Aufgabe III – Baudynamik

A) - Ermittlung der Eigenfrequenzen und Eigenformen des in Abbildung III_A-1 dargestellten Objektes
- Darstellung der Eigenformen
- Ermitteln der Modal- und Spektralmatrix
- Erläutern Sie ihr Vorgehen.

B) - Ermitteln und Darstellen der maximalen Gesamtverformung (SRSS-Kombinationsregel) aus dem Antwortspektrum der Pseudobeschleunigung bestimmen (Kurve E)
- Ermittlung der daraus resultierenden Schnittgrössen
- Erläutern Sie ihr Vorgehen.

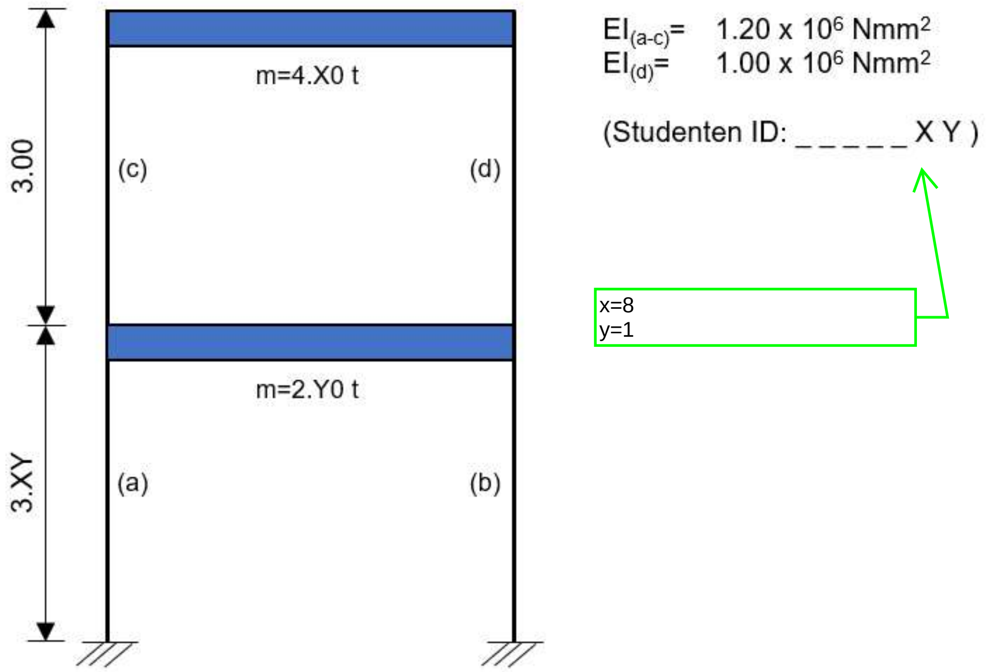


Abbildung III_A-1: Statisches System

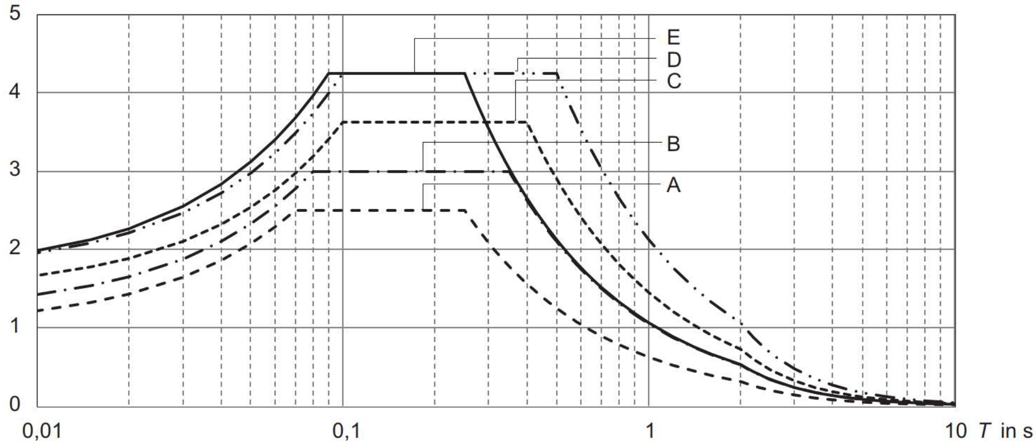


Abbildung III_A-2: Antwortspektren

Beispiel C

$x := 8$

$y := 1 \qquad t := 1000\ kg$

$m1 := 2\ t + \frac{y}{10}\ t \qquad m1 = 2100\ kg \qquad h1 := 3\ m + \frac{y}{100}\ m + \frac{x}{10}\ m = 3.81\ m$

$m2 := 4\ t + \frac{x}{10}\ t \qquad m2 = 4800\ kg \qquad h2 := 3\ m$

$M := \begin{bmatrix} m1 & 0 \\ 0 & m2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2100 & 0 \\ 0 & 4800 \end{bmatrix} kg$

$EI_{a\_c} := 5.5 \cdot 10^5\ N \cdot m^2$

$EI_d := 2.5 \cdot 10^5\ N \cdot m^2$

$k\_1 := \frac{12 \cdot EI_{a\_c}}{(h1)^3} \cdot 2 = 238670.644\ \frac{N}{m}$

$k\_2 := \frac{12 \cdot EI_{a\_c}}{(h2)^3} + \frac{12 \cdot EI_d}{(h2)^3} = 355555.556\ \frac{N}{m}$

$K := \begin{bmatrix} k\_1 + k\_2 & -k\_2 \\ -k\_2 & k\_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 594226.199 & -355555.556 \\ -355555.556 & 355555.556 \end{bmatrix} \frac{N}{m}$

$A := det(-\lambda \cdot M + K) = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda\_1 \\ \lambda\_2 \end{bmatrix} := A \xrightarrow{solve,\lambda} \begin{bmatrix} \dfrac{0.99206349206349206349 \cdot 10^{-7} \cdot \left(2382719048247160532.5 \cdot N^2 \cdot m^2 \cdot kg^2\right)^{0.5} + 178.}{m^2 \cdot kg^2} \\ \dfrac{-\left(0.99206349206349206349 \cdot 10^{-7}\right) \cdot \left(2382719048247160532.5 \cdot N^2 \cdot m^2 \cdot kg^2\right)^{0.5} + 17}{m^2 \cdot kg^2} \end{bmatrix} \cdots$$

$\lambda\_1 = 331.655\ \frac{1}{s^2} \qquad \omega\_2 := \sqrt{\lambda\_1} = 18.211\ \frac{1}{s}$

$\lambda\_2 = 25.384\ \frac{1}{s^2} \qquad \omega\_1 := \sqrt{\lambda\_2} = 5.038\ \frac{1}{s} \qquad \omega := \begin{bmatrix} \omega\_1 \\ \omega\_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.038 \\ 18.211 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$

Eigenformen

1. Eigenform

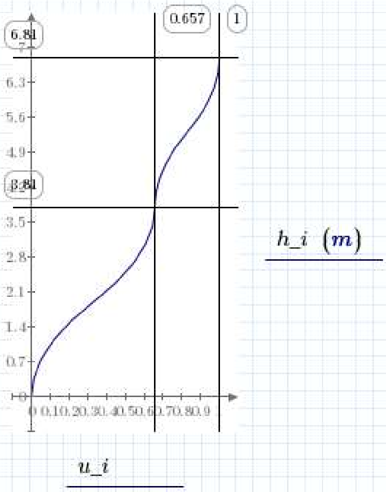
$$B := K - \omega\_1^2 \cdot M = \begin{bmatrix} 540919.876 & -355555.556 \\ -355555.556 & 233712.531 \end{bmatrix} \frac{kg}{s^2}$$

$h1 = 3.81\ m \qquad h2 = 3\ m$

$$\Phi\_11 := 1 \qquad \Phi\_21 := -\frac{B(0,0)}{B(0,1)} \cdot \Phi\_11 = 1.521$$

$$\Phi\_1 := \begin{bmatrix} \Phi\_11 \\ \Phi\_21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.521 \end{bmatrix} \qquad \max(\Phi\_1) = 1.521 \qquad \Phi\_1 := \frac{\Phi\_1}{\max\left(\begin{bmatrix} |\Phi\_11| \\ |\Phi\_21| \end{bmatrix}\right)} = \begin{bmatrix} 0.657 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot \Phi\_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{kg}{s^2}$$



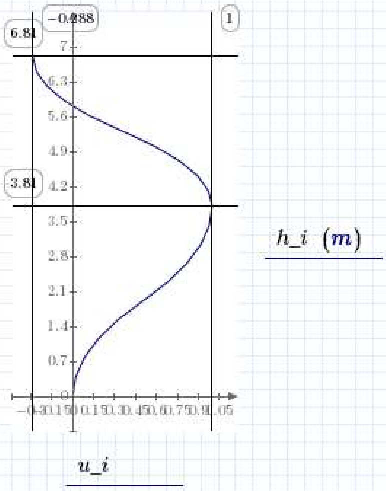
2. Eigenform

$$B := K - \omega\_2^2 \cdot M = \begin{bmatrix} -102249.232 & -355555.556 \\ -355555.556 & -1236388.287 \end{bmatrix} \frac{kg}{s^2}$$

$$\Phi\_12 := 1 \qquad \Phi\_22 := -\frac{B(0,0)}{B(0,1)} \cdot \Phi\_12 = -0.288$$

$$\Phi\_2 := \begin{bmatrix} \Phi\_12 \\ \Phi\_22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.288 \end{bmatrix} \qquad \max(\Phi\_1) = 1 \qquad \Phi\_2 := \frac{\Phi\_2}{\max\left(\begin{bmatrix} |\Phi\_12| \\ |\Phi\_22| \end{bmatrix}\right)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.288 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot \Phi\_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{kg}{s^2}$$



$$\Phi := \mathbf{augment}(\Phi\_1, \Phi\_2) = \begin{bmatrix} 0.657 & 1 \\ 1 & -0.288 \end{bmatrix}$$

$$M\_s := \Phi^{T} M \cdot \Phi = \begin{bmatrix} 5707.336 & 0 \\ 0 & 2496.96 \end{bmatrix} kg$$

$$K\_s := \Phi^{T} K \cdot \Phi = \begin{bmatrix} 144874.82 & 0 \\ 0 & 828129.085 \end{bmatrix} \frac{N}{m}$$

B)

Ermittlung der max. Verformung und Schnittgrössen basierend auf Antwortspektrum

Die Kurve des Antwortspektrums ist wie folgt zu wählen: A=0; B=1; C=2; D=3; E=4: $\xi := 0.05$

$Kurve := 4$

$$T := \frac{2\pi}{\omega} = \begin{bmatrix} 1.247 \\ 0.345 \end{bmatrix} s$$

$S := Erdbeben(Kurve, 0) = 1.7$

$T_B := Erdbeben(Kurve, 1) = 0.09\ s$

$T_C := Erdbeben(Kurve, 2) = 0.25\ s$

$T_D := Erdbeben(Kurve, 3) = 2\ s$

$$\eta := \sqrt{\frac{1}{0.5 + 10 \cdot \xi}} = 1$$

$T_n := T(0) = 1.247\ s$

$$S_n := \begin{cases} S \cdot \left(1 + \frac{(2.5 \cdot \eta - 1) \cdot T_n}{T_B}\right) & \text{if } T_n < T_B \\ 2.5 \cdot S \cdot \eta & \text{else if } T_n < T_C \\ 2.5 \cdot S \cdot \eta \cdot \frac{T_C}{T_n} & \text{else if } T_n < T_D \\ 2.5 \cdot S \cdot \eta \cdot \frac{T_C \cdot T_D}{T_n^{2}} & \text{else} \end{cases} = 0.852$$

$$S\_1 := S_n \cdot \frac{m}{s^2} = 0.852\ \frac{m}{s^2}$$

$T_n := T(1) = 0.345\ s$

$$S_n := \begin{cases} S \cdot \left(1 + \frac{(2.5 \cdot \eta - 1) \cdot T_n}{T_B}\right) & \text{if } T_n < T_B \\ 2.5 \cdot S \cdot \eta & \text{else if } T_n < T_C \\ 2.5 \cdot S \cdot \eta \cdot \frac{T_C}{T_n} & \text{else if } T_n < T_D \\ 2.5 \cdot S \cdot \eta \cdot \frac{T_C \cdot T_D}{T_n^{2}} & \text{else} \end{cases} = 3.08$$

$$S\_2 := S_n \cdot \frac{m}{s^2} = 3.08\ \frac{m}{s^2}$$

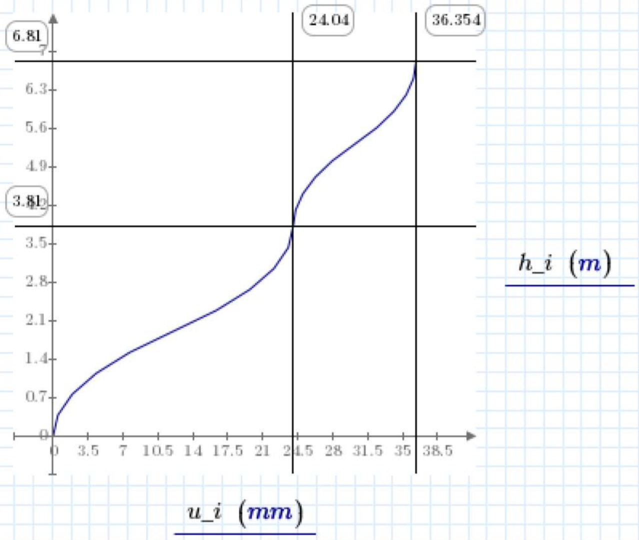
Maximal Verformung

$$\Gamma := M\_s^{-1} \cdot \Phi^{\mathrm{T}} \cdot M \cdot \mathbf{identity}(2) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.083 \\ 0.288 \end{bmatrix} \qquad \omega = \begin{bmatrix} 5.038 \\ 18.211 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

$$q\_1\_max := \Gamma(0) \cdot \frac{1}{\omega\_1^2} \cdot S\_1 = 0.036\ m$$

$$q\_2\_max := \Gamma(1) \cdot \frac{1}{\omega\_2^2} \cdot S\_2 = 0.003\ m$$

$$u\_max := \left(\left(\Phi\_1 \cdot q\_1\_max \right)^2 + \left(\Phi\_2 \cdot q\_2\_max \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.024 \\ 0.036 \end{bmatrix} m$$



Maximal Auswirkungen/Schnittkräfte (Verlauf)

$$u\_1\_max := q\_1\_max \cdot \Phi\_1 = \begin{bmatrix} 0.024 \\ 0.036 \end{bmatrix} \; m$$

$$s\_1 := \Gamma(0) \cdot M \cdot \Phi\_1 = \begin{bmatrix} 1494.77 \\ 5197.827 \end{bmatrix} \; kg$$

$$F\_1\_max := s\_1 \cdot S\_1 = \begin{bmatrix} 1.274 \\ 4.428 \end{bmatrix} \; kN \qquad V\_1 := \begin{bmatrix} F\_1\_max(1) + F\_1\_max(0) \\ F\_1\_max(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.702 \\ 4.428 \end{bmatrix} \; kN$$

$$u\_2\_max := q\_2\_max \cdot \Phi\_2 = \begin{bmatrix} 0.003 \\ -0.001 \end{bmatrix} \; m$$

$$s\_2 := \Gamma(1) \cdot M \cdot \Phi\_2 = \begin{bmatrix} 605.23 \\ -397.827 \end{bmatrix} \; kg$$

$$F\_2\_max := s\_2 \cdot S\_2 = \begin{bmatrix} 1.864 \\ -1.225 \end{bmatrix} \; kN \qquad V\_2 := \begin{bmatrix} F\_2\_max(1) + F\_2\_max(0) \\ F\_2\_max(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.639 \\ -1.225 \end{bmatrix} \; kN$$

$$V\_max := \left((V\_1)^2 + (V\_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 5.738 \\ 4.595 \end{bmatrix} \; kN$$

$$H := \begin{bmatrix} 0 \; m \\ h1 \\ h1 \\ h1 + h2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.81 \\ 3.81 \\ 6.81 \end{bmatrix} \; m \qquad V := \begin{bmatrix} V\_max(0) \\ V\_max(0) \\ V\_max(1) \\ V\_max(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.738 \\ 5.738 \\ 4.595 \\ 4.595 \end{bmatrix} \; kN$$

$$M := \begin{bmatrix} V\_max(1) \cdot (h1 + h2) + (V\_max(0) - V\_max(1)) \cdot h1 \\ V\_max(1) \cdot h2 \\ V\_max(1) \cdot h2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.645 \\ 13.784 \\ 13.784 \\ 0 \end{bmatrix} \; kN \cdot m$$

$$N\_ := \begin{bmatrix} m1 + m2 \\ m1 + m2 \\ m2 \\ m2 \end{bmatrix} \cdot 10 \; \frac{m}{s^2} = \begin{bmatrix} 69 \\ 69 \\ 48 \\ 48 \end{bmatrix} \; kN$$