Dynamik & Stabilität

Dynamik

A1 Übung Rayleigh-Quotienten

Kragarm mit verteilter Masse und 2 Punktmassen

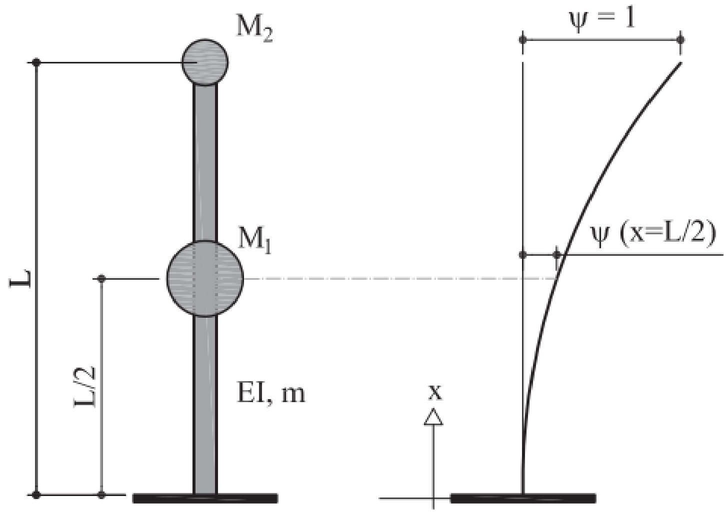

Bild 1 Kragarm mit verteilter Masse

Gesucht: Grundfrequenz (1. Eigenfrequenz ω_n) des Systems in Bild 1; berechnet mit den Rayleigh-Quotienten.

Auswerten für den Spezialfall:

$m=0;\ M_1=M_2=M$

Ansatz: $\psi(x) = 1 - \cos(\frac{\pi x}{2L})$

Verfasser Dr. Stephan Gollob

Stephan.gollob@hslu.ch

Version HS23.1 | 02.03.2023

1 Musterlösung

1.1 Grundfrequenz

Es wird von der in der Vorlesung hergeleiteten Bewegungsgleichung mit den Rayleigh-Quotienten ausgegangen:

$$\ddot{U}\int_0^L m\psi^2 \mathrm{d}x + U\int_0^L (EI(\psi'')^2)\mathrm{d}x = f(x,t)$$

$$m^*\ddot{U} + k^*U = f(x,t)$$

Der Bewegungsgleichung können die Rayleigh-Quotienten für die Masse m^* und die Steifigkeit k^* entnommen werden.

$$m^* = \int_0^L m\psi^2 \mathrm{d}x$$

$$k^* = \int_0^L (EI(\psi'')^2)\mathrm{d}x$$

Anschliessend können die Integrale für das gegebenen System berechnet werden.

$$m^* = \int_0^L m(1-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right))^2 \mathrm{d}x + \psi^2\left(x=\frac{L}{2}\right)\cdot M_1 + \psi^2(x=L)\cdot M_2$$

$$m^* = \frac{3\pi-8}{2\pi}mL + \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot M_1 + 1^2\cdot M_2$$

Für den Rayleigh-Quotienten für die die Steifigkeit k^* muss zuerst der Ansatz zweimal nach x abgeleitet werden.

$$\psi(x) = 1-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$$\psi'(x) = \frac{\pi}{2L}\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$$\psi''(x) = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

Nun kann der Rayleigh-Quotienten für die die Steifigkeit k^* ermittelt werden:

$$k^* = \int_0^L \left(EI\left(\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2\right)\mathrm{d}x$$

Der Anteil unabhängig von x, kann vor das Integral gebracht werden

$$k^* = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4\int_0^L \left(EI\left(\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2\right)\mathrm{d}x$$

und das Integral nach x ausgewertet werden

$$k^* = \frac{\pi^4}{32}\cdot\frac{EI}{L^3}$$

Damit ergibt sich die Grundfrequenz zufolge der Rayleigh-Quotienten zu:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{32}\cdot\frac{EI}{L^3}}{\frac{3\pi-8}{2\pi}mL + \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot M_1 + 1^2\cdot M_2}}$$

1.2 Auswertung Spezialfall

Durch das Einsetzen der Werte des Spezialfalls ($m=0;\ M_1=M_2=M$) ergibt sich:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{32} \cdot \frac{EI}{L^3}}{\frac{3\pi - 8}{2\pi} \cdot 0 \cdot L + \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot M + M}}$$

$$\omega_n \approx \sqrt{\frac{3.04\,\frac{EI}{L^3}}{1.086\ M}} = \sqrt{\frac{3.04\ EI}{1.086\ ML^3}} = 1.673\sqrt{\frac{EI}{ML^3}}$$

Die genaue erste Eigenfrequenz eines Zweimassenschwingers mit konstanter Steifigkeit und gleichen Massen ist:

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{3.007\,\frac{EI}{L^3}}{1.102\ M}} = 1.652\sqrt{\frac{EI}{ML^3}}$$

Die Berechnung mit Hilfe der Rayleigh-Quotienten stellt also eine (sehr) gute Abschätzung der ersten Eigenfrequenz dar.