

Beispielsammlung

Komplettiert die Vorlesung Baudynamik

Pascal Gitz & Dr. Stephan Gollob

Mittwoch, 2. August 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	3
2	Rayleigh-Quotienten	4
2.1	Beispiel: Kragarm mit 2 Punktmassen	4
2.2	Beispiel: Kargarm mit 1 Punktmasse	8
3	Einmassenschwinger	11
3.1	Beispiel: Logarithmisches Dekrement	11
3.2	Beispiel: Impulssatz	16
	References	23

1 Vorwort

Die folgenden Beispiele umfassen die wesentlichen Aspekte der im Rahmen der Vorlesung Baudynamik vorgestellten Theorie. Anhand von numerischen Beispielen werden die Grundlagen der Baudynamik vertieft behandelt.

2 Rayleigh-Quotienten

2.1 Beispiel: Kragarm mit 2 Punktmassen

Das in Abbildung 2.1 dargestellte System stellt einen Kragarm mit verteilter Masse und 2 Punktmassen dar. Eine mögliche Formfunktion ist rechts daneben gezeigt.

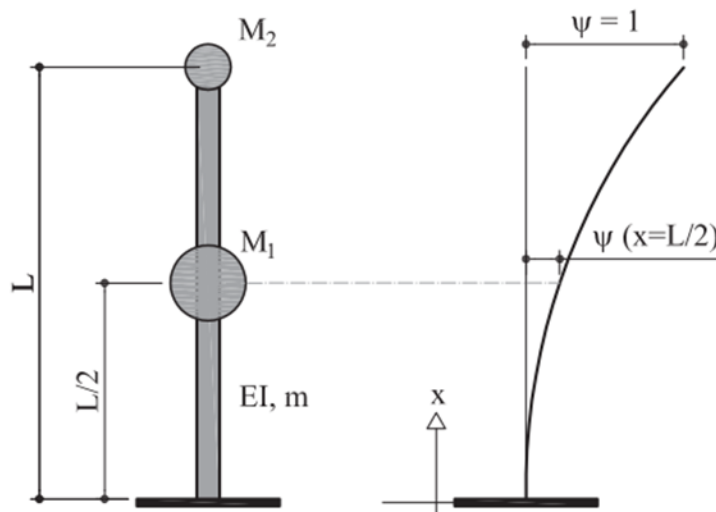


Abbildung 2.1: Kragarm mit verteilter Masse und 2 Punktmassen

Gesucht:

- Grundfrequenz (1. Eigenfrequenz ω_n) des Systems in Abbildung 2.1, berechnet mit dem Rayleigh-Quotienten.

Gegeben:

- Randbedingungen für den Spezialfall:

$$m = 0 \text{ und } M_1 = M_2 = M$$

- Formfunktion:

$$\psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

2.1.1 Musterlösung

2.1.1.1 Grundfrequenz

Mithilfe der in der Vorlesung hergeleiteten Bewegungsgleichung mit den Rayleigh-Quotienten kann anhand der Formfunktion ψ die erste Eigenkreisfrequenz ermittelt werden.

$$u'' \int_0^L m\psi^2 dx + u \int_0^L (EI(\psi'')^2) dx = f(x, t) \quad (2.1)$$

Durch Substitution resultiert die bekannte Bewegungsgleichung:

$$m^* u'' + k^* u = f(x, t) \text{ mit } k^* = \int_0^L (EI(\psi'')^2) dx \text{ und } m^* = \int_0^L m\psi^2 dx \quad (2.2)$$

2.1.1.1.1 Berechnung der Masse

Anschliessend können die Integrale für das gegebenen System berechnet werden. Dabei sind die Punktmassen mittels der entsprechenden Deformation an den Stellen L und $\frac{L}{2}$ zu berücksichtigen.

$$m^* = M_1 \psi(x = L/2)^2 + M_2 \psi(x = L)^2 + \int_0^L m\psi^2 dx$$

$$\psi(x)^2 = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2$$

$$m^* = M_1 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + M_2 + m \left(-\frac{4L}{\pi} + \frac{3L}{2}\right)$$

2.1.1.1.2 Berechnung der Steifigkeit

Zur Ermittlung der Steifigkeit k^* muss zuerst der Ansatz zweimal nach x abgeleitet werden.

$$\psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{2L}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{\pi^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{4L^2}$$

Nun kann der Rayleigh-Quotient für die Steifigkeit k^* , wie bei Gleichung 2.2 dargestellt, ermittelt werden:

Beachte dabei, dass die Anteile unabhängig von x vor das Integral gebracht werden können.

$$k^* = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \int_0^L (EI(\cos(\frac{\pi x}{2L})^2)) dx$$

Durch die Lösung des Integrals folgt:

$$k^* = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}$$

2.1.1.1.3 Berechnung der Grundfrequenz

Die Grundfrequenz resultiert aus der Wurzel des Verhältnisses zwischen Steifigkeit und Masse.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \quad (2.3)$$

Durch das Einsetzen der berechneten Werte resultiert die Eigenkreisfrequenz zu:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\pi^4 EI}{32L^3 \left(M_1 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + M_2 + m \left(-\frac{4L}{\pi} + \frac{3L}{2} \right) \right)}}$$

2.1.1.1.4 Auswertung des Spezialfalls

Mit Hilfe der Randbedingungen für den Spezialfall aus der Aufgabenstellung resultiert die Grundfrequenz zu:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2}\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{M\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + M}}}{8L^{\frac{3}{2}}}$$

$$\omega_1 = \frac{1.67 \sqrt{\frac{EI}{M}}}{L^{\frac{3}{2}}}$$

Die genaue erste Eigenfrequenz eines Zweimassenschwingers mit konstanter Steifigkeit und gleichen Massen ist:

$$\omega_1 \simeq \sqrt{\frac{3.007 \frac{EI}{L^3}}{1.102M}} = 1.652 \sqrt{\frac{EI}{ML^3}} = \frac{1.652 \sqrt{\frac{EI}{M}}}{L^{\frac{3}{2}}}$$

Die Berechnung mit Hilfe der Rayleigh-Quotienten stellt also eine (sehr) gute Abschätzung der ersten Eigenfrequenz dar.

2.2 Beispiel: Kragarm mit 1 Punktmasse

Das in Abbildung 2.2 dargestellte System stellt einen Kragarm mit verteilter Masse und einer Punktmasse dar. Eine mögliche Formfunktion ist rechts daneben gezeigt.

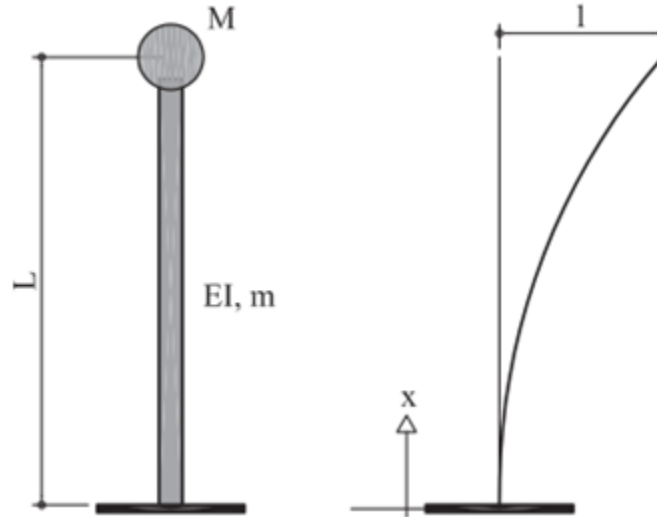


Abbildung 2.2: Kragarm mit verteilter Masse und 1 Punktmasse

Gesucht:

- Grundfrequenz (1. Eigenfrequenz ω_n) des Systems in Abbildung 2.2, berechnet mit dem Rayleigh-Quotienten.

Gegeben:

- Ausgewertet für den Spezialfall:

$$m = 0 \text{ und } M = M$$

- Formfunktion:

$$\psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

2.2.1 Musterlösung

Das Vorgehen entspricht dem Vorgehen in Kapitel [2.1.1](#).

2.2.1.1 Grundfrequenz

Berechnung der Grundfrequenz mit einer Punktmasse.

2.2.1.1.1 Berechnung der Masse

Die Integrale für das gegebenen System können berechnet werden. Dabei ist die Punktmasse mittels der entsprechenden Deformation an der Stelle L zu berücksichtigen.

$$m^* = M\psi(x=L)^2 + \int_0^L m\psi^2 dx$$

$$\psi(x)^2 = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2$$

$$m^* = M + m \left(-\frac{4L}{\pi} + \frac{3L}{2}\right)$$

2.2.1.1.2 Berechnung der Steifigkeit

Zur Ermittlung der Steifigkeit k^* für den Rayleigh-Quotienten muss zuerst der Ansatz zweimal nach x abgeleitet werden.

$$\psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{2L}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{\pi^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{4L^2}$$

Nun kann der Rayleigh-Quotient für die Steifigkeit k^* , wie bei Gleichung [2.2](#) dargestellt, ermittelt werden:

Beachte dabei, dass die Anteile unabhängig von x vor das Integral gebracht werden können.

$$k^* = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \int_0^L (EI(\cos(\frac{\pi x}{2L})^2)) dx$$

Durch die Lösung des Integrals folgt:

$$k^* = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}$$

2.2.1.1.3 Berechnung der Grundfrequenz

Die Grundfrequenz resultiert aus der Wurzel des Verhältnisses zwischen Steifigkeit und Masse.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \quad (2.4)$$

Durch das Einsetzen der berechneten Werte resultiert die Eigenkreisfrequenz zu:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\pi^4 EI}{32L^3 \left(M + m \left(-\frac{4L}{\pi} + \frac{3L}{2}\right)\right)}}$$

2.2.1.1.4 Auswertung des Spezialfalls

Mit Hilfe der Randbedingungen für den Spezialfall aus der Aufgabenstellung resultiert die Grundfrequenz zu:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2}\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{M}}}{8L^{\frac{3}{2}}}$$

$$\omega_1 = \frac{1.74 \sqrt{\frac{EI}{M}}}{L^{\frac{3}{2}}}$$

3 Einmassenschwinger

3.1 Beispiel: Logarithmisches Dekrement

Das in Abbildung 3.1 dargestellte System zeigt ein Rahmentragwerk. Dieses wird anhand eines Einmassenschwingers approximiert.

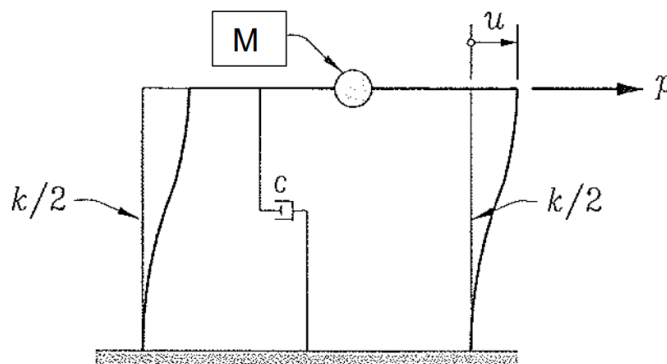


Abbildung 3.1: Am Riegel ausgelenktes System

Gesucht:

- Laterale bzw. horizontale Steifigkeit k des Rahmens
- Die Dämpfungsrate ζ und die Dämpfungskonstante c
- Die Amplitude der Auslenkung des Rahmens nach 10 Schwingzyklen

Gegeben:

- Dehnsteifigkeit der Stützen und des Riegels $EA = \infty$
- Biegesteifigkeit des Riegels $EI = \infty$
- Gesamtmasse $M = 1941\text{kg}$

Um die Systemeigenschaften des Riegels zu untersuchen, wird eine Kopfverschiebung bzw. Auslenkung des Rahmens von $u = 20\text{mm}$ aufgebracht. Danach wird die Halterung schlagartig gelöst und der Rahmen kann frei schwingen. Die angebrachte Messeinrichtung registriert eine max. Kopfverschiebung nach dem ersten Zurückschwingen von $u = 15\text{mm}$ nach $T = 0.2\text{s}$.

3.1.1 Musterlösung

Das Verhalten des Systems in Abbildung 3.1 wird versucht mittels der Theorie des Einmassenschwingers zu ermitteln. Es handelt sich um eine gedämpfte freie Schwingung.

3.1.1.1 Horizontale Steifigkeit

3.1.1.1.1 Logarithmisches Dekrement

Da keine Angaben über die Profile der Stützen gemacht werden, kann mittels des logarithmischen Dekrements die Eigenkreisfrequenz bestimmt werden. Anhand der Eigenkreisfrequenz lässt sich die Steifigkeit ableiten.

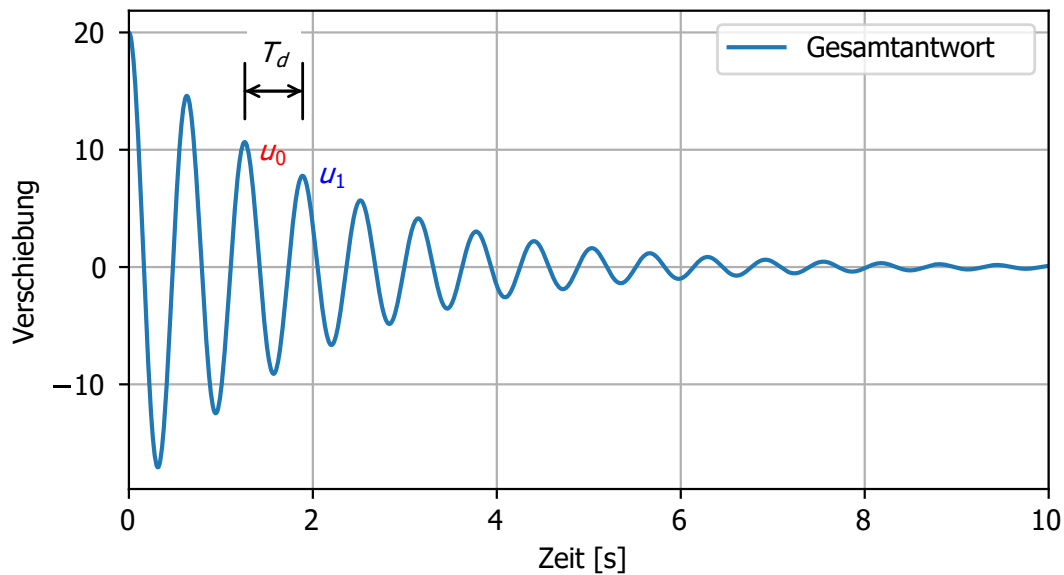


Abbildung 3.2: Beispiel eines logarithmischen Dekrements

$$\delta = \log \left(\frac{u_0}{u_1} \right)$$

$$\delta = 0.288$$

3.1.1.1.2 Dämpfungsrate

Anhand des logarithmischen Dekrements kann die Dämpfungsrate bestimmt werden.

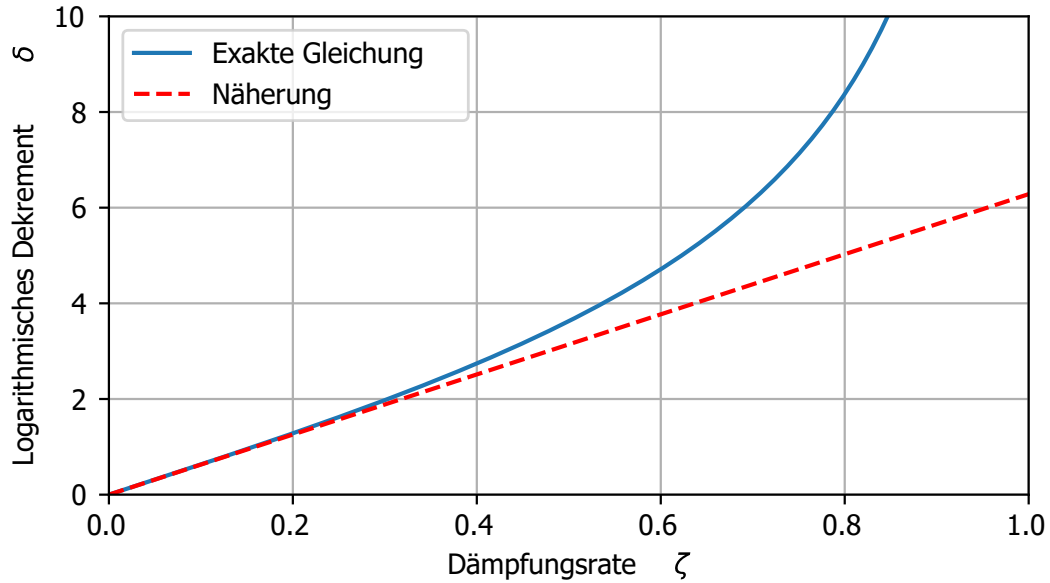


Abbildung 3.3: Dämpfungsrate anhand des logarithmischen Dekrements

Für kleine Dämpfungsraten kann folgende Gleichung verwendet werden:

$$\zeta \simeq \frac{\delta}{2\pi}$$

Die exakte Lösung bestimmt sich folgender massen:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}}$$

$$\zeta = \frac{\log\left(\frac{u_0}{u_1}\right)}{\sqrt{\log\left(\frac{u_0}{u_1}\right)^2 + 4\pi^2}}$$

$$\zeta = 0.0457$$

3.1.1.1.3 Eigenkreisfrequenz

Aus der Aufgabenstellung ist die gedämpfte Periode von $T_D = 0.2s$ bekannt. Anhand dieser lässt sich die *gedämpfte Eigenkreisfrequenz* ω_D bestimmen und unter Berücksichtigung der Dämpfungsrate ζ kann die *Eigenkreisfrequenz* ω_n bestimmt werden.

$$\omega_D = \frac{2\pi}{T_D}$$

$$\omega_D = \frac{31.42}{s}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_D}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\omega_n = \frac{31.45}{s}$$

3.1.1.1.4 Steifigkeit

Wir kennen die Beziehung zwischen Eigenkreisfrequenz und Steifigkeit:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$k = m\omega_n^2$$

$$k = \frac{1.92 \cdot 10^6 \text{N}}{\text{m}}$$

3.1.1.2 Dämpfungskonstante

Anhand der Dämpfungsrate ζ lässt sich leicht die Dämpfungskonstante bestimmen:

$$\zeta = \frac{c}{2\omega_n m} \tag{3.1}$$

$$c = \frac{5.58 \cdot 10^3 \text{Ns}}{\text{m}}$$

3.1.1.3 Amplitude nach 10 Schwingzyklen

Das Verhalten der Amplitude ist in Abbildung [3.2](#) dargestellt.

$$\delta = \ln\left(\frac{u_0}{u_1}\right) \quad (3.2)$$

δ ist ein konstanter Wert und kann auf 10 Zyklen erweitert werden.

$$u_1 = u_0 e^{-\delta}$$

$$u_{10} = u_0 e^{-10\delta}$$

$$u_{10} = 1.126\text{mm}$$

3.2 Beispiel: Impulssatz

Abbildung 3.4 zeigt das System eines Stahlrahmens. Dieser wird durch eine kurzzeitig einwirkende Stossbelastung $F(t)$ in Höhe des Rahmenriegels beansprucht.

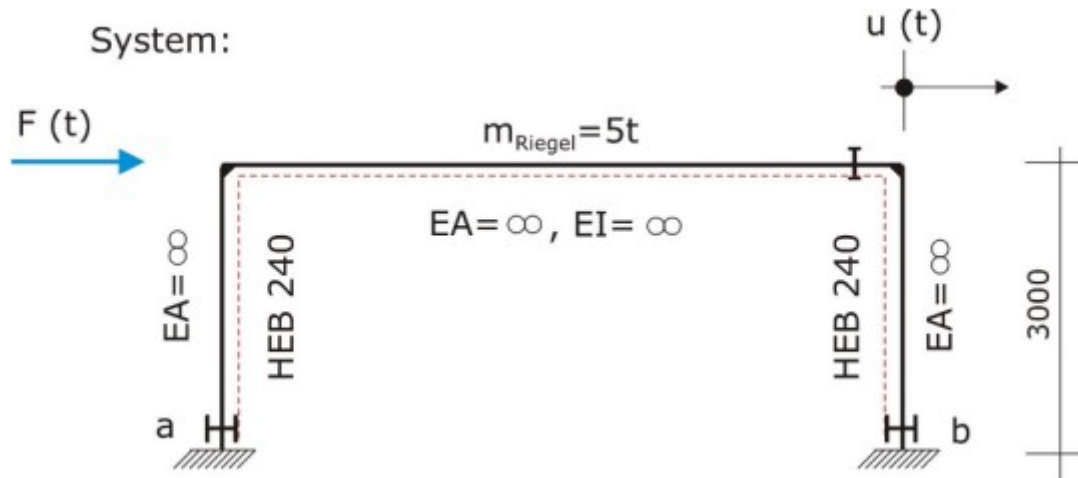


Abbildung 3.4: System des Stahlrahmens mit kurzzeitig einwirkender Stossbelastung

Gesucht:

- Der Maximalwert der zu erwartenden Riegelauslenkung (näherungsweise)
- Darstellung des zeitlichen Verlaufs $u(t)$ in einem Diagramm
- Nachweis der Elastizität des Systems anhand der Rückstellkraft (Spannungsnachweis mit Fließspannung f_y als Grenze)

Gegeben:

- Dehnsteifigkeit der Stützen und des Riegels $EA = \infty$
- Biegesteifigkeit des Riegels $EI = \infty$
- Gesamtmasse $M = 5t$
- Stützen aus HEB 240 (s 355, Streckgrenze $f_y = 355\text{N/mm}^2$)
- $E \cdot I_{y, \text{Stuetze}} = 2.1 \cdot 10^8 \text{kN/m}^2 \cdot 11260 \cdot 10^{-8} \text{m}^4 = 23646 \text{kNm}^2$
- $W_{el, y} = 938 \cdot 10^3 \text{mm}^3$ (HEB 240)
- Lastfunktion gemäss Abbildung 3.5

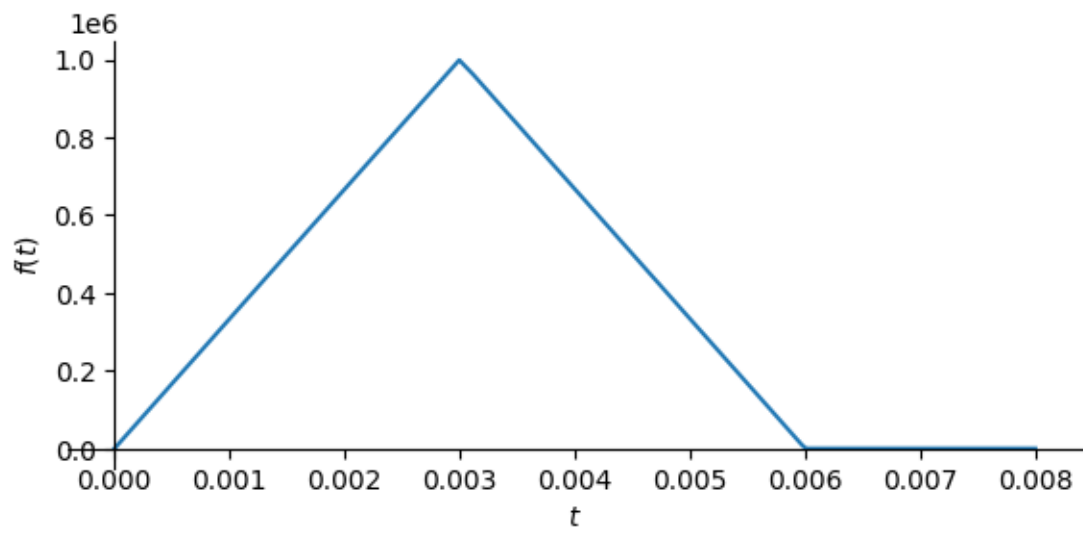


Abbildung 3.5: Lastfunktion der kurzzeitig einwirkenden Stossbelastung

3.2.1 Musterlösung

3.2.1.1 Horizontale Steifigkeit

Für entsprechende Anwendungsfälle gibt es fertige Lösungen zur Bestimmung der Steifigkeit. Gemäss Abbildung 3.4 ist die Stütze am Fuss- und Kopfpunkt eingespannt. Somit resultiert die Steifigkeit zu:

$$k_{Stuetze} = \frac{12EI_{Stuetze}}{H^3} \quad (3.3)$$

Diese gilt für eine einzelne Stütze. Angewendet auf das Beispiel folgt die Systemsteifigkeit zu:

$$k = \frac{24EI_{stuetze}}{H^3}$$

$$k = \frac{2.1 \cdot 10^7 \text{N}}{\text{m}}$$

3.2.1.2 Eigenkreisfrequenz

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_n = 2\sqrt{6} \sqrt{\frac{EI_{stuetze}}{H^3 m}}$$

$$\omega_n = \frac{64.8}{\text{s}}$$

3.2.1.3 Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung für einen ungedämpften Einmassenschwinger ist die folgende:

$$mu(t)'' + ku(t) = F(t)$$

3.2.1.3.1 Approximation der Lösung

Es handelt sich um eine inhomogene Differentialgleichung 2.Ordnung. Auf die exakte Lösung der Gleichung wird nicht eingegangen. Es wird versucht die bemessungsrelevanten Parameter näherungsweise zu bestimmen. Dies lässt sich mit dem Impulssatz approximieren.

$$F\Delta t = m\Delta v$$

Dieser besagt, dass die einwirkende Kraft F im betrachteten Zeitabschnitt Δt der Masse m multipliziert mit der Geschwindigkeitsänderung Δv des Objekts entspricht. Für eine kurze Anregung, wie im Beispiel der Fall ist, kann die Anfangsgeschwindigkeit wie folgt bestimmt werden:

$$v_0 = \frac{I}{m}$$

$$I = \int_0^{t_2} F(t) dt$$

$$I = 3000.0\text{Ns}$$

$$v_0 = \frac{3000.0\text{Ns}}{m}$$

$$v_0 = \frac{0.6\text{m}}{\text{s}}$$

Durch die Impuls-Betrachtung vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu:

$$mu(t)'' + ku(t) = 0 \tag{3.4}$$

Mit der Anfangsgeschwindigkeit als Randbedingung.

$$u'(t=0) = v_0$$

und der Startauslenkung:

$$u(t=0) = u_0 = 0$$

Kann mittels der folgenden Ansatzfunktion die homogene Differentialgleichung gelöst werden:

$$u(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) \quad (3.5)$$

$$u(t) = 0.00925 \sin\left(\frac{64.8362038781832t}{s}\right) \text{m}$$

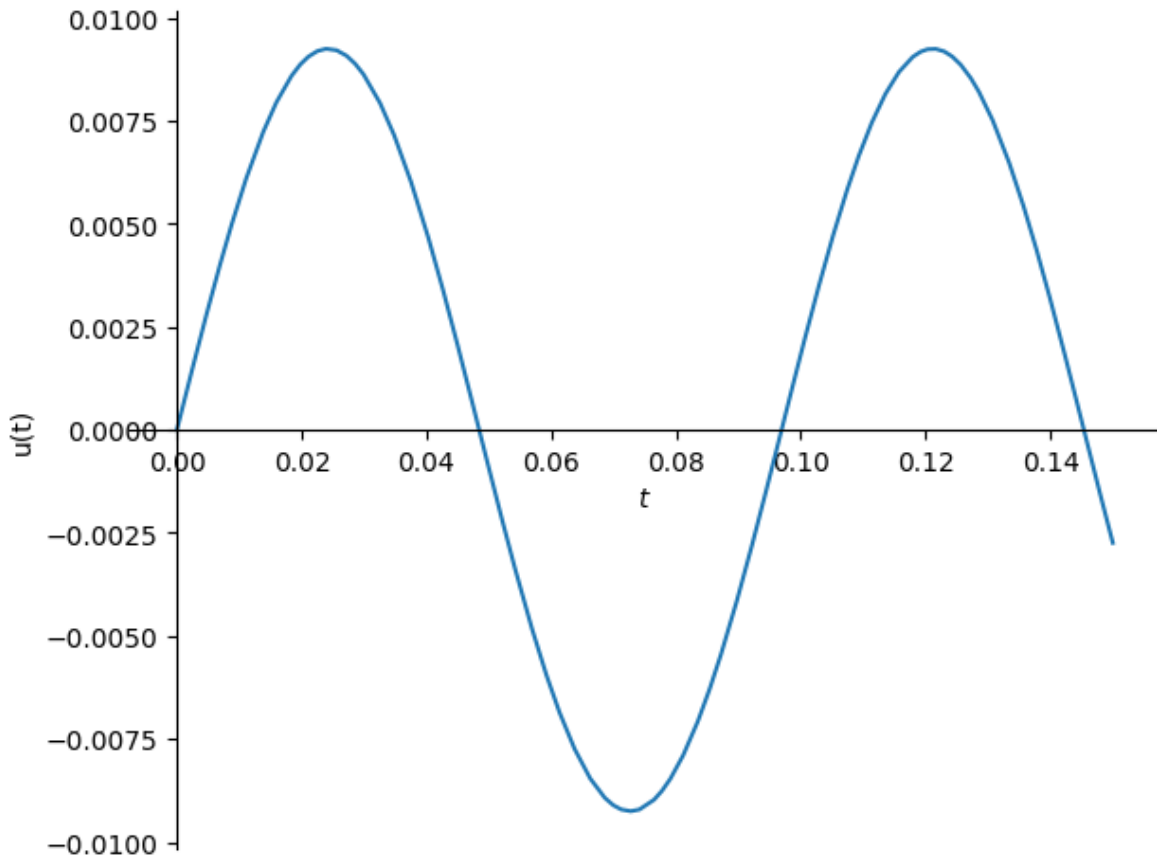


Abbildung 3.6: Zeitlicher Verlauf der Auslenkung

3.2.1.4 Rückstellkraft

Anhand der maximalen Amplitude lässt sich die maximale Rückstellkraft für den gesamten Rahmen bestimmen.

$$F_R = ku = kA$$

$$u_{max} = A$$

$$A = 0.00925\text{m}$$

$$F_R = 1.95 \cdot 10^5 \text{N}$$

3.2.1.4.1 Spannungsnachweis

Die Rückstellkraft wirkt im Zentrum der Masse und bewirkt das maximale Biegemoment bei den Fusspunkten.

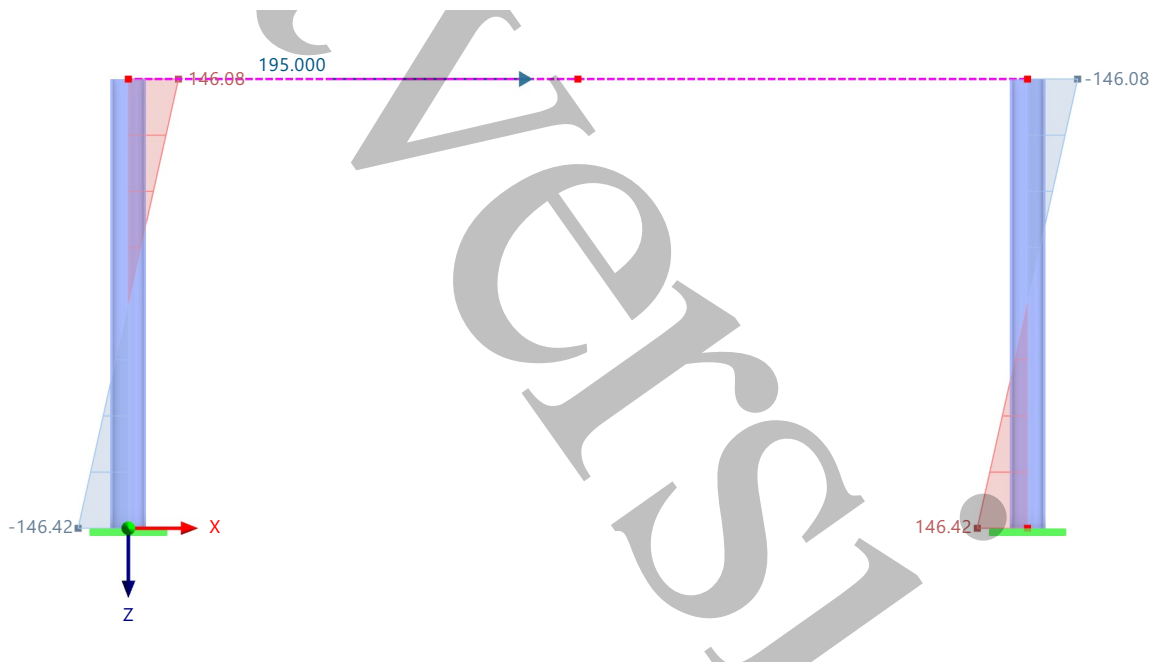


Abbildung 3.7: Biegemomentenverlauf durch die statische Ersatzkraft

$$M_{max} = \frac{F_R H}{4}$$

$$M_{max} = 1.46 \cdot 10^5 \text{mN}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_{ely}}$$

$$\sigma_{max} = \frac{156.0\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$Nachweis = \frac{156.0\text{N}}{\text{mm}^2} < f_y$$

References