

MASTER OF SCIENCE IN ENGINEERING
Vertiefungsmodul II

Tragverhalten von Stahlbetontragwerken

Ansätze zur Modellierung

Pascal Gitz

Horw, Freitag, 14. Juni 2024

Advisor: Prof. FH, Dr. Daniel Heinzmann
Experte: Dr. Thomas Jäger

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Sämtliche verwendeten Textausschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet.

Horw, 14. Juni 2024

Pascal Gitz

Version 1.0 - Prüfungsexemplar
Version 0.9 - Entwurf

14. Juni 2024	PG
07. Juni 2024	PG

Kurzfassung

-

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	8
2	Modellvorstellung	9
3	Einführungsbeispiel	10
3.1	Biegeverformung	11
3.2	Verformung der Drehfeder	13
3.3	Stabstatikmodell	15
3.4	Zusammenfassung	18
4	Modellverifizierung	19
4.1	Dreipunktbiegeversuch	19
4.2	Vierpunktbiegeversuch	26
5	Vorgespannter Träger	31
5.1	Versuchsbeschrieb	31
5.2	Modellierung	34
5.3	Parameter	34
5.4	Momenten-Krümmungs-Beziehung	37
5.5	Schiebungs-Beziehung	38
5.6	Versuchsergebnisse	38
6	IdeaStatica	40
	Literatur	41

Abbildungsverzeichnis

2.1	Modellierung als biegesteife Stäbe gekoppelt mit Drehfedern	9
2.2	Modellierung als biegesteife Stäbe gekoppelt mit einem Wegfederpaar . . .	9
3.1	Statisches System des Kragarms	10
3.2	Fiktiver Querschnitt des Kragarms mit durchwegs linear-elastischem Materialverhalten	11
3.3	Charakteristik der Drehfeder	11
3.4	Statisches System des Kragarms	11
3.5	Schnittkräfte des Systems aus Abbildung 3.4 für die Last F_1	12
3.6	Schnittkräfte des Systems aus Abbildung 3.4 für die Last F_2	13
3.7	Statisches System des Kragarms im virtuellen Kräftezustand	14
3.8	Schnittkräfte des virtuellen Systems aus Abbildung 3.7	14
3.9	Charakteristik der Drehfeder mit Bestimmung der Verdrehung anhand der Laststufen	15
3.10	Verformungen in z für F_1 aus AxisVM mit Drehfedermodell	15
3.11	Verformungen in z für F_2 aus AxisVM mit Drehfedermodell	16
3.12	Kinematische Relation eines reinen Biegeelements	16
3.13	Charakteristik der Wegfeder	17
3.14	Verformungen in z für F_1 aus AxisVM mit Wegfedermodell	17
3.15	Verformungen in z für F_2 aus AxisVM mit Wegfedermodell	18
4.1	Bewehrungslayout des Versuchs A3V2, Zeichnung entnommen aus [2] . . .	19
4.2	Statisches System des Versuchs A3V2	20
4.3	Querschnitt des Versuchs A3V2, Zeichnung entnommen aus [1]	20
4.4	Momenten-Krümmungs-Beziehung des Dreipunktbiegeversuchs, übernommen aus [1]	21
4.5	Momenten-Krümmungs-Beziehung des Dreipunktbiegeversuchs mit Versatzmass	21
4.6	Einteilung in Spannungsfelder des Versuchs A3V2, Zeichnung entnommen aus [1]	22
4.7	Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Schubbewehrung, übernommen aus [1]	23
4.8	Berechnete Wegfedercharakteristik des Schubgelenks vom Versuch A3V2 .	24
4.9	Last-Verformungs-Verlauf am Punkt w_1 mit dem Federmodell und den Versuchsmessungen	24
4.10	Verdrehungsverlauf aus dem Federmodell für die Höchstlast	25
4.11	Berechneter Krümmungsverlauf aus dem Verdrehungsverlauf	25
4.12	Bewehrungslayout des Versuchs SV14, Zeichnung entnommen aus [1] . . .	26
4.13	Querschnitt des Versuchs SV14, Zeichnung entnommen aus [1]	26
4.14	Statisches System des Versuchs SV14, Zeichnung entnommen aus [1] . . .	27
4.15	Momenten-Krümmungs-Beziehung des Vierpunktbiegeversuchs, übernommen aus [1]	27

4.16	Momenten-Krümmungs-Beziehung des Vierpunktbiegeversuchs mit Versatzmass	28
4.17	Einteilung in Spannungsfelder des Versuchs SV14, Zeichnung entnommen aus [1]	29
4.18	Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Schubbewehrung, übernommen aus [1]	29
4.19	Berechnete Wegfedercharakteristik des Schubgelenks vom Versuch SV14 .	30
4.20	Last-Verformungs-Verlauf am Punkt w_1 , für das Federmodell und den Versuch	30
5.1	Geometrie des Versuchsträgers T6, entnommen aus [4]	31
5.2	Geometrie des Querschnitts des Versuchsträgers T6, entnommen aus [4] . .	32
5.3	Lagerung und Laststellung des Versuchsträgers T6, entnommen aus [4] . .	32
5.4	Bewehrungslayout in Längsrichtung des Versuchsträgers T6, entnommen aus [4]	33
5.5	Bewehrungslayout im Querschnitt des Versuchsträgers T6, entnommen aus [4]	34
5.6	Vorspannungslayout des Versuchsträgers T6. Horizontaler Abstand [m] und vertikale Position [mm], gemessen von der Unterkante des Trägers, entnommen aus [4]	34
5.7	Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betons	35
5.8	Spannungs-Dehnungs-Verhalten der Längsbewehrung	36
5.9	Querschnittsanalyse mit Fliessen der Zugbewehrung und elastischer Betondruckzone, qualitativer Verlauf	37
5.10	Querschnittsanalyse mit erreichter Zugfestigkeit in der Bewehrung und vollständig plastifizierter Betondruckzone, qualitativer Verlauf	37
5.11	Verformungsverlauf des Versuchsträgers T6, entnommen aus [4]	38
5.12	Last-Verformungs-Verhalten des Versuchsträgers T6, entnommen aus [4] .	39

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

-

2 Modellvorstellung

In der Vorarbeit [1] zu dieser Arbeit wurde mittels der numerischen Integration der Krümmung das nicht-lineare Verformungsverhalten von unterschiedlichen Versuchen zufriedenstellend abgebildet. Um das Vorgehen auf statisch unbestimmte Systeme zu erweitern, sowie in der Geometrie der Systeme die nötige Flexibilität zu erhalten, wird versucht, basierend auf dem angewendeten Berechnungsansatz, ein Stabstatikmodell zu erstellen. Die Abbildung 2.1 zeigt eine Modellierung eines einfachen Balkens. Dabei sind biege- und schubsteife Stäbe mit Drehfedern gekoppelt. Dies führt dazu, dass sämtliche Deformationen des Systems aus den Federverbindungen erfolgen.

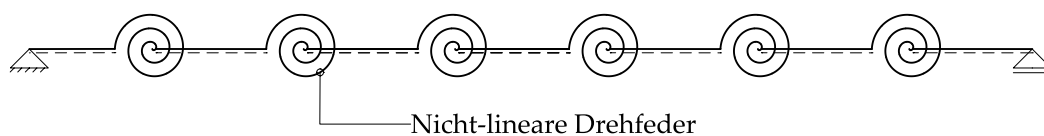


Abbildung 2.1: Modellierung als biegesteife Stäbe gekoppelt mit Drehfedern

Mit der Wahl der entsprechenden Federcharakteristiken stellen sich so die passenden Resultate ein. Die Anwendung des Modells an experimentellen Versuchen wird in den folgenden Kapiteln aufgegriffen. Es lässt sich vorweggreifen, dass die Wahl der Federcharakteristik die Krux des Systems darstellt.

Alternativ zur Modellierung mittels Drehfedern lässt sich das Verhalten der Drehfeder mit einem Wegfederpaar abbilden. Dies erlaubt eine Modellierung mittels den nicht-linearen Fachwerksstäben der Software Statik-9 der Cubus AG. Dieser Ansatz wird lediglich im Einführungsbeispiel berücksichtigt.

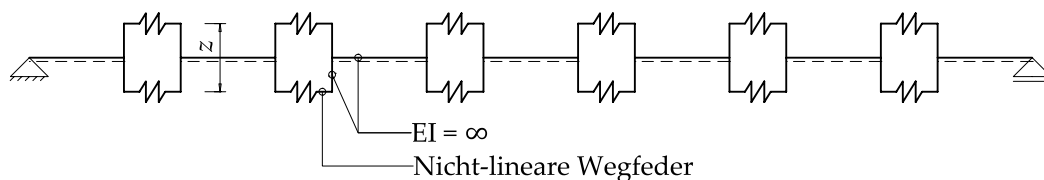


Abbildung 2.2: Modellierung als biegesteife Stäbe gekoppelt mit einem Wegfederpaar

3 Einführungsbeispiel

Das Einführungsbeispiel verfolgt das Ziel das Modellverhalten zu plausibilisieren. Die Eingabe der nicht-linearen Parameter in der Statiksoftware liegt im Vordergrund.

Es werden die Verformungen des fiktiven Beispiels von Hand mittels der Arbeitsgleichung, sowie numerisch mit der Stabstatik-Software ermittelt. Das statische System ist in Abbildung 3.1 aufgezeigt. Das Beispiel ist mit einer Drehfeder versehen, welche eine nicht-lineare Federcharakteristik aufweist. Es werden zwei Laststufen betrachtet. Diese sind entsprechend gewählt, dass das nicht-lineare Verhalten der Drehfeder zu tragen kommt.

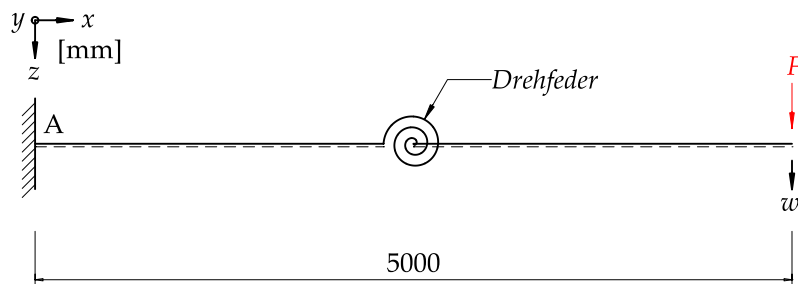


Abbildung 3.1: Statisches System des Kragarms

Die folgenden Parameter fließen in die Berechnungen ein. Beschrieben sind die Abmessungen und Materialeigenschaften, sowie die beiden Laststufen F_1 und F_2 , wie auch die Federsteifigkeiten k_{ϕ_1} und k_{ϕ_2} .

$$\begin{aligned}
 E &= 10000.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} & F_1 &= -10000.0 \text{ N} & F_2 &= -21500.0 \text{ N} \\
 h &= 400.0 \text{ mm} & k_{\phi_1} &= 100000.0 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}} & k_{\phi_2} &= 10000.0 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}} \\
 l_{\text{Kragarm}} &= 5.0 \text{ m} & z &= 400.0 \text{ mm} & b &= 200.0 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Der Rechteckquerschnitt ist in Abbildung 3.2 aufgezeigt, dieser gilt für den gesamten Kragarm.

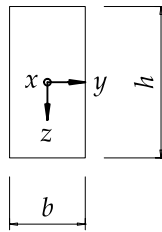


Abbildung 3.2: Fiktiver Querschnitt des Kragarms mit durchwegs linear-elastischem Materialverhalten

Die Entsprechende Federcharakteristik ist in Abbildung 3.3 zu sehen. Das Bilineare Verhalten gilt für positive und negative Biegemomente um die Y -Achse.

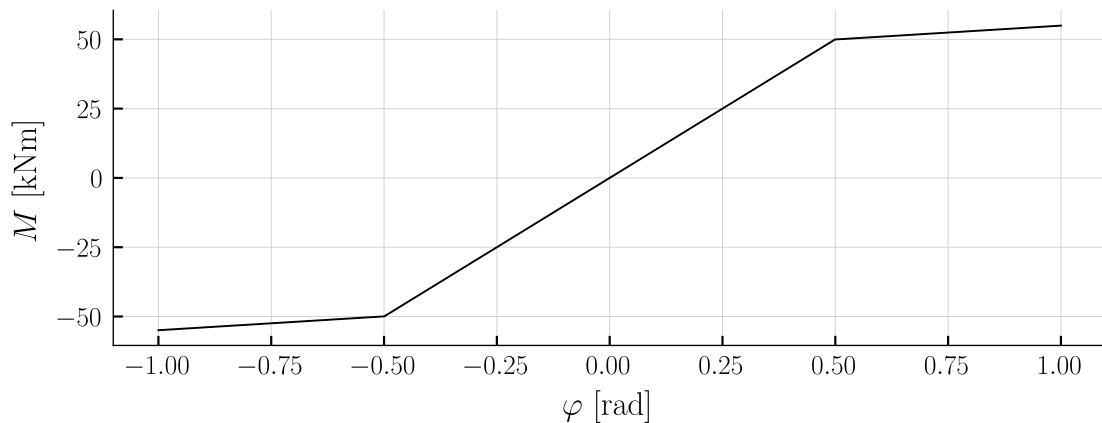


Abbildung 3.3: Charakteristik der Drehfeder

3.1 Biegeverformung

Zunächst werden die Biegeverformungen mittels der Differentialgleichung für reine Biegeträger ermittelt. Dabei wird die Drehfeder vernachlässigt. Das statische System, gezeigt in Abbildung 3.4 führt zu den Zustandslinien der Schnittgrößen in der Abbildung 3.5.

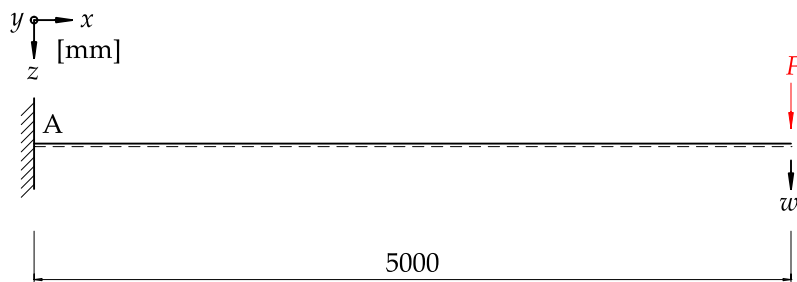


Abbildung 3.4: Statisches System des Kragarms

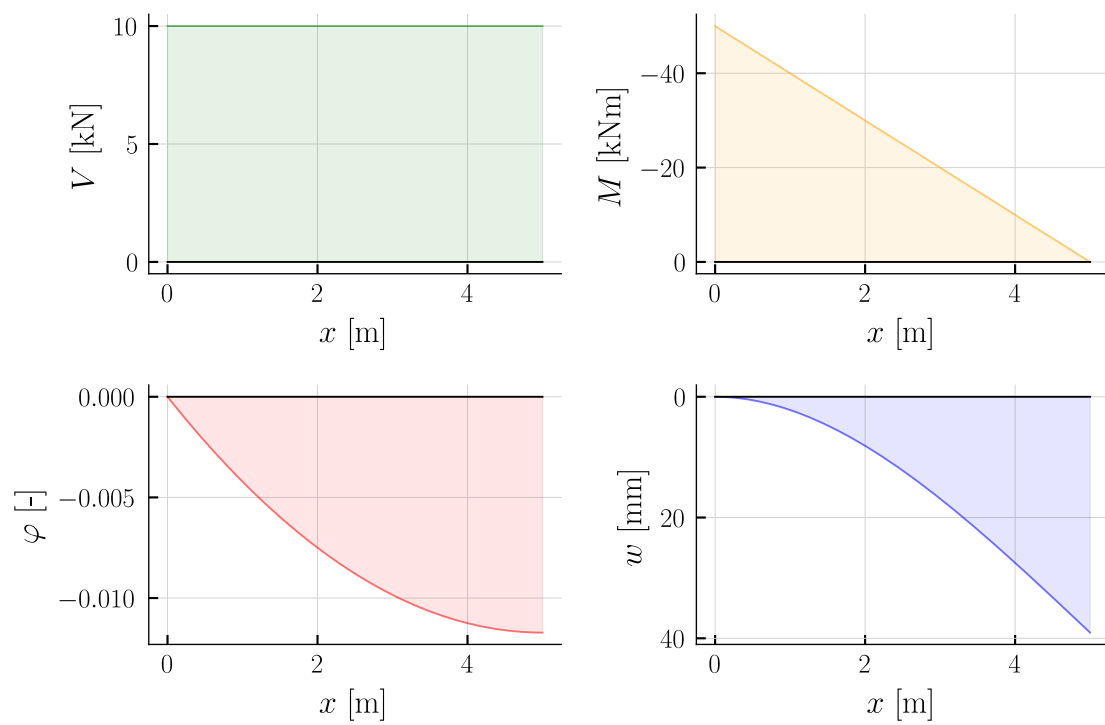


Abbildung 3.5: Schnittkräfte des Systems aus Abbildung 3.4 für die Last F_1

Die maximale Verformung am Endpunkt des Kragarms beträgt:

$$w_{bendingF1} = 39.1 \text{ mm}$$

Das analoge Vorgehen führt für die Laststufe F_2 zu den Zustandslinien der Schnittgrößen gemäss der Abbildung 3.6.

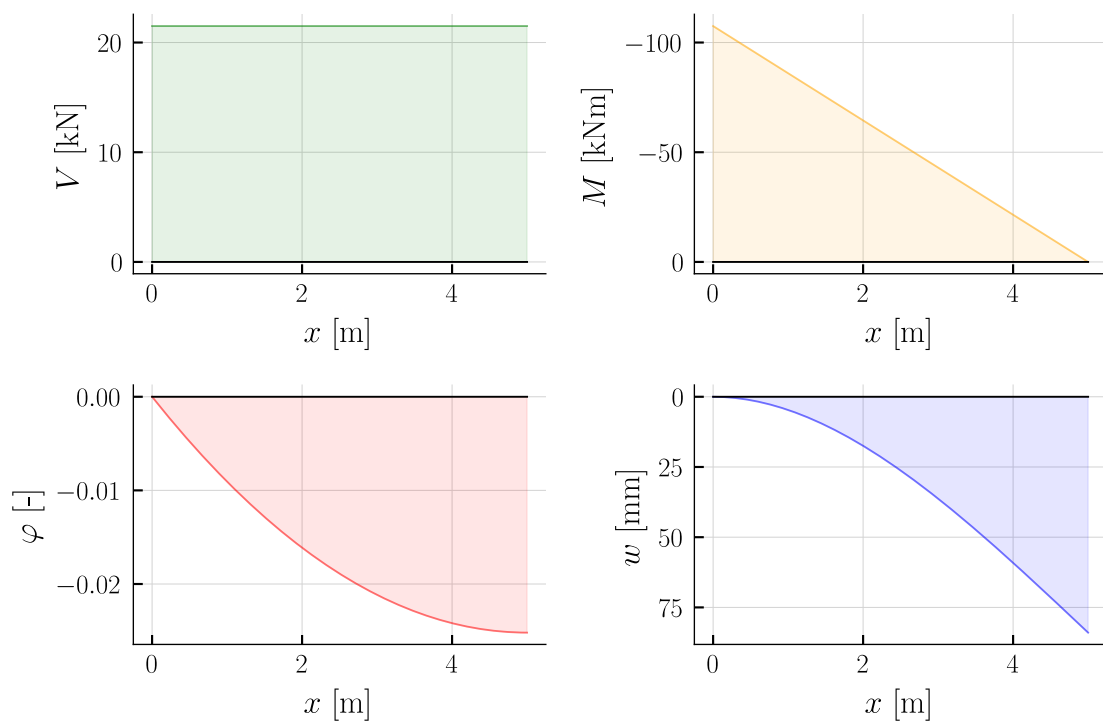


Abbildung 3.6: Schnittkräfte des Systems aus Abbildung 3.4 für die Last F_2

Da ein durchwegs linear-elastisches Biegeverhalten vorausgesetzt wird, entspricht der Faktor der Erhöhung des Verformung dem Quotient der beiden Laststufen.

$$\frac{w_{1,Bending,F2}}{w_{1,Bending,F1}} = \frac{F_2}{F_1}$$

Dabei entspricht die maximale Biegeverformung am Ende des Kragarms:

$$w_{bendingF2} = 84.0 \text{ mm}$$

3.2 Verformung der Drehfeder

Zur Bestimmung der Verformung am Ende des Kragarms des Systems mit der Drehfeder wird die Arbeitsgleichung angewendet. Dazu wird an einem virtuellen System eine Einzellast eingeführt, an der Stelle an dem die Verformung bestimmt werden soll. Dargestellt ist dies in Abbildung 3.7.

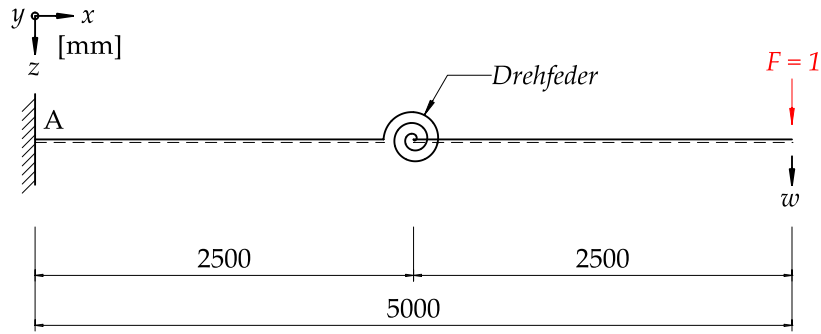


Abbildung 3.7: Statisches System des Kragarms im virtuellen Kräftezustand

Die entsprechenden Verläufe der Querkraft und des Biegemoments zeigt die Abbildung 3.8 für das virtuelle System.

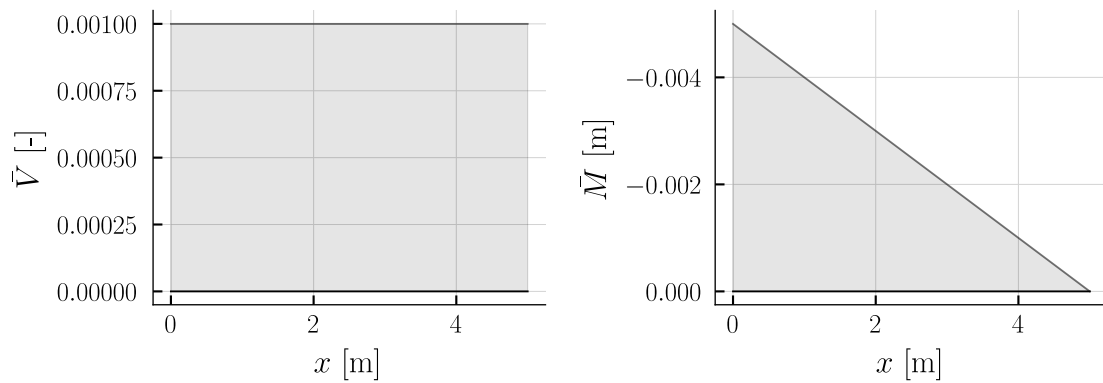


Abbildung 3.8: Schnittkräfte des virtuellen Systems aus Abbildung 3.7

Die Verformung der Drehfeder kann abschliessend mit der folgenden Gleichung bestimmt werden.

$$w_{Spring} = \bar{M} \frac{M}{k_{\varphi}} = \bar{M} \varphi$$

Die Verdrehung lässt sich aus der Federcharakteristik mit dem Biegemoment an der Stelle der Drehfeder bestimmen. Die Abbildung 3.9 zeigt die Position der Laststufen im Diagramm.

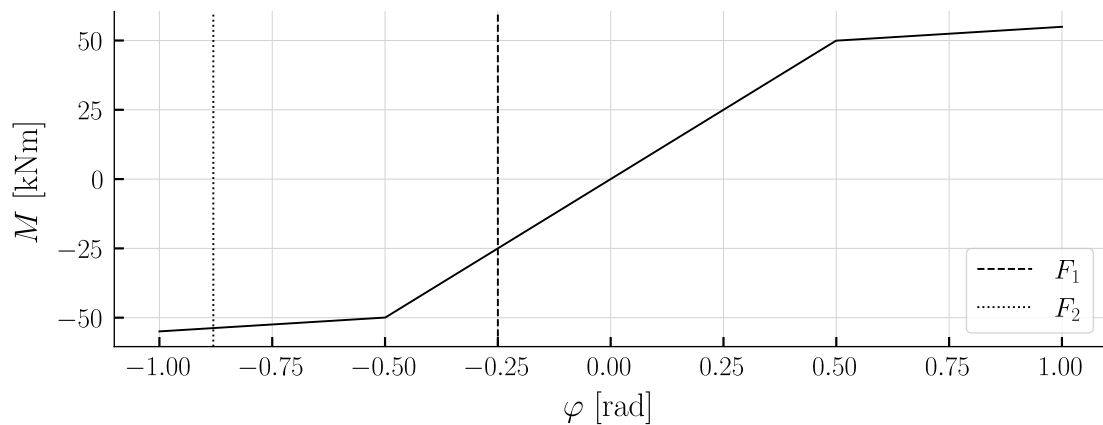


Abbildung 3.9: Charakteristik der Drehfeder mit Bestimmung der Verdrehung anhand der Laststufen

Angewendet auf das System der Abbildung 3.1 folgen für die beiden Laststufen die Deformationen der Drehfeder zu:

$$w_{spring_{F_1}} = 625.0 \text{ mm} \quad w_{spring_{F_2}} = 2201.3 \text{ mm}$$

Dazu gilt es den Anteil aus der Biegeverformung zu addieren. Die totale Verformung folgt zu:

$$w_{tot_{F_1}} = w_{spring_{F_1}} + w_{bending_{F_1}} = 625.0 \text{ mm} + 39.1 \text{ mm} = 664.1 \text{ mm}$$

$$w_{tot_{F_2}} = w_{spring_{F_2}} + w_{bending_{F_2}} = 2201.3 \text{ mm} + 84.0 \text{ mm} = 2285.2 \text{ mm}$$

3.3 Stabstatikmodell

Das statische System, gemäss Abbildung 3.1, wird mittels der Statiksoftware AxisVM X7 modelliert. Dazu wird die Drehfeder als Federelement modelliert und in der YY-Dimension mit der Federcharakteristik ergänzt. Die angeschlossenen Stäbe sind mit entsprechendem Querschnitt und der entsprechenden Biegesteifigkeit modelliert.

Die Deformationen in Z-Richtung sind in Abbildung 3.10 und Abbildung 3.11

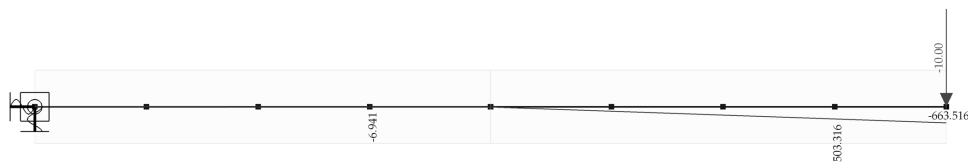


Abbildung 3.10: Verformungen in z für F_1 aus AxisVM mit Drehfedermodell

Das Modell liefert für die erste Laststufe die Gesamtverformung von:

$$w_{1,tot,F1} = 663.5\text{mm}$$

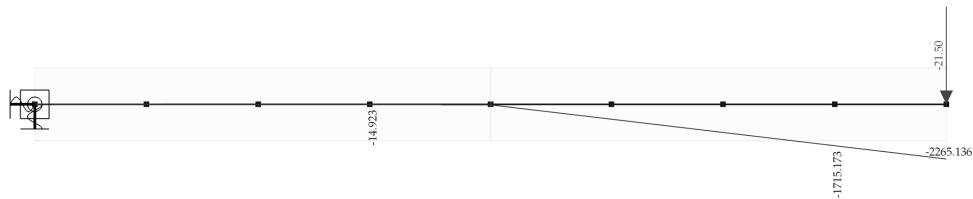


Abbildung 3.11: Verformungen in z für F_2 aus AxisVM mit Drehfedermodell

So wie für die zweite Laststufe folgt die Gesamtverformung zu:

$$w_{1,tot,F2} = 2265.1\text{mm}$$

Das Modell liefert die annähernd gleichen Resultate wie die Handrechnung. Die Genauigkeit ist zufriedenstellend.

3.3.1 Modellierungsalternative Wegfeder

Wie bereits in Kapitel 2 aufgezeigt, lässt sich das Verhalten der Drehfeder mit einem Wegfederpaar abbilden. Dazu wird in einem ersten Schritt die Drehfedercharakteristik in eine Wegfedercharakteristik umgerechnet. Als Grundlage dient die Modellierung gemäss Abbildung 3.12. Die Abbildung zeigt die kinematische Relation eines reinen Biegeelements.

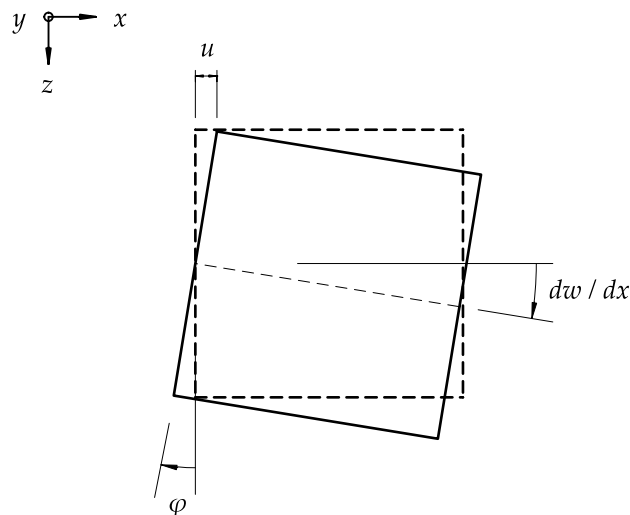


Abbildung 3.12: Kinematische Relation eines reinen Biegeelements

Mittels den folgenden Gleichungen lässt sich so die Wegfedercharakteristik bestimmen. Der Abstand zwischen dem Wegfederpaar wird mit z beschrieben.

$$F = \frac{M}{z}$$

$$u = \frac{\tan(\varphi) \cdot z}{2} \simeq \frac{\varphi \cdot z}{2}$$

Durch die Berücksichtigung der trigonometrischen Funktion ist der Verlauf nicht exakt bilinear. Eine Approximation mit einem bilinearen Verlauf führt zu beträchtlichen Abweichungen im Bereich der zweiten Laststufe F_2 . Dies ist auf die geringe Neigung, bzw. k_{φ_2} der Drehfedercharakteristik im oberen Lastniveau zurückzuführen.

Die umgerechnete Wegfedercharakteristik ist in Abbildung 3.13 aufgezeigt.

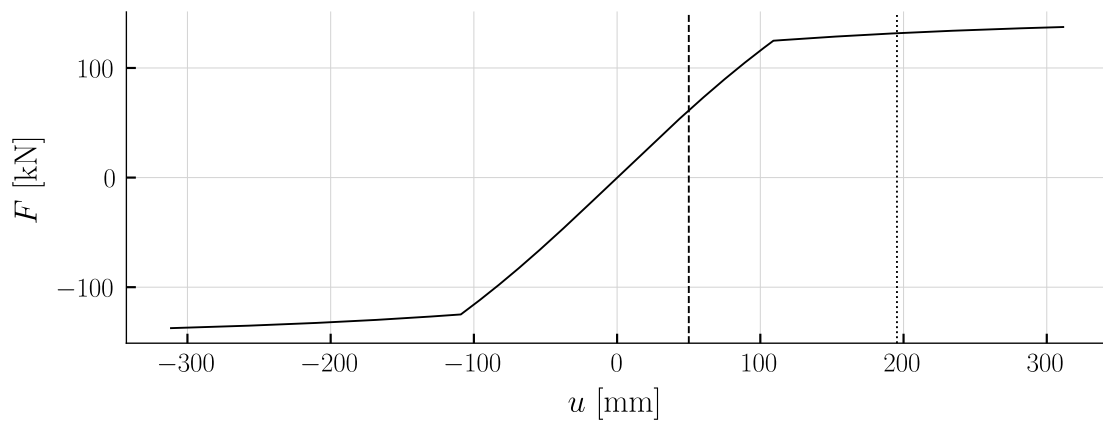


Abbildung 3.13: Charakteristik der Wegfeder

Die Resultate mit dem Modell sind in der Abbildung 3.14 und Abbildung 3.15 gezeigt.

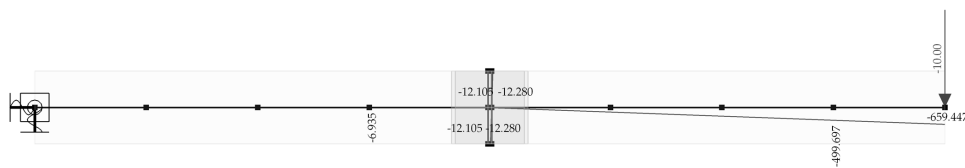


Abbildung 3.14: Verformungen in z für F_1 aus AxisVM mit Wegfedermodell

Die maximale Verformung in Z -Richtung ist für die Laststufe 1:

$$w_{1,tot,F1} = 655\text{mm}$$

Und für die Laststufe 2:

$$w_{1,tot,F2} = 2137.8\text{mm}$$

Hier zeigt sich eine Abweichung. Diese lässt sich auf die numerisch approximierte Modellierung der Wegfederbeziehung zurückführen.

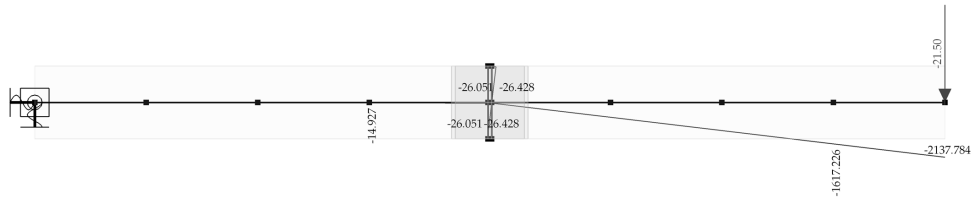


Abbildung 3.15: Verformungen in z für F_2 aus AxisVM mit Wegfedermodell

3.4 Zusammenfassung

Das Einführungsbeispiel zeigt die Präzision der Modellierung mittels dem Drehfedermodell. Sowie ermöglicht die simple Aufgabenstellung das Nachvollziehen der Resultate.

4 Modellverifizierung

In diesem Kapitel werden die beiden Versuche aus der Vorarbeit [1] mit einem Drehfedermodell, gemäss dem Beschrieb in Kapitel 2, nachgerechnet. Dazu wird eine feine Stabunterteilung gewählt, um das Verformungsverhalten präzise abzubilden. Detaillierte Berechnungen und Versuchsbeschriebe, welche als Grundlagen für die Modellierung dienen, sind in [1] zu finden. Grundsätzlich gilt, dass für den Betonstahl bilineare Spannungs-Dehnungs-Beziehungen hinterlegt sind und für den Beton ein elastisch-ideal-plastisches Gesetz mit Berücksichtigung der Zugfestigkeit.

4.1 Dreipunktbiegeversuch

Der Dreipunktbiegeversuch ist der dritte Versuch der Serie A in der zweiten Versuchsanordnung aus [2], kurz betitelt mit A3V2. Dieser ist mit einer durchgehenden Längsbewehrung im Zugbereich bewehrt. Die Schubdübel sind nicht durchgängig verlegt. Dargestellt ist das Bewehrungslayout in der Abbildung 4.1.

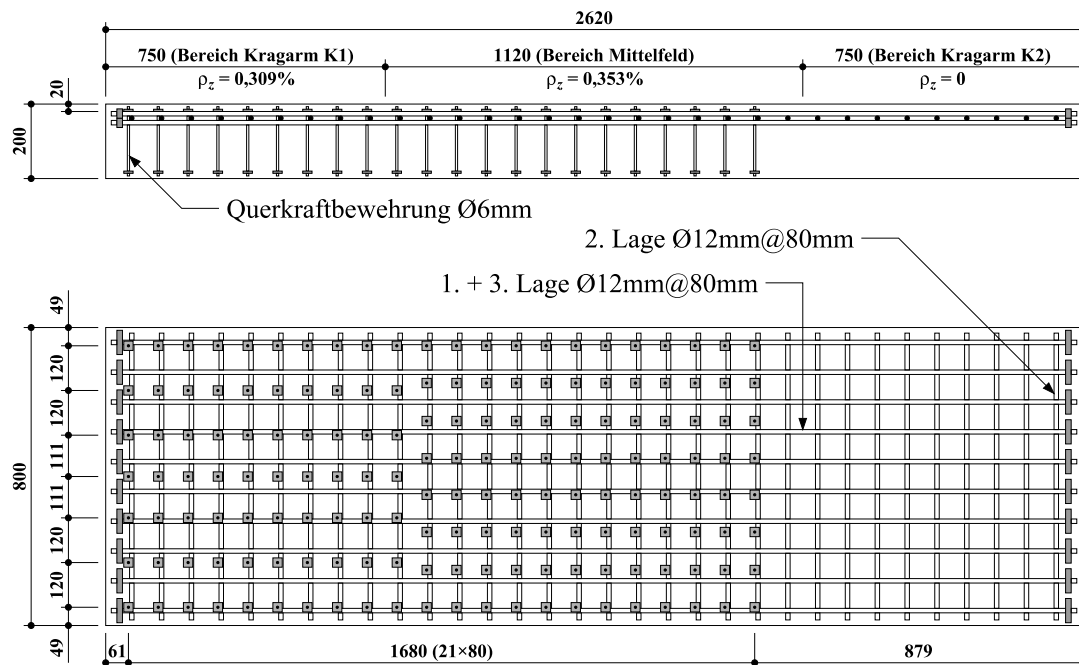


Abbildung 4.1: Bewehrungslayout des Versuchs A3V2, Zeichnung entnommen aus [2]

Das statische System des Versuchs ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Das Eigengewicht wird vernachlässigt, da die Verformungsmessungen nach dem Einbau des Versuchs beginnen, bzw. erst bei Belastungsbeginn mit der Einzellast.

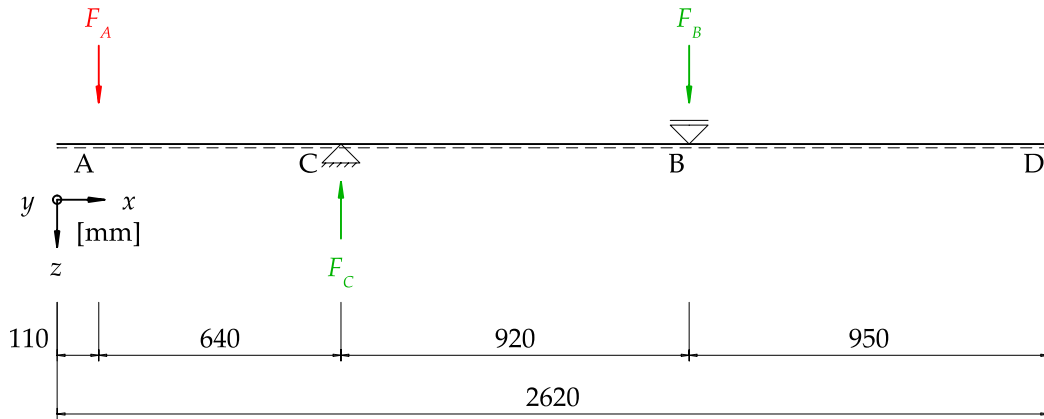


Abbildung 4.2: Statisches System des Versuchs A3V2

Die Abbildung 4.3 zeigt den Querschnitt des Versuchs mit der entsprechenden Bewehrungsführung.

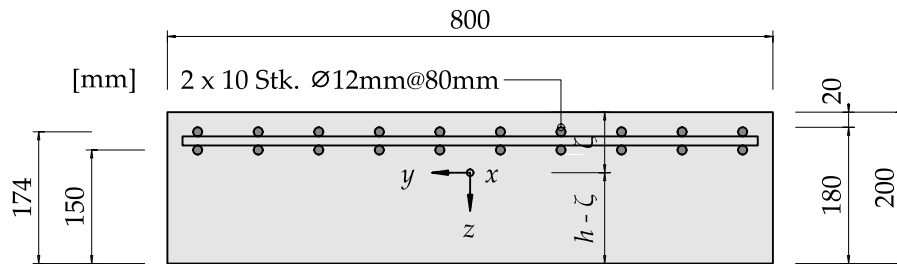


Abbildung 4.3: Querschnitt des Versuchs A3V2, Zeichnung entnommen aus [1]

4.1.1 Drehfedercharakteristik

Als erster Eingabeparamter in das Drehfedermodell dient die Momenten-Krümmungs-Beziehung. Für den Querschnitt ist die nicht-lineare Beziehung in der Abbildung 4.4 gezeigt. Detaillierte Berechnungen sind in der Vorarbeit [1] zu finden.

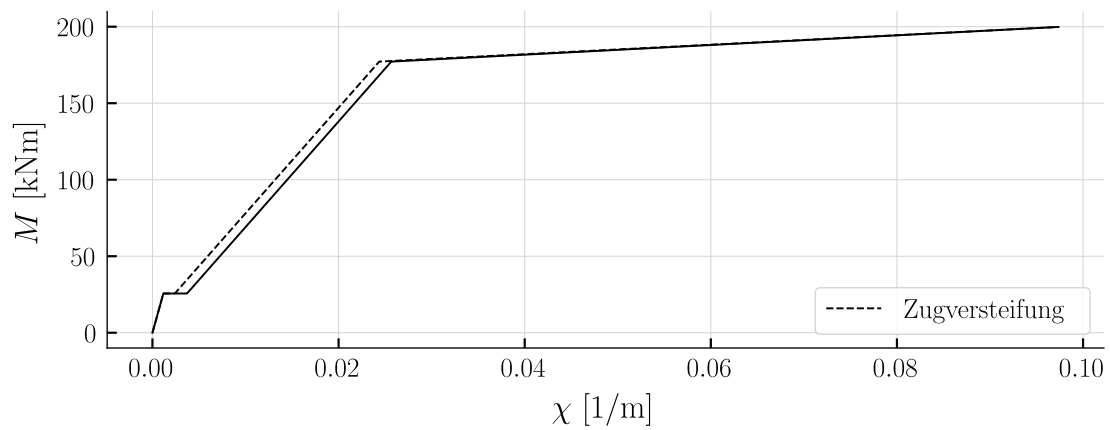


Abbildung 4.4: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Dreipunktbiegeversuchs, übernommen aus [1]

4.1.1.1 Versatzmass

Ein Ansatz zur Berücksichtigung des Versatzmass ist es ein Versatzmoment mit dem maximalen Querkraftwiderstand zu bestimmen. Die Momenten-Krümmungs-Beziehung kann durch diesen Wert vermindert werden und folglich weicher gestaltet werden.

$$\theta_{c_{A3V2}} = 34.3^\circ$$

$$V_{Rd_{A3V2}} = 320.0 \text{ kN}$$

$$z_{A3V2} = 140.0 \text{ mm}$$

$$\Delta_{M_{A3V2}} = \frac{V_{Rd_{A3V2}}}{\tan(\theta_{c_{A3V2}})} \cdot \frac{1}{2} \cdot z_{A3V2} = \frac{320.0 \text{ kN}}{\tan(34.3^\circ)} \cdot \frac{1}{2} \cdot 140.0 \text{ mm} = 32.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

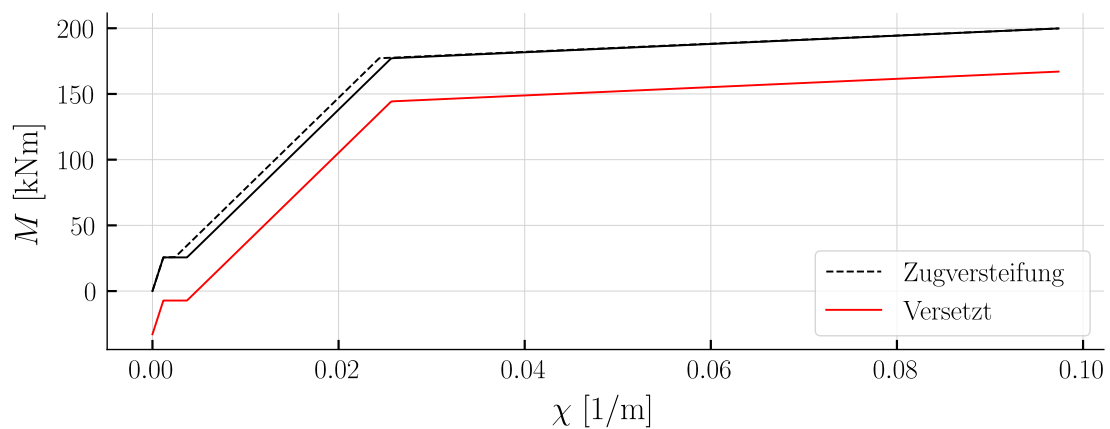


Abbildung 4.5: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Dreipunktbiegeversuchs mit Versatzmass

4.1.2 Wegfedercharakteristik

4.1.2.1 Schiebung

Als Grundlage zur Modellierung der Schubverformungen dient das Spannungsfeld-Modell in Abbildung 4.6. Dabei wird vorausgesetzt, dass sämtliche Dehnung des Systems in vertikaler Richtung lediglich aus der Stabdehnung der Schubbewehrung erfolgt. Das Ziel ist es ein Kraft-Verformungs-Diagramm, bzw. eine Wegfedercharakteristik zu ermitteln.

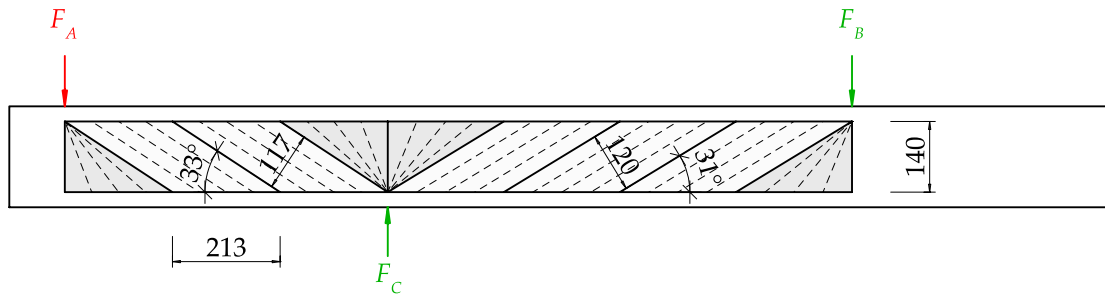


Abbildung 4.6: Einteilung in Spannungsfelder des Versuchs A3V2, Zeichnung entnommen aus [1]

Durch die Einteilung in Spannungsfelder kann die Anzahl an mitwirkenden Schubdübeln bestimmt werden. Mit der Querschnittsfläche der mitwirkenden Dübel kann das nicht-lineare Spannungs-Dehnungs-Verhalten in ein Kraft-Verformungs-Diagramm bzw. in eine Wegfedercharakteristik umgewandelt werden. Die bekannte Dehnung aus der Stahlkennlinie wird über den Hebelarm der inneren Kräfte zu einer Verformung umgewandelt. Wichtig dabei ist die Elementlänge der biegesteifen Stäbe im FEM-Modell. Dazu wird die Verformung um den Faktor gemäss der folgenden Gleichung reduziert, bzw. die Steifigkeit der Feder um diesen Faktor erhöht.

$$\gamma_E = \frac{z \cdot \cot(\theta)}{n_E}$$

n_E steht für die Anzahl steifer Stabelemente

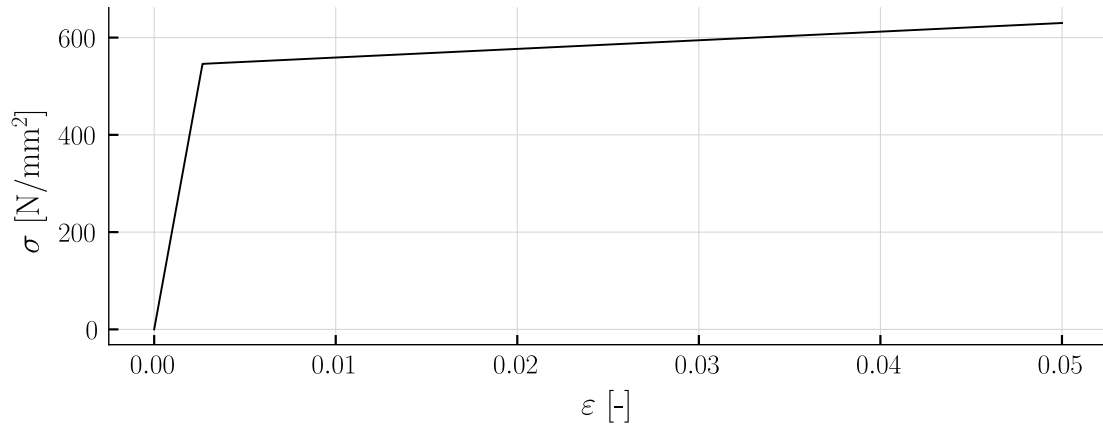


Abbildung 4.7: Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Schubbewehrung, übernommen aus [1]

Folgend sind die Parameter zur Bestimmung der Wegfedercharakteristik in vertikaler Richtung gezeigt. Der gewählte Neigungswinkel der Spannungsfelder θ_{c3} gilt grundsätzlich nur im Bruchzustand. Als Approximation wird die daraus bestimmte Wegfedercharakteristik für sämtliche Laststufen angesetzt. Dies führt zu Abweichungen im Lastniveau unterhalb der Traglast, sofern die Schubverformung einen signifikanten Einfluss an der der Gesamtverformung liefern.

$$\varnothing_{sw_{A3V2}} = 6.0 \text{ mm} \quad S_{sw_{A3V2}} = 80.0 \text{ mm} \quad b_{w_{A3V2}} = 800.0 \text{ mm}$$

$$E_{sw_{A3V2}} = 205000.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad E_{sh_{A3V2}} = 1774.5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die Querschnittsfläche der Schubbewehrung und der Bewehrungsgehalt bestimmt sich zu:

$$A_{sw_{A3V2}} = 7 \cdot \left(\frac{\varnothing_{sw_{A3V2}}}{2} \right)^2 \cdot \pi = 7 \cdot \left(\frac{6.00 \text{ mm}}{2} \right)^2 \cdot 3.14 = 197.92 \text{ mm}^2$$

$$a_{sw_{A3V2}} = A_{sw_{A3V2}} \cdot \frac{1000 \cdot \text{mm}}{S_{sw_{A3V2}}} \cdot \frac{1}{m} = 197.92 \text{ mm}^2 \cdot \frac{1000 \cdot \text{mm}}{80.00 \text{ mm}} \cdot \frac{1}{m} = 2474.00 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$\rho_{sw_{A3V2}} = \left(\frac{a_{sw_{A3V2}}}{b_{w_{A3V2}}} \right) = \left(\frac{2474.00 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}}{800.00 \text{ mm}} \right) = 0.31 \%$$

Der Reduktionsfaktor bestimmt sich zu:

$$\gamma_{E_{A3V2}} = z_{A3V2} \cdot \frac{1}{\tan(\theta_{c3_{A3V2}})} \cdot \frac{1}{l_{element}}$$

$$\gamma_{E_{A3V2}} = 21$$

Die Abbildung 4.8 zeigt das Kraft-Verformungs-Verhalten für die Gelenke des Stabmodells in vertikaler Richtung.

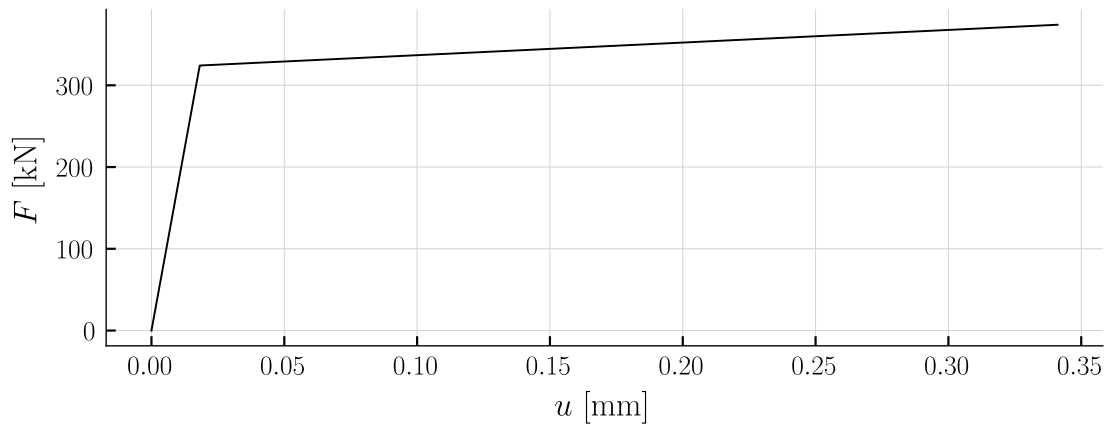


Abbildung 4.8: Berechnete Wegfedercharakteristik des Schubgelenks vom Versuch A3V2

4.1.3 Versuchsvergleich

Mit den bestimmten Federcharakteristiken kann die Biegelinie des Systems ermittelt werden unter Berücksichtigung der Schub- und Biegeverformungen auf nicht-linearen Grundlagen. Die Abbildung 4.9 zeigt das Last-Verformungs-Diagramm des Systems am Punkt w_1 . Das Modell beschreibt den Verformungsverlauf zufriedenstellend.

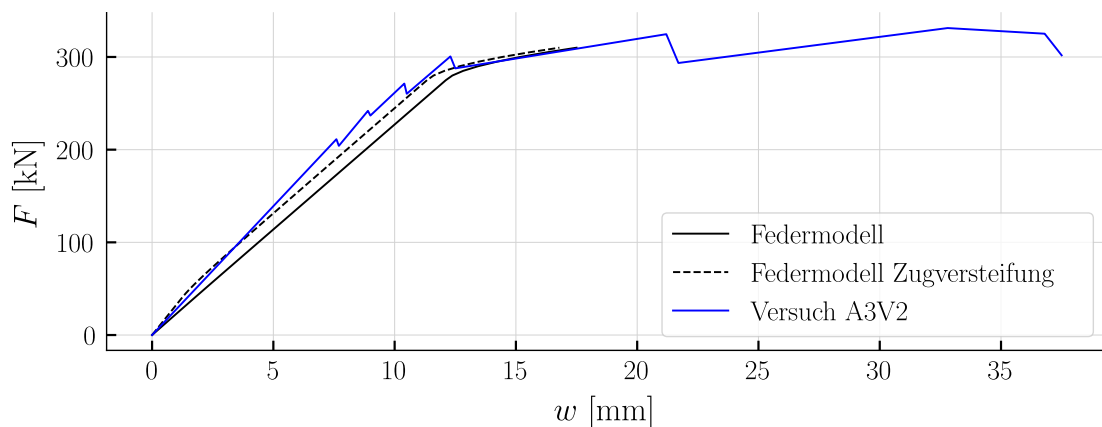


Abbildung 4.9: Last-Verformungs-Verlauf am Punkt w_1 mit dem Federmodell und den Versuchsmessungen

Der Verdrehungsverlauf in Abbildung 4.10 lässt sich ebenfalls direkt aus dem Modell exportieren. Durch die Ableitung des Verlaufs resultiert der Krümmungsverlauf, dargestellt in Abbildung 4.11.

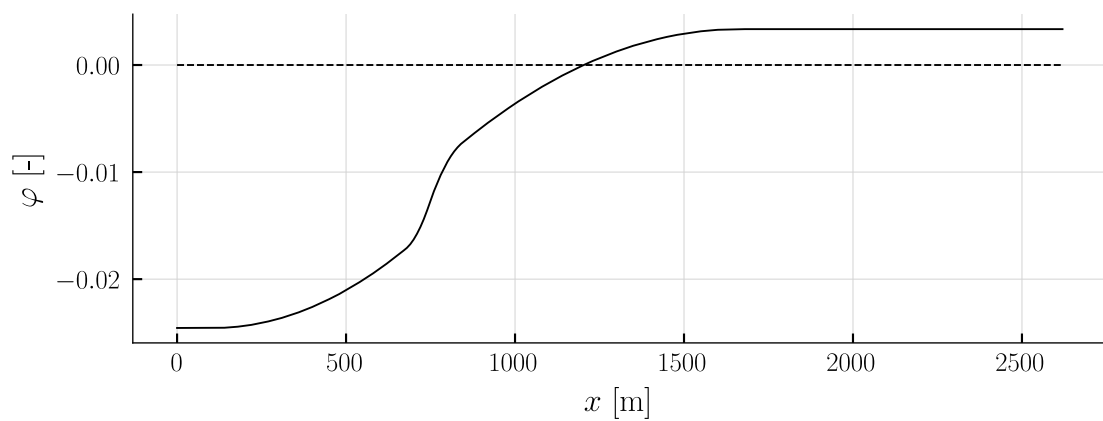


Abbildung 4.10: Verdrehungsverlauf aus dem Federmodell für die Höchstlast

Der Krümmungsverlauf gibt Aufschluss über den Fließbereich der Bewehrung, bzw. über den Steifigkeitsverlauf entlang der Stabachse.

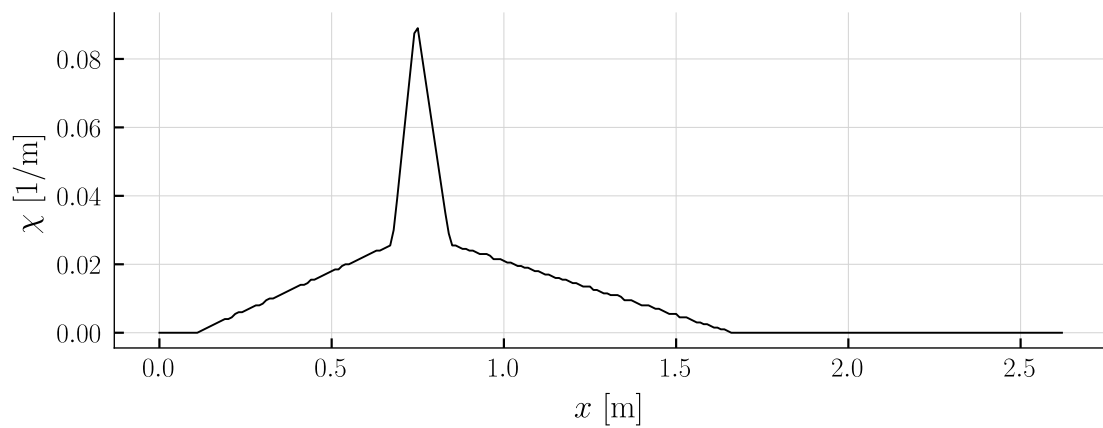


Abbildung 4.11: Berechneter Krümmungsverlauf aus dem Verdrehungsverlauf

4.2 Vierpunktbiegeversuch

Der Vierpunktbiegeversuch ist aus dem Paper [3] entnommen. Auffallend bei diesem Versuch ist die niedrig gehaltene Schubbewehrung. Dazu sind in Längsrichtung Stäbe mit unterschiedlicher Güte verlegt.

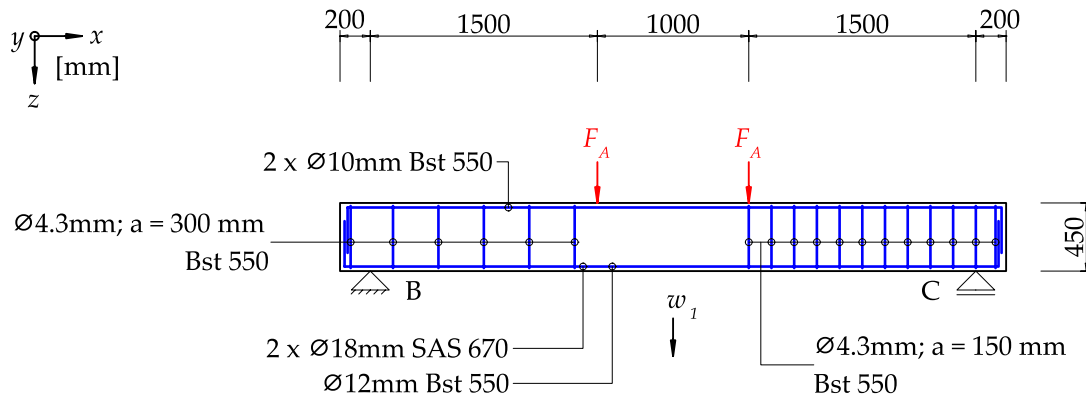


Abbildung 4.12: Bewehrungslayout des Versuchs SV14, Zeichnung entnommen aus [1]

Der Querschnitt ist in der Abbildung 4.13 gezeigt. Die Druckbewehrung wird vernachlässigt.

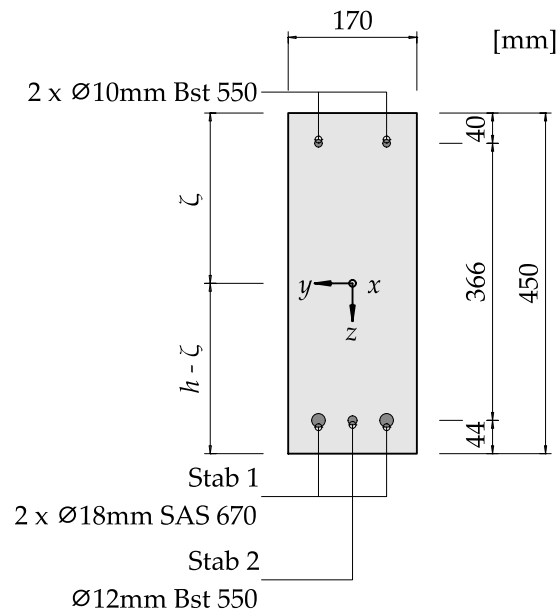


Abbildung 4.13: Querschnitt des Versuchs SV14, Zeichnung entnommen aus [1]

Das statische System ist in der Abbildung 4.14 gezeigt. Auch hier wird das Eigengewicht, wie im Versuch A3V2, vernachlässigt. Die gemessene und rechnerisch bestimmte Verformung gelten für den Mittelpunkt, beschrieben mit w_1 .

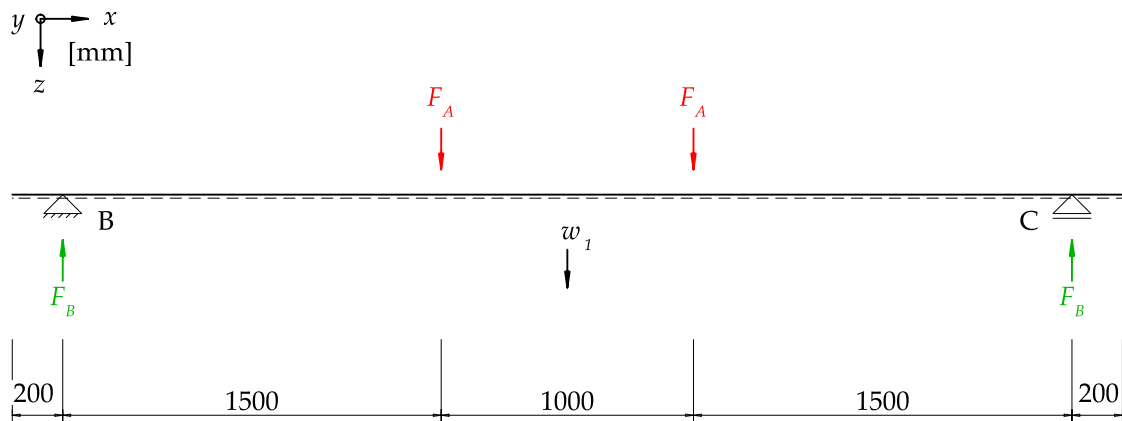


Abbildung 4.14: Statisches System des Versuchs SV14, Zeichnung entnommen aus [1]

4.2.1 Drehfedercharakteristik

Als Grundlage für die Drehfedercharakteristik gilt die Momenten-Krümmungs-Beziehung. Für den Querschnitt des Versuchs SV14 gilt die Beziehung gemäss Abbildung 4.15. Für detaillierte Berechnungen ist die Vorarbeit [1] zu konsultieren.

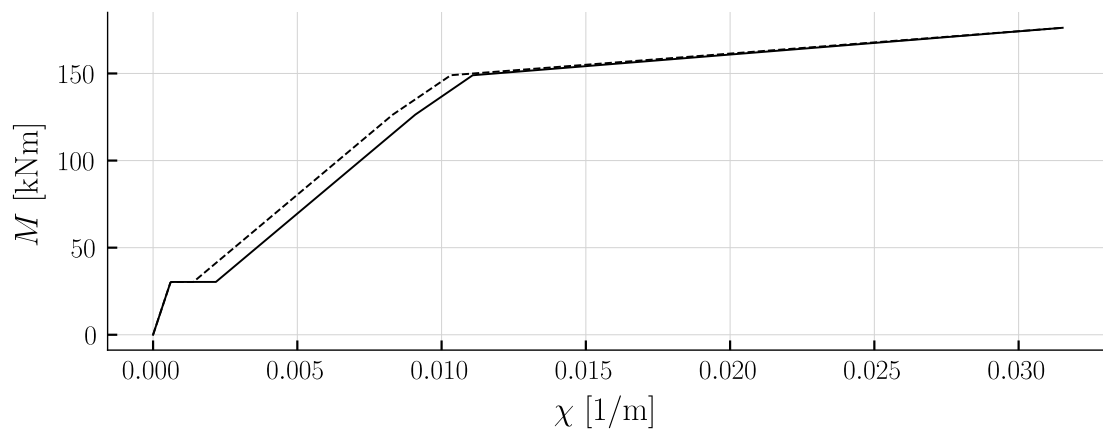


Abbildung 4.15: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Vierpunktbiegeversuchs, übernommen aus [1]

4.2.2 Versatzmass

In diesem Kapitel wird das Versatzmass bestimmt. Bzw. im Vergleich mit der Vertiefungsarbeit [1] berichtigt. Es wird vom Versuch lediglich die starke Seite betrachtet, da durch Verstärkungsmassnahmen diese bis zum Versagen gebracht wird.

$$V_{exp_{sv14}} = 105.0 \text{ kN} \quad z_{SV14} = 359.0 \text{ mm} \quad \mathcal{O}_{sw_{SV14}} = 4.3 \text{ mm}$$

$$b_{w_{SV14}} = 170.0 \text{ mm} \quad S_{sw_{SV14}} = 150.0 \text{ mm} \quad f_{su_{SV14}} = 657.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\theta_{c3_{SV14}} = 23.5^\circ$$

$$A_{sw_{SV14}} = 2 \cdot \left(\frac{\mathcal{O}_{sw_{SV14}}}{2} \right)^2 \cdot \pi = 2 \cdot \left(\frac{4.3 \text{ mm}}{2} \right)^2 \cdot 3.1416 = 29.0 \text{ mm}^2$$

$$a_{sw_{SV14}} = \left(\frac{A_{sw_{SV14}}}{S_{sw_{SV14}}} \right) = \left(\frac{29.0 \text{ mm}^2}{150.0 \text{ mm}} \right) = 193.6 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$V_{Rd_{SV14}} = \left(a_{sw_{SV14}} \cdot z_{SV14} \cdot \frac{f_{su_{SV14}}}{\tan(\theta_{c3_{SV14}})} \right) = \left(193.6 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \cdot 359.0 \text{ mm} \cdot \frac{657.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{\tan(23.5^\circ)} \right) = 105.0 \text{ kN}$$

$$750.3409670926505 \text{ mm}$$

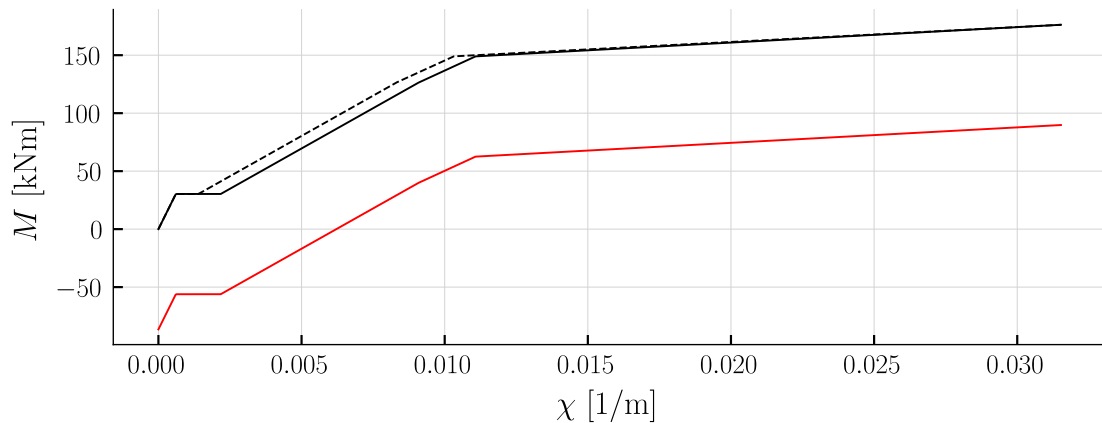


Abbildung 4.16: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Vierpunktbiegeversuchs mit Versatzmass

4.2.3 Wegfedercharakteristik

4.2.3.1 Schiebung

Die Wegfedercharakteristik basiert auf der Spannungsfeldmodellierung gemäss der Abbildung 4.17

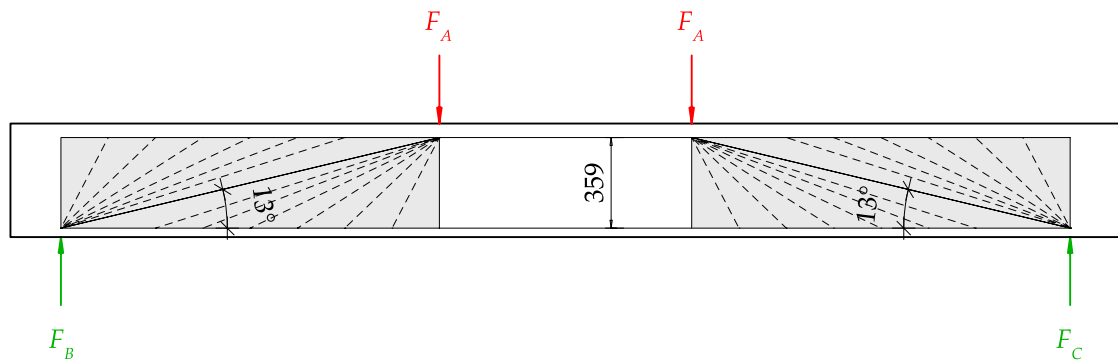


Abbildung 4.17: Einteilung in Spannungsfelder des Versuchs SV14, Zeichnung entnommen aus [1]

Die Einteilung in Spannungsfelder ermöglicht die Bestimmung der mitwirkenden Schubbewehrung beim Versagen des Querschnitts. Die Neigung des Feldes ist so gewählt damit der Querkraftwiderstand der Schubbewehrung der Traglast des Systems entspricht.

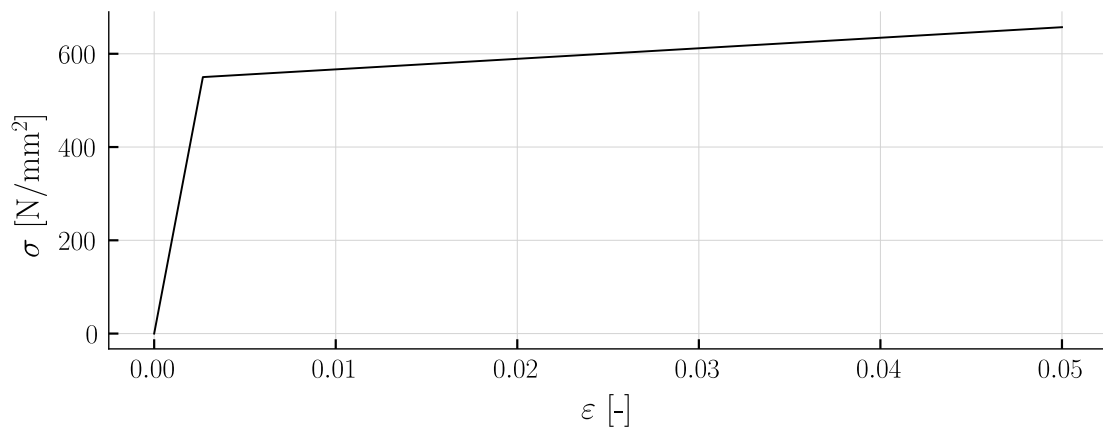


Abbildung 4.18: Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Schubbewehrung, übernommen aus [1]

Folgend sind die Parameter zur Bestimmung der Wegfedercharakteristik in vertikaler Richtung gezeigt.

$$E_{sw_{SV14}} = 205000.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad E_{sh_{SV14}} = 2261.3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die Querschnittsfläche der Schubbewehrung und der Bewehrungsgehalt bestimmt sich zu:

$$\rho_{sw_{SV14}} = \left(\frac{a_{sw_{SV14}}}{b_{w_{SV14}}} \right) = \left(\frac{193.63 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}}{170.00 \text{ mm}} \right) = 0.11 \%$$

Der Reduktionsfaktor bestimmt sich zu:

$$\gamma_{E_{SV14}} = \left(z_{SV14} \cdot \frac{1}{\tan(\theta_{c3_{SV14}})} \cdot \frac{1}{l_{element}} \right)$$

$$\gamma_{E_{SV14}} = 165$$

Die Abbildung 4.19 zeigt das Kraft-Verformungs-Verhalten für die Gelenke des Stabmodells in vertikaler Richtung.

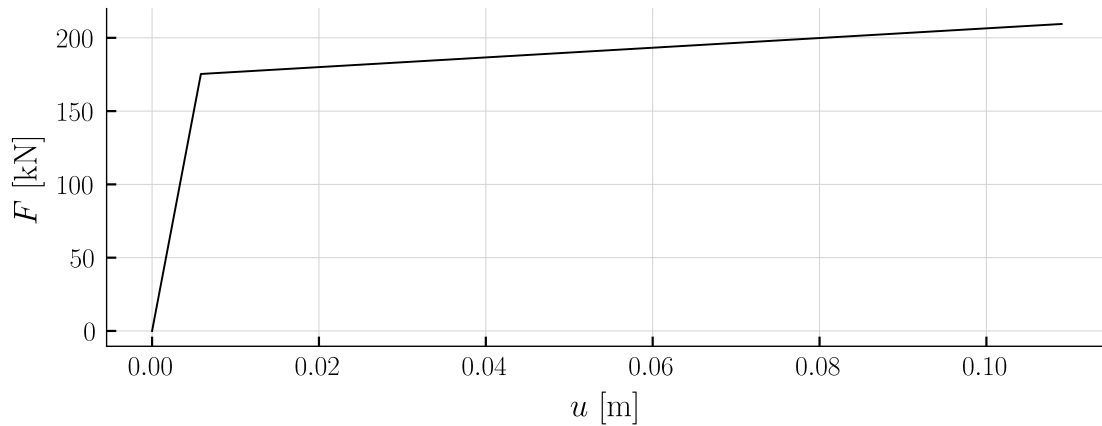


Abbildung 4.19: Berechnete Wegfedercharakteristik des Schubgelenks vom Versuch SV14

4.2.4 Versuchsvergleich

Mit den bestimmten Federcharakteristiken kann die Biegelinie des Systems ermittelt werden unter Berücksichtigung der Schub- und Biegeverformungen auf nicht-linearen Grundlagen. Die Abbildung 4.20 zeigt das Last-Verformungs-Diagramm des Systems am Punkt w_1 . Der Verformungsverlauf zeigt Abweichungen zu den gemessenen Resultate. Dies ist auf das Unterschlagen der Längszugkraft aus Querkraft zurückzuführen.

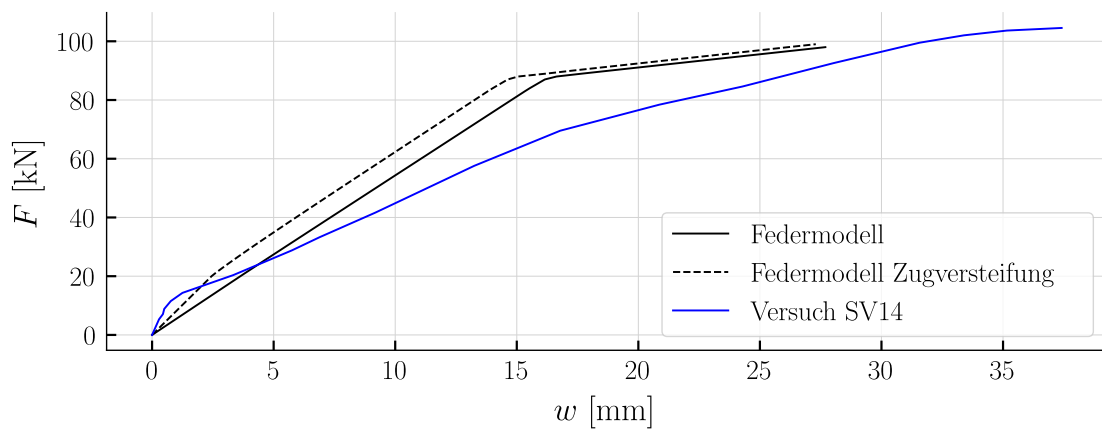


Abbildung 4.20: Last-Verformungs-Verlauf am Punkt w_1 , für das Federmodell und den Versuch

5 Vorgespannter Träger

27.5

Die folgende Versuchsnachrechnung zeigt die Möglichkeiten des Modells im Bezug mit einer Vorspannung.

5.1 Versuchsbeschreibung

In diesem Kapitel wird der vorgespannte Träger T6 nach dem Versuchsbericht [4] mit dem Drehfedermodell nachgerechnet. Es handelt sich um einen einfachen Balken mit einer Auskragung. Die Geometrie des Versuchs in Längsrichtung ist in Abbildung 5.1 gezeigt.

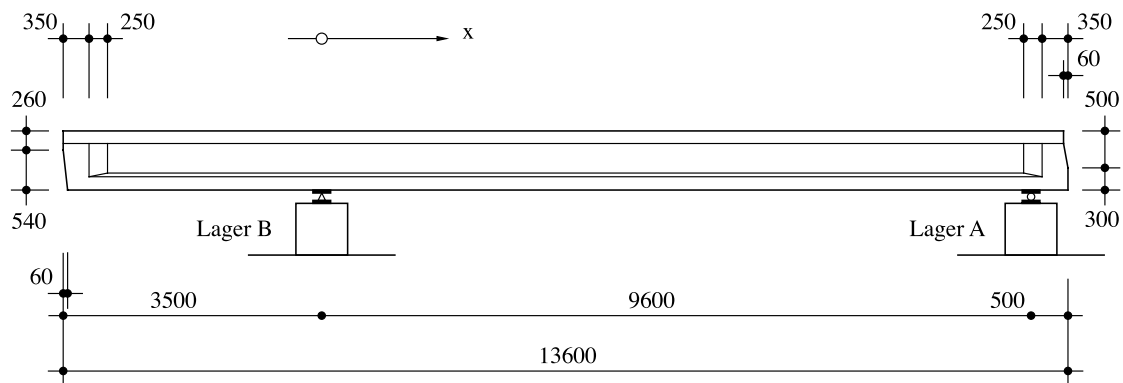


Abbildung 5.1: Geometrie des Versuchsträgers T6, entnommen aus [4]

Der dazugehörige Querschnitt ist in Abbildung 5.2 gezeigt.

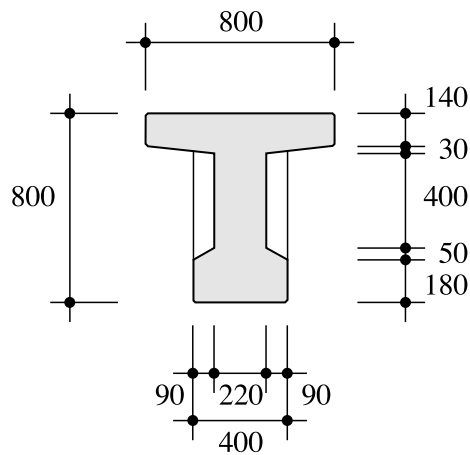


Abbildung 5.2: Geometrie des Querschnitts des Versuchsträgers T6, entnommen aus [4]

Die Lastsituation zeigt die Abbildung 5.3. Am Ende des Kragarms greift eine Einzellast P an. Mit Q wird eine Streckenlast simuliert. Der Träger ist an den Punkten A und B einfach gelagert.

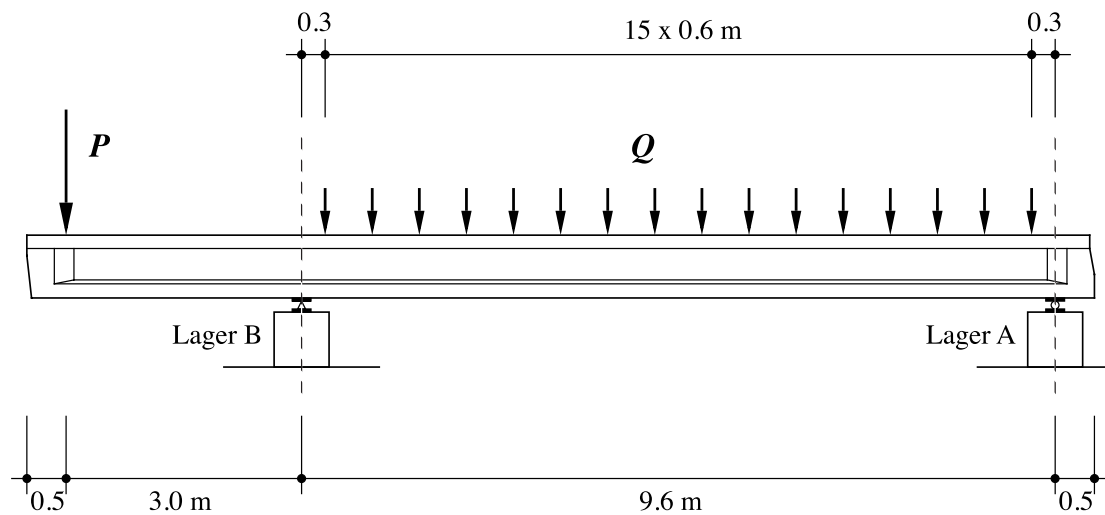
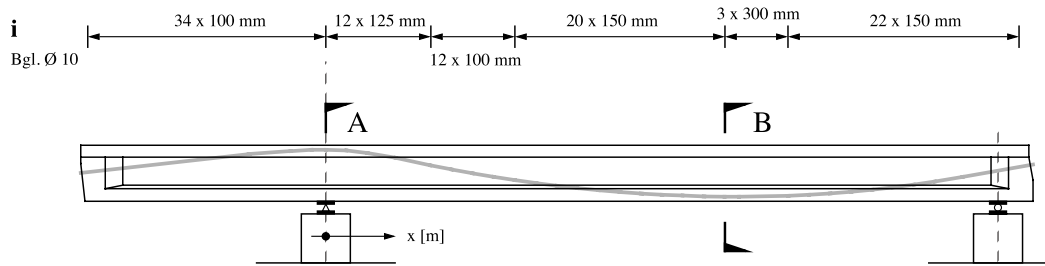


Abbildung 5.3: Lagerung und Laststellung des Versuchsträgers T6, entnommen aus [4]

Die verlegte schlaffe Bewehrung in Längsrichtung ist in der Abbildung 5.4 gezeigt.

oberer Flansch

A	2 Ø 14 [x = -3.45 + 4.30]		Ø 10 [x = 3.70 + 10.0]
B	2 Ø 14 [x = -3.45 + 4.30]		Ø 10 [x = 3.70 + 10.0]
C	4 Ø 12 [x = -3.15 + 4.30]		Ø 10 [x = 3.70 + 10.0]
D	Ø 10 [x = -3.45 + -2.00]	4 Ø 12 [x = -2.60 + 3.20]	Ø 10 [x = 2.60 + 10.0]
E	Ø 10 [x = -3.45 + -2.00]	4 Ø 12 [x = -2.60 + 3.20]	Ø 10 [x = 2.60 + 10.0]



Steg

ii
Bgl. Ø 12

10 x 300 mm	6 x 250 mm	27 x 300 mm
-------------	------------	-------------

F

Ø 10 [x = -3.40 + 3.60]	Ø 10 [x = 3.00 + 10.0]
-------------------------	------------------------

unterer Flansch

iii
Bgl. Ø 10

20 x 100 mm	9 x 100 mm	17 x 100 mm	10 x 150 mm	13 x 300 mm	10 x 150 mm
		9 x 100 mm			

G

Ø 14 [x = -3.40 + 1.50]	4 Ø 14 [x = 1.20 + 9.75]	Ø 10 [x = 9.10 + 10.05]
-------------------------	--------------------------	-------------------------

H

Ø 14 [x = -3.40 + 1.50]	2 Ø 16 [x = 0.9 + 10.05]	Ø 10 [x = 9.10 + 10.05]
-------------------------	--------------------------	-------------------------

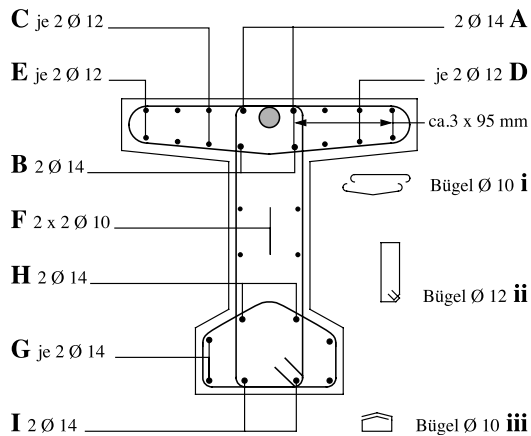
I

Ø 14 [x = -3.40 + 1.50]	2 Ø 16 [x = 0.9 + 10.05]	
-------------------------	--------------------------	--

Abbildung 5.4: Bewehrungslayout in Längsrichtung des Versuchsträgers T6, entnommen aus [4]

Das Bewehrungslayout im Querschnitt zeigt die Abbildung 5.5.

Schnitt A



Schnitt B

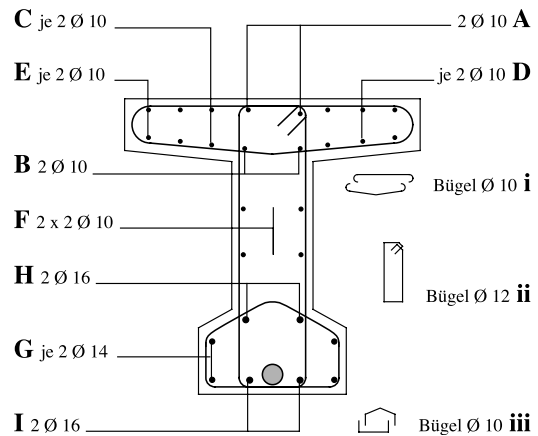


Abbildung 5.5: Bewehrungslayout im Querschnitt des Versuchsträgers T6, entnommen aus [4]

Die Führung der Vorspannung ist in der Abbildung 5.6 gezeigt.

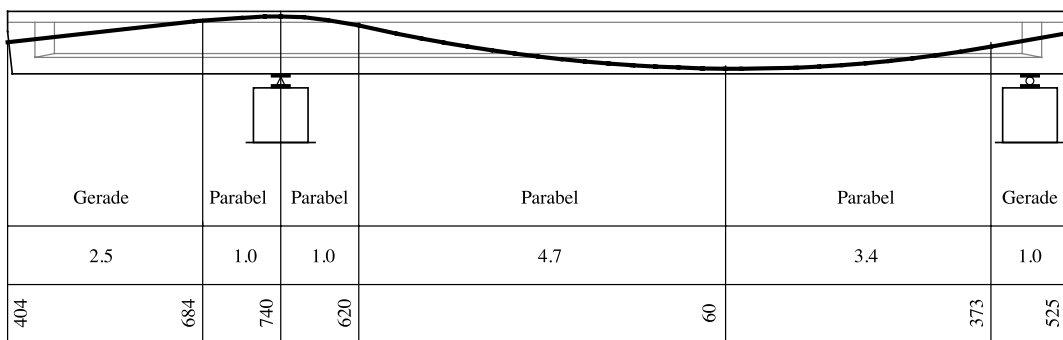


Abbildung 5.6: Vorspannungslayout des Versuchsträgers T6. Horizontaler Abstand [m] und vertikale Position [mm], gemessen von der Unterkante des Trägers, entnommen aus [4]

5.2 Modellierung

5.3 Parameter

In diesem Abschnitt werden die allgemein verwendeten Parameter aufgelistet. Gegliedert nach den einzelnen Aspekten des Versuchs.

5.3.1 Vorspannung

Die Parameter der Vorspannung sind die Folgenden. Es ist die Initiale Vorspannkraft, sowie die entsprechenden Querschnittseigenschaften aufgezeigt:

$$f_{py} = 1706.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad f_{pt} = 1855.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad V_{om} = 730.0 \text{ kN}$$

$$A_p = 596.0 \text{ mm}^2 \quad E_p = 190000.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

5.3.2 Beton

Die Parameter sind Mittelwerte aus Betonwürfel- und Betonzylinderproben.

$$f_c = 52.10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad f_{cts} = 4.30 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad E_c = 50200.00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\rho_c = 2409.00 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \varepsilon_{cu} = 0.16 \%$$

Das Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betons ist in der Abbildung 5.7 dargestellt. Definiert ist das Verhalten im positiven Spannungsbereich bis zum Erreichen der Betonzugfestigkeit f_{cts} . Das Verhalten im negativen Spannungsbereich wird mit einem linear-elastischem ideal-plastischem Verhalten approximiert.

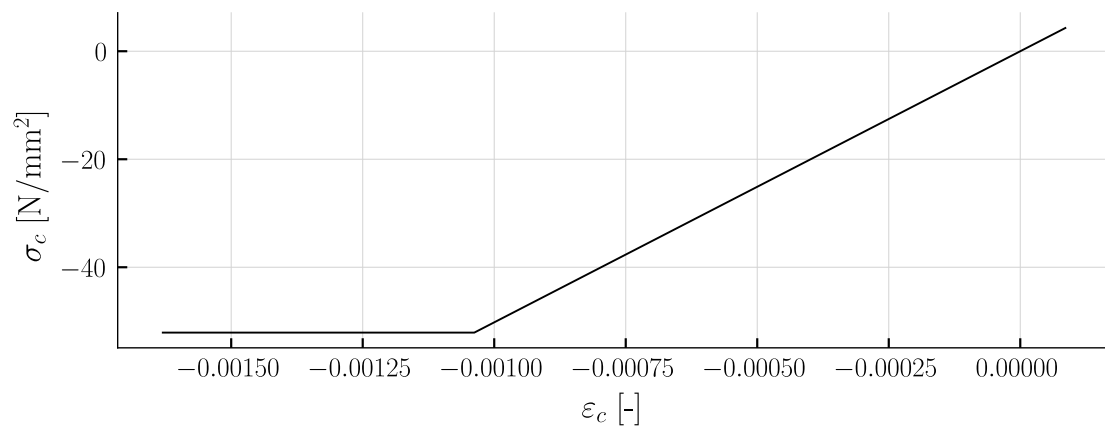


Abbildung 5.7: Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betons

5.3.3 Betonstahl

Mittelwerte der Zugproben.

$$\varnothing_1 = 10.0 \text{ mm} \quad \varnothing_2 = 12.0 \text{ mm} \quad \varnothing_3 = 14.0 \text{ mm}$$

$$f_{sy} = 500.0 \text{ MPa} \quad f_{st} = 630.0 \text{ MPa} \quad \varepsilon_{sv} = 2.4 \%$$

$$\varepsilon_{sg} = 13.0 \% \quad E_s = 205000.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die entsprechende Spannungs-Dehnungs-Beziehung ist in Abbildung 5.8 gezeigt. Als Annahme gilt, dass die Stäbe lediglich unter Zug belastet werden. Die Druckbewehrung wird bei der Bestimmung der Momenten-Krümmungs-Beziehung vernachlässigt. Das Verhalten wird mit einem Bilinearem Verhalten approximiert.

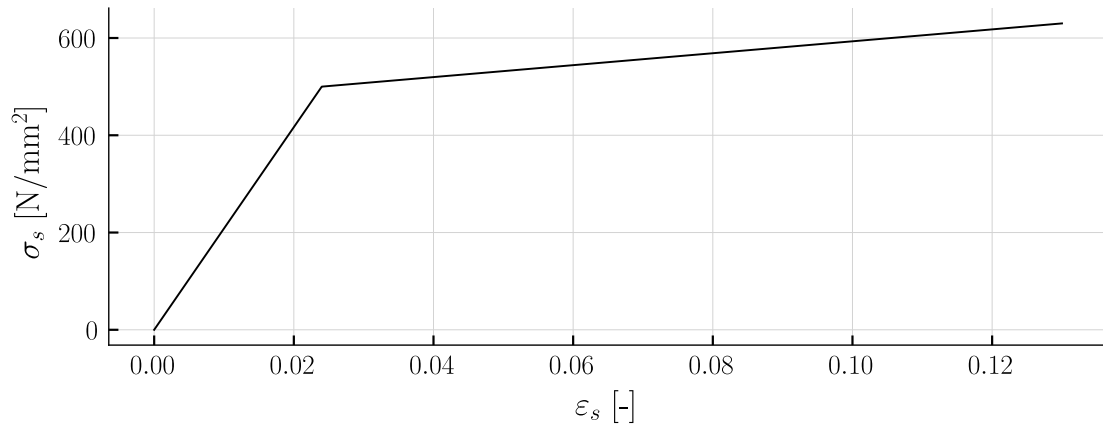


Abbildung 5.8: Spannungs-Dehnungs-Verhalten der Längsbewehrung

5.3.4 Geometrie

5.3.4.1 Querschnitt

Die Parameter der Geometrie des Querschnitts beziehen sich auf die Abbildung 5.2.

$$h_1 = 180.0 \text{ mm} \quad h_2 = 50.0 \text{ mm} \quad h_3 = 400.0 \text{ mm}$$

$$h_4 = 30.0 \text{ mm} \quad h_5 = 140.0 \text{ mm} \quad h_{tot} = 800.0 \text{ mm}$$

$$b_{1_{inf}} = 90.0 \text{ mm} \quad b_{2_{inf}} = 220.0 \text{ mm} \quad b_{3_{inf}} = 90.0 \text{ mm}$$

$$b_{tot_{inf}} = 400.0 \text{ mm} \quad b_{tot_{sup}} = 800.0 \text{ mm}$$

5.3.4.2 Längsrichtung

Der Abschluss des Querschnitts wird nicht mehr weiter verfolgt. Vereinfacht wird der I-Querschnitt als konstant über die Länge betrachtet.

Die beschriebenen Abmessungen L_n sind jeweils vom Stabanfang gemessen.

$$L_1 = 3500.0 \text{ mm} \quad L_2 = 9600.0 \text{ mm} \quad L_{tot} = 13100.0 \text{ mm}$$

5.3.5 Lasten

$$L_P = 500.0 \text{ mm} \quad L_q = 3.8 \text{ m} \quad l_q = 9.0 \text{ m} \quad (\text{Streckenlast})$$

5.4 Momenten-Krümmungs-Beziehung

Die Momenten-Krümmungs-Beziehung zeigt bei diesem Versuch eine gewisse Komplexität. Grundsätzlich gilt es für jede Abstufung der Bewehrung eine separate Momenten-Krümmungs-Beziehung herzuleiten.

Wird bei der Vorspannung Spannkraftverluste berücksichtigt, so wirkt der Restquerschnitt des Spannstahls als schlaife Bewehrung bei Belastung mit. Dies hat Einfluss auf das Momenten-Krümmungs-Verhalten. Durch die parabolische Geometrie des Spannkabels, gilt es die Momenten-Krümmungs-Beziehung unter Variation der Spannkabellage zu definieren, was die Komplexität der Momenten-Krümmungs-Beziehung erhöht.

Um den Rechenaufwand gering zu halten wird lediglich ein qualitatives Verhalten der Momenten-Krümmungs-Beziehung angestrebt. Dabei wird der Querschnitt beim Fließen der Zugbewehrung betrachtet, sowie wird der Biegezugwiderstand bestimmt. Diese Punkte werden linear mit einander verbunden. Des Weiteren wird die Druckbewehrung stets vernachlässigt.

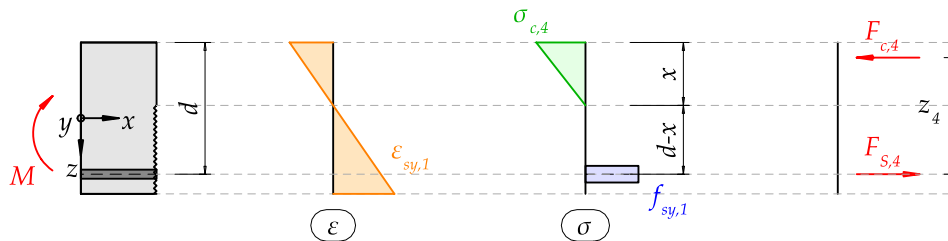


Abbildung 5.9: Querschnittsanalyse mit Fließen der Zugbewehrung und elastischer Betondruckzone, qualitativer Verlauf

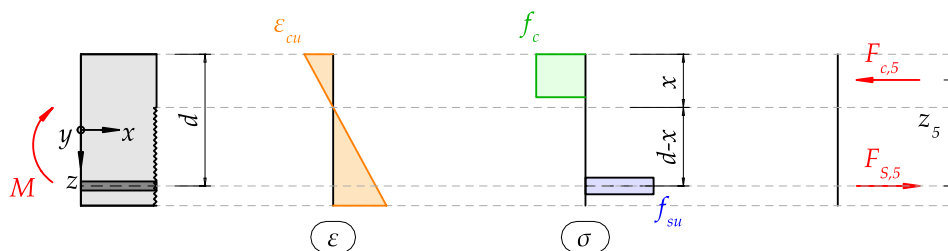


Abbildung 5.10: Querschnittsanalyse mit erreichter Zugfestigkeit in der Bewehrung und vollständig plastifizierter Betondruckzone, qualitativer Verlauf

5.5 Schiebungs-Beziehung

5.6 Versuchsergebnisse

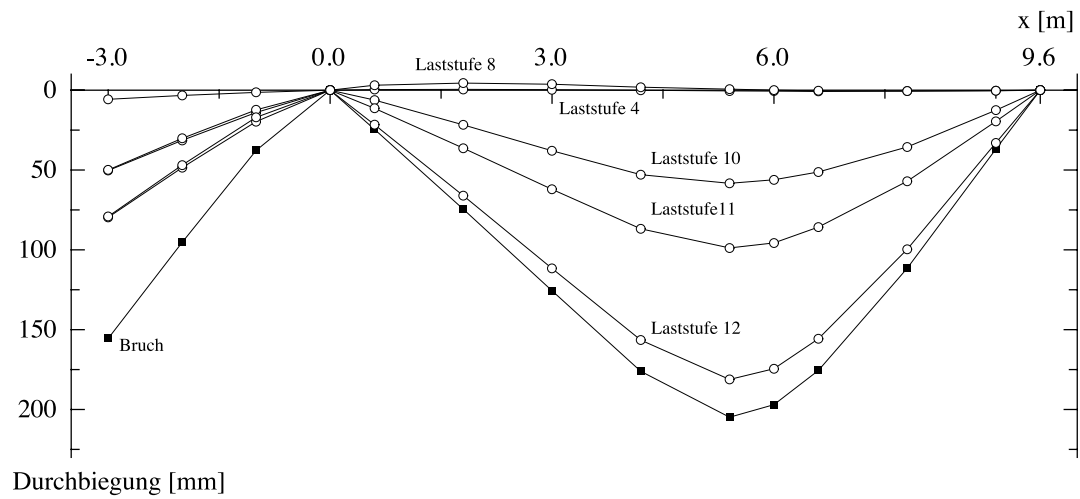


Abbildung 5.11: Verformungsverlauf des Versuchsträgers T6, entnommen aus [4]

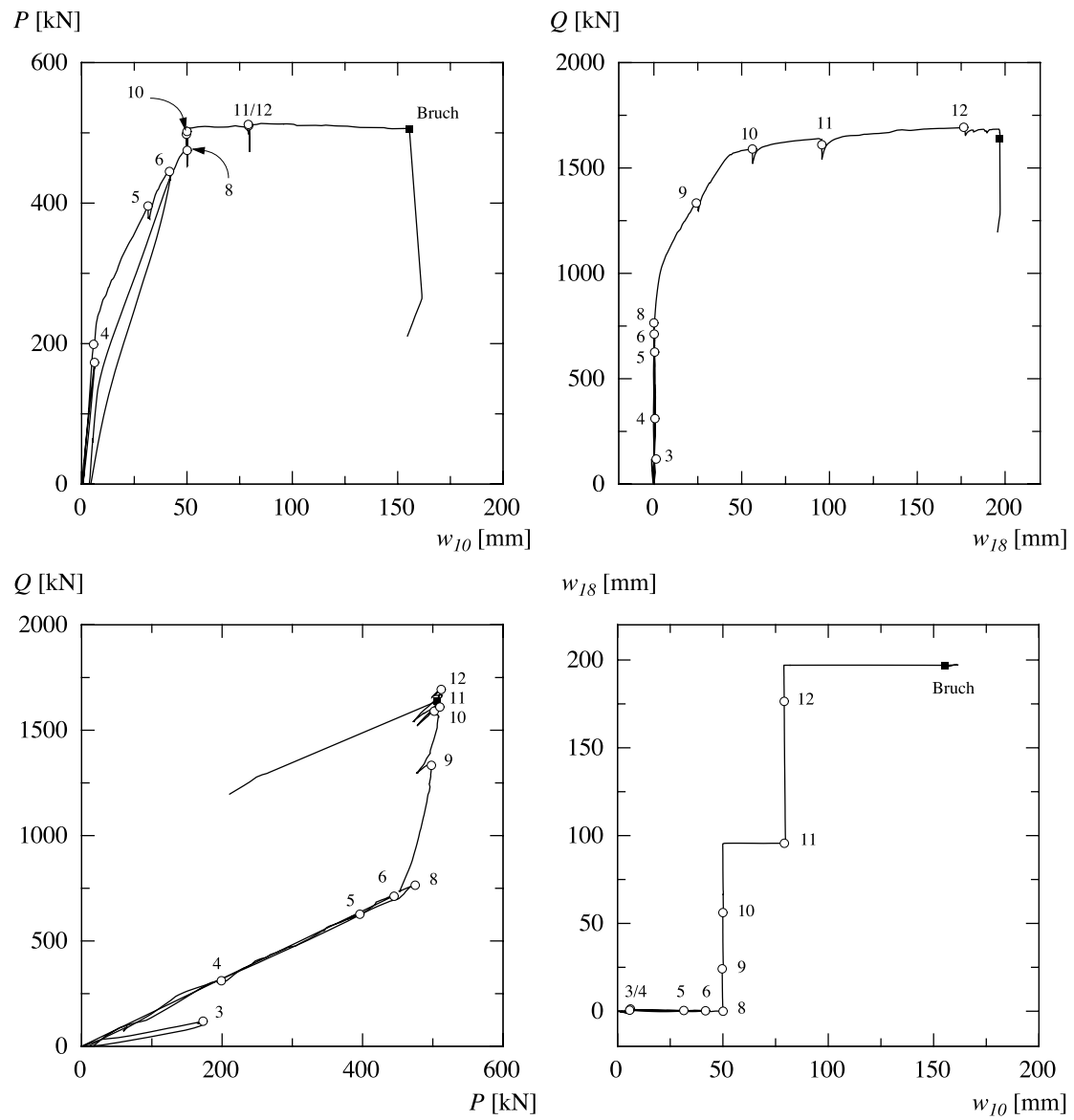


Abbildung 5.12: Last-Verformungs-Verhalten des Versuchsträgers T6, entnommen aus [\[4\]](#)

6 IdeaStatica

In diesem Kapitel wird darauf abgezielt, das Verformungsverhalten der behandelten Versuche mit einer kommerziellen Software zu bestimmen. Das Ziel ist es die Resultate der Software auf Präzision zu prüfen, sowie die Eingabe des Modells zu verstehen.

Dabei wird die Modellaufbereitung beschrieben, sowie einzelne Eingabeparameter diskutiert.

Literatur

1. Gitz P (2024) Ansätze zur Verformungsberechnung. HSLU Technik & Architektur
2. Jäger T, Marti P (2006) Versuche zum Querkraftwiderstand und zum Verformungsvermögen von Stahlbetonplatten. IBK Bericht 294. <https://doi.org/10.3929/ethz-a-005195576>
3. Tue NV, Ehmann R, Betschoga C, Tung ND (2019) Einfluss geringer Querkraftbewehrung auf die Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonbalken unterschiedlicher M/V-Kombinationen. Beton- und Stahlbetonbau 114(4):217–230. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/best.201800075>
4. Sigrist V, Marti P (1993) Versuche zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern. Birkhäuser, Basel Boston Berlin