

Testat 3 - Aufgabenstellung

Stringer-Tafelmodell und Querschnittswerte

In Anlehnung an das Testat 1 wird ein Stringer-Tafelmodell aus dem einfachen Balken gebildet. Die Streckenlast ist zu einer Punktlast vereinfacht worden.

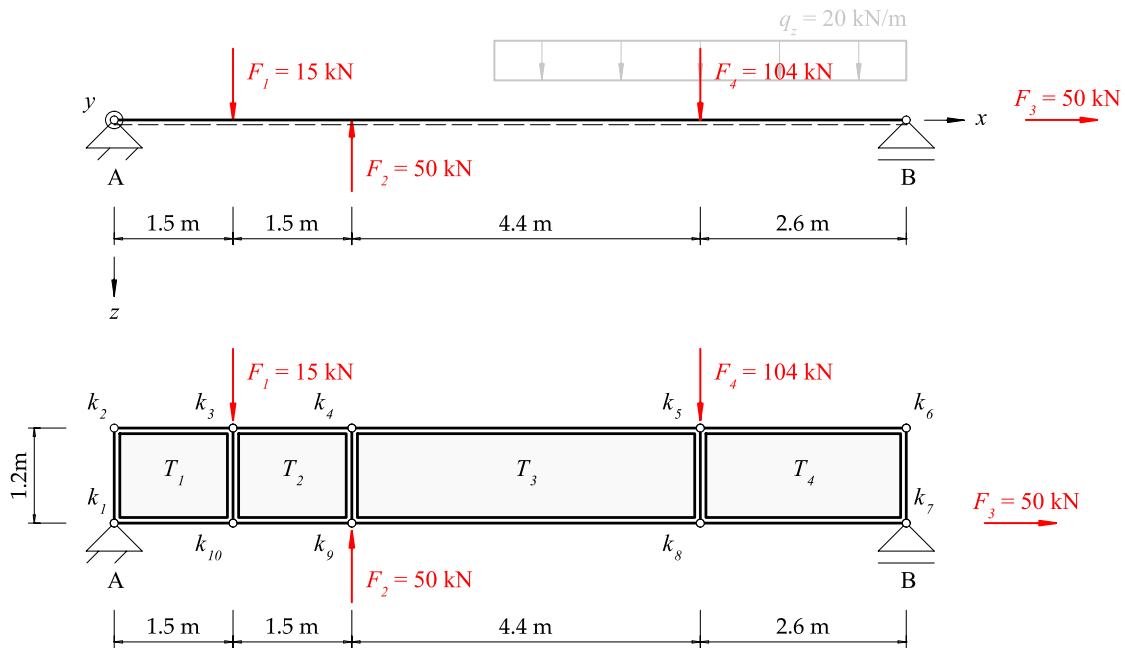


Abbildung 1: Ein einfacher Balken und Stringer- Tafelmodell mit Punktlasten

Gesucht:

- Beschreiben Sie die statische Bestimmtheit des Stringer-Tafelmodells
- Bestimmen Sie die Lagerkraftgrößen und kontrollieren Sie diese
- Zeichnen Sie die Zustandslinien der Normalkräfte in den Stringern und die Schubflüsse in den Tafeln

Unabhängig des Stringertafelmodells gilt es den Querschnitt in Abbildung 2 zu untersuchen:

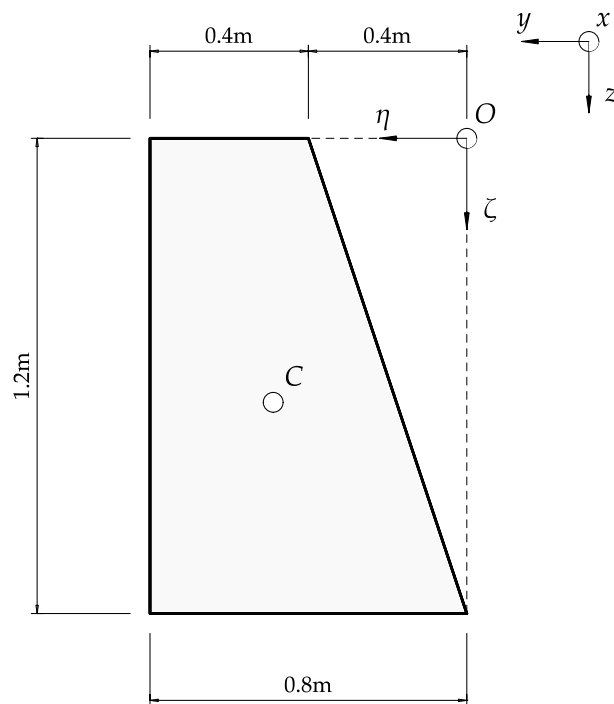


Abbildung 2: Ein unsymmetrischer Querschnitt

Gesucht:

- Bestimmen Sie die Lage des geometrischen Schwerpunkts C
- Bestimmen Sie die Hauptwerte der Flächenträgheitsmomente sowie den Richtungswinkel φ der Hauptrichtungen y und z

Testat 3 - Musterlösung

Voraussetzungen

Folgende Annahmen gelten für ein ideales Stringer-Tafelmodell wie in [1] definiert:

- die einzelnen Stringer des Stringer-Tafelmodells sind geradlinig
- die Stringer schneiden sich zentrisch in den Knotenpunkten
- die Knoten bilden reibungsfreie Gelenke
- die Belastung ist entweder als Einzelkräfte Q in den Knoten oder verteilten Streckenlasten q entlang der Stringerlängsrichtung möglich

Statische Bestimmtheit

Mittels Abzählkriterium kann die statische Bestimmtheit ermittelt werden. Wichtig dabei ist, dass das Abzählkriterium eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung darstellt. Zusätzlich ist die kinematische Unverschieblichkeit zu prüfen.

$$n = c - 2k + s \quad (1)$$

Dabei sind s Stringer und Tafeln vorhanden:

$$s = 17 \quad (2)$$

und k Knoten:

$$k = 10 \quad (3)$$

sowie c Lagerkraftgrößen:

$$c = 3 \quad (4)$$

Das Abzählkriterium ist eingehalten. Zudem ist das Stringer-Tafelmodell kinematisch unverschieblich.

$$n = 0 \quad (5)$$

Auflagerkräfte

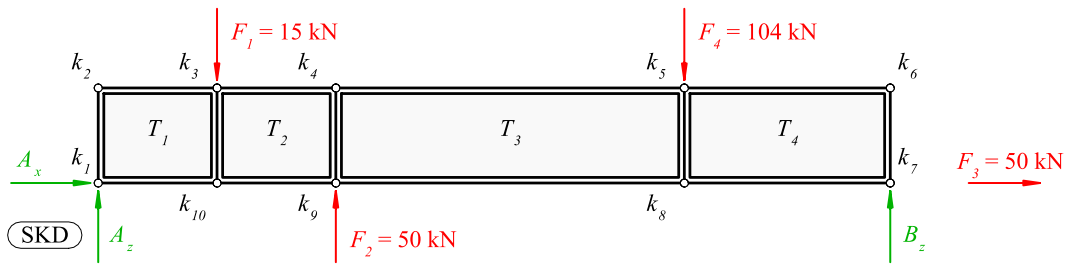


Abbildung 3: Stringer-Tafelmodell mit Lagerkraftgrößen

Zuerst wird B_z ermittelt, dies kann durch Gleichgewicht der Momente um Punkt A geschehen.

$$\sum_A^+ M_y = 0 \quad (6)$$

$$0 = B_z 10\text{m} - F_1 \cdot 1.5\text{m} + F_2 \cdot 3\text{m} - F_4 \cdot 7.4\text{m} \quad (7)$$

$$B_z = 0.15F_1 - 0.3F_2 + 0.74F_4 \quad (8)$$

$$B_z = 64.0\text{kN} \quad (9)$$

Anhand des Momentengleichgewichts um Punkt B kann A_z ermittelt werden.

$$\sum_B^+ M_y = 0 \quad (10)$$

$$0 = -A_z 10\text{m} + F_1 \cdot 8.5\text{m} - F_2 \cdot 7\text{m} + F_4 \cdot 2.6\text{m} \quad (11)$$

$$A_z = 0.85F_1 - 0.7F_2 + 0.26F_4 \quad (12)$$

$$A_z = 4.8\text{kN} \quad (13)$$

Die horizontale Auflagerreaktion A_x kann durch Gleichgewicht der horizontalen Kräfte ermittelt werden:

$$\sum^{\rightarrow+} F_x = 0 \quad (14)$$

$$0 = A_x + F_3 \quad (15)$$

$$A_x = -F_3 \quad (16)$$

$$A_x = -50.0\text{kN} \quad (17)$$

Kontrolle der Lagerkraftgrößen

Da beide Auflagerkräfte in z -Richtung mittels eines Momentengleichgewichts bestimmt worden sind, bleibt die Summe aller Kräfte in z -Richtung zur Kontrolle der Größen.

$$\downarrow^+ \sum F_z = 0 \quad (18)$$

$$0 = -A_z - B_z + F_1 - F_2 + F_4 \quad (19)$$

$$0 = 69.0\text{kN} - A_z - B_z \quad (20)$$

$$0 = 0 \quad (21)$$

Zustandslinien der Schnittgrößen

Anhand von Schnittkörperdiagrammen können die Normalkräfte, sowie die Schubflüsse bestimmt werden.

Bereich 1

Das Schnittkörperdiagramm schneidet unmittelbar links neben dem Knoten.

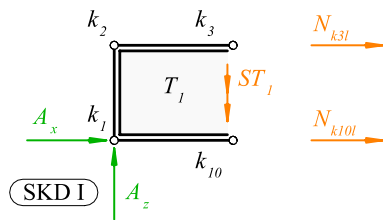


Abbildung 4: Schnittkörperdiagramm 1

Durch Momentengleichgewicht um k_{10} :

$$0 = -A_z 1.5\text{m} - N_{k3l} 1.2\text{m} \quad (22)$$

$$N_{k3l} = -1.25 A_z \quad (23)$$

$$N_{k3l} = -6.0\text{kN} \quad (24)$$

Durch horizontales Gleichgewicht:

$$0 = A_x + N_{k10l} + N_{k3l} \quad (25)$$

$$N_{k10l} = -A_x - N_{k3l} \quad (26)$$

$$N_{k10l} = 56.0\text{kN} \quad (27)$$

Durch vertikales Gleichgewicht:

$$0 = A_z - ST_1 \cdot 1.2\text{m} \quad (28)$$

$$ST_1 = \frac{0.83A_z}{\text{m}} \quad (29)$$

$$ST_1 = \frac{4.0\text{kN}}{\text{m}} \quad (30)$$

Bereich 2

Das Schnittkörperdiagramm schneidet unmittelbar links neben dem Knoten.

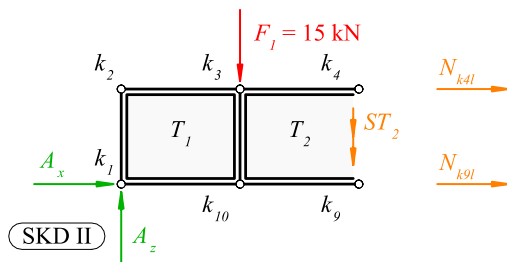


Abbildung 5: Schnittkörperdiagramm 2

Durch Momentengleichgewicht um k_9 :

$$0 = -A_z 3.0\text{m} + F_1 \cdot 1.5\text{m} - N_{k4l} 1.2\text{m} \quad (31)$$

$$N_{k4l} = -2.5A_z + 1.25F_1 \quad (32)$$

$$N_{k4l} = 6.8\text{kN} \quad (33)$$

Durch horizontales Gleichgewicht:

$$0 = A_x + N_{k4l} + N_{k9l} \quad (34)$$

$$N_{k9l} = -A_x - N_{k4l} \quad (35)$$

$$N_{k9l} = 43.0 \text{ kN} \quad (36)$$

Durch vertikales Gleichgewicht:

$$0 = -A_z + F_1 + ST_2 \cdot 1.2 \text{ m} \quad (37)$$

$$ST_2 = \frac{0.83 (A_z - F_1)}{\text{m}} \quad (38)$$

$$ST_2 = -\frac{8.5 \text{ kN}}{\text{m}} \quad (39)$$

Bereich 3

Das Schnittkörperdiagramm schneidet unmittelbar links neben dem Knoten.

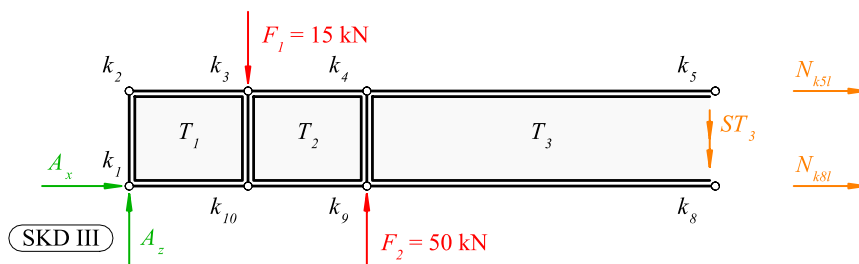


Abbildung 6: Schnittkörperdiagramm 3

Durch Momentengleichgewicht um k_8 :

$$0 = -A_z \cdot 7.4 \text{ m} + F_1 \cdot 5.9 \text{ m} - F_2 \cdot 4.4 \text{ m} - N_{k5l} \cdot 1.2 \text{ m} \quad (40)$$

$$N_{k5l} = -6.2 A_z + 4.9 F_1 - 3.7 F_2 \quad (41)$$

$$N_{k5l} = -139.0\text{kN} \quad (42)$$

Durch horizontales Gleichgewicht:

$$0 = A_x + N_{k5l} + N_{k8l} \quad (43)$$

$$N_{k8l} = -A_x - N_{k5l} \quad (44)$$

$$N_{k8l} = 189.0\text{kN} \quad (45)$$

Durch vertikales Gleichgewicht:

$$0 = -A_z + F_1 - F_2 + ST_3 \cdot 1.2\text{m} \quad (46)$$

$$ST_3 = \frac{0.83(A_z - F_1 + F_2)}{\text{m}} \quad (47)$$

$$ST_3 = \frac{33.0\text{kN}}{\text{m}} \quad (48)$$

Bereich 4

Das Schnittkörperdiagramm schneidet unmittelbar links neben dem Knoten.

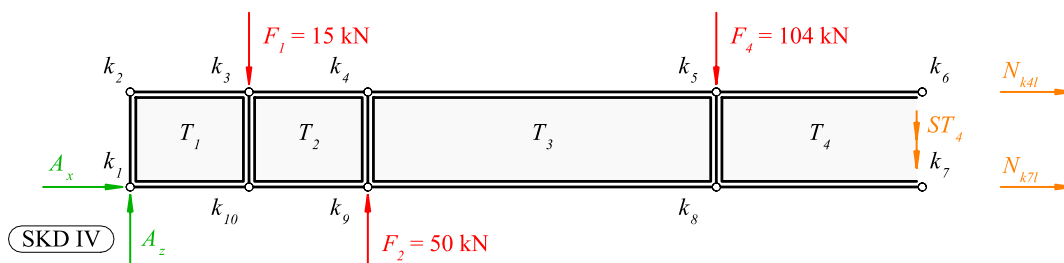


Abbildung 7: Schnittkörperdiagramm 4

Durch Momentengleichgewicht um k_7 :

$$0 = -A_z 10.0\text{m} + F_1 \cdot 8.5\text{m} - F_2 \cdot 7.0\text{m} + F_4 \cdot 2.6\text{m} - N_{k6l} 1.2\text{m} \quad (49)$$

$$N_{k6l} = -8.3A_z + 7.1F_1 - 5.8F_2 + 2.2F_4 \quad (50)$$

$$N_{k6l} = 0 \quad (51)$$

Durch horizontales Gleichgewicht:

$$0 = A_x + N_{k6l} + N_{k7l} \quad (52)$$

$$N_{k7l} = -A_x - N_{k6l} \quad (53)$$

$$N_{k7l} = 50.0\text{kN} \quad (54)$$

Durch vertikales Gleichgewicht:

$$0 = -A_z + F_1 - F_2 + F_4 + ST_4 \cdot 1.2\text{m} \quad (55)$$

$$ST_4 = \frac{0.83 (A_z - F_1 + F_2 - F_4)}{\text{m}} \quad (56)$$

$$ST_4 = -\frac{54.0\text{kN}}{\text{m}} \quad (57)$$

Der Abschliessende Verlauf lässt sich anhand der Schubflüsse bestimmen. Beginnend bei einer Punktlast kann anhand des Schubflusses diese entlang der Tafel angepasst werden. Dies resultiert zu den folgenden Zustandslinien:

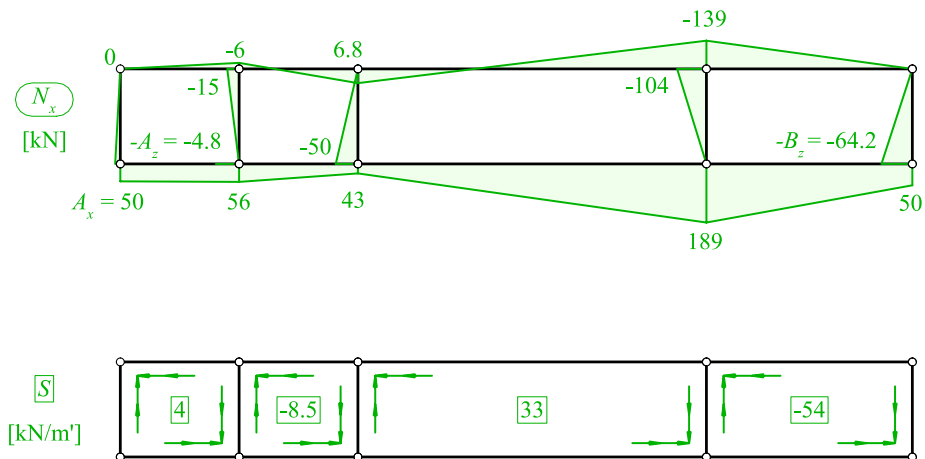


Abbildung 8: Zustandslinien der Normalkräfte und der Schubflüsse

Querschnittswerte

Die Bestimmung der Querschnittswerte folgt dem Merkblatt der Vorlesung. Der Querschnitt in Abbildung 2 wird in ein Rechteck und in ein Dreieck eingeteilt.

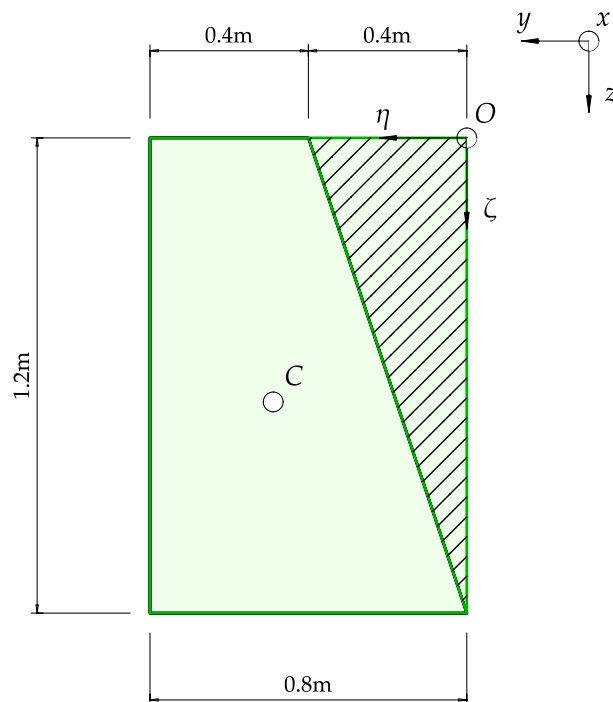


Abbildung 9: Aufteilung des Querschnitts in Teilflächen

$$\begin{aligned} b &= 0.8\text{m} \\ h &= 1.2\text{m} \end{aligned}$$

$$b_1 = 0.4\text{m}$$

Querschnittsfläche

$$A = bh - \frac{b_1 h}{2} \quad (58)$$

$$A = 0.72\text{m}^2 \quad (59)$$

Flächenmoment 1. Grades $S_{\eta'}$ S_{ζ}

$$S_{\eta} = -\frac{h}{3} \frac{b_1 h}{2} + \frac{h}{2} b h \quad (60)$$

$$S_{\eta} = 0.48 \text{m}^3 \quad (61)$$

$$S_{\zeta} = \frac{b}{2} b h - \frac{b_1}{3} \frac{b_1 h}{2} \quad (62)$$

$$S_{\zeta} = 0.352 \text{m}^3 \quad (63)$$

Lage des Schwerpunkts C

$$\eta_C = \frac{S_{\zeta}}{A} \quad (64)$$

$$\eta_C = 0.49 \text{m} \quad (65)$$

$$\zeta_C = \frac{S_{\eta}}{A} \quad (66)$$

$$\zeta_C = 0.67 \text{m} \quad (67)$$

Flächenmomente 2. Grades

Diese werden anhand des, in den Schwerpunkt verschobenen, Koordinatensystems ermittelt.

$$I_{\eta'} = \frac{b h^3}{12} + b h \left(-\frac{h}{2} + \zeta_C \right)^2 - \frac{b_1 h^3}{36} - \frac{b_1 h \left(-\frac{h}{3} + \zeta_C \right)^2}{2} \quad (68)$$

$$I_{\eta'} = 0.083 \text{m}^4 \quad (69)$$

$$I_{\zeta'} = \frac{b^3 h}{12} + bh \left(-\frac{b}{2} + \eta_C \right)^2 - \frac{b_1^3 h}{36} - \frac{b_1 h \left(-\frac{b_1}{3} + \eta_C \right)^2}{2} \quad (70)$$

$$I_{\zeta'} = 0.026 \text{m}^4 \quad (71)$$

$$C_{\eta' \zeta'} = -bh \left(-\frac{b}{2} + \eta_C \right) \left(-\frac{h}{2} + \zeta_C \right) - \frac{b_1^2 h^2}{72} + \frac{b_1 h \left(-\frac{b_1}{3} + \eta_C \right) \left(-\frac{h}{3} + \zeta_C \right)}{2} \quad (72)$$

$$C_{\eta' \zeta'} = 0.014 \text{m}^4 \quad (73)$$

Hauptwerte der Flächenträgheitsmomente

Abschliessend werden die bestimmten Flächenträgheitsmomente in die Hauptrichtungen transformiert.

$$\varphi = \frac{\text{atan} \left(\frac{2C_{\eta' \zeta'}}{I_{\eta'} - I_{\zeta'}} \right)}{2} \quad (74)$$

$$\varphi = 0.23 \quad (75)$$

$$\varphi = 13.0^\circ \quad (76)$$

$$I_y = \frac{I_{\eta'}}{2} + \frac{I_{\zeta'}}{2} + \sqrt{(C_{\eta' \zeta'})^2 + \left(\frac{I_{\eta'}}{2} - \frac{I_{\zeta'}}{2} \right)^2} \quad (77)$$

$$I_y = 0.086 \text{m}^4 \quad (78)$$

$$I_z = \frac{I_{\eta'}}{2} + \frac{I_{\zeta'}}{2} - \sqrt{(C_{\eta'\zeta'})^2 + \left(\frac{I_{\eta'}}{2} - \frac{I_{\zeta'}}{2}\right)^2} \quad (79)$$

$$I_z = 0.023\text{m}^4 \quad (80)$$

Literatur

1. Heinzmann D (2019) Baustatik 1. Vorlesungsskripte Hochschule Luzern Technik & Architektur (HSLU)