Beispielsammlung

Komplettiert die Vorlesung Baudynamik

Pascal Gitz & Dr. Stephan Gollob

Mittwoch, 2. August 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Die folgenden Beispiele umfassen die wesentlichen Aspekte der im Rahmen der Vorlesung Baudynamik vorgestellten Theorie. Anhand von numerischen Beispielen werden die Grundlagen der Baudynamik vertieft behandelt.

To-Dos

- Bilder mit CAD zeichnen
- Gleichung nummerieren (ja/nein)?

2 Rayleigh-Quotienten

2.1 Beispiel: Kragarm mit 2 Punktmassen

Das in Abbildung 2.1 dargestellte System stellt einen Kragarm mit verteilter Masse und 2 Punktmassen dar. Eine mögliche Formfunktion ist rechts daneben gezeigt.

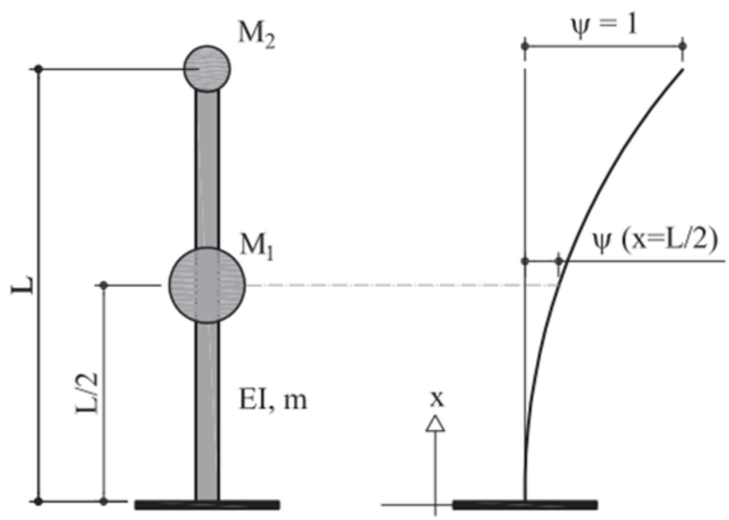

Abbildung 2.1: Kragarm mit verteilter Masse und 2 Punktmassen

Gesucht:

- Grundfrequenz (1. Eigenfrequenz ω_n) des Systems in Abbildung 2.1, berechnet mit dem Rayleigh-Quotienten.

Gegeben:

- Randbedingungen für den Spezialfall:

$$m = 0 \text{ und } M_1 = M_2 = M$$

- Formfunktion:

$$\psi(x) = 1 - \cos(\frac{\pi x}{2L})$$

2.1.1 Musterlösung

2.1.1.1 Grundfrequenz

Mithilfe der in der Vorlesung hergeleiteten Bewegungsgleichung mit den Rayleigh-Quotienten kann anhand der Formfunktion ψ die erste Eigenkreisfrequenz ermittelt werden.

$$u'' \int_0^L m\psi^2 dx + u \int_0^L (EI(\psi'')^2) dx = f(x,t) \tag{2.1}$$

Durch Substitution resultiert die bekannte Bewegungsgleichung:

$$m^\star u'' + k^\star u = f(x,t) \text{ mit } k^\star = \int_0^L (EI(\psi'')^2) dx \text{ und } m^\star = \int_0^L m\psi^2 dx \tag{2.2}$$

2.1.1.1.1 Berechnung der Masse

Anschliessend können die Integrale für das gegebenen System berechnet werden. Dabei sind die Punktmassen mittels der entsprechenden Deformation an den Stellen L und $\frac{L}{2}$ zu berücksichtigen.

$$m^\star = M_1 \psi(x = L/2)^2 + M_2 \psi(x = L)^2 + \int\limits_0^L m\psi^2 \, dx$$

$$\psi(x)^2 = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2$$

$$m^\star = M_1 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + M_2 + m\left(-\frac{4L}{\pi} + \frac{3L}{2}\right)$$

2.1.1.1.2 Berechnung der Steifigkeit

Zur Ermittlung der Steifigkeit $k^\star$ muss zuerst der Ansatz zweimal nach x abgeleitet werden.

$$\psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{2L}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{\pi^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{4L^2}$$

Nun kann der Rayleigh-Quotient für die Steifigkeit $k^\star$, wie bei Gleichung 2.2 dargestellt, ermittelt werden:

Beachte dabei, dass die Anteile unabhängig von x vor das Integral gebracht werden können.

$$k^\star = (\frac{\pi}{2L})^4 \int_0^L (EI(\cos(\frac{\pi x}{2L})^2))dx$$

Durch die Lösung des Integrals folgt:

$$k^\star = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}$$

2.1.1.1.3 Berechnung der Grundfrequenz

Die Grundfrequenz resultiert aus der Wurzel des Verhältnisses zwischen Steifigkeit und Masse.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k^\star}{m^\star}} \tag{2.3}$$

Durch das Einsetzen der berechneten Werte resultiert die Eigenkreisfrequenz zu:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\pi^4 EI}{32L^3\left(M_1\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + M_2 + m\left(-\frac{4L}{\pi}+\frac{3L}{2}\right)\right)}}$$

2.1.1.1.4 Auswertung des Spezialfalls

Mit Hilfe der Randbedingungen für den Spezialfall aus der Aufgabenstellung resultiert die Grundfrequenz zu:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2}\pi^2\sqrt{\frac{EI}{M\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+M}}}{8L^{\frac{3}{2}}}$$

$$\omega_1 = \frac{1.67\sqrt{\frac{EI}{M}}}{L^{\frac{3}{2}}}$$

Die genaue erste Eigenfrequenz eines Zweimassenschwingers mit konstanter Steifigkeit und gleichen Massen ist:

$$\omega_1 \simeq \sqrt{\frac{3.007\frac{EI}{L^3}}{1.102M}} = 1.652\sqrt{\frac{EI}{ML^3}} = \frac{1.652\sqrt{\frac{EI}{M}}}{L^{\frac{3}{2}}}$$

Die Berechnung mit Hilfe der Rayleigh-Quotienten stellt also eine (sehr) gute Abschätzung der ersten Eigenfrequenz dar.

2.2 Beispiel: Kargarm mit 1 Punktmasse

Das in Abbildung 2.2 dargestellte System stellt einen Kragarm mit verteilter Masse und einer Punktmasse dar. Eine mögliche Formfunktion ist rechts daneben gezeigt.

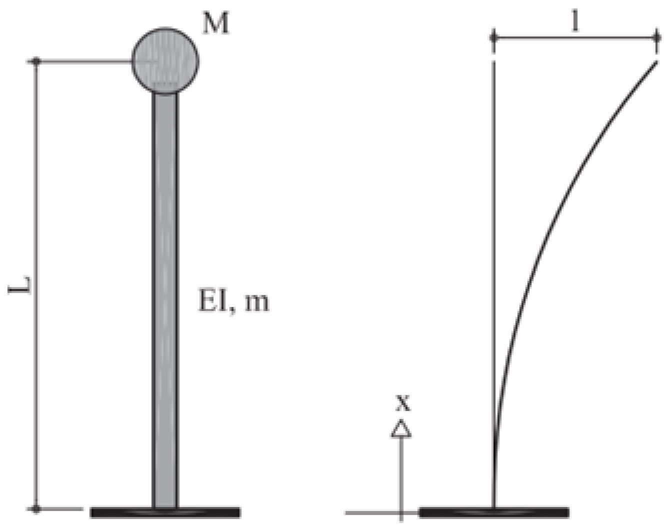

Abbildung 2.2: Kragarm mit verteilter Masse und 1 Punktmasse

Gesucht:

- Grundfrequenz (1. Eigenfrequenz ω_n) des Systems in Abbildung 2.2, berechnet mit dem Rayleigh-Quotienten.

Gegeben:

- Ausgewertet für den Spezialfall:

$$m = 0 \text{ und } M = M$$

- Formfunktion:

$$\psi(x) = 1 - \cos(\frac{\pi x}{2L})$$

2.2.1 Musterlösung

Das Vorgehen entspricht dem Vorgehen in Kapitel 2.1.1.

2.2.1.1 Grundfrequenz

Berechnung der Grundfrequenz mit einer Punktmasse.

2.2.1.1.1 Berechnung der Masse

Die Integrale für das gegebenen System können berechnet werden. Dabei ist die Punktmasse mittels der entsprechenden Deformation an der Stelle L zu berücksichtigen.

$$m^\star = M\psi(x = L)^2 + \int_0^L m\psi^2\, dx$$

$$\psi(x)^2 = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2$$

$$m^\star = M + m\left(-\frac{4L}{\pi} + \frac{3L}{2}\right)$$

2.2.1.1.2 Berechnung der Steifigkeit

Zur Ermittlung der Steifigkeit $k^\star$ für den Rayleigh-Quotienten muss zuerst der Ansatz zweimal nach x abgeleitet werden.

$$\psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{2L}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{\pi^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{4L^2}$$

Nun kann der Rayleigh-Quotient für die Steifigkeit $k^\star$, wie bei Gleichung 2.2 dargestellt, ermittelt werden:

Beachte dabei, dass die Anteile unabhängig von x vor das Integral gebracht werden können.

$$k^\star = (\frac{\pi}{2L})^4 \int_0^L (EI(\cos(\frac{\pi x}{2L})^2))dx$$

Durch die Lösung des Integrals folgt:

$$k^\star = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}$$

2.2.1.1.3 Berechnung der Grundfrequenz

Die Grundfrequenz resultiert aus der Wurzel des Verhältnisses zwischen Steifigkeit und Masse.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k^\star}{m^\star}} \tag{2.4}$$

Durch das Einsetzen der berechneten Werte resultiert die Eigenkreisfrequenz zu:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\pi^4 EI}{32L^3\left(M + m\left(-\frac{4L}{\pi} + \frac{3L}{2}\right)\right)}}$$

2.2.1.1.4 Auswertung des Spezialfalls

Mit Hilfe der Randbedingungen für den Spezialfall aus der Aufgabenstellung resultiert die Grundfrequenz zu:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2}\pi^2\sqrt{\frac{EI}{M}}}{8L^{\frac{3}{2}}}$$

$$\omega_1 = \frac{1.74\sqrt{\frac{EI}{M}}}{L^{\frac{3}{2}}}$$

3 Einmassenschwinger

3.1 Beispiel: Logarithmisches Dekrement

Das in Abbildung 3.1 dargestellte System zeigt ein Rahmentragwerk. Dieses wird anhand eines Einmassenschwingers approximiert.

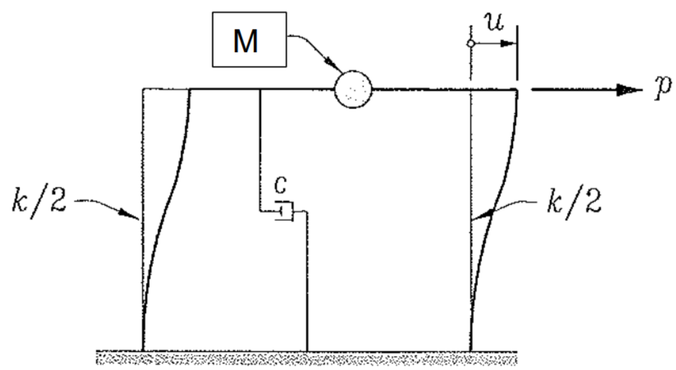

Abbildung 3.1: Am Riegel ausgelenktes System

Gesucht:

- Laterale bzw. horizontale Steifigkeit k des Rahmens
- Die Dämpfungsrate ζ und die Dämpfungskonstante c
- Die Amplitude der Auslenkung des Rahmens nach 10 Schwingzyklen

Gegeben:

- Dehnsteifigkeit der Stützen und des Riegels $EA = \infty$
- Biegesteifigkeit des Riegels $EI = \infty$
- Gesamtmasse $M = 1941kg$

Um die Systemeigenschaften des Riegels zu untersuchen, wird eine Kopfverschiebung bzw. Auslenkung des Rahmens von $u = 20$mm aufgebracht. Danach wird die Halterung schlagartig gelöst und der Rahmen kann frei schwingen. Die angebrachte Messeinrichtung registriert eine max. Kopfverschiebung nach dem ersten Zurückschwingen von $u = 15$mm nach $T = 0.2$s.

3.1.1 Musterlösung

Das Verhalten des Systems in Abbildung 3.1 wird versucht mittels der Theorie des Einmassenschwingers zu ermitteln. Es handelt sich um eine gedämpfte freie Schwingung.

Tabelle 3.1: Verwendete Parameter

Parameter	
$EA_{riegel} = \infty$	$EA_{stuetze} = \infty$
$EI_{riegel} = \infty$	$T_D = 0.2\mathrm{s}$
$m = \frac{1941\mathrm{Ns}^2}{\mathrm{m}}$	$u_0 = 20\mathrm{mm}$
$u_1 = 15\mathrm{mm}$	

3.1.1.1 Horizontale Steifigkeit

3.1.1.1.1 Logarithmisches Dekrement

Da keine Angaben über die Profile der Stützen gemacht werden, kann mittels des logarithmischen Dekrements die Eigenkreisfrequenz bestimmt werden. Anhand der Eigenkreisfrequenz lässt sich die Steifigkeit ableiten.

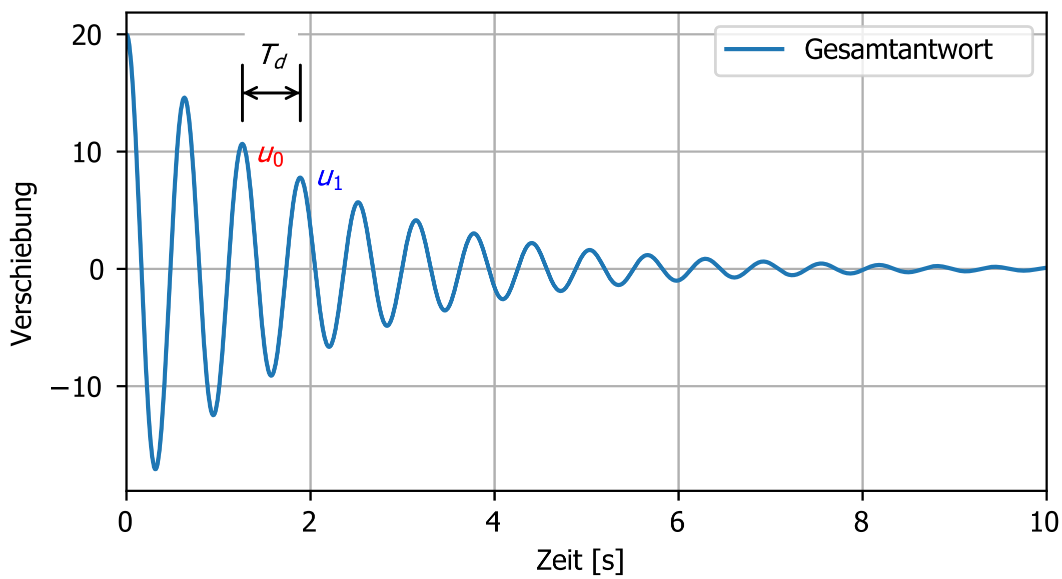

Abbildung 3.2: Beispiel eines logarithmischen Dekrements

$$\delta = \log\left(\frac{u_0}{u_1}\right)$$

$$\delta = 0.288$$

3.1.1.1.2 Dämpfungsrate

Anhand des logarithmischen Dekrements kann die Dämpfungsrate bestimmt werden.

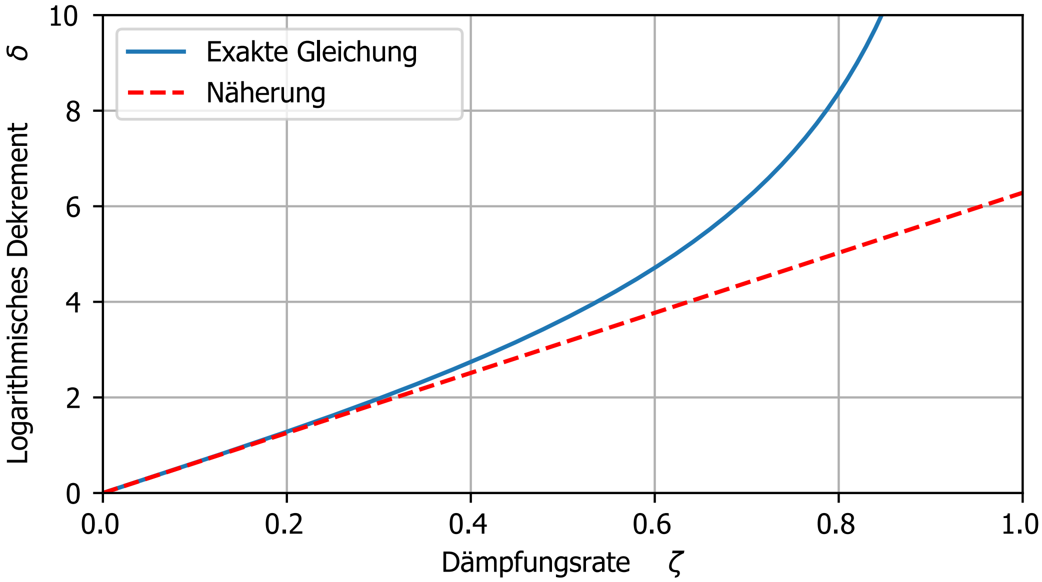

Abbildung 3.3: Dämpfungsrate anhand des logarithmischen Dekrements

Für kleine Dämpfungsraten kann folgende Gleichung verwendet werden:

$$\zeta \simeq \frac{\delta}{2\pi}$$

Die exakte Lösung bestimmt sich folgender massen:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}}$$

$$\zeta = \frac{\log\left(\frac{u_0}{u_1}\right)}{\sqrt{\log\left(\frac{u_0}{u_1}\right)^2 + 4\pi^2}}$$

$$\zeta = 0.0457$$

3.1.1.1.3 Eigenkreisfrequenz

Aus der Aufgabenstellung ist die gedämpfte Periode von $T_D = 0.2s$ bekannt. Anhand dieser lässt sich die *gedämpfte Eigenkreisfrequenz* ω_D bestimmen und unter Berücksichtigung der Dämpfungsrate ζ kann die *Eigenkreisfrequenz* ω_n bestimmt werden.

$$\omega_D = \frac{2\pi}{T_D}$$

$$\omega_D = \frac{31.42}{\mathrm{s}}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_D}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_n = \frac{31.45}{\mathrm{s}}$$

3.1.1.1.4 Steifigkeit

Wir kennen die Beziehung zwischen Eigenkreisfrequenz und Steifigkeit:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$k = m\omega_n^2$$

$$k = \frac{1.92 \cdot 10^6 \mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

3.1.1.2 Dämpfungskonstante

Anhand der Dämpfungsrate ζ lässt sich leicht die Dämpfungskonstante bestimmen:

$$\zeta = \frac{c}{2\omega_n m} \tag{3.1}$$

$$c = \frac{5.58 \cdot 10^3 \mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$$

3.1.1.3 Amplitude nach 10 Schwingzyklen

Das Verhalten der Amplitude ist in Abbildung 3.2 dargestellt.

$$\delta = \ln(\frac{u_0}{u_1}) \tag{3.2}$$

δ ist ein konstanter Wert und kann auf 10 Zyklen erweitert werden.

$$u_1 = u_0 e^{-\delta}$$

$$u_{10} = u_0 e^{-10\delta}$$

$$u_{10} = 1.126\mathrm{mm}$$

3.2 Beispiel: Impulssatz

Abbildung 3.4 zeigt das System eines Stahlrahmens. Dieser wird durch eine kurzzeitig einwirkende Stossbelastung $F(t)$ in Höhe des Rahmenriegels beansprucht.

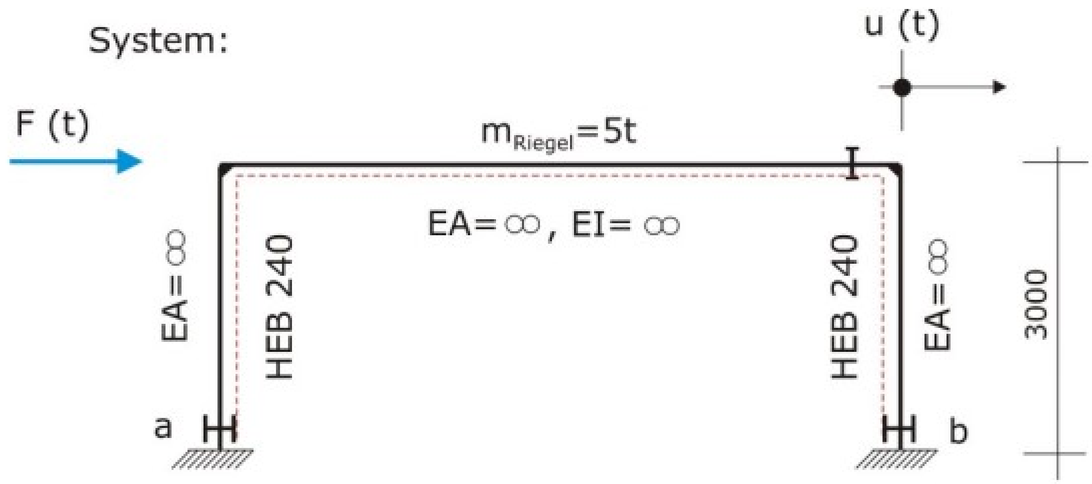

Abbildung 3.4: System des Stahlramens mit kurzzeitig einwirkender Stossbelastung

Gesucht:

- Der Maximalwert der zu erwartenden Riegelauslenkung (näherungsweise)
- Darstellung des zeitlichen Verlaufs $u(t)$ in einem Diagramm
- Nachweis der Elastizität des Systems anhand der Rückstellkraft (Spannungsnachweis mit Fliessspannung f_y als Grenze)

Gegeben:

- Dehnsteifigkeit der Stützen und des Riegels $EA = \infty$
- Biegesteifigkeit des Riegels $EI = \infty$
- Gesamtmasse $M = 5t$
- Stützen aus HEB 240 (s 355, Streckgrenze $f_y = 355\text{N/mm}^2$)
- $E \cdot I_{y,Stuetze} = 2.1 \cdot 10^8\text{kN/m}^2 \cdot 11260 \cdot 10^{-8}\text{m}^4 = 23646\text{kNm}^2$
- $W_{el,y} = 938 \cdot 10^3\text{mm}^3$(HEB 240)
- Lastfunktion gemäss Abbildung 3.5

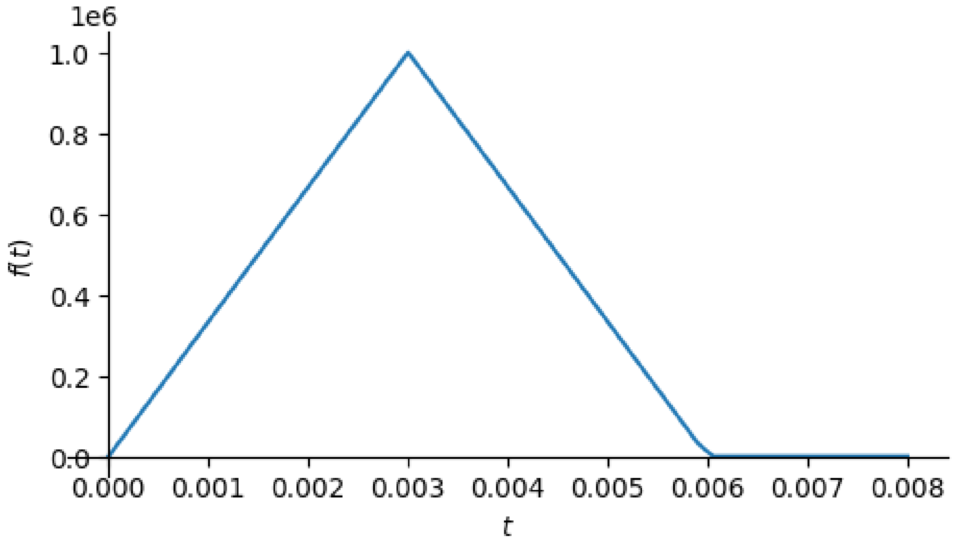

Abbildung 3.5: Lastfunktion der kurzzeitig einwirkenden Stossbelastung

3.2.1 Musterlösung

Tabelle 3.2: Verwendete Parameter

Parameter	
$EA_{riegel} = \infty$	$EA_{stuetze} = \infty$
$EI_{riegel} = \infty$	$EI_{stuetze} = 23646000.0\mathrm{m^2N}$
$F_{max} = 1000000\mathrm{N}$	$H = 3000\mathrm{mm}$
$W_{ely} = 938000\mathrm{mm^3}$	$f_y = \frac{355\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$
$m = \frac{5000\mathrm{Ns^2}}{\mathrm{m}}$	$t_1 = 0.003\mathrm{s}$
$t_2 = 0.006\mathrm{s}$	$u_0 = 0.0$

3.2.1.1 Horizontale Steifigkeit

Für entsprechende Anwendungsfälle gibt es fertige Lösungen zur Bestimmung der Steifigkeit. Gemäss Abbildung 3.4 ist die Stütze am Fuss- und Kopfpunkt eingespannt. Somit resultiert die Steifigkeit zu:

$$k_{Stuetze} = \frac{12EI_{Stuetze}}{H^3} \tag{3.3}$$

Diese gilt für eine einzelne Stütze. Angewendet auf das Beispiel folgt die Systemsteifigkeit zu:

$$k = \frac{24EI_{stuetze}}{H^3}$$

$$k = \frac{2.1 \cdot 10^7\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

3.2.1.2 Eigenkreisfrequenz

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_n = 2\sqrt{6}\sqrt{\frac{EI_{stuetze}}{H^3 m}}$$

$$\omega_n = \frac{64.8}{\mathrm{s}}$$

3.2.1.3 Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung für einen ungedämpften Einmassenschwinger ist die folgende:

$$mu(t)'' + ku(t) = F(t)$$

3.2.1.3.1 Approximation der Lösung

Es handelt sich um eine inhomogene Differentialgleichung 2.Ordnung. Auf die exakte Lösung der Gleichung wird nicht eingegangen. Es wird versucht die bemessungsrelevanten Parameter näherungsweise zu bestimmen. Dies lässt sich mit dem Impulssatz approximieren.

$$F\Delta t = m\Delta v$$

Dieser besagt, dass die einwirkende Kraft F im betrachteten Zeitabschnitt Δt der Masse m multipliziert mit der Geschwindigkeitsänderung Δv des Objekts entspricht. Für eine kurze Anregung, wie im Beispiel der Fall ist, kann die Anfangsgeschwindigkeit wie folgt bestimmt werden:

$$v_0 = \frac{I}{m}$$

$$I = \int_0^{t_2} F(t)\, dt$$

$$I = 3000.0\mathrm{Ns}$$

$$v_0 = \frac{3000.0\mathrm{Ns}}{m}$$

$$v_0 = \frac{0.6\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Durch die Impuls-Betrachtung vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu:

$$mu(t)'' + ku(t) = 0 \tag{3.4}$$

Mit der Anfangsgeschwindigkeit als Randbedingung.

$$u'(t = 0) = v_0$$

und der Startauslenkung:

$$u(t=0) = u_0 = 0$$

Kann mittels der folgenden Ansatzfunktion die homogene Differentialgleichung gelöst werden:

$$u(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) \tag{3.5}$$

$$u(t) = 0.00925 \sin\left(\frac{64.8362038781832t}{\mathrm{s}}\right) \mathrm{m}$$

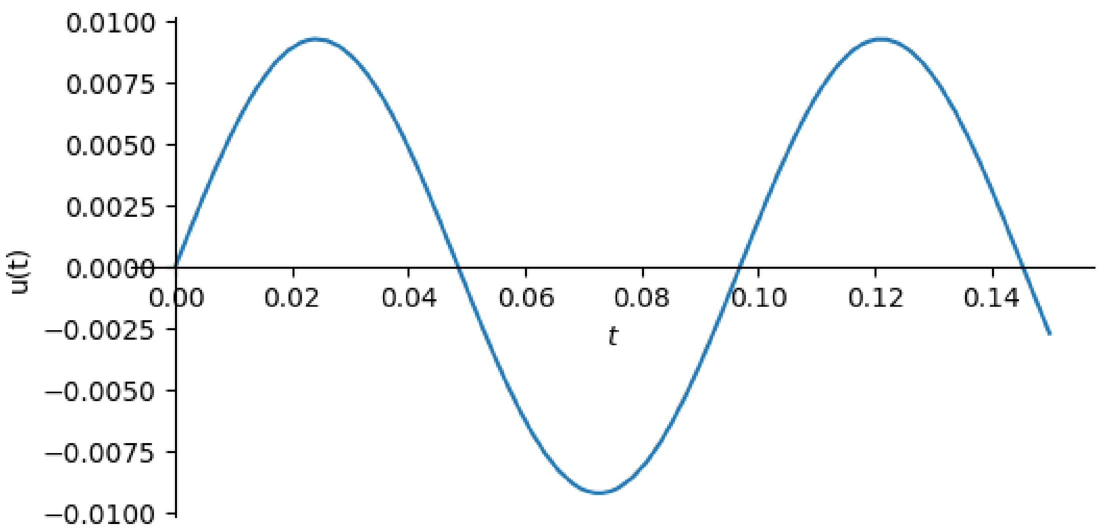

Abbildung 3.6: Zeitlicher Verlauf der Auslenkung

3.2.1.4 Rückstellkraft

Anhand der maximalen Amplitude lässt sich die maximale Rückstellkraft für den gesamten Rahmen bestimmen.

$$F_R = ku = kA$$

$$u_{max} = A$$

$$A = 0.00925\text{m}$$

$$F_R = 1.95 \cdot 10^5\text{N}$$

3.2.1.4.1 Spannungsnachweis

Die Rückstellkraft wirkt im Zentrum der Masse und bewirkt das maximale Biegemoment bei den Fusspunkten.

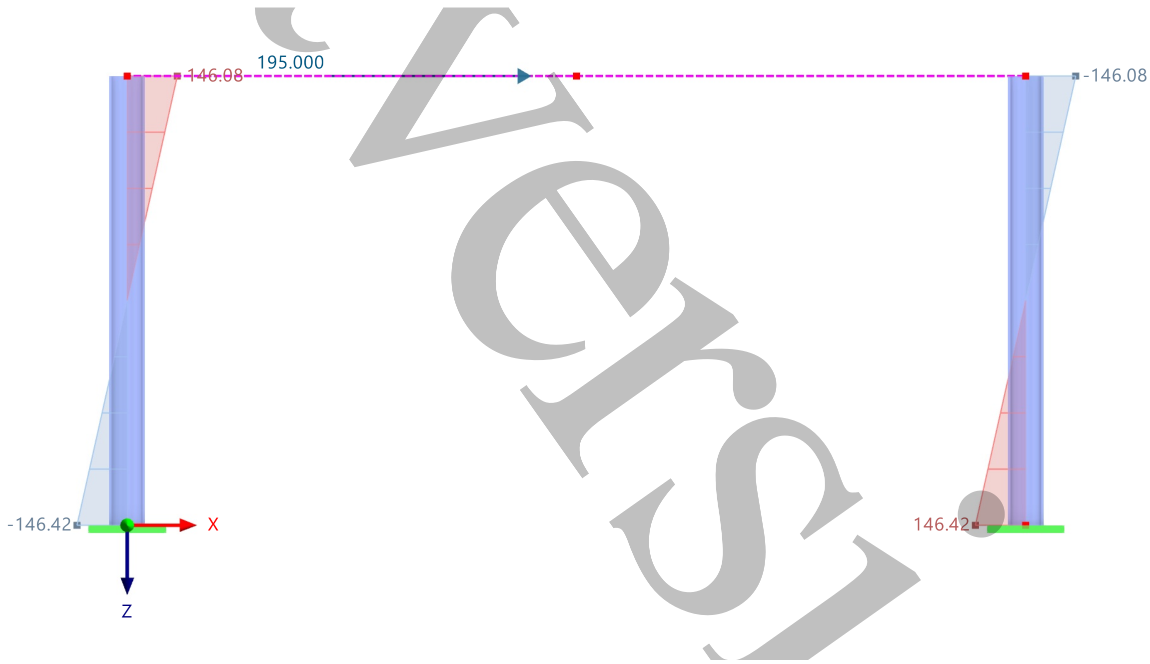

Abbildung 3.7: Biegemomentenverlauf durch die statische Ersatzkraft

$$M_{max} = \frac{F_R H}{4}$$

$$M_{max} = 1.46 \cdot 10^5\text{mN}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_{ely}}$$

$$\sigma_{max} = \frac{156.0\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$Nachweis = \frac{156.0\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} < f_y$$

3.3 Beispiel: Dynamischer Vergrösserungsfaktor

Das System in Abbildung 3.8 zeigt einen Biegeträger, gelagert als einfacher Balken mit einer Auskragung. Dieser wird am Kragarm mit der dynamischen Last F(t) in vertikaler Richtung beansprucht.

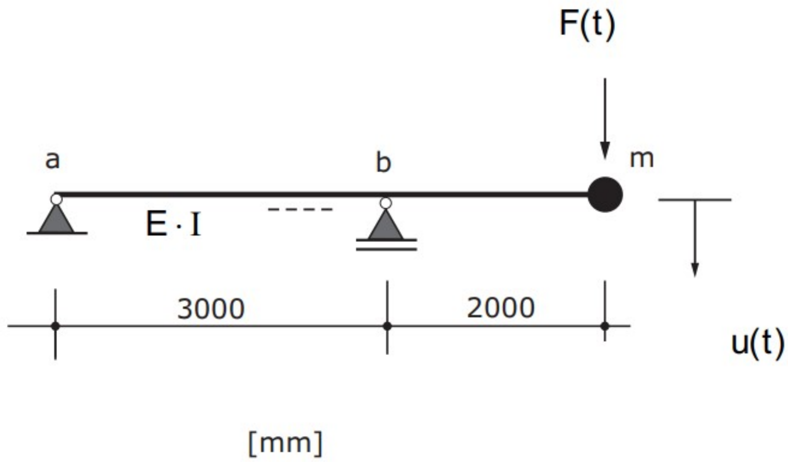

Abbildung 3.8: Statisches System des Biegeträgers

Gesucht:

- Eigenkreisfrequenz ω
- Dynamischer Vergrösserungsfaktor $V(\omega)$
- Maximale dynamische Amplitude im stationären Fall u_{max}

Gegeben:

- Biegeträger ist masselos
- Punktmasse $m = 1t$
- Dämpfungsrate $\zeta = 0.005$
- Biegesteifigkeit $E \cdot I = 30000\text{kNm}^2$
- Es sind lediglich Biegeverformungen zu betrachten $G \cdot A = \infty$

$$F(t) = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = 50\text{kN} \cdot \cos(62.8 \cdot t) \tag{3.6}$$

3.3.1 Musterlösung

Tabelle 3.3: Verwendete Parameter

Parameter	
$EI = 30000000\text{m}^2\text{N}$	$F_0 = 50000\text{N}$
$l_1 = 3000\text{mm}$	$l_2 = 2000\text{mm}$
$m = \frac{1000\text{Ns}^2}{\text{m}}$	$\omega = \frac{62.8}{\text{s}}$
$\zeta = 0.005$	

3.3.1.1 Eigenkreisfrequenz

Die Eigenkreisfrequenz lässt sich aus der folgenden Gleichung bestimmen:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3.3.1.1.1 Steifigkeit des Systems

Die Steifigkeit des Systems lässt sich anhand der statischen Deformation bestimmen. Sie entspricht dem Verhältnis zwischen Einwirkung und der daraus resultierenden Verformung.

$$k = \frac{F}{u}$$

Händisch lässt sich die Deformation mittels realem und virtuellem Kräftezustand, anhand der Arbeitsgleichung bestimmen. Dargestellt in Abbildung 3.9. Die Ermittlung der Steifigkeit bedingt lediglich das Verhältnis zwischen Einwirkung und Deformation, folglich darf Betrag der realen Kraft frei gewählt werden.

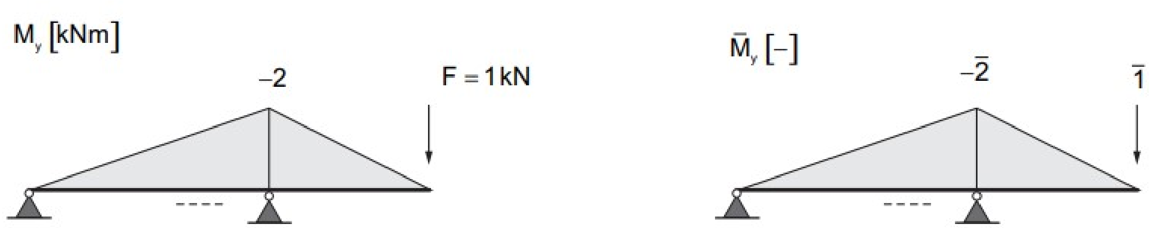

Abbildung 3.9: Realer und virtueller Kräftezustand

Um lediglich Biegeverformungen zu berücksichtigen, kann die Verformung nach folgender Gleichung bestimmt werden.

$$u = \frac{1}{EI_y} \cdot \int_0^{l_1+l_2} M_y \bar{M_y} \, dx$$

$$u = \frac{4000 \, (l_1 + l_2) \, \mathrm{m^2 N}}{3EI}$$

$$u = 0.222\mathrm{mm}$$

$$k = \frac{3EI}{4 \, (l_1 + l_2) \, \mathrm{m}^2}$$

$$k = \frac{4500\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$$

3.3.1.1.2 Eigenkreisfrequenz

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_n = \frac{\sqrt{3}\sqrt{\frac{EI}{m(l_1+l_2)}}}{2\mathrm{m}}$$

$$\omega_n = \frac{67.1}{\mathrm{s}}$$

3.3.1.2 Vergrösserungsfaktor

Der Vergrösserungsfaktor beschreibt das Verhältnis zwischen der maximalen statischen Amplitude und der maximalen dynamischen Amplitude:

$$V(\omega) = \frac{u_{max}}{u_0}$$

Dieser lässt sich mit der Dämpfungsrate ζ, Anregungsfrequenz ω und der Eigenfrequenz ω_n beschreiben.

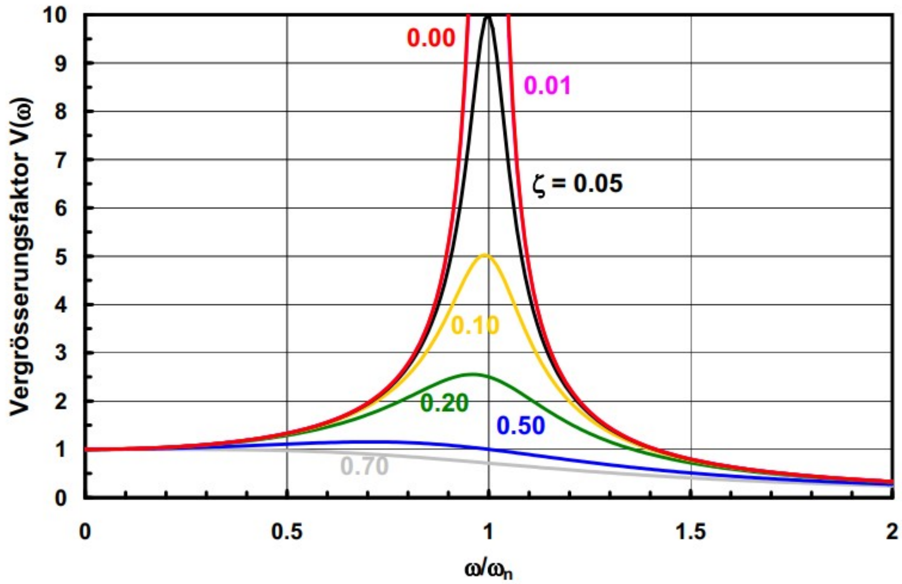

Abbildung 3.10: Einfluss der Dämpfung und der Anregungsfrequenz auf den Vergrösserungsfaktor

$$V(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega^2\zeta^2}{\omega_n^2} + \left(-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 1\right)^2}}$$

$$V(\omega) = 8.07$$

3.3.1.3 Statische Amplitude

Die Einwirkung lässt sich aus der Anregungsfunktion Gleichung 3.6 bestimmen für $t = 0$. Mit der bekannten Systemsteifigkeit bestimmt sich die Deformation.

$$u_{stat} = \frac{F_0}{k}$$

$$u_{stat} = \frac{4F_0\,(l_1 + l_2)\,\mathrm{m}^2}{3EI}$$

$$u_{stat} = 11.11\mathrm{mm}$$

3.3.1.3.1 Stationäre Amplitude

Durch die Vergrösserung der statischen Deformation mit dem Vergrösserungsfaktor resultiert die maximale Amplitude der stationären Lösung.

$$u_{dyn} = u_{stat} V(\omega)$$

$$u_{dyn} = \frac{4F_0 \left(l_1 + l_2\right) \mathrm{m}^2}{3EI\sqrt{\frac{16m\omega^2\zeta^2(l_1+l_2)\mathrm{m}^2}{3EI} + \left(-\frac{4m\omega^2(l_1+l_2)\mathrm{m}^2}{3EI} + 1\right)^2}}$$

$$u_{dyn} = 89.6\mathrm{mm}$$

Der Nachweis der Gebrauchstauglichkeit wäre damit sicherlich nicht erfüllt. Das Beispiel soll aufzeigen, wenn die Erregerfrequenz im Bereich der Eigenfrequenz zu liegen kommt, es zu grossen Amplifikationen der Verformungen bzw. zu Resonanzeffekten kommen kann.

Da meist die Masse und die Erregung (z.B. Maschine) gegeben ist, kann man zum Beispiel ein Dämpfungselement einbauen, was jedoch keinen wesentlichen Einfluss auf das Frequenzverhältnis hat. Dadurch werden jedoch die Amplituden begrenzt.

Eine weitere Möglichkeit wäre die Biegesteifigkeit $E \cdot I$ zu erhöhen. Das System wird steifer und die Eigenfrequenz grösser. Man spricht in dem Fall von einer Hochabstimmung.

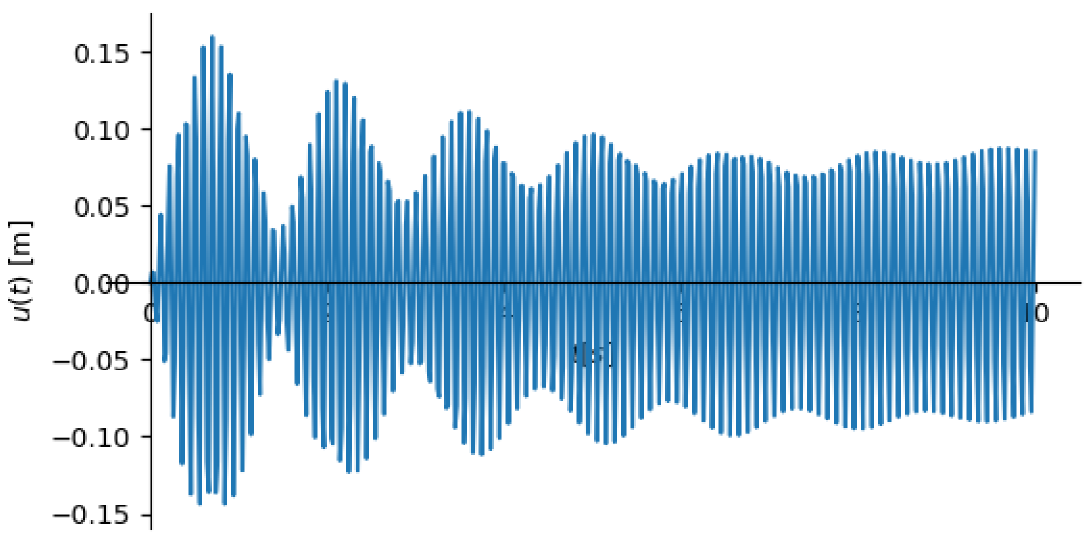

Abbildung 3.11: Gesamtantwort des Systems

In der Abbildung 3.11 ist die Gesamtantwort des Systems dargestellt. Wenn Dämpfung im System vorhanden ist, dann verschwindet die transiente bzw. homogene Lösung $u(t)$ und das System schwingt mit der stationären Lösung bzw. partikulären Lösung $u(t)$ in der Anregungsfrequenz. Die Anregung zwingt dem System seine Schwingung auf. In der Praxis sind die Anlaufphasen zu beachten, solange die der transiente Teil noch nicht abgeklungen ist. Dort sind die Amplituden grösser und es gilt zu untersuchen, ob diese kurzfristige Überschreitung Konsequenzen (z.B. zul. Verformungen oder Bauteilspannungen) für das Tragsystem hat.

3.4 Beispiel: Gesamtantwort ohne Dämpfung

Das System in Abbildung 3.12 zeigt ein Stabwerk, welches durch eine Werkzeugmaschine angeregt wird.

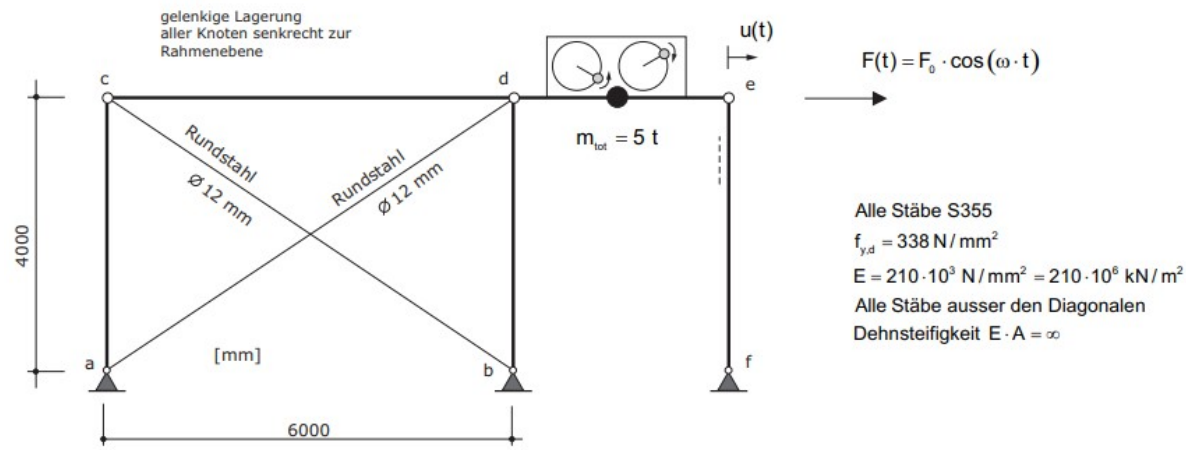

Abbildung 3.12: Statisches System des Stabwerks

Gesucht:

- Eigenkreisfrequenz ω_n
- Dynamischer Vergrösserungsfaktor $V(\omega)$
- Stationäre Antwort $u_p(t)$ mit dem dynamischen Vergrösserungsfaktor $V(\omega)$
- Gesamtantwort $u(t)$ mit den Anfangsbedingungen $u(t=0)=0$ und $u'(t=0)=0$
- Festigkeitsnachweis der Diagonalen

Gegeben:

- Gesamtmasse inkl. rotierende Massen $m_{tot} = 5t$
- Rotierende Massen in Werkzeugmaschine $m_1 = 0.2t$
- Drehzahl Werkzeugmaschine $n = 150/\text{min}$
- Exzentrizität der rotierenden Massen $e = 0.1\text{m}$
- Dämpfungsrate $\zeta = 0$
- Punktmasse $m = 1t$
- Dämpfungsrate $\zeta = 0.005$
- Alle Stäbe ausser Diagonalen $E \cdot A = \infty$
- Alle Stäbe S355

3.4.1 Musterlösung

Tabelle 3.4: Verwendete Parameter

Parameter	
$B = 6000\text{mm}$	$E = \frac{210000\text{N}}{\text{mm}^2}$
$H = 4000\text{mm}$	$\varnothing_{Diag} = 12\text{mm}$
$e = 0.1\text{m}$	$f_{yd} = \frac{338\text{N}}{\text{mm}^2}$
$m_1 = \frac{200\text{Ns}^2}{\text{m}}$	$m_{tot} = \frac{5000\text{Ns}^2}{\text{m}}$
$n = \frac{150}{\text{minute}}$	$\zeta = 0.0$

3.4.1.1 Systemsteifigkeit

Zur Ermittlung der Eigenkreisfrequenz wird die Steifigkeit des gesamten Systems benötigt.

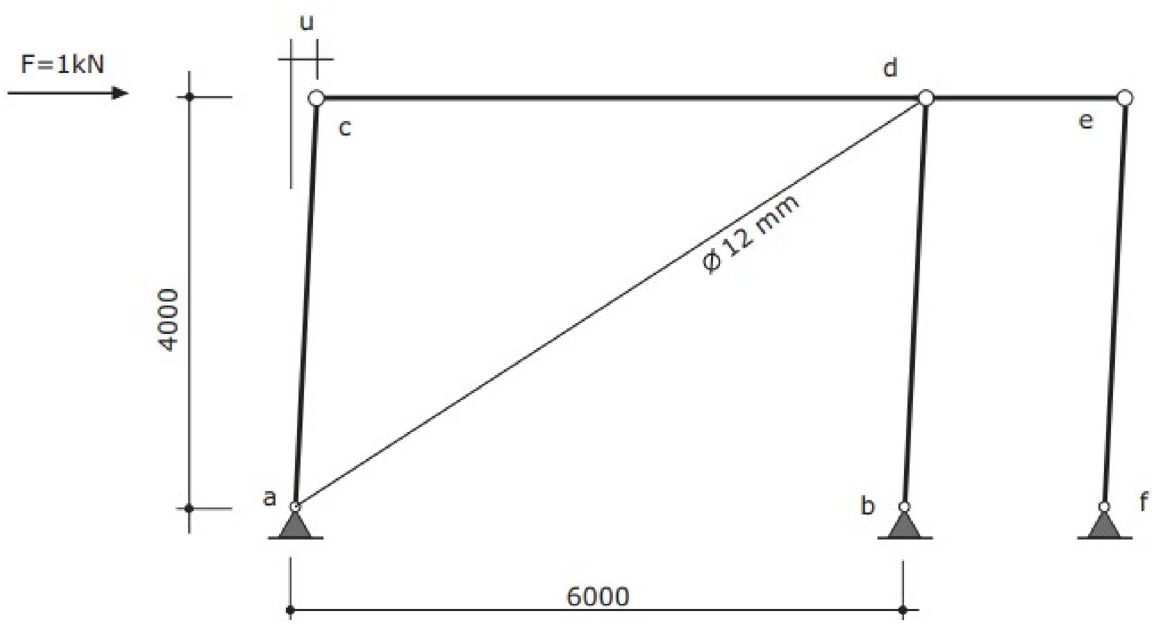

Abbildung 3.13: Verformungszustand des Systems für die Einheitskraft

Das System wird mit einer Einheitskraft belastet. Aufgrund der Eigenschaften der Pendelstäbe (lediglich Normalkräfte) und deren unendlich grossen Dehnsteifigkeit, spielt lediglich die Verformung der Diagonalen eine Rolle. Dazu gilt, dass die Diagonalen nur Zugkräfte aufnehmen können. Das bedeutet, dass letztlich ein Stab aktiv ist für die beschrieben Situation in Abbildung 3.15.

Dazu muss die Normalkraft in der Diagonalen bestimmt werden.

$$\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{H}{B}\right)$$

$$\alpha = 0.588$$

$$Z_{Diag} = 1000\sqrt{1 + \frac{H^2}{B^2}}\mathrm{N}$$

$$Z_{Diag} = 1.2 \cdot 10^3\mathrm{N}$$

Mittels der Arbeitsgleichung lässt sich die Verformung bestimmen. Für die Integration zweier Normalkraftverläufe gilt die folgende Beziehung:

$$u = \frac{1}{EA_{Diag}} \int_0^{l_{Diag}} N_x \bar{N}_x \, dx$$

Länge der Diagonalen:

$$l_{Diag} = B\sqrt{1 + \frac{H^2}{B^2}}$$

$$l_{Diag} = 7.21\mathrm{m}$$

Querschnittsfläche der Diagonalen:

$$A_{Diag} = \frac{\pi \oslash_{Diag}^2}{4}$$

$$A_{Diag} = 113.0\mathrm{mm}^2$$

Deformation der Diagonalen

$$u_k = \frac{4000B\left(1 + \frac{H^2}{B^2}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{N}}{\pi E \oslash_{Diag}^2}$$

$$u_k = 0.439\text{mm}$$

Steifigkeit des Systems:

$$k = \frac{F}{u_k}$$

$$k = \frac{2.28 \cdot 10^3 \text{N}}{\text{mm}}$$

3.4.1.2 Eigenkreisfrequenz

Aus der Systemsteifigkeit lässt sich leicht die Eigenkreisfrequenz bestimmen:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_n = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{E\varnothing_{Diag}^2}{Bm_{tot}\left(1+\frac{H^2}{B^2}\right)^{\frac{3}{2}}}}}{2}$$

$$\omega_n = \frac{21.4}{\text{s}}$$

3.4.1.3 Dynamischer Vergrösserungsfaktor

3.4.1.3.1 Anregungsfunktion

Zur Bestimmung des dynamischen Vergrösserungsfaktor wird die stationäre Verformung benötigt. Diese lässt sich aus der Anfangskraft der Anregungsfunktion ermitteln. Dazu wird diese Funktion benötigt. Wir wissen die Drehzahl n und die Exzentrizität e sowie deren Masse m_1.

$$f = n$$

$$f = \frac{2.5}{\text{s}}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = \frac{15.7}{\mathrm{s}}$$

Nun fehlt lediglich die Anfangskraft F_0. Die Fliehkraft F der 2 gegenläufig rotierenden Massen bewirken eine addierende Fliehkraft in horizontaler Richtung zu:

$$F_0 = 2(m_1 \cdot e \cdot \omega^2)$$

$$F_0 = \frac{50\pi^2 e m_1}{\mathrm{s}^2}$$

$$F_0 = 9.87 \cdot 10^3 \mathrm{N}$$

3.4.1.3.2 Statische Deformation

Die statische Deformation lässt sich nun leicht anhand der ermittelten Systemsteifigkeit herleiten.

$$u_0 = \frac{F_0}{k}$$

$$u_0 = 4.33 \mathrm{mm}$$

3.4.1.3.3 Vergrösserungsfaktor

$$V(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega^2\zeta^2}{\omega_n^2} + \left(-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 1\right)^2}}$$

$$V(\omega) = 2.18$$

3.4.1.4 Stationäre Antwort

Es handelt sich um einen ungedämpften Einmassenschwinger mit einer harmonischen Anregungsfunktion. Die Bewegungsgleichung ist die folgende:

$$mu''(t) + ku(t) = F(t)$$

Dies ist eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung. Die Lösung dieser lässt sich in einen partikulären Anteil und in einen homogenen Anteil aufteilen. Der partikuläre Anteil entspricht der stationären Antwort. Der homogene Anteil nennt sich transienter Anteil. Wäre eine Dämpfung im System vorhanden, so startet der Schwungvorgang aus einer Kombination beider Teile. Aufgrund der Dämpfung verschwindet der stationäre Anteil und das System wird schlussendlich nur noch durch den transienten Anteil deformiert.

Anhand des Vergrösserungsfaktor kann die stationäre dynamische Antwort des Systems mit der folgenden Beziehung ermittelt werden.

$$u_p = V(\omega)u_0 \cdot \cos(\omega t)$$

$$u_p = 9.43 \cos\left(\frac{5\pi t}{\mathrm{s}}\right)\mathrm{mm}$$

3.4.1.5 Gesamtantwort

Für die Gesamtantwort wird nun noch der homogene Anteil benötigt. Dazu ist die folgende Differentialgleichung zu lösen.

$$mu''(t) + ku(t) = 0$$

Als Ansatzfunktion dient die folgende Gleichung:

$$u_h = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t)$$

Die Randbedingungen sind in der Aufgabenstellung definiert und sind die folgenden:

$u(t = 0) = 0$

$u'(t = 0) = 0$

Vorsicht, die Randbedingungen gelten für die gesamte Lösung:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

3.4.1.6 Festigkeitsnachweis

Aufgrund der maximalen Auslenkung, kann die maximale Normalkraft auf der Diagonalen bestimmt werden.

3.4.1.6.1 Maximale Auslenkung

Aus dem Plot in **?@fig-gesamtantwort_ems4** ist die maximale Auslenkung ersichtlich. Die Ermittlung des Zeitpunkts bei einer maximalen Auslenkung wird hier numerisch gelöst.

$$t_{max} = 2.8\mathrm{s}$$

$$u_{max} = 0.0188\mathrm{m}$$

3.4.1.6.2 Maximale Einwirkung

Aufgrund der maximalen Amplitude verlängert sich die Diagonale um $\Delta l = u_{max}$. Die Dehnung des Stabs ist somit die $\frac{\Delta l}{l_{Diag}}$. Bei linear elastischem Materialverhalten gilt die folgende Beziehung:

$$\sigma = \varepsilon E$$

$$\varepsilon = 0.00314$$

$$\sigma = \frac{659.0\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$f_{yd} = \frac{338\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$Nachweis = \frac{\sigma}{f_{yd}}$$

$$Nachweis = 1.95$$

Die Diagonale würde plastifizieren, so dass die linearen Annahmen für die Berechnung der Systemantwort nicht angewendet werden dürfen.

3.5 Beispiel: Gesamtantwort mit Dämpfung

Das System in Abbildung 3.14 entspricht dem System in Abbildung 3.12. Ergänzt wurde dies mit einem Dämpfungselement.

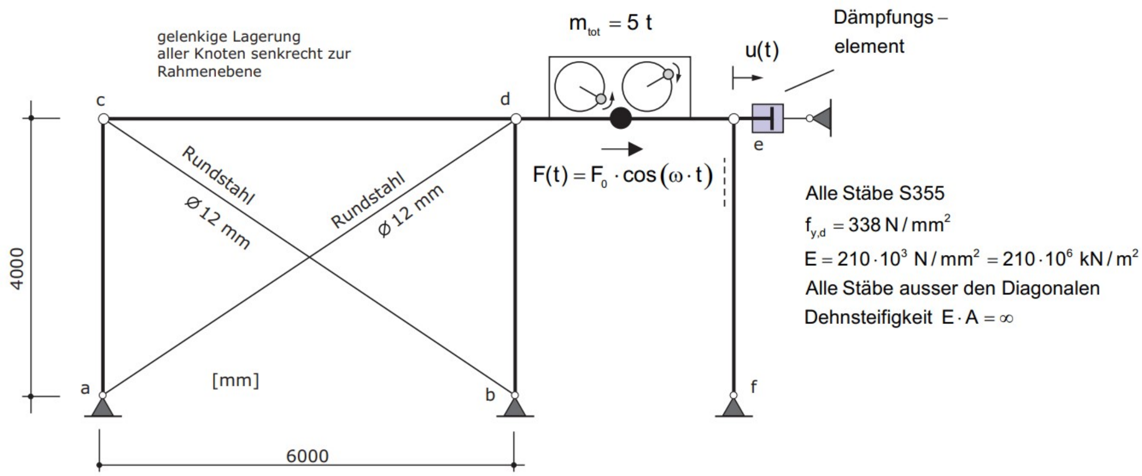

Abbildung 3.14: Statisches System

Gesucht:

- Dynamischer Vergrösserungsfaktor $V(\omega)$
- Stationäre Amplitude
- Festigkeitsnachweis der Diagonalen

Gegeben:

- Gesamtmasse inkl. rotierende Massen $m_{tot} = 5t$
- Rotierende Massen in Werkzeugmaschine $m_1 = 0.2t$
- Drehzahl Werkzeugmaschine $n = 150/\text{min}$
- Exzentrizität der rotierenden Massen $e = 0.1\text{m}$
- Dämpfungsrate $\zeta = 0$
- Punktmasse $m = 1t$
- Dämpfungsrate $\zeta = 0.005$
- Alle Stäbe ausser Diagonalen $E \cdot A = \infty$
- Alle Stäbe S355

3.5.1 Musterlösung

Tabelle 3.5: Verwendete Parameter

Parameter	
$B = 6000\text{mm}$	$E = \frac{210000\text{N}}{\text{mm}^2}$
$H = 4000\text{mm}$	$\varnothing_{Diag} = 12\text{mm}$
$e = 0.1\text{m}$	$f_{yd} = \frac{338\text{N}}{\text{mm}^2}$
$m_1 = \frac{200\text{Ns}^2}{\text{m}}$	$m_{tot} = \frac{5000\text{Ns}^2}{\text{m}}$
$n = \frac{150}{\text{minute}}$	$\zeta = 0.2$

3.5.1.1 Systemsteifigkeit

Zur Ermittlung der Eigenkreisfrequenz wird die Steifigkeit des gesamten Systems benötigt.

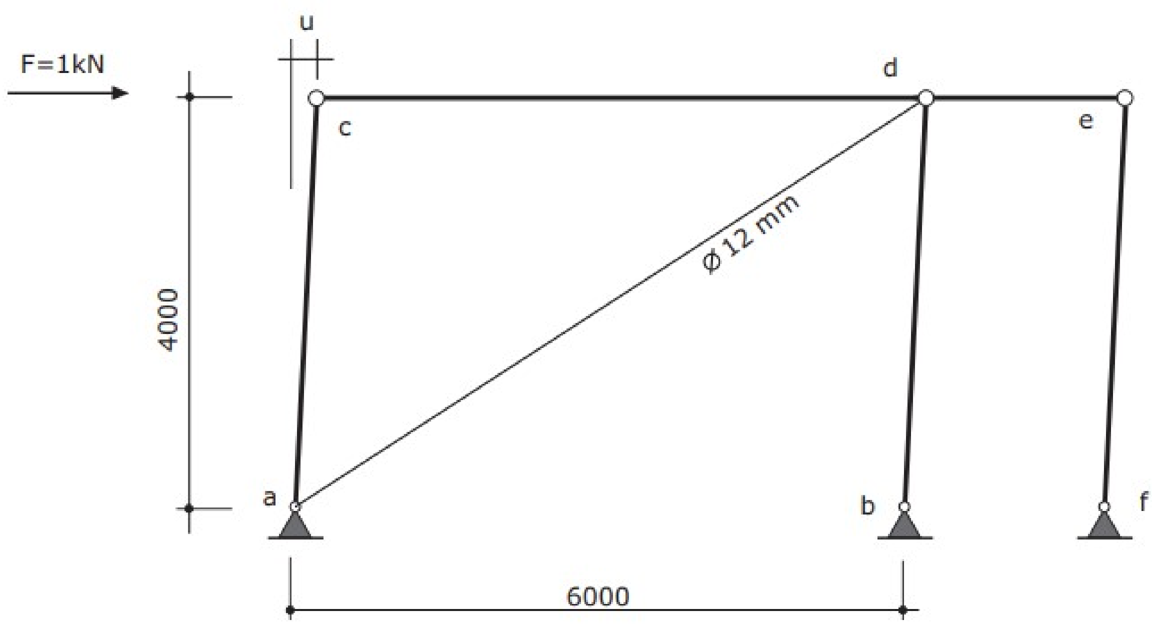

Abbildung 3.15: Verformungszustand des Systems für die Einheitskraft

Das System wird mit einer Einheitskraft belastet. Aufgrund der Eigenschaften der Pendelstäbe (lediglich Normalkräfte) und deren unendlich grossen Dehnsteifigkeit, spielt lediglich die Verformung der Diagonalen eine Rolle. Dazu gilt, dass die Diagonalen nur Zugkräfte aufnehmen können. Das bedeutet, dass letztlich ein Stab aktiv ist für die beschrieben Situation in Abbildung 3.15.

Dazu muss die Normalkraft in der Diagonalen bestimmt werden.

$$\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{H}{B}\right)$$

$$\alpha = 0.588$$

$$Z_{Diag} = 1000\sqrt{1 + \frac{H^2}{B^2}}\mathrm{N}$$

$$Z_{Diag} = 1.2 \cdot 10^3\mathrm{N}$$

Mittels der Arbeitsgleichung lässt sich die Verformung bestimmen. Für die Integration zweier Normalkraftverläufe gilt die folgende Beziehung:

$$u = \frac{1}{EA_{Diag}} \int_0^{l_{Diag}} N_x \bar{N}_x \, dx$$

Länge der Diagonalen:

$$l_{Diag} = B\sqrt{1 + \frac{H^2}{B^2}}$$

$$l_{Diag} = 7.21\mathrm{m}$$

Querschnittsfläche der Diagonalen:

$$A_{Diag} = \frac{\pi \varnothing_{Diag}^2}{4}$$

$$A_{Diag} = 113.0\mathrm{mm}^2$$

Deformation der Diagonalen

$$u_k = \frac{4000B\left(1 + \frac{H^2}{B^2}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{N}}{\pi E \varnothing_{Diag}^2}$$

$$u_k = 0.439\text{mm}$$

Steifigkeit des Systems:

$$k = \frac{F}{u_k}$$

$$k = \frac{2.28 \cdot 10^3\text{N}}{\text{mm}}$$

3.5.1.2 Eigenkreisfrequenz

Aus der Systemsteifigkeit lässt sich leicht die Eigenkreisfrequenz bestimmen:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_n = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{E\varnothing_{Diag}^2}{Bm_{tot}\left(1+\frac{H^2}{B^2}\right)^{\frac{3}{2}}}}}{2}$$

$$\omega_n = \frac{21.4}{\text{s}}$$

3.5.1.3 Dynamischer Vergrösserungsfaktor

3.5.1.3.1 Anregungsfunktion

Zur Bestimmung des dynamischen Vergrösserungsfaktor wird die stationäre Verformung benötigt. Diese lässt sich aus der Anfangskraft der Anregungsfunktion ermitteln. Dazu wird diese Funktion benötigt. Wir wissen die Drehzahl n und die Exzentrizität e sowie deren Masse m_1.

$$f = n$$

$$f = \frac{2.5}{\text{s}}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = \frac{15.7}{\mathrm{s}}$$

Nun fehlt lediglich die Anfangskraft F_0. Die Fliehkraft F der 2 gegenläufig rotierenden Massen bewirken eine addierende Fliehkraft in horizontaler Richtung zu:

$$F_0 = 2(m_1 \cdot e \cdot \omega^2)$$

$$F_0 = \frac{50\pi^2 e m_1}{\mathrm{s}^2}$$

$$F_0 = 9.87 \cdot 10^3 \mathrm{N}$$

3.5.1.3.2 Statische Deformation

Die statische Deformation lässt sich nun leicht anhand der ermittelten Systemsteifigkeit herleiten.

$$u_0 = 4.33\mathrm{mm}$$

3.5.1.3.3 Vergrösserungsfaktor

$$V(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega^2\zeta^2}{\omega_n^2} + \left(-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 1\right)^2}}$$

$$V(\omega) = 1.83$$

3.5.1.4 Stationäre Antwort

Es handelt sich um einen gedämpften Einmassenschwinger mit einer harmonischen Anregungsfunktion. Die Bewegungsgleichung ist die folgende:

$$mu''(t) + cu'(t) + ku(t) = F(t)$$

Dies ist eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung. Die Lösung dieser lässt sich in einen partikulären Anteil und in einen homogenen Anteil aufteilen. Der partikuläre Anteil entspricht der stationären Antwort. Der homogene Anteil nennt sich transienter Anteil.

Anhand des Vergrösserungsfaktor kann die stationäre dynamische Antwort des Systems mit der folgenden Beziehung ermittelt werden.

$$u_p = V(\omega)u_0 * \cos(\omega t)$$

$$u_p = 0.00793 \cos\left(\frac{5\pi t}{\mathrm{s}}\right)\mathrm{m}$$

3.5.1.5 Gesamtantwort

Für die Gesamtantwort wird nun noch der homogene Anteil benötigt. Dazu ist die folgende Differentialgleichung zu lösen.

$$mu''(t) + cu'(t) + ku(t) = 0$$

Als Ansatzfunktion dient die folgende Gleichung:

$$u_h = e^{-\zeta\omega_n t}(A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t))$$

Die Randbedingungen sind in der Aufgabenstellung definiert und sind die folgenden:

$u(t = 0) = 0$

$u'(t = 0) = 0$

Vorsicht, die Randbedingungen gelten für die gesamte Lösung:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

3.5.1.5.1 Gedämpfte Eigenkreisfrequenz

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\omega_d = \frac{20.9}{\mathrm{s}}$$

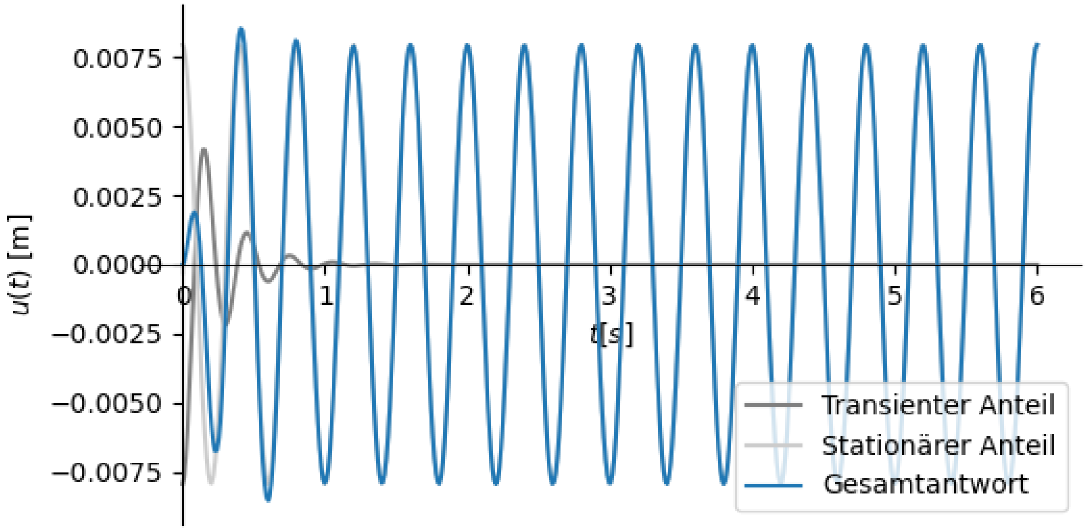

Abbildung 3.16: Gesamtantwort des Systems

3.5.1.6 Festigkeitsnachweis

Aufgrund der maximalen Auslenkung, kann die maximale Normalkraft auf der Diagonalen bestimmt werden.

3.5.1.6.1 Maximale Auslenkung

Aus dem Plot in Abbildung 3.16 ist die maximale Auslenkung ersichtlich. Die Ermittlung des Zeitpunkts bei einer maximalen Auslenkung wird hier numerisch gelöst.

$$t_{max} = 0.41\text{s}$$

$$u_{max} = 0.00855\text{m}$$

3.5.1.6.2 Maximale Einwirkung

Aufgrund der maximalen Amplitude verlängert sich die Diagonale um $\Delta l = u_{max}$. Die Dehnung des Stabs ist somit die $\frac{\Delta l}{l_{Diag}}$. Bei linear elastischem Materialverhalten gilt die folgende Beziehung:

$$\sigma = \varepsilon E$$

$$\varepsilon = 0.00142$$

$$\sigma = \frac{299.0\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$f_{yd} = \frac{338\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$Nachweis = \frac{\sigma}{f_{yd}}$$

$$Nachweis = 0.885$$

Die Diagonale bleibt im elastichen Bereich, so dass die linearen Annahmen gültig sind. Der Festigkeitsnachweis für die Diagonale ist erfüllt. Im Weiteren wäre der Grenzustand der Tragfähigkeit *Ermüdung* zu prüfen.

3.6 Beispiel: Fourier-Transformation

Nachfolgend ist ein unterspannter Träger gezeigt, der durch eine periodische Rechteckanregung dynamisch beansprucht wird.

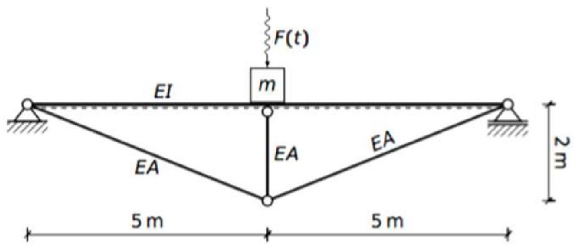

Abbildung 3.17: Statisches System

Gesucht:

- Eigenkreisfrequenz ω_n
- Stationäre Amplitude der Verschiebung
- Staionäre Amplitude der Beschleunigung

Gegeben:

- Elastizitätsmodul $E = 200000 \text{N/mm}^2$
- Biegestab $I = 2 \cdot 10^8 \text{mm}^4$ und $E \cdot A = \infty$
- Fachwerkstäbe $A = 3000 \text{mm}^2$
- Einzelmasse $m = 1000 \text{kg}$
- Kraftamplitude $A = 1 \text{kN}$
- Rechteckanregung in Abbildung 3.18

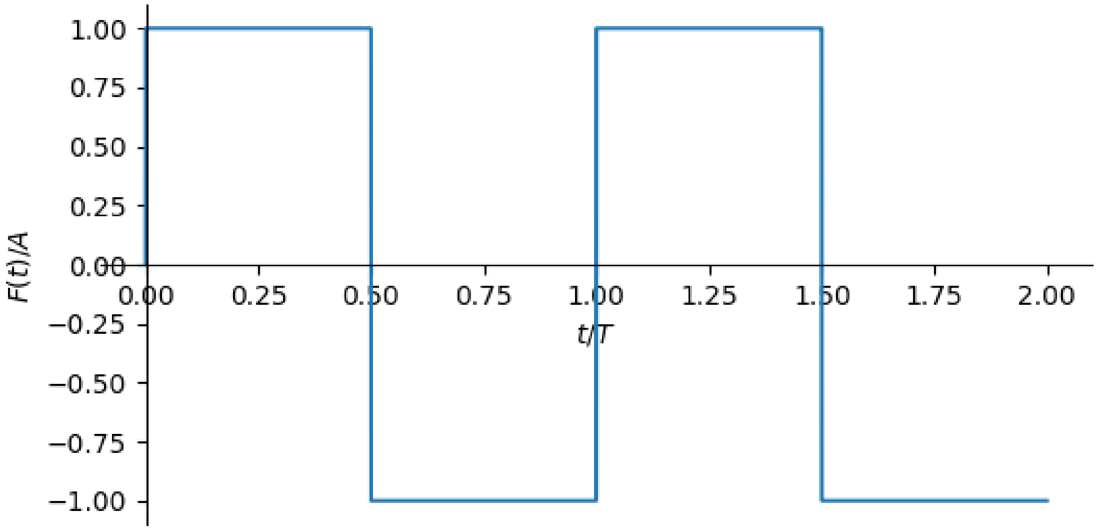

Abbildung 3.18: Rechteckige Anregungsfunktion

3.6.1 Musterlösung

Tabelle 3.6: Verwendete Parameter

Parameter	
$A = 1000\text{N}$	$A_{Fachwerk} = 3000\text{mm}^2$
$E = \frac{200000\text{N}}{\text{mm}^2}$	$I_{Balken} = 200000000\text{mm}^4$
$h = 2\text{m}$	$l = 5\text{m}$
$m = \frac{1000\text{Ns}^2}{\text{m}}$	$\zeta = 0.0$

3.6.1.1 Erregerfunktion

Die periodische Erregerfunktion wird mit einer Fourier-Reihenentwicklung approximiert um eine periodisch, harmonische Funktion zu generieren.

Die Reihenentwicklung folgt folgender Funktion:

$$F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t))$$

Die Aufgabenstellung fordert lediglich die ersten drei Teile der Reihe.

$$F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{3} (a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t))$$

Nach Bestimmung der Konstanten folgt die Gleichung zu:

$$F(t) = \frac{4A}{\pi} \cdot [\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t)]$$

$$f_{Anregung} = \frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega = \frac{6.28}{\text{s}}$$

$$F(t) = \frac{4A\left(\sin\left(\frac{2\pi t}{\text{s}}\right) + \frac{\sin\left(\frac{6\pi t}{\text{s}}\right)}{3} + \frac{\sin\left(\frac{10\pi t}{\text{s}}\right)}{5}\right)}{\pi}$$

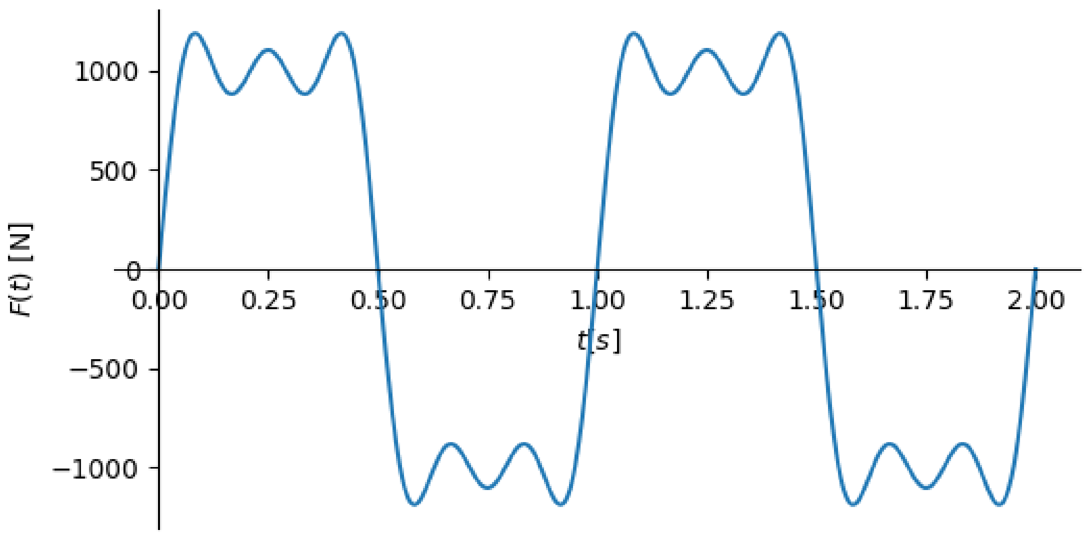

Abbildung 3.19: Anregungsfunktion mit Fourier-Reihe approximiert

3.6.1.2 Systemsteifigkeit

Anhand der Arbeitsgleichung wird die Deformation bestimmt und daraus die Steifigkeit des Systems. Auf die Bestimmung der Schnittgrössen wird nicht eingegangen. Es handelt sich um ein statisch unbestimmtes System.

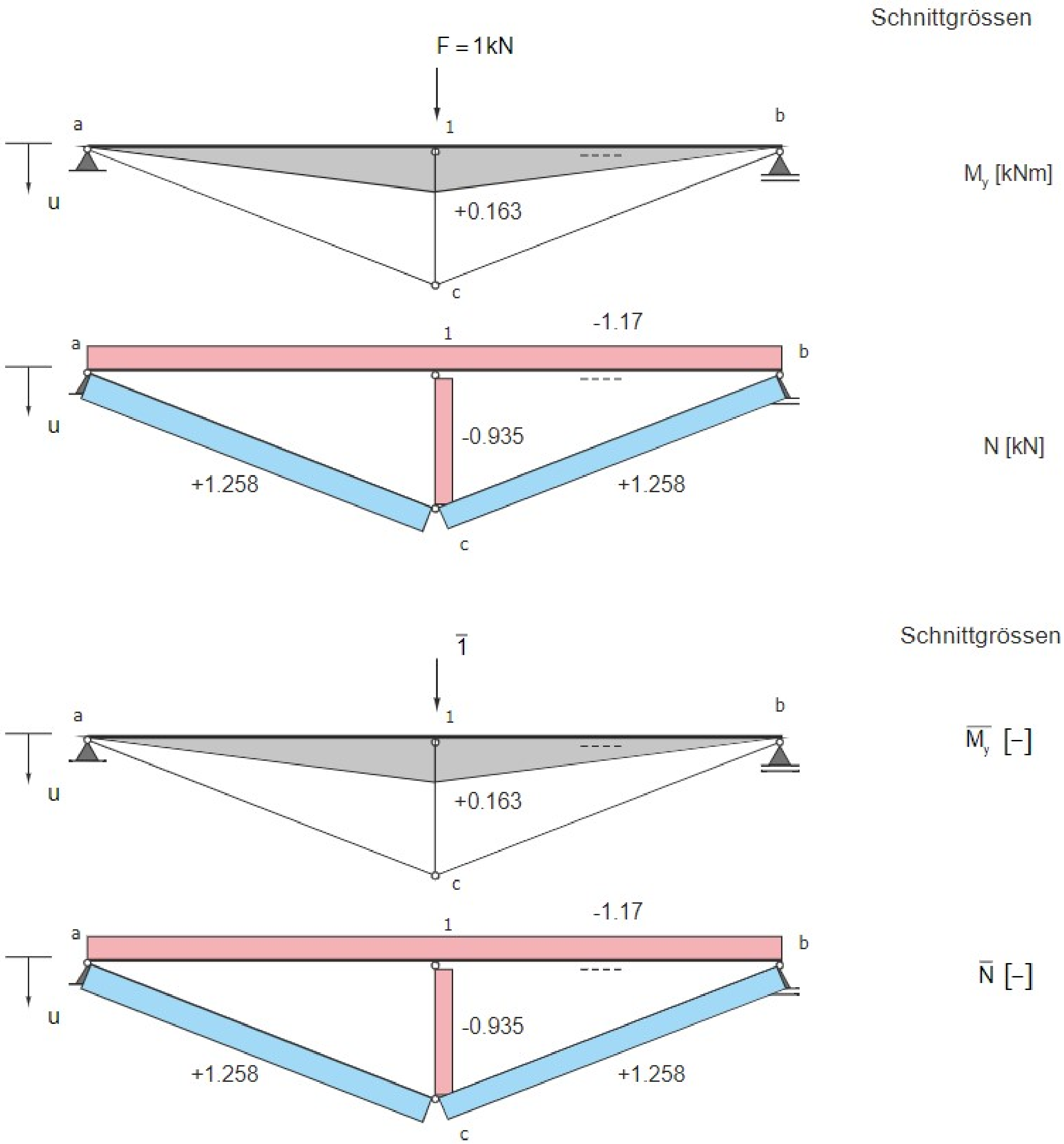

Abbildung 3.20: Schnittgrössen des unterspannten Balkens

Da der Balken dehnstarr ist und die Unterspannung aus Pendelstäben zusammengesetzt ist, sind Anteile aus Normalkraft aus den Pendelstäben und lediglich Anteile aus Biegung im Balken für die Deformation zuständig.

$$u_k = 0.0335\text{mm}$$

$$k = \frac{2.98 \cdot 10^7\text{N}}{\text{m}}$$

3.6.1.3 Eigenkreisfrequenz

Aus der Systemsteifigkeit lässt sich leicht die Eigenkreisfrequenz bestimmen:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_n = \frac{173.0}{\text{s}}$$

3.6.1.4 Stationäre Amplitude der Verschiebung

Die statische Durchbiegung lässt sich anhand der Systemsteifigkeit und der Anfangskraft der Anregungsfunktion bestimmen. Mittels des Vergrösserungsfaktors lässt sich schlussendlich die stationäre maximale Amplitude bestimmen. Der Vergrösserungsfaktor ist abhängig von der Anregungsfrequenz, welche wir mit der Fourier-Reihenentwicklung approximiert haben. Wir haben folglich *"3 verschiedene"* Anregungsfrequenzen mit der entsprechenden Gewichtung.

$$V(\omega) = \frac{1}{5\sqrt{\frac{100\omega^2\zeta^2}{\omega_n^2} + \left(-\frac{25\omega^2}{\omega_n^2} + 1\right)^2}} + \frac{1}{3\sqrt{\frac{36\omega^2\zeta^2}{\omega_n^2} + \left(-\frac{9\omega^2}{\omega_n^2} + 1\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega^2\zeta^2}{\omega_n^2} + \left(-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 1\right)^2}}$$

$$V(\omega) = 1.55$$

$$u_0 = 0.0427\text{mm}$$

$$u_{stat} = 0.066\text{mm}$$

Der Vergrösserungsfaktor ist erwartungsgemäss niedrig, da sich die Eigenkreisfrequenz deutlich von der Anregungsfrequenz abgrenzt.

3.6.1.5 Stationäre Amplitude der Beschleunigung

Die Beschleunigung lässt sich ebenfalls anhand des Vergrösserungsfaktors bestimmen. Dies Entspricht dem Vorgehen nach Michael Baur.

$$V_a(\omega) = 0.00205$$

$$\frac{d^2}{dt^2}u_{max} = \frac{0.0026\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Meines Erachtens müsste der Vergrösserungsfaktor für die Beschleunigung ebenfalls mit sämtlichen, gewichteten Anregungsfrequenzen der approximierten Anregungsfunktion bestimmt werden.

$$V_a(\omega) = 0.00614$$

$$\frac{d^2}{dt^2}u_{max} = \frac{0.00781\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

4 Mehrmassenschwinger

4.1 Beispiel: Eigenvektoren und Nachgiebigkeitsmatrix

Das System in Abbildung 4.1 zeigt einen Rahmen, welcher als Zweimassenschwinger modelliert werden kann.

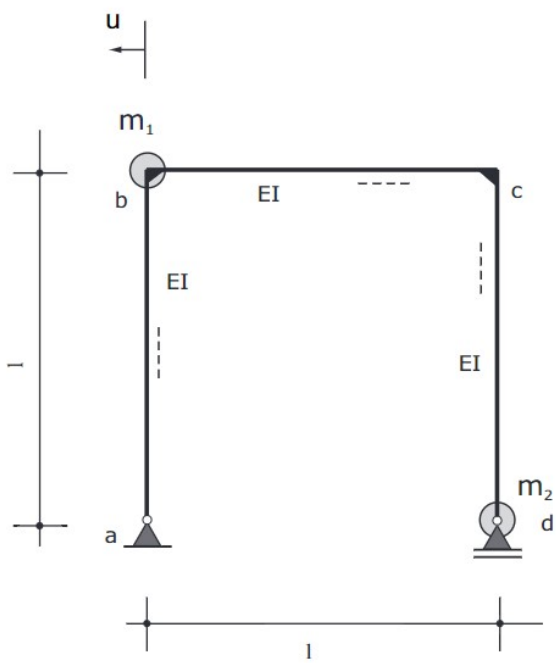

Abbildung 4.1: Statisches System des 2-Massenschwingers

Gesucht:

- Eigenkreisfrequenz ω
- Eigenformen - Normierung auf

$$\phi_1^T = \begin{bmatrix} 1 & \end{bmatrix}$$
$$\phi_2^T = \begin{bmatrix} 1 & \end{bmatrix}$$

- Skizze der Eigenformen

Gegeben:

- Biegesteifigkeit aller Stäbe $E \cdot I = 20 \cdot 10^{12} \text{Nmm}^2$
- Dehnsteifigkeit aller Stäbe $E \cdot A = \infty$
- Einzelmassen $m_1 = 1000\text{kg}$ und $m_2 = 1000\text{kg}$
- Länge $l = 4000\text{mm}$

4.1.1 Musterlösung

Parameter	
$EI = 20000000000000\text{mm}^2\text{N}$	$l = 4\text{m}$
$m_1 = \frac{1000\text{Ns}^2}{\text{m}}$	$m_2 = \frac{1000\text{Ns}^2}{\text{m}}$

4.1.1.1 Nachgiebigkeitsmatrix $\mathbf{D}$

Die Steifigkeitsmatrix lässt sich durch Invertierung der Nachgiebigkeitsmatrix beschreiben. Die Nachgiebigkeitsmatrix **D** beschreibt die Deformation an einem Massenpunkt. Die Einträge der **D** - Matrix beschreiben die Deformationen für unterschiedliche Laststellungen.

$$\mathbf{K} = \mathbf{D^{-1}}$$

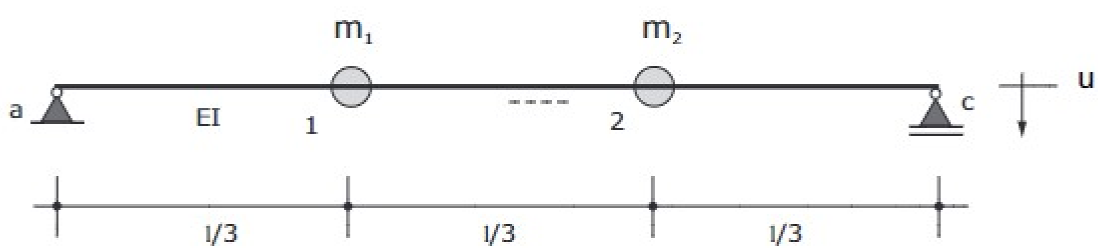

Abbildung 4.2: Balken mit 2 Einzelmassen

Für einen 2-Massenschwinger, wie in Abbildung 4.2 , hat die Nachgiebigkeitsmatrix folgende Form:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}$$

wobei gilt:

δ_{ab} : a ist die Lastsituation, b ist die Masse.

4.1.1.1.1 Anwendung

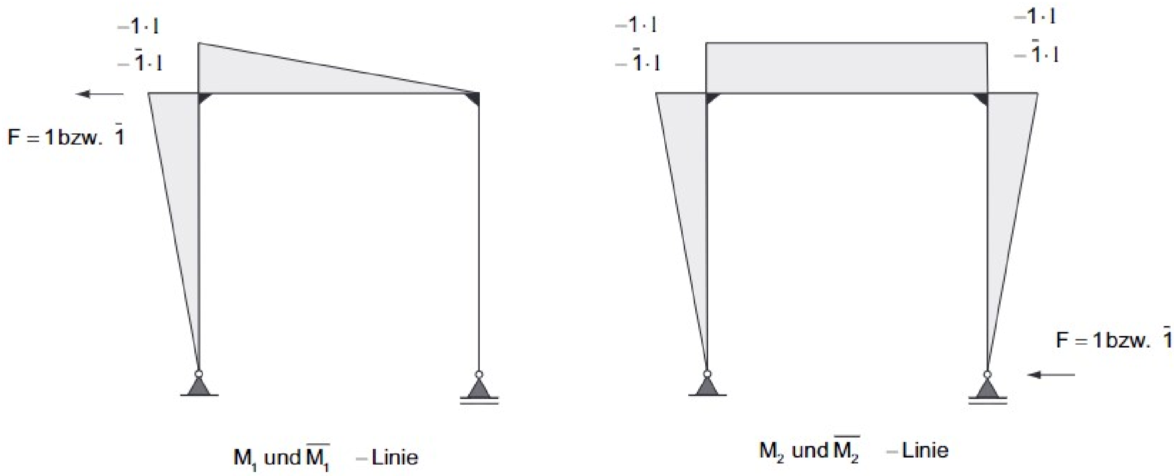

Abbildung 4.3: Schnittgrössen für beide Lastfälle zur Bestimmung der Deformation

$$\delta_{ab} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_a \bar{M}_b \, dx$$

Es werden 2 Laststellungen betrachtet, jeweils an einem Massenpunkt. Dabei ist Beachtung der Einheit der Einwirkung zu schenken. Diese wird einheitslos angesetzt.

$$\delta_{11} = \frac{2l^3}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{5l^3}{6EI}$$

$$\delta_{21} = \frac{5l^3}{6EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{5l^3}{3EI}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{2l^3}{3EI} & \frac{5l^3}{6EI} \\ \frac{5l^3}{6EI} & \frac{5l^3}{3EI} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l^3} & -\frac{2EI}{l^3} \\ -\frac{2EI}{l^3} & \frac{8EI}{5l^3} \end{bmatrix}$$

4.1.1.2 Eigenvektoren

Die Bewegungsgleichung für einen ungedämpften, frei schwingenden Mehrmassenschwinger lässt sich folgender massen aufstellen:

$$\mathbf{M}\mathbf{u}''(\mathbf{t}) + \mathbf{K}\mathbf{u}(\mathbf{t}) = 0$$

Die Modale Analyse entkoppelt die Gleichungen um diese unabhängig von einander zu lösen.

4.1.1.2.1 Massenmatrix $\mathbf{M}$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

4.1.1.2.2 Eigenkreisfrequenzen

Bei einem Mehrmassenschwinger gibt es entsprechend den Freiheitsgraden Eigenkreisfrequenzen ω_n. Diese lassen sich anhand Gleichung 4.1 bestimmen:

$$\det\left[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}\right] = 0 \tag{4.1}$$

$$\omega_1 = \frac{12.1}{\mathrm{s}}$$

$$\omega_2 = \frac{40.0}{\mathrm{s}}$$

4.1.1.2.3 Eigenvektoren

$$\phi_n = \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] \cdot \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \end{bmatrix} = 0$$

Dazu ist die entsprechende Normierung aus der Aufgabenstellung zu berücksichtigen.

$$\begin{bmatrix} -\frac{2EI\phi_{21}}{l^3} + \phi_{11} \cdot \left(\frac{4EI}{l^3} - m_1 \cdot \left(\frac{4EI}{5l^3 m_2} + \frac{2EI}{l^3 m_1} - \frac{2EI\sqrt{4m_1^2+5m_1m_2+25m_2^2}}{5l^3 m_1 m_2} \right) \right) \\ -\frac{2EI\phi_{11}}{l^3} + \phi_{21} \cdot \left(\frac{8EI}{5l^3} - m_2 \cdot \left(\frac{4EI}{5l^3 m_2} + \frac{2EI}{l^3 m_1} - \frac{2EI\sqrt{4m_1^2+5m_1m_2+25m_2^2}}{5l^3 m_1 m_2} \right) \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.77 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2EI\phi_{22}}{l^3} + \phi_{12} \cdot \left(\frac{4EI}{l^3} - m_1 \cdot \left(\frac{4EI}{5l^3 m_2} + \frac{2EI}{l^3 m_1} + \frac{2EI\sqrt{4m_1^2+5m_1m_2+25m_2^2}}{5l^3 m_1 m_2} \right) \right) \\ -\frac{2EI\phi_{12}}{l^3} + \phi_{22} \cdot \left(\frac{8EI}{5l^3} - m_2 \cdot \left(\frac{4EI}{5l^3 m_2} + \frac{2EI}{l^3 m_1} + \frac{2EI\sqrt{4m_1^2+5m_1m_2+25m_2^2}}{5l^3 m_1 m_2} \right) \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.566 \end{bmatrix}$$

4.1.1.2.4 Orthogonalitätsbedingung

Zur effektiven Entkoppelung der Gleichungen muss die Orthogonalitätsbedingung eingehalten sein. Durch die Orthogonalität der Vektoren ϕ_1 und ϕ_2 kann mittels einem Einmassenschwingers sämtliches Verhalten von ϕ_1 beschrieben werden und mittels einem zweiten Einmassenschwinger sämtliches Verhalten von ϕ_2. Ist die Orthogonalität nicht gegeben, so müsste der erste Einmassenschwinger Anteile aus ϕ_1 und ϕ_2 beschreiben.

Dies gilt es für die Massenmatrix zu kontrollieren:

$$\phi_1^T \mathbf{M} \phi_1 \neq 0$$

$$\phi_2^T \mathbf{M} \phi_2 \neq 0$$

$$\phi_2^T \mathbf{M} \phi_1 = 0$$

Sowohl auch für die Steifigkeitsmatrix:

$$\phi_1^T \mathbf{K} \phi_1 \neq 0$$

$$\phi_2^T \mathbf{K} \phi_2 \neq 0$$

$$\phi_2^T \mathbf{K} \phi_1 = 0$$

Angewendet auf die Aufgabe:

$$\phi_1^T M \phi_1 = \left[\frac{4.12 \cdot 10^3 \mathrm{Ns}^2}{\mathrm{m}}\right]$$

$$\phi_2^T M \phi_2 = \left[\frac{1.32 \cdot 10^3 \mathrm{Ns}^2}{\mathrm{m}}\right]$$

$$\phi_2^T M \phi_1 = \left[0\right]$$

$$\phi_1^T M \phi_2 = \left[0\right]$$

Für die Steifigkeitsmatrix:

$$\phi_1^T K \phi_1 = \left[\frac{6.02 \cdot 10^5 \mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$\phi_2^T K \phi_2 = \left[\frac{2.12 \cdot 10^6 \mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$\phi_2^T K \phi_1 = \left[0\right]$$

$$\phi_1^T K \phi_2 = \left[0\right]$$

4.1.1.3 Eigenformen

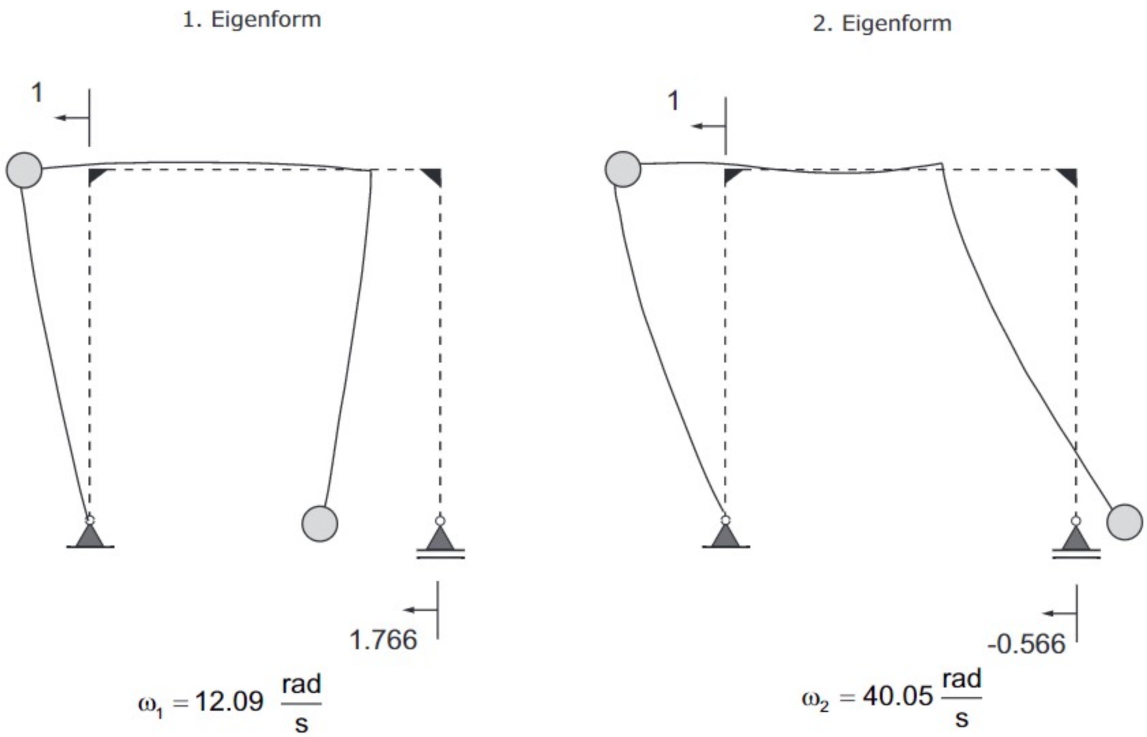

Abbildung 4.4: Die beiden Eigenformen skizziert

4.2 Beispiel: Eigenvektoren mit direkt bestimmter Steifigkeitsmatrix

Das System in Abbildung 4.5 zeigt ein Rahmentragwerk, welches als Zweimassenschwinger modelliert werden kann.

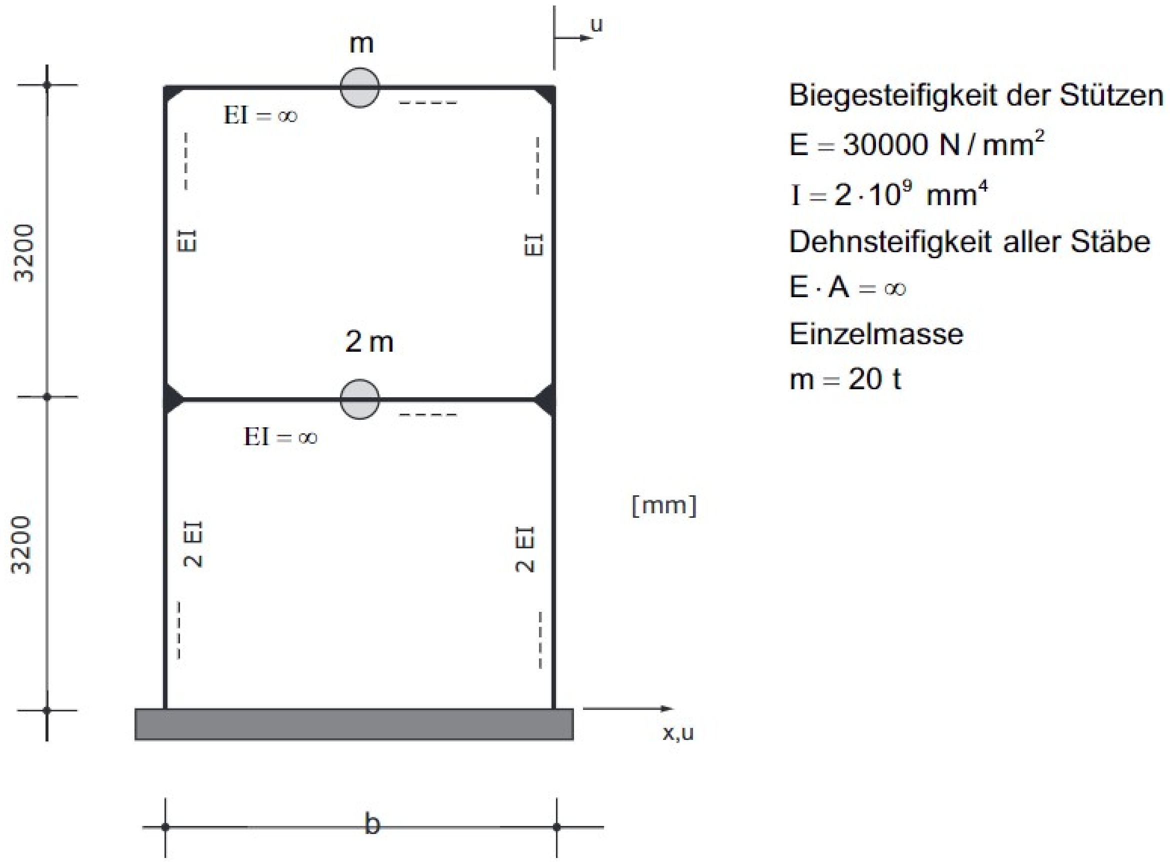

Abbildung 4.5: Statisches System des Rahmentragwerks

Gesucht:

- Eigenkreisfrequenz ω
- Eigenformen - Normierung auf

$$\phi_1^T = [\quad 1]$$
$$\phi_2^T = [\quad 1]$$

- Skizze der Eigenformen

Gegeben:

- Elastizitätsmodul der Stützen $E = 30000\text{N}/mm^2$
- Flächenträgheitsmoment der Stützen $I = 2 \cdot 10^9\text{mm}^4$
- Dehnsteifigkeit aller Stäbe $E \cdot A = \infty$
- Einzelmassen $m = 20000\text{kg}$

4.2.1 Musterlösung

Parameter	
$E = \frac{30000\text{N}}{\text{mm}^2}$	$H = 3.2\text{m}$
$I = 2000000000\text{mm}^4$	$l = 4\text{m}$
$m_1 = \frac{40000\text{Ns}^2}{\text{m}}$	$m_2 = \frac{20000\text{Ns}^2}{\text{m}}$

4.2.1.1 Eigenkreisfrequenzen

4.2.1.1.1 Steifigkeitsmatrix K

Zur Bestimmung der Steifigkeitsmatrix ist das System an jedem Freiheitsgrad auszulenken, wie in Abbildung 4.6 dargestellt ist.

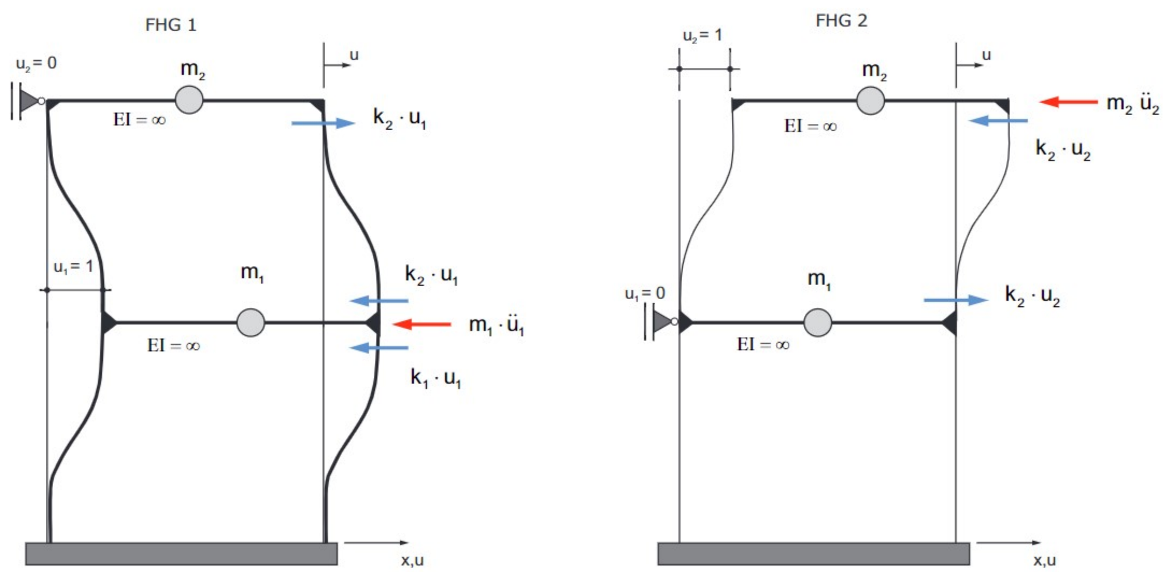

Abbildung 4.6: Auslenkung der Freiheitsgrade zur Bestimmung der Steifigkeit

Wichtig dabei sind die Richtungen der Kräfte. Als Denkstütze gilt folgendes:

- Der Auslenkung um u wirkt die Federkraft entgegen, welche ku entspricht.
- Zusätzlich wirkt die Trägheitskraft der Auslenkung entgegen, welche mu'' entspricht.
- Nach der Betrachtung des ausgelenkten Punkts, kann mittels *Actio-Reactio*-Prinzip das "*Stockwerk*" ins Gleichgewicht gebracht werden.
- Vorzeichen sind gegen der Bewegungsrichtig positiv.

4.2.1.1.2 Horizontale Steifigkeit

Für entsprechende Anwendungsfälle gibt es fertige Lösungen zur Bestimmung der Steifigkeit. Gemäss Abbildung 4.5 ist die Stütze am Fuss- und Kopfpunkt eingespannt. Somit resultiert die Steifigkeit zu:

$$k_{Stuetze} = \frac{12EI_{Stuetze}}{H^3}$$

Diese gilt für eine einzelne Stütze.

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1.31836 \cdot 10^8 \mathrm{N}}{\mathrm{m}} & -\frac{4.39453 \cdot 10^7 \mathrm{N}}{\mathrm{m}} \\ -\frac{4.39453 \cdot 10^7 \mathrm{N}}{\mathrm{m}} & \frac{4.39453 \cdot 10^7 \mathrm{N}}{\mathrm{m}} \end{bmatrix}$$

4.2.1.2 Eigenvektoren

4.2.1.2.1 Massenmatrix M

Die Massenmatrix folgt dem gleichen Aufbau wie die Steifigkeitsmatrix. Es gelten die gleichen Vorzeichenregelungen.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{40000 \mathrm{Ns}^2}{\mathrm{m}} & 0 \\ 0 & \frac{20000 \mathrm{Ns}^2}{\mathrm{m}} \end{bmatrix}$$

4.2.1.2.2 Eigenkreisfrequenzen

Bei einem Mehrmassenschwinger gibt es entsprechend den Freiheitsgraden Eigenkreisfrequenzen ω_n. Diese lassen sich anhand folgender Gleichung bestimmen:

$$\det\left[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}\right] = 0$$

$$\omega_1 = \frac{33.1}{\mathrm{s}}$$

$$\omega_2 = \frac{66.3}{\mathrm{s}}$$

4.2.1.2.3 Eigenvektoren ϕ

$$\begin{bmatrix} \frac{-k_2 m_2 \phi_{21} + \frac{\phi_{11}\left(-k_2 m_1 + m_2(k_1+k_2) + \sqrt{k_1^2 m_2^2 - 2k_1 k_2 m_1 m_2 + 2k_1 k_2 m_2^2 + k_2^2 m_1^2 + 2k_2^2 m_1 m_2 + k_2^2 m_2^2}\right)}{2}}{m_2} \\ \frac{-k_2 m_1 \phi_{11} + \frac{\phi_{21}\left(k_2 m_1 - m_2(k_1+k_2) + \sqrt{k_1^2 m_2^2 - 2k_1 k_2 m_1 m_2 + 2k_1 k_2 m_2^2 + k_2^2 m_1^2 + 2k_2^2 m_1 m_2 + k_2^2 m_2^2}\right)}{2}}{m_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-k_2 m_2 \phi_{22} + \frac{\phi_{12}\left(-k_2 m_1 + m_2(k_1+k_2) - \sqrt{k_1^2 m_2^2 - 2k_1 k_2 m_1 m_2 + 2k_1 k_2 m_2^2 + k_2^2 m_1^2 + 2k_2^2 m_1 m_2 + k_2^2 m_2^2}\right)}{2}}{m_2} \\ \frac{-k_2 m_1 \phi_{12} + \frac{\phi_{22}\left(k_2 m_1 - m_2(k_1+k_2) - \sqrt{k_1^2 m_2^2 - 2k_1 k_2 m_1 m_2 + 2k_1 k_2 m_2^2 + k_2^2 m_1^2 + 2k_2^2 m_1 m_2 + k_2^2 m_2^2}\right)}{2}}{m_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

4.2.1.2.4 Orthogonalitätsbedingung

Zur Entkoppelung der Gleichungen muss die Orthogonalitätsbedingung eingehalten sein.

Dies gilt es für die Massenmatrix zu kontrollieren:

$$\phi_1^T \mathbf{M} \phi_1 \neq 0$$

$$\phi_2^T \mathbf{M} \phi_2 \neq 0$$

$$\phi_2^T \mathbf{M} \phi_1 = 0$$

Sowohl auch für die Steifigkeitsmatrix:

$$\phi_1^T \mathbf{K} \phi_1 \neq 0$$

$$\phi_2^T \mathbf{K} \phi_2 \neq 0$$

$$\phi_2^T \mathbf{K} \phi_1 = 0$$

Angewendet auf die Aufgabe:

$$\phi_1^T M \phi_1 = \left[\frac{3.0 \cdot 10^4 \mathrm{Ns}^2}{\mathrm{m}} \right]$$

$$\phi_2^T M \phi_2 = \left[\frac{6.0 \cdot 10^4 \mathrm{Ns}^2}{\mathrm{m}} \right]$$

$$\phi_2^T M \phi_1 = \left[0 \right]$$

$$\phi_1^T M \phi_2 = \left[0 \right]$$

Für die Steifigkeitsmatrix:

$$\phi_1^T K \phi_1 = \left[\frac{3.3 \cdot 10^7 \mathrm{N}}{\mathrm{m}} \right]$$

$$\phi_2^T K \phi_2 = \left[\frac{2.64 \cdot 10^8 \mathrm{N}}{\mathrm{m}} \right]$$

$$\phi_2^T K \phi_1 = \left[0 \right]$$

$$\phi_1^T K \phi_2 = \left[0 \right]$$

4.2.1.3 Eigenformen

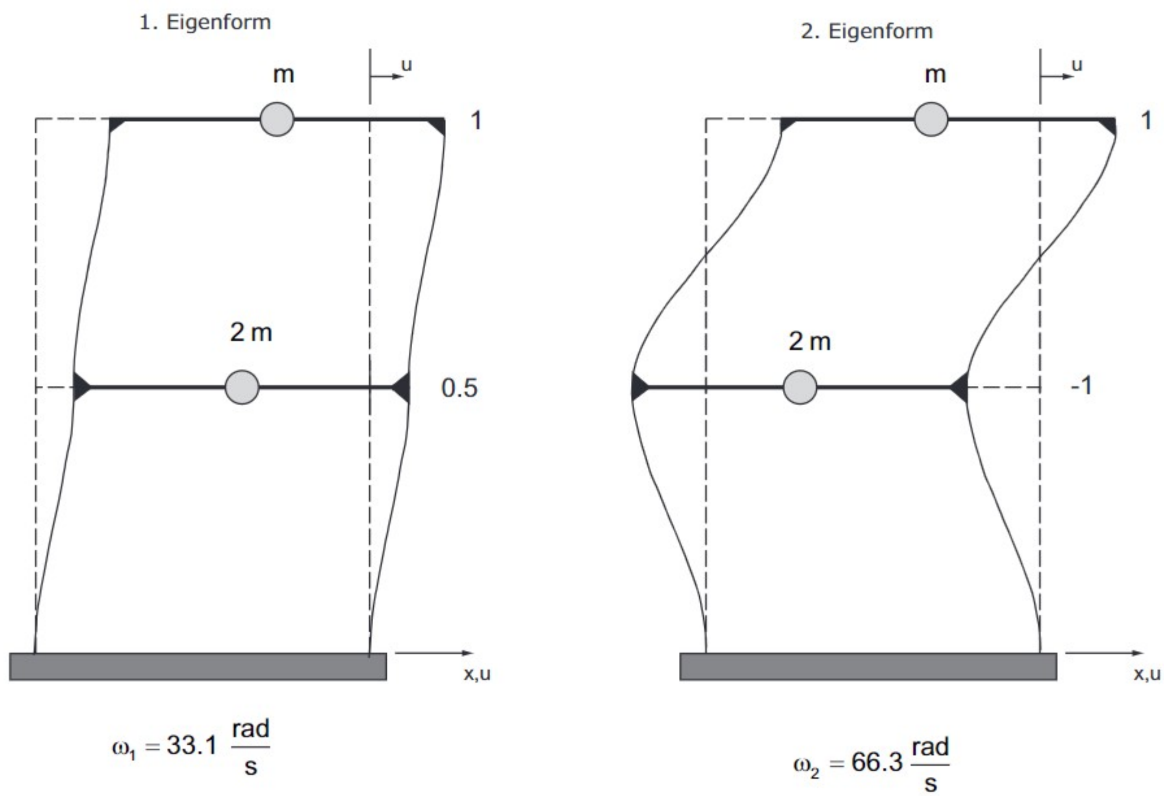

Abbildung 4.7: Die beiden Eigenformen skizziert

References