

Testat 3 - Aufgabenstellung

Stringer-Tafelmodell und Querschnittswerte

In Anlehnung an das Testat 1 wird ein Stringer-Tafelmodell aus dem einfachen Balken gebildet. Die Streckenlast ist zu einer Punktlast vereinfacht worden. Die Einwirkungen sind auf charakteristischem Niveau ¹.

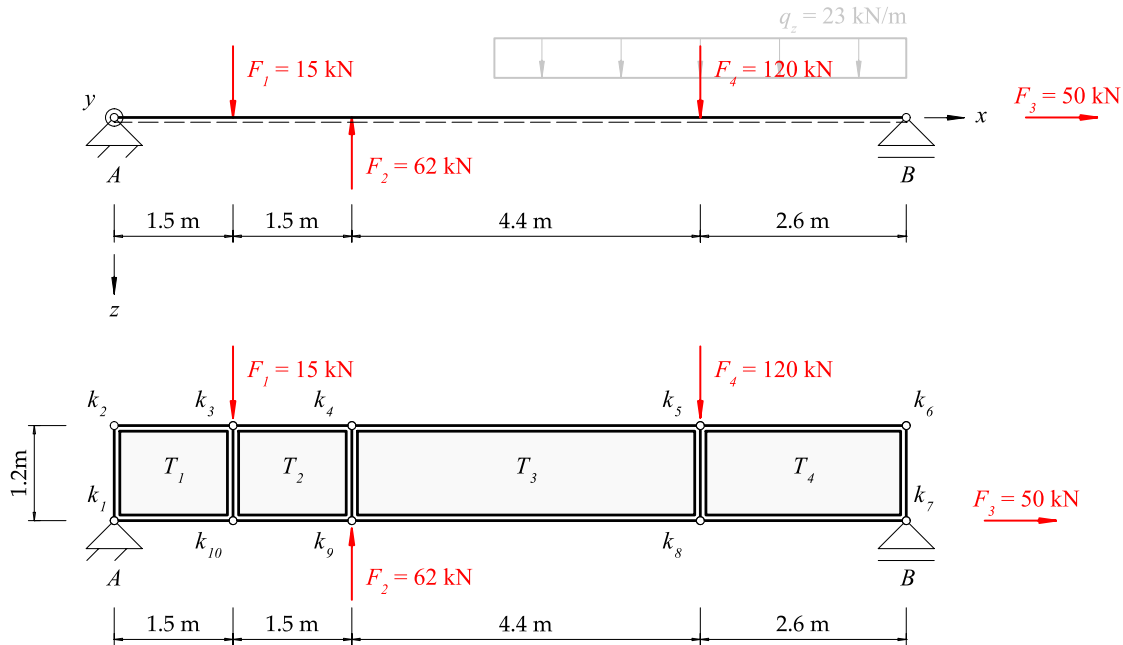


Abbildung 1: Ein einfacher Balken und Stringer- Tafelmodell mit Punktlasten

Gesucht:

- Beschreiben Sie die statische Bestimmtheit des Stringer-Tafelmodells
- Bestimmen Sie die Lagerkraftgrößen und kontrollieren Sie diese
- Zeichnen Sie die Zustandslinien der Normalkräfte in den Stringern und die Schubflüsse in den Tafeln

¹Charakteristisch bedeutet frei von Sicherheitsbeiwerten. Für diese Testatübung ist dies nicht relevant.

Unabhängig des Stringertafelmodells gilt es den Querschnitt in Abbildung 2 zu untersuchen:

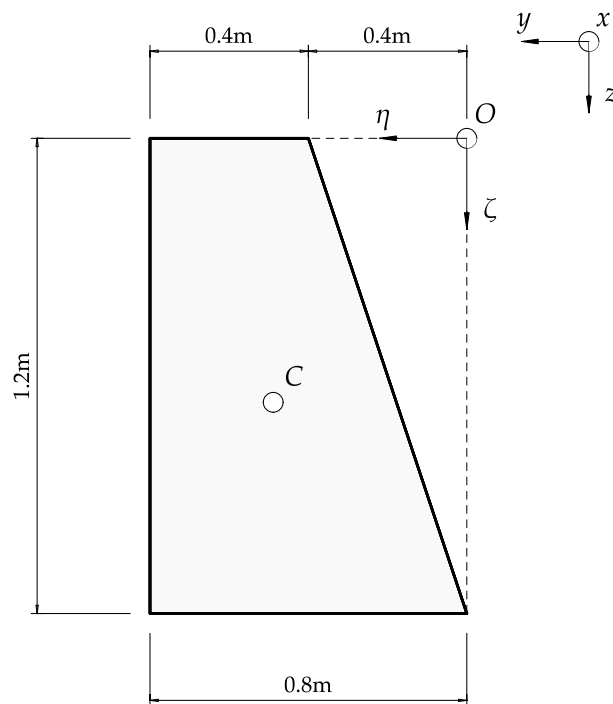


Abbildung 2: Ein unsymmetrischer Querschnitt

Gesucht:

- Bestimmen Sie den geometrischen Schwerpunkt
- Bestimmen Sie die Hauptwerte der Flächenträgheitsmomente sowie den Richtungswinkel

Testat 3 - Musterlösung

Voraussetzungen

Folgende Annahmen gelten für ein ideales Stringer-Tafelmodell wie in [1] definiert:

- die einzelnen Stringer des Stringer-Tafelmodells sind geradlinig
- die Stringer schneiden sich zentrisch in den Knotenpunkten
- die Knoten bilden reibungsfreie Gelenke
- die Belastung ist entweder als Einzelkräfte Q in den Knoten oder verteilten Streckenlasten q entlang der Stringerlängsrichtung möglich

Statische Bestimmtheit

Mittels Abzählkriterium nach [1] kann die statische Bestimmtheit ermittelt werden. Wichtig dabei ist, dass das Abzählkriterium eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung darstellt. Zusätzlich ist die kinematische Unverschieblichkeit zu prüfen.

$$n = c - 2k + s \quad (1)$$

Dabei sind s Stringer und Tafeln vorhanden:

$$s = 17 \quad (2)$$

und k Knoten:

$$k = 10 \quad (3)$$

sowie c Lagerkraftgrößen:

$$c = 3 \quad (4)$$

Das Abzählkriterium ist eingehalten. Zudem ist das Stringer-Tafelmodell kinematisch unverschieblich.

$$n = 0 \quad (5)$$

Auflagerkräfte

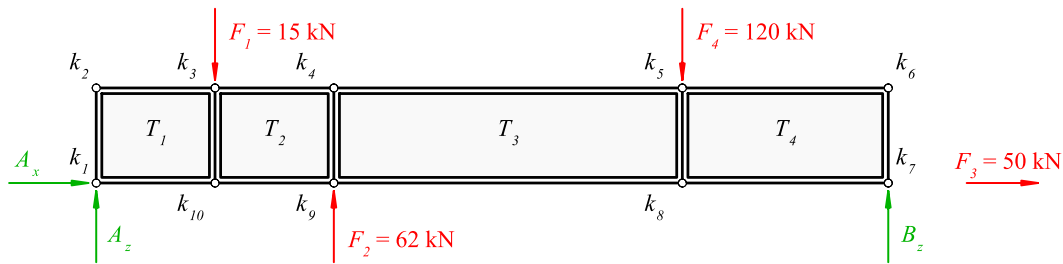


Abbildung 3: Stringer-Tafelmodell mit Lagerkraftgrößen

Zuerst wird B_z ermittelt, dies kann durch Gleichgewicht der Momente um Punkt A geschehen.

$$\sum_A^{\curvearrowright} M_y = 0 \quad (6)$$

$$0 = B_z \cdot 10\text{m} - F_1 \cdot 1.5\text{m} + F_2 \cdot 3\text{m} - F_4 \cdot 7.4\text{m} \quad (7)$$

$$B_z = 0.15F_1 - 0.3F_2 + 0.74F_4 \quad (8)$$

$$B_z = 72450.0\text{N} \quad (9)$$

Anhand des Momentengleichgewichts um Punkt B kann A_z ermittelt werden.

$$\sum_B^{\curvearrowright} M_y = 0 \quad (10)$$

$$0 = -A_z \cdot 10\text{m} + F_1 \cdot 8.5\text{m} - F_2 \cdot 7\text{m} + F_4 \cdot 2.6\text{m} \quad (11)$$

$$A_z = 0.85F_1 - 0.7F_2 + 0.26F_4 \quad (12)$$

$$A_z = 550.0\text{N} \quad (13)$$

Die horizontale Auflagerreaktion A_x kann durch Gleichgewicht der horizontalen Kräfte ermittelt werden:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad (14)$$

$$0 = A_x + F_3 \quad (15)$$

$$A_x = -F_3 \quad (16)$$

$$A_x = -50000.0\text{N} \quad (17)$$

Kontrolle der Lagerkraftgrössen

Da beide Auflagerkräfte in z -Richtung mittels eines Momentengleichgewichts bestimmt worden sind, bleibt die Summe aller Kräfte in z -Richtung zur Kontrolle der Grössen.

$$\sum^{\uparrow} F_z = 0 \quad (18)$$

$$0 = -A_z - B_z + F_1 - F_2 + F_4 \quad (19)$$

$$0 = 73000.0\text{N} - A_z - B_z \quad (20)$$

$$0 = 0 \quad (21)$$

Zustandslinien der Schnittgrößen

Anhand von Schnittkörperdiagrammen können die Normalkräfte, sowie die Schubflüsse bestimmt werden.

Bereich 1

Das Schnittkörperdiagramm schneidet unmittelbar links neben dem Knoten.

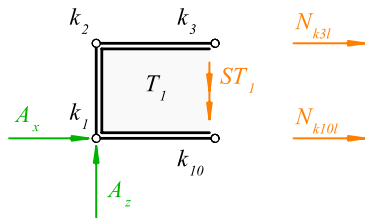


Abbildung 4: Schnittkörperdiagramm 1

Durch Momentengleichgewicht um k_{10} :

$$0 = -A_z 1.5\text{m} - N_{k3l} 1.2\text{m} \quad (22)$$

$$N_{k3l} = -1.25 A_z \quad (23)$$

$$N_{k3l} = -687.5\text{N} \quad (24)$$

Durch horizontales Gleichgewicht:

$$0 = A_x + N_{k10l} + N_{k3l} \quad (25)$$

$$N_{k10l} = -A_x - N_{k3l} \quad (26)$$

$$N_{k10l} = 50687.5\text{N} \quad (27)$$

Durch vertikales Gleichgewicht:

$$0 = -A_z + ST_1 \cdot 1.2\text{m} \quad (28)$$

$$ST_1 = \frac{0.83A_z}{\text{m}} \quad (29)$$

$$ST_1 = \frac{458.33\text{N}}{\text{m}} \quad (30)$$

Bereich 2

Das Schnittkörperdiagramm schneidet unmittelbar links neben dem Knoten.

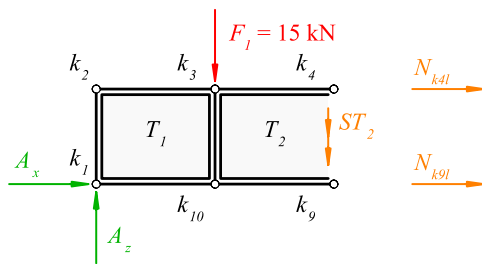


Abbildung 5: Schnittkörperdiagramm 2

Durch Momentengleichgewicht um k_9 :

$$0 = -A_z 3.0\text{m} + F_1 \cdot 1.5\text{m} - N_{k4l} 1.2\text{m} \quad (31)$$

$$N_{k4l} = -2.5A_z + 1.25F_1 \quad (32)$$

$$N_{k4l} = 17375.0\text{N} \quad (33)$$

Durch horizontales Gleichgewicht:

$$0 = A_x + N_{k4l} + N_{k9l} \quad (34)$$

$$N_{k9l} = -A_x - N_{k4l} \quad (35)$$

$$N_{k9l} = 32625.0\text{N} \quad (36)$$

Durch vertikales Gleichgewicht:

$$0 = -A_z + F_1 + ST_2 \cdot 1.2\text{m} \quad (37)$$

$$ST_2 = \frac{0.83(A_z - F_1)}{\text{m}} \quad (38)$$

$$ST_2 = -\frac{12042.0\text{N}}{\text{m}} \quad (39)$$

Bereich 3

Das Schnittkörperdiagramm schneidet unmittelbar links neben dem Knoten.

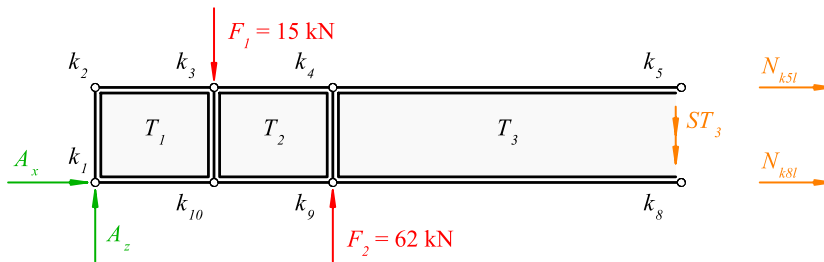


Abbildung 6: Schnittkörperdiagramm 3

Durch Momentengleichgewicht um k_8 :

$$0 = -A_z \cdot 7.4\text{m} + F_1 \cdot 5.9\text{m} - F_2 \cdot 4.4\text{m} - N_{k5l} \cdot 1.2\text{m} \quad (40)$$

$$N_{k5l} = -6.17A_z + 4.92F_1 - 3.67F_2 \quad (41)$$

$$N_{k5l} = -156975.0\text{N} \quad (42)$$

Durch horizontales Gleichgewicht:

$$0 = A_x + N_{k5l} + N_{k8l} \quad (43)$$

$$N_{k8l} = -A_x - N_{k5l} \quad (44)$$

$$N_{k8l} = 206975.0\text{N} \quad (45)$$

Durch vertikales Gleichgewicht:

$$0 = -A_z + F_1 - F_2 + ST_3 \cdot 1.2\text{m} \quad (46)$$

$$ST_3 = \frac{0.83(A_z - F_1 + F_2)}{\text{m}} \quad (47)$$

$$ST_3 = \frac{39625.0\text{N}}{\text{m}} \quad (48)$$

Bereich 4

Das Schnittkörperdiagramm schneidet unmittelbar links neben dem Knoten.

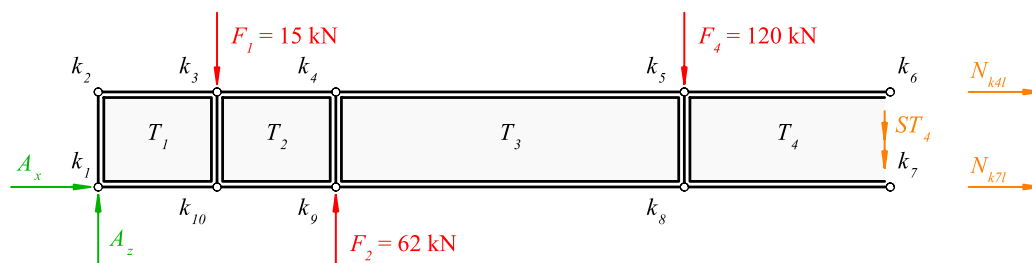


Abbildung 7: Schnittkörperdiagramm 4

Durch Momentengleichgewicht um k_7 :

$$0 = -A_z 10.0\text{m} + F_1 \cdot 8.5\text{m} - F_2 \cdot 7.0\text{m} + F_4 \cdot 2.6\text{m} - N_{k6l} 1.2\text{m} \quad (49)$$

$$N_{k6l} = -8.33A_z + 7.08F_1 - 5.83F_2 + 2.17F_4 \quad (50)$$

$$N_{k6l} = 0 \quad (51)$$

Durch horizontales Gleichgewicht:

$$0 = A_x + N_{k6l} + N_{k7l} \quad (52)$$

$$N_{k7l} = -A_x - N_{k6l} \quad (53)$$

$$N_{k7l} = 50000.0\text{N} \quad (54)$$

Durch vertikales Gleichgewicht:

$$0 = -A_z + F_1 - F_2 + F_4 + ST_4 \cdot 1.2\text{m} \quad (55)$$

$$ST_4 = \frac{0.83(A_z - F_1 + F_2 - F_4)}{\text{m}} \quad (56)$$

$$ST_4 = -\frac{60375.0\text{N}}{\text{m}} \quad (57)$$

Der Abschliessende Verlauf lässt sich anhand der Schubflüsse bestimmen. Beginnend bei einer Punktlast kann anhand des Schubflusses diese entlang der Tafel angepasst werden. Dies resultiert zu den folgenden Zustandslinien:

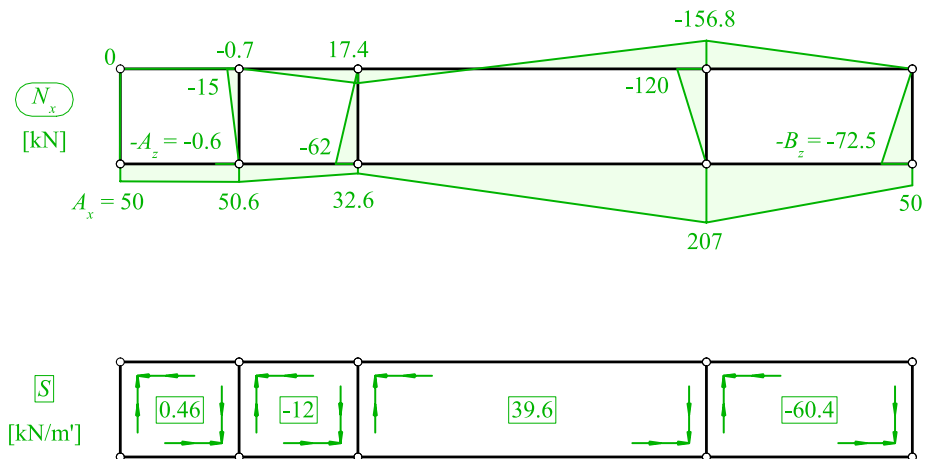


Abbildung 8: Zustandslinien der Normalkräfte und der Schubflüsse

Querschnittswerte

Die Bestimmung der Querschnittswerte folgt dem Merkblatt der Vorlesung. Der Querschnitt in Abbildung 2 wird in ein Rechteck und in ein Dreieck eingeteilt.

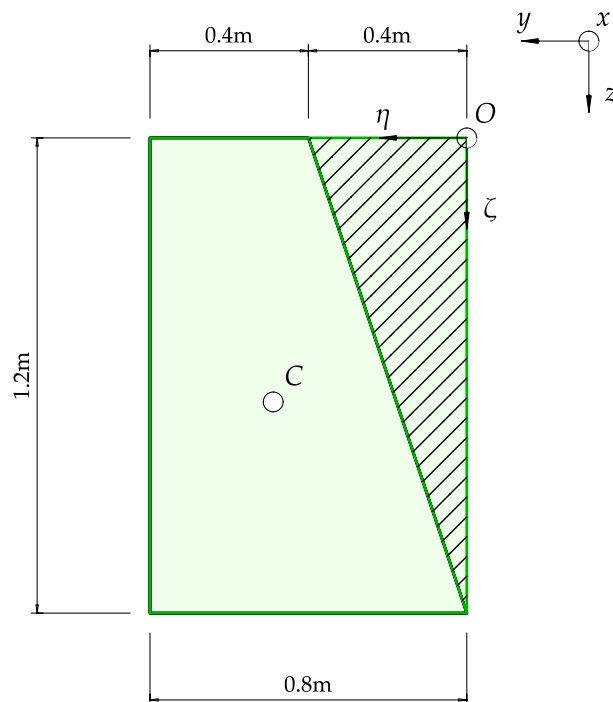


Abbildung 9: Aufteilung des Querschnitts in Teilflächen

$$b = 0.8\text{m}$$

$$h = 1.2\text{m}$$

$$b_1 = 0.4\text{m}$$

Querschnittsfläche

$$A = bh - \frac{b_1 h}{2} \quad (58)$$

$$A = 0.72\text{m}^2 \quad (59)$$

Flächenmoment 1. Grades $S_{\eta'}$ S_{ζ}

$$S_{\eta} = -\frac{h}{3} \frac{b_1 h}{2} + \frac{h}{2} b h \quad (60)$$

$$S_{\eta} = 0.48 \text{m}^3 \quad (61)$$

$$S_{\zeta} = \frac{b}{2} b h - \frac{b_1}{3} \frac{b_1 h}{2} \quad (62)$$

$$S_{\zeta} = 0.352 \text{m}^3 \quad (63)$$

Lage des Schwerpunkts C

$$\eta_C = \frac{S_{\zeta}}{A} \quad (64)$$

$$\eta_C = 0.489 \text{m} \quad (65)$$

$$\zeta_C = \frac{S_{\eta}}{A} \quad (66)$$

$$\zeta_C = 0.667 \text{m} \quad (67)$$

Flächenmomente 2. Grades

Diese werden anhand des, in den Schwerpunkt verschobenen, Koordinatensystems ermittelt.

$$I_{\eta'} = \frac{b h^3}{12} + b h \left(-\frac{h}{2} + \zeta_C \right)^2 - \frac{b_1 h^3}{36} - \frac{b_1 h \left(-\frac{h}{3} + \zeta_C \right)^2}{2} \quad (68)$$

$$I_{\eta'} = 0.0832 \text{m}^4 \quad (69)$$

$$I_{\zeta'} = \frac{b^3 h}{12} + bh \left(-\frac{b}{2} + \eta_C \right)^2 - \frac{b_1^3 h}{36} - \frac{b_1 h \left(-\frac{b_1}{3} + \eta_C \right)^2}{2} \quad (70)$$

$$I_{\zeta'} = 0.0263 \text{m}^4 \quad (71)$$

$$C_{\eta' \zeta'} = -bh \left(-\frac{b}{2} + \eta_C \right) \left(-\frac{h}{2} + \zeta_C \right) - \frac{b_1^2 h^2}{72} + \frac{b_1 h \left(-\frac{b_1}{3} + \eta_C \right) \left(-\frac{h}{3} + \zeta_C \right)}{2} \quad (72)$$

$$C_{\eta' \zeta'} = 0.0139 \text{m}^4 \quad (73)$$

Hauptwerte der Flächenträgheitsmomente

Abschliessend werden die bestimmten Flächenträgheitsmomente in die Hauptrichtungen transformiert.

$$\phi = \frac{\text{atan} \left(\frac{2C_{\eta' \zeta'}}{I_{\eta'} - I_{\zeta'}} \right)}{2} \quad (74)$$

$$\phi = 0.227 \quad (75)$$

$$\phi = 13.0^\circ \quad (76)$$

$$I_y = \frac{I_{\eta'}}{2} + \frac{I_{\zeta'}}{2} + \sqrt{(C_{\eta' \zeta'})^2 + \left(\frac{I_{\eta'}}{2} - \frac{I_{\zeta'}}{2} \right)^2} \quad (77)$$

$$I_y = 0.0864 \text{m}^4 \quad (78)$$

$$I_z = \frac{I_{\eta'}}{2} + \frac{I_{\zeta'}}{2} - \sqrt{(C_{\eta'\zeta'})^2 + \left(\frac{I_{\eta'}}{2} - \frac{I_{\zeta'}}{2}\right)^2} \quad (79)$$

$$I_z = 0.0231\text{m}^4 \quad (80)$$

Literatur

1. Heinzmann D (2019) Baustatik 1. Vorlesungsskripte Hochschule Luzern Technik & Architektur (HSLU)