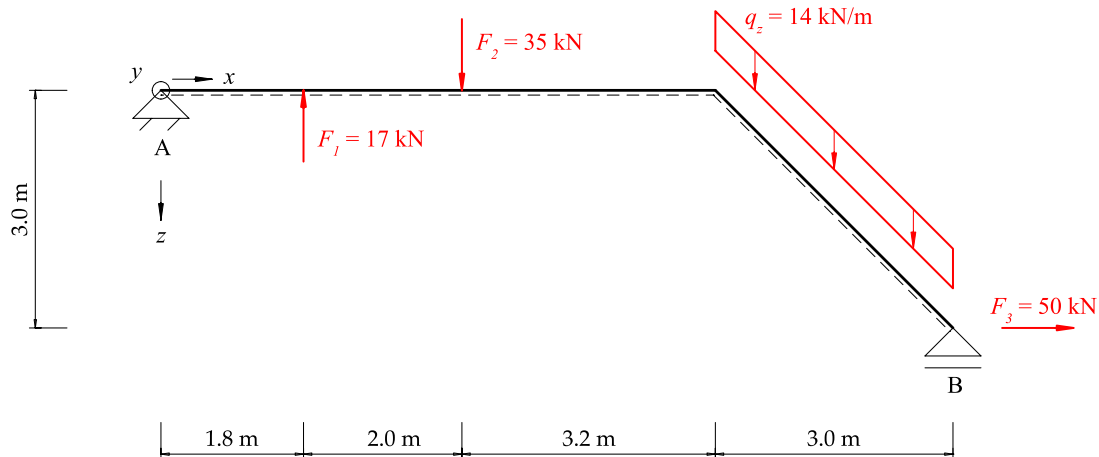


Abbildung 1: Geneigter Balken mit Streckenlast und Punktlasten

Gesucht:

- Zeichnen Sie ein Schnittkörperdiagramm des gesamten statischen Systems (SKD) und bestimmen Sie die Lagerkraftgrößen in A und B
- Kontrollieren Sie Ihre Berechnung der Lagerkraftgrößen
- Bestimmen Sie die Zustandslinien der Schnittgrößen Normalkraft N_x , Querkraft V_z und Biegemoment M_y . Kennzeichnen Sie die Verläufe (konstant, quadratisch, kubisch).

Testat 2 - Musterlösung

Schnittkörperdiagramm

Das Schnittkörperdiagramm für das gesamte System ist in Abbildung 2 gezeigt. Es sind lediglich die Auflagersymbole durch entsprechende Reaktionskräfte zu ersetzen.

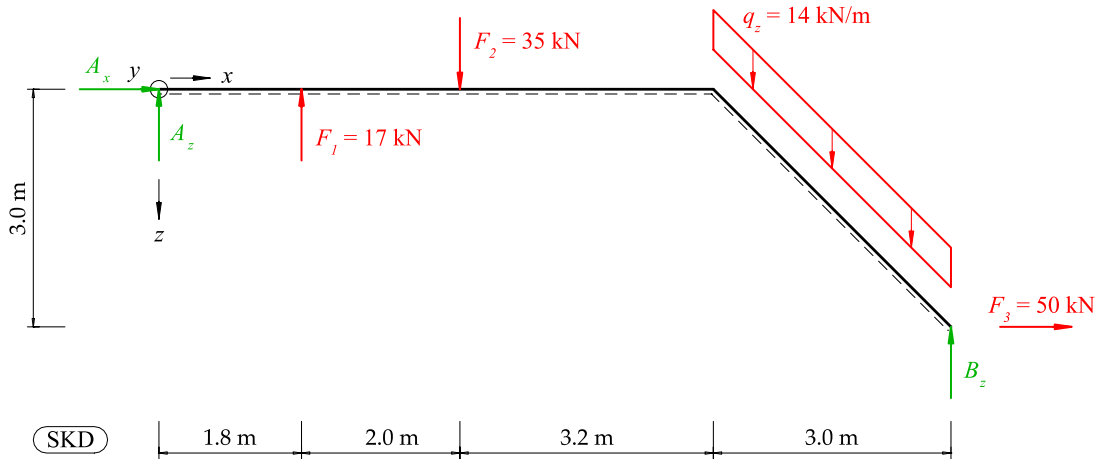


Abbildung 2: Schnittkörperdiagramm des einfachen Balkens

Auflagerkräfte

Zuerst wird B_z ermittelt, dies kann durch Gleichgewicht der Momente um Punkt A geschehen.

$$\sum_A^+ M_y = 0 \quad (1)$$

$$0 = B_z 10\text{m} + F_1 \cdot 1.8\text{m} - F_2 \cdot 3.8\text{m} + F_3 \cdot 3\text{m} - q_z 3.0\sqrt{2}\text{m} 8.5\text{m} \quad (2)$$

$$B_z = 3.61q_z\text{m} - 0.18F_1 + 0.38F_2 - 0.3F_3 \quad (3)$$

$$B_z = 45.7\text{kN} \quad (4)$$

Die horizontale Auflagerreaktion A_x kann durch Gleichgewicht der horizontalen Kräfte ermittelt werden:

$$\sum_{\rightarrow}^+ F_x = 0 \quad (5)$$

$$0 = A_x + F_3 \quad (6)$$

$$A_x = -F_3 \quad (7)$$

$$A_x = -50.0\text{kN} \quad (8)$$

Anhand des Momentengleichgewichts um Punkt B kann A_z ermittelt werden. Da die beiden Auflager nicht auf einer Ebene liegen, fließt A_x in das Momentengleichgewicht ein. Deshalb wurde diese Reaktionskraft zuerst bestimmt.

$$\sum_B^+ M_y = 0 \quad (9)$$

$$0 = -A_x 3\text{m} - A_z 10\text{m} - F_1 \cdot 8.2\text{m} + F_2 \cdot 6.2\text{m} + q_z 3\sqrt{2}\text{m} 1.5\text{m} \quad (10)$$

$$A_z = 0.636q_z\text{m} - 0.3A_x - 0.82F_1 + 0.62F_2 \quad (11)$$

$$A_z = 31.7\text{kN} \quad (12)$$

Kontrolle der Lagerkraftgrößen

Da beide Auflagerkräfte in z -Richtung mittels eines Momentengleichgewichts bestimmt worden sind, bleibt die Summe aller Kräfte in z -Richtung zur Kontrolle der Größen.

$$\downarrow^+ \sum F_z = 0 \quad (13)$$

$$0 = 3\sqrt{2}q_z m - A_z - B_z - F_1 + F_2 \quad (14)$$

$$0 = 18.0 \text{ kN} + 42.0\sqrt{2} \text{ kN} - A_z - B_z \quad (15)$$

$$0 = 0 \quad (16)$$

Es zeigt sich, dass die Gleichgewichtsbedingung auch in z -Richtung eingehalten ist.

Zustandslinien der Schnittgrößen

Grundsätzlich sind die Zustandslinien der Schnittgrößen, die punktuell bestimmten Schnittgrößen für jeden Punkt auf dem Stab. Folglich müsste man an jedem infinitesimal kleinen Punkt ein SKD zeichnen und die Größen bestimmen. Dies ist jedoch nicht handhabbar. Folglich werden aussagekräftige Punkte gewählt, Schnittgrößen bestimmt und der Funktionsverlauf dazwischen wird händisch nachgetragen.

Zustandslinie der Querkräfte

Es ist praktisch mit der Querkraftsbestimmung am Stabende zu beginnen. Dadurch können die Kräfte entsprechend der Richtung angesetzt werden und die Vorzeichen des Querkraftverlaufs sind korrekt.

Die geneigte Stabgeometrie erweist sich als weitere Hürde. Die Querkraft wirkt orthogonal auf die Stabachse, folglich sind die Einwirkungen und die Lagerkräfte in die Stabrichtung zu transformieren. In Abbildung 3 ist die Transformation dargestellt.

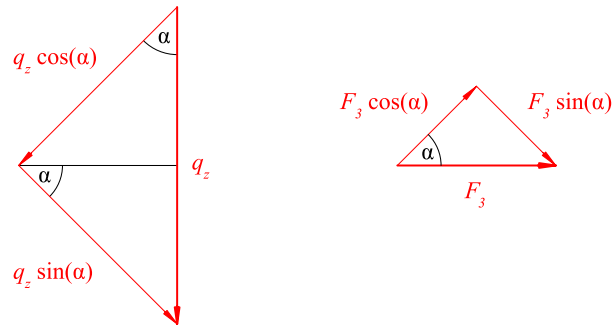


Abbildung 3: Transformation der Kraft in Achsrichtung auf geneigte Stabachse

Dabei ist α die Neigung des Stabs.

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad (17)$$

$$\frac{180\alpha^\circ}{\pi} = 45^\circ \quad (18)$$

Am Auflagerpunkt B entspricht die Querkraft (Das negative Vorzeichen entspricht der negativen Stabseite, da dies durch die Richtung von B_z vorgegeben ist):

$$V_z(B) = -B_z \cos(\alpha) - F_3 \cos(\alpha) \quad (19)$$

$$V_z(B) = -67.7 \text{ kN} \quad (20)$$

Anschliessend nimmt die Querkraft durch die Streckenlast q_z ab. Auch diese gilt es in Stabrichtung zu transformieren.

$$V_z(7.0 \text{ m}) = q_z \cos(\alpha) 3.0\sqrt{2} \text{ m} + V_z(B) \quad (21)$$

$$V_z(7.0 \text{ m}) = -25.7 \text{ kN} \quad (22)$$

Im geraden Bereich werden die Kräfte anhand des Gleichgewichts in z -Richtung ermittelt.

$$\downarrow^+ \sum F_z = 0 \quad (23)$$

Für das SKD in Abbildung 4:

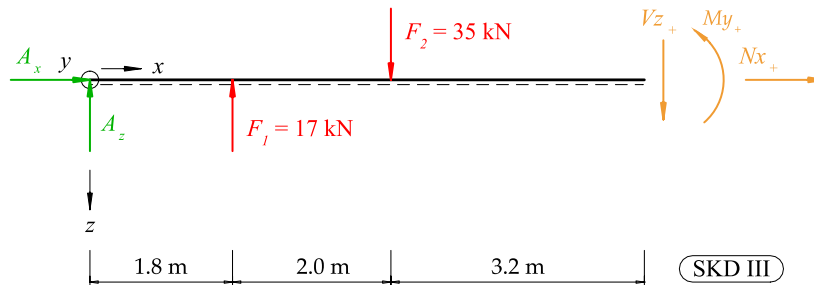


Abbildung 4: Schnittkörperdiagramm 3 an am Stabknick mit positivem Schnittufer

$$0 = -A_z - F_1 + F_2 + V_z(7.0\text{m}) \quad (24)$$

$$V_z(7.0\text{m}) = A_z + F_1 - F_2 \quad (25)$$

$$V_z(7.0\text{m}) = 13.7\text{kN} \quad (26)$$

Für das SKD in Abbildung 5:

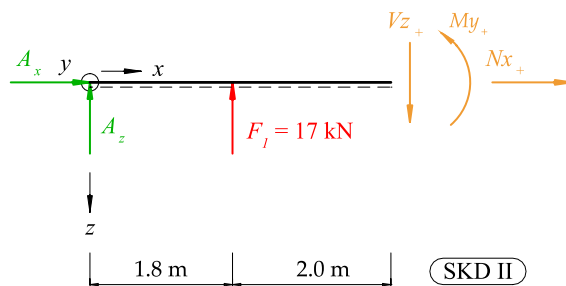


Abbildung 5: Schnittkörperdiagramm 2 an der Stelle F_2 mit positivem Schnittufer

$$0 = -A_z - F_1 + V_z(3.8\text{m}) \quad (27)$$

$$V_z(3.8\text{m}) = A_z + F_1 \quad (28)$$

$$V_z(3.8\text{m}) = 48.7\text{kN} \quad (29)$$

Für das SKD in Abbildung 6:

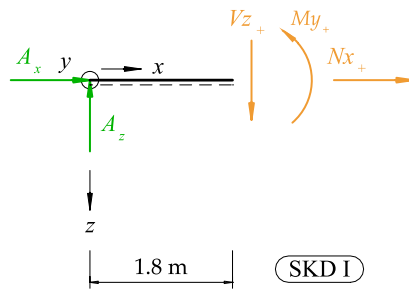


Abbildung 6: Schnittkörperdiagramm 1 an der Stelle F_1 mit positivem Schnittufer

$$0 = -A_z + V_z(1.8\text{m}) \quad (30)$$

$$V_z(1.8\text{m}) = A_z \quad (31)$$

$$V_z(1.8\text{m}) = 31.7\text{kN} \quad (32)$$

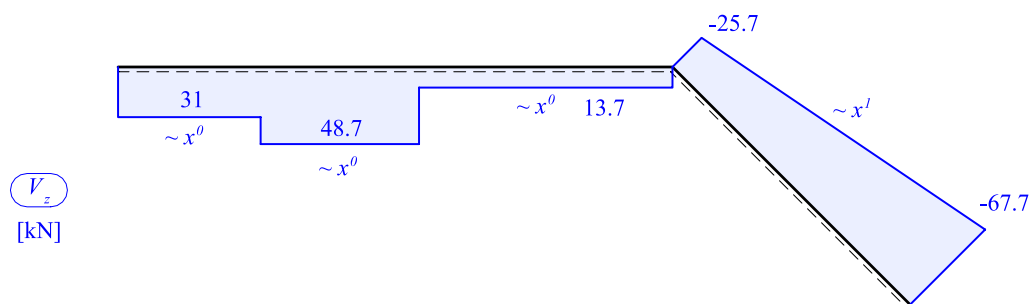


Abbildung 7: Zustandslinien der Querkräfte

Diskussion

Wieso ist die Querkraft im Eckpunkt für den geraden Stab nicht identisch der Querkraft für den geneigten Stab?

Die Normalkraft des geneigten Stabs hat einen Einfluss auf die Querkraft des geraden Stabs. Dies gilt ebenso für den Einfluss der Querkraft auf die Normalkraft.

Zustandslinien der Biegemomente

Die Zustandslinien der Biegemomente können anhand der bereits verwendeten Schnittkörperdiagramme durch Gleichgewicht ermittelt werden.

$$\sum^+ M_y = 0 \quad (33)$$

Für das SKD in Abbildung 6:

$$0 = -A_z 1.8\text{m} + M_y(1.8\text{m}) \quad (34)$$

$$M_y(1.8\text{m}) = 1.8A_z \text{m} \quad (35)$$

$$M_y(1.8\text{m}) = 57.0\text{kmN} \quad (36)$$

Für das SKD in Abbildung 5:

$$0 = -A_z 3.8\text{m} - F_1 \cdot 2.0\text{m} + M_y(3.8\text{m}) \quad (37)$$

$$M_y(3.8\text{m}) = 154.0\text{kmN} \quad (38)$$

Für das SKD in Abbildung 4:

$$0 = -A_z 7.0\text{m} - F_1 \cdot 5.2\text{m} + F_2 \cdot 3.2\text{m} + M_y(7.0\text{m}) \quad (39)$$

$$M_y(7.0\text{m}) = 198.0\text{kmN} \quad (40)$$

Für das Biegemoment gilt, im Eckpunkt ist dies für den geraden Stab, sowie für den geneigten Stab identisch. Dazu ist bekannt, dass beim Auflager B kein Biegemoment auftreten kann. Folglich kann vom Biegemoment, ermittelt in Abbildung 4, mit einem proportional quadratischen Verlauf das Auflager verbunden werden.

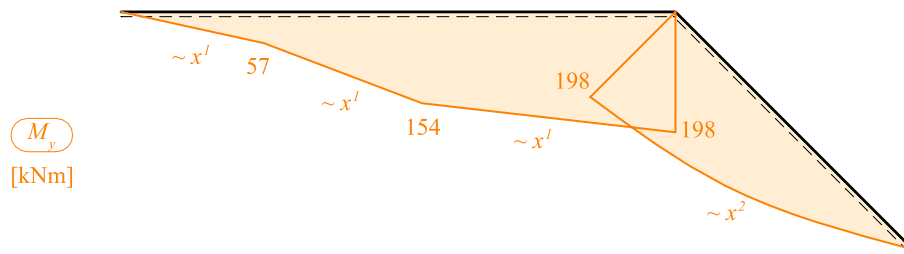


Abbildung 8: Zustandslinien der Biegemomente

Zustandslinien der Normalkräfte

Die Zustandslinien der Normalkräfte ergeben sich im geraden Stab durch die Auflagerkraft A_x und im geneigten Stab durch F_3 , q_z und B_z transformiert in Richtung der Stabachse.

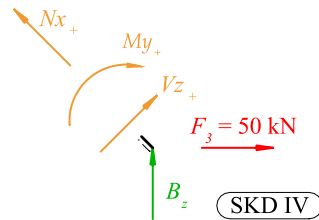
Für den geraden Stab:

$$0 = A_x + N_x(5\text{m}) \quad (41)$$

$$N_x(5\text{m}) = -A_x \quad (42)$$

$$N_x(5\text{m}) = 50.0\text{kN} \quad (43)$$

Am Auflagerpunkt B :

Abbildung 9: Schnittkörperdiagramm 4 an der Stelle B mit negativem Schnittufer

$$0 = -B_z \sin(\alpha) + F_3 \sin(\alpha) - N_x(B) \quad (44)$$

$$N_x(B) = (-B_z + F_3) \sin(\alpha) \quad (45)$$

$$N_x(B) = 3.02 \text{ kN} \quad (46)$$

Nach der bestimmten Normalkraft in B kann anhand der Streckenlast diese bis zum Eckpunkt *aufgebaut* werden:

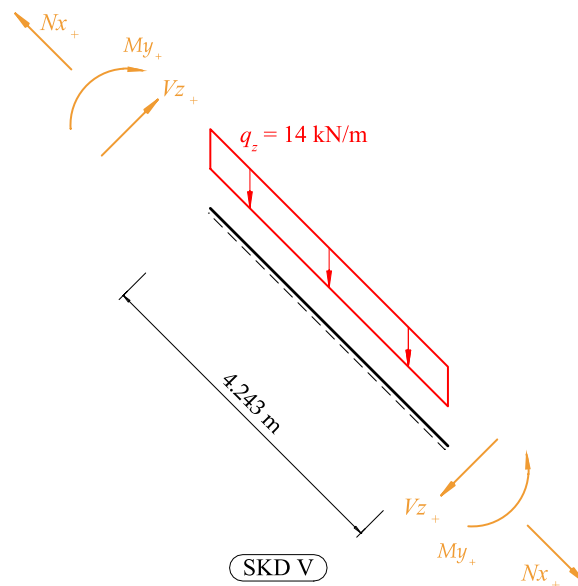


Abbildung 10: Schnittkörperdiagramm 5 für den geneigten Stab

$$N_x(7.0\text{m}) = q_z \sin(\alpha) 3\sqrt{2}\text{m} + N_x(B) \quad (47)$$

$$N_x(7.0\text{m}) = 45.0\text{kN} \quad (48)$$

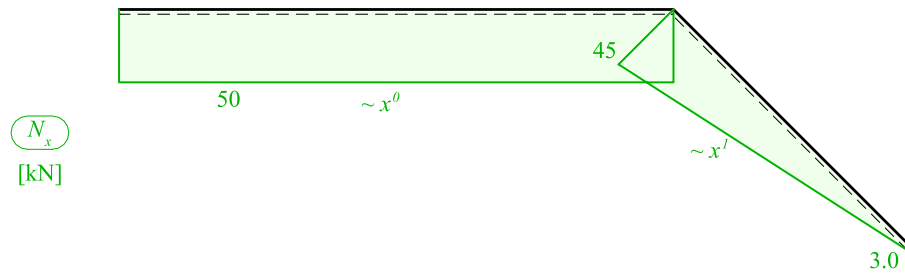


Abbildung 11: Zustandslinien der Normalkräfte