Testat 3 - Aufgabenstellung

Stringer-Tafelmodell und Querschnittswerte

In Anlehnung an das Testat 1 wird ein Stringer-Tafelmodell aus dem einfachen Balken gebildet. Die Streckenlast ist zu einer Punktlast vereinfacht worden. Die Einwirkungen sind auf charakteristischem Niveau [1].

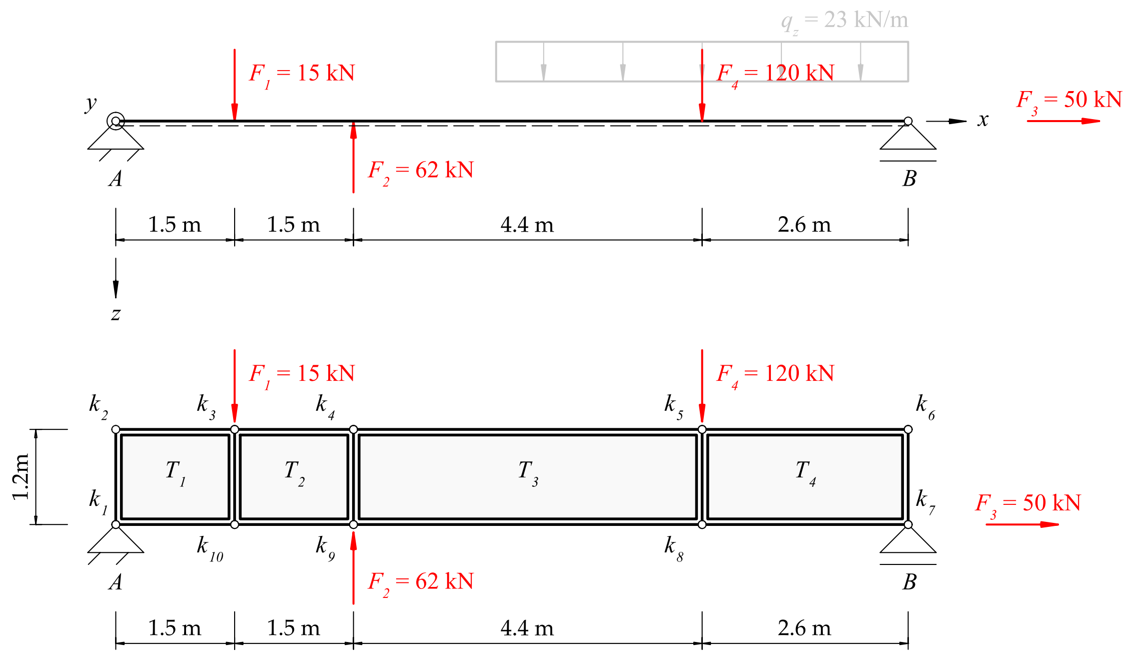

Abbildung 1: Ein einfacher Balken und Stringer- Tafelmodell mit Punktlasten

Gesucht:

- Beschreiben Sie die statische Bestimmtheit des Stringer-Tafelmodells
- Bestimmen Sie die Lagerkraftgrössen und kontrollieren Sie diese
- Zeichnen Sie die Zustandslinien der Normalkräfte in den Stringern und die Schubflüsse in den Tafeln

[1] Charakteristisch bedeutet frei von Sicherheitsbeiwerten. Für diese Testatübung ist dies nicht relevant.

Unabhängig des Stringertafelmodells gilt es den Querschnitt in Abbildung 2 zu untersuchen:

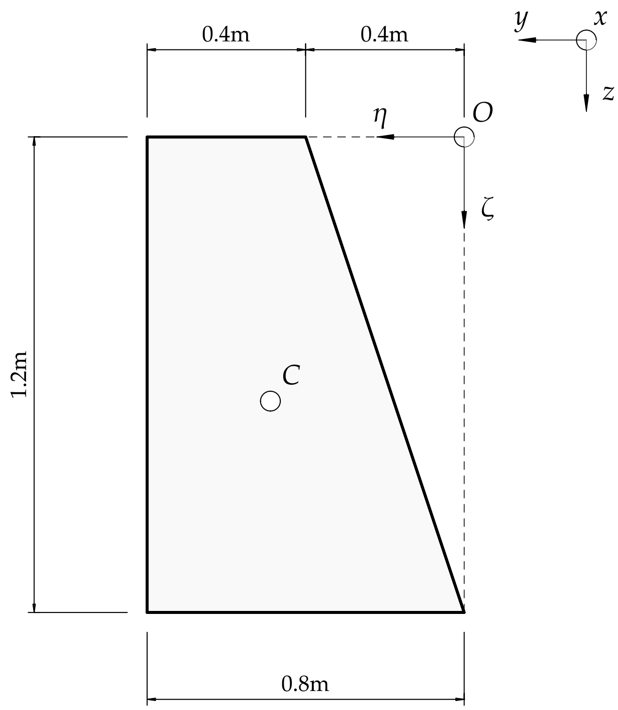

Abbildung 2: Ein unsymmetrischer Querschnitt

Gesucht:

- Bestimmen Sie den geometrischen Schwerpunkt
- Bestimmen Sie die Hauptwerte der Flächenträgheitsmomente sowie den Richtungswinkel

Testat 3 - Musterlösung

Voraussetzungen

Folgende Annahmen gelten für ein ideales Stringer-Tafelmodell wie in [1] definiert:

- die einzelnen Stringer des Stringer-Tafelmodells sind geradlinig
- die Stringer schneiden sich zentrisch in den Knotenpunkten
- die Knoten bilden reibungsfreie Gelenke
- die Belastung ist entweder als Einzelkräfte Q in den Knoten oder verteilten Streckenlasten q entlang der Stringerlängsrichtung möglich

Statische Bestimmtheit

Mittels Abzählkriterium nach [1] kann die statische Bestimmtheit ermittelt werden. Wichtig dabei ist, dass das Abzählkriterium eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung darstellt. Zusätzlich ist die kinematische Unverschieblichkeit zu prüfen.

$$n = c - 2k + s \tag{1}$$

Dabei sind s Stringer und Tafeln vorhanden:

$$s = 17 \tag{2}$$

und k Knoten:

$$k = 10 \tag{3}$$

sowie c Lagerkraftgrössen:

$$c = 3 \tag{4}$$

Das Abzählkriterium ist eingehalten. Zudem ist das Stringer-Tafelmodell kinematisch unverschieblich.

$$n = 0 \tag{5}$$

Auflagerkräfte

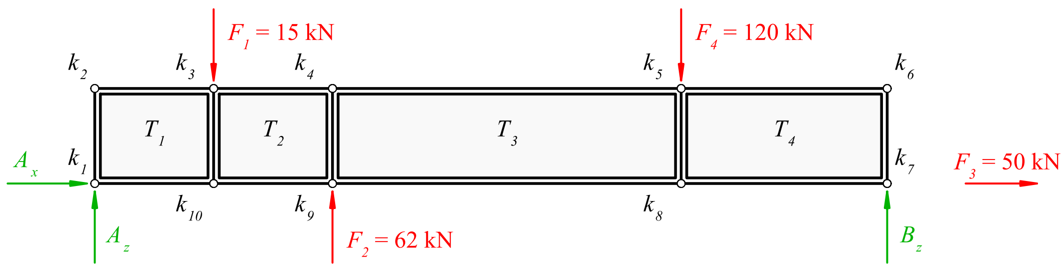

Abbildung 3: Stringer-Tafelmodell mit Lagerkraftgrössen

Zuerst wird B_z ermittelt, dies kann durch Gleichgewicht der Momente um Punkt A geschehen.

$$\sum_{A}^{\curvearrowleft} M_y = 0 \tag{6}$$

$$0 = B_z 10\text{m} - F_1 \cdot 1.5\text{m} + F_2 \cdot 3\text{m} - F_4 \cdot 7.4\text{m} \tag{7}$$

$$B_z = 0.15F_1 - 0.3F_2 + 0.74F_4 \tag{8}$$

$$B_z = 72450.0\text{N} \tag{9}$$

Anhand des Momentengleichgewichts um Punkt B kann A_z ermittelt werden.

$$\sum_{B}^{\curvearrowleft} M_y = 0 \tag{10}$$

$$0 = -A_z 10\text{m} + F_1 \cdot 8.5\text{m} - F_2 \cdot 7\text{m} + F_4 \cdot 2.6\text{m} \tag{11}$$

$$A_z = 0.85F_1 - 0.7F_2 + 0.26F_4 \tag{12}$$

$$A_z = 550.0\text{N} \tag{13}$$

Die horizontale Auflagerreaktion A_x kann durch Gleichgewicht der horizontalen Kräfte ermittelt werden:

$$\sum^{\rightarrow} F_x = 0 \tag{14}$$

$$0 = A_x + F_3 \tag{15}$$

$$A_x = -F_3 \tag{16}$$

$$A_x = -50000.0\text{N} \tag{17}$$

Kontrolle der Lagerkraftgrössen

Da beide Auflagerkräfte in z-Richtung mittels eines Momentengleichgewichts bestimmt worden sind, bleibt die Summe aller Kräfte in z-Richtung zur Kontrolle der Grössen.

$$\sum^{\uparrow} F_z = 0 \tag{18}$$

$$0 = -A_z - B_z + F_1 - F_2 + F_4 \tag{19}$$

$$0 = 73000.0\text{N} - A_z - B_z \tag{20}$$

$$0 = 0 \tag{21}$$

Zustandslinien der Schnittgrössen

Anhand von Schnittkörperdiagrammen können die Normalkräfte, sowie die Schubflüsse bestimmt werden.

Bereich 1

Das Schnittkörperdiagramm schneidet unmittelbar links neben dem Knoten.

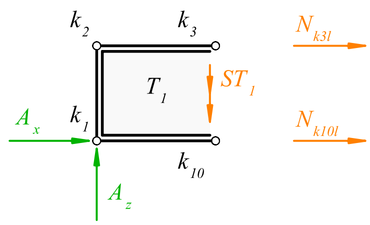

Abbildung 4: Schnittkörperdiagramm 1

Durch Momentengleichgewicht um k_{10}:

$$0 = -A_z 1.5\text{m} - N_{k3l} 1.2\text{m} \tag{22}$$

$$N_{k3l} = -1.25 A_z \tag{23}$$

$$N_{k3l} = -687.5\text{N} \tag{24}$$

Durch horizontales Gleichgewicht:

$$0 = A_x + N_{k10l} + N_{k3l} \tag{25}$$

$$N_{k10l} = -A_x - N_{k3l} \tag{26}$$

$$N_{k10l} = 50687.5\text{N} \tag{27}$$

Durch vertikales Gleichgewicht:

$$0 = -A_z + ST_1 \cdot 1.2\text{m} \tag{28}$$

$$ST_1 = \frac{0.83A_z}{\text{m}} \tag{29}$$

$$ST_1 = \frac{458.33\text{N}}{\text{m}} \tag{30}$$

Bereich 2

Das Schnittkörperdiagramm schneidet unmittelbar links neben dem Knoten.

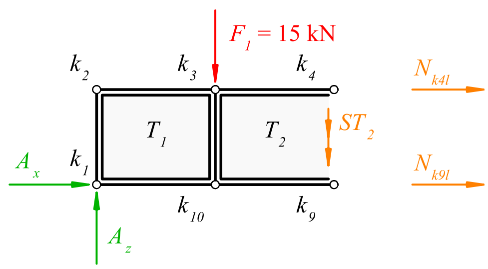

Abbildung 5: Schnittkörperdiagramm 2

Durch Momentengleichgewicht um k_9:

$$0 = -A_z 3.0\text{m} + F_1 \cdot 1.5\text{m} - N_{k4l} 1.2\text{m} \tag{31}$$

$$N_{k4l} = -2.5A_z + 1.25F_1 \tag{32}$$

$$N_{k4l} = 17375.0\text{N} \tag{33}$$

Durch horizontales Gleichgewicht:

$$0 = A_x + N_{k4l} + N_{k9l} \tag{34}$$

$$N_{k9l} = -A_x - N_{k4l} \tag{35}$$

$$N_{k9l} = 32625.0\text{N} \tag{36}$$

Durch vertikales Gleichgewicht:

$$0 = -A_z + F_1 + ST_2 \cdot 1.2\text{m} \tag{37}$$

$$ST_2 = \frac{0.83\,(A_z - F_1)}{\text{m}} \tag{38}$$

$$ST_2 = -\frac{12042.0\text{N}}{\text{m}} \tag{39}$$

Bereich 3

Das Schnittkörperdiagramm schneidet unmittelbar links neben dem Knoten.

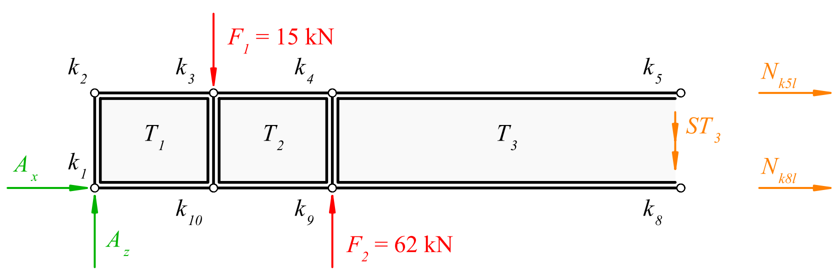

Abbildung 6: Schnittkörperdiagramm 3

Durch Momentengleichgewicht um k_8:

$$0 = -A_z 7.4\text{m} + F_1 \cdot 5.9\text{m} - F_2 \cdot 4.4\text{m} - N_{k5l} 1.2\text{m} \tag{40}$$

$$N_{k5l} = -6.17A_z + 4.92F_1 - 3.67F_2 \tag{41}$$

$$N_{k5l} = -156975.0\text{N} \tag{42}$$

Durch horizontales Gleichgewicht:

$$0 = A_x + N_{k5l} + N_{k8l} \tag{43}$$

$$N_{k8l} = -A_x - N_{k5l} \tag{44}$$

$$N_{k8l} = 206975.0\text{N} \tag{45}$$

Durch vertikales Gleichgewicht:

$$0 = -A_z + F_1 - F_2 + ST_3 \cdot 1.2\text{m} \tag{46}$$

$$ST_3 = \frac{0.83\left(A_z - F_1 + F_2\right)}{\text{m}} \tag{47}$$

$$ST_3 = \frac{39625.0\text{N}}{\text{m}} \tag{48}$$

Bereich 4

Das Schnittkörperdiagramm schneidet unmittelbar links neben dem Knoten.

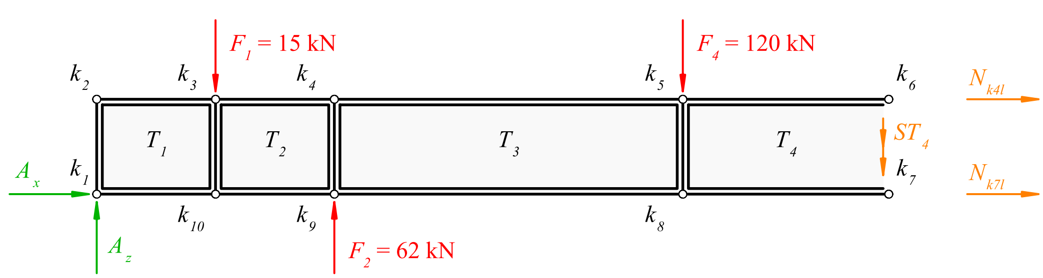

Abbildung 7: Schnittkörperdiagramm 4

Durch Momentengleichgewicht um k_7:

$$0 = -A_z 10.0\text{m} + F_1 \cdot 8.5\text{m} - F_2 \cdot 7.0\text{m} + F_4 \cdot 2.6\text{m} - N_{k6l} 1.2\text{m} \tag{49}$$

$$N_{k6l} = -8.33A_z + 7.08F_1 - 5.83F_2 + 2.17F_4 \tag{50}$$

$$N_{k6l} = 0 \tag{51}$$

Durch horizontales Gleichgewicht:

$$0 = A_x + N_{k6l} + N_{k7l} \tag{52}$$

$$N_{k7l} = -A_x - N_{k6l} \tag{53}$$

$$N_{k7l} = 50000.0\text{N} \tag{54}$$

Durch vertikales Gleichgewicht:

$$0 = -A_z + F_1 - F_2 + F_4 + ST_4 \cdot 1.2\text{m} \tag{55}$$

$$ST_4 = \frac{0.83 \left(A_z - F_1 + F_2 - F_4\right)}{\text{m}} \tag{56}$$

$$ST_4 = -\frac{60375.0\text{N}}{\text{m}} \tag{57}$$

Der Abschliessende Verlauf lässt sich anhand der Schubflüsse bestimmen. Beginnend bei einer Puntklast kann anhand des Schubflusses diese entlang der Tafel angepasst werden. Dies resultiert zu den folgenden Zustandslinien:

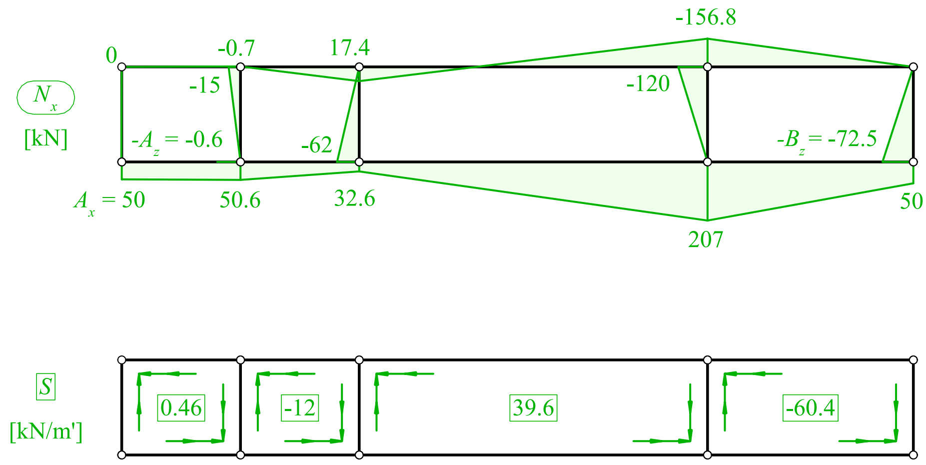

Abbildung 8: Zustandslinien der Normalkräfte und der Schubflüsse

Querschnittswerte

Die Bestimmung der Querschnittswerte folgt dem Merkblatt der Vorlesung. Der Querschnitt in Abbildung 2 wird in ein Rechteck und in ein Dreieck eingeteilt.

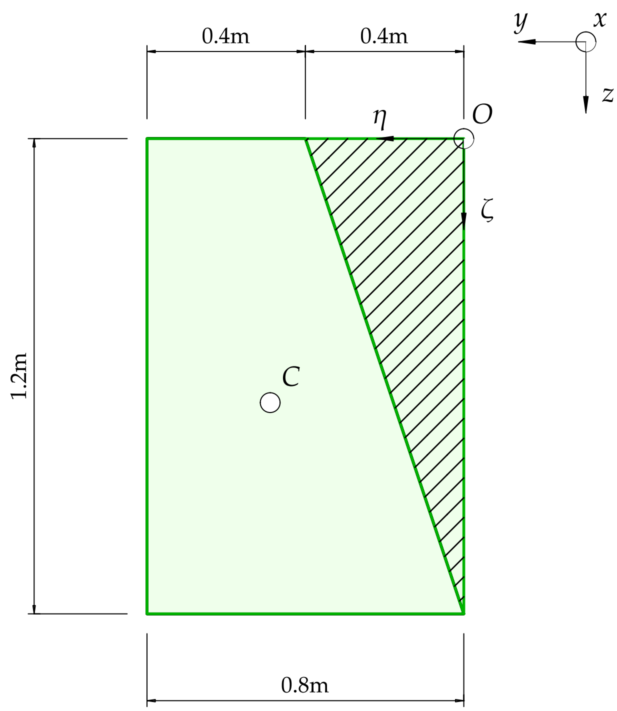

Abbildung 9: Aufteilung des Querschnitts in Teilflächen

$b = 0.8\text{m}$	$b_1 = 0.4\text{m}$
$h = 1.2\text{m}$	

Querschnittsfläche

$$A = bh - \frac{b_1 h}{2} \tag{58}$$

$$A = 0.72\text{m}^2 \tag{59}$$

Flächenmoment 1. Grades S_η, S_ζ

$$S_\eta = -\frac{h}{3}\frac{b_1 h}{2} + \frac{h}{2} bh \tag{60}$$

$$S_\eta = 0.48\mathrm{m}^3 \tag{61}$$

$$S_\zeta = \frac{b}{2}bh - \frac{b_1}{3}\frac{b_1 h}{2} \tag{62}$$

$$S_\zeta = 0.352\mathrm{m}^3 \tag{63}$$

Lage des Schwerpunkts C

$$\eta_C = \frac{S_\zeta}{A} \tag{64}$$

$$\eta_C = 0.489\mathrm{m} \tag{65}$$

$$\zeta_C = \frac{S_\eta}{A} \tag{66}$$

$$\zeta_C = 0.667\mathrm{m} \tag{67}$$

Flächenmomente 2. Grades

Diese werden anhand des, in den Schwerpunkt verschobenen, Koordinatensystems ermittelt.

$$-0.133333333333333\mathrm{m} + \eta_C = 0.355558268229167\mathrm{m} \tag{68}$$

$$-0.4\mathrm{m} + \zeta_C = 0.2666259765625\mathrm{m} \tag{69}$$

$$I_{\eta'} = \frac{bh^3}{12} + bh\left(-\frac{h}{2} + \zeta_C\right)^2 - \frac{b_1 h^3}{36} - \frac{b_1 h\left(-\frac{h}{3} + \zeta_C\right)^2}{2} \tag{70}$$

$$I_{\eta'} = 0.0832\mathrm{m}^4 \tag{71}$$

$$I_{\zeta'} = \frac{b^3 h}{12} + bh\left(-\frac{b}{2} + \eta_C\right)^2 - \frac{b_1^3 h}{36} - \frac{b_1 h\left(-\frac{b_1}{3} + \eta_C\right)^2}{2} \tag{72}$$

$$I_{\zeta'} = 0.0263\mathrm{m}^4 \tag{73}$$

$$C_{\eta'\zeta'} = -bh\left(-\frac{b}{2} + \eta_C\right)\left(-\frac{h}{2} + \zeta_C\right) - \frac{b_1^2 h^2}{72} + \frac{b_1 h\left(-\frac{b_1}{3} + \eta_C\right)\left(-\frac{h}{3} + \zeta_C\right)}{2} \tag{74}$$

$$C_{\eta'\zeta'} = 0.0139\mathrm{m}^4 \tag{75}$$

Hauptwerte der Flächenträgheitsmomente

Abschliessend werden die bestimmten Flächenträgheitsmomente in die Hauptrichtungen transformiert.

$$\phi = \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2C_{\eta'\zeta'}}{I_{\eta'} - I_{\zeta'}}\right)}{2} \tag{76}$$

$$\phi = 0.227 \tag{77}$$

$$\phi = 13.0^\circ \tag{78}$$

$$I_y = \frac{I_{\eta'}}{2} + \frac{I_{\zeta'}}{2} + \sqrt{\left(C_{\eta'\zeta'}\right)^2 + \left(\frac{I_{\eta'}}{2} - \frac{I_{\zeta'}}{2}\right)^2} \tag{79}$$

$$I_y = 0.0864\mathrm{m}^4 \tag{80}$$

$$I_z = \frac{I_{\eta'}}{2} + \frac{I_{\zeta'}}{2} - \sqrt{\left(C_{\eta'\zeta'}\right)^2 + \left(\frac{I_{\eta'}}{2} - \frac{I_{\zeta'}}{2}\right)^2} \tag{81}$$

$$I_z = 0.0231\text{m}^4 \tag{82}$$

Literatur

1. Heinzmann D (2019) Baustatik 1. Vorlesungsskripte Hochschule Luzern Technik & Architektur (HSLU)