

# **Beispielsammlung**

**Komplettiert die Vorlesung Baudynamik**

Dr. Stephan Gollob & Pascal Gitz

Dienstag, 5. September 2023

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>I. Rayleigh-Quotient</b>	<b>4</b>
<b>1. Beispiel: Kragarm mit 2 Punktmassen</b>	<b>5</b>
1.1. Aufgabenstellung . . . . .	5
1.2. Musterlösung . . . . .	6
<b>2. Beispiel: Kragarm mit 1 Punktmasse</b>	<b>9</b>
2.1. Aufgabenstellung . . . . .	9
2.2. Musterlösung . . . . .	10
<b>3. Beispiel: Einfacher Balken mit konstanter Masse</b>	<b>12</b>
3.1. Aufgabenstellung . . . . .	12
3.2. Musterlösung . . . . .	14
<b>II. Einmassenschwinger</b>	<b>19</b>
<b>4. Beispiel: Logarithmisches Dekrement</b>	<b>20</b>
4.1. Aufgabenstellung . . . . .	20
4.2. Musterlösung . . . . .	22
<b>5. Beispiel: Impulssatz</b>	<b>26</b>
5.1. Aufgabenstellung . . . . .	26
5.2. Musterlösung . . . . .	28
<b>6. Beispiel: Dynamischer Vergrößerungsfaktor</b>	<b>33</b>
6.1. Aufgabenstellung . . . . .	33
6.2. Musterlösung . . . . .	35
<b>7. Beispiel: Gesamtantwort ohne Dämpfung</b>	<b>40</b>
7.1. Aufgabenstellung . . . . .	40
7.2. Musterlösung . . . . .	42

<b>8. Beispiel: Gesamtantwort mit Dämpfung</b>	<b>49</b>
8.1. Aufgabenstellung . . . . .	49
8.2. Musterlösung . . . . .	51
<b>9. Beispiel: Fourier-Transformation</b>	<b>58</b>
9.1. Aufgabenstellung . . . . .	58
9.2. Musterlösung . . . . .	60
<b>10. Beispiel: Balken ohne Tilger</b>	<b>65</b>
10.1. Aufgabenstellung . . . . .	65
10.2. Musterlösung . . . . .	66
 <b>III. Mehrmassenschwinger</b>	 <b>69</b>
<b>11. Beispiel: Eigenvektoren mit direkt bestimmter Steifigkeitsmatrix</b>	<b>70</b>
11.1. Aufgabenstellung . . . . .	70
11.2. Musterlösung . . . . .	72
<b>12. Beispiel: Eigenvektoren und Nachgiebigkeitsmatrix</b>	<b>77</b>
12.1. Aufgabenstellung . . . . .	77
12.2. Musterlösung . . . . .	79
<b>13. Beispiel: Balken mit Tilger</b>	<b>86</b>
13.1. Aufgabenstellung . . . . .	86
13.2. Musterlösung . . . . .	88
<b>14. Beispiel: Antwortspektrenverfahren an einem dreistöckigen Gebäude</b>	<b>97</b>
14.1. Aufgabenstellung . . . . .	97
14.2. Musterlösung . . . . .	99
<b>15. Beispiel: Antwortspektrenverfahren an einem Rahmen</b>	<b>114</b>
15.1. Aufgabenstellung . . . . .	114
15.2. Musterlösung . . . . .	116
<b>16. Beispiel: Antwortspektrenverfahren an einem zweistöckigen Gebäude</b>	<b>128</b>
16.1. Aufgabenstellung . . . . .	128
16.2. Musterlösung . . . . .	130
 <b>IV. Ersatzkraftverfahren</b>	 <b>145</b>
<b>17. Beispiel: Unsymmetrisch angeordnete Wandscheiben</b>	<b>146</b>
17.1. Aufgabenstellung . . . . .	146
17.2. Musterlösung . . . . .	150

<b>18. Beispiel: Rayleigh-Quotient und Fundamentsteifigkeit beim Ersatzkraftverfahren</b>	<b>170</b>
18.1. Aufgabenstellung . . . . .	170
18.2. Musterlösung . . . . .	174
<b>19. Beispiel: Rayleigh-Quotient an einem Sechsmassenschwinger beim Ersatzkraftverfahren</b>	<b>195</b>
19.1. Aufgabenstellung . . . . .	195
19.2. Musterlösung . . . . .	197
<b>Literatur</b>	<b>202</b>

# Vorwort

Die folgenden Beispiele umfassen die wesentlichen Aspekte der im Rahmen der Vorlesung Baudynamik vorgestellten Theorie. Anhand von numerischen Beispielen werden die Grundlagen der Baudynamik vertieft behandelt.

## To-Dos

- Bilder mit CAD zeichnen
- Symbole müssen mit Skizzen und Berechnungen übereinstimmen.
- Bestimmung Steifigkeitsmatrix Gleichgewicht der "alleinstehenden Federkraft"
- Generalisierte Grössen Höhe des EMS.
- Überlagerung der Ersatzkräfte klären
  - Vorzeichen Torsion
- EKV mein System ist viel zu steif
- EKV-Rayleigh Nachgiebigkeitsmatrix Überlagerung der Biegemomente

**Teil I.**

# **Rayleigh-Quotient**

# 1. Beispiel: Kragarm mit 2 Punktmassen

## 1.1. Aufgabenstellung

Das in Abbildung 1.1 dargestellte System stellt einen Kragarm mit verteilter Masse und 2 Punktmassen dar. Eine mögliche Formfunktion ist rechts daneben gezeigt.

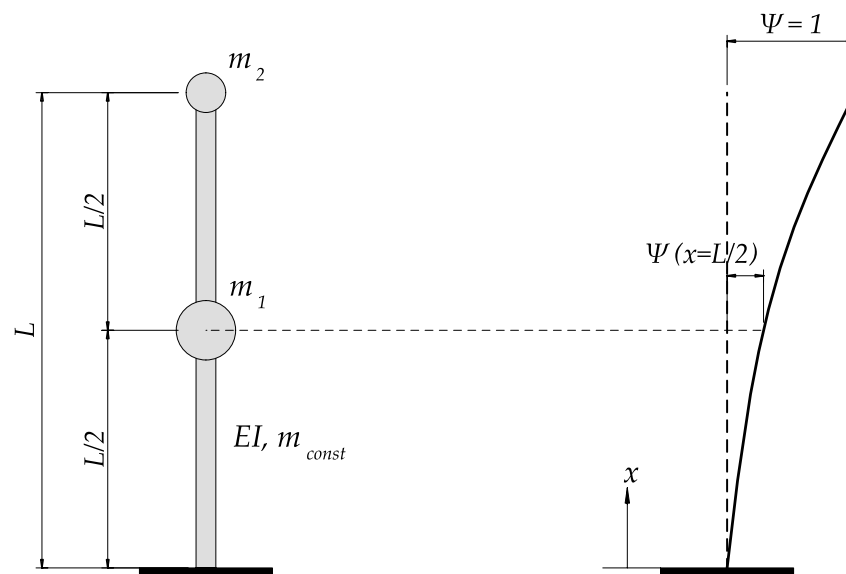


Abbildung 1.1.: Kragarm mit verteilter Masse und zwei Punktmassen

Gesucht:

- Grundfrequenz (1. Eigenfrequenz  $\omega_1$ ) des Systems, berechnet mit dem Rayleigh-Quotienten.

Gegeben:

- Randbedingungen für den Spezialfall:  $m_{const} = 0$  und  $m_1 = m_2 = m$
- Formfunktion:

$$\Psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

## 1.2. Musterlösung

### 1.2.1. Grundfrequenz

Mithilfe der in der Vorlesung hergeleiteten Bewegungsgleichung kann anhand der Formfunktion  $\Psi$  die erste Eigenkreisfrequenz ermittelt werden. Der Rayleigh-Quotient ist eine Energiebetrachtung. Er setzt die potenzielle, maximale Energie  $E_{pot,max}$  zur kinetischen, maximalen Energie  $E_{kin,max}$  ins Verhältnis. Daraus lässt sich die Kreisfrequenz  $\omega_1$  herauslösen.

$$u'' \int_0^L m \Psi^2 dx + u \int_0^L (EI(\Psi'')^2) dx = f(x, t) \quad (1.1)$$

Durch Substitution resultiert die bekannte Bewegungsgleichung:

$$m^* u'' + k^* u = f(x, t) \text{ mit } k^* = \int_0^L (EI(\Psi'')^2) dx \text{ und } m^* = \int_0^L m \Psi^2 dx \quad (1.2)$$

Aus der Bewegungsgleichung kann die Eigenkreisfrequenz ermittelt werden:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \quad (1.3)$$

#### 1.2.1.1. Berechnung der Masse

Die Masse in Gleichung 1.3 kann mittels der Lösung des Integrals in Gleichung 1.2 bestimmt werden. Dabei sind die Punktmassen mittels der entsprechenden Deformation an den Stellen  $L$  und  $\frac{L}{2}$  zu berücksichtigen, sowie die verteilte Masse über die gesamte Länge.

$$m^* = \Psi(x = L)^2 m_2 + \Psi(x = L/2)^2 m_1 + \int_0^L \Psi^2 m dx \quad (1.4)$$

$$\Psi(x)^2 = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2 \quad (1.5)$$

$$m^* = m \left(-\frac{4L}{\pi} + \frac{3L}{2}\right) + m_1 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + m_2 \quad (1.6)$$



### 1.2.1.2. Berechnung der Steifigkeit

Die Steifigkeit in Gleichung 1.3 kann mittels der Lösung des Integrals in Gleichung 1.2 bestimmt werden. Zur Ermittlung der Steifigkeit  $k^*$  muss zuerst der Ansatz zweimal nach  $x$  abgeleitet werden.

$$\Psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (1.7)$$

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) = \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{2L} \quad (1.8)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \frac{\pi^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{4L^2} \quad (1.9)$$

Durch das Einsetzen der zweiten Ableitung in den Anteil für  $k^*$  aus Gleichung 1.2 resultiert die Steifigkeit zu:

$$k^* = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \int_0^L (EI(\cos(\frac{\pi x}{2L})^2))dx \quad (1.10)$$

Durch die Lösung des Integrals folgt:

$$k^* = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \quad (1.11)$$

### 1.2.1.3. Berechnung der Grundfrequenz

Durch das Einsetzen der berechneten Werte resultiert die Eigenkreisfrequenz in Gleichung 1.3 zu:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\pi^4 EI}{32L^3 \left( m \left( -\frac{4L}{\pi} + \frac{3L}{2} \right) + m_1 \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + m_2 \right)}} \quad (1.12)$$

#### 1.2.1.4. Auswertung des Spezialfalls

Mit Hilfe der Randbedingungen für den Spezialfall aus der Aufgabenstellung resultiert die Grundfrequenz zu:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2}\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{M\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + M}}}{8L^{\frac{3}{2}}} \quad (1.13)$$

$$\omega_1 = \frac{1.67\sqrt{\frac{EI}{M}}}{L^{\frac{3}{2}}} \quad (1.14)$$

Die exakte erste Eigenfrequenz eines Zweimassenschwingers mit konstanter Steifigkeit und gleichen Massen, mit entsprechenden Randbedingungen gemäss der Aufgabenstellung, ist:

$$\omega_1 \simeq \sqrt{\frac{3.007\frac{EI}{L^3}}{1.102M}} = 1.652\sqrt{\frac{EI}{ML^3}} = \frac{1.652\sqrt{\frac{EI}{M}}}{L^{\frac{3}{2}}} \quad (1.15)$$

Die Berechnung mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten stellt also eine (sehr) gute Abschätzung der ersten Eigenfrequenz dar.

## 2. Beispiel: Kragarm mit 1 Punktmasse

### 2.1. Aufgabenstellung

Das in Abbildung 2.1 dargestellte System stellt einen Kragarm mit verteilter Masse und einer Punktmasse dar. Eine mögliche Formfunktion ist rechts daneben gezeigt.

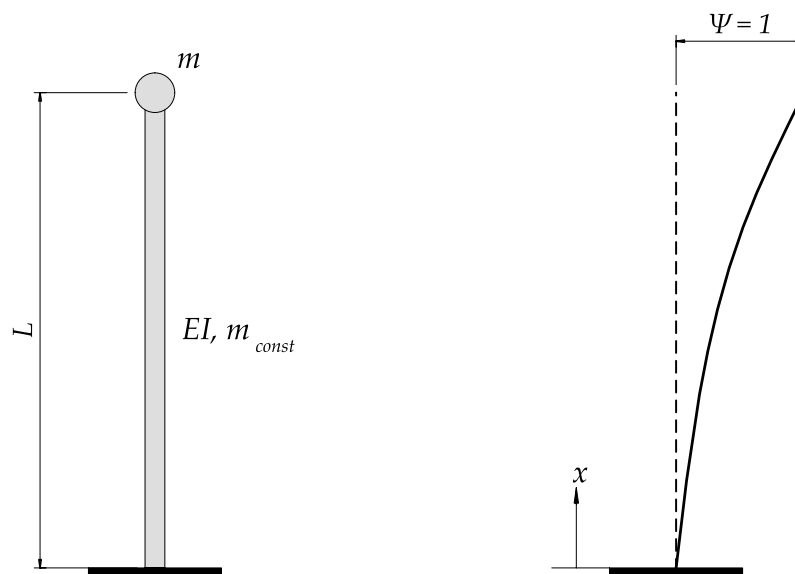


Abbildung 2.1.: Kragarm mit verteilter Masse und einer Punktmasse

Gesucht:

- Grundfrequenz (1. Eigenfrequenz  $\omega_1$ ) des Systems in Abbildung 2.1, berechnet mit dem Rayleigh-Quotienten.

Gegeben:

- Ausgewertet für den Spezialfall:  $m_{const} = 0$  und  $m = m$
- Formfunktion:

$$\Psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

## 2.2. Musterlösung

Das Vorgehen entspricht dem Vorgehen in Kapitel 1.2.

### 2.2.1. Grundfrequenz

#### 2.2.1.1. Berechnung der Masse

Die Masse in Gleichung 1.3 kann mittels der Lösung des Integrals in Gleichung 1.2 bestimmt werden. Dabei ist die Punktmasse mittels der entsprechenden Deformation an der Stelle  $L$  zu berücksichtigen, sowie die verteilte Masse über die gesamte Länge.

$$m^* = \Psi(x=L)^2 m + \int_0^L \Psi^2 m_{const} dx \quad (2.1)$$

$$\Psi(x)^2 = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2 \quad (2.2)$$

$$m^* = m + m_{const} \left(-\frac{4L}{\pi} + \frac{3L}{2}\right) \quad (2.3)$$

#### 2.2.1.2. Berechnung der Steifigkeit

Die Steifigkeit in Gleichung 1.3 kann mittels der Lösung des Integrals in Gleichung 1.2 bestimmt werden. Zur Ermittlung der Steifigkeit  $k^*$  muss zuerst der Ansatz zweimal nach  $x$  abgeleitet werden.

$$\Psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dx} \Psi(x) = \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{2L} \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = \frac{\pi^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{4L^2} \quad (2.6)$$

Durch das Einsetzen der zweiten Ableitung in den Anteil für  $k^*$  aus Gleichung 1.2 resultiert die Steifigkeit zu:

$$k^* = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \int_0^L (EI(\cos(\frac{\pi x}{2L})^2)) dx \quad (2.7)$$

Durch die Lösung des Integrals folgt:

$$k^* = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \quad (2.8)$$

### 2.2.1.3. Berechnung der Grundfrequenz

Durch das Einsetzen der berechneten Werte resultiert die Eigenkreisfrequenz in Gleichung 1.3 zu:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\pi^4 EI}{32L^3 (m + m_{const} (-\frac{4L}{\pi} + \frac{3L}{2}))}} \quad (2.9)$$

### 2.2.1.4. Auswertung des Spezialfalls

Mit Hilfe der Randbedingungen für den Spezialfall aus der Aufgabenstellung resultiert die Grundfrequenz zu:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2}\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}}{8L^{\frac{3}{2}}} \quad (2.10)$$

$$\omega_1 = \frac{1.74 \sqrt{\frac{EI}{m}}}{L^{\frac{3}{2}}} \quad (2.11)$$

### 3. Beispiel: Einfacher Balken mit konstanter Masse

#### 3.1. Aufgabenstellung

Das System in Abbildung 3.1 zeigt einen einfachen Balken mit einer konstanten Streckenlast belastet.

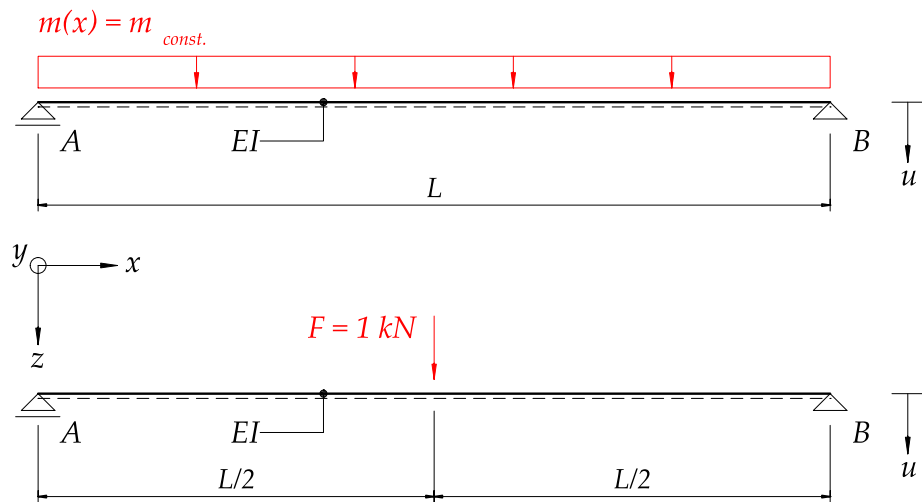


Abbildung 3.1.: Statisches System des einfachen Balkens

Gesucht:

- Eigenkreisfrequenz  $\omega_1$  mit Hilfe der analytischen Formfunktion Gleichung 3.1

$$\Psi(x) = \sin \frac{\pi x}{L} \quad (3.1)$$

- Eigenkreisfrequenz  $\omega_1$  mit Hilfe der Biegelinie

Gegeben:

- Länge des Balkens  $L$

- Verteilte Masse ist konstant  $m_{const}$
- Exakte Lösung der Eigenkreisfrequenz gemäss Gleichung [3.2](#)

$$\omega_1 = \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m_{const} \cdot L^4}} \quad (3.2)$$

## 3.2. Musterlösung

### 3.2.1. Analytische Formfunktion

Als Formfunktion wird eine Sinus-Funktion gewählt. Dabei ist sicherzustellen, dass die Formfunktion normiert ist. Das heisst, der maximale Wert der Funktion ist 1. Dazu sind die kinematischen Randbedingungen einzuhalten. Entsprechend des Systems in Abbildung 3.1 muss die Verformung bei den Lagern null sein. Die gewählte Formfunktion bedingt keine weitere Anpassung zur Normierung.

$$\Psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (3.3)$$

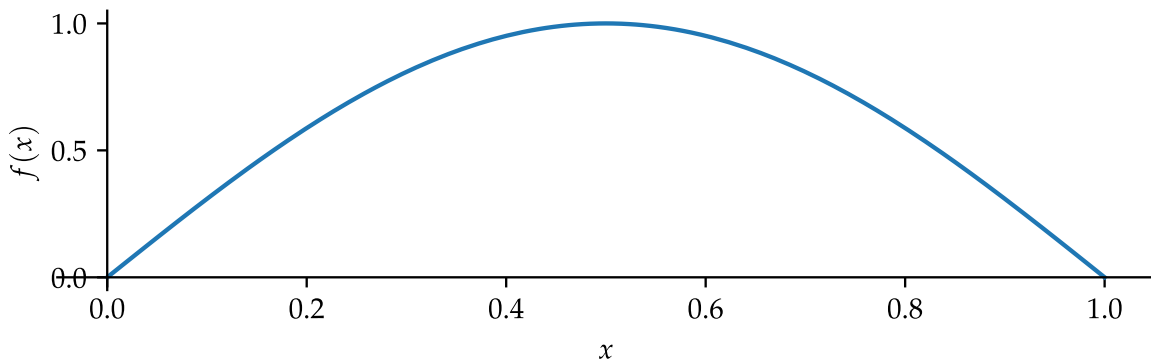


Abbildung 3.2.: Frei gewählte Formfunktion

#### 3.2.1.1. Rayleigh - Quotient

Der Rayleigh-Quotient ist eine Energiebetrachtung. Er setzt die potenzielle, maximale Energie  $E_{pot,max}$  zur kinetischen, maximalen Energie  $E_{kin,max}$  ins Verhältnis. Daraus lässt sich die Grundkreisfrequenz  $\omega_1$  herauslösen. Die Lösung der Integrale wird hier mit einer Mathematik-Software durchgeführt. Die einzelnen Teilschritte werden nicht aufgeführt.

$$E_{pot,max} = E_{kin,max} \quad (3.4)$$

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^L EI[u''(x)]^2 dx}{\int_0^L m_{const.}[u(x)]^2 dx} \quad (3.5)$$

Dies lässt sich mit entsprechender Formfunktion schreiben:



$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^L EI[\Psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L m_{const.}[\Psi(x)]^2 dx} \quad (3.6)$$

Durch die Ermittlung der zweiten Ableitung der Formfunktion:

$$\Psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) = \frac{\pi \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} \quad (3.8)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = -\frac{\pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} \quad (3.9)$$

und eingesetzt in Gleichung 3.6 resultiert die Grundkreisfrequenz zu:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m_{const}}}}{L^2} \quad (3.10)$$

Dies entspricht der exakten Lösung Gleichung 3.2! Grund dafür ist, dass die gewählte Formfunktion mit der dynamischen Deformation übereinstimmt.

### 3.2.2. Formfunktion aus Biegelinie

Die Biegelinie für das System in Abbildung 3.1 ist folgend beschrieben. Beachte dabei, dass die Deformation nach "unten" positiv definiert ist. Die Funktion kann aus Hilfswerken entnommen werden.

$$w(x) = \begin{cases} \frac{FL^2 x \left(\frac{3}{4} - \frac{x^2}{L^2}\right)}{12EI} & \text{for } x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{F(x(3L^2 - 4x^2) - (L - 2x)^3)}{48EI} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.11)$$

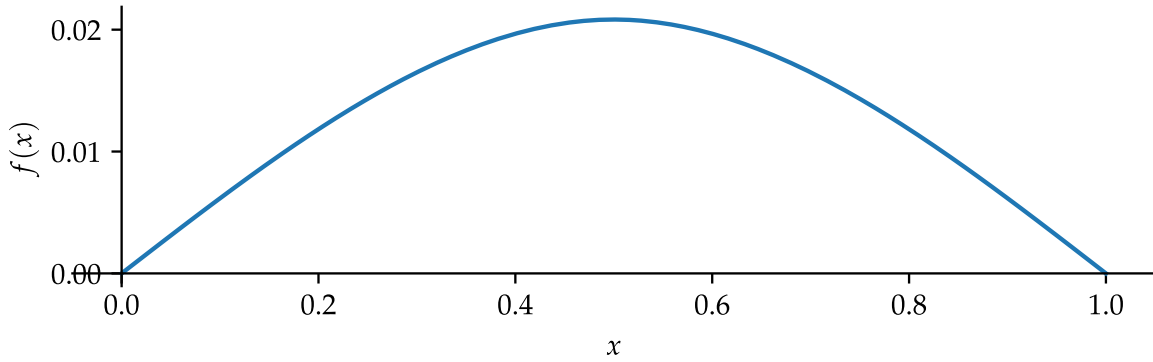


Abbildung 3.3.: Formfunktion aus Biegelinie abgeleitet

### 3.2.2.1. Normierung

Es ist ersichtlich, dass die Formfunktion noch eine Normierung benötigt. Dazu wird der Maximalwert zu 1 gesetzt. Die Randbedingungen sind bereits erfüllt.

$$w_{norm}(x) = \frac{48EI \left( \begin{cases} \frac{FL^2x\left(\frac{3}{4} - \frac{x^2}{L^2}\right)}{12EI} & \text{for } x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{F(x(3L^2 - 4x^2) - (L - 2x)^3)}{48EI} & \text{otherwise} \end{cases} \right)}{FL^3} \quad (3.12)$$

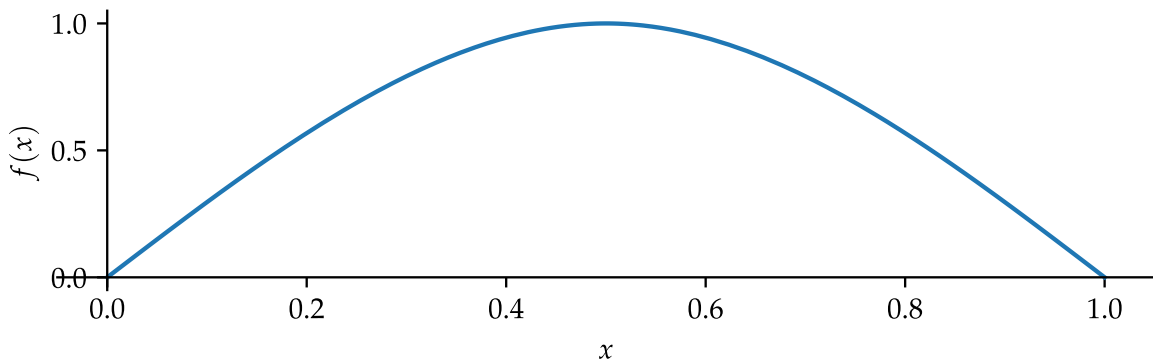


Abbildung 3.4.: Normierte Formfunktion aus Biegelinie abgeleitet

### 3.2.2.2. Rayleigh - Quotient

Durch das Einsetzen der bestimmten Formfunktion aus der Biegelinie in Gleichung 3.6 kann die Eigenkreisfrequenz ermittelt werden.

$$\omega_{1biege} = \frac{9.94 \left( \frac{EI}{m_{const}} \right)^{0.5}}{L^2} \quad (3.13)$$

### 3.2.3. Vergleich beider Lösungen

Ein Vergleich der Eigenkreisfrequenz aus der Biegeform mit der exakten Lösung aus Gleichung 3.2 zeigt eine minimale Abweichung.

$$\text{Abweichung} = 0.72\% \quad (3.14)$$

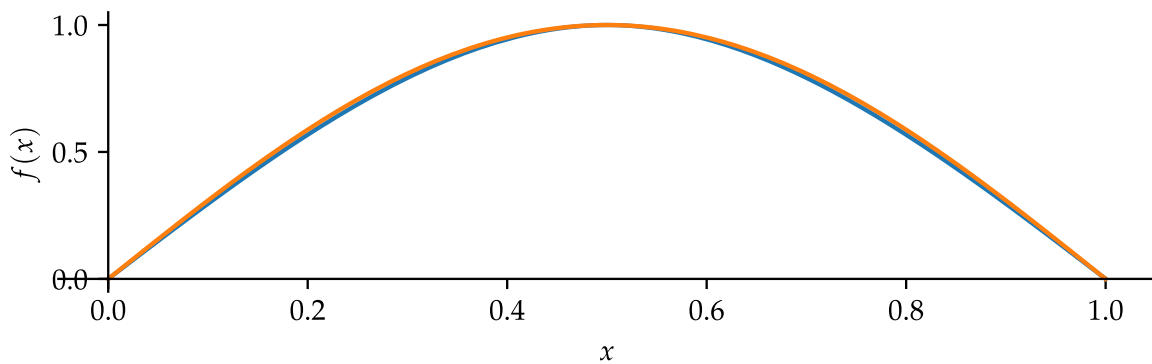


Abbildung 3.5.: Überlagerung beider Funktionen

Um die minimale Abweichung offensichtlicher darzustellen ist in Abbildung 3.6 ein Teilbereich dargestellt.

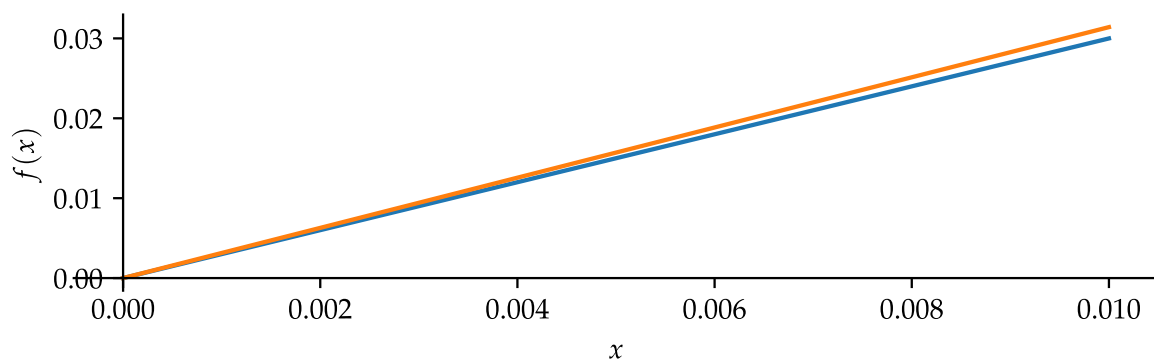


Abbildung 3.6.: Ausschnitt der Überlagerung beider Funktionen

**Teil II.**

## **Einmassenschwinger**

## 4. Beispiel: Logarithmisches Dekrement

### 4.1. Aufgabenstellung

Das in Abbildung 4.1 dargestellte System zeigt ein Rahmentragwerk. Dieses kann als Einmassenschwinger modelliert werden, welcher eine gedämpfte freie Schwingung erfährt.

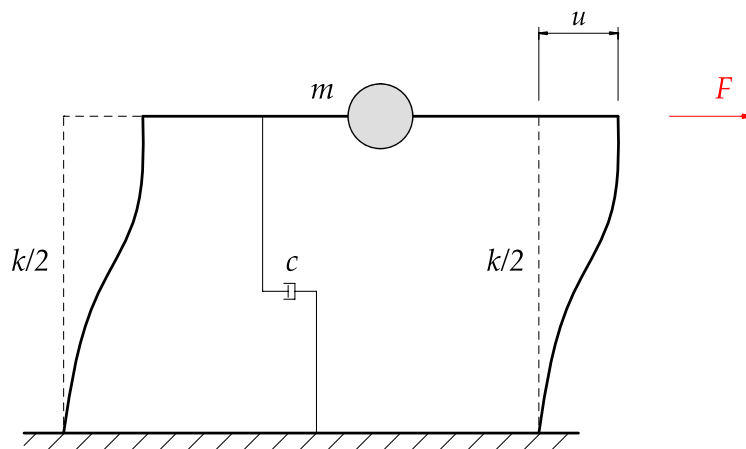


Abbildung 4.1.: Am Riegel ausgelenktes System

Um die Systemeigenschaften des Rahmens zu untersuchen, wird eine Kopfverschiebung bzw. Auslenkung des Rahmens von  $u_0 = 20 \text{ mm}$  aufgebracht. Danach wird die Halterung schlagartig gelöst und der Rahmen kann frei schwingen. Die angebrachte Messeinrichtung registriert eine max. Kopfverschiebung nach dem ersten Zurückschwingen von  $u_1 = 15 \text{ mm}$  nach  $T_D = 0.2 \text{ s}$ .

Gesucht:

- Laterale bzw. horizontale Steifigkeit  $k$  des Rahmens
- Die Dämpfungsrate  $\zeta$  und die Dämpfungskonstante  $c$
- Die Amplitude der Auslenkung des Rahmens nach 10 Schwingzyklen

Gegeben:

Tabelle 4.1.: Parameter der Aufgabenstellung

---

$$EA_{riegel} = \infty$$

$$EI_{riegel} = \infty$$

$$m = \frac{1941 \text{Ns}^2}{\text{m}}$$

$$u_1 = 15 \text{mm}$$

---

$$EA_{stuetze} = \infty$$

$$T_D = 0.2 \text{s}$$

$$u_0 = 20 \text{mm}$$

## 4.2. Musterlösung

### 4.2.1. Horizontale Steifigkeit

#### 4.2.1.1. Logarithmisches Dekrement

Da keine Angaben über die Profile der Stützen gemacht werden, kann mittels des logarithmischen Dekrements die Eigenkreisfrequenz bestimmt werden. Anhand der Eigenkreisfrequenz lässt sich die Steifigkeit ableiten.

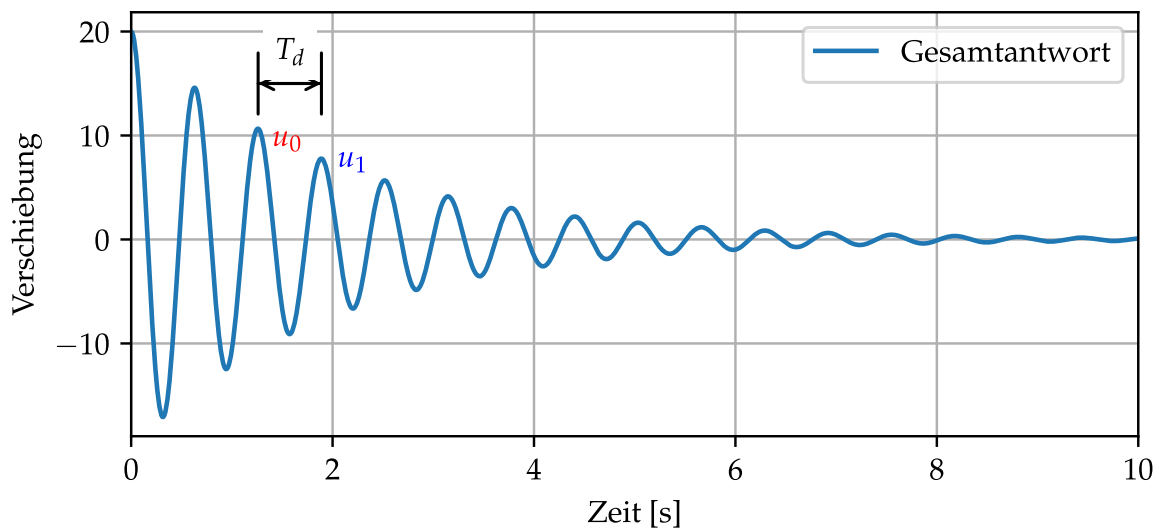


Abbildung 4.2.: Beispiel eines logarithmischen Dekrements

$$\delta = \log \left( \frac{u_0}{u_1} \right) \quad (4.1)$$

$$\delta = 0.288 \quad (4.2)$$

#### 4.2.1.2. Dämpfungsrate

Anhand des logarithmischen Dekrements kann die Dämpfungsrate bestimmt werden.



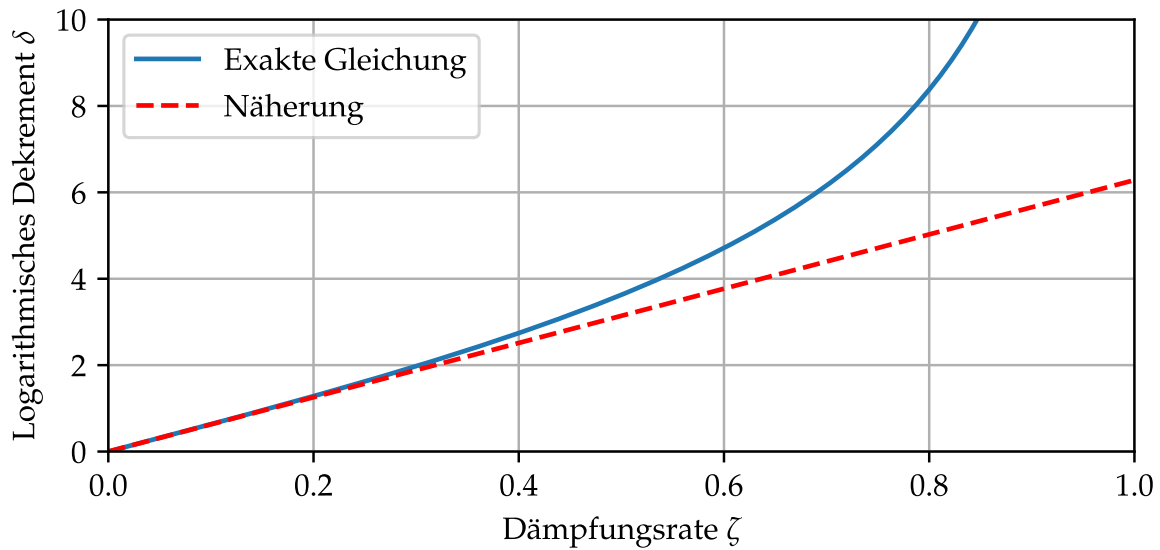


Abbildung 4.3.: Dämpfungsrate anhand des logarithmischen Dekrements

Für kleine Dämpfungsraten kann folgende Gleichung verwendet werden, dies entspricht der Näherung in Abbildung 4.3:

$$\zeta \simeq \frac{\delta}{2\pi} \quad (4.3)$$

Die exakte Lösung bestimmt sich folgender massen:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} \quad (4.4)$$

$$\zeta = \frac{\log\left(\frac{u_0}{u_1}\right)}{\sqrt{\log\left(\frac{u_0}{u_1}\right)^2 + 4\pi^2}} \quad (4.5)$$

$$\zeta = 0.0457 \quad (4.6)$$

#### 4.2.1.3. Eigenkreisfrequenz

Aus der Aufgabenstellung ist die gedämpfte Periode von  $T_D = 0.2s$  bekannt. Anhand dieser lässt sich die *gedämpfte Eigenkreisfrequenz*  $\omega_D$  bestimmen und unter Berücksichtigung der Dämpfungsrate  $\zeta$  kann die *Eigenkreisfrequenz*  $\omega_1$  bestimmt werden.

$$\omega_D = \frac{2\pi}{T_D} \quad (4.7)$$

$$\omega_D = \frac{31.42}{s} \quad (4.8)$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_D}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (4.9)$$

$$\omega_1 = \frac{31.45}{s} \quad (4.10)$$

#### 4.2.1.4. Steifigkeit

Wir kennen die Beziehung zwischen Eigenkreisfrequenz und Steifigkeit:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.11)$$

$$k = m\omega_1^2 \quad (4.12)$$

$$k = \frac{1.92 \cdot 10^6 \text{N}}{\text{m}} \quad (4.13)$$

#### 4.2.2. Dämpfungskonstante

Anhand der Dämpfungsrate  $\zeta$  lässt sich leicht die Dämpfungskonstante bestimmen:

$$\zeta = \frac{c}{2\omega_1 m} \quad (4.14)$$

$$c = \frac{5.58 \cdot 10^3 \text{Ns}}{\text{m}} \quad (4.15)$$

### 4.2.3. Amplitude nach 10 Schwingzyklen

Das Verhalten der Amplitude ist in Abbildung [4.2](#) dargestellt.

$$\delta = \ln\left(\frac{u_0}{u_1}\right) \quad (4.16)$$

$\delta$  ist ein konstanter Wert und kann auf 10 Zyklen erweitert werden.

$$u_1 = u_0 e^{-\delta} \quad (4.17)$$

$$u_{10} = u_0 e^{-10\delta} \quad (4.18)$$

$$u_{10} = 1.126\text{mm} \quad (4.19)$$

## 5. Beispiel: Impulssatz

### 5.1. Aufgabenstellung

Abbildung 5.1 zeigt das System eines Stahlrahmens. Dieser wird durch eine kurzzeitig einwirkende Stossbelastung  $F(t)$  in Höhe des Rahmenriegels beansprucht.

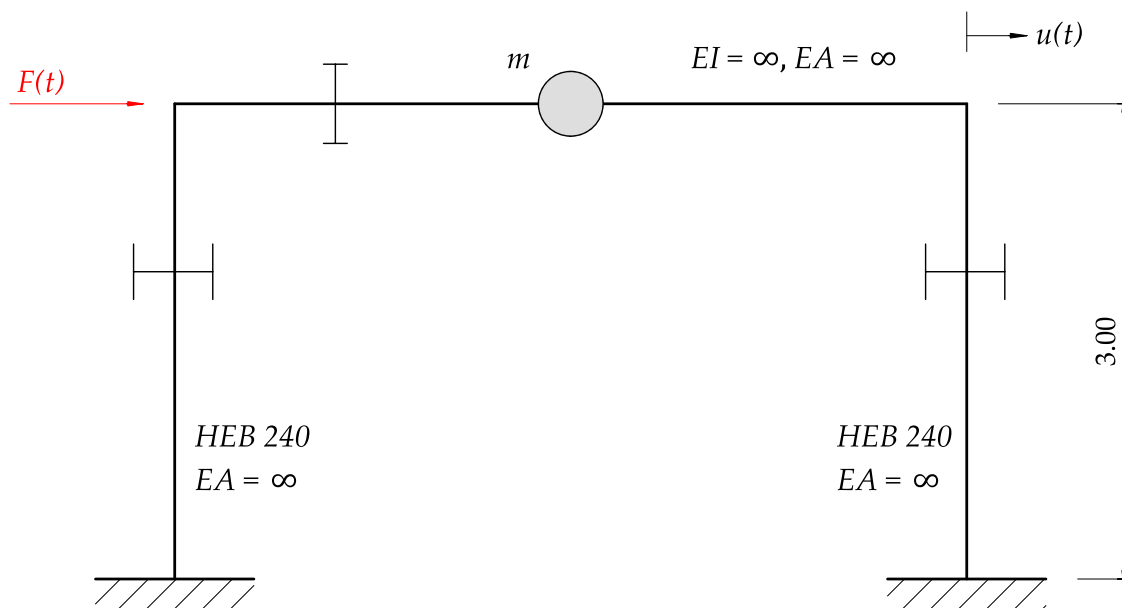


Abbildung 5.1.: System des Stahlrahmens mit kurzzeitig einwirkender Stossbelastung

Gesucht:

- Der Maximalwert der zu erwartenden Riegelauslenkung (näherungsweise)
- Darstellung des zeitlichen Verlaufs  $u(t)$  in einem Diagramm
- Nachweis der Elastizität des Systems anhand der Rückstellkraft (Spannungsnachweis mit Fließspannung  $f_y$  als Grenze)

Gegeben:

- Lastfunktion gemäss Abbildung 5.2

Tabelle 5.1.: Parameter der Aufgabenstellung

$EA_{riegel} = \infty$	$EA_{stuetze} = \infty$
$EI_{riegel} = \infty$	$EI_{stuetze} = 23646000\text{m}^2\text{N}$
$F_{max} = 1000000\text{N}$	$H = 3000\text{mm}$
$W_{ely} = 938000\text{mm}^3$	$f_y = \frac{355\text{N}}{\text{mm}^2}$
$m = \frac{5000\text{Ns}^2}{\text{m}}$	$t_1 = 0.003\text{s}$
$t_2 = 0.006\text{s}$	$u_0 = 0$

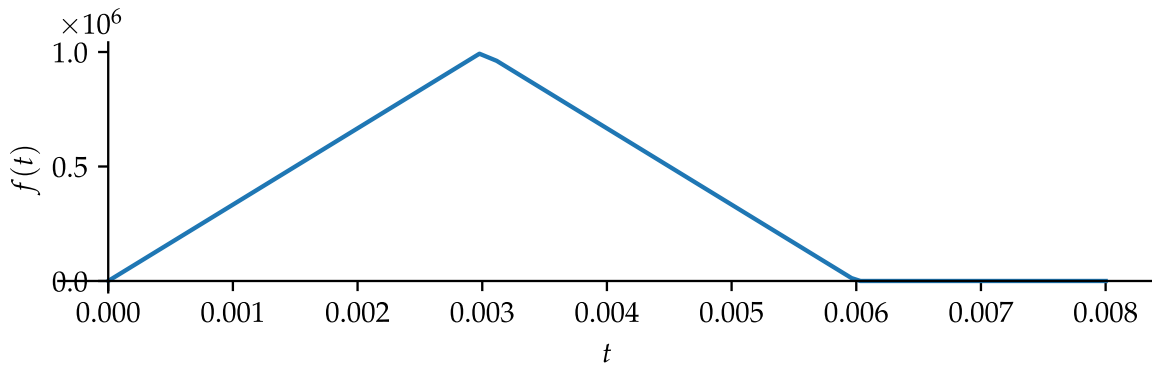


Abbildung 5.2.: Lastfunktion der kurzzeitig einwirkenden Stossbelastung

## 5.2. Musterlösung

### 5.2.1. Horizontale Steifigkeit

Für entsprechende Anwendungsfälle gibt es fertige Lösungen zur Bestimmung der Steifigkeit. Gemäss Abbildung 5.1 ist die Stütze am Fuss- und Kopfpunkt eingespannt (Änderungen der Lagerung beeinflussen die Steifigkeit!). Somit resultiert die Steifigkeit zu:

$$k_{Stuetze} = \frac{12EI_{Stuetze}}{H^3} \quad (5.1)$$

Diese gilt für eine einzelne Stütze. Angewendet auf das Beispiel folgt die Systemsteifigkeit zu:

$$k = \frac{24EI_{stuetze}}{H^3} \quad (5.2)$$

$$k = \frac{2.1 \cdot 10^7 \text{N}}{\text{m}} \quad (5.3)$$

### 5.2.2. Eigenkreisfrequenz

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.4)$$

$$\omega_1 = 2\sqrt{6} \sqrt{\frac{EI_{stuetze}}{H^3 m}} \quad (5.5)$$

$$\omega_1 = \frac{64.8}{\text{s}} \quad (5.6)$$

### 5.2.3. Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung für einen ungedämpften Einmassenschwinger ist die folgende:

$$mu(t)'' + ku(t) = F(t) \quad (5.7)$$

### 5.2.3.1. Approximation der Lösung

Es handelt sich um eine inhomogene Differentialgleichung 2.Ordnung. Auf die exakte Lösung der Gleichung wird nicht eingegangen. Es wird versucht die bemessungsrelevanten Parameter näherungsweise zu bestimmen. Dies lässt sich mit dem Impulssatz approximieren.

$$F \Delta t = m \Delta v \quad (5.8)$$

Dieser besagt, dass die einwirkende Kraft  $F$  im betrachteten Zeitabschnitt  $\Delta t$  der Masse  $m$  multipliziert mit der Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v$  des Objekts entspricht. Für eine kurze Anregung, wie im Beispiel der Fall ist, kann die Anfangsgeschwindigkeit wie folgt bestimmt werden:

$$v_0 = \frac{I}{m} \quad (5.9)$$

$$I = \int_0^{t_2} F(t) dt \quad (5.10)$$

$$I = 3000.0 \text{Ns} \quad (5.11)$$

$$v_0 = \frac{I}{m} \quad (5.12)$$

$$v_0 = \frac{0.6 \text{m}}{\text{s}} \quad (5.13)$$

Durch die Impuls-Betrachtung vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu:

$$mu(t)'' + ku(t) = 0 \quad (5.14)$$

Mit der Anfangsgeschwindigkeit als Randbedingung.

$$u'(t = 0) = v_0 \quad (5.15)$$

und der Startauslenkung:

$$u(t = 0) = u_0 = 0 \quad (5.16)$$

Kann mittels der folgenden Ansatzfunktion die homogene Differentialgleichung gelöst werden:

$$u(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_1 t) \quad (5.17)$$

$$\left\{ EI_{stuetze} : 23646000 \text{m}^2\text{N}, F_{max} : 1000000 \text{N}, H : 3000 \text{mm}, W_{ely} : 938000 \text{mm}^3, f_y : \frac{355 \text{N}}{\text{mm}^2}, m : \frac{5000 \text{N}}{\text{m}} \right. \quad (5.18)$$

$$u(t) = 0.00925 \sin\left(\frac{64.8t}{\text{s}}\right) \text{m} \quad (5.19)$$

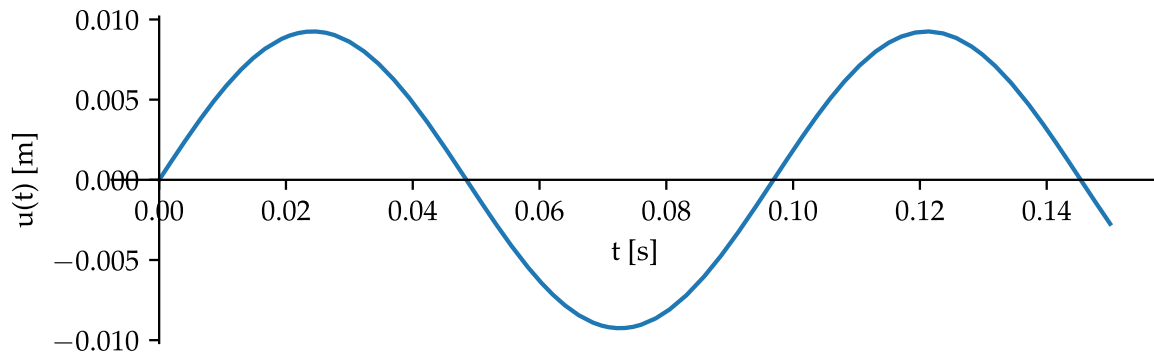


Abbildung 5.3.: Zeitlicher Verlauf der Auslenkung

#### 5.2.4. Rückstellkraft

Anhand der maximalen Amplitude lässt sich die maximale Rückstellkraft für den gesamten Rahmen bestimmen.

$$F_R = ku = kA \quad (5.20)$$

$$u_{max} = A \quad (5.21)$$

$$A = 0.00925 \text{m} \quad (5.22)$$



$$F_R = 1.94 \cdot 10^5 \text{N} \quad (5.23)$$

#### 5.2.4.1. Spannungsnachweis

Die Rückstellkraft wirkt im Zentrum der Masse und bewirkt das maximale Biegemoment bei den Fusspunkten.

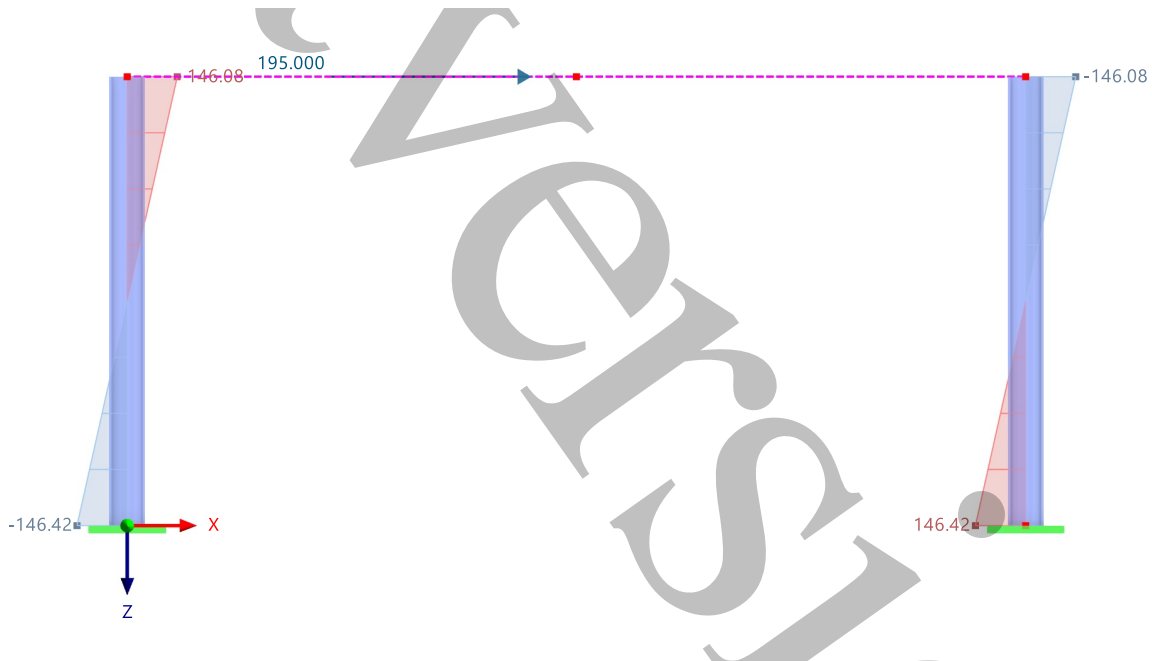


Abbildung 5.4.: Biegemomentenverlauf durch die statische Ersatzkraft

$$M_{max} = \frac{F_R H}{4} \quad (5.24)$$

$$M_{max} = 1.46 \cdot 10^5 \text{mN} \quad (5.25)$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_{ely}} \quad (5.26)$$

$$\sigma_{max} = \frac{156.0 \text{N}}{\text{mm}^2} \quad (5.27)$$

$$\text{Nachweis} = \frac{156.0\text{N}}{\text{mm}^2} < f_y \quad (5.28)$$

$$\text{Nachweis} = \text{True} \quad (5.29)$$

## 6. Beispiel: Dynamischer Vergrößerungsfaktor

### 6.1. Aufgabenstellung

Das System in Abbildung 6.1 zeigt einen Biegeträger, gelagert als einfacher Balken mit einer Auskragung. Dieser wird am Kragarm mit der dynamischen Last  $F(t)$  in vertikaler Richtung beansprucht.

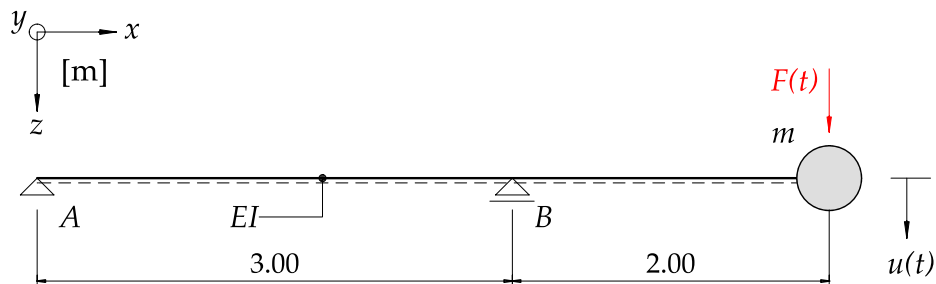


Abbildung 6.1.: Statisches System des Biegeträgers

Gesucht:

- Grundkreisfrequenz  $\omega_1$
- Dynamischer Vergrößerungsfaktor  $V(\omega)$
- Maximale dynamische Amplitude im stationären Fall  $u_{max}$

Gegeben:

- Biegeträger ist masselos
- Es sind lediglich Biegeverformungen zu betrachten  $G \cdot A = \infty$

$$F(t) = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = 50\text{kN} \cdot \cos(62.8 \cdot t) \quad (6.1)$$

Tabelle 6.1.: Parameter der Aufgabenstellung

$$EI = 30000000\text{m}^2\text{N}$$

$$l_1 = 3000\text{mm}$$

$$F_0 = 50000\text{N}$$

$$l_2 = 2000\text{mm}$$

$$m = \frac{1000Ns^2}{m}$$

$$\zeta = 0.005$$


---

$$\omega = \frac{62.8}{s}$$

## 6.2. Musterlösung

### 6.2.1. Eigenkreisfrequenz

Die Eigenkreisfrequenz lässt sich aus der folgenden Gleichung bestimmen:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.2)$$

#### 6.2.1.1. Steifigkeit des Systems

Die Steifigkeit des Systems lässt sich anhand der statischen Deformation bestimmen. Sie entspricht dem Verhältnis zwischen Einwirkung und der daraus resultierenden Verformung.

$$k = \frac{F}{u} \quad (6.3)$$

Händisch lässt sich die Deformation mittels realem und virtuellem Kräftezustand, anhand der Arbeitsgleichung bestimmen. Dargestellt in Abbildung 6.2. Die Ermittlung der Steifigkeit bedingt lediglich das Verhältnis zwischen Einwirkung und Deformation, folglich darf Betrag der realen Kraft frei gewählt werden.

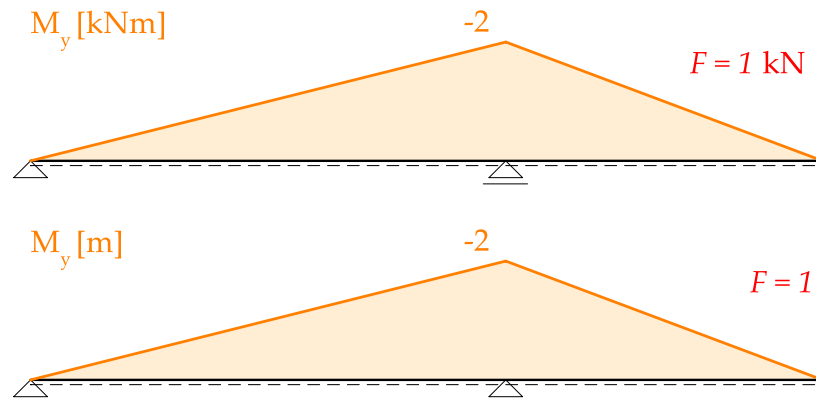


Abbildung 6.2.: Realer und virtueller Kräftezustand

Um lediglich Biegeverformungen zu berücksichtigen, kann die Verformung mittels nachfolgender Gleichung bestimmt werden.

$$u = \frac{1}{EI_y} \cdot \int_0^{l_1+l_2} M_y \bar{M}_y dx \quad (6.4)$$

$$u = \frac{4000 (l_1 + l_2) \text{ m}^2 \text{ N}}{3EI} \quad (6.5)$$

$$u = 0.222 \text{ mm} \quad (6.6)$$

$$k = \frac{3EI}{4 (l_1 + l_2) \text{ m}^2} \quad (6.7)$$

$$k = \frac{4500 \text{ N}}{\text{mm}} \quad (6.8)$$

#### 6.2.1.2. Eigenkreisfrequenz

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{3} \sqrt{\frac{EI}{m(l_1+l_2)}}}{2m} \quad (6.9)$$

$$\omega_1 = \frac{67.1}{\text{s}} \quad (6.10)$$

#### 6.2.2. Vergrößerungsfaktor

Der Vergrößerungsfaktor beschreibt das Verhältnis zwischen der maximalen statischen Amplitude und der maximalen dynamischen Amplitude:

$$V(\omega) = \frac{u_{max}}{u_0}$$

Dieser lässt sich mit der Dämpfungsrate  $\zeta$ , Anregungsfrequenz  $\omega$  und der Eigenfrequenz  $\omega_1$  beschreiben.

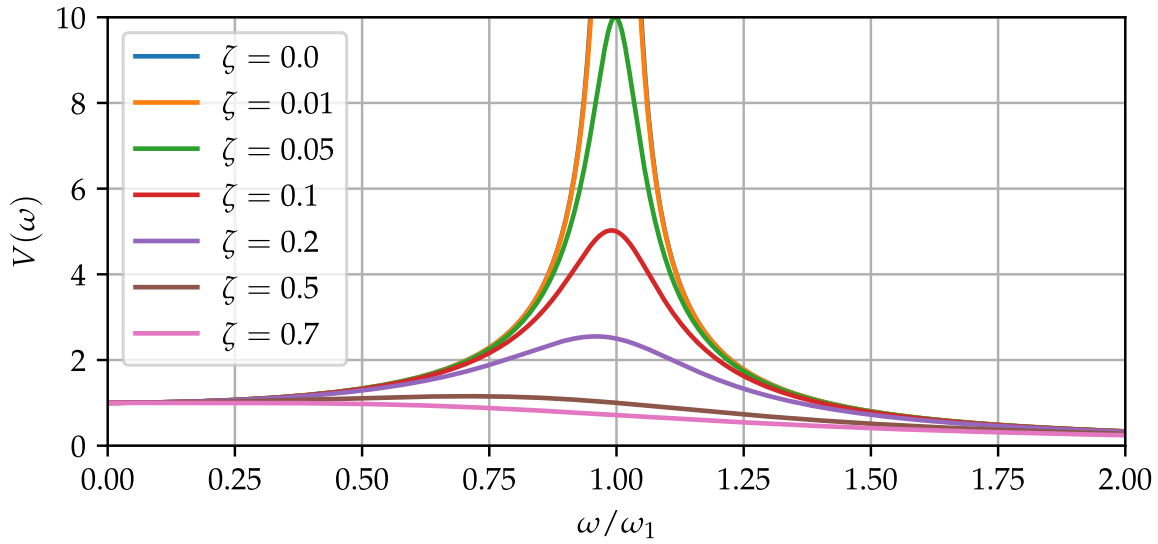


Abbildung 6.3.: Einfluss der Dämpfung und der Anregungsfrequenz auf den Vergrößerungs-faktor

$$V(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega^2\zeta^2}{\omega_1^2} + \left(-\frac{\omega^2}{\omega_1^2} + 1\right)^2}} \quad (6.11)$$

$$V(\omega) = 8.07 \quad (6.12)$$

### 6.2.3. Statische Amplitude

Die Einwirkung lässt sich aus der Anregungsfunktion Gleichung 6.1 bestimmen für  $t = 0$ . Mit der bekannten Systemsteifigkeit bestimmt sich die Deformation.

$$u_{stat} = \frac{F_0}{k} \quad (6.13)$$

$$u_{stat} = \frac{4F_0(l_1 + l_2)m^2}{3EI} \quad (6.14)$$

$$u_{stat} = 11.11\text{mm} \quad (6.15)$$

### 6.2.3.1. Stationäre Amplitude

Durch die Vergrößerung der statischen Deformation mit dem Vergrößerungsfaktor resultiert die maximale Amplitude der stationären Lösung.

$$u_{dyn} = u_{stat} V(\omega) \quad (6.16)$$

$$u_{dyn} = \frac{4F_0 (l_1 + l_2) m^2}{3EI \sqrt{\frac{16m\omega^2 \zeta^2 (l_1 + l_2) m^2}{3EI} + \left(-\frac{4m\omega^2 (l_1 + l_2) m^2}{3EI} + 1\right)^2}} \quad (6.17)$$

$$u_{dyn} = 89.6 \text{ mm} \quad (6.18)$$

Der Nachweis der Gebrauchstauglichkeit wäre damit sicherlich nicht erfüllt. Das Beispiel soll aufzeigen, wenn die Erregerfrequenz im Bereich der Eigenfrequenz zu liegen kommt, es zu grossen Amplifikationen der Verformungen bzw. zu Resonanzeffekten kommen kann.

Da meist die Masse und die Erregung (z.B. Maschine) gegeben ist, kann man zum Beispiel ein Dämpfungselement einbauen, was jedoch keinen wesentlichen Einfluss auf das Frequenzverhältnis hat. Dadurch werden jedoch die Amplituden begrenzt.

Eine weitere Möglichkeit wäre die Biegesteifigkeit  $E \cdot I$  zu erhöhen. Das System wird steifer und die Eigenfrequenz grösser. Man spricht in dem Fall von einer Hochabstimmung.

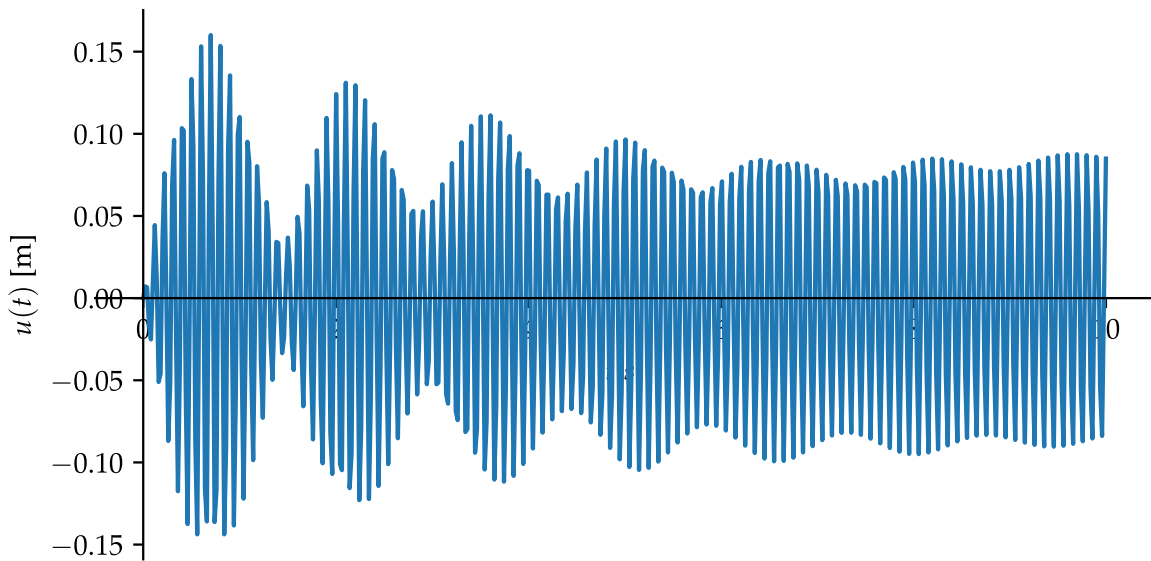


Abbildung 6.4.: Gesamtantwort des Systems



In der Abbildung 6.4 ist die Gesamtantwort des Systems dargestellt. Wenn Dämpfung im System vorhanden ist, dann verschwindet die transiente bzw. homogene Lösung  $u(t)$  und das System schwingt mit der stationären Lösung bzw. partikulären Lösung  $u(t)$  in der Anregungsfrequenz. In Bezug auf die Abbildung 6.4 schwingt das System am Anfang stärker, durch das Abklingen der Anfangsauslenkung durch die Dämpfung schwingt das System nur noch in der Anregungsfrequenz weiter. Die Anregung zwingt dem System seine Schwingung auf. In der Praxis sind die Anlaufphasen zu beachten, solange der transiente Teil noch nicht abgeklungen ist. Dort sind die Amplituden grösser und es gilt zu untersuchen, ob diese kurzfristige Überschreitung Konsequenzen (z.B. zul. Verformungen oder Bauteilspannungen) für das Tragsystem hat.

## 7. Beispiel: Gesamtantwort ohne Dämpfung

### 7.1. Aufgabenstellung

Das System in Abbildung 7.1 zeigt ein Stabwerk, welches durch eine Werkzeugmaschine angeregt wird.

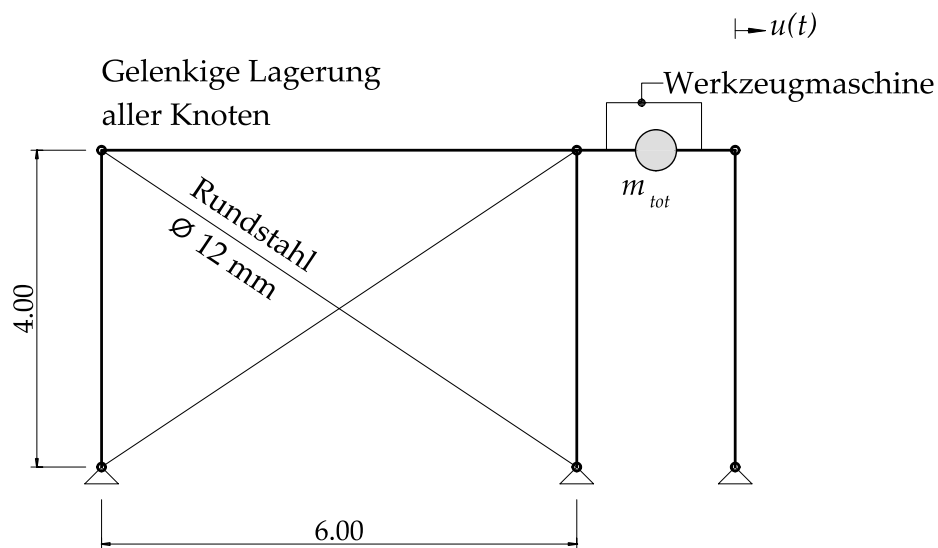


Abbildung 7.1.: Statisches System des Stabwerks

Gesucht:

- Grundkreisfrequenz  $\omega_1$
- Dynamischer Vergrößerungsfaktor  $V(\omega)$
- Stationäre Antwort  $u_p(t)$  mit dem dynamischen Vergrößerungsfaktor  $V(\omega)$
- Gesamtantwort  $u(t)$  mit den Anfangsbedingungen  $u(t=0) = 0$  und  $u'(t=0) = 0$
- Festigkeitsnachweis der Diagonalen

Gegeben:

- Alle Stäbe ausser Diagonalen  $E \cdot A = \infty$

- Alle Stäbe S355

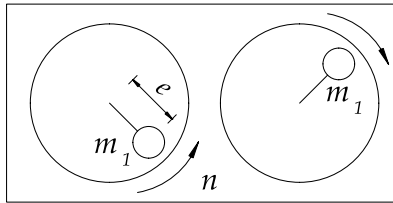


Abbildung 7.2.: Aufbau der Werkzeugmaschine

Tabelle 7.1.: Parameter der Aufgabenstellung

$B = 6000\text{mm}$	$E = \frac{210000\text{N}}{\text{mm}^2}$
$H = 4000\text{mm}$	$\emptyset_{Diag} = 12\text{mm}$
$e = 0.1\text{m}$	$f_{yd} = \frac{338\text{N}}{\text{mm}^2}$
$m_1 = \frac{200\text{Ns}^2}{\text{m}}$	$m_{tot} = \frac{5000\text{Ns}^2}{\text{m}}$
$n = \frac{150}{\text{minute}}$	$\zeta = 0.0$

## 7.2. Musterlösung

### 7.2.1. Systemsteifigkeit

Zur Ermittlung der Eigenkreisfrequenz wird die Steifigkeit des gesamten Systems benötigt.

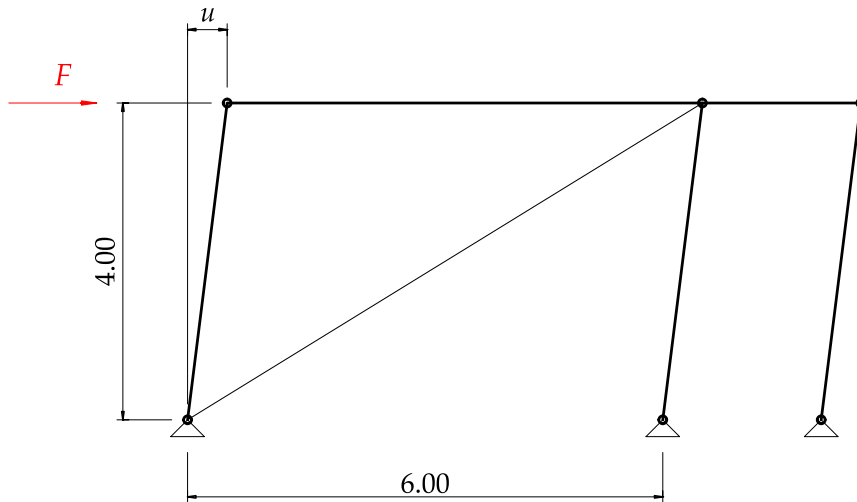


Abbildung 7.3.: Verformungszustand des Systems für die Einheitskraft

Das System wird mit einer Einheitskraft belastet. Aufgrund der Eigenschaften der Pendelstäbe (lediglich Normkräfte) und deren unendlich grossen Dehnsteifigkeit, spielt lediglich die Verformung der Diagonalen eine Rolle. Dazu gilt, dass die Diagonalen nur Zugkräfte aufnehmen können. Das bedeutet, dass letztlich ein Stab aktiv ist für die beschriebene Situation in [Abbildung 7.3.](#)

Dazu muss die Normalkraft in der Diagonalen bestimmt werden.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{H}{B}\right) \quad (7.1)$$

$$\alpha = 0.588 \quad (7.2)$$

$$Z_{Diag} = 1000 \sqrt{1 + \frac{H^2}{B^2}} \text{ N} \quad (7.3)$$

$$Z_{Diag} = 1.2 \cdot 10^3 \text{N} \quad (7.4)$$

Mittels der Arbeitsgleichung lässt sich die Verformung bestimmen. Für die Integration zweier Normalkraftverläufe gilt die folgende Beziehung:

$$u = \frac{1}{EA_{Diag}} \int_0^{l_{Diag}} N_x \bar{N}_x dx \quad (7.5)$$

Länge der Diagonalen:

$$l_{Diag} = B \sqrt{1 + \frac{H^2}{B^2}} \quad (7.6)$$

$$l_{Diag} = 7.21 \text{m} \quad (7.7)$$

Querschnittsfläche der Diagonalen:

$$A_{Diag} = \frac{\pi \emptyset_{Diag}^2}{4} \quad (7.8)$$

$$A_{Diag} = 113.0 \text{mm}^2 \quad (7.9)$$

Deformation der Diagonalen

$$u_k = \frac{4000B \left(1 + \frac{H^2}{B^2}\right)^{\frac{3}{2}} \text{N}}{\pi E \emptyset_{Diag}^2} \quad (7.10)$$

$$u_k = 0.439 \text{mm} \quad (7.11)$$

Steifigkeit des Systems:

$$k = \frac{F}{u_k} \quad (7.12)$$

$$k = \frac{2.28 \cdot 10^3 \text{N}}{\text{mm}} \quad (7.13)$$

### 7.2.2. Eigenkreisfrequenz

Aus der Systemsteifigkeit lässt sich leicht die Eigenkreisfrequenz bestimmen:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7.14)$$

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{E \emptyset_{Diag}^2}{B m_{tot} \left(1 + \frac{H^2}{B^2}\right)^{\frac{3}{2}}}}}{2} \quad (7.15)$$

$$\omega_1 = \frac{21.4}{s} \quad (7.16)$$

### 7.2.3. Dynamischer Vergrößerungsfaktor

#### 7.2.3.1. Anregungsfunktion

Zur Bestimmung des dynamischen Vergrößerungsfaktor wird die stationäre Verformung benötigt. Diese lässt sich aus der Anfangskraft der Anregungsfunktion ermitteln. Dazu wird diese Funktion benötigt. Wir wissen die Drehzahl  $n$  und die Exzentrizität  $e$  sowie deren Masse  $m_1$ .

$$f = n \quad (7.17)$$

$$f = \frac{2.5}{s} \quad (7.18)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (7.19)$$

$$\omega = \frac{15.7}{s} \quad (7.20)$$

Nun fehlt lediglich die Anfangskraft  $F_0$ . Die Fliehkraft  $F$  der 2 gegenläufig rotierenden Massen bewirken eine addierende Fliehkraft in horizontaler Richtung zu:

$$F_0 = 2(m_1 \cdot e \cdot \omega^2) \quad (7.21)$$

$$F_0 = \frac{50\pi^2 em_1}{s^2} \quad (7.22)$$

$$F_0 = 9.87 \cdot 10^3 \text{N} \quad (7.23)$$

### 7.2.3.2. Statische Deformation

Die statische Deformation lässt sich nun leicht anhand der ermittelten Systemsteifigkeit herleiten.

$$u_0 = \frac{F_0}{k} \quad (7.24)$$

$$u_0 = 4.33 \text{mm} \quad (7.25)$$

### 7.2.3.3. Vergrößerungsfaktor

$$V(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega^2 \zeta^2}{\omega_1^2} + \left(-\frac{\omega^2}{\omega_1^2} + 1\right)^2}} \quad (7.26)$$

$$V(\omega) = 2.18 \quad (7.27)$$

### 7.2.4. Stationäre Antwort

Es handelt sich um einen ungedämpften Einmassenschwinger mit einer harmonischen Anregungsfunktion. Die Bewegungsgleichung ist die folgende:

$$mu''(t) + ku(t) = F(t) \quad (7.28)$$

Dies ist eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung. Die Lösung dieser lässt sich in einen partikulären Anteil und in einen homogenen Anteil aufteilen. Der partikuläre Anteil entspricht der stationären Antwort. Der homogene Anteil nennt sich transienter Anteil. Wäre eine Dämpfung im System vorhanden, so startet der Schwingvorgang aus einer Kombination beider Teile. Aufgrund der Dämpfung verschwindet der transiente Anteil und das System wird schlussendlich nur noch durch den stationären Anteil deformiert.

Anhand des Vergrößerungsfaktor kann die stationäre dynamische Antwort des Systems mit der folgenden Beziehung ermittelt werden.

$$u_p = V(\omega)u_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (7.29)$$

$$u_p = 9.43 \cos\left(\frac{5\pi t}{s}\right) \text{mm} \quad (7.30)$$

### 7.2.5. Gesamtantwort

Für die Gesamtantwort wird nun noch der homogene Anteil benötigt. Dazu ist die folgende Differentialgleichung zu lösen.

$$mu''(t) + ku(t) = 0 \quad (7.31)$$

Als Ansatzfunktion dient die folgende Gleichung:

$$u_h = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_1 t) \quad (7.32)$$

Die Randbedingungen sind in der Aufgabenstellung definiert und sind die folgenden:

$$u(t = 0) = 0$$

$$u'(t = 0) = 0$$

Vorsicht, die Randbedingungen gelten für die gesamte Lösung:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \quad (7.33)$$



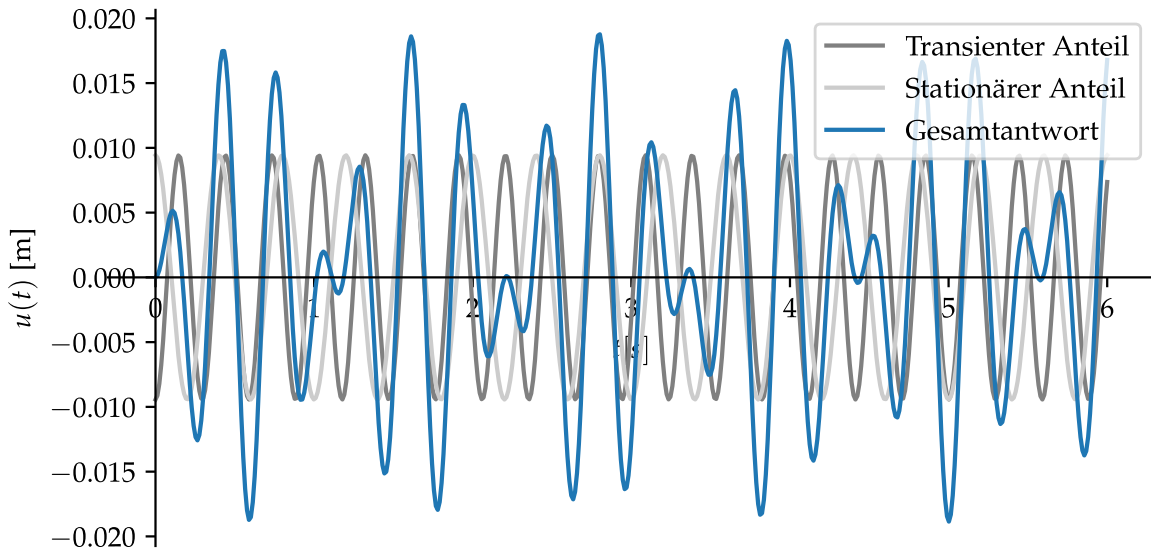


Abbildung 7.4.: Antworten des Systems ohne Dämpfung

## 7.2.6. Festigkeitsnachweis

Aufgrund der maximalen Auslenkung, kann die maximale Normalkraft auf der Diagonalen bestimmt werden.

### 7.2.6.1. Maximale Auslenkung

Aus dem Plot in [Abbildung 7.4](#) ist die maximale Auslenkung ersichtlich. Die Ermittlung des Zeitpunkts bei einer maximalen Auslenkung wird hier numerisch gelöst.

$$t_{max} = 2.8s \quad (7.34)$$

$$u_{max} = 0.0188m \quad (7.35)$$

### 7.2.6.2. Maximale Einwirkung

Aufgrund der maximalen Amplitude verlängert sich die Diagonale um  $\Delta l = u_{max}$ . Die Dehnung des Stabs ist somit die  $\frac{\Delta l}{l_{Diag}}$ . Bei linear elastischem Materialverhalten gilt die folgende Beziehung:

$$\sigma = \varepsilon E \quad (7.36)$$

$$\varepsilon = 0.00314 \quad (7.37)$$

$$\sigma = \frac{659.0\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (7.38)$$

$$f_{yd} = \frac{338\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (7.39)$$

$$Nachweis = \frac{\sigma}{f_{yd}} \quad (7.40)$$

$$Nachweis = 1.95 \quad (7.41)$$

Die Diagonale würde plastifizieren, so dass die linearen Annahmen für die Berechnung der Systemantwort nicht angewendet werden dürfen.

## 8. Beispiel: Gesamtantwort mit Dämpfung

### 8.1. Aufgabenstellung

Das System in Abbildung 8.1 entspricht dem System in Abbildung 7.1. Ergänzt wurde dies mit einem Dämpfungselement.

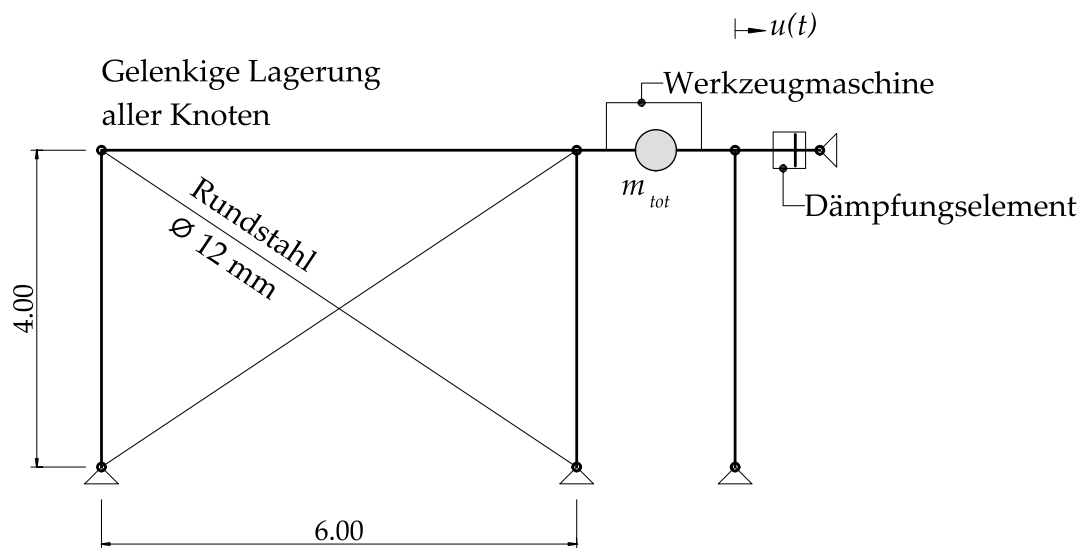


Abbildung 8.1.: Statisches System

Gesucht:

- Dynamischer Vergrößerungsfaktor  $V(\omega)$
- Stationäre Amplitude
- Festigkeitsnachweis der Diagonalen

Gegeben:

- Alle Stäbe ausser Diagonalen  $E \cdot A = \infty$
- Alle Stäbe S355

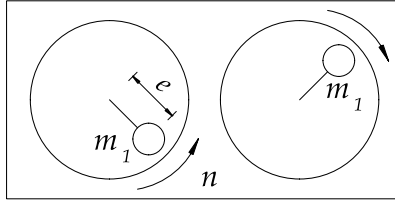


Abbildung 8.2.: Aufbau der Werkzeugmaschine

Tabelle 8.1.: Parameter der Aufgabenstellung

$B = 6000\text{mm}$	$E = \frac{210000\text{N}}{\text{mm}^2}$
$H = 4000\text{mm}$	$\emptyset_{Diag} = 12\text{mm}$
$e = 0.1\text{m}$	$f_{yd} = \frac{338\text{N}}{\text{mm}^2}$
$m_1 = \frac{200\text{Ns}^2}{\text{m}}$	$m_{tot} = \frac{5000\text{Ns}^2}{\text{m}}$
$n = \frac{150}{\text{minute}}$	$\zeta = 0.2$

## 8.2. Musterlösung

### 8.2.1. Systemsteifigkeit

Zur Ermittlung der Eigenkreisfrequenz wird die Steifigkeit des gesamten Systems benötigt.

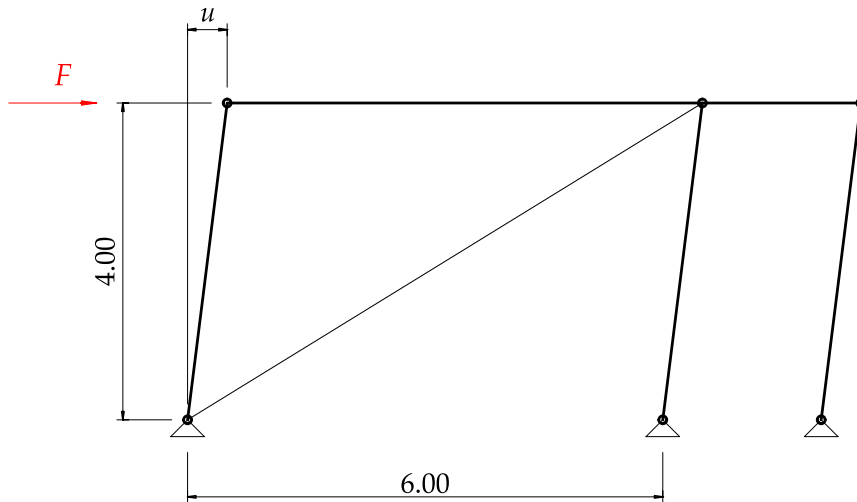


Abbildung 8.3.: Verformungszustand des Systems für die Einheitskraft

Das System wird mit einer Einheitskraft belastet. Aufgrund der Eigenschaften der Pendelstäbe (lediglich Normkräfte) und deren unendlich grossen Dehnsteifigkeit, spielt lediglich die Verformung der Diagonalen eine Rolle. Dazu gilt, dass die Diagonalen nur Zugkräfte aufnehmen können. Das bedeutet, dass letztlich ein Stab aktiv ist für die beschriebene Situation in [Abbildung 8.3](#).

Dazu muss die Normalkraft in der Diagonalen bestimmt werden.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{H}{B}\right) \quad (8.1)$$

$$\alpha = 0.588 \quad (8.2)$$

$$Z_{Diag} = 1000 \sqrt{1 + \frac{H^2}{B^2}} \text{ N} \quad (8.3)$$

$$Z_{Diag} = 1.2 \cdot 10^3 \text{N} \quad (8.4)$$

Mittels der Arbeitsgleichung lässt sich die Verformung bestimmen. Für die Integration zweier Normalkraftverläufe gilt die folgende Beziehung:

$$u = \frac{1}{EA_{Diag}} \int_0^{l_{Diag}} N_x \bar{N}_x dx \quad (8.5)$$

Länge der Diagonalen:

$$l_{Diag} = B \sqrt{1 + \frac{H^2}{B^2}} \quad (8.6)$$

$$l_{Diag} = 7.21 \text{m} \quad (8.7)$$

Querschnittsfläche der Diagonalen:

$$A_{Diag} = \frac{\pi \emptyset_{Diag}^2}{4} \quad (8.8)$$

$$A_{Diag} = 113.0 \text{mm}^2 \quad (8.9)$$

Deformation der Diagonalen

$$u_k = \frac{4000B \left(1 + \frac{H^2}{B^2}\right)^{\frac{3}{2}} \text{N}}{\pi E \emptyset_{Diag}^2} \quad (8.10)$$

$$u_k = 0.439 \text{mm} \quad (8.11)$$

Steifigkeit des Systems:

$$k = \frac{F}{u_k} \quad (8.12)$$

$$k = \frac{2.28 \cdot 10^3 \text{N}}{\text{mm}} \quad (8.13)$$

### 8.2.2. Eigenkreisfrequenz

Aus der Systemsteifigkeit lässt sich leicht die Eigenkreisfrequenz bestimmen:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8.14)$$

$$\omega_n = \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{E \emptyset_{Diag}^2}{B m_{tot} \left(1 + \frac{H^2}{B^2}\right)^{\frac{3}{2}}}}}{2} \quad (8.15)$$

$$\omega_n = \frac{21.4}{s} \quad (8.16)$$

### 8.2.3. Dynamischer Vergrößerungsfaktor

#### 8.2.3.1. Anregungsfunktion

Zur Bestimmung des dynamischen Vergrößerungsfaktor wird die stationäre Verformung benötigt. Diese lässt sich aus der Anfangskraft der Anregungsfunktion ermitteln. Dazu wird diese Funktion benötigt. Wir wissen die Drehzahl  $n$  und die Exzentrizität  $e$  sowie deren Masse  $m_1$ .

$$f = n \quad (8.17)$$

$$f = \frac{2.5}{s} \quad (8.18)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (8.19)$$

$$\omega = \frac{15.7}{s} \quad (8.20)$$

Nun fehlt lediglich die Anfangskraft  $F_0$ . Die Fliehkraft  $F$  der 2 gegenläufig rotierenden Massen bewirken eine addierende Fliehkraft in horizontaler Richtung zu:

$$F_0 = 2(m_1 \cdot e \cdot \omega^2) \quad (8.21)$$

$$F_0 = \frac{50\pi^2 em_1}{s^2} \quad (8.22)$$

$$F_0 = 9.87 \cdot 10^3 \text{N} \quad (8.23)$$

### 8.2.3.2. Statische Deformation

Die statische Deformation lässt sich nun leicht anhand der ermittelten Systemsteifigkeit herleiten.

$$u_0 = 4.33 \text{mm} \quad (8.24)$$

### 8.2.3.3. Vergrößerungsfaktor

$$V(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega^2\zeta^2}{\omega_n^2} + \left(-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 1\right)^2}} \quad (8.25)$$

$$V(\omega) = 1.83 \quad (8.26)$$

### 8.2.4. Stationäre Antwort

Es handelt sich um einen gedämpften Einmassenschwinger mit einer harmonischen Anregungsfunktion. Die Bewegungsgleichung ist die folgende:

$$mu''(t) + cu'(t) + ku(t) = F(t) \quad (8.27)$$

Dies ist eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung. Die Lösung dieser lässt sich in einen partikulären Anteil und in einen homogenen Anteil aufteilen. Der partikuläre Anteil entspricht der stationären Antwort. Der homogene Anteil nennt sich transienter Anteil.

Anhand des Vergrößerungsfaktor kann die stationäre dynamische Antwort des Systems mit der folgenden Beziehung ermittelt werden.

$$u_p = V(\omega)u_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (8.28)$$

$$u_p = 0.00793 \cos\left(\frac{5\pi t}{s}\right) \text{m} \quad (8.29)$$



### 8.2.5. Gesamtantwort

Für die Gesamtantwort wird nun noch der homogene Anteil benötigt. Dazu ist die folgende Differentialgleichung zu lösen.

$$mu''(t) + cu'(t) + ku(t) = 0 \quad (8.30)$$

Als Ansatzfunktion dient die folgende Gleichung:

$$u_h = e^{-\zeta\omega_1 t} (A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)) \quad (8.31)$$

Die Randbedingungen sind in der Aufgabenstellung definiert und sind die folgenden:

$$u(t=0) = 0$$

$$u'(t=0) = 0$$

Vorsicht, die Randbedingungen gelten für die gesamte Lösung:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \quad (8.32)$$

#### 8.2.5.1. Gedämpfte Eigenkreisfrequenz

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (8.33)$$

$$\omega_d = \frac{20.9}{s} \quad (8.34)$$

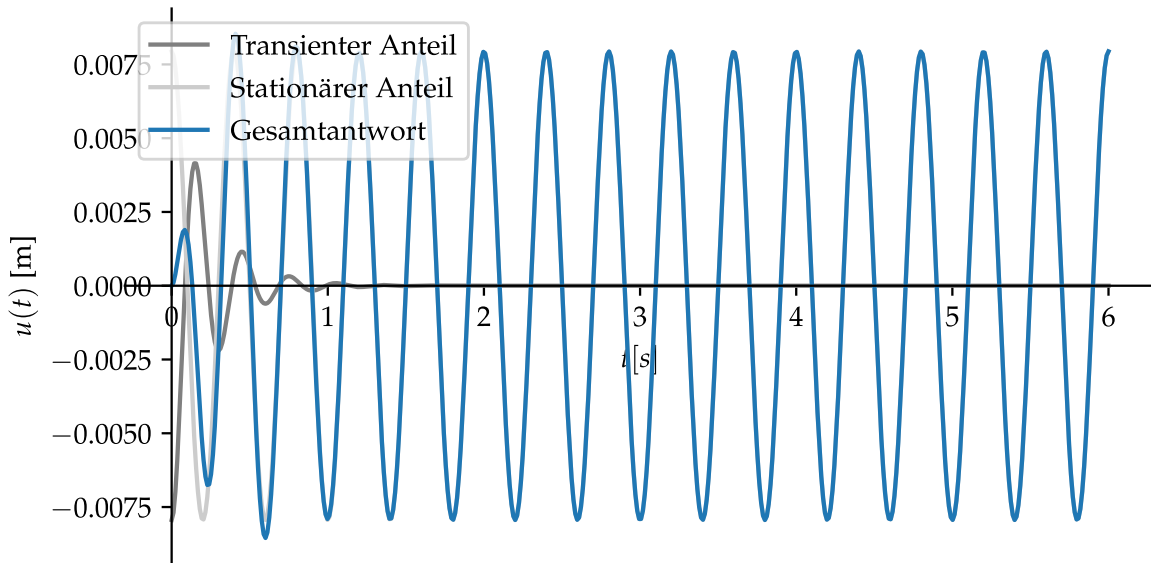


Abbildung 8.4.: Gesamtantwort des Systems

In [Abbildung 8.4](#) ist deutlich zu erkennen, dass der transiente Anteil mit der Zeit zerfällt aufgrund der Dämpfung. Das System schwingt weiter durch die Anregung des Motors.

### 8.2.6. Festigkeitsnachweis

Aufgrund der maximalen Auslenkung kann die maximale Normalkraft auf der Diagonalen bestimmt werden.

#### 8.2.6.1. Maximale Auslenkung

Aus dem Plot in [Abbildung 8.4](#) ist die maximale Auslenkung ersichtlich. Die Ermittlung des Zeitpunkts bei einer maximalen Auslenkung wird hier numerisch gelöst.

$$t_{max} = 0.41s \quad (8.35)$$

$$u_{max} = 0.00855m \quad (8.36)$$

### 8.2.6.2. Maximale Einwirkung

Aufgrund der maximalen Amplitude verlängert sich die Diagonale um  $\Delta l = u_{max}$ . Die Dehnung des Stabs ist somit die  $\frac{\Delta l}{l_{Diag}}$ . Bei linear elastischem Materialverhalten gilt die folgende Beziehung:

$$\sigma = \varepsilon E \quad (8.37)$$

$$\varepsilon = 0.00142 \quad (8.38)$$

$$\sigma = \frac{299.0\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (8.39)$$

$$f_{yd} = \frac{338\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (8.40)$$

$$Nachweis = \frac{\sigma}{f_{yd}} \quad (8.41)$$

$$Nachweis = 0.885 \quad (8.42)$$

Die Diagonale bleibt im elastischen Bereich, so dass die linearen Annahmen gültig sind. Der Festigkeitsnachweis für die Diagonale ist erfüllt. Im Weiteren wäre der Grenzzustand der Tragfähigkeit *Ermüdung* zu prüfen.

## 9. Beispiel: Fourier-Transformation

### 9.1. Aufgabenstellung

Nachfolgend ist ein unterspannter Träger gezeigt, der durch eine periodische Rechteckanregung dynamisch beansprucht wird.

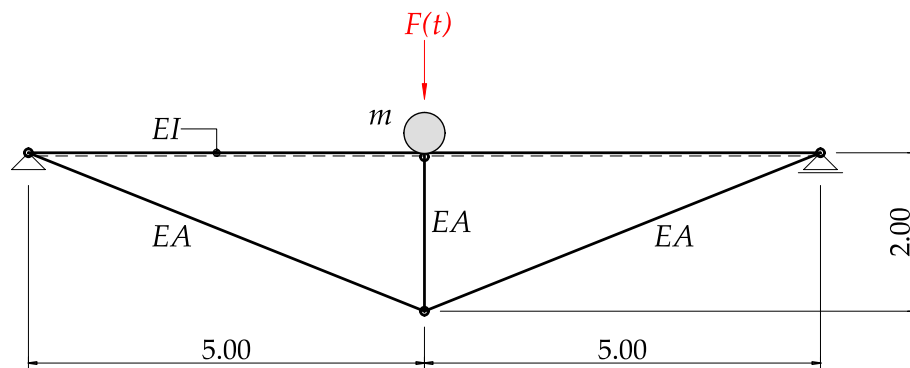


Abbildung 9.1.: Statisches System des unterspannten Trägers

Gesucht:

- Eigenkreisfrequenz  $\omega_1$
- Stationäre Amplitude der Verschiebung
- Stationäre Amplitude der Beschleunigung

Gegeben:

- Rechteckanregung in Abbildung 9.2

Tabelle 9.1.: Parameter der Aufgabenstellung

$$\begin{aligned} A &= 1000\text{N} \\ E &= \frac{200000\text{N}}{\text{mm}^2} \\ L &= 5\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{Fachwerk}} &= 3000\text{mm}^2 \\ I_{\text{Balken}} &= 200000000\text{mm}^4 \\ h &= 2\text{m} \end{aligned}$$

$$m = \frac{1000 \text{Ns}^2}{\text{m}}$$

$$\zeta = 0.0$$

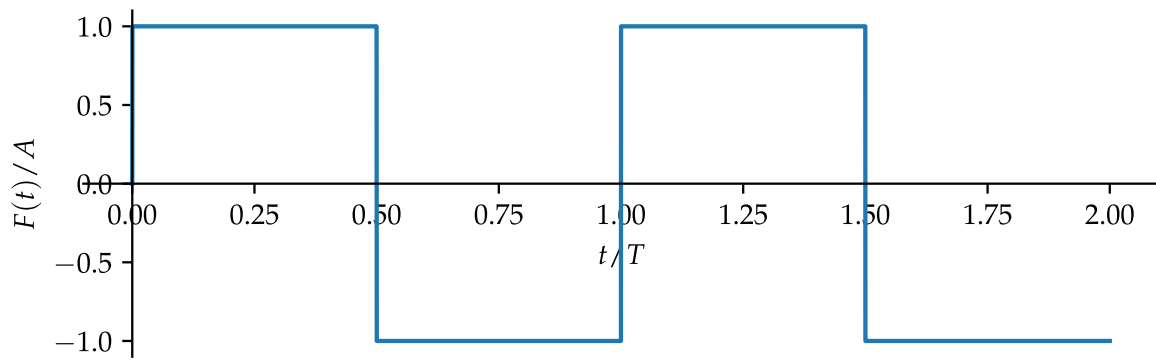


Abbildung 9.2.: Rechteckige Anregungsfunktion

## 9.2. Musterlösung

### 9.2.1. Erregerfunktion

Die Fourier-Transformation wird verwendet um aus der Rechteckanregung eine harmonische Anregung zu generieren. Mit einer harmonischen Funktion gestaltet sich die analytische Lösung der Differentialgleichung einfacher, bzw. kann diese geschlossen analytisch gelöst werden.

Auf die Aufgabe angewendet gilt: Die periodische Erregerfunktion wird mit einer Fourier-Reihenentwicklung approximiert um eine periodische, harmonische Funktion zu generieren.

Die Reihenentwicklung folgt folgender Funktion:

$$F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)) \quad (9.1)$$

Die Aufgabenstellung fordert lediglich die ersten drei Teile der Reihe.

$$F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^3 (a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)) \quad (9.2)$$

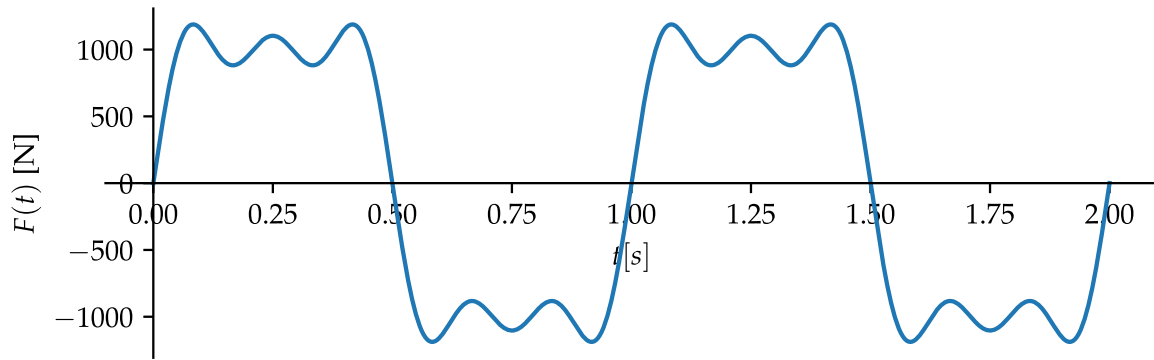
Nach Bestimmung der Konstanten folgt die Gleichung zu:

$$F(t) = \frac{4A}{\pi} \cdot [\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t)] \quad (9.3)$$

$$f_{\text{Anregung}} = \frac{1}{s} \quad (9.4)$$

$$\omega = \frac{6.28}{s} \quad (9.5)$$

$$F(t) = \frac{4A \left( \sin\left(\frac{2\pi t}{s}\right) + \frac{\sin\left(\frac{6\pi t}{s}\right)}{3} + \frac{\sin\left(\frac{10\pi t}{s}\right)}{5} \right)}{\pi} \quad (9.6)$$



### 9.2.2. Systemsteifigkeit

Anhand der Arbeitsgleichung wird die Deformation bestimmt und daraus die Steifigkeit des Systems. Auf die Bestimmung der Schnittgrößen wird nicht eingegangen. Es handelt sich um ein statisch unbestimmtes System.

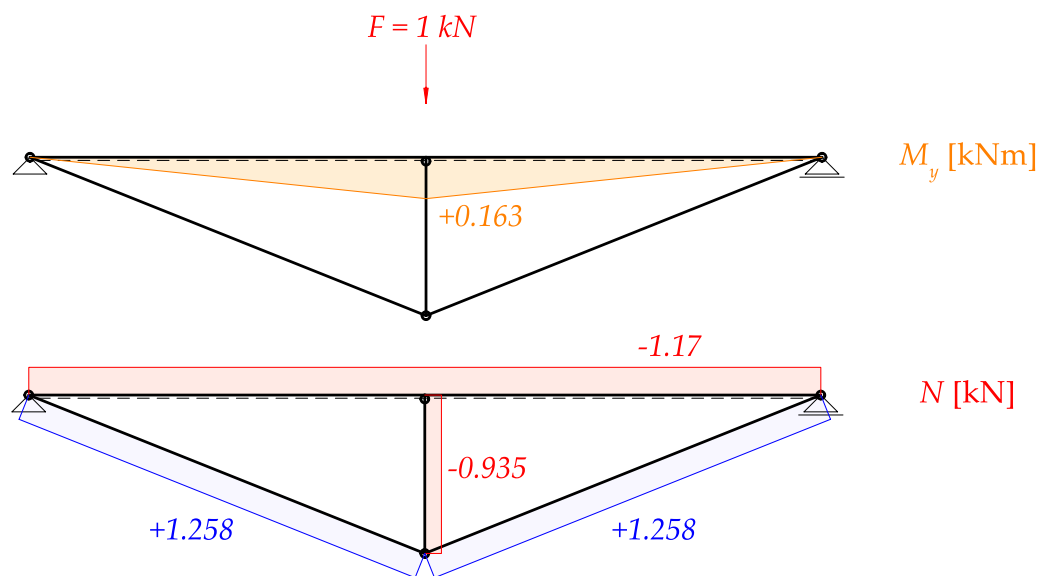


Abbildung 9.3.: Schnittgrößen des unterspannten Balkens

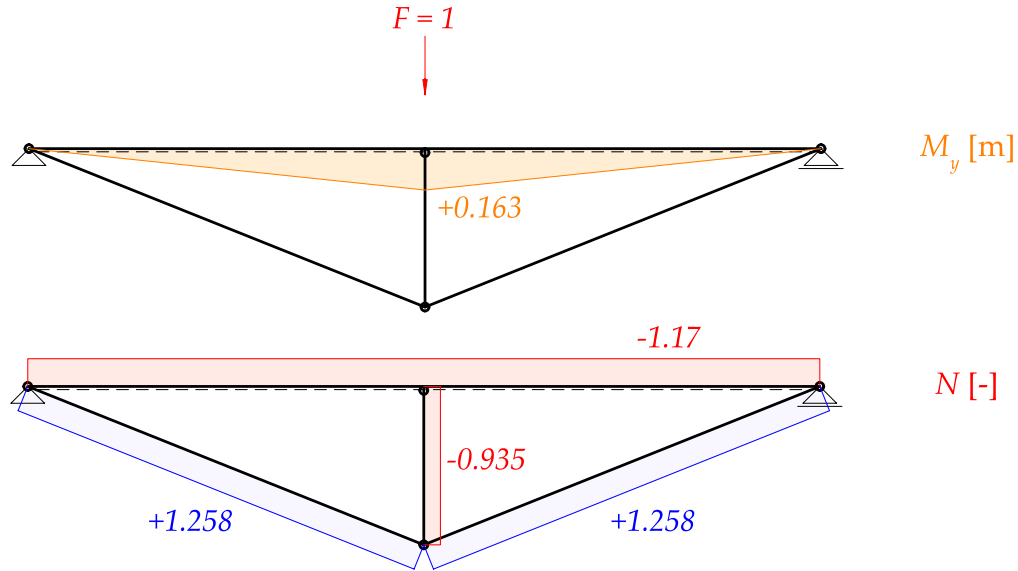


Abbildung 9.4.: Virtuelle Schnittgrößen des unterspannten Balkens

Da der Balken dehnstarr ist und die Unterspannung aus Pendelstäben zusammengesetzt ist, sind Anteile aus Normalkraft aus den Pendelstäben und lediglich Anteile aus Biegung im Balken für die Deformation zuständig.

$$u_{Balken} = 2L \frac{1}{3EI_{Balken}} 163000.0 \text{ mm N} 0.163 \text{ m} \quad (9.7)$$

$$u_{Fachwerk} = \frac{1}{A_{Fachwerk} E} \left( -935.0 h (-0.935) \text{ N} + 2 \sqrt{L^2 + h^2} \cdot 1258.0 \text{ N} 1.258 \right) \quad (9.8)$$

$$u_k = u_{Balken} + u_{Fachwerk} \quad (9.9)$$

$$u_k = 0.0335 \text{ mm} \quad (9.10)$$

$$k = \frac{2.98 \cdot 10^7 \text{ N}}{\text{m}} \quad (9.11)$$



### 9.2.3. Eigenkreisfrequenz

Aus der Systemsteifigkeit lässt sich leicht die Eigenkreisfrequenz bestimmen:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9.12)$$

$$\omega_1 = \frac{173.0}{s} \quad (9.13)$$

### 9.2.4. Stationäre Amplitude der Verschiebung

Die statische Durchbiegung lässt sich anhand der Systemsteifigkeit und der Anfangskraft der Anregungsfunktion bestimmen. Mittels des Vergrößerungsfaktors lässt sich schlussendlich die stationäre maximale Amplitude bestimmen. Der Vergrößerungsfaktor ist abhängig von der Anregungsfrequenz, welche wir mit der Fourier-Reihenentwicklung approximiert haben. Wir haben folglich *„3 verschiedene“* Anregungsfrequenzen mit der entsprechenden Gewichtung.

$$V(\omega) = \frac{1}{5\sqrt{\frac{100\omega^2\zeta^2}{\omega_1^2} + \left(-\frac{25\omega^2}{\omega_1^2} + 1\right)^2}} + \frac{1}{3\sqrt{\frac{36\omega^2\zeta^2}{\omega_1^2} + \left(-\frac{9\omega^2}{\omega_1^2} + 1\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega^2\zeta^2}{\omega_1^2} + \left(-\frac{\omega^2}{\omega_1^2} + 1\right)^2}} \quad (9.14)$$

$$V(\omega) = 1.55 \quad (9.15)$$

$$u_0 = 0.0427\text{mm} \quad (9.16)$$

$$u_{stat} = 0.066\text{mm} \quad (9.17)$$

Der Vergrößerungsfaktor ist erwartungsgemäss niedrig, da sich die Eigenkreisfrequenz deutlich von der Anregungsfrequenz abgrenzt.

### 9.2.5. Stationäre Amplitude der Beschleunigung

Die Beschleunigung lässt sich ebenfalls anhand des Vergrößerungsfaktors bestimmen. Dies entspricht dem Vorgehen nach Michael Baur.

$$V_a(\omega) = 0.00205 \quad (9.18)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}u_{max} = \frac{0.0026\text{m}}{\text{s}^2} \quad (9.19)$$

Meines Erachtens müsste der Vergrößerungsfaktor für die Beschleunigung ebenfalls mit sämtlichen, gewichteten Anregungsfrequenzen der approximierten Anregungsfunktion bestimmt werden.

$$V_a(\omega) = 0.00614 \quad (9.20)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}u_{max} = \frac{0.00781\text{m}}{\text{s}^2} \quad (9.21)$$

# 10. Beispiel: Balken ohne Tilger

## 10.1. Aufgabenstellung

Ein einfacher Balken mit einer Einzelmasse, welcher in dieser Aufgabe ohne Tilger ausgestattet ist, ist in Abbildung 10.1 dargestellt. Die Masse erfährt eine dynamische Einwirkung durch die Funktion  $F(t)$ . Das Beispiel wird in Kapitel 13 weitergeführt.

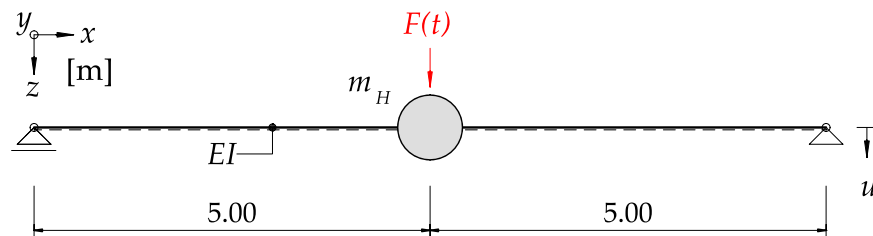


Abbildung 10.1.: Statisches System des Balkens ohne Tilger

Gesucht:

- Maximale dynamische Verformung mittels stationärer Lösung
- Maximale dynamische Beschleunigung mittels stationärer Lösung

Gegeben:

Tabelle 10.1.: Parameter der Aufgabenstellung

$E = \frac{200000\text{N}}{\text{mm}^2}$	$F_0 = 800.0\text{N}$
$I = 2000000000\text{mm}^4$	$L = 5\text{m}$
$M_H = \frac{2000\text{Ns}^2}{\text{m}}$	$\omega = \frac{12.6}{\text{s}}$
$\zeta = 0.0$	

$$F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0.8\text{kN} \cdot \left(12.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t\right)$$

## 10.2. Musterlösung

### 10.2.1. Steifigkeit $k$

Zuerst wird die Steifigkeit des Systems ermittelt, für einen Einmassenschwinger entspricht diese der Biegesteifigkeit des Balkens.

$$k_H = \frac{6EI}{L^3} \quad (10.1)$$

$$k_H = \frac{1.92 \cdot 10^6 \text{N}}{\text{m}} \quad (10.2)$$

### 10.2.2. Eigenkreisfrequenz $\omega$

Die Eigenkreisfrequenz kann mit der bekannten Formel ermittelt werden:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (10.3)$$

$$\omega_1 = \sqrt{6} \sqrt{\frac{EI}{L^3 M_H}} \quad (10.4)$$

$$\omega_1 = \frac{31.0}{\text{s}} \quad (10.5)$$

### 10.2.3. Vergrößerungsfaktor $V(\omega)$

Da lediglich die Stationäre Antwort von Interesse ist, kann mittels Vergrößerungsfaktor diese ermittelt werden. Der Verlauf entspricht der Anregungsfunktion. Die Amplitude definiert sich aus der statischen Deformation mit dem Vergrößerungsfaktor multipliziert.

$$V(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega^2 \zeta^2}{\omega_1^2} + \left(-\frac{\omega^2}{\omega_1^2} + 1\right)^2}} \quad (10.6)$$

$$V(\omega) = 1.2 \quad (10.7)$$

## 10.2.4. Stationäre Lösung

### 10.2.4.1. Statische Deformation

$$u_0 = \frac{F_0}{k_H} \quad (10.8)$$

$$u_0 = \frac{F_0 L^3}{6EI} \quad (10.9)$$

$$u_0 = 0.4167\text{mm} \quad (10.10)$$

### 10.2.4.2. Stationäre maximale Deformation

$$u_{stat} = u_0 V(\omega) \quad (10.11)$$

$$u_{stat} = \frac{F_0 L^3}{6EI \sqrt{\left(1 - \frac{L^3 M_H \omega^2}{6EI}\right)^2 + \frac{2L^3 M_H \omega^2 \zeta^2}{3EI}}} \quad (10.12)$$

$$u_{stat} = 0.499\text{mm} \quad (10.13)$$

### 10.2.4.3. Stationäre maximale Beschleunigung

$$V_a(\omega) = \frac{V_\omega \omega^2}{\omega_1^2} \quad (10.14)$$

$$V_a(\omega) = 0.198 \quad (10.15)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} u_{stat} = \frac{0.0793\text{m}}{\text{s}^2} \quad (10.16)$$

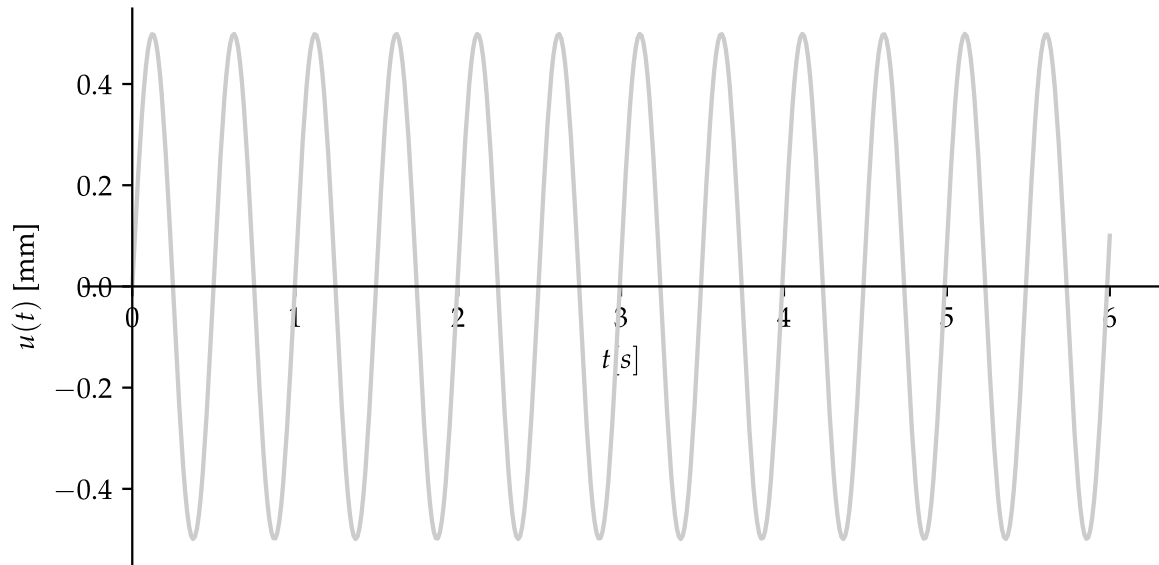


Abbildung 10.2.: Stationäre Antwort des Systems

**Teil III.**

**Mehrmassenschwinger**

# 11. Beispiel: Eigenvektoren mit direkt bestimmter Steifigkeitsmatrix

## 11.1. Aufgabenstellung

Das System in Abbildung 11.1 zeigt ein Rahmentragwerk, welches als Zweimassenschwinger modelliert werden kann.

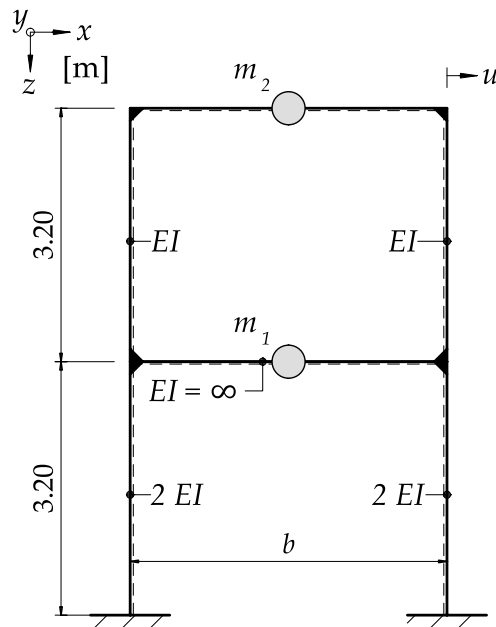


Abbildung 11.1.: Statisches System des Rahmentragwerks

Gesucht:

- Eigenkreisfrequenzen  $\omega_n$
- Eigenformen - Normierung auf

$$\phi_1^T = [ \quad 1 ]$$

$$\phi_2^T = [ \quad 1 ]$$



- Skizze der Eigenformen

Gegeben:

- Dehnsteifigkeit aller Stäbe  $E \cdot A = \infty$

Tabelle 11.1.: Parameter der Aufgabenstellung

$E = \frac{30000\text{N}}{\text{mm}^2}$	$H = 3.2\text{m}$
$I = 20000000000\text{mm}^4$	$m_1 = \frac{40000\text{Ns}^2}{\text{m}}$
$m_2 = \frac{20000\text{Ns}^2}{\text{m}}$	

## 11.2. Musterlösung

### 11.2.1. Eigenkreisfrequenzen

#### 11.2.1.1. Steifigkeitsmatrix K

Zur Bestimmung der Steifigkeitsmatrix ist das System an jedem Freiheitsgrad auszulenken, wie in Abbildung 11.2 dargestellt ist.

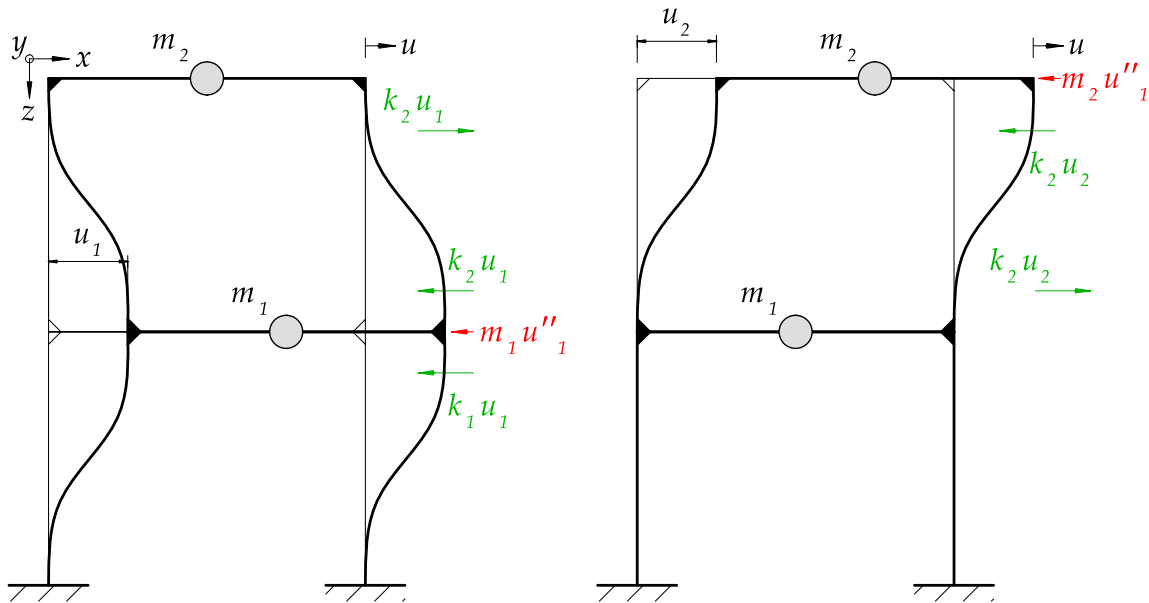


Abbildung 11.2.: Auslenkung der Freiheitsgrade zur Bestimmung der Steifigkeit

Wichtig dabei sind die Richtungen der Kräfte. Als Denkstütze gilt folgendes:

- Der Auslenkung um  $u$  wirkt die Federkraft entgegen, welche  $ku$  entspricht.
- Zusätzlich wirkt die Trägheitskraft der Auslenkung entgegen, welche  $mu''$  entspricht.
- Nach der Betrachtung des ausgelenkten Punkts, kann mittels *Actio-Reactio*-Prinzip das "Stockwerk" ins Gleichgewicht gebracht werden.
- Vorzeichen sind gegen der Bewegungsrichtung positiv.

#### 11.2.1.2. Horizontale Steifigkeit

Für entsprechende Anwendungsfälle gibt es fertige Lösungen zur Bestimmung der Steifigkeit. Gemäss Abbildung 11.1 ist die Stütze am Fuss- und Kopfpunkt eingespannt. Somit resultiert

die Steifigkeit zu:

$$k_{Stuetze} = \frac{12EI_{Stuetze}}{H^3} \quad (11.1)$$

Diese gilt für eine einzelne Stütze. Eingesetzt in die Steifigkeitsmatrix:

$$k_1 = \frac{48EI}{H^3} \quad (11.2)$$

$$k_2 = \frac{24EI}{H^3} \quad (11.3)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1.31836 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} & -\frac{4.39453 \cdot 10^7 \text{N}}{\text{m}} \\ -\frac{4.39453 \cdot 10^7 \text{N}}{\text{m}} & \frac{4.39453 \cdot 10^7 \text{N}}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

## 11.2.2. Eigenvektoren

### 11.2.2.1. Massenmatrix M

Die Massenmatrix folgt dem gleichen Aufbau wie die Steifigkeitsmatrix. Es gelten die gleichen Vorzeichenregelungen.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (11.6)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{40000 \text{Ns}^2}{\text{m}} & 0 \\ 0 & \frac{20000 \text{Ns}^2}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (11.7)$$

### 11.2.2.2. Eigenkreisfrequenzen

Bei einem Mehrmassenschwinger gibt es entsprechend den Freiheitsgraden Eigenkreisfrequenzen  $\omega_n$ . Diese lassen sich anhand folgender Gleichung bestimmen:

$$\det[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (11.8)$$

$$\omega_1 = \frac{33.1}{s} \quad (11.9)$$

$$\omega_2 = \frac{66.3}{s} \quad (11.10)$$

### 11.2.2.3. Eigenvektoren $\phi$

$$\phi_n = \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

$$[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] \cdot \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \end{bmatrix} = 0 \quad (11.12)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-k_2 m_2 \phi_{21} + \frac{\phi_{11}(-k_2 m_1 + m_2(k_1 + k_2) + \sqrt{k_1^2 m_2^2 - 2k_1 k_2 m_1 m_2 + 2k_1 k_2 m_2^2 + k_2^2 m_1^2 + 2k_2^2 m_1 m_2 + k_2^2 m_2^2})}{2}}{m_2} \\ \frac{-k_2 m_1 \phi_{11} + \frac{\phi_{21}(k_2 m_1 - m_2(k_1 + k_2) + \sqrt{k_1^2 m_2^2 - 2k_1 k_2 m_1 m_2 + 2k_1 k_2 m_2^2 + k_2^2 m_1^2 + 2k_2^2 m_1 m_2 + k_2^2 m_2^2})}{2}}{m_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.13)$$

$$\square_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (11.14)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-k_2 m_2 \phi_{22} + \frac{\phi_{12}(-k_2 m_1 + m_2(k_1 + k_2) - \sqrt{k_1^2 m_2^2 - 2k_1 k_2 m_1 m_2 + 2k_1 k_2 m_2^2 + k_2^2 m_1^2 + 2k_2^2 m_1 m_2 + k_2^2 m_2^2})}{2}}{m_2} \\ \frac{-k_2 m_1 \phi_{12} + \frac{\phi_{22}(k_2 m_1 - m_2(k_1 + k_2) - \sqrt{k_1^2 m_2^2 - 2k_1 k_2 m_1 m_2 + 2k_1 k_2 m_2^2 + k_2^2 m_1^2 + 2k_2^2 m_1 m_2 + k_2^2 m_2^2})}{2}}{m_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.15)$$

$$\square_2 = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (11.16)$$

#### 11.2.2.4. Orthogonalitätsbedingung

Zur Entkoppelung des Systems wird die Orthogonalität der Eigenvektoren kontrolliert. Siehe Kapitel [12.2.2.4](#) für eine ausführliche Erklärung.

$$\varphi_1^T \mathbf{M} \varphi_1 = \left[ \frac{3.0 \cdot 10^4 \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (11.17)$$

$$\varphi_2^T \mathbf{M} \varphi_2 = \left[ \frac{6.0 \cdot 10^4 \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (11.18)$$

$$\varphi_2^T \mathbf{M} \varphi_1 = [0] \quad (11.19)$$

$$\varphi_1^T \mathbf{M} \varphi_2 = [0] \quad (11.20)$$

Für die Steifigkeitsmatrix:

$$\varphi_1^T \mathbf{K} \varphi_1 = \left[ \frac{3.3 \cdot 10^7 \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (11.21)$$

$$\varphi_2^T \mathbf{K} \varphi_2 = \left[ \frac{2.64 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (11.22)$$

$$\varphi_2^T \mathbf{K} \varphi_1 = [0] \quad (11.23)$$

$$\varphi_1^T \mathbf{K} \varphi_2 = [0] \quad (11.24)$$

### 11.2.3. Eigenformen

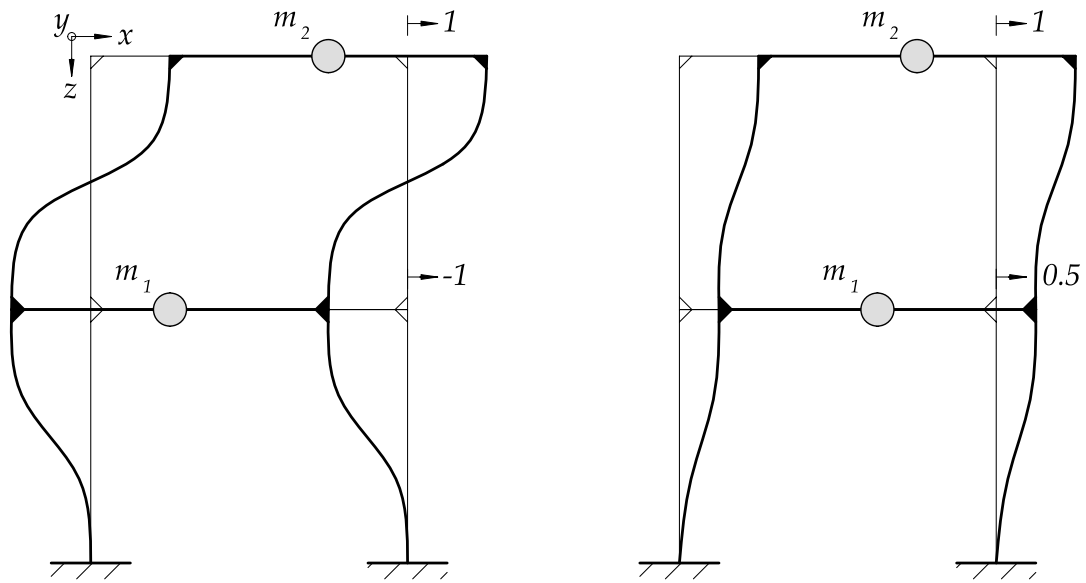


Abbildung 11.3.: Die beiden Eigenformen skizziert

## 12. Beispiel: Eigenvektoren und Nachgiebigkeitsmatrix

### 12.1. Aufgabenstellung

Das System in Abbildung 12.1 zeigt einen Rahmen, welcher als Zweimassenschwinger modelliert werden kann.

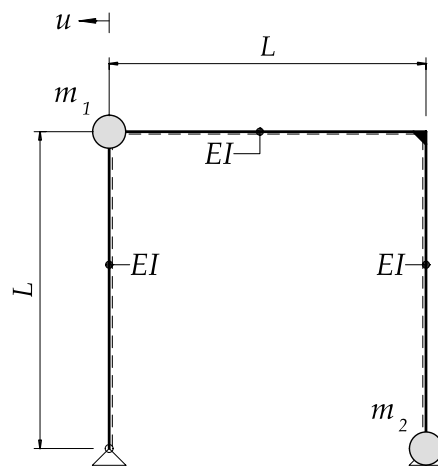


Abbildung 12.1.: Statisches System des 2-Massenschwingers

Gesucht:

- Eigenkreisfrequenzen  $\omega_n$
- Eigenformen - Normierung auf

$$\phi_1^T = [1 \quad ]$$

$$\phi_2^T = [ \quad 1]$$

- Skizze der Eigenformen
- Kontrolle der Orthogonalitätsbedingung

Gegeben:

- Dehnsteifigkeit aller Stäbe  $E \cdot A = \infty$

Tabelle 12.1.: Parameter der Aufgabenstellung

$EI = 20000000000000\text{mm}^2\text{N}$	$L = 4\text{m}$
$m_1 = \frac{1000\text{Ns}^2}{\text{m}}$	$m_2 = \frac{1000\text{Ns}^2}{\text{m}}$



## 12.2. Musterlösung

### 12.2.1. Nachgiebigkeitsmatrix $\mathbf{D}$

Die Steifigkeitsmatrix lässt sich durch Invertierung der Nachgiebigkeitsmatrix beschreiben. Die Nachgiebigkeitsmatrix  $\mathbf{D}$  beschreibt die Deformation an einem Massenpunkt. Die Einträge der  $\mathbf{D}$  - Matrix beschreiben die Deformationen für unterschiedliche Laststellungen.

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1} \quad (12.1)$$

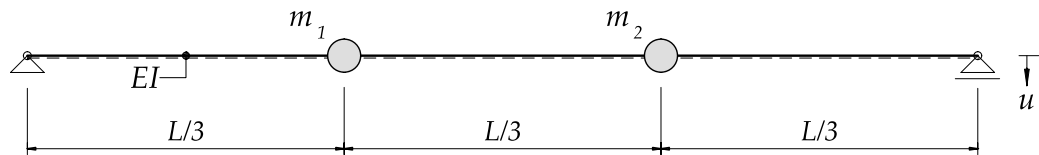


Abbildung 12.2.: Balken mit 2 Einzelmassen

Für einen 2-Massenschwinger, wie in Abbildung 12.2, hat die Nachgiebigkeitsmatrix folgende Form:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \quad (12.2)$$

wobei gilt:

$\delta_{ab}$  :  $a$  ist die Lastsituation,  $b$  ist die Masse.

### 12.2.1.1. Anwendung

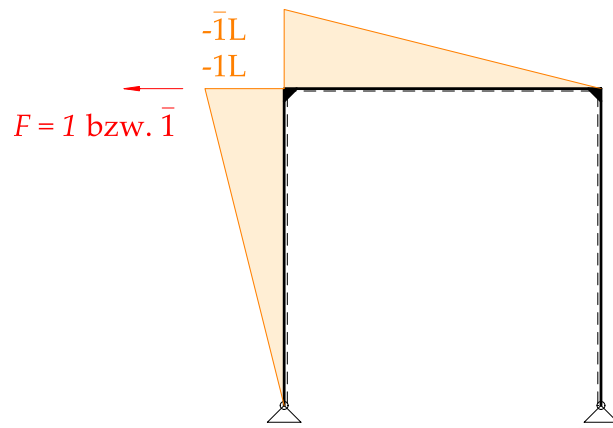


Abbildung 12.3.: Schnittgrößen für den ersten Lastfall zur Bestimmung der Deformation

$$\delta_{ab} = \frac{1}{EI} \int_0^L M_a \bar{M}_b dx \quad (12.3)$$

Es werden 2 Laststellungen betrachtet, jeweils an einem Massenpunkt. Dabei ist Beachtung der Einheit der Einwirkung zu schenken. Diese wird einheitslos angesetzt.

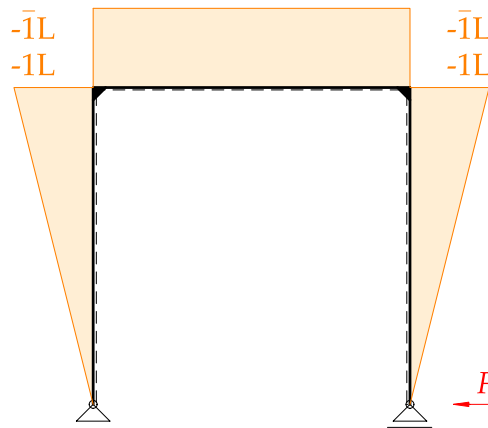


Abbildung 12.4.: Schnittgrößen für den zweiten Lastfall zur Bestimmung der Deformation

$$\delta_{11} = \frac{2L^3}{3EI} \quad (12.4)$$

$$\delta_{12} = \frac{5L^3}{6EI} \quad (12.5)$$

$$\delta_{21} = \frac{5L^3}{6EI} \quad (12.6)$$

$$\delta_{22} = \frac{5L^3}{3EI} \quad (12.7)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{2L^3}{3EI} & \frac{5L^3}{6EI} \\ \frac{5L^3}{6EI} & \frac{5L^3}{3EI} \end{bmatrix} \quad (12.8)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L^3} & -\frac{2EI}{L^3} \\ -\frac{2EI}{L^3} & \frac{8EI}{L^3} \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

### 12.2.2. Eigenvektoren

Die Bewegungsgleichung für einen ungedämpften, frei schwingenden Mehrmassenschwinger lässt sich folgender massen aufstellen:

$$\mathbf{M}\mathbf{u}''(\mathbf{t}) + \mathbf{K}\mathbf{u}(\mathbf{t}) = 0 \quad (12.10)$$

Die Modale Analyse entkoppelt die Gleichungen, um diese unabhängig voneinander zu lösen.

#### 12.2.2.1. Massenmatrix $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (12.11)$$

### 12.2.2.2. Eigenkreisfrequenzen

Bei einem Mehrmassenschwinger gibt es entsprechend den Freiheitsgraden Eigenkreisfrequenzen  $\omega_n$ . Diese lassen sich anhand Gleichung 12.12 bestimmen:

$$\det[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (12.12)$$

$$\omega_1 = \frac{12.1}{s} \quad (12.13)$$

$$\omega_2 = \frac{40.0}{s} \quad (12.14)$$

### 12.2.2.3. Eigenvektoren $\phi$

$$\phi_n = \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \end{bmatrix} \quad (12.15)$$

$$[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] \cdot \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \end{bmatrix} = 0 \quad (12.16)$$

Dazu ist die entsprechende Normierung aus der Aufgabenstellung zu berücksichtigen. Generell gilt, den Vektor auf den Maximalwert zu normieren, bzw. diesen auf 1 zu setzen.

$$\begin{bmatrix} -\frac{2EI\phi_{21}}{L^3} + \phi_{11} \cdot \left( \frac{4EI}{L^3} - m_1 \cdot \left( \frac{4EI}{5L^3m_2} + \frac{2EI}{L^3m_1} - \frac{2EI\sqrt{4m_1^2+5m_1m_2+25m_2^2}}{5L^3m_1m_2} \right) \right) \\ -\frac{2EI\phi_{11}}{L^3} + \phi_{21} \cdot \left( \frac{8EI}{5L^3} - m_2 \cdot \left( \frac{4EI}{5L^3m_2} + \frac{2EI}{L^3m_1} - \frac{2EI\sqrt{4m_1^2+5m_1m_2+25m_2^2}}{5L^3m_1m_2} \right) \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.17)$$

$$\square_1 = \begin{bmatrix} 0.566 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (12.18)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2EI\phi_{22}}{L^3} + \phi_{12} \cdot \left( \frac{4EI}{L^3} - m_1 \cdot \left( \frac{4EI}{5L^3m_2} + \frac{2EI}{L^3m_1} + \frac{2EI\sqrt{4m_1^2+5m_1m_2+25m_2^2}}{5L^3m_1m_2} \right) \right) \\ -\frac{2EI\phi_{12}}{L^3} + \phi_{22} \cdot \left( \frac{8EI}{5L^3} - m_2 \cdot \left( \frac{4EI}{5L^3m_2} + \frac{2EI}{L^3m_1} + \frac{2EI\sqrt{4m_1^2+5m_1m_2+25m_2^2}}{5L^3m_1m_2} \right) \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.19)$$

$$\square_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.566 \end{bmatrix} \quad (12.20)$$

#### 12.2.2.4. Orthogonalitätsbedingung

Um eine modale Analyse des Systems durchzuführen, gilt es die Orthogonalität der Eigenvektoren zu gewährleisten. Die Modale Analyse wird in folgenden Beispielen, wie in Kapitel 13, angewendet.

Dies gilt es für die Massenmatrix zu kontrollieren:

$$\square_1^T \mathbf{M} \square_1 = \left[ \frac{1.32 \cdot 10^3 \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (12.21)$$

$$\square_2^T \mathbf{M} \square_2 = \left[ \frac{1.32 \cdot 10^3 \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (12.22)$$

$$\square_2^T \mathbf{M} \square_1 = [0] \quad (12.23)$$

$$\square_1^T \mathbf{M} \square_2 = [0] \quad (12.24)$$

Sowohl auch für die Steifigkeitsmatrix:

$$\square_1^T \mathbf{K} \square_1 = \left[ \frac{1.93 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (12.25)$$

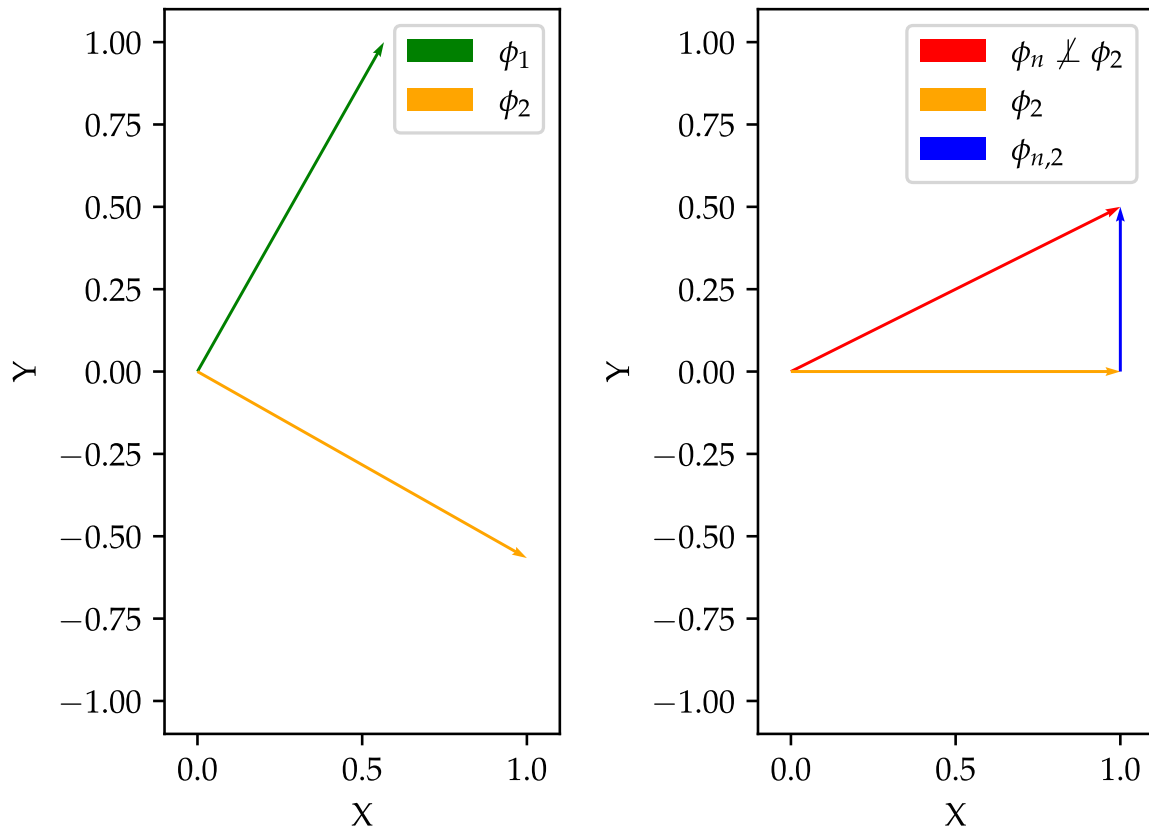
$$\square_2^T \mathbf{K} \square_2 = \left[ \frac{2.12 \cdot 10^6 \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (12.26)$$

$$\square_2^T \mathbf{K} \square_1 = [0] \quad (12.27)$$

$$\phi_1^T \mathbf{K} \phi_2 = [0] \quad (12.28)$$

Die Orthogonalitätsbedingung ist erfüllt!

Zur effektiven Entkoppelung der Gleichungen muss die Orthogonalitätsbedingung eingehalten sein. Durch die Orthogonalität der Vektoren  $\phi_1$  und  $\phi_2$  kann mittels einem Einmassenschwingers sämtliches Verhalten von  $\phi_1$  beschrieben werden und mittels einem zweiten Einmassenschwinger sämtliches Verhalten von  $\phi_2$ . Ist die Orthogonalität nicht gegeben, so müsste der erste Einmassenschwinger Anteile aus  $\phi_1$  und  $\phi_2$  beschreiben.



(a) Erfüllte Orthogonalitätsbedingung

(b) Nicht erfüllte Orthogonalitätsbedingung

Abbildung 12.5.: Visualisierung des Einflusses der Orthogonalität der Eigenvektoren

Wie in Abbildung 12.5 dargestellt, wird der rote Vektor  $\phi_n$  durch den orangenen Vektor  $\phi_2$  beschrieben, sowie durch seine Y Komponente  $\phi_{n,2}$ . Folglich steht  $\phi_n$  nicht orthogonal auf  $\phi_2$  und lässt sich nicht ohne  $\phi_2$  beschreiben. Die Entkoppelung ist nicht möglich.

Nebenbei, dies lässt sich für einen zweidimensionalen Fall, sprich Zweimassenschwinger darstellen. Das Verfahren kann auf beliebig viele Dimensionen erweitert werden, die Darstellung dieser ist jedoch nicht mehr möglich.

### 12.2.3. Eigenformen

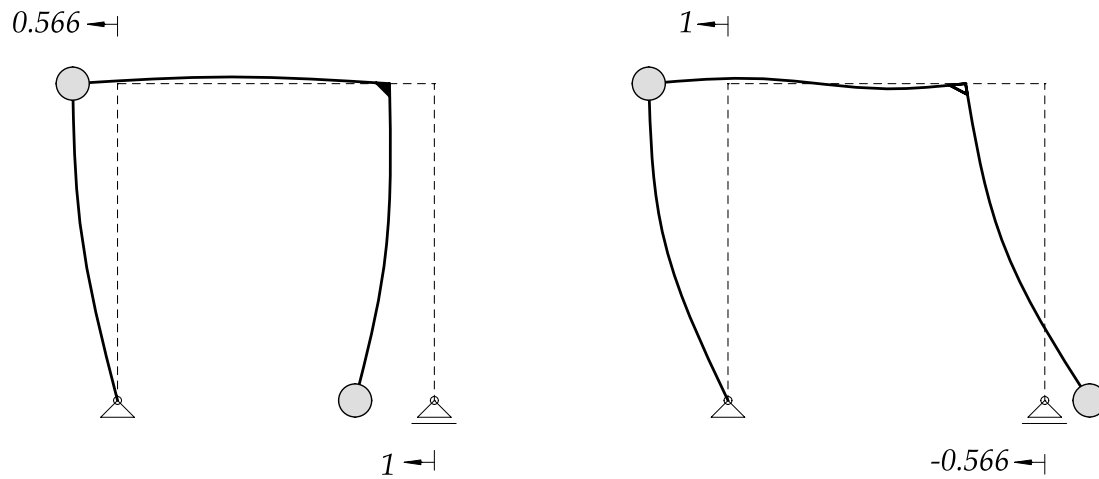


Abbildung 12.6.: Die beiden Eigenform skizziert

## 13. Beispiel: Balken mit Tilger

### 13.1. Aufgabenstellung

Das Beispiel ist die Weiterführung der Aufgabe in Kapitel 10. Ein einfacher Balken mit einer Einzelmasse, welcher in dieser Aufgabe mit Tilger ausgestattet ist, ist in Abbildung 13.1 dargestellt. Die Masse erfährt eine dynamische Einwirkung durch die Funktion  $F(t)$ .

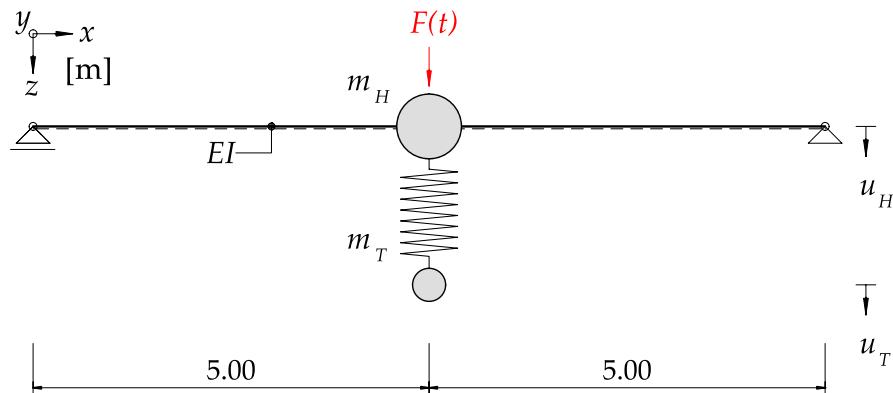


Abbildung 13.1.: Statisches System des Balkens mit Tilger

Gesucht:

- Normierte Eigenform
- Maximale dynamische Verformung mittels stationärer Lösung
- Maximale dynamische Beschleunigung mittels stationärer Lösung

Gegeben:

Tabelle 13.1.: Parameter der Aufgabenstellung

$E = \frac{200000\text{N}}{\text{mm}^2}$	$F_0 = 800.0\text{N}$
$I = 2000000000\text{mm}^4$	$L = 5\text{m}$
$k_T = \frac{90000\text{N}}{\text{m}}$	$m_H = \frac{2000\text{Ns}^2}{\text{m}}$
$m_T = \frac{150\text{Ns}^2}{\text{m}}$	$\omega = \frac{12.6}{\text{s}}$



$$\begin{aligned}\phi_{11} &= 1 \\ \zeta &= 0.0\end{aligned}$$

$$\phi_{12} = 1$$


---

$$F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0.8\text{kN} \cdot \left(12.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t\right)$$

## 13.2. Musterlösung

### 13.2.1. Bemerkung Tilgerauslegung

Die Auslegung des Tilgers kann folgender massen geschehen:

- Tilgermasse 5% von der Masse des Hauptträgers.
- Optimale Frequenz bestimmen:

$$f_{T,opt} = \frac{f_H}{1 + \frac{m_T}{m_H}} \quad (13.1)$$

- Daraus die optimale Steifigkeit bestimmen:

$$k_{T,opt} = (2\pi f_{T,opt})^2 \quad (13.2)$$

### 13.2.2. Steifigkeitsmatrix K

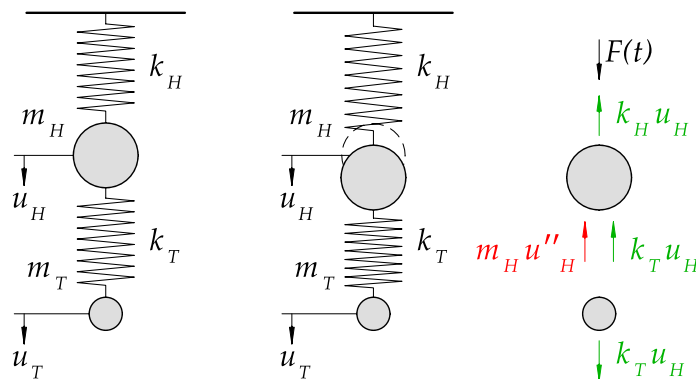


Abbildung 13.2.: Auslenkung am ersten Freiheitsgrad

Wichtig dabei sind die Richtungen der Kräfte. Als Denkstütze gilt folgendes:

- Der Auslenkung um  $u$  wirkt die Federkraft entgegen, welche  $ku$  entspricht.
- Zusätzlich wirkt die Trägheitskraft der Auslenkung entgegen, welche  $mu''$  entspricht.
- Nach der Betrachtung des ausgelenkten Punkts, kann mittels *Actio-Reactio*-Prinzip das "Stockwerk" ins Gleichgewicht gebracht werden.
- Vorzeichen sind gegen der Bewegungsrichtung positiv.

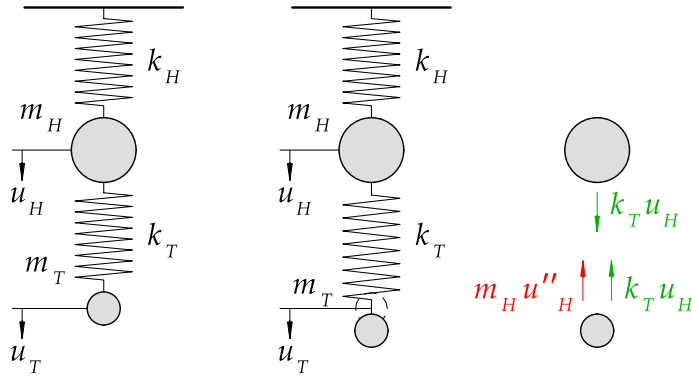


Abbildung 13.3.: Auslenkung am zweiten Freiheitsgrad

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_H + k_T & -k_T \\ -k_T & k_T \end{bmatrix} \quad (13.3)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{2010000\text{N}}{\frac{\text{m}}{\text{m}}} & -\frac{90000\text{N}}{\frac{\text{m}}{\text{m}}} \\ -\frac{90000\text{N}}{\frac{\text{m}}{\text{m}}} & \frac{90000\text{N}}{\frac{\text{m}}{\text{m}}} \end{bmatrix} \quad (13.4)$$

### 13.2.3. Eigenvektoren

#### 13.2.3.1. Massenmatrix $\mathbf{M}$

Die Massenmatrix folgt dem Aufbau der Steifigkeitsmatrix. Es gelten die gleichen Vorzeichenregelungen. Die Einträge beziehen sich auf [Abbildung 13.3](#) und [Abbildung 13.2](#).

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_H & 0 \\ 0 & m_T \end{bmatrix} \quad (13.5)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{2000\text{Ns}^2}{\text{m}} & 0 \\ 0 & \frac{150\text{Ns}^2}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (13.6)$$

### 13.2.3.2. Eigenkreisfrequenzen

Bei einem Mehrmassenschwinger gibt es entsprechend den Freiheitsgraden Eigenkreisfrequenzen  $\omega_n$ . Diese lassen sich anhand folgender Gleichung bestimmen:

$$\det[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (13.7)$$

$$\omega_1 = \frac{23.3}{s} \quad (13.8)$$

$$\omega_2 = \frac{32.6}{s} \quad (13.9)$$

### 13.2.3.3. Eigenvektoren $\phi$

$$\phi_n = \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \end{bmatrix} \quad (13.10)$$

$$[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] \cdot \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \end{bmatrix} = 0 \quad (13.11)$$

Dazu ist die entsprechende Normierung aus der Aufgabenstellung zu berücksichtigen.

$$\begin{bmatrix} \frac{-k_T m_T \phi_{21} + \frac{\phi_{11}(-k_T m_H + m_T(k_H + k_T) + \sqrt{k_H^2 m_T^2 - 2k_H k_T m_H m_T + 2k_H k_T m_T^2 + k_T^2 m_H^2 + 2k_T^2 m_H m_T + k_T^2 m_T^2})}{2}}{m_T} \\ \frac{-k_T m_H \phi_{11} + \frac{\phi_{21}(k_T m_H - m_T(k_H + k_T) + \sqrt{k_H^2 m_T^2 - 2k_H k_T m_H m_T + 2k_H k_T m_T^2 + k_T^2 m_H^2 + 2k_T^2 m_H m_T + k_T^2 m_T^2})}{2}}{m_H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.12)$$

$$\square_1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 10.3 \end{bmatrix} \quad (13.13)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-k_T m_T \phi_{22} + \frac{\phi_{12}(-k_T m_H + m_T(k_H + k_T) - \sqrt{k_H^2 m_T^2 - 2k_H k_T m_H m_T + 2k_H k_T m_T^2 + k_T^2 m_H^2 + 2k_T^2 m_H m_T + k_T^2 m_T^2})}{2}}{m_T} \\ \frac{-k_T m_H \phi_{12} + \frac{\phi_{22}(k_T m_H - m_T(k_H + k_T) - \sqrt{k_H^2 m_T^2 - 2k_H k_T m_H m_T + 2k_H k_T m_T^2 + k_T^2 m_H^2 + 2k_T^2 m_H m_T + k_T^2 m_T^2})}{2}}{m_H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.14)$$

$$\square_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -1.3 \end{bmatrix} \quad (13.15)$$

#### 13.2.3.4. Orthogonalitätsbedingung

Zur Entkoppelung des Systems wird die Orthogonalität der Eigenvektoren kontrolliert. Siehe Kapitel [12.2.2.4](#) für eine ausführliche Erklärung.

$$\varphi_1^T \mathbf{M} \varphi_1 = \left[ \frac{1.79 \cdot 10^4 \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (13.16)$$

$$\varphi_2^T \mathbf{M} \varphi_2 = \left[ \frac{2.25 \cdot 10^3 \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (13.17)$$

$$\varphi_2^T \mathbf{M} \varphi_1 = \left[ \frac{6.103516 \cdot 10^{-5} \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (13.18)$$

$$\varphi_1^T \mathbf{M} \varphi_2 = \left[ \frac{6.103516 \cdot 10^{-5} \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (13.19)$$

Es sind kleine numerische Differenzen zu erkennen welche nicht relevant sind.

$$\varphi_1^T \mathbf{K} \varphi_1 = \left[ \frac{9.7 \cdot 10^6 \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (13.20)$$

$$\varphi_2^T \mathbf{K} \varphi_2 = \left[ \frac{2.39 \cdot 10^6 \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (13.21)$$

$$\varphi_2^T \mathbf{K} \varphi_1 = [0] \quad (13.22)$$

$$\varphi_1^T \mathbf{K} \varphi_2 = [0] \quad (13.23)$$

#### 13.2.4. Modale Analyse

Die Bewegungsgleichung für einen ungedämpften, periodisch, harmonisch angeregten Mehrmassenschwinger lässt sich folgend beschreiben:

$$\mathbf{M} \mathbf{u}''(\mathbf{t}) + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{t}) \quad (13.24)$$

Die Matrix-Gleichung beschreibt ein System aus Differentialgleichungen. Die Modale Analyse zielt darauf ab, diese zu entkoppeln. Bezogen auf den Mehrmassenschwinger heisst eine Entkoppelung, dass diese in Einmassenschwinger aufgeteilt werden. Dies wird nun schrittweise durchgeführt.

#### 13.2.4.1. Modal- und Spektralmatrix

Mittels der Modal- und Spektralmatrix können die generalisierten Grössen ermittelt werden. Diese sind die Eigenschaften der einzelnen Einmassenschwinger. Die generalisierten Werte besitzen keine physikalische Bedeutung, sie sind abhängig von der Wahl der Eigenvektoren, welche bekanntlich von der Normierung abhängen.

Anhand der Bewegungsgleichung können die generalisierten Grössen bestimmt werden, es gilt:

$$\Phi^T M \Phi u''(t) + \Phi^T K \Phi u(t) = \Phi^T F(t)$$

$$M^* u''(t) + K^* u(t) = F^*(t)$$

Alle  $N$ -Eigenwerte und alle  $N$ -Eigenvektoren können kompakt mit Matrizen ausgedrückt werden:

$$\text{Modalmatrix} = \Phi \quad (13.25)$$

$$\square = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 10.3 & -1.295 \end{bmatrix} \quad (13.26)$$

$$\text{Spektralmatrix} = \Omega^2 \quad (13.27)$$

$$\square^2 = \begin{bmatrix} \frac{541.7}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1063.0}{s^2} \end{bmatrix} \quad (13.28)$$

#### 13.2.4.2. Generalisierte Grössen

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} \frac{17898.0 \text{Ns}^2}{\text{m}} & 0 \\ 0 & \frac{2251.6 \text{Ns}^2}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (13.29)$$

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \frac{9.6959 \cdot 10^6 \text{N}}{\text{m}} & 0 \\ 0 & \frac{2.3941 \cdot 10^6 \text{N}}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (13.30)$$

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} 800.0 \sin\left(\frac{12.6t}{s}\right) \text{N} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.31)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{t})^* = \begin{bmatrix} 800.0 \sin\left(\frac{12.6t}{s}\right) \text{N} \\ 800.0 \sin\left(\frac{12.6t}{s}\right) \text{N} \end{bmatrix} \quad (13.32)$$

#### 13.2.4.3. Kontrolle der modalen Transformation

Die entkoppelten Einmassenschwinger müssen das Verhalten des gesamten Systems abbilden, aus diesem Grund dürfen sich die Eigenkreisfrequenzen nach der Transformation nicht ändern. Dies wird folgend kontrolliert:

$$\omega_1 = \frac{23.3}{s} \quad (13.33)$$

$$\omega_{1modal} = \frac{23.3}{s} \quad (13.34)$$

$$\omega_2 = \frac{32.61}{s} \quad (13.35)$$

$$\omega_{2modal} = \frac{32.61}{s} \quad (13.36)$$

#### 13.2.4.4. Modale Höhen

Die modalen Höhen bestimmen sich aus Gleichung 13.37:

$$H_n = \frac{L_n^\theta}{L_n} \quad (13.37)$$

$$L_n = \phi_n^T \cdot \mathbf{M} \mathbf{1} \quad (13.38)$$

$$L_n^\theta = \sum_{j=1}^N H_j \cdot m_j \cdot \phi_{jn} \quad (13.39)$$

Wie sind modale Höhen mit diesem Beispiel zu bestimmen?

### 13.2.5. Stationäre Antwort

Die stationäre Antwort wird mittels des Vergrößerungsfaktors bestimmt.

Die entkoppelte Differentialgleichung ist nun die folgende:

$$m_1^* q_1''(t) + k_1^* q_1(t) = F_1^*(t) = F_1^* \sin(\omega t) \quad (13.40)$$

$$m_2^* q_2''(t) + k_2^* q_2(t) = F_2^*(t) = F_2^* \sin(\omega t) \quad (13.41)$$

Lösen lässt sich dies mit dem bekannten Ansatz:

$$q_n(t) = A_n \sin(\omega t) + B_n \cos(\omega t) \quad (13.42)$$

Hier wird jedoch mit dem Vorgehen des Vergrößerungsfaktors verfahren:

#### 13.2.5.1. Verformung

$$V_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega^2 \zeta^2}{\omega_1^2} + \left(-\frac{\omega^2}{\omega_1^2} + 1\right)^2}} \quad (13.43)$$

$$V_1(\omega) = 1.41 \quad (13.44)$$

$$q_{1stat} = 0.0825 \text{mm} \quad (13.45)$$

$$q_{1max} = q_{1stat} V_1(\omega) \quad (13.46)$$

$$q_{1max} = 0.117 \text{mm} \quad (13.47)$$

$$V_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega^2 \zeta^2}{\omega_2^2} + \left(-\frac{\omega^2}{\omega_2^2} + 1\right)^2}} \quad (13.48)$$

$$V_2(\omega) = 1.18 \quad (13.49)$$



$$q_{2stat} = 0.334\text{mm} \quad (13.50)$$

$$q_{2max} = q_{2stat} V_2(\omega) \quad (13.51)$$

$$q_{2max} = 0.393\text{mm} \quad (13.52)$$

#### 13.2.5.1.1. Effektive Deformation

Die effektiven Grössen resultieren durch Multiplikation mit dem Eigenvektor. Für die erste Eigenkreisfrequenz:

$$u_{1stat} = \phi_1 q_{1max} \quad (13.53)$$

$$\begin{bmatrix} u_{11stat} \\ u_{21stat} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.117\text{mm} \\ 1.2\text{mm} \end{bmatrix} \quad (13.54)$$

Sowie für die zweite Eigenkreisfrequenz:

$$u_{2stat} = \phi_2 q_{2max} \quad (13.55)$$

$$\begin{bmatrix} u_{12stat} \\ u_{22stat} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.393\text{mm} \\ -0.509\text{mm} \end{bmatrix} \quad (13.56)$$

Durch Addition der beiden Verformungen: Sollte hier die SRSS-Regel verwendet werden?

$$u_{stat} = u_{1stat} + u_{2stat} \quad (13.57)$$

$$\begin{bmatrix} u_{1max} \\ u_{2max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.51\text{mm} \\ 0.693\text{mm} \end{bmatrix} \quad (13.58)$$

#### 13.2.5.2. Beschleunigung

$$V_{a1\omega} = \frac{V_{1\omega}\omega^2}{\omega_1^2} \quad (13.59)$$

$$V_{a1}(\omega) = 0.415 \quad (13.60)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}q_{max} = \frac{0.0185\text{m}}{\text{s}^2} \quad (13.61)$$

$$V_{a2}(\omega) = 0.176 \quad (13.62)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}q_{max} = \frac{0.0624\text{m}}{\text{s}^2} \quad (13.63)$$

##### 13.2.5.2.1. Effektive Beschleunigung

Gleiches Vorgehen wie bei der Deformation.

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2}u_{1max} \\ \frac{d^2}{dt^2}u_{2max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.0809\text{m}}{\text{s}^2} \\ \frac{0.11\text{m}}{\text{s}^2} \end{bmatrix} \quad (13.64)$$

# 14. Beispiel: Antwortspektrenverfahren an einem dreistöckigen Gebäude

## 14.1. Aufgabenstellung

Das System in Abbildung 14.1 zeigt ein dreistöckiges Gebäude. Modelliert wird dies als Dreimassenschwinger.

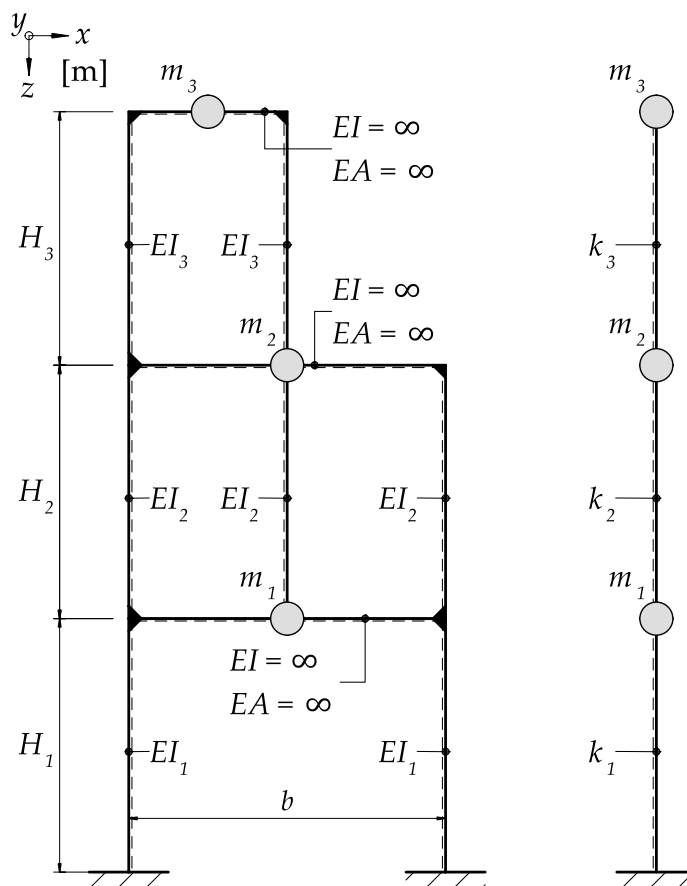


Abbildung 14.1.: Statisches System des dreigeschossigen Gebäudes

Gesucht:

- Bestimme die Steifigkeits- und Massenmatrix
- Bestimme die Eigenkreisfrequenzen
- Ermittle die daraus resultierenden Eigenvektoren
- Führe eine modale Analyse durch
  - Kontrolliere die Orthogonalität der transformierten Matrizen
  - Bestimme die Partizipationsfaktoren
- Ermittle die Pseudobeschleunigung anhand des Antwortspektrums der SIA261:2020
- Ermittle die daraus resultierende Deformationen (Überlagere mittels SRSS-Regel)
- Zeichne die maximalen Schnittkraftverläufe

Gegeben:

- Baugrundklasse  $E$
- Erdbebenzone  $Z2$

Tabelle 14.1.: Parameter der Aufgabe

$EI_1 = 1150000.0\text{m}^2\text{N}$	$EI_2 = 766666.0\text{m}^2\text{N}$
$EI_3 = 1150000.0\text{m}^2\text{N}$	$H_1 = 3.5\text{m}$
$H_2 = 3.5\text{m}$	$H_3 = 3.5\text{m}$
$m_1 = \frac{6000\text{Ns}^2}{\text{m}}$	$m_2 = \frac{5000\text{Ns}^2}{\text{m}}$
$m_3 = \frac{4000\text{Ns}^2}{\text{m}}$	

## 14.2. Musterlösung

### 14.2.1. Massenmatrix $M$

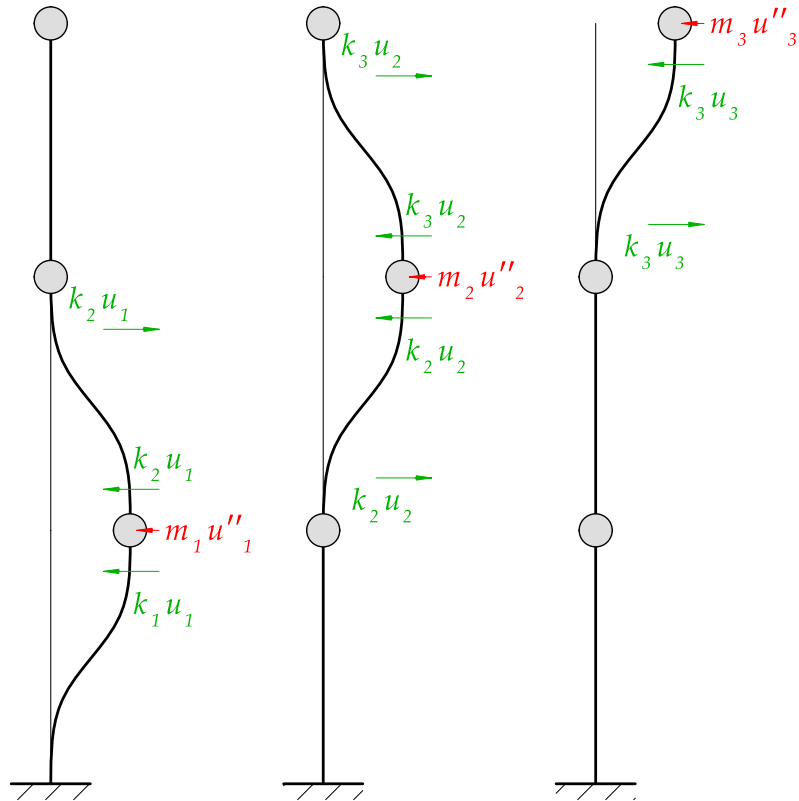


Abbildung 14.2.: Auslenkung der Massen zur Ermittlung der Matrizen

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (14.1)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{6000\text{Ns}^2}{\text{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5000\text{Ns}^2}{\text{m}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4000\text{Ns}^2}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (14.2)$$

## 14.2.2. Steifigkeitsmatrix $K$

### 14.2.2.1. Steifigkeit der Stockwerke

$$k_1 = \frac{24EI_1}{H_1^3} \quad (14.3)$$

$$k_1 = \frac{6.44 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} \quad (14.4)$$

$$k_2 = \frac{36EI_2}{H_2^3} \quad (14.5)$$

$$k_2 = \frac{6.44 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} \quad (14.6)$$

$$k_3 = \frac{24EI_3}{H_3^3} \quad (14.7)$$

$$k_3 = \frac{6.44 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} \quad (14.8)$$

Abgefüllt in die Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (14.9)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{24EI_1}{H_1^3} + \frac{36EI_2}{H_2^3} & -\frac{36EI_2}{H_2^3} & 0 \\ -\frac{36EI_2}{H_2^3} & \frac{36EI_2}{H_2^3} + \frac{24EI_3}{H_3^3} & -\frac{24EI_3}{H_3^3} \\ 0 & -\frac{24EI_3}{H_3^3} & \frac{24EI_3}{H_3^3} \end{bmatrix} \quad (14.10)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1.29 \cdot 10^6 \text{N}}{\text{m}} & -\frac{6.44 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} & 0 \\ -\frac{6.44 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} & \frac{1.29 \cdot 10^6 \text{N}}{\text{m}} & -\frac{6.44 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} \\ 0 & -\frac{6.44 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} & \frac{6.44 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (14.11)$$

### 14.2.3. Eigenvektoren

#### 14.2.3.1. Eigenkreisfrequenzen

Bei einem Mehrmassenschwinger gibt es entsprechend den Freiheitsgraden Eigenkreisfrequenzen  $\omega_n$ . Diese lassen sich anhand folgender Gleichung bestimmen:

$$\det [\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (14.12)$$

$$\omega_1 = \frac{5.28}{s} \quad (14.13)$$

$$\omega_2 = \frac{13.9}{s} \quad (14.14)$$

$$\omega_3 = \frac{20.3}{s} \quad (14.15)$$

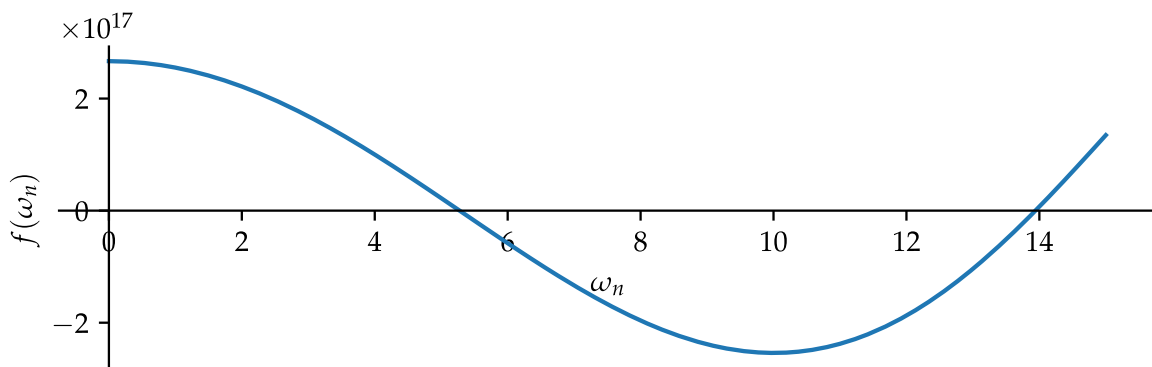


Abbildung 14.3.: Nullstellen der Gleichung [14.12](#)

#### 14.2.3.2. Eigenvektoren $\phi$

Durch das Einsetzen der bestimmten Eigenkreisfrequenzen lassen sich die Eigenvektoren bestimmen. Die Einträge des Eigenvektors sind voneinander abhängig und lassen sich dem Entsprechen beliebig definieren. Grundsätzlich wird der maximale Eigenwert zu 1 gesetzt.

$$\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M} \phi_n = 0 \quad (14.16)$$

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 0.475 \\ 0.827 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (14.17)$$

$$\varphi_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.188 \\ -0.908 \end{bmatrix} \quad (14.18)$$

$$\varphi_3 = \begin{bmatrix} 0.547 \\ -1.0 \\ 0.644 \end{bmatrix} \quad (14.19)$$

#### 14.2.4. Modale Analyse

Die Modale Analyse zielt darauf ab, den Mehrmassenschwinger zu entkoppeln. Dazu wird in einem ersten Schritt die Orthogonalitätsbedingung kontrolliert. Diese muss erfüllt sein, um eine Entkoppelung durchzuführen. Siehe Kapitel [12.2.2.4](#) für eine ausführliche Erklärung.

##### 14.2.4.1. Orthogonalitätsbedingung

Angewendet auf die Massenmatrix: Es zeigen sich kleine numerische Unreinheiten, welche vernachlässigt werden können.

$$\varphi_1^T \mathbf{M} \varphi_1 = \left[ \frac{8.77 \cdot 10^3 \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (14.20)$$

$$\varphi_2^T \mathbf{M} \varphi_1 = \left[ -\frac{1.82 \cdot 10^{-12} \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (14.21)$$

$$\varphi_3^T \mathbf{M} \varphi_1 = \left[ -\frac{5.0 \cdot 10^{-12} \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (14.22)$$

$$\varphi_1^T \mathbf{M} \varphi_2 = \left[ -\frac{1.82 \cdot 10^{-12} \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (14.23)$$

$$\varphi_2^T \mathbf{M} \varphi_2 = \left[ \frac{9.47 \cdot 10^3 \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (14.24)$$

$$\varphi_3^T \mathbf{M} \varphi_2 = \left[ \frac{1.91 \cdot 10^{-11} \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (14.25)$$



$$\varpi_1^T \mathbf{M}_{\varpi_3} = \left[ -\frac{5.0 \cdot 10^{-12} \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (14.26)$$

$$\varpi_2^T \mathbf{M}_{\varpi_3} = \left[ \frac{1.91 \cdot 10^{-11} \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (14.27)$$

$$\varpi_3^T \mathbf{M}_{\varpi_3} = \left[ \frac{8.45 \cdot 10^3 \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (14.28)$$

Für die Steifigkeitsmatrix:

$$\varpi_1^T \mathbf{K}_{\varpi_1} = \left[ \frac{2.44 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (14.29)$$

$$\varpi_2^T \mathbf{K}_{\varpi_1} = \left[ \frac{1.88 \cdot 10^{-9} \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (14.30)$$

$$\varpi_3^T \mathbf{K}_{\varpi_1} = \left[ \frac{6.26 \cdot 10^{-10} \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (14.31)$$

$$\varpi_1^T \mathbf{K}_{\varpi_2} = \left[ \frac{1.88 \cdot 10^{-9} \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (14.32)$$

$$\varpi_2^T \mathbf{K}_{\varpi_2} = \left[ \frac{1.84 \cdot 10^6 \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (14.33)$$

$$\varpi_3^T \mathbf{K}_{\varpi_2} = \left[ \frac{4.83 \cdot 10^{-9} \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (14.34)$$

$$\varpi_1^T \mathbf{K}_{\varpi_3} = \left[ \frac{6.26 \cdot 10^{-10} \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (14.35)$$

$$\varpi_2^T \mathbf{K}_{\varpi_3} = \left[ \frac{4.83 \cdot 10^{-9} \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (14.36)$$

$$\varpi_3^T \mathbf{K}_{\varpi_3} = \left[ \frac{3.47 \cdot 10^6 \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (14.37)$$

#### 14.2.4.2. Modal- und Spektralmatrix

Mittels der Modal- und Spektralmatrix lassen sich die generalisierten Grössen effizient ermitteln.

$$\text{Modalmatrix} = \Phi \quad (14.38)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.4752 & 1.0 & 0.5468 \\ 0.827 & 0.1885 & -1.0 \\ 1.0 & -0.9076 & 0.6441 \end{bmatrix} \quad (14.39)$$

$$\text{Spektralmatrix} = \Omega^2 \quad (14.40)$$

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \frac{27.84}{\text{s}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{194.4}{\text{s}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{410.8}{\text{s}^2} \end{bmatrix} \quad (14.41)$$

#### 14.2.4.3. Generalisierte Grössen

Zur Reduktion des Rechenaufwands werden die numerischen Unreinheiten zu Null gesetzt.

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} \frac{8774.2\text{Ns}^2}{\text{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9472.3\text{Ns}^2}{\text{m}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8452.9\text{Ns}^2}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (14.42)$$

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \frac{2.4429 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1.841 \cdot 10^6 \text{N}}{\text{m}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3.4725 \cdot 10^6 \text{N}}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (14.43)$$

#### 14.2.4.4. Modale Höhen

Die modalen Höhen bestimmen sich aus Gleichung 14.44:

$$H_n = \frac{L_n^\theta}{L_n} \quad (14.44)$$

$$L_n = \phi_n^T \cdot \mathbf{M} \mathbf{1} \quad (14.45)$$

$$L_n^\theta = \sum_{j=1}^N H_j \cdot m_j \cdot \phi_{jn} \quad (14.46)$$

Angewendet auf das Beispiel folgt:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \quad (14.47)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{H_1 m_1 \phi_{11} + H_2 m_2 \phi_{21} + H_3 m_3 \phi_{31}}{m_1 \phi_{11} + m_1 \phi_{21} + m_1 \phi_{31}} \\ \frac{H_1 m_1 \phi_{12} + H_2 m_2 \phi_{22} + H_3 m_3 \phi_{32}}{m_2 \phi_{12} + m_2 \phi_{22} + m_2 \phi_{32}} \\ \frac{H_1 m_1 \phi_{13} + H_2 m_2 \phi_{23} + H_3 m_3 \phi_{33}}{m_3 \phi_{13} + m_3 \phi_{23} + m_3 \phi_{33}} \end{bmatrix} \quad (14.48)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2.78\text{m} \\ 8.25\text{m} \\ 3.93\text{m} \end{bmatrix} \quad (14.49)$$

Modalen Höhen kleiner als null sind zu vernachlässigen.

#### 14.2.4.5. Kontrolle der modalen Transformation

Die Eigenkreisfrequenzen ändern sich durch die Transformation nicht.

$$\omega_1 = \frac{5.28}{\text{s}} \quad (14.50)$$

$$\omega_{1\text{modal}} = \frac{5.28}{\text{s}} \quad (14.51)$$

$$\omega_2 = \frac{13.94}{s} \quad (14.52)$$

$$\omega_{2modal} = \frac{13.94}{s} \quad (14.53)$$

$$\omega_3 = \frac{20.27}{s} \quad (14.54)$$

$$\omega_{3modal} = \frac{20.27}{s} \quad (14.55)$$

#### 14.2.4.6. Partizipationsfaktor $\Gamma$

Die Verteilung des Partizipationsfaktor gibt einen direkten Hinweis, welcher Eigenmode an der Gesamtantwort den grössten Einfluss (beteiligt bzw. partizipiert) hat.

$$\Gamma_n = \frac{\Phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{1}}{\Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_n} \quad (14.56)$$

In allgemeiner Form lautet der Partizipationsfaktor:

$$\Gamma_n = \frac{\Phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{r}^*}{\Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_n} \quad (14.57)$$

$\mathbf{r}^*$  beschreibt die Starrkörperverschiebung infolge der Erdbebenanregung  $u_g$  am Fusspunkt des Gesamtsystems.

$$\mathbf{r}^* = \begin{bmatrix} FHG_1 \\ FHG_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(0) \\ \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1} \quad (14.58)$$

Die Partizipationsmatrix lässt sich direkt durch folgende Gleichung ermitteln:

$$\Gamma = M^{\star-1} \cdot \Phi^T \cdot M \cdot \mathbf{1} \quad (14.59)$$

Gelöst mit Gleichung [14.59](#):

$$\square = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.35 \\ 0.101 \end{bmatrix} \quad (14.60)$$

Gelöst mit Gleichung [14.57](#):

$$\Gamma_1 = \frac{m_1\phi_{11} + m_2\phi_{21} + m_3\phi_{31}}{m_1\phi_{11}^2 + m_2\phi_{21}^2 + m_3\phi_{31}^2} \quad (14.61)$$

$$\Gamma_1 = 1.25 \quad (14.62)$$

$$\Gamma_2 = \frac{m_1\phi_{12} + m_2\phi_{22} + m_3\phi_{32}}{m_1\phi_{12}^2 + m_2\phi_{22}^2 + m_3\phi_{32}^2} \quad (14.63)$$

$$\Gamma_2 = 0.35 \quad (14.64)$$

$$\Gamma_3 = \frac{m_1\phi_{13} + m_2\phi_{23} + m_3\phi_{33}}{m_1\phi_{13}^2 + m_2\phi_{23}^2 + m_3\phi_{33}^2} \quad (14.65)$$

$$\Gamma_3 = 0.101 \quad (14.66)$$

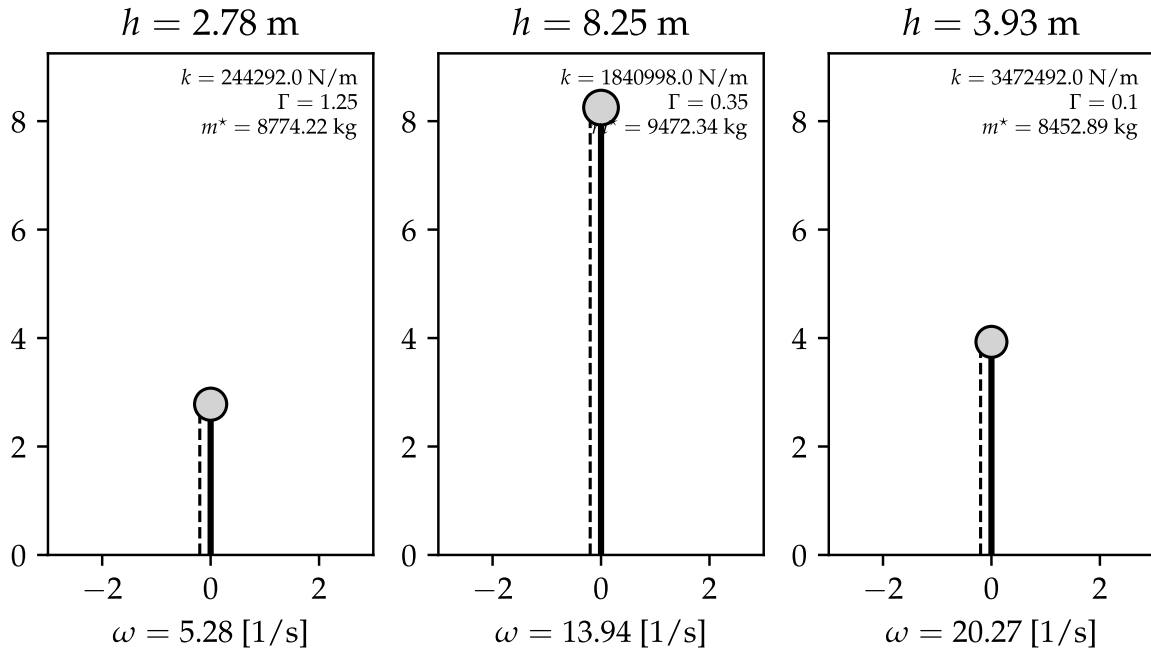


Abbildung 14.4.: Darstellung der entkoppelten Einmassenschwinger

### 14.2.5. Elastisches Antwortspektrum

Aus der Aufgabenstellung darf nach [1] Abs. 16.2.3.1 Kurve  $E$  gewählt werden.

#### 14.2.5.1. Grundschiwingzeit

Die Grundschiwingzeit kann anhand der bereits ermittelten Eigenkreisfrequenzen ermittelt werden.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (14.67)$$

$$T_1 = 1.19\text{s} \quad (14.68)$$

$$T_2 = 0.451\text{s} \quad (14.69)$$

$$T_3 = 0.31\text{s} \quad (14.70)$$

#### 14.2.5.2. Elastisches Antwortspektrum

Es wird für sämtliche Eigenperioden die Pseudobeschleunigung bestimmt. Siehe dazu [1].

---


$$\begin{aligned} S &= 1.7 \\ T_C &= 0.5\text{s} \\ \eta &= 1 \end{aligned}$$


---

---


$$\begin{aligned} T_B &= 0.1\text{s} \\ T_D &= 2.0\text{s} \end{aligned}$$


---

$$S_e = \frac{2.5ST_C a_{gd}\eta}{T} \quad (14.71)$$

$$S_{e1} = \frac{1.78\text{m}}{\text{s}^2} \quad (14.72)$$

---


$$\begin{aligned} S &= 1.7 \\ T_C &= 0.5\text{s} \\ \eta &= 1 \end{aligned}$$


---

---


$$\begin{aligned} T_B &= 0.1\text{s} \\ T_D &= 2.0\text{s} \end{aligned}$$


---

$$S_e = 2.5S a_{gd}\eta \quad (14.73)$$

$$S_{e2} = \frac{4.25\text{m}}{\text{s}^2} \quad (14.74)$$

---


$$\begin{aligned} S &= 1.7 \\ T_C &= 0.5\text{s} \\ \eta &= 1 \end{aligned}$$


---

---


$$\begin{aligned} T_B &= 0.1\text{s} \\ T_D &= 2.0\text{s} \end{aligned}$$


---

$$S_e = 2.5S a_{gd}\eta \quad (14.75)$$

$$S_{e3} = \frac{4.25\text{m}}{\text{s}^2} \quad (14.76)$$

### 14.2.6. Maximale Deformation

Die maximale Deformation resultiert aus der Beschleunigung  $S_e$  und der Eigenkreisfrequenz  $\omega_n^2$ . Für die modalen EMS gilt es diese anhand der Partizipationsfaktoren zu gewichten. Zur effektiven Bestimmung der Auslenkung sind die Resultate der EMS mittels SRSS-Regel zu überlagern.

$$q_{1max} = \frac{\Gamma_1 S_{e1}}{\omega_1^2} \quad (14.77)$$

$$q_{1max} = 0.0803\text{m} \quad (14.78)$$

$$q_{2max} = \frac{\Gamma_2 S_{e2}}{\omega_2^2} \quad (14.79)$$

$$q_{2max} = 0.00765\text{m} \quad (14.80)$$

$$q_{3max} = \frac{\Gamma_3 S_{e3}}{\omega_3^2} \quad (14.81)$$

$$q_{3max} = 0.00105\text{m} \quad (14.82)$$

Um die Entkoppelung rückzuführen, gilt es die erhaltenen Resultate zu überlagern. Dabei gibt es unterschiedliche Ansätze. Bei weit auseinander liegenden Eigenfrequenzen kann die SRSS-Überlagerung (Square-root of the sum of squares) verwendet werden.

$$u_{max} = \sqrt{\sum_{n=1}^2 (q_n \cdot \phi_n)^2} \quad (14.83)$$

$$\mathbf{u}_{max} = \begin{bmatrix} 0.0389\text{m} \\ 0.0664\text{m} \\ 0.0806\text{m} \end{bmatrix} \quad (14.84)$$

Stephan, wieso multiplizierst du die SRSS- Überlagerung nochmals mit  $\phi_1$



$$\left( (\Phi_1 \cdot q_{1\_max})^2 + (\Phi_2 \cdot q_{2\_max})^2 + (\Phi_2 \cdot q_{2\_max})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.059 \\ 0.077 \\ 0.088 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$u_{1\_max} := q_{1\_max} \cdot \Phi_1 = \begin{bmatrix} 0.058 \\ 0.077 \\ 0.088 \end{bmatrix} \text{ m}$$

Abbildung 14.5.: Frage

## 14.2.7. Maximale Schnittkräfte

### 14.2.7.1. Querkräfte

Die Einwirkungen resultieren aus der Masse multipliziert mit der Beschleunigung aus dem Antwortspektrum. Dazu sind in einem ersten Schritt die beiden entkoppelten EMS voneinander getrennt zu betrachten. Die Überlagerung erfolgt erst bei den ermittelten Querkräften.

$$\mathbf{M}_n = \Gamma \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_n \quad (14.85)$$

$$F_{nmax} = \mathbf{M}_n \cdot S_{en} \quad (14.86)$$

Aus dem ersten EMS folgt:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3569.5 \text{Ns}^2}{\text{m}} \\ \frac{5177.3 \text{Ns}^2}{\text{m}} \\ \frac{5008.3 \text{Ns}^2}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (14.87)$$

$$\mathbf{F}_{1max} = \begin{bmatrix} 6370.4 \text{N} \\ 9239.7 \text{N} \\ 8938.1 \text{N} \end{bmatrix} \quad (14.88)$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 24548.0 \text{N} \\ 18178.0 \text{N} \\ 8938.1 \text{N} \end{bmatrix} \quad (14.89)$$

Aus dem zweiten EMS folglich:

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2098.0\text{Ns}^2}{\text{m}} \\ 329.53\text{Ns}^2 \\ -\frac{1269.4\text{Ns}^2}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (14.90)$$

$$\mathbf{F}_{2max} = \begin{bmatrix} 8916.4\text{N} \\ 1400.5\text{N} \\ -5394.8\text{N} \end{bmatrix} \quad (14.91)$$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 4922.1\text{N} \\ -3994.4\text{N} \\ -5394.8\text{N} \end{bmatrix} \quad (14.92)$$

Aus dem dritten EMS folglich:

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} \frac{332.51\text{Ns}^2}{\text{m}} \\ -\frac{506.79\text{Ns}^2}{\text{m}} \\ \frac{261.12\text{Ns}^2}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (14.93)$$

$$\mathbf{F}_{3max} = \begin{bmatrix} 1413.2\text{N} \\ -2153.9\text{N} \\ 1109.8\text{N} \end{bmatrix} \quad (14.94)$$

$$\mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} 369.07\text{N} \\ -1044.1\text{N} \\ 1109.8\text{N} \end{bmatrix} \quad (14.95)$$

Maximale Querkraft aus Überlagerung beider EMS mittels SRSS-Regel.

$$V_{max} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} \quad (14.96)$$

$$\mathbf{V}_{max} = \begin{bmatrix} 2.5 \cdot 10^4\text{N} \\ 1.86 \cdot 10^4\text{N} \\ 1.05 \cdot 10^4\text{N} \end{bmatrix} \quad (14.97)$$

#### 14.2.7.2. Biegemomente

Die Biegemomente lassen sich abschliessend anhand der Querkräfte bestimmen.

### 14.2.7.3. Normalkräfte

Die Normalkräfte resultieren aus den Punktmassen.

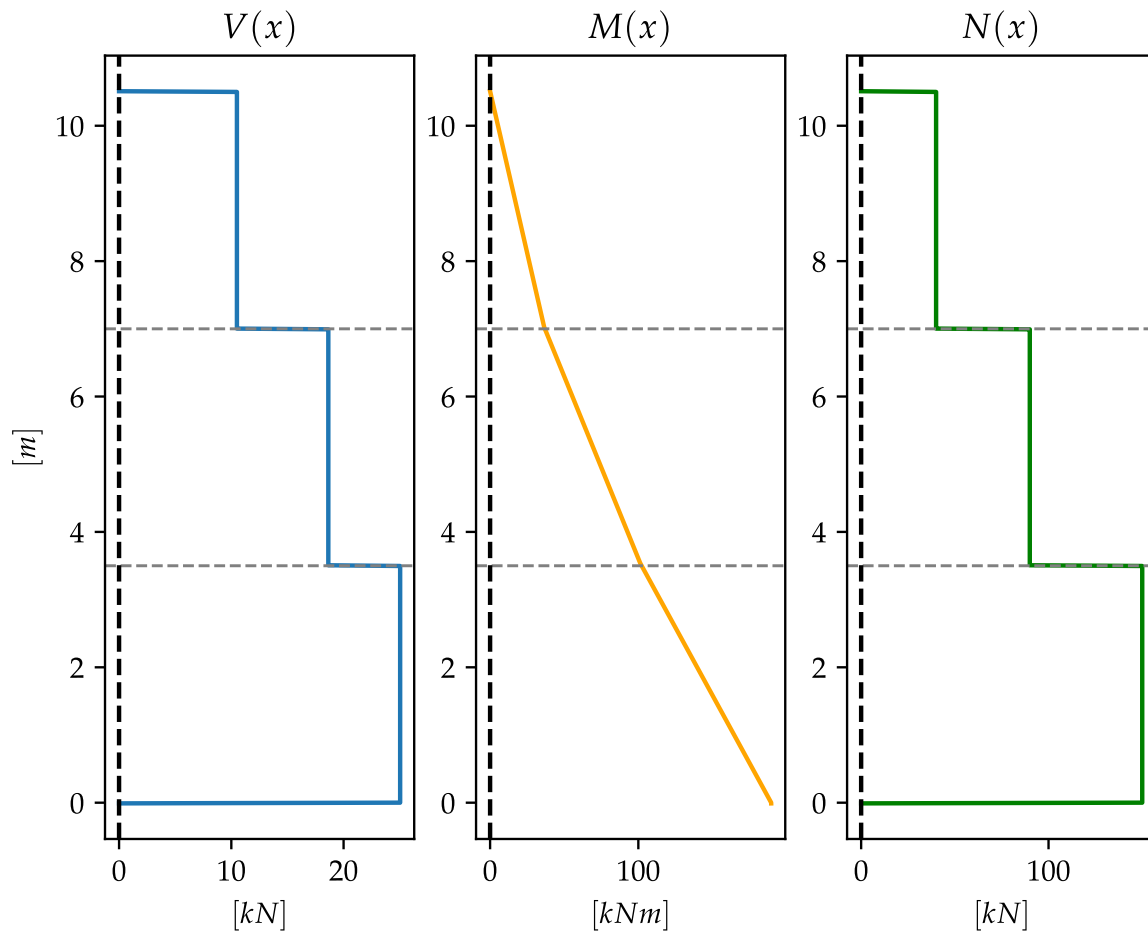


Abbildung 14.6.: Maximale Schnittgrößen

# 15. Beispiel: Antwortspektrenverfahren an einem Rahmen

## 15.1. Aufgabenstellung

Dies ist eine Weiterführung des bereits bekannten Rahmentragwerks aus Kapitel 11.

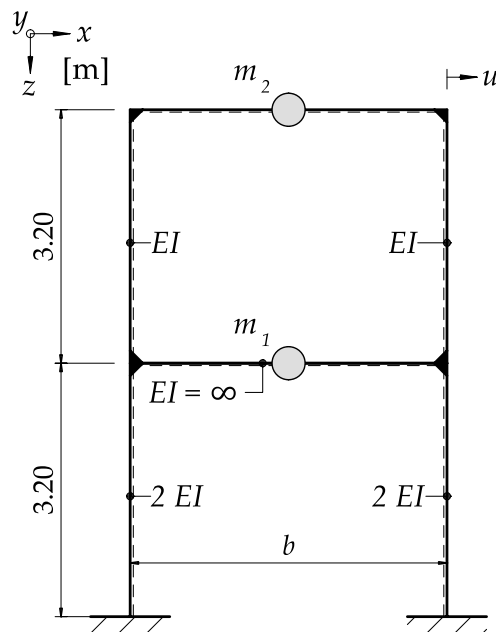


Abbildung 15.1.: Statisches System des Rahmentragwerks

Gesucht:

- Eigenkreisfrequenz  $\omega$
- Eigenformen - Normierung auf

$$\phi_1^T = [ \quad 1 ]$$

$$\phi_2^T = [ \quad 1 ]$$

- Skizze der Eigenformen
- Statische Ersatzkräfte mit elastischem Antwortspektrum aus [1] Abs. 16.2.3 auf Stockwerksebene. Überlagerung mit der SRSS-Methode.

Gegeben:

- Dehnsteifigkeit aller Stäbe  $E \cdot A = \infty$
- Baugrundklasse B
- Erdbebenzone Z2

Tabelle 15.1.: Verwendete Parameter

$E = \frac{30000\text{N}}{\text{mm}^2}$	$H = 3.2\text{m}$
$I = 20000000000\text{mm}^4$	$m_1 = \frac{40000\text{Ns}^2}{\text{m}}$
$m_2 = \frac{20000\text{Ns}^2}{\text{m}}$	

## 15.2. Musterlösung

Die Lösung deckt sich mit Kapitel [11.2](#) bis zu den ermittelten Eigenformen.

### 15.2.1. Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$

#### 15.2.1.1. Horizontale Steifigkeit

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (15.1)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1.31836 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} & -\frac{4.39453 \cdot 10^7 \text{N}}{\text{m}} \\ -\frac{4.39453 \cdot 10^7 \text{N}}{\text{m}} & \frac{4.39453 \cdot 10^7 \text{N}}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (15.2)$$

### 15.2.2. Eigenvektoren

#### 15.2.2.1. Massenmatrix $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (15.3)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{40000 \text{Ns}^2}{\text{m}} & 0 \\ 0 & \frac{20000 \text{Ns}^2}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (15.4)$$

#### 15.2.2.2. Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_1 = \frac{33.1}{\text{s}} \quad (15.5)$$

$$\omega_2 = \frac{66.3}{\text{s}} \quad (15.6)$$

### 15.2.2.3. Eigenvektoren $\phi$

$$\phi_n = \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \end{bmatrix} \quad (15.7)$$

$$[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] \cdot \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \end{bmatrix} = 0 \quad (15.8)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-k_2 m_2 \phi_{21} + \frac{\phi_{11} \left( -k_2 m_1 + m_2 (k_1 + k_2) + \sqrt{k_1^2 m_2^2 - 2k_1 k_2 m_1 m_2 + 2k_1 k_2 m_2^2 + k_2^2 m_1^2 + 2k_2^2 m_1 m_2 + k_2^2 m_2^2} \right)}{2}}{m_2} \\ \frac{-k_2 m_1 \phi_{11} + \frac{\phi_{21} \left( k_2 m_1 - m_2 (k_1 + k_2) + \sqrt{k_1^2 m_2^2 - 2k_1 k_2 m_1 m_2 + 2k_1 k_2 m_2^2 + k_2^2 m_1^2 + 2k_2^2 m_1 m_2 + k_2^2 m_2^2} \right)}{2}}{m_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15.9)$$

$$\square_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (15.10)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-k_2 m_2 \phi_{22} + \frac{\phi_{12} \left( -k_2 m_1 + m_2 (k_1 + k_2) - \sqrt{k_1^2 m_2^2 - 2k_1 k_2 m_1 m_2 + 2k_1 k_2 m_2^2 + k_2^2 m_1^2 + 2k_2^2 m_1 m_2 + k_2^2 m_2^2} \right)}{2}}{m_2} \\ \frac{-k_2 m_1 \phi_{12} + \frac{\phi_{22} \left( k_2 m_1 - m_2 (k_1 + k_2) - \sqrt{k_1^2 m_2^2 - 2k_1 k_2 m_1 m_2 + 2k_1 k_2 m_2^2 + k_2^2 m_1^2 + 2k_2^2 m_1 m_2 + k_2^2 m_2^2} \right)}{2}}{m_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15.11)$$

$$\square_2 = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (15.12)$$

### 15.2.2.4. Orthogonalitätsbedingung

$$\square_1^T \mathbf{M}_{\square_1} = \left[ \frac{3.0 \cdot 10^4 \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (15.13)$$

$$\square_2^T \mathbf{M}_{\square_2} = \left[ \frac{6.0 \cdot 10^4 \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (15.14)$$

$$\square_2^T \mathbf{M}_{\square_1} = [0] \quad (15.15)$$

$$\square_1^T \mathbf{M}_{\square_2} = [0] \quad (15.16)$$

Für die Steifigkeitsmatrix:

$$\varphi_1^T \mathbf{K} \varphi_1 = \left[ \frac{3.3 \cdot 10^7 \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (15.17)$$

$$\varphi_2^T \mathbf{K} \varphi_2 = \left[ \frac{2.64 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (15.18)$$

$$\varphi_2^T \mathbf{K} \varphi_1 = [0] \quad (15.19)$$

$$\varphi_1^T \mathbf{K} \varphi_2 = [0] \quad (15.20)$$

#### 15.2.2.5. Eigenformen

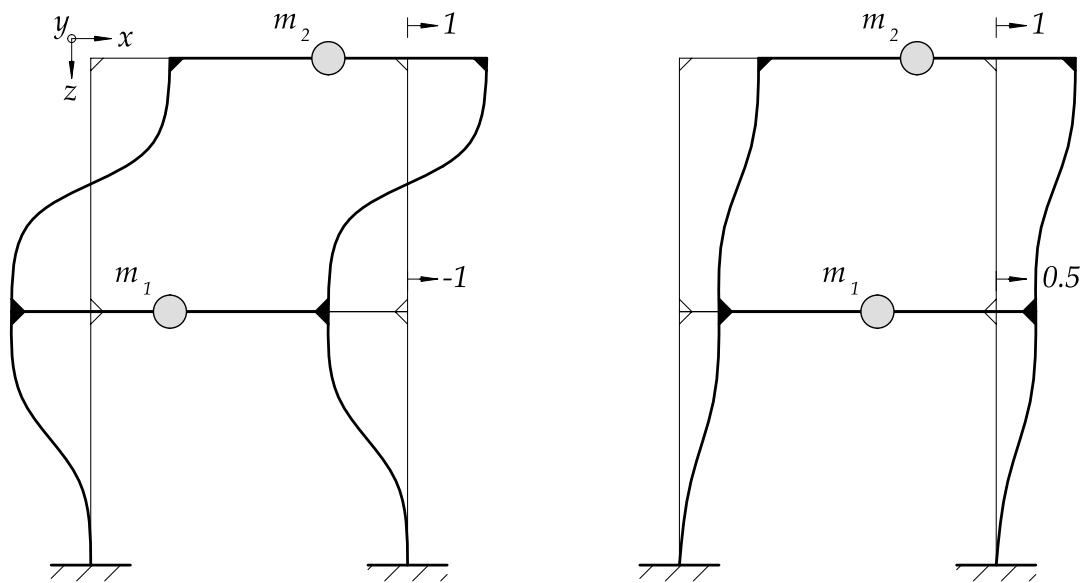


Abbildung 15.2.: Die beiden Eigenformen skizziert

#### 15.2.3. Modale Analyse

Die Bewegungsgleichung für einen ungedämpften, frei schwingenden Mehrmassenschwinger lässt sich folgend beschreiben:



$$\mathbf{M}\mathbf{u}''(\mathbf{t}) + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (15.21)$$

Die Matrix-Gleichung beschreibt ein System aus Differentialgleichungen. Die Modale Analyse zielt darauf ab, diese zu entkoppeln. Bezogen auf den Mehrmassenschwinger heisst eine Entkoppelung, dass diese in Einmassenschwinger aufgeteilt werden. Dies wird nun schrittweise durchgeführt.

### 15.2.3.1. Modal- und Spektralmatrix

Mittels der Modal- und Spektralmatrix können die generalisierten Grössen ermittelt werden. Diese sind die Eigenschaften der einzelnen Einmassenschwinger. Die generalisierten Werte besitzen keine physikalische Bedeutung, sie sind abhängig von der Wahl der Eigenvektoren, welche bekanntlich von der Normierung abhängen.

Anhand der Bewegungsgleichung können die generalisierten Grössen bestimmt werden, es gilt:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{u}''(\mathbf{t}) + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{u}(\mathbf{t}) = 0 \quad (15.22)$$

$$\mathbf{M}^* \mathbf{u}''(\mathbf{t}) + \mathbf{K}^* \mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \quad (15.23)$$

Alle  $N$ -Eigenwerte und alle  $N$ -Eigenvektoren können kompakt mit Matrizen ausgedrückt werden:

$$\text{Modalmatrix} = \Phi \quad (15.24)$$

$$\square = \begin{bmatrix} 0.5 & -1.0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (15.25)$$

$$\text{Spektralmatrix} = \Omega^2 \quad (15.26)$$

$$\square^2 = \begin{bmatrix} \frac{1099.0}{\text{s}^2} & 0 \\ 0 & \frac{4395.0}{\text{s}^2} \end{bmatrix} \quad (15.27)$$

### 15.2.3.2. Generalisierte Grössen

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} \frac{30000.0\text{Ns}^2}{\text{m}} & 0 \\ 0 & \frac{60000.0\text{Ns}^2}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (15.28)$$

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \frac{3.2959 \cdot 10^7 \text{N}}{\text{m}} & 0 \\ 0 & \frac{2.6367 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (15.29)$$

### 15.2.3.3. Kontrolle der modalen Transformation

Durch die Transformation in generalisierte Grössen dürfen sich die Eigenkreisfrequenzen nicht ändern, da die entkoppelten EMS jeweils eine dieser beschreibt.

Durch Einsetzen der modalen Grössen in Gleichung [15.30](#) kann mit den ermittelten Kreisfrequenzen kontrolliert werden.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (15.30)$$

$$\omega_1 = \frac{33.1}{\text{s}} \quad (15.31)$$

$$\omega_{1modal} = \frac{33.1}{\text{s}} \quad (15.32)$$

$$\omega_2 = \frac{66.29}{\text{s}} \quad (15.33)$$

$$\omega_{2modal} = \frac{66.29}{\text{s}} \quad (15.34)$$

#### 15.2.3.4. Partizipationsfaktor $\Gamma$

Durch die modalen Grössen wissen wir wie die entkoppelten Einmassenschwinger definiert sind, bzw. welche Eigenschaften diese besitzen. Die Verteilung des Partizipationsfaktor gibt einen direkten Hinweis, welcher Eigenmode an der Gesamtantwort den grössten Einfluss (beteiligt bzw. partizipiert) hat.

$$\Gamma_n = \frac{\Phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{1}}{\Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_n} \quad (15.35)$$

In allgemeiner Form lautet der Partizipationsfaktor:

$$\Gamma_n = \frac{\Phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{r}^*}{\Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_n} \quad (15.36)$$

$\mathbf{r}^*$  beschreibt die Starrkörperverschiebung infolge der Erdbebenanregung  $u_g$  am Fusspunkt des Gesamtsystems.

$$\mathbf{r}^* = \begin{bmatrix} FHG_1 \\ FHG_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(0) \\ \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1} \quad (15.37)$$

Die Partizipationsmatrix lässt sich direkt durch folgende Gleichung ermitteln:

$$\Gamma = \mathbf{M}^{*-1} \cdot \Phi^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{1} \quad (15.38)$$

Gelöst mit Gleichung 15.38:

$$\square = \begin{bmatrix} 1.33 \\ -0.333 \end{bmatrix} \quad (15.39)$$

Gelöst mit Gleichung 15.36:

$$\Gamma_1 = \frac{m_1 \phi_{11} + m_2 \phi_{21}}{m_1 \phi_{11}^2 + m_2 \phi_{21}^2} \quad (15.40)$$

$$\Gamma_1 = 1.33 \quad (15.41)$$

$$\Gamma_2 = \frac{m_1 \phi_{12} + m_2 \phi_{22}}{m_1 \phi_{12}^2 + m_2 \phi_{22}^2} \quad (15.42)$$

$$\Gamma_2 = -0.333 \quad (15.43)$$

$$\varphi_n^2 = \begin{bmatrix} 1.78 \\ 0.111 \end{bmatrix} \quad (15.44)$$

#### 15.2.3.5. Effektive Modale Massen

Durch Multiplikation der modalen Massen mit dem Partizipationsfaktor resultieren die effektiven modalen Massen.

$$m_{1eff} = \frac{5.33 \cdot 10^4 \text{Ns}^2}{m} \quad (15.45)$$

$$m_{2eff} = \frac{6.67 \cdot 10^3 \text{Ns}^2}{m} \quad (15.46)$$

$$m_{tot} = \frac{6.0 \cdot 10^4 \text{Ns}^2}{m} \quad (15.47)$$

#### 15.2.3.6. Modale Höhen

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H \\ H \end{bmatrix} \quad (15.48)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{Hm_1\phi_{11}+Hm_2\phi_{21}}{m_1\phi_{11}+m_2\phi_{21}} \\ \frac{Hm_1\phi_{12}+Hm_2\phi_{22}}{m_1\phi_{12}+m_2\phi_{22}} \end{bmatrix} \quad (15.49)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 3.2m \\ 3.2m \end{bmatrix} \quad (15.50)$$

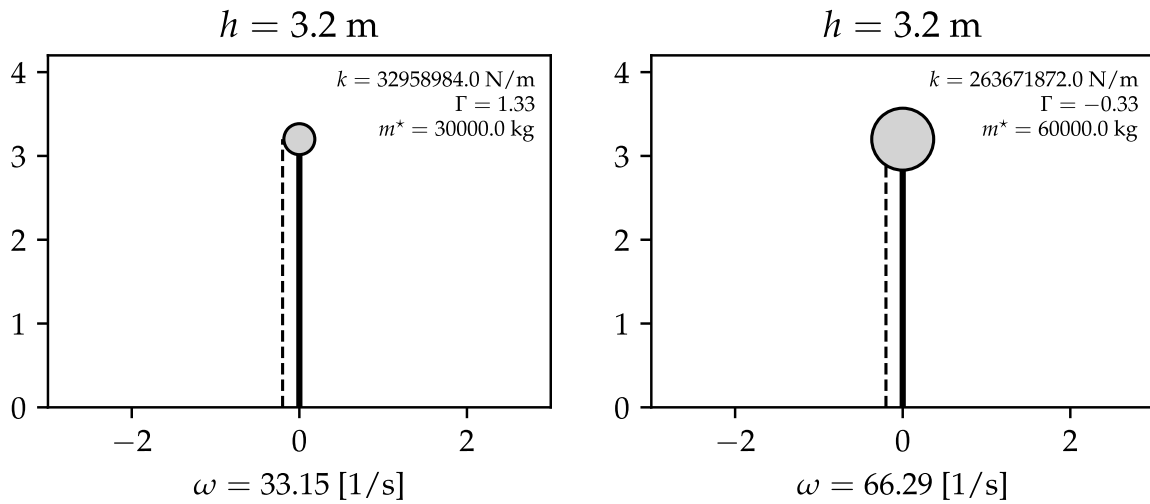


Abbildung 15.3.: Darstellung der entkoppelten Einmassenschwinger

#### 15.2.4. Elastisches Antwortspektrum

Dem Vorgehen nach [1] Abs. 16.2.3.1 entsprechend, werden folgende Parameter definiert:

- Baugrundklasse B
- Erdbebenzone Z2
- $a_{gd} = 1.0 \text{ M/s}^2$

##### 15.2.4.1. Grundschwingzeit

Die Grundschwingzeit kann anhand der bereits ermittelten Eigenkreisfrequenzen ermittelt werden.

$$T_1 = 0.19\text{s} \quad (15.51)$$

$$T_2 = 0.0948\text{s} \quad (15.52)$$

---

#### 15.2.4.2. Elastisches Antwortspektrum

---

$S = 1.2$	$T_B = 0.08\text{s}$
$T_C = 0.35\text{s}$	$T_D = 2.0\text{s}$
$\eta = 1$	

---

$$S_e = 2.5S a_{gd}\eta \quad (15.53)$$

$$S_{e1} = \frac{3.0\text{m}}{\text{s}^2} \quad (15.54)$$

$S = 1.2$	$T_B = 0.08\text{s}$
$T_C = 0.35\text{s}$	$T_D = 2.0\text{s}$
$\eta = 1$	

---

$$S_e = 2.5S a_{gd}\eta \quad (15.55)$$

$$S_{e2} = \frac{3.0\text{m}}{\text{s}^2} \quad (15.56)$$

#### 15.2.4.3. Einwirkungen

$$F_{11} = S_{e1}\gamma_1 m_{1eff}\phi_{11} \quad (15.57)$$

$$F_{21} = S_{e1}\gamma_1 m_{2eff}\phi_{21} \quad (15.58)$$

$$F_{12} = S_{e2}\gamma_2 m_{1eff}\phi_{12} \quad (15.59)$$

$$F_{22} = S_{e2}\gamma_2 m_{2eff}\phi_{22} \quad (15.60)$$

$$\mathbf{F}_{jn} = \begin{bmatrix} 1.07 \cdot 10^5 \text{N} & 5.33 \cdot 10^4 \text{N} \\ 5.33 \cdot 10^4 \text{N} & -6.67 \cdot 10^3 \text{N} \end{bmatrix} \quad (15.61)$$

#### 15.2.4.4. Deformation

$$u_{11} = \frac{S_{e1}\gamma_1\phi_{11}}{\omega_1^2} \quad (15.62)$$

$$u_{21} = \frac{S_{e1}\gamma_1\phi_{21}}{\omega_1^2} \quad (15.63)$$

$$u_{12} = \frac{S_{e2}\gamma_2\phi_{12}}{\omega_2^2} \quad (15.64)$$

$$u_{22} = \frac{S_{e2}\gamma_2\phi_{22}}{\omega_2^2} \quad (15.65)$$

$$\mathbf{u}_{jn} = \begin{bmatrix} 1.82\text{mm} & 0.228\text{mm} \\ 0.228\text{mm} & -0.228\text{mm} \end{bmatrix} \quad (15.66)$$

#### 15.2.5. Überlagerung der EMS

Um die Entkoppelung rückzuführen, gilt es die erhaltenen Resultate zu überlagern. Dabei gibt es unterschiedliche Ansätze. Bei weit auseinander liegenden Eigenfrequenzen kann die SRSS-Überlagerung verwendet werden.

$$V_{b2max} = \sqrt{\sum_{n=1}^2 f_{j,n}^2} \quad (15.67)$$

$$V_{b1max} = \sqrt{F_{11}^2 + F_{12}^2} \quad (15.68)$$

$$V_{b1max} = 1.19 \cdot 10^5 \text{N} \quad (15.69)$$

$$V_{b2max} = \sqrt{F_{21}^2 + F_{22}^2} \quad (15.70)$$

$$V_{b2max} = 2.75 \cdot 10^4 \text{N} \quad (15.71)$$

Deformationen:

$$u_{bn} = \sqrt{\sum_{n=1}^2 u_{j,n}^2} \quad (15.72)$$

$$u_{b1} = \sqrt{u_{11}^2 + u_{12}^2} \quad (15.73)$$

$$u_{b1} = 1.83\text{mm} \quad (15.74)$$

$$u_{b2} = \sqrt{u_{21}^2 + u_{22}^2} \quad (15.75)$$

$$u_{b2} = 3.65\text{mm} \quad (15.76)$$



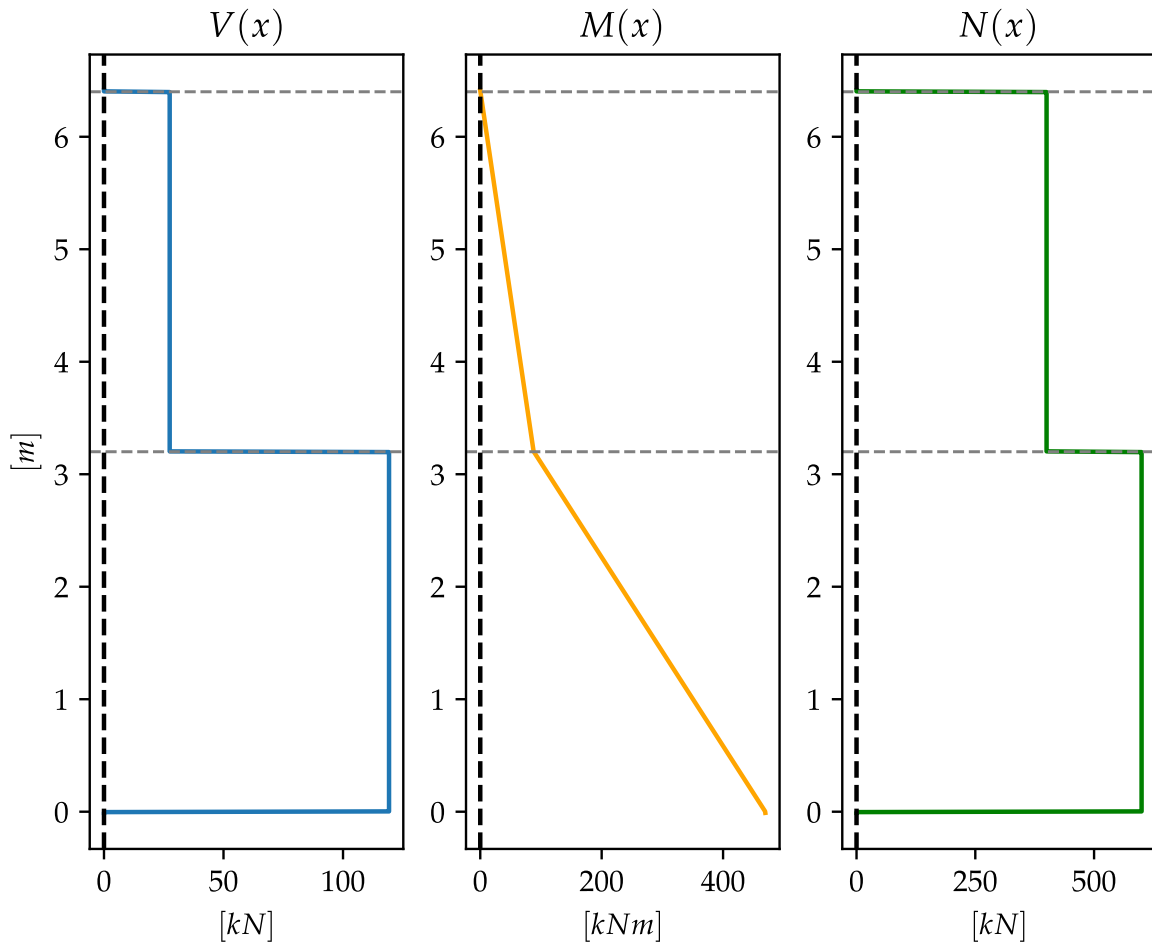


Abbildung 15.4.: Maximale Schnittgrößen

Die Schnittgrößen in Abbildung 15.4 sind als umhüllende Größen zu interpretieren. Aufgrund der Überlagerung der unterschiedlichen Schwingformen mittels SRSS-Regel werden die Schnittgrößen jeweils addiert, ohne Berücksichtigung der Vorzeichen.

# 16. Beispiel: Antwortspektrenverfahren an einem zweistöckigen Gebäude

## 16.1. Aufgabenstellung

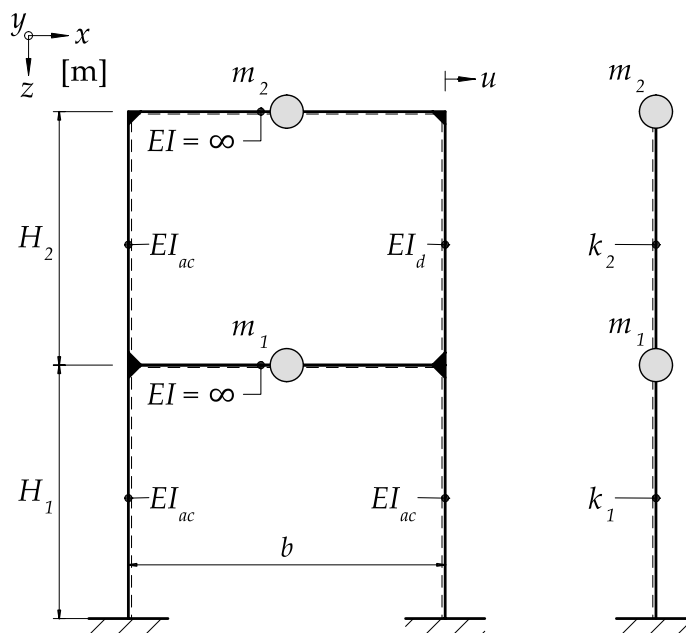


Abbildung 16.1.: Statisches System des zweistöckigen Gebäudes

Gesucht:

- Eigenfrequenzen  $\omega_n$
- Darstellung der Eigenformen
- Modal- und Spektralmatrix
- Maximale Gesamtverformung mittels SRSS-Kombinationsregel aus dem Antwortspektrum der Pseudobeschleunigung.
- Resultierende Schnittgrößen

Gegeben:

- Baugrundklasse  $E$
- Erdbebenzone  $Z2$

Tabelle 16.1.: Parameter der Aufgabenstellung

$EI_{ac} = 550000.0\text{m}^2\text{N}$	$EI_d = 250000.0\text{m}^2\text{N}$
$H_1 = 3.81\text{m}$	$H_2 = 3\text{m}$
$m_1 = \frac{2100\text{Ns}^2}{\text{m}}$	$m_2 = \frac{4800\text{Ns}^2}{\text{m}}$

## 16.2. Musterlösung

### 16.2.1. Massenmatrix M

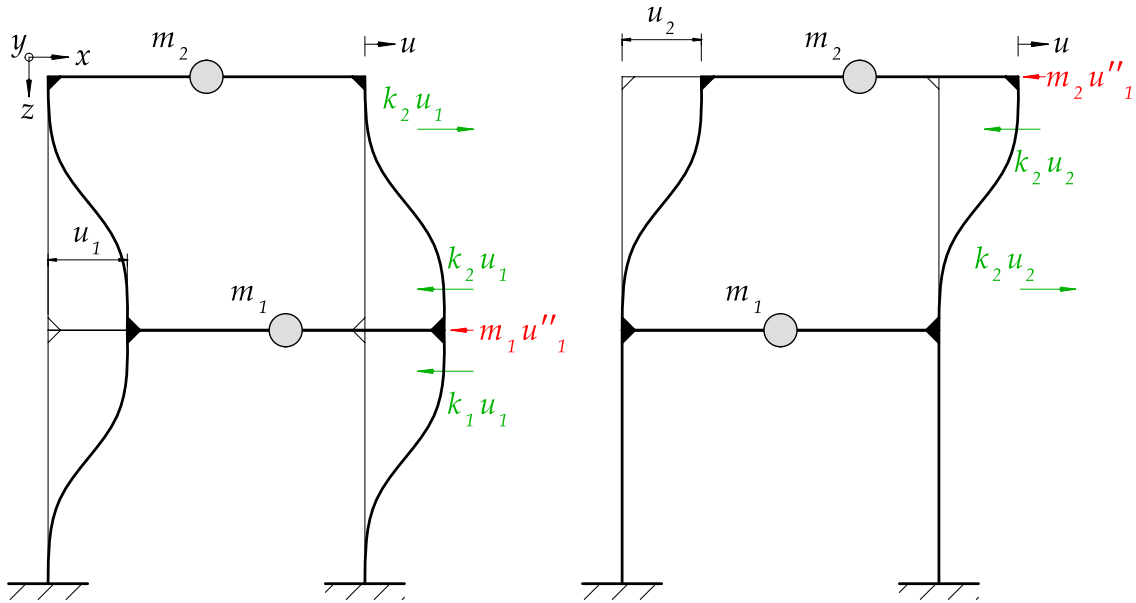


Abbildung 16.2.: Auslenkung der Massen zur Ermittlung der Matrizen

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (16.1)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{2100\text{Ns}^2}{\text{m}} & 0 \\ 0 & \frac{4800\text{Ns}^2}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (16.2)$$

### 16.2.2. Steifigkeitsmatrix K

#### 16.2.2.1. Steifigkeit der Stockwerke

Die Steifigkeit des Systems in Abbildung 16.1 entspricht der Geschosssteifigkeit. Die Geschosssteifigkeit bestimmt sich aus der Addition der einzelnen Stützensteifigkeiten.

$$k_1 = \frac{24EI_{ac}}{H_1^3} \quad (16.3)$$

$$k_1 = \frac{2.39 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} \quad (16.4)$$

$$k_2 = \frac{12EI_{ac}}{H_2^3} + \frac{12EI_d}{H_2^3} \quad (16.5)$$

$$k_2 = \frac{3.56 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} \quad (16.6)$$

Abgefüllt in die Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (16.7)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_{ac}}{H_2^3} + \frac{24EI_{ac}}{H_1^3} + \frac{12EI_d}{H_2^3} & -\frac{12EI_{ac}}{H_2^3} - \frac{12EI_d}{H_2^3} \\ -\frac{12EI_{ac}}{H_2^3} - \frac{12EI_d}{H_2^3} & \frac{12EI_{ac}}{H_2^3} + \frac{12EI_d}{H_2^3} \end{bmatrix} \quad (16.8)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{5.94 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} & -\frac{3.56 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} \\ -\frac{3.56 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} & \frac{3.56 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (16.9)$$

### 16.2.3. Eigenvektoren

#### 16.2.3.1. Eigenkreisfrequenzen

Bei einem Mehrmassenschwinger gibt es entsprechend den Freiheitsgraden Eigenkreisfrequenzen  $\omega_n$ . Diese lassen sich anhand folgender Gleichung bestimmen:

$$\det[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (16.10)$$

$$\omega_1 = \frac{5.04}{\text{s}} \quad (16.11)$$

$$\omega_2 = \frac{18.2}{\text{s}} \quad (16.12)$$

### 16.2.3.2. Eigenvektoren $\phi$

Durch das Einsetzen der bestimmten Eigenkreisfrequenzen lassen sich die Eigenvektoren bestimmen. Die Einträge des Eigenvektors sind voneinander abhängig und lassen sich dem Entsprechen beliebig definieren. Der maximale Eigenwert ist zu 1 zu setzen. Der Eigenvektor skaliert die resultierenden Schnittgrößen, bei einem Faktor ungleich eins, entsprechen diese nicht den tatsächlichen Schnittgrößen.

$$\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M} \phi_n = 0 \quad (16.13)$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0.657 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (16.14)$$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.288 \end{bmatrix} \quad (16.15)$$

### 16.2.3.3. Darstellung der Eigenvektoren

Die Darstellung der Eigenvektoren besteht aus der Biegedeformation mit Kopfauslenkungen entsprechend den Eigenvektoren. Für den Fall einer beidseitigen Einspannung und einer Verschiebung an den Knoten, entspricht die Deformation der Gleichung [16.16](#).

$$w(x) = \Delta_A + (\Delta_B - \Delta_A)(3\xi^2 - 2\xi^3) \quad (16.16)$$

mit

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (16.17)$$

wobei  $x$  die Laufvariable ist und  $L$  die Stablänge, oder in diesem Fall die Stockwerkshöhe.

Für den ersten Eigenvektor

$$w(x) = \Delta_A + (-\Delta_A + \Delta_B) \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) \quad (16.18)$$

$$w(x) = \Delta_A + (-\Delta_A + \Delta_B) \left( \frac{44.0 (0.26x - 1.0)^2}{L^2} - \frac{1.1 \cdot 10^2 (0.26x - 1.0)^3}{L^3} \right) \quad (16.19)$$

$$w = \begin{cases} -0.024x^3 + 0.14x^2 & \text{for } x \leq 3.81 \\ -1.4(0.26x - 1.0)^3 + 1.7(0.26x - 1.0)^2 + 0.66 & \text{for } x \geq 3.81 \end{cases} \quad (16.20)$$

Für den zweiten Eigenvektor. (Es bedingt eine Verschiebung der Laufvariable  $x$  um die  $H_1$ )

$$w(x) = \Delta_A + (-\Delta_A + \Delta_B) \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) \quad (16.21)$$

$$w(x) = \Delta_A + (-\Delta_A + \Delta_B) \left( \frac{44.0(0.26x - 1.0)^2}{L^2} - \frac{1.1 \cdot 10^2(0.26x - 1.0)^3}{L^3} \right) \quad (16.22)$$

$$w = \begin{cases} -0.036x^3 + 0.21x^2 & \text{for } x \leq 3.81 \\ 5.3(0.26x - 1.0)^3 - 6.2(0.26x - 1.0)^2 + 1.0 & \text{for } x \geq 3.81 \end{cases} \quad (16.23)$$

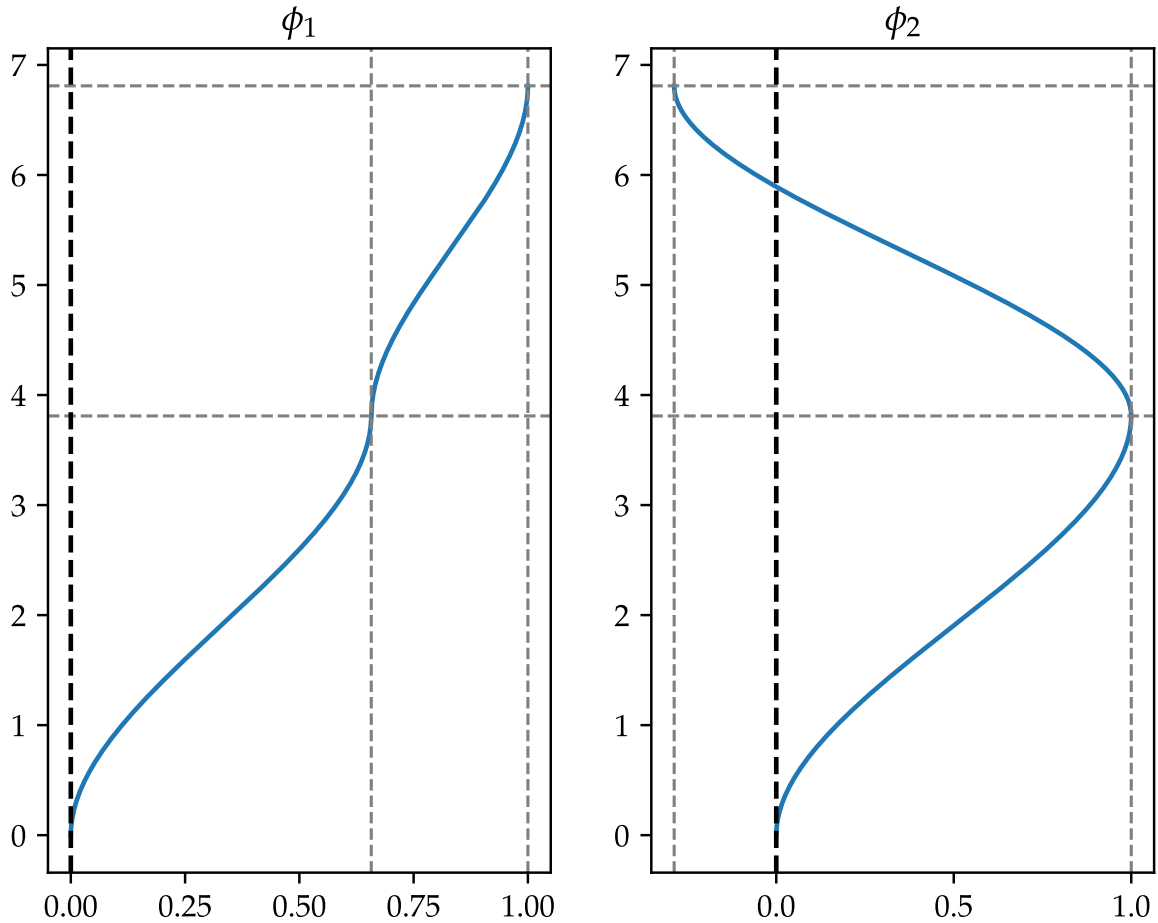


Abbildung 16.3.: Deformation des Mehrmassenschwingers anhand der Eigenvektoren

## 16.2.4. Modale Analyse

Die Modale Analyse zielt darauf ab, den Mehrmassenschwinger zu entkoppeln. Dazu wird in einem ersten Schritt die Orthogonalitätsbedingung kontrolliert. Diese muss erfüllt sein, um eine Entkoppelung durchzuführen. Siehe Kapitel [12.2.2.4](#) für eine ausführliche Erklärung.

### 16.2.4.1. Orthogonalitätsbedingung

Angewendet auf die Massenmatrix: Es zeigen sich kleine numerische Unreinheiten, welche vernachlässigt werden können.



$$\square_1^T \mathbf{M}_{\square_1} = \left[ \frac{5.71 \cdot 10^3 \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (16.24)$$

$$\square_2^T \mathbf{M}_{\square_2} = \left[ \frac{2.5 \cdot 10^3 \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (16.25)$$

$$\square_2^T \mathbf{M}_{\square_1} = \left[ \frac{1.59 \cdot 10^{-12} \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (16.26)$$

$$\square_1^T \mathbf{M}_{\square_2} = \left[ \frac{1.59 \cdot 10^{-12} \text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \quad (16.27)$$

Für die Steifigkeitsmatrix:

$$\square_1^T \mathbf{K}_{\square_1} = \left[ \frac{1.45 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (16.28)$$

$$\square_2^T \mathbf{K}_{\square_2} = \left[ \frac{8.28 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (16.29)$$

$$\square_2^T \mathbf{K}_{\square_1} = \left[ \frac{9.459 \cdot 10^{-11} \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (16.30)$$

$$\square_1^T \mathbf{K}_{\square_2} = \left[ \frac{9.459 \cdot 10^{-11} \text{N}}{\text{m}} \right] \quad (16.31)$$

#### 16.2.4.2. Modal- und Spektralmatrix

Mittels der Modal- und Spektralmatrix lassen sich die generalisierten Grössen effizient ermitteln.

$$\text{Modalmatrix} = \Phi \quad (16.32)$$

$$\square = \begin{bmatrix} 0.6573 & 1.0 \\ 1.0 & -0.2876 \end{bmatrix} \quad (16.33)$$

$$\text{Spektralmatrix} = \Omega^2 \quad (16.34)$$

$$\square^2 = \begin{bmatrix} \frac{25.38}{\text{s}^2} & 0 \\ 0 & \frac{331.7}{\text{s}^2} \end{bmatrix} \quad (16.35)$$

#### 16.2.4.3. Generalisierte Grössen

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \quad (16.36)$$

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} \frac{5707.3 \text{Ns}^2}{\text{m}} & 0 \\ 0 & \frac{2497.0 \text{Ns}^2}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (16.37)$$

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \quad (16.38)$$

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \frac{1.4487 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} & 0 \\ 0 & \frac{8.2813 \cdot 10^5 \text{N}}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (16.39)$$

#### 16.2.4.4. Modale Höhen

Die modalen Höhen bestimmen sich aus Gleichung 16.40:

$$H_n = \frac{L_n^\theta}{L_n} \quad (16.40)$$

$$L_n = \phi_n^T \cdot \mathbf{M} \mathbf{1} \quad (16.41)$$

$$L_n^\theta = \sum_{j=1}^N H_j \cdot m_j \cdot \phi_{jn} \quad (16.42)$$

Angewendet auf das Beispiel folgt:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \quad (16.43)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{H_1 m_1 \phi_{11} + H_2 m_2 \phi_{21}}{m_1 \phi_{11} + m_2 \phi_{21}} \\ \frac{H_1 m_1 \phi_{12} + H_2 m_2 \phi_{22}}{m_1 \phi_{12} + m_2 \phi_{22}} \end{bmatrix} \quad (16.44)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 5.65 \text{m} \\ 1.13 \text{m} \end{bmatrix} \quad (16.45)$$

#### 16.2.4.5. Kontrolle der modalen Transformation

Die Eigenkreisfrequenzen ändern sich durch die Transformation nicht.

$$\omega_1 = \frac{5.04}{s} \quad (16.46)$$

$$\omega_{1modal} = \frac{5.04}{s} \quad (16.47)$$

$$\omega_2 = \frac{18.21}{s} \quad (16.48)$$

$$\omega_{2modal} = \frac{18.21}{s} \quad (16.49)$$

#### 16.2.4.6. Partizipationsfaktor $\Gamma$

Die Verteilung des Partizipationsfaktor gibt einen direkten Hinweis, welcher Eigenmode an der Gesamtantwort den grössten Einfluss (beteiligt bzw. partizipiert) hat.

$$\Gamma_n = \frac{\Phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{1}}{\Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_n} \quad (16.50)$$

In allgemeiner Form lautet der Partizipationsfaktor:

$$\Gamma_n = \frac{\Phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{r}^*}{\Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_n} \quad (16.51)$$

$\mathbf{r}^*$  beschreibt die Starrkörperverschiebung infolge der Erdbebenanregung  $u_g$  am Fusspunkt des Gesamtsystems.

$$\mathbf{r}^* = \begin{bmatrix} FHG_1 \\ FHG_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(0) \\ \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1} \quad (16.52)$$

Die Partizipationsmatrix lässt sich direkt durch folgende Gleichung ermitteln:

$$\Gamma = \mathbf{M}^{\star-1} \cdot \Phi^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{1} \quad (16.53)$$

Gelöst mit Gleichung [16.53](#):

$$\square = \begin{bmatrix} 1.08 \\ 0.288 \end{bmatrix} \quad (16.54)$$

Gelöst mit Gleichung [16.51](#):

$$\Gamma_1 = \frac{m_1 \phi_{11} + m_2 \phi_{21}}{m_1 \phi_{11}^2 + m_2 \phi_{21}^2} \quad (16.55)$$

$$\Gamma_1 = 1.08 \quad (16.56)$$

$$\Gamma_2 = \frac{m_1 \phi_{12} + m_2 \phi_{22}}{m_1 \phi_{12}^2 + m_2 \phi_{22}^2} \quad (16.57)$$

$$\Gamma_2 = 0.288 \quad (16.58)$$

$$\square_n^2 = \begin{bmatrix} 1.17 \\ 0.0831 \end{bmatrix} \quad (16.59)$$

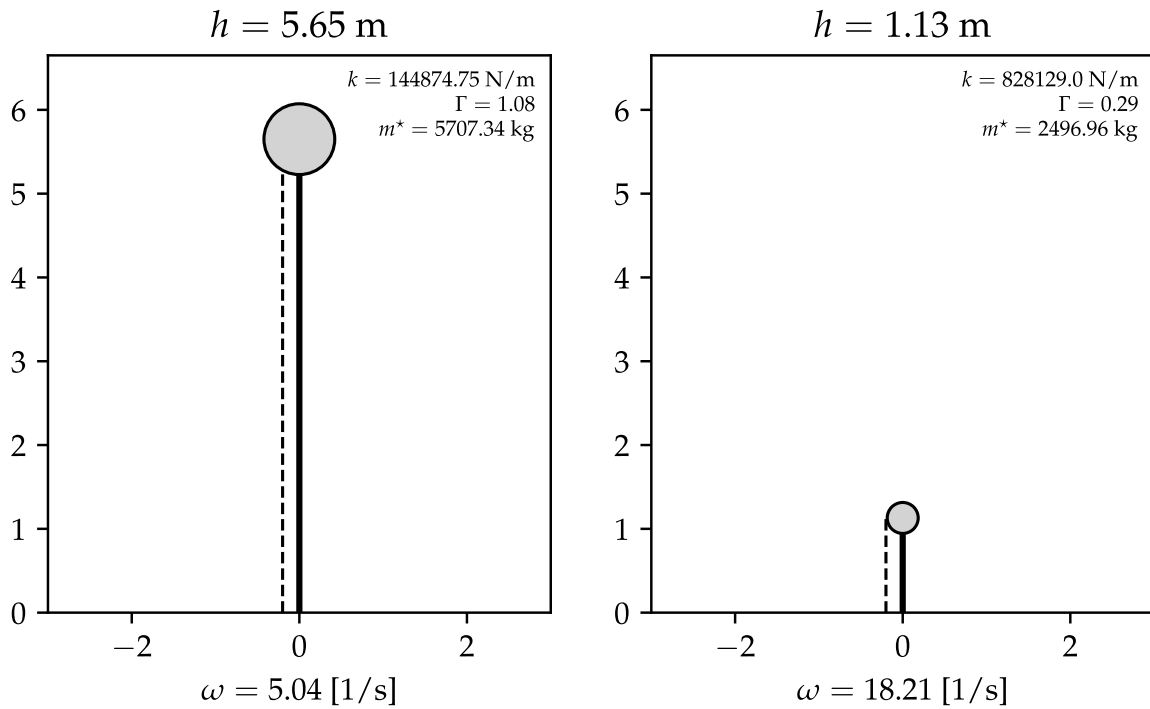


Abbildung 16.4.: Darstellung der entkoppelten Einmassenschwinger

### 16.2.5. Elastisches Antwortspektrum

Aus der Aufgabenstellung darf nach [1] Abs. 16.2.3.1 Kurve  $E$  gewählt werden.

#### 16.2.5.1. Grundschwingzeit

Die Grundschwingzeit kann anhand der bereits ermittelten Eigenkreisfrequenzen ermittelt werden.

$$T_1 = 1.25\text{s} \quad (16.60)$$

$$T_2 = 0.345\text{s} \quad (16.61)$$

#### 16.2.5.2. Elastisches Antwortspektrum

---

$S = 1.7$ $T_C = 0.25\text{s}$ $\eta = 1$	$T_B = 0.09\text{s}$ $T_D = 2.0\text{s}$
---	---

---

$$S_e = \frac{2.5ST_C a_{gd}\eta}{T} \quad (16.62)$$

$$S_{e1} = \frac{0.852\text{m}}{\text{s}^2} \quad (16.63)$$

---

$S = 1.7$ $T_C = 0.25\text{s}$ $\eta = 1$	$T_B = 0.09\text{s}$ $T_D = 2.0\text{s}$
---	---

---

$$S_e = \frac{2.5ST_C a_{gd}\eta}{T} \quad (16.64)$$

$$S_{e2} = \frac{3.08\text{m}}{\text{s}^2} \quad (16.65)$$

### 16.2.6. Maximale Deformation

Die maximale Deformation resultiert aus der Beschleunigung  $S_e$  und der Eigenkreisfrequenz  $\omega_n^2$ . Für die Modalen EMS gilt es diese anhand der Partizipationsfaktoren zu gewichten. Zur effektiven Bestimmung der Auslenkung sind die Resultate der EMS mittels SRSS-Regel zu überlagern.

$$q_{1max} = \frac{\Gamma_1 S_{e1}}{\omega_1^2} \quad (16.66)$$

$$q_{1max} = 0.0364\text{m} \quad (16.67)$$

$$q_{2max} = \frac{\Gamma_2 S_{e2}}{\omega_2^2} \quad (16.68)$$

$$q_{2max} = 0.00268\text{m} \quad (16.69)$$

Um die Entkoppelung rückzuführen, gilt es die erhaltenen Resultate zu überlagern. Dabei gibt es unterschiedliche Ansätze. Bei weit auseinander liegenden Eigenfrequenzen kann die SRSS-Überlagerung verwendet werden.

$$u_{max} = \sqrt{\sum_{n=1}^2 (q_n \cdot \phi_n)^2} \quad (16.70)$$

$$\mathbf{u}_{max} = \begin{bmatrix} 0.024\text{m} \\ 0.0364\text{m} \end{bmatrix} \quad (16.71)$$

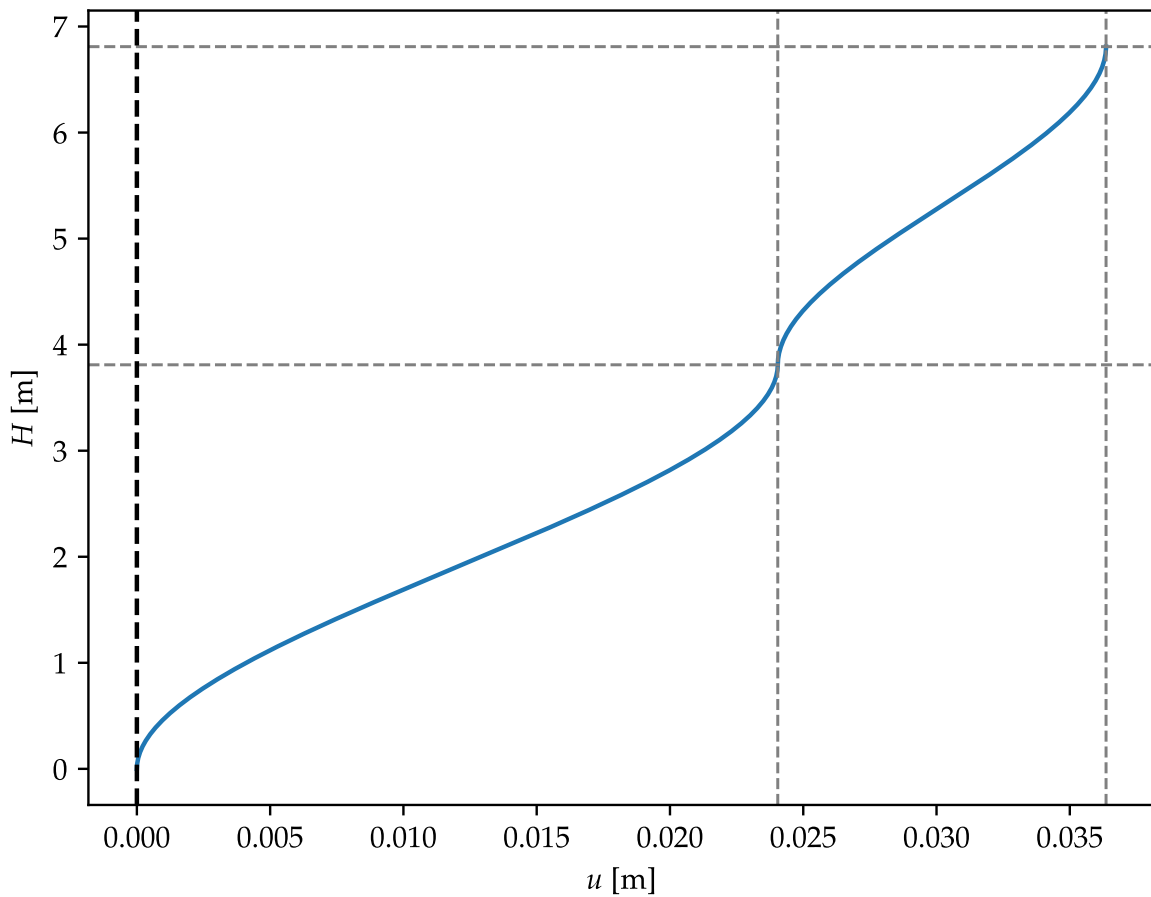


Abbildung 16.5.: Maximale Deformation des Mehrmassenschwingers

## 16.2.7. Maximale Schnittkräfte

### 16.2.7.1. Querkräfte

Die Einwirkungen resultieren aus der Masse multipliziert mit der Beschleunigung aus dem Antwortspektrum. Dazu sind in einem ersten Schritt die beiden entkoppelten EMS voneinander getrennt zu betrachten. Die Überlagerung erfolgt erst bei den ermittelten Querkräften.

$$\mathbf{M}_n = \Gamma \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_n \quad (16.72)$$

$$F_{nmax} = \mathbf{M}_n \cdot S_{en} \quad (16.73)$$

Aus dem ersten EMS folgt:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1494.8\text{Ns}^2}{\text{m}} \\ \frac{5197.8\text{Ns}^2}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (16.74)$$

$$\mathbf{F}_{1max} = \begin{bmatrix} 1273.7\text{N} \\ 4429.2\text{N} \end{bmatrix} \quad (16.75)$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 5702.9\text{N} \\ 4429.2\text{N} \end{bmatrix} \quad (16.76)$$

Aus dem zweiten EMS folglich:

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \frac{605.23\text{Ns}^2}{\text{m}} \\ -\frac{397.83\text{Ns}^2}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (16.77)$$

$$\mathbf{F}_{2max} = \begin{bmatrix} 1864.2\text{N} \\ -1225.4\text{N} \end{bmatrix} \quad (16.78)$$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 638.82\text{N} \\ -1225.4\text{N} \end{bmatrix} \quad (16.79)$$

Maximale Querkraft aus Überlagerung beider EMS mittels SRSS-Regel.

$$V_{max} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \quad (16.80)$$



$$\mathbf{V}_{max} = \begin{bmatrix} 5.74 \cdot 10^3 \text{N} \\ 4.6 \cdot 10^3 \text{N} \end{bmatrix} \quad (16.81)$$

### 16.2.7.2. Biegemomente

Die Biegemomente lassen sich abschliessend anhand der Querkräfte bestimmen.

### 16.2.7.3. Normalkräfte

Die Normalkräfte resultieren aus den Punktmassen.

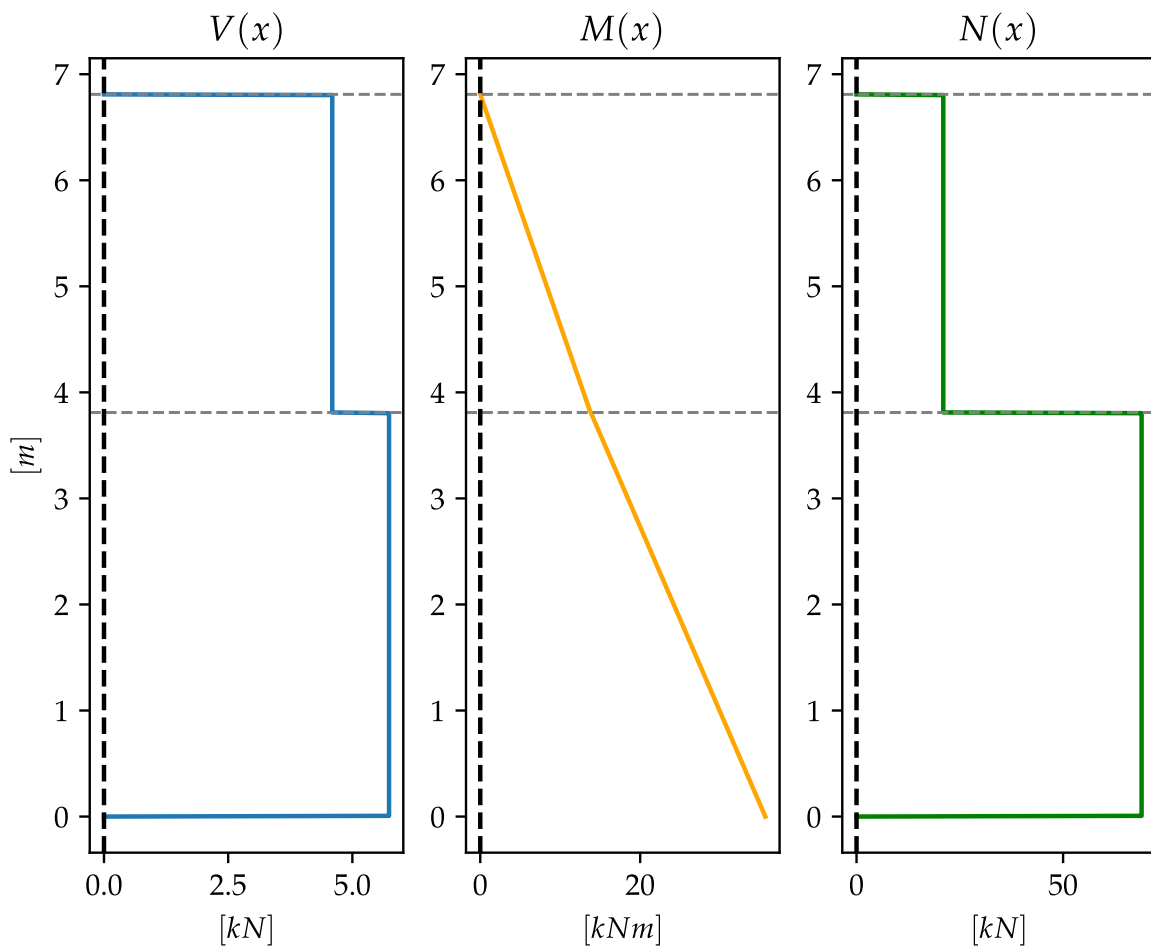


Abbildung 16.6.: Maximale Schnittgrössen

Die Schnittgrößen in Abbildung 16.6 sind als umhüllende Größen zu interpretieren. Aufgrund der Überlagerung der unterschiedlichen Schwingformen mittels SRSS-Regel werden die Schnittgrößen jeweils addiert, ohne Berücksichtigung der Vorzeichen.

**Teil IV.**

**Ersatzkraftverfahren**

## 17. Beispiel: Unsymmetrisch angeordnete Wandscheiben

### 17.1. Aufgabenstellung

In Abbildung 17.1 ist ein Gebäudegrundriss mit unsymmetrisch angeordneten Wandscheiben dargestellt. Dieser wird durch vier Stahlbeton-Wandscheiben ausgesteift.

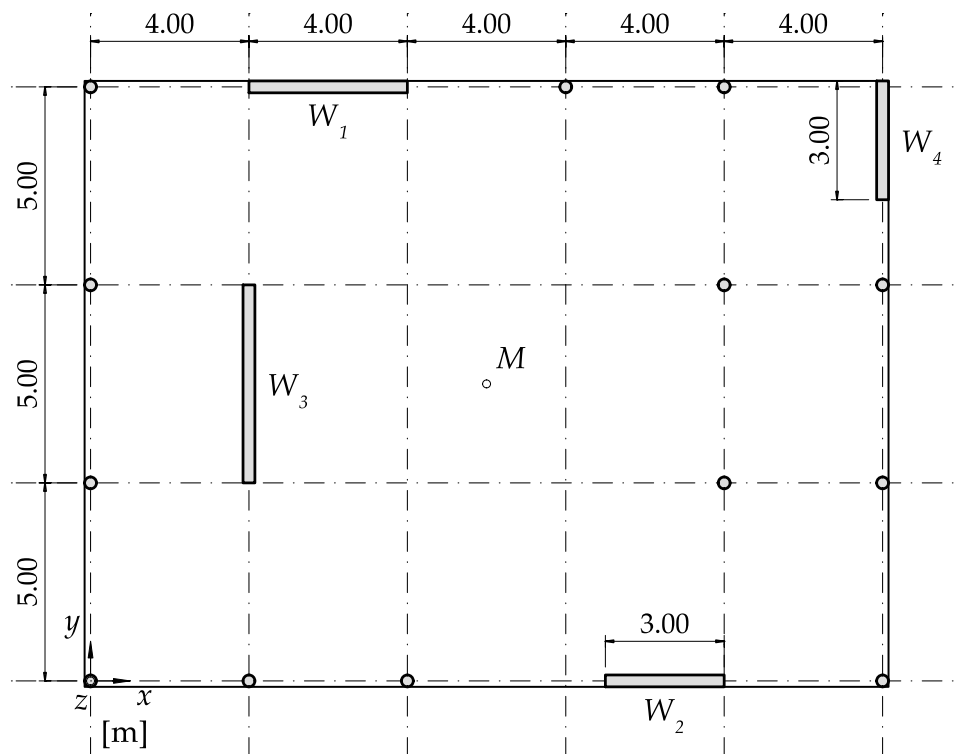


Abbildung 17.1.: Grundriss des Gebäudes

Das Untergeschoss gilt als *steifer Kasten*, folglich ist der Einspannungshorizont der Wandscheiben Oberkante UG. Es findet eine gewisse Einspannung der Wandscheiben in der Bodenplatte

statt, je nach Ausbildung der Fundation. Diese kann man z.B. mit einer elastischen Einspannung (Drehfeder) modellieren. Die elastische Einspannung liegt im Bereich von 20% einer Volleinspannung. Im Beispiel wird diese als gelenkige Lagerung angenommen.

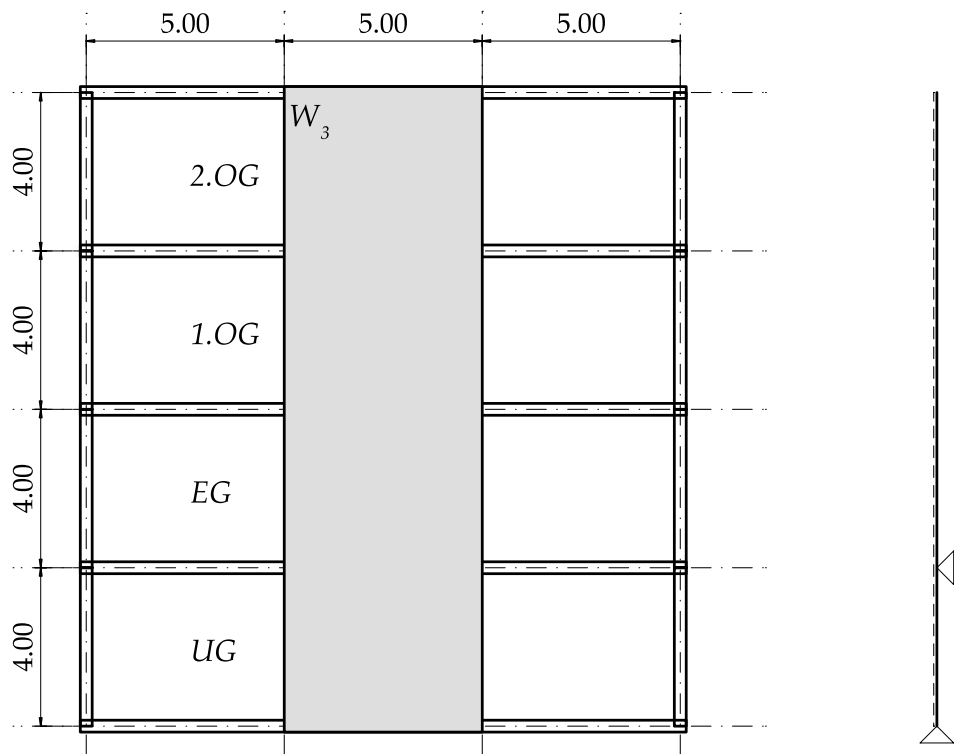


Abbildung 17.2.: Ansicht der Wand 3 des Gebäudes

Die Modellierung in Abbildung 17.3 trifft folgende Annahmen:

- Die Decken sind gelenkig an die Tragwände angeschlossen
- Die Deckenscheiben wirken in ihrer Ebene als starre Scheiben
- Die Wandscheiben bzw. Tragwände sind in den Kellerkasten eingespannt, so dass die Modellierung als Kragarm gerechtfertigt ist
- Die Massen der Decken werden im Aufriss als Punktmassen am Kragarm abgebildet (Dabei werden die Massen der Wände pro Geschoss je zur Hälfte der Geschossmassen zugeordnet)
- Die Stützen tragen lediglich zum vertikalen Lastabtrag bei. Deren Steifigkeit kann vernachlässigt werden

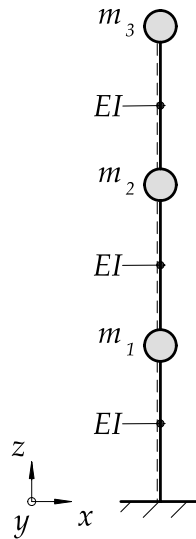


Abbildung 17.3.: Modellierung als Mehrmassenschwinger

Gesucht:

- Schubmittelpunkt
- Erste Eigenperiode
- Ersatzkräfte durch das Ersatzkraftverfahren auf charakteristischem Niveau

Gegeben:

- Baugrundklasse  $B$
- Erdbebenzone  $Z2$
- Decken und Wände sind alle  $d$  stark
- Sämtliche Decken gelten als Büroflächen (Lastermittlung - vereinfacht auch die Dachfläche)
- Reduktion der Biegesteifigkeit  $\gamma_{EI}$  zur Berücksichtigung der Rissbildung

Tabelle 17.1.: Verwendete Parameter der Aufgabe

$E = \frac{30000\text{N}}{\text{mm}^2}$	$H_1 = 4\text{m}$
$H_2 = 4\text{m}$	$H_3 = 4\text{m}$
$L_{w1} = 4\text{m}$	$L_{w2} = 3\text{m}$
$L_{w3} = 5\text{m}$	$L_{w4} = 3\text{m}$
$L_x = 4\text{m}$	$L_y = 5\text{m}$
$d = 0.3\text{m}$	$g = \frac{10\text{m}}{\text{s}^2}$
$\gamma_{EI} = 1.0$	$\gamma_f = 1.0$

$$q = 2.0$$

$$q_{nutzlastk} = \frac{2000\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$q_{auflastk} = \frac{1000\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\rho_c = \frac{25000\text{N}}{\text{m}^3}$$


---

## 17.2. Musterlösung

### 17.2.1. Schubmittelpunkt

Für die Berechnung des Schubmittelpunktes C wird zunächst angenommen, dass sich die Wandscheiben **parallel** in y- bzw. z-Richtungen verschieben. Es findet somit **keine Verdrehung** statt. Die gleiche Verschiebung wird durch die starre Deckenscheibe gewährleistet. Die Wandscheiben können als Biegestäbe (Kragarme) mit der Biegesteifigkeit EI in die jeweilige y- bzw. z-Richtung betrachtet werden. Jede Wandscheibe erfährt bei einer parallelen Verschiebung der starren Deckenscheibe in die jeweilige Richtung die gleiche Kopfverformung (parallel geschaltete Federn).

#### 17.2.1.1. Abstand vom Koordinatennullpunkt

$x_1 = -4.0\text{m}$	$x_2 = 4.5\text{m}$
$x_3 = -6.0\text{m}$	$x_4 = 10.0\text{m}$

$y_1 = 7.5\text{m}$	$y_2 = -7.5\text{m}$
$y_3 = 0$	$y_4 = 6.0\text{m}$

#### 17.2.1.2. Wandlängen

Wandlängen in X-Richtung

$L_{x1} = 4.0\text{m}$	$L_{x2} = 3.0\text{m}$
$L_{x3} = 0.3\text{m}$	$L_{x4} = 0.3\text{m}$

Wandlängen in Y-Richtung

$L_{y1} = 0.3\text{m}$	$L_{y2} = 0.3\text{m}$
$L_{y3} = 5.0\text{m}$	$L_{y4} = 3.0\text{m}$



### 17.2.1.3. Trägheitsmoment

Lediglich die Eigenträgheitsmomente sind beschrieben.

$$I_{xi} = \frac{L_{yi}^3 \cdot L_{xi}}{12} \quad (17.1)$$

---

$$\begin{aligned} I_{x1} &= 0.009\text{m}^4 \\ I_{x3} &= 3.13\text{m}^4 \end{aligned}$$

---

---

$$\begin{aligned} I_{x2} &= 0.00675\text{m}^4 \\ I_{x4} &= 0.675\text{m}^4 \end{aligned}$$

---

$$I_{yi} = \frac{L_{xi}^3 \cdot L_{yi}}{12} \quad (17.2)$$

---

$$\begin{aligned} I_{y1} &= 1.6\text{m}^4 \\ I_{y3} &= 0.0112\text{m}^4 \end{aligned}$$

---

---

$$\begin{aligned} I_{y2} &= 0.675\text{m}^4 \\ I_{y4} &= 0.00675\text{m}^4 \end{aligned}$$

---

$$I_{k,ersatz} = \sum_{i=1}^{N_{Waende}} I_{ki} \quad (17.3)$$

Angewendet auf die Aufgabe:

$$I_{xersatz} = 3.81575\text{m}^4 \quad (17.4)$$

$$I_{yersatz} = 2.293\text{m}^4 \quad (17.5)$$

Multipliziert mit dem Elastizitätsmodul zur Bestimmung der Biegesteifigkeit:

$$EI_{xersatz} = 114472500000.0\text{m}^2\text{N} \quad (17.6)$$

$$EI_{yersatz} = 68790000000.0\text{m}^2\text{N} \quad (17.7)$$

#### 17.2.1.4. Abstände des Schubmittelpunkts zum Massenschwerpunkt

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n EI_{y,i} y_i}{\sum_{i=1}^n EI_{y,i}} \quad (17.8)$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n EI_{x,i} x_i}{\sum_{i=1}^n EI_{x,i}} \quad (17.9)$$

Angewendet auf die Aufgabe:

$$y_c = 3.04\text{m} \quad (17.10)$$

$$x_c = -3.15\text{m} \quad (17.11)$$

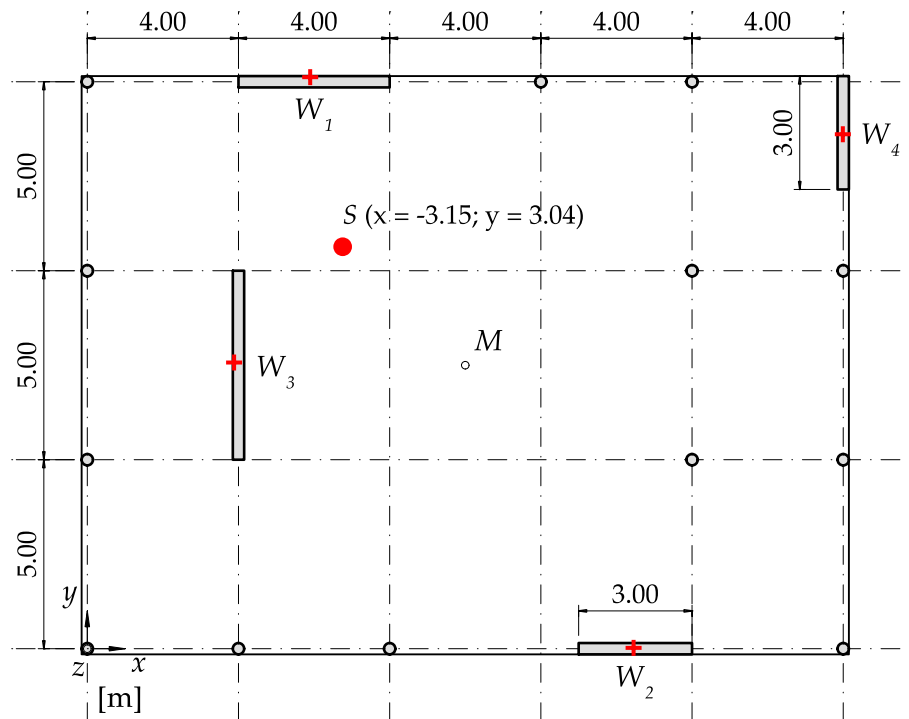


Abbildung 17.4.: Grundriss mit Schubmittelpunkt

### 17.2.2. Massenmatrix $M$

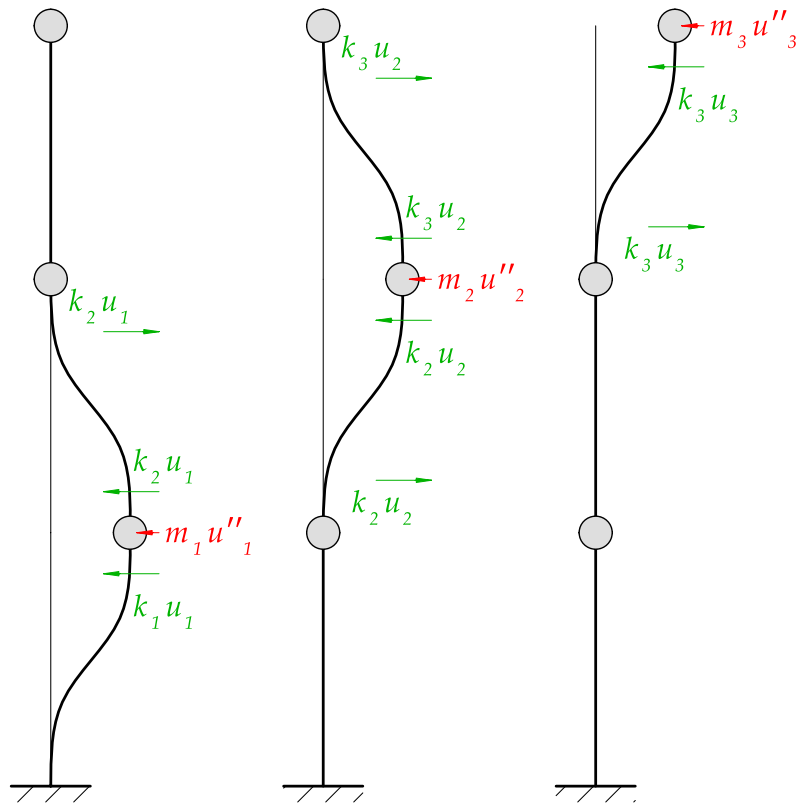


Abbildung 17.5.: Auslenkung der Massen zur Ermittlung der Matrizen

### 17.2.3. Lastermittlung

Gemäss [1] Ziff. 16.5.2.3 sind ständige und quasiständige Lasten anzusetzen. Bei der Lastermittlung werden die Gewichtskräfte aus Eigenmassen und Auflasten ermittelt. Dazu werden pro Stockwerk die Gewichtskräfte der Wände definiert. Eine Punktmasse erhält jeweils die Hälfte der darunter- und darüber liegenden Wände. Für die Decke über 2.OG bleibt folglich nur eine Hälfte der Wände.

$$A_{Decke} = 300.0\text{m}^2 \quad (17.12)$$

$$G_{Deckek} = 2.25 \cdot 10^6\text{N} \quad (17.13)$$

$$G_{Waendek} = 4.5 \cdot 10^5 \text{N} \quad (17.14)$$

$$Q_{auflastk} = 3.0 \cdot 10^5 \text{N} \quad (17.15)$$

$$Q_{nutzlastk} = 6.0 \cdot 10^5 \text{N} \quad (17.16)$$

$$\psi_2 = 0.3 \quad (17.17)$$

Daraus lassen sich die Punktmassen bestimmen:

$$m_1 = \frac{G_{Waendek} + G_{decke} + Q_{auflastk} + Q_{nutzlastk}\psi_2}{g} \quad (17.18)$$

$$m_1 = \frac{3.18 \cdot 10^5 \text{Ns}^2}{\text{m}} \quad (17.19)$$

$$m_2 = \frac{G_{Waendek} + G_{decke} + Q_{auflastk} + Q_{nutzlastk}\psi_2}{g} \quad (17.20)$$

$$m_2 = \frac{3.18 \cdot 10^5 \text{Ns}^2}{\text{m}} \quad (17.21)$$

$$m_3 = \frac{\frac{G_{Waendek}}{2} + G_{decke} + Q_{auflastk} + Q_{nutzlastk}\psi_2}{g} \quad (17.22)$$

$$m_3 = \frac{2.95 \cdot 10^5 \text{Ns}^2}{\text{m}} \quad (17.23)$$

#### 17.2.3.1. X-Richtung

$$\mathbf{M}_x = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (17.24)$$

$$\mathbf{M}_x = \begin{bmatrix} \frac{318000.0 \text{Ns}^2}{\text{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{318000.0 \text{Ns}^2}{\text{m}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{295500.0 \text{Ns}^2}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (17.25)$$

### 17.2.3.2. Y-Richtung

$$\mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (17.26)$$

$$\mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} \frac{318000.0\text{Ns}^2}{\text{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{318000.0\text{Ns}^2}{\text{m}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{295500.0\text{Ns}^2}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (17.27)$$

### 17.2.4. Steifigkeitsmatrix $K$

#### 17.2.4.1. X-Richtung

Aufgrund der gelenkigen Verbindung zwischen Platten und Wände gilt für die Ersatzsteifigkeit:

$$k = \frac{3EI}{H^3} \quad (17.28)$$

Die Biegesteifigkeit  $EI$  wird um den Faktor  $\gamma_{EI}$  reduziert zur Berücksichtigung der Rissbildung. Zusätzlich gilt, die Ersatzsteifigkeit in X-Richtung entspricht  $EI_y$ . Dazu wird für  $H$  die entsprechende Höhe ab Einspannhorizont eingesetzt.

$$k_{1x} = \frac{3EI_y\gamma_{EI}}{H_1^3} \quad (17.29)$$

$$k_{1x} = \frac{3.22 \cdot 10^9 \text{N}}{\text{m}} \quad (17.30)$$

$$k_{2x} = \frac{3EI_y\gamma_{EI}}{(H_1 + H_2)^3} \quad (17.31)$$

$$k_{2x} = \frac{4.03 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} \quad (17.32)$$

$$k_{3x} = \frac{3EI_y\gamma_{EI}}{(H_1 + H_2 + H_3)^3} \quad (17.33)$$

$$k_{3x} = \frac{1.19 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} \quad (17.34)$$

Abgefüllt in die Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_x = \begin{bmatrix} k_{1x} + k_{2x} & -k_{2x} & 0 \\ -k_{2x} & k_{2x} + k_{3x} & -k_{3x} \\ 0 & -k_{3x} & k_{3x} \end{bmatrix} \quad (17.35)$$

$$\mathbf{K}_x = \begin{bmatrix} \frac{3.63 \cdot 10^9 \text{N}}{\text{m}} & -\frac{4.03 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} & 0 \\ -\frac{4.03 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} & \frac{5.23 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} & -\frac{1.19 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} \\ 0 & -\frac{1.19 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} & \frac{1.19 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (17.36)$$

#### 17.2.4.2. Y-Richtung

$$k_{1y} = \frac{5.37 \cdot 10^9 \text{N}}{\text{m}} \quad (17.37)$$

$$k_{2y} = \frac{6.71 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} \quad (17.38)$$

$$k_{3y} = \frac{1.99 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} \quad (17.39)$$

Abgefüllt in die Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_y = \begin{bmatrix} k_{1y} + k_{2y} & -k_{2y} & 0 \\ -k_{2y} & k_{2y} + k_{3y} & -k_{3y} \\ 0 & -k_{3y} & k_{3y} \end{bmatrix} \quad (17.40)$$

$$\mathbf{K}_y = \begin{bmatrix} \frac{6.04 \cdot 10^9 \text{N}}{\text{m}} & -\frac{6.71 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} & 0 \\ -\frac{6.71 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} & \frac{8.7 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} & -\frac{1.99 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} \\ 0 & -\frac{1.99 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} & \frac{1.99 \cdot 10^8 \text{N}}{\text{m}} \end{bmatrix} \quad (17.41)$$

### 17.2.5. Eigenkreisfrequenzen

Bei einem Mehrmassenschwinger gibt es entsprechend den Freiheitsgraden Eigenkreisfrequenzen  $\omega_n$ . Diese lassen sich anhand folgender Gleichung bestimmen:

$$\det [\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (17.42)$$

#### 17.2.5.1. X-Richtung

$$\omega_{1x} = \frac{16.7}{s} \quad (17.43)$$

$$\omega_{2x} = \frac{40.1}{s} \quad (17.44)$$

$$\omega_{3x} = \frac{108.0}{s} \quad (17.45)$$

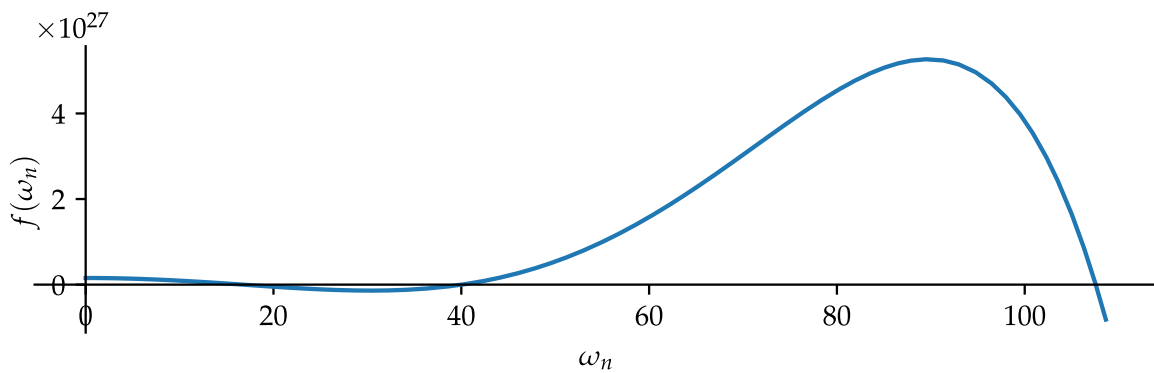


Abbildung 17.6.: Nullstellen der Gleichung 17.42 in X-Richtung

#### 17.2.5.2. Y-Richtung

$$\omega_{1y} = \frac{21.6}{s} \quad (17.46)$$

$$\omega_{2y} = \frac{51.7}{s} \quad (17.47)$$

$$\omega_{3y} = \frac{139.0}{s} \quad (17.48)$$

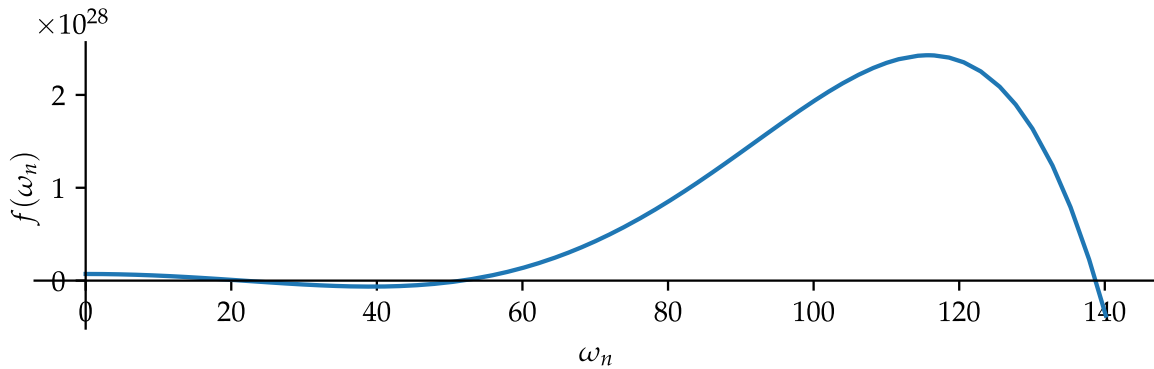


Abbildung 17.7.: Nullstellen der Gleichung 17.42 in Y-Richtung

## 17.2.6. Eigenperioden

Die Eigenperioden lassen sich aus den Eigenkreisfrequenzen bestimmen. Das Ersatzkraftverfahren betrachtet lediglich die Grundfrequenz. Weitere Schwingformen werden vernachlässigt. Aus diesem Grund sind in [1] Abs. 16.5.2 Einschränkungen bei der Anwendung des Ersatzkraftverfahrens aufgelistet. Ziel dieser Einschränkungen ist es, dass lediglich Bauwerke untersucht werden, welche massgeblich in der Grundfrequenz schwingen.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (17.49)$$

### 17.2.6.1. X-Richtung

Nach [1] 16.5.2.3

Connecting to server...

$$T_{1xapprox} = 0.49s \quad (17.50)$$

Durch die ermittelte Grundfrequenz

$$T_{1x} = 0.376s \quad (17.51)$$



### 17.2.6.2. Y-Richtung

Nach [1] 16.5.2.3

$$T_{1yapprox} = 0.404s \quad (17.52)$$

Durch die ermittelte Grundfrequenz

$$T_{1y} = 0.291s \quad (17.53)$$

### 17.2.7. Pseudobeschleunigung

Es wird für die Eigenperioden die Pseudobeschleunigung bestimmt. Siehe dazu [1].

$$a_{gd} = \frac{1.0m}{s^2} \quad (17.54)$$

#### 17.2.7.1. X-Richtung

---

$$\begin{aligned} S &= 1.2 \\ T_C &= 0.35s \\ \eta &= 1 \end{aligned}$$

---

---

$$\begin{aligned} T_B &= 0.08s \\ T_D &= 2.0s \end{aligned}$$

---

$$S_e = \frac{2.5ST_C a_{gd} \eta}{T} \quad (17.55)$$

$$S_{ex} = \frac{2.8m}{s^2} \quad (17.56)$$

### 17.2.7.2. Y-Richtung

---

$S = 1.2$	$T_B = 0.08\text{s}$
$T_C = 0.35\text{s}$	$T_D = 2.0\text{s}$
$\eta = 1$	

---

$$S_e = 2.5S a_{gd}\eta \quad (17.57)$$

$$S_{ey} = \frac{3.0\text{m}}{\text{s}^2} \quad (17.58)$$

### 17.2.8. Bemessungsspektrum

#### 17.2.8.1. X-Richtung

---

$S = 1.2$	$T_B = 0.08\text{s}$
$T_C = 0.35\text{s}$	$T_D = 2.0\text{s}$
$a_{gd} = \frac{1.0\text{m}}{\text{s}^2}$	$g = \frac{10.0\text{m}}{\text{s}^2}$
$\gamma_f = 1.0$	$q = 2.0$

---

$$S_d = \frac{2.5ST_C a_{gd}\gamma_f}{Tgq} \quad (17.59)$$

$$S_{dx} = 0.14 \quad (17.60)$$

#### 17.2.8.2. Y-Richtung

---

$S = 1.2$	$T_B = 0.08\text{s}$
$T_C = 0.35\text{s}$	$T_D = 2.0\text{s}$
$a_{gd} = \frac{1.0\text{m}}{\text{s}^2}$	$g = \frac{10.0\text{m}}{\text{s}^2}$
$\gamma_f = 1.0$	$q = 2.0$

---

$$S_d = \frac{2.5S a_{gd}\gamma_f}{gq} \quad (17.61)$$

$$S_{dy} = 0.15 \quad (17.62)$$

### 17.2.9. Stockwerkquerkraft

Die Stockwerksquerkraft resultiert nach Norm aus Gleichung 17.63. Es wird lediglich die Nutzlast berücksichtigt. Zusätzlich ist zwischen beiden Richtungen zu unterscheiden.

$$F_d = S_d \cdot \sum_{j=1} (G_k + \psi_2 \cdot Q_k)_j \quad (17.63)$$

Aufgeteilt auf die Geschosse wird diese nach Gleichung 17.64.

$$F_{d,i} = \frac{z_i \sum_{i=1} (G_k + \psi_2 \cdot Q_k)_i}{\sum_{j=1} z_j \cdot (G_k + \psi_2 \cdot Q_k)_j} \cdot F_d \quad (17.64)$$

Der Term der Gleichung 17.65 entspricht den Punktmassen.

$$G_k + \psi_2 \cdot Q_k \quad (17.65)$$

Die Ersatzkraft greift am Massenschwerpunkt der Decke an. Diese gilt es ins Steifigkeitszentrum zu verschieben. Daraus resultiert ein Torsionsmoment.

#### 17.2.9.1. X-Richtung

$$F_{dx} = 1.3 \cdot 10^6 \text{N} \quad (17.66)$$

---

$V_{x1} = 2.25 \cdot 10^5 \text{N}$	$V_{x2} = 4.5 \cdot 10^5 \text{N}$
$V_{x3} = 6.27 \cdot 10^5 \text{N}$	

---

#### 17.2.9.2. Y-Richtung

$$F_{dy} = 1.4 \cdot 10^6 \text{N} \quad (17.67)$$

---

$V_{y1} = 2.41 \cdot 10^5 \text{N}$	$V_{y2} = 4.83 \cdot 10^5 \text{N}$
$V_{y3} = 6.73 \cdot 10^5 \text{N}$	

---

### 17.2.10. Wandkoordinaten zum Schubmittelpunkt

Der Ursprung des Koordinatensystems wird in das Steifigkeitszentrum gelegt.

---

$$x_1 = -0.854\text{m}$$

$$x_2 = 7.65\text{m}$$

$$x_3 = -2.85\text{m}$$

$$x_4 = 13.1\text{m}$$

---

---

$$y_1 = 4.46\text{m}$$

$$y_2 = -10.5\text{m}$$

$$y_3 = -3.04\text{m}$$

$$y_4 = 2.96\text{m}$$

---

### 17.2.11. Stockwerkstorsion

Beachte die Vorzeichenkonvention: Das Torsionsmoment ist positiv im Gegenuhrzeigersinn.

Nach Norm [1] 16.5.3.4 ist die Exzentrizität (Schubmittelpunkt zu Massenschwerpunkt) anhand der Gebäudeabmessungen zu erhöhen.

$$e_{d,sup} = 1.5 \cdot e + 0.05 \cdot b \quad (17.68)$$

$$e_{d,inf} = 0.5 \cdot e - 0.05 \cdot b \quad (17.69)$$

$b$  Gebäudebreite in der entsprechenden Krafrichtung

$e$  Exzentrizität

Aus den entstehenden 4 Lastfällen ist der ungünstigste massgebend. Es wird lediglich  $e_{d,sup}$  betrachtet.

#### 17.2.11.1. X-Richtung

$$e_{dysup} = 5.31\text{m} \quad (17.70)$$

---

$$T_{x1} = 1.2 \cdot 10^6 \text{mN}$$

$$T_{x2} = 2.39 \cdot 10^6 \text{mN}$$

$$T_{x3} = 3.33 \cdot 10^6 \text{mN}$$

---

### 17.2.11.2. Y-Richtung

$$e_{dxsup} = 5.72\text{m} \quad (17.71)$$

---


$$\begin{aligned} T_{y1} &= 1.38 \cdot 10^6 \text{mN} \\ T_{y3} &= 3.85 \cdot 10^6 \text{mN} \end{aligned}$$


---

$$T_{y2} = 2.76 \cdot 10^6 \text{mN}$$

### 17.2.12. Wandquerkraft

Die Kräfte wirken jeweils parallel zur Wandebene. Die Beanspruchung der einzelnen Wandscheiben durch die Stockwerkquerkraft  $V_{xi}$  oder  $V_{yi}$  setzt sich aus einem Translationsanteil (Querkraft) und einem Rotationsanteil (Torsion) zusammen. Diese können sich im Grundriss günstig oder ungünstig überlagern.

Der Kraftanteil wird durch Gleichung 17.72 und Gleichung 17.73 bestimmt.

$$F_{x,i} = \frac{V_x \cdot I_{yi}}{\sum_{i=1}^n I_{y,i}} - T_x \cdot \frac{I_{y,i} \cdot y_i^*}{\sum (I_{x,i} \cdot x_i^{*2}) + (I_{y,i} \cdot y_i^{*2})} \quad (17.72)$$

$$F_{y,i} = \frac{V_y \cdot I_{xi}}{\sum_{i=1}^n I_{x,i}} + T_y \cdot \frac{I_{x,i} \cdot x_i^*}{\sum (I_{x,i} \cdot x_i^{*2}) + (I_{y,i} \cdot y_i^{*2})} \quad (17.73)$$

Dabei kann Gleichung 17.74 als Wölbmoment interpretiert werden.

$$\sum (I_{x,i} \cdot x_i^{*2}) + (I_{y,i} \cdot y_i^{*2}) \quad (17.74)$$

Wichtig ist dabei die Unterscheidung anhand der Ausrichtung der Wand. Als Beispiel wird für eine Einwirkung in X-Richtung für Wand 1 und Wand 2 die Gleichung 17.72 verwendet und für die Wand 3 und Wand 4 Gleichung 17.73 mit Einwirkung  $V_y = 0$  und für  $T_y$  wird  $T_x$  eingesetzt.

Die dargestellten Resultate entsprechen den Einwirkungen auf die Wandscheiben pro Stockwerk. Zur Ermittlung der Wandquerkraft im EG sind sämtliche Stockwerkquerkräfte zu addieren.

### 17.2.12.1. X-Richtung

$$F_{x11} = 1.23 \cdot 10^5 \text{N}$$

$$F_{x13} = -4.27 \cdot 10^4 \text{N}$$

$$F_{x12} = 1.0 \cdot 10^5 \text{N}$$

$$F_{x14} = 4.25 \cdot 10^4 \text{N}$$

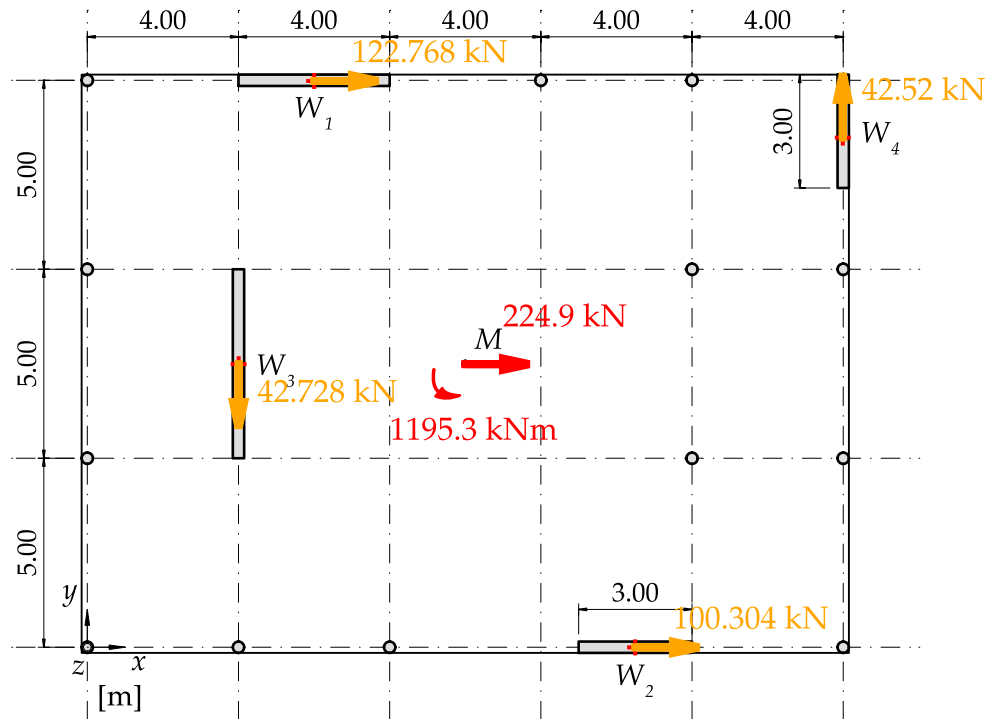


Abbildung 17.8.: Scheibenkräfte im EG durch die Kraft in X-Richtung

$$F_{x21} = 2.46 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$F_{x23} = -8.55 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$F_{x22} = 2.01 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$F_{x24} = 8.5 \cdot 10^4 \text{ N}$$

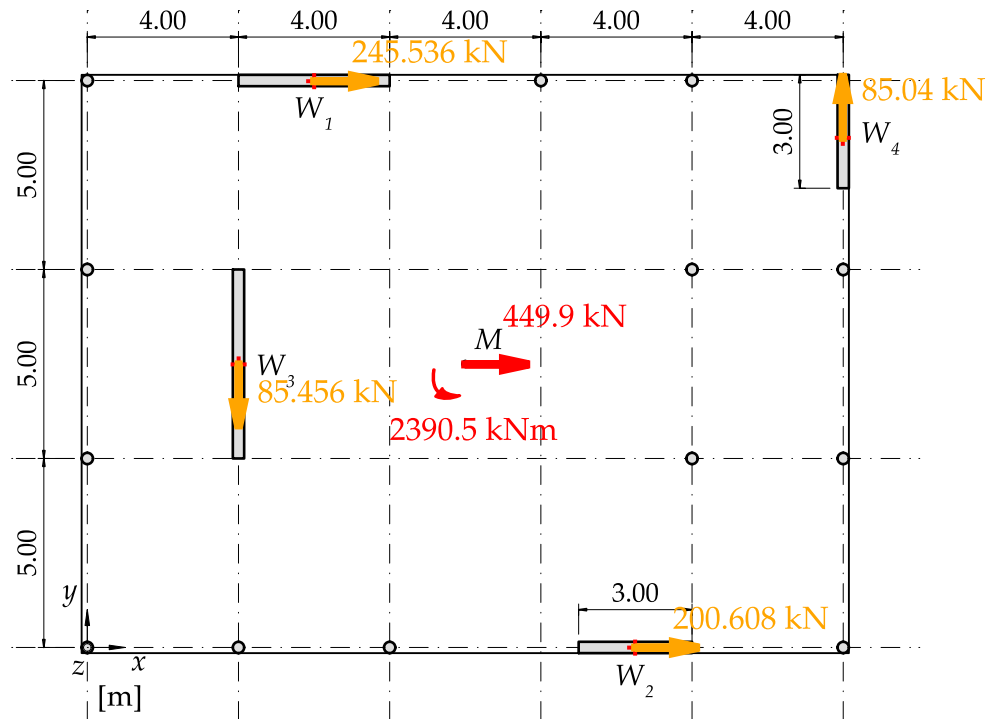


Abbildung 17.9.: Scheibenkräfte im 1.OG durch die Kraft in X-Richtung

$$F_{x31} = 3.42 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$F_{x33} = -1.19 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$F_{x32} = 2.8 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$F_{x34} = 1.19 \cdot 10^5 \text{ N}$$

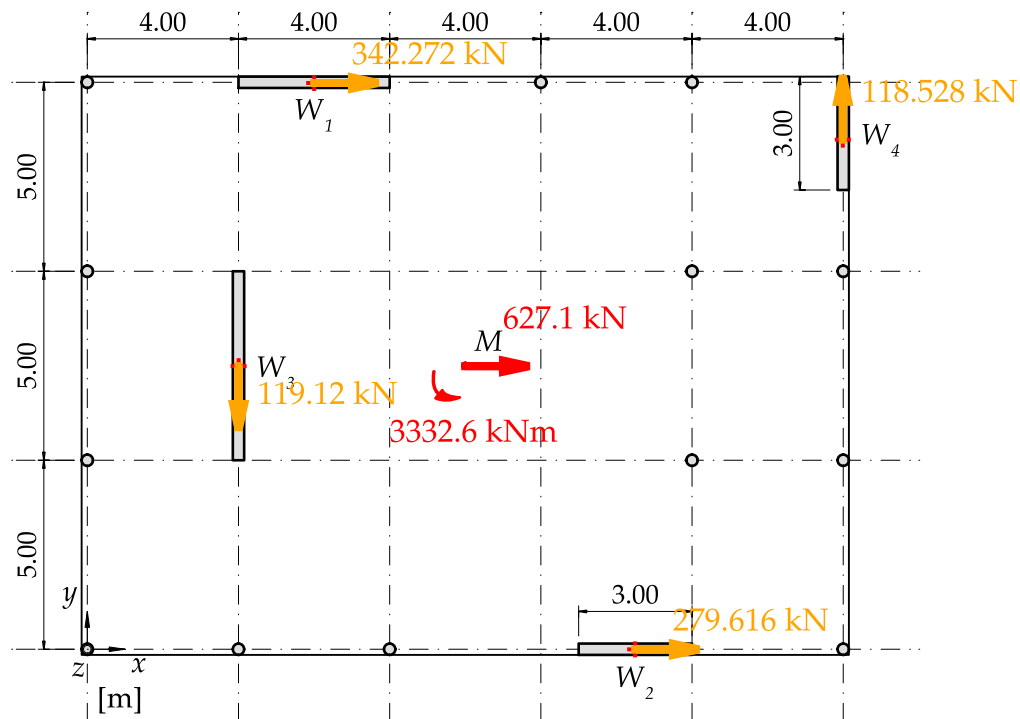


Abbildung 17.10.: Scheibenkräfte im 2.OG durch die Kraft in X-Richtung



### 17.2.12.2. Y-Richtung

$$F_{y11} = -3.95 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$F_{y13} = 1.48 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$F_{y12} = 3.94 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$F_{y14} = 9.18 \cdot 10^4 \text{ N}$$

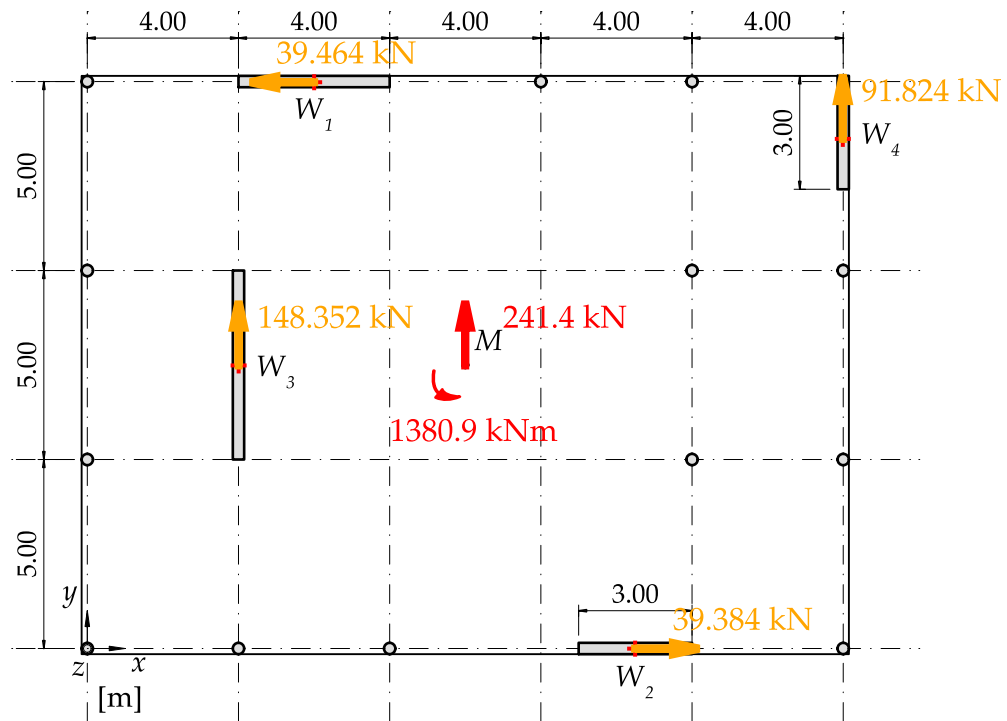


Abbildung 17.11.: Scheibenkräfte im EG durch die Kraft in Y-Richtung

$$F_{y21} = -7.89 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$F_{y23} = 2.97 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$F_{y22} = 7.88 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$F_{y24} = 1.84 \cdot 10^5 \text{ N}$$

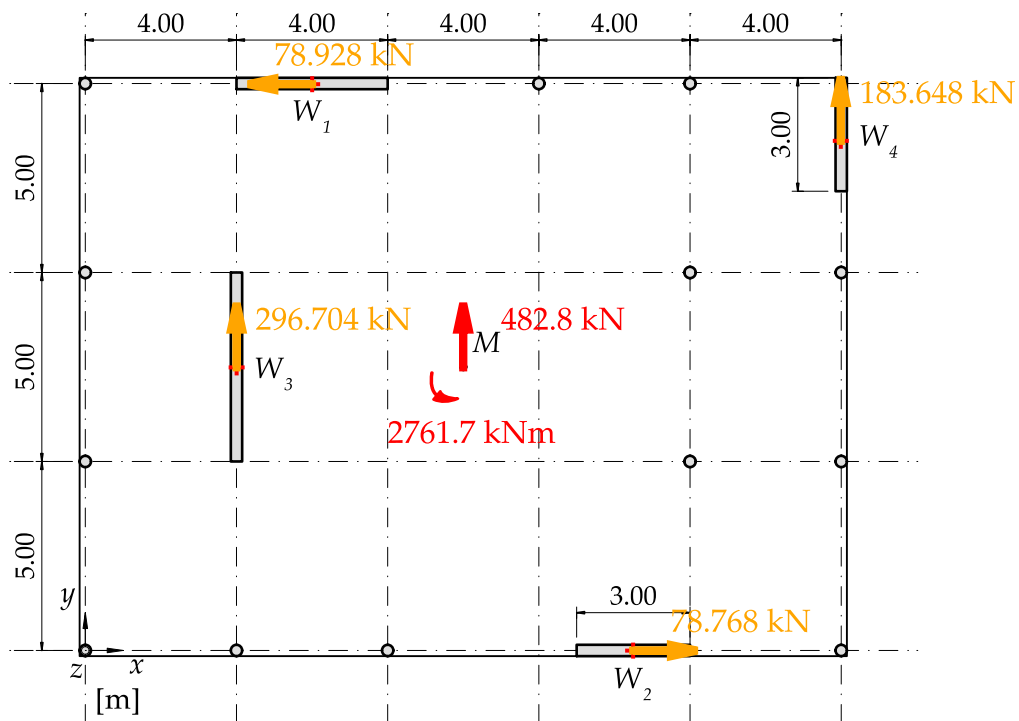


Abbildung 17.12.: Scheibenkräfte im 1.OG durch die Kraft in Y-Richtung

$$F_{y31} = -1.1 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$F_{y33} = 4.14 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$F_{y32} = 1.1 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$F_{y34} = 2.56 \cdot 10^5 \text{ N}$$

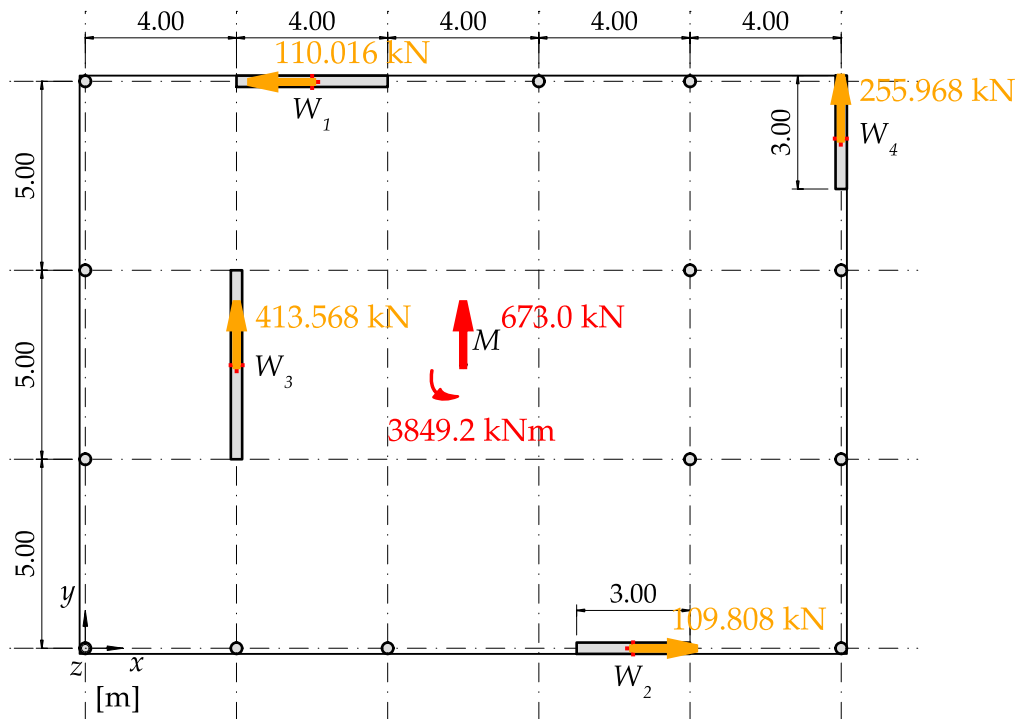


Abbildung 17.13.: Scheibenkräfte im 2.OG durch die Kraft in Y-Richtung

## 18. Beispiel: Rayleigh-Quotient und Fundamentsteifigkeit beim Ersatzkraftverfahren

### 18.1. Aufgabenstellung

In Abbildung 18.1 ist ein Gebäudegrundriss dargestellt. Dieser wird durch drei Stahlbeton-Wandscheiben ausgesteift. Die Anordnung ist symmetrisch, das Steifigkeitszentrum stimmt mit dem Massenzentrum der Decke überein.

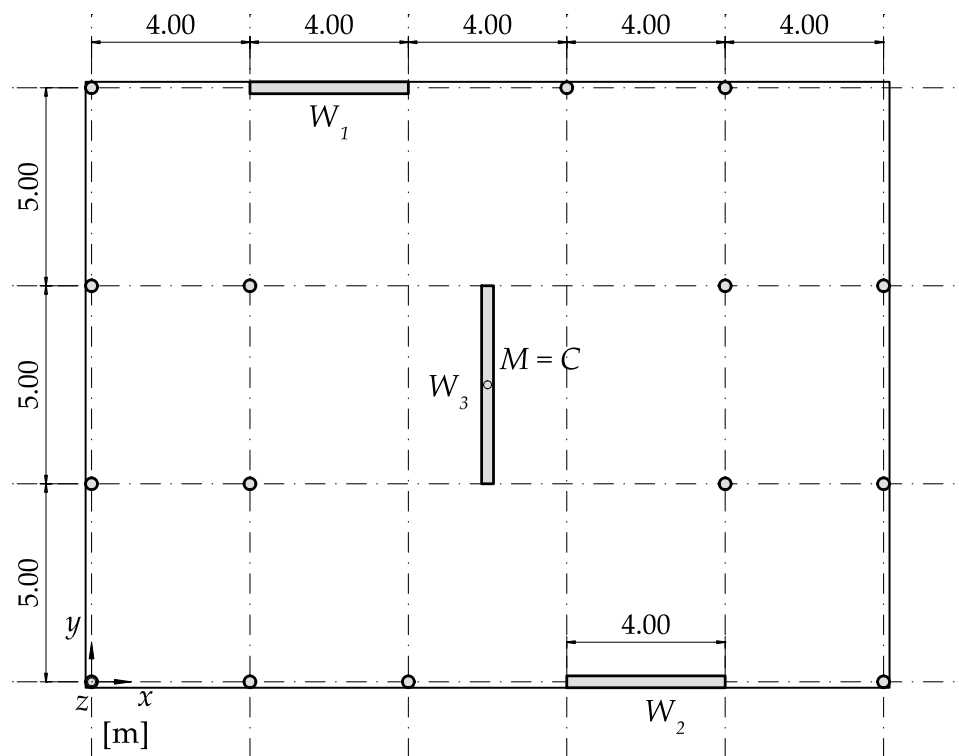


Abbildung 18.1.: Grundriss des Gebäudes

Das Untergeschoss gilt als *steifer Kasten*, folglich ist der Einspannungshorizont der Wandscheiben Oberkante UG. Es findet eine gewisse Einspannung der Wandscheiben in die Bodenplatte statt, je nach Ausbildung der Fundation. Diese kann man z.B. mit einer elastischen Einspannung (Drehfeder) modellieren. Die elastische Einspannung liegt im Bereich von 20% einer Volleinspannung. Im Beispiel wird diese als gelenkige Lagerung angenommen.

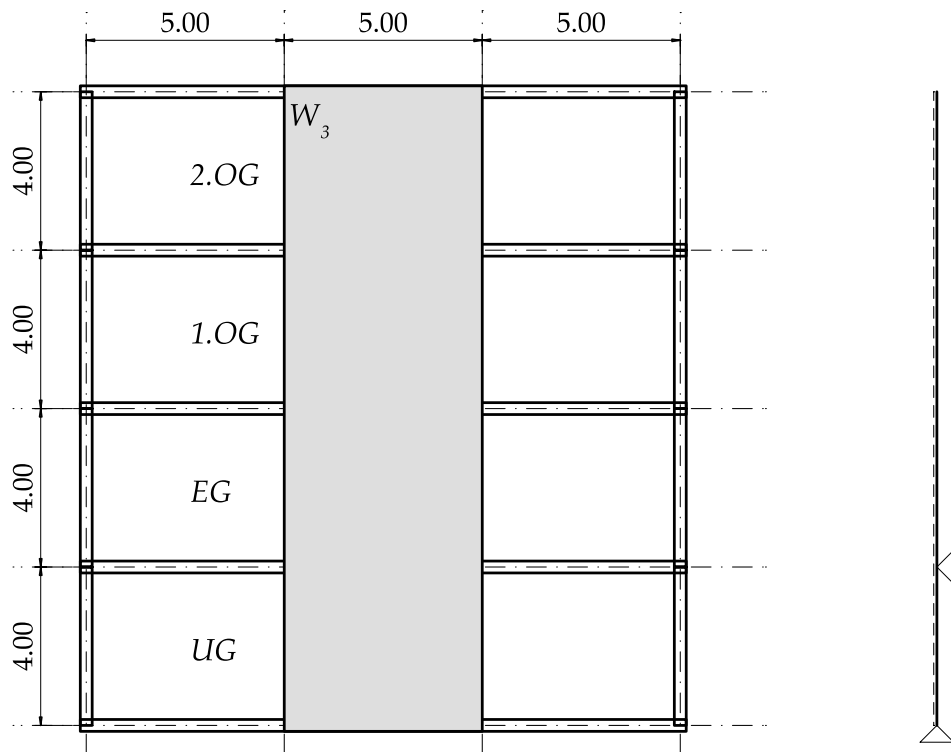


Abbildung 18.2.: Ansicht der Wand 3 des Gebäudes

Die Modellierung in Abbildung 18.3 trifft folgende Annahmen:

- Die Decken sind gelenkig an die Tragwände angeschlossen
- Die Deckenscheiben wirken in ihrer Ebene als starre Scheiben
- Die Wandscheiben bzw. Tragwände sind in den Kellerkasten eingespannt, so dass die Modellierung als Kragarm gerechtfertigt ist
- Die Massen der Decken werden im Aufriss als Punktmassen am Kragarm abgebildet (Dabei werden die Massen der Wände pro Geschoss je zur Hälfte der Geschossmassen zugeordnet)
- Die Stützen tragen lediglich zum vertikalen Lastabtrag bei. Deren Steifigkeit kann vernachlässigt werden

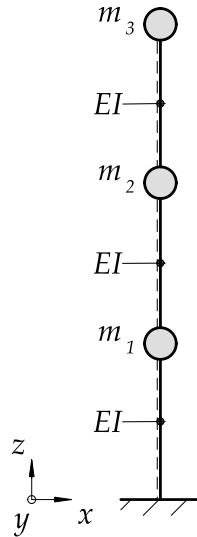


Abbildung 18.3.: Modellierung als Mehrmassenschwinger

Gesucht:

- Erste Eigenperiode in globaler Y-Richtung
- Ersatzkräfte durch das Ersatzkraftverfahren

Gegeben:

- Baugrundklasse  $B$
- Erdbebenzone  $Z2$
- Decken und Wände sind alle  $d$  stark
- Sämtliche Decken gelten als Wohnflächen (Lastermittlung - vereinfacht auch die Dachfläche)
- Reduktion der Biegesteifigkeit  $\gamma_{EI}$  zur Berücksichtigung der Rissbildung

Tabelle 18.1.: Verwendete Parameter der Aufgabe

$E = \frac{30000\text{N}}{\text{mm}^2}$	$G_{effsand} = \frac{120000000\text{N}}{\text{m}^2}$
$H_1 = 4\text{m}$	$H_2 = 4\text{m}$
$H_3 = 4\text{m}$	$L_{w1} = 4\text{m}$
$L_{w2} = 4\text{m}$	$L_{w3} = 5\text{m}$
$L_x = 4\text{m}$	$L_y = 5\text{m}$
$d = 0.3\text{m}$	$g = \frac{10\text{m}}{\text{s}^2}$
$\gamma_{EI} = 0.5$	$\gamma_f = 1.0$
$\nu_{sand} = 0.3$	$q = 2.0$

$$q_{auflastk} = \frac{1000\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\rho_c = \frac{25000\text{N}}{\text{m}^3}$$

$$q_{nutzlastk} = \frac{3000\text{N}}{\text{m}^2}$$


---

## 18.2. Musterlösung

### 18.2.1. Lastermittlung

Gemäss [1] Ziff. 16.5.2.3 sind ständige und quasiständige Lasten anzusetzen. Bei der Lastermittlung werden die Gewichtskräfte aus Eigenmassen und Auflasten ermittelt. Dazu werden pro Stockwerk die Gewichtskräfte der Wände definiert. Eine Punktmass erhält jeweils die Hälfte der darunter- und darüber liegenden Wände. Für die Decke über 2.OG bleibt folglich nur eine Hälfte der Wände.

$$A_{Decke} = 300.0\text{m}^2 \quad (18.1)$$

$$G_{Deckek} = 2.25 \cdot 10^6\text{N} \quad (18.2)$$

$$G_{Waendek} = 3.9 \cdot 10^5\text{N} \quad (18.3)$$

$$Q_{auflastk} = 3.0 \cdot 10^5\text{N} \quad (18.4)$$

$$Q_{nutzlastk} = 9.0 \cdot 10^5\text{N} \quad (18.5)$$

$$\psi_2 = 0.3 \quad (18.6)$$

Daraus lassen sich die Punktmassen bestimmen:

$$m_1 = \frac{G_{Waendek} + G_{decke} + Q_{auflastk} + Q_{nutzlastk}\psi_2}{g} \quad (18.7)$$

$$m_1 = \frac{3.21 \cdot 10^5\text{Ns}^2}{\text{m}} \quad (18.8)$$

$$m_2 = \frac{G_{Waendek} + G_{decke} + Q_{auflastk} + Q_{nutzlastk}\psi_2}{g} \quad (18.9)$$

$$m_2 = \frac{3.21 \cdot 10^5\text{Ns}^2}{\text{m}} \quad (18.10)$$



$$m_3 = \frac{\frac{G_{Wandek}}{2} + G_{decke} + Q_{auflastk} + Q_{nutzlastk} \psi_2}{g} \quad (18.11)$$

$$m_3 = \frac{3.02 \cdot 10^5 \text{Ns}^2}{\text{m}} \quad (18.12)$$

### 18.2.2. Biegesteifigkeit

Die Biegesteifigkeit wird in Y-Richtung bestimmt. Es wird lediglich Wand 3 berücksichtigt. Die Reduktion zur Berücksichtigung der Rissbildung ist ebenfalls miteinbezogen.

$$I_y = \frac{L_{w3}^3 d}{12} \quad (18.13)$$

$$I_y = 3.13 \text{m}^4 \quad (18.14)$$

$$EI_{\text{ersatz}} = \frac{EL_{w3}^3 d \gamma_{EI}}{12} \quad (18.15)$$

$$EI_{\text{ersatz}} = 4.69 \cdot 10^{10} \text{m}^2 \text{N} \quad (18.16)$$

### 18.2.3. Formfunktion aus der Biegelinie

Als geeignete statische Belastung für die Abbildung der Eigenform eignet sich eine lineare dreiecksförmige Verteilung von Einzellasten. Diese bewirken am Stab eine Verschiebung  $u_i$  auf Höhe der Geschossdecken.

#### 18.2.3.1. Rayleigh-Quotient

Gemäss dem Arbeitssatz gilt: Die von den äusseren Kräften  $F_i$  auf ihren Verschiebungswegen  $u_i$  geleistete Arbeit entspricht der inneren Arbeit, welche von den Schnittgrössen auf den Dehnungen im Querschnitt geleistet wird.

$$W_a = W_i \quad (18.17)$$

Dies führt zur Gleichung [18.18](#):

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \cdot u_i = \int_0^L \frac{1}{2} EI \cdot u''(x)^2 \cdot dx \quad (18.18)$$

Unter Berücksichtigung, dass die Stäbe als masselos zu betrachten sind (da die Massen der Wände zu den Punktmassen dazugezählt sind), lässt sich die Eigenkreisfrequenz gemäss Gleichung 18.19 beschreiben.

$$\omega_1^2 = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \cdot u_i}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot u_i^2} = \frac{\text{max. potentielle Energie}}{\text{max. kinetische Energie}} \quad (18.19)$$

Zur Ermittlung der Biegelinie, bzw. der Verformungen  $u_i$  wird das gleiche Vorgehen wie bei der Ermittlung der Nachgiebigkeitsmatrix angewendet.

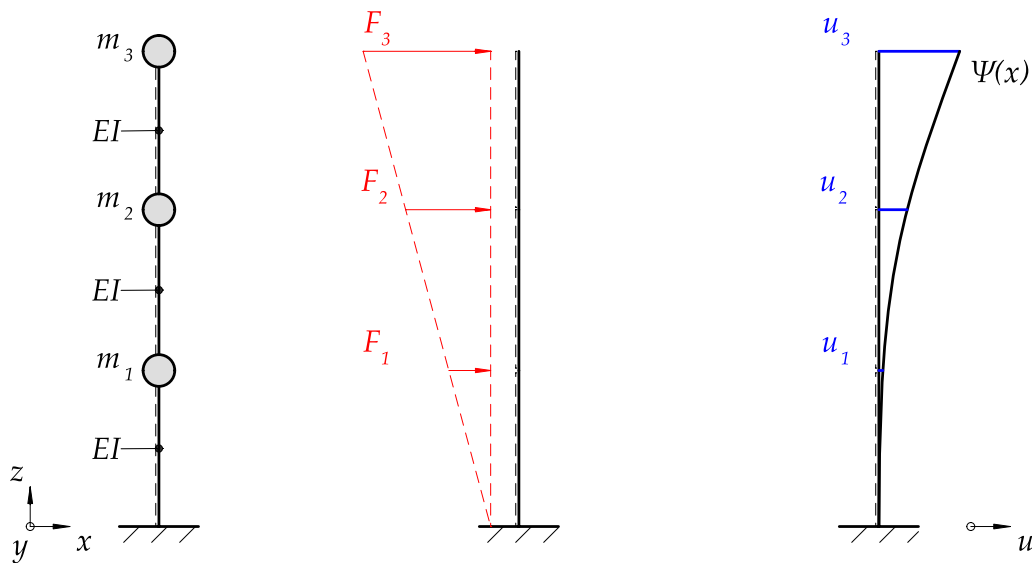


Abbildung 18.4.: System mit Einwirkungen zur Bestimmung der Formfunktion anhand der Biegelinie

Daraus lassen sich die Kräftezustände beschreiben:

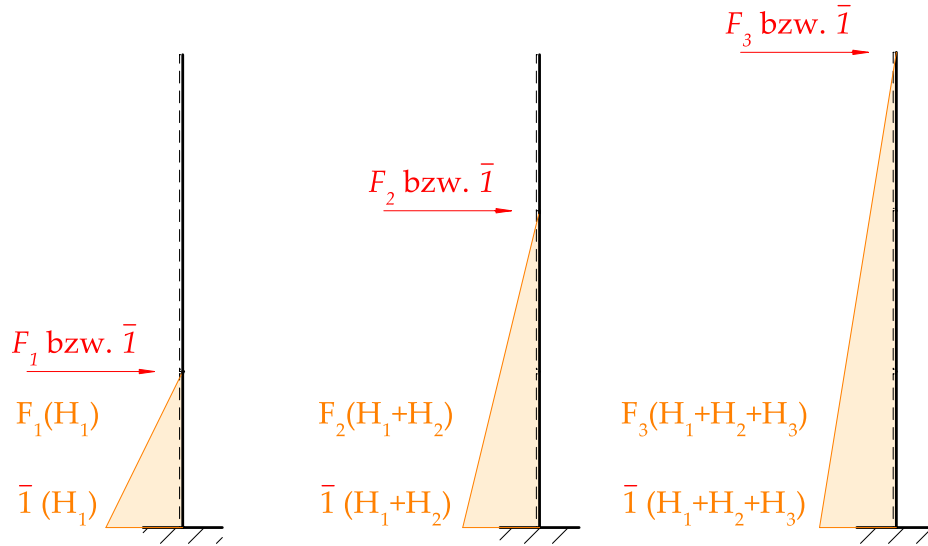


Abbildung 18.5.: Schnittgrößen im realen und fiktiven Kräftezustand

Durch die Anwendung der Arbeitsgleichung lassen sich die jeweiligen Deformationen bestimmen. Die Indizes  $ij$  in  $\delta_{ij}$  bedeuten  $i$  Position der realen Einwirkung und  $j$  Position der fiktiven Einwirkung. Dies resultiert zur Nachgiebigkeitsmatrix. Invertiert folgt daraus die Steifigkeitsmatrix. Mit den Einwirkungen multipliziert folgt die Deformation an jedem Punkt.

Zur Bestimmung der Nachgiebigkeitsmatrix werden die Kräfte  $F_i = 1$  gesetzt. Durch Multiplikation mit dem effektiven Kraftvektor resultieren die entsprechenden Verformungen.

$$\delta_{11} = \frac{4H_1^3}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} \quad (18.20)$$

$$\delta_{12} = \frac{2H_1^2 \cdot (3H_1 + 2H_2)}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} \quad (18.21)$$

$$\delta_{13} = \frac{2H_1^2 \cdot (3H_1 + 3H_2 + 2H_3)}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} \quad (18.22)$$

$$\delta_{21} = \frac{2H_1^2 \cdot (3H_1 + 2H_2)}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} \quad (18.23)$$

$$\delta_{22} = \frac{2(H_1 + H_2)^2 \cdot (2H_1 + 2H_2)}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} \quad (18.24)$$

$$\delta_{23} = \frac{2(H_1 + H_2)^2 \cdot (2H_1 + 2H_2 + 3H_3)}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} \quad (18.25)$$

$$\delta_{31} = \frac{2H_1^2 \cdot (3H_1 + 3H_2 + 2H_3)}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} \quad (18.26)$$

$$\delta_{32} = \frac{2(H_1 + H_2)^2 \cdot (2H_1 + 2H_2 + 3H_3)}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} \quad (18.27)$$

$$\delta_{33} = \frac{2(H_1 + H_2 + H_3)^2 \cdot (2H_1 + 2H_2 + 2H_3)}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} \quad (18.28)$$

Eingesetzt in die Nachgiebigkeitsmatrix und mit dem Kraftvektor multipliziert:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{4H_1^3}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} & \frac{H_1^2 \cdot (6H_1 + 4H_2)}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} & \frac{H_1^2 \cdot (6H_1 + 6H_2 + 4H_3)}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} \\ \frac{H_1^2 \cdot (6H_1 + 4H_2)}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} & \frac{4(H_1 + H_2)^3}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} & \frac{(H_1 + H_2)^2 \cdot (4H_1 + 4H_2 + 6H_3)}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} \\ \frac{H_1^2 \cdot (6H_1 + 6H_2 + 4H_3)}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} & \frac{(H_1 + H_2)^2 \cdot (4H_1 + 4H_2 + 6H_3)}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} & \frac{4(H_1 + H_2 + H_3)^3}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} \end{bmatrix} \quad (18.29)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{4.55 \cdot 10^{-7} \text{ mm}}{\text{N}} & \frac{1.14 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{\text{N}} & \frac{1.82 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{\text{N}} \\ \frac{1.14 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{\text{N}} & \frac{3.64 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{\text{N}} & \frac{6.37 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{\text{N}} \\ \frac{1.82 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{\text{N}} & \frac{6.37 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{\text{N}} & \frac{1.23 \cdot 10^{-5} \text{ mm}}{\text{N}} \end{bmatrix} \quad (18.30)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1000 \text{ N} \\ 2000 \text{ N} \\ 3000 \text{ N} \end{bmatrix} \quad (18.31)$$

$$u = DF \quad (18.32)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.00819 \text{ mm} \\ 0.0275 \text{ mm} \\ 0.0514 \text{ mm} \end{bmatrix} \quad (18.33)$$

### 18.2.3.1.1. Alternative

Alternativ kann die Nachgiebigkeitsmatrix mit dem folgenden Bildungsgesetz ermitteln. Dies gilt **nur** bei gleichen Stockwerkshöhen!

$$D_{ij} = \frac{H^3}{6EI} \cdot [j^2 \cdot (3 \cdot i - j)] \quad (18.34)$$

vereinfacht:

$$D_{ij} = v \cdot \Delta \quad (18.35)$$

$$v = \frac{H_1 H_2 H_3}{6EI_{\text{ersatz}}} \quad (18.36)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 5 & 16 & 28 \\ 8 & 28 & 54 \end{bmatrix} \quad (18.37)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{4H_1 H_2 H_3}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} & \frac{10H_1 H_2 H_3}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} & \frac{16H_1 H_2 H_3}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} \\ \frac{10H_1 H_2 H_3}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} & \frac{32H_1 H_2 H_3}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} & \frac{56H_1 H_2 H_3}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} \\ \frac{16H_1 H_2 H_3}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} & \frac{56H_1 H_2 H_3}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} & \frac{108H_1 H_2 H_3}{EL_{w3}^3 d\gamma_{EI}} \end{bmatrix} \quad (18.38)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{4.55 \cdot 10^{-7} \text{ mm}}{\text{N}} & \frac{1.14 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{\text{N}} & \frac{1.82 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{\text{N}} \\ \frac{1.14 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{\text{N}} & \frac{3.64 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{\text{N}} & \frac{6.37 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{\text{N}} \\ \frac{1.82 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{\text{N}} & \frac{6.37 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{\text{N}} & \frac{1.23 \cdot 10^{-5} \text{ mm}}{\text{N}} \end{bmatrix} \quad (18.39)$$

Die durch das Bildungsgesetz ermittelte Nachgiebigkeitsmatrix entspricht, der mittels der Arbeitsgleichung ermittelten.

### 18.2.3.2. Eigenkreisfrequenz

Diese kann nach Gleichung 18.19 ermittelt werden.

$$E_{\text{pot}} = 0.218 \text{ mN} \quad (18.40)$$

$$E_{\text{kin}} = 0.00106 \text{ mNs}^2 \quad (18.41)$$

$$\omega_1 = \frac{14.3}{s} \quad (18.42)$$

$$f_1 = \frac{2.28}{s} \quad (18.43)$$

$$T_1 = 0.439s \quad (18.44)$$

### 18.2.3.3. Bemessungsspektrum

---

$S = 1.2$	$T_B = 0.08s$
$T_C = 0.35s$	$T_D = 2.0s$
$a_{gd} = \frac{1.0m}{s^2}$	$g = \frac{10.0m}{s^2}$
$\gamma_f = 1.0$	$q = 2.0$

---

$$S_d = \frac{2.5ST_C a_{gd} \gamma_f}{T g q} \quad (18.45)$$

$$S_{dy} = 0.12 \quad (18.46)$$

### 18.2.3.4. Gesamt-Ersatzkraft

Die Stockwerksquerkraft resultiert nach Norm aus Gleichung [18.47](#).

$$F_d = S_d \cdot \sum_{j=1} (G_k + \psi_2 \cdot Q_k)_j \quad (18.47)$$

Aufgeteilt auf die Geschosse wird diese nach Gleichung [18.48](#).

$$F_{d,i} = \frac{z_i \sum_{i=1} (G_k + \psi_2 \cdot Q_k)_i}{\sum_{j=1} z_j \cdot (G_k + \psi_2 \cdot Q_k)_j} \cdot F_d \quad (18.48)$$

Der Term der Gleichung [18.49](#) entspricht den Punktmassen.

$$G_k + \psi_2 \cdot Q_k \quad (18.49)$$

Die Ersatzkraft greift am Massenschwerpunkt der Decke an.

$$F_{dy} = 1.13 \cdot 10^6 \text{N} \quad (18.50)$$

$$F_{y1} = 1.94 \cdot 10^5 \text{N}$$

$$F_{y3} = 5.47 \cdot 10^5 \text{N}$$

$$F_{y2} = 3.88 \cdot 10^5 \text{N}$$

### 18.2.3.5. Schnittgrößen

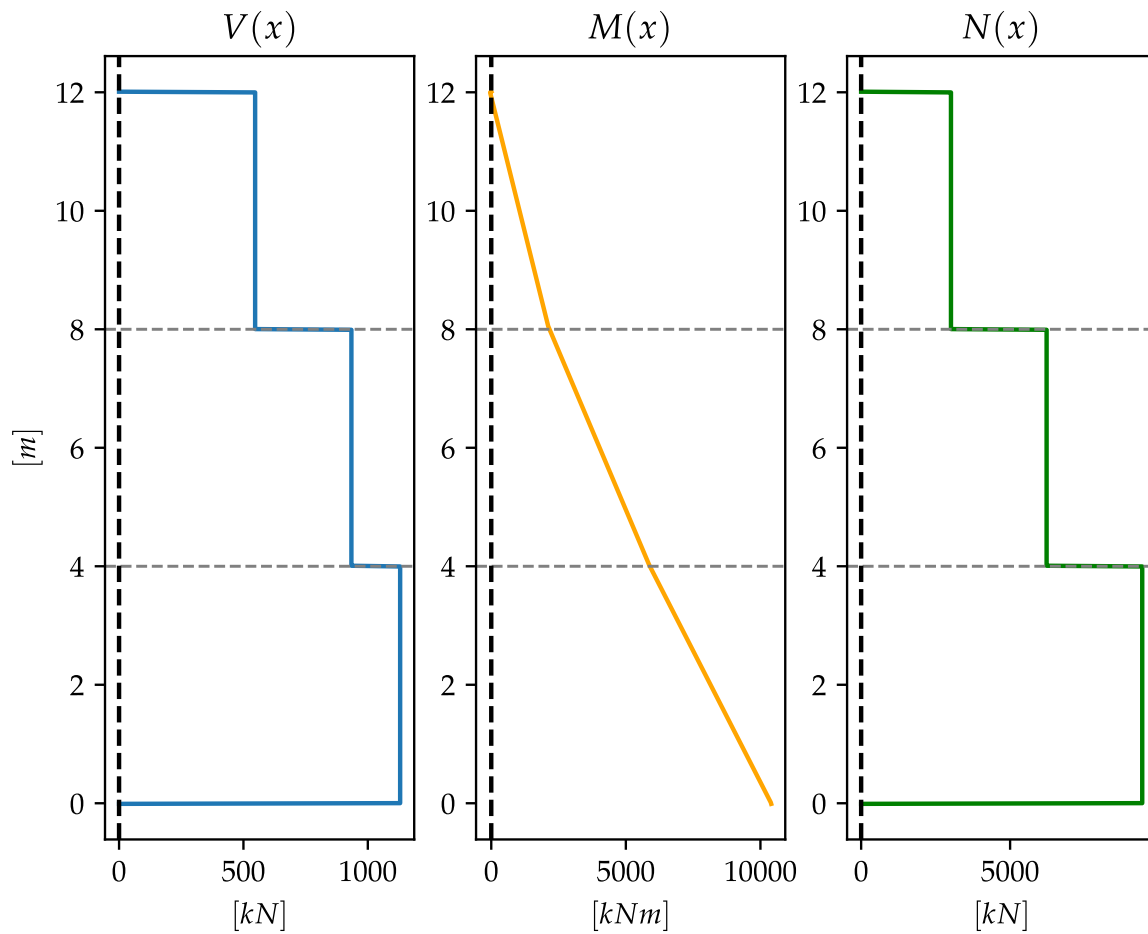


Abbildung 18.6.: Maximale Schnittgrößen

Unter der Annahme dass der Einspanngrad der Tragwand in die *biegeweiche* Bodenplatte zu vernachlässigen ist, kann das Biegemoment am Kragarm in ein Kräftepaar mit der Stockwerks-höhe im UG von 4m aufgelöst werden. Entsprechend dem System in Abbildung 18.2. Somit ergeben sich nachfolgend dargestellten Schnittkräfte. Elastische Einspanngrade in die Bodenplatte können in Abhängigkeit der Steifigkeit der Foundation berücksichtigt werden. Zu beachten sind die hohen Querkräfte der Tragwand im UG. Da infolge Querkraft ein sprödes Versagen erfolgt, ist bei der Querkraft-Bemessung besonders Beachtung zu schenken.

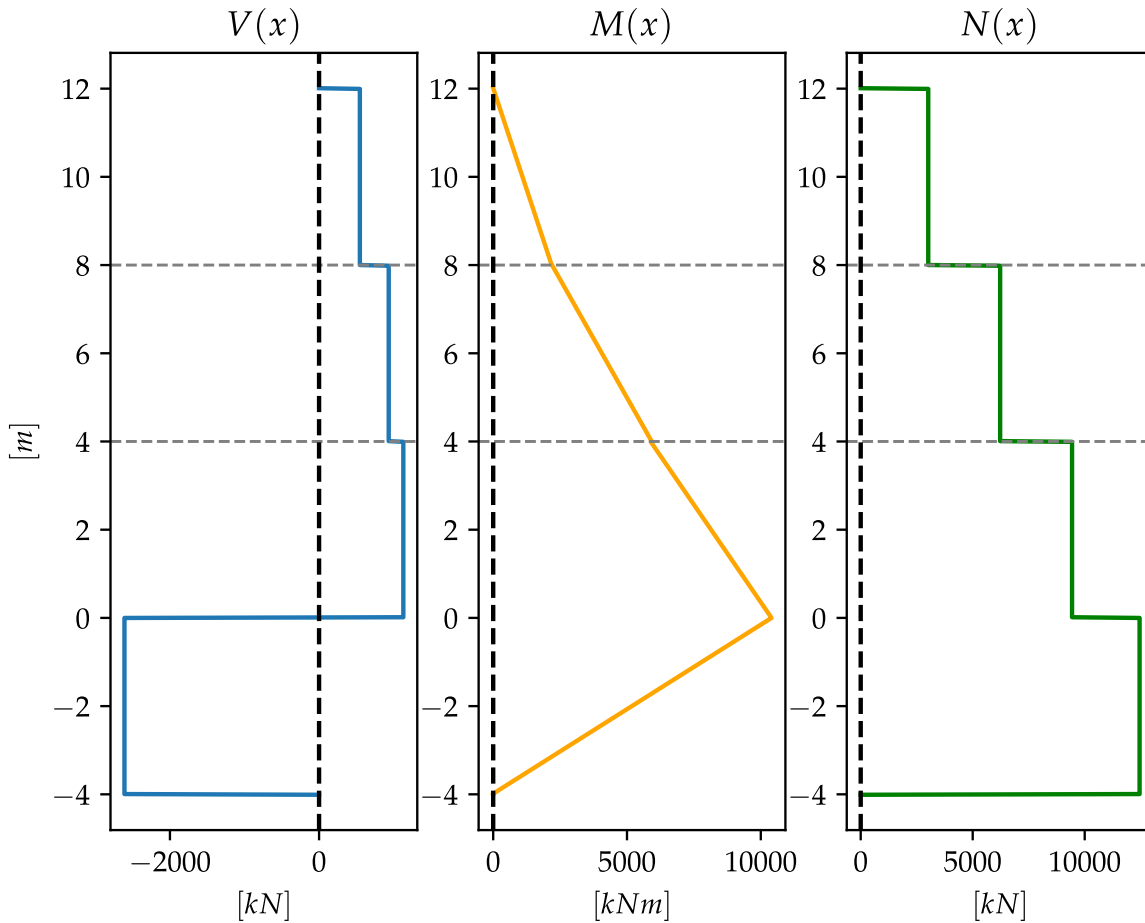


Abbildung 18.7.: Maximale Schnittgrößen erweitert in das UG

In einem weiteren Schritt sind die Auflagerkräfte in der Decke über UG und in der Bodenplatte mit einem geeigneten Fachwerkmodell in die Aussenwände (ebene Scheibe) abzuleiten. Des Weiteren ist auf die lokale Lastenleitung der Auflagerkräfte in die Decken bzw. Bodenplatte zu achten bzw. rechnerisch nachzuweisen.



$$R_A = 2.61 \cdot 10^6 \text{N} \quad (18.51)$$

$$R_B = -3.74 \cdot 10^6 \text{N} \quad (18.52)$$

#### 18.2.4. Formfunktion analytisch

Als Formfunktion wählen wir die bekannte normierte analytische Funktion für den Kragstab, welche die kinematischen Randbedingungen erfüllt.

##### 18.2.4.1. Rayleigh-Quotient

$$H = 12\text{m} \quad (18.53)$$

$$\Psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2H}\right) \quad (18.54)$$

$$E_{pot,max} = E_{kin,max} \quad (18.55)$$

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^L EI[u''(x)]^2 dx}{\int_0^L m_{const.}[u(x)]^2 dx} \quad (18.56)$$

Dies lässt sich mit entsprechender Formfunktion schreiben:

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^L EI[\Psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L m_{const.}[\Psi(x)]^2 dx} \quad (18.57)$$

Durch die Ermittlung der zweiten Ableitung der Formfunktion:

$$\Psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2H}\right) \quad (18.58)$$

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) = \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi x}{2H}\right)}{2H} \quad (18.59)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \frac{\pi^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2H}\right)}{4H^2} \quad (18.60)$$

Die Funktionswerte der Punktmassen:

$$\Psi_{x1}\left(\frac{H}{3}\right) = 0.134 \quad (18.61)$$

$$\Psi_{x2}\left(\frac{2H}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad (18.62)$$

$$\Psi_{x3}(H) = 1 \quad (18.63)$$

#### 18.2.4.2. Eigenkreisfrequenz

Gleichung 18.57 umgeformt und substituiert:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \quad (18.64)$$

Masse:

$$m^* = \Psi_{x1}^2 m_1 + \Psi_{x2}^2 m_2 + \Psi_{x3}^2 m_3 \quad (18.65)$$

$$m^* = m_1 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{m_2}{4} + m_3 \quad (18.66)$$

$$m^* = \frac{3.88 \cdot 10^5 \text{Ns}^2}{\text{m}} \quad (18.67)$$

Steifigkeit:

$$k^* = EI_{\text{yersatz}} \int_0^L \left( \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) \right)^2 dx \quad (18.68)$$

$$k^* = \frac{\pi^4 E L_{w3}^3 d \gamma_{EI}}{384 H^3} \quad (18.69)$$

$$k^* = \frac{8.25 \cdot 10^7 \text{N}}{\text{m}} \quad (18.70)$$

Eigenkreisfrequenz:

$$\omega_1 = \frac{14.6}{\text{s}} \quad (18.71)$$

Eigenfrequenz und Eigenperiode:

$$f_1 = \frac{2.32}{\text{s}} \quad (18.72)$$

$$T_1 = 0.43\text{s} \quad (18.73)$$

### 18.2.5. Erweiterung des Rayleigh-Quotienten

Eine Erweiterung des Rayleigh-Quotienten besteht in der näherungsweisen Berücksichtigung von Schubverformungen und Fundamentverdrehungen. Beide führen zu einem weicherem System. Bei langen Stahlbetonwänden und Mauerwerkswänden sind die Schubverformungen zu berücksichtigen. Bei weichem Baugrund folglich die Fundamentverdrehungen.

Die Abbildung 18.8 zeigt ein idealisiertes Kragssystem für einen Mehrmassenschwinger in ausgelenkter Lage. Es gilt die Annahme für kleine Winkel  $\tan(\phi) = \phi$ .

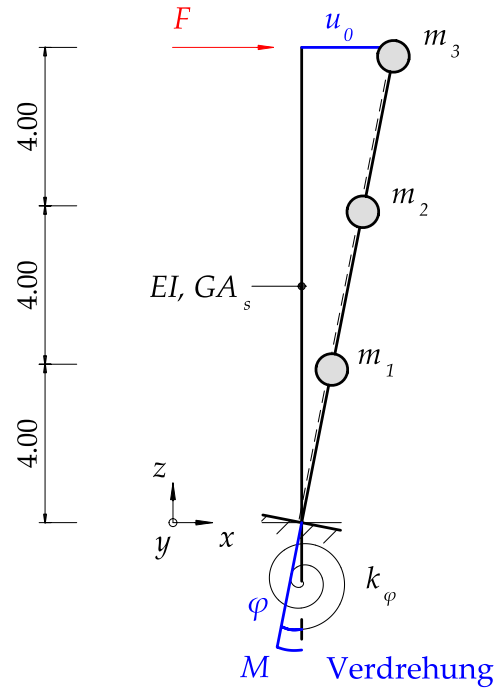


Abbildung 18.8.: Mehrmassenschwinger erweitert mit einer Fundamentverdrehung und Schubsteifigkeit

Die Eigenform wird mit einer linearen Formfunktion  $\Psi(x)$  angenähert.

$$\Psi(x) = \frac{u_0 x}{H} \quad (18.74)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = 0 \quad (18.75)$$

$$\Psi(0) = 0 \quad (18.76)$$

$$\Psi(H) = u_0 \quad (18.77)$$

### 18.2.5.1. Rayleigh-Quotient

Der Rayleigh-Quotient lässt sich in Analogie des Vorgehens in Gleichung 18.17 folgendermaßen beschreiben:

$$\omega_1^2 = \frac{F \cdot u_0}{\sum_{i=1}^n m_i [\Psi_i(x)]^2} \quad (18.78)$$

Die Verformung  $u_0$  setzt aus einer Reihenschaltung von Federn zusammen und bezeichnet die Nachgiebigkeit. Diese Nachgiebigkeiten setzen sich aus der Beige- und Schubverformung des Stabes und der Fundamntdrehung infolge dem Einspannmoment  $M = 1 \cdot H$  zusammen.

$$u_0 = \frac{H^3}{3 \cdot EI} + \frac{H}{G \cdot A_s} + \frac{H^2}{k_\phi} \quad (18.79)$$

#### 18.2.5.1.1. Schubverformung

Die Gleichung 18.79 wird folgend hergeleitet:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\frac{V}{A_s}}{G} = \frac{u_G}{H} \quad (18.80)$$

$\gamma$  = Schubwinkel Der Schubwinkel ist bei der Schubspannung *gleichbedeutend* wie die Dehnung  $\varepsilon$  bei der Normalspannung.

$\tau = \frac{V}{A_s}$  Die Schubspannung definiert sich aus der Querkraft über die Querschnittsfläche. Als Annahme gilt eine konstante Schubspannungsverteilung über die Wandlänge.

$G$  = Schubmodul Das Schubmodul ist das Elastizitätsmodul bei den Schubspannungen.

$u_G$  = Anteil an Gesamtverformung

Gleichung Gleichung 18.80 lässt sich nach  $u_G$  umformen für  $V = 1$ :

$$u_G = \frac{H}{G \cdot A_s} \quad (18.81)$$

Zur Beziehung, es lässt sich ein Dreieck aus  $u_G$  und  $H$  bilden, der Winkel am Fusspunkt entspricht dem Schubwinkel.

$$\gamma = \frac{u_G}{H} \quad (18.82)$$

#### 18.2.5.1.2. Fundamentverdrehung

Infolge elastischer Lagerung resultiert die Fundamentverdrehung:

$$k_{\varphi} = \frac{M}{\varphi} \quad (18.83)$$

Das Biegemoment resultiert aus  $F = 1$  mit entsprechendem Hebelarm. Die Verdrehung folgt aus der Kopfverschiebung verteilt an die Systemhöhe. Gleiche Winkelbetrachtung wie bei dem Schubwinkel. Mit  $M = 1 \cdot H$  und  $\varphi = \frac{u_{\varphi}}{H}$

$$u_{\varphi} = \frac{H^2}{k_{\varphi}} \quad (18.84)$$

$u_{\varphi}$  = Anteil an Gesamtverformung

#### 18.2.5.1.3. Biegeverformung

Für die Biegeverformung gilt folgendes:

$$u_B = \frac{F}{k} \quad (18.85)$$

Die Steifigkeit für den eingespannten Kragarm:

$$k = \frac{3 \cdot EI}{H^3} \quad (18.86)$$

#### 18.2.5.2. Nachgiebigkeiten

Wir wissen nun, welchen Einfluss die Fundamentverdrehung, sowie die Schubverformung auf den Rayleigh-Quotienten hat. Nun gilt es die Federsteifigkeit zu definieren.

#### 18.2.5.2.1. Schubverformung

Dabei gilt, die Schubsteifigkeit wird um den gleichen Faktor wie die Biegesteifigkeit abgemindert, um das Rissverhalten zu berücksichtigen.

$$A_s = L_{w3}d \quad (18.87)$$

$$A_s = 1.5\text{m}^2 \quad (18.88)$$

$$\nu_c = 0.2 \quad (18.89)$$

$$G_c = \frac{E}{2 - 2\nu_c} \quad (18.90)$$

$$G_c = \frac{18750.0\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (18.91)$$

Schubsteifigkeit der Tragwand:

$$GA_{II} = A_s G_c \gamma_{EI} \quad (18.92)$$

$$GA_{II} = 14062500000.0\text{N} \quad (18.93)$$

Verformungsanteil durch die Querkraft:

$$u_g = \frac{8.53 \cdot 10^{-10}\text{m}}{\text{N}} \quad (18.94)$$

#### 18.2.5.2.2. Fundamentverdrehung

Sowie wird die Fundamentsteifigkeit nach [2] Tabelle 7 ermittelt. Der Baugrund wird als locker gelagerter Sand angenommen. Effektive Werte sind aus geologischen Berichten zu entnehmen. Dabei ist die Baugrundklasse zu berücksichtigen:

Bodenkennwert nach Tabelle 6:

$$G_{eff} = 0.935 G_{effsand} \quad (18.95)$$

$$G_{eff} = \frac{112200000.0\text{N}}{\text{m}^2} \quad (18.96)$$

Drehfeder Baugrund nach Tabelle 7 und Tabelle 8

$$b = 15\text{m} \quad (18.97)$$

$$a = 20\text{m} \quad (18.98)$$

$$k_{xx} = \frac{G_{eff} b^3 \cdot \left( \frac{0.4a}{b} + 0.1 \right)}{1 - \nu_{sand}} \quad (18.99)$$

$$k_{xx} = 3.43 \cdot 10^{11} \text{mN} \quad (18.100)$$

Multiplikationsfaktor zur Berücksichtigung der Einspannung:

$$h_1 = 4\text{m} \quad (18.101)$$

$$h_2 = 4.15\text{m} \quad (18.102)$$

$$h_3 = 0.3\text{m} \quad (18.103)$$

$$m_{xx} = 1 + \frac{2.5h_3 \cdot \left( 1 + \frac{2h_3 \sqrt{\frac{b}{a}}}{b \left( \frac{h_3}{h_2} \right)^{0.2}} \right)}{b} \quad (18.104)$$



$$m_{xx} = 1.053 \quad (18.105)$$

Drehfeder unter Berücksichtigung der Einspannung:

$$k_{xx} = 3.61 \cdot 10^{11} \text{mN} \quad (18.106)$$

In Gleichung 18.84 eingesetzt:

$$u_{\varphi} = \frac{3.99 \cdot 10^{-10} \text{m}}{\text{N}} \quad (18.107)$$

#### 18.2.5.2.3. Biegeverformung

$$k_{bieve} = \frac{81.4 \text{mN}}{\text{mm}^2} \quad (18.108)$$

$$u_B = \frac{1.23 \cdot 10^{-8} \text{m}}{\text{N}} \quad (18.109)$$

#### 18.2.5.2.4. Totale Deformation

$$u_0 = u_B + u_g + u_{\phi} \quad (18.110)$$

$$u_0 = \frac{1.35 \cdot 10^{-8} \text{m}}{\text{N}} \quad (18.111)$$

Eingesetzt in Gleichung 18.78:

$$\omega_1^2 = \frac{154.0}{\text{s}^2} \quad (18.112)$$

$$\omega_1 = \frac{12.4}{\text{s}} \quad (18.113)$$

$$f_1 = \frac{1.97}{\text{s}} \quad (18.114)$$

$$T_1 = 0.506 \text{s} \quad (18.115)$$

### 18.2.5.3. Bemessungsspektrum

---

$S = 1.2$	$T_B = 0.08\text{s}$
$T_C = 0.35\text{s}$	$T_D = 2.0\text{s}$
$a_{gd} = \frac{1.0\text{m}}{\text{s}^2}$	$g = \frac{10.0\text{m}}{\text{s}^2}$
$\gamma_f = 1.0$	$q = 2.0$

---

$$S_d = \frac{2.5ST_C a_{gd} \gamma_f}{Tgq} \quad (18.116)$$

$$S_{dy} = 0.104 \quad (18.117)$$

### 18.2.5.4. Gesamt-Ersatzkraft

Das Vorgehen ist analog Gleichung 18.47 und Folgenden.

$$F_{dynach} = 9.78 \cdot 10^5 \text{N} \quad (18.118)$$

$$Reduktion = -15.4\% \quad (18.119)$$

Im Vergleich mit der Lösung ohne Nachgiebigkeit verringert sich die Gesamt-Ersatzkraft um ca. 15 % und folglich die Schnittgrößen ebenfalls. Wenn die Eigenperiode im abfallenden Ast des Spektrums zu liegen kommt, ist die Berücksichtigung der Nachgiebigkeiten eine wirtschaftliche Lösung.

---

$F_{y1} = 1.68 \cdot 10^5 \text{N}$	$F_{y2} = 3.36 \cdot 10^5 \text{N}$
$F_{y3} = 4.74 \cdot 10^5 \text{N}$	

---

### 18.2.5.5. Schnittgrößen

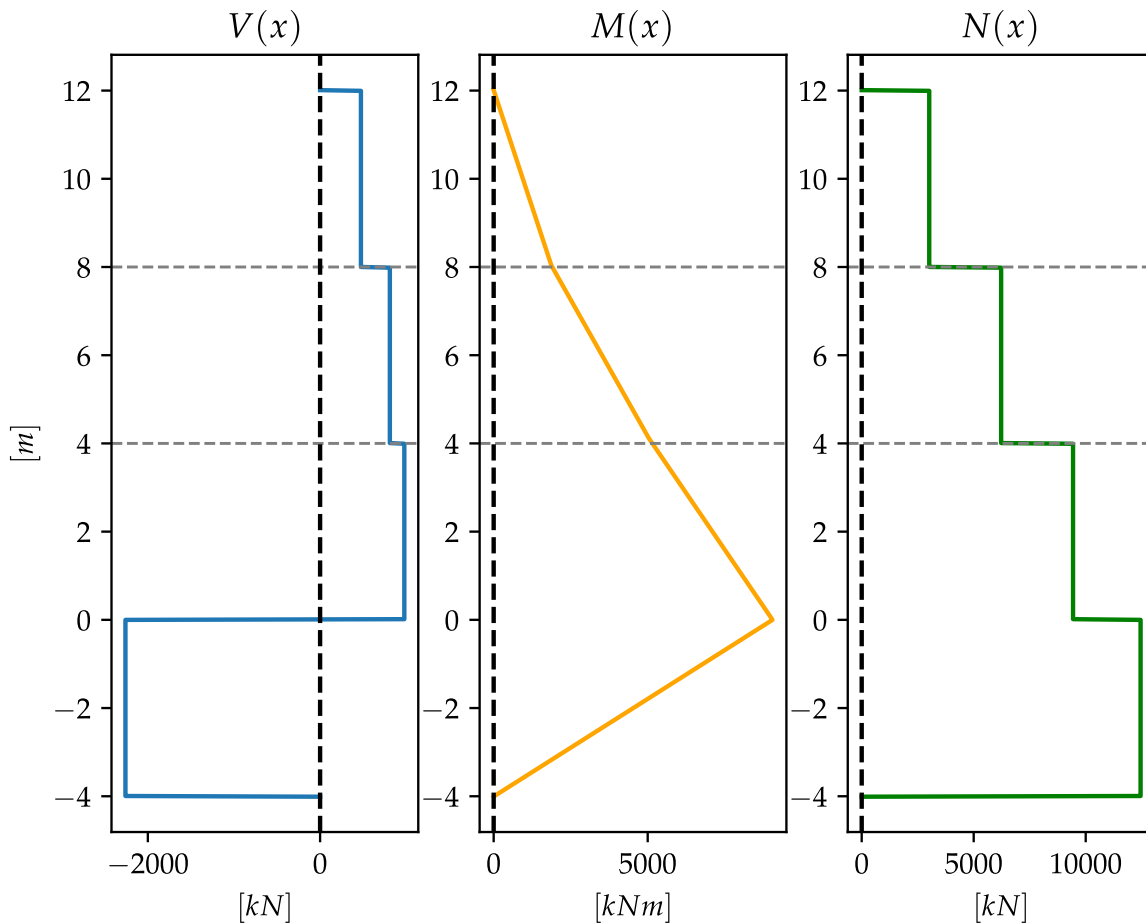


Abbildung 18.9.: Maximale Schnittgrößen erweitert in das UG unter Berücksichtigung der Nachgiebigkeiten

$$R_A = 2.26 \cdot 10^6 \text{ N} \quad (18.120)$$

$$R_B = -3.24 \cdot 10^6 \text{ N} \quad (18.121)$$

### 18.2.6. Reduktion der Wandlänge

Neben der Berücksichtigung der Nachgiebigkeit seitens Fundation und Schubverformungen, hat die Wandlänge einen wesentlichen Einfluss auf Ersatzkräfte. Die Tabelle 18.6 zeigt den Ein-

fluss der Wandlänge  $L_{w3}$  auf die Erdbebenersatzkräfte. Als obere Grenze gilt die Bedingung aus [1] Ziff. 16.5.2.1, die Grundschiwingzeit darf  $4 \cdot T_c$  nicht überschreiten.

Tabelle 18.6.: Einfluss der Wandlänge auf die Ersatzkräfte und Grundschiwingzeit

	5 m	4 m	3 m
$F_d$	1128.4 kN	803.50 kN	519.28 kN
$F_{3d}$	546.50 kN	390.06 kN	252.66 kN
$F_{2d}$	387.88 kN	275.63 kN	177.75 kN
$F_{1d}$	193.94 kN	137.81 kN	88.875 kN
$T_1$	0.439 s	0.612 s	0.939 s

$$T_{1max} = 4T_C \quad (18.122)$$

$$T_{1max} = 1.4s \quad (18.123)$$



---

$E = \frac{27000000000\text{N}}{\text{m}^2}$	$H_i = 3.105\text{m}$
$I_x = 14.89\text{m}^4$	$I_y = 28.27\text{m}^4$
$g = \frac{10\text{m}}{\text{s}^2}$	$m_i = \frac{1278000\text{Ns}^2}{\text{m}}$

---

## 19.2. Musterlösung

### 19.2.1. Rayleigh-Quotient

Mittels dem Rayleigh-Quotient für das vereinfachte Modell lässt sich die Grundfrequenz direkt bestimmen.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^5 \mathbf{F}_{i,0} \mathbf{u}_{i,0}}{\sum_{i=0}^5 \mathbf{M}_{i,0} \mathbf{u}_{i,0}^2}} \quad (19.1)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (19.2)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_i \\ m_i \\ m_i \\ m_i \\ m_i \\ m_i \end{bmatrix} \quad (19.3)$$

$$T = \frac{1}{f} \quad (19.4)$$

Dabei entspricht  $\mathbf{u}$  dem Verschiebungsvektor infolge des Kraftvektors  $\mathbf{F}$ . Der Verschiebungsvektor kann mittels Nachgiebigkeitsmatrix bestimmt werden.

#### 19.2.1.1. Nachgiebigkeitsmatrix

Für gleichbleibende Geschosshöhen und Geschosssteifigkeiten lässt sich die Nachgiebigkeitsmatrix leicht mittels dem Bildungsgesetz in Gleichung 19.5 ermitteln.

$$\hat{f}_{i,j} = \frac{H^3}{6EI} \cdot j^2(3i - j) \text{ für } i \geq j \quad (19.5)$$

$\hat{\mathbf{f}}$  entspricht der Nachgiebigkeitsmatrix mit den Einträgen  $\hat{f}_{i,j}$ .

Beachte dabei, dass die Gleichung 19.5 nur für  $i \geq j$  gilt. Die Einträge entsprechen folgendem Schema:

$$\begin{bmatrix} f_{(1,1)} & f_{(1,2)} & f_{(1,3)} & f_{(1,4)} & f_{(1,5)} & f_{(1,6)} \\ f_{(2,1)} & f_{(2,2)} & f_{(2,3)} & f_{(2,4)} & f_{(2,5)} & f_{(2,6)} \\ f_{(3,1)} & f_{(3,2)} & f_{(3,3)} & f_{(3,4)} & f_{(3,5)} & f_{(3,6)} \\ f_{(4,1)} & f_{(4,2)} & f_{(4,3)} & f_{(4,4)} & f_{(4,5)} & f_{(4,6)} \\ f_{(5,1)} & f_{(5,2)} & f_{(5,3)} & f_{(5,4)} & f_{(5,5)} & f_{(5,6)} \\ f_{(6,1)} & f_{(6,2)} & f_{(6,3)} & f_{(6,4)} & f_{(6,5)} & f_{(6,6)} \end{bmatrix} \quad (19.6)$$

Unter strikter Anwendung von Gleichung 19.5 folgt daraus:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 28 & 54 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 40 & 81 & 128 & 0 & 0 \\ 14 & 52 & 108 & 176 & 250 & 0 \\ 17 & 64 & 135 & 224 & 325 & 432 \end{bmatrix} \quad (19.7)$$

Aufgrund von Symmetrie kann diese abschliessend über die Diagonale gespiegelt werden:

$$\frac{6EI}{H_i^3} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ 5 & 16 & 28 & 40 & 52 & 64 \\ 8 & 28 & 54 & 81 & 108 & 135 \\ 11 & 40 & 81 & 128 & 176 & 224 \\ 14 & 52 & 108 & 176 & 250 & 325 \\ 17 & 64 & 135 & 224 & 325 & 432 \end{bmatrix} \quad (19.8)$$

Durch Multiplikation der *Nachgiebigkeit* mit der *Einwirkung* resultiert die Deformation.

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{f}} \mathbf{F} \quad (19.9)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \frac{H_i^3}{6EI} & 5 \frac{H_i^3}{6EI} & 8 \frac{H_i^3}{6EI} & 11 \frac{H_i^3}{6EI} & 14 \frac{H_i^3}{6EI} & 17 \frac{H_i^3}{6EI} \\ 5 \frac{H_i^3}{6EI} & 16 \frac{H_i^3}{6EI} & 28 \frac{H_i^3}{6EI} & 40 \frac{H_i^3}{6EI} & 52 \frac{H_i^3}{6EI} & 64 \frac{H_i^3}{6EI} \\ 8 \frac{H_i^3}{6EI} & 28 \frac{H_i^3}{6EI} & 54 \frac{H_i^3}{6EI} & 81 \frac{H_i^3}{6EI} & 108 \frac{H_i^3}{6EI} & 135 \frac{H_i^3}{6EI} \\ 11 \frac{H_i^3}{6EI} & 40 \frac{H_i^3}{6EI} & 81 \frac{H_i^3}{6EI} & 128 \frac{H_i^3}{6EI} & 176 \frac{H_i^3}{6EI} & 224 \frac{H_i^3}{6EI} \\ 14 \frac{H_i^3}{6EI} & 52 \frac{H_i^3}{6EI} & 108 \frac{H_i^3}{6EI} & 176 \frac{H_i^3}{6EI} & 250 \frac{H_i^3}{6EI} & 325 \frac{H_i^3}{6EI} \\ 17 \frac{H_i^3}{6EI} & 64 \frac{H_i^3}{6EI} & 135 \frac{H_i^3}{6EI} & 224 \frac{H_i^3}{6EI} & 325 \frac{H_i^3}{6EI} & 432 \frac{H_i^3}{6EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (19.10)$$



$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{42H_i^3}{EI} \\ \frac{925H_i^3}{EI} \\ \frac{6EI}{950H_i^3} \\ \frac{3EI}{1535H_i^3} \\ \frac{3EI}{2173H_i^3} \\ \frac{3EI}{5663H_i^3} \\ \frac{6EI}{6EI} \end{bmatrix} \quad (19.11)$$

Durch Einsetzen der bestimmten Verformung in die Gleichung der Eigenfrequenz folgt:

$$f = \frac{\sqrt{43665341610} \sqrt{\frac{EI}{H_i^3 m_i}}}{4993178\pi} \quad (19.12)$$

$$T = \frac{\sqrt{43665341610}\pi}{8745 \sqrt{\frac{EI}{H_i^3 m_i}}} \quad (19.13)$$

## 19.2.2. Grundschiwingzeit

### 19.2.2.1. X-Richtung

Es gilt  $I$  mit  $I_y$  zu substituieren.

$$I_y = 28.27\text{m}^4 \quad (19.14)$$

$$\mathbf{u}_x = \begin{bmatrix} \frac{42.0H_i^3}{EI_y} \\ \frac{154.0H_i^3}{EI_y} \\ \frac{317.0H_i^3}{EI_y} \\ \frac{512.0H_i^3}{EI_y} \\ \frac{724.0H_i^3}{EI_y} \\ \frac{944.0H_i^3}{EI_y} \end{bmatrix} \quad (19.15)$$

$$\mathbf{u}_x = \begin{bmatrix} \frac{1.65 \cdot 10^{-9} \text{m}}{N} \\ \frac{6.05 \cdot 10^{-9} \text{m}}{N} \\ \frac{1.24 \cdot 10^{-8} \text{m}}{N} \\ \frac{2.01 \cdot 10^{-8} \text{m}}{N} \\ \frac{2.84 \cdot 10^{-8} \text{m}}{N} \\ \frac{3.7 \cdot 10^{-8} \text{m}}{N} \end{bmatrix} \quad (19.16)$$

Und für die Grundfrequenz:

$$f_x = \frac{1.88}{s} \quad (19.17)$$

$$T_x = 0.531s \quad (19.18)$$

Nach [1] 16.5.2.3

$$T_{1xapprox} = 0.991s \quad (19.19)$$

#### 19.2.2.2. Y-Richtung

Es gilt  $I$  mit  $I_x$  zu substituieren.

$$I_x = 14.89 \text{m}^4 \quad (19.20)$$

$$\mathbf{u}_y = \begin{bmatrix} \frac{42.0 H_i^3}{EI_x} \\ \frac{154.0 H_i^3}{EI_x} \\ \frac{317.0 H_i^3}{EI_x} \\ \frac{512.0 H_i^3}{EI_x} \\ \frac{724.0 H_i^3}{EI_x} \\ \frac{944.0 H_i^3}{EI_x} \end{bmatrix} \quad (19.21)$$

$$\mathbf{u}_y = \begin{bmatrix} \frac{3.13 \cdot 10^{-9} \text{m}}{N} \\ \frac{1.15 \cdot 10^{-8} \text{m}}{N} \\ \frac{2.36 \cdot 10^{-8} \text{m}}{N} \\ \frac{3.81 \cdot 10^{-8} \text{m}}{N} \\ \frac{5.39 \cdot 10^{-8} \text{m}}{N} \\ \frac{7.03 \cdot 10^{-8} \text{m}}{N} \end{bmatrix} \quad (19.22)$$

Und für die Grundfrequenz:

$$f_y = \frac{1.37}{s} \quad (19.23)$$

$$T_y = 0.732s \quad (19.24)$$

Nach [1] 16.5.2.3

$$T_{1yapprox} = 1.17s \quad (19.25)$$

### 19.2.3. Abminderung der Steifigkeit

Um die Rissbildung zu berücksichtigen, wird die Steifigkeit auf 30 % abgemindert.

#### 19.2.3.1. X-Richtung

$$f_{xred} = \frac{1.03}{s} \quad (19.26)$$

$$T_{xred} = 0.97s \quad (19.27)$$

#### 19.2.3.2. Y-Richtung

$$f_{yred} = \frac{0.748}{s} \quad (19.28)$$

$$T_{yred} = 1.34s \quad (19.29)$$

# Literatur

1. Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein (SIA) (2020) Norm SIA 261:2020 Einwirkungen auf Tragwerke . 136
2. Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein (SIA) (2017) Norm SIA 269/8:2017 Erhaltung von Tragwerken – Erdbeben. 136
3. Dupraz P-André, Schweizerischer Ingenieur-und Architekten-Verein (2004) Grundlagen der Projektierung von Tragwerken, Einwirkungen auf Tragwerke : Bemessungsbeispiele zu den Normen SIA 260 und 261. SIA, Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein Zürich, Zürich