

**MASTER OF SCIENCE IN ENGINEERING**  
**Vertiefungsmodul II**

**Tragverhalten von**  
**Stahlbetontragwerken**

*Ansätze zur Modellierung*

Pascal Gitz

Horw, Freitag, 14. Juni 2024

Advisor: Prof. FH, Dr. Daniel Heinzmann  
Experte: Dr. Thomas Jäger

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Sämtliche verwendeten Textausschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet.

Horw, 14. Juni 2024

Pascal Gitz

Version 1.0 - Prüfungsexemplar  
Version 0.9 - Entwurf

14. Juni 2024	PG
07. Juni 2024	PG

# Kurzfassung

-

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Modellvorstellung</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Einführungsbeispiel</b>	<b>9</b>
3.1	Biegeverformung . . . . .	10
3.2	Verformung der Drehfeder . . . . .	12
3.3	Stabstatikmodell . . . . .	14
3.4	Mit Wegfeder . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Versuchsnachrechnung</b>	<b>17</b>
4.1	Dreipunktbiegeversuch . . . . .	17
4.2	Vierpunktbiegeversuch . . . . .	21

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Modellierung als biegesteife Stäbe gekoppelt mit Drehfedern . . . . .	8
2.2	Modellierung als biegesteife Stäbe gekoppelt mit einem Wegfederpaar	8
3.1	Statisches System des Kragarms . . . . .	9
3.2	Fiktiver Querschnitt des Kragarms mit durchwegs linear-elastischem Materialverhalten . . . . .	10
3.3	Charakteristik der Drehfeder . . . . .	10
3.4	Statisches System des Kragarms . . . . .	11
3.5	Schnittkräfte des Systems aus Abbildung 3.4 für die Last $F_1$ . . . . .	11
3.6	Schnittkräfte des Systems aus Abbildung 3.4 für die Last $F_2$ . . . . .	12
3.7	Statisches System des Kragarms im virtuellen Kräftezustand . . . . .	13
3.8	Schnittkräfte des virtuellen Systems aus Abbildung 3.7 . . . . .	13
3.9	Charakteristik der Drehfeder mit Bestimmung der Verdrehung anhand der Laststufen . . . . .	14
3.10	Verformungen in $z$ Richtung mit FE für $F_2$ . . . . .	15
3.11	Verformungen in $z$ Richtung mit FE für $F_2$ . . . . .	15

# Tabellenverzeichnis

3.1	Berechnungsparameter des Kragarms . . . . .	9
-----	---	---

# 1 Einleitung

•

## 2 Modellvorstellung

In der Vorarbeit [1] zu dieser Arbeit wurde mittels der numerischen Integration der Krümmung das nicht-lineare Verformungsverhalten von unterschiedlichen Versuchen zufriedenstellend abgebildet. Um das Vorgehen auf statisch unbestimmte Systeme zu erweitern, sowie in der Geometrie der Systeme die nötige Flexibilität zu erhalten, wird versucht, basierend auf dem angewendeten Berechnungsansatz, ein Stabstatikmodell zu erstellen. Die Abbildung 2.1 zeigt eine Modellierung eines einfachen Balkens. Dabei sind biege- und schubsteife Stäbe mit Drehfedern gekoppelt. Dies führt dazu, dass sämtliche Deformationen des Systems aus den Federverbindungen erfolgen.

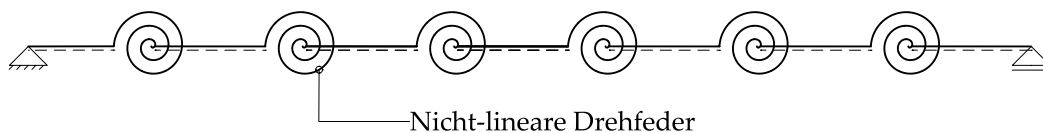


Abbildung 2.1: Modellierung als biegesteife Stäbe gekoppelt mit Drehfedern

Mit der Wahl der entsprechenden Federcharakteristiken stellen sich so die passenden Resultate ein. Die Anwendung des Modells an experimentellen Versuchen wird in den folgenden Kapiteln aufgegriffen.

Alternativ zur Modellierung mittels Drehfedern lässt sich das Verhalten der Drehfeder mit einem Wegfederpaar abbilden. Dies erlaubt eine Modellierung mittels den nicht-linearen Fachwerksstäben der Software Statik-9 der Cubus AG. Dieser Ansatz wird jedoch nicht weiter verfolgt.

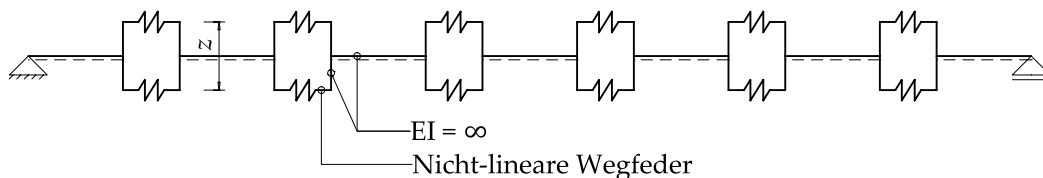


Abbildung 2.2: Modellierung als biegesteife Stäbe gekoppelt mit einem Wegfederpaar



### 3 Einführungsbeispiel

Das Einführungsbeispiel verfolgt das Ziel das Modellverhalten zu plausibilisieren. Dazu werden die Verformungen des fiktiven Beispiels von Hand mittels der Arbeitsgleichung, sowie numerisch mit der Stabstatik-Software ermittelt. Das statische System ist in Abbildung 3.1 aufgezeigt. Das Beispiel ist mit einer Drehfeder versehen, welche eine nicht-lineare Federcharakteristik aufweist. Es werden zwei Laststufen betrachtet. Diese sind entsprechend gewählt, dass das nicht-lineare Verhalten der Drehfeder zu tragen kommt.

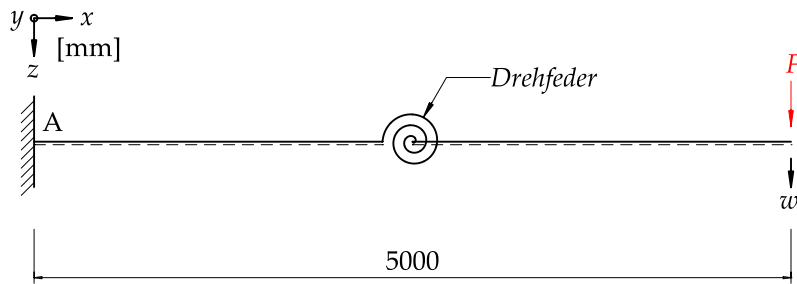


Abbildung 3.1: Statisches System des Kragarms

Die Parameter in der Tabelle 3.1 dienen als Berechnungsgrundlagen. Beschrieben sind die Abmessungen und Materialeigenschaften, sowie die beiden Laststufen  $F_1$  und  $F_2$ , wie auch die Federsteifigkeiten  $k_1$  und  $k_2$ .

Tabelle 3.1: Berechnungsparameter des Kragarms

Parameter	
$E = \frac{10000\text{N}}{\text{mm}^2}$	$F_1 = -10000\text{N}$
$F_2 = -21500\text{N}$	$b = 200\text{mm}$
$h = 400\text{mm}$	$k_1 = \frac{100000\text{N}}{\text{m}}$
$k_2 = \frac{10000\text{N}}{\text{m}}$	$l_{\text{Kragarm}} = 5\text{m}$
$z = 400\text{mm}$	

Der Rechteckquerschnitt ist in Abbildung 3.2 aufgezeigt, dieser gilt für den gesamten Kragarm.

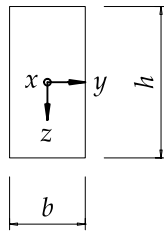


Abbildung 3.2: Fiktiver Querschnitt des Kragarms mit durchwegs linear-elastischem Materialverhalten

Die Entsprechende Federcharakteristik ist in Abbildung 3.3 zu sehen. Das Bilineare Verhalten gilt für positive und negative Biegemomente um die  $Y$ -Achse.

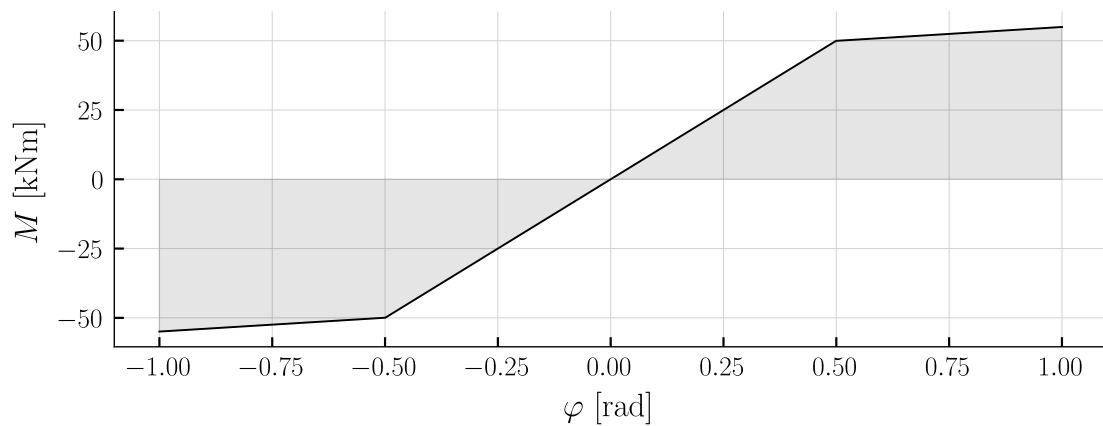


Abbildung 3.3: Charakteristik der Drehfeder

### 3.1 Biegeverformung

Zunächst werden die Biegeverformungen mittels der Differentialgleichung für reine Biegeträger ermittelt. Dabei wird die Drehfeder vernachlässigt. Das statische System, gezeigt in Abbildung 3.4 führt zu den Zustandslinien der Schnittgrößen in der Abbildung 3.5.

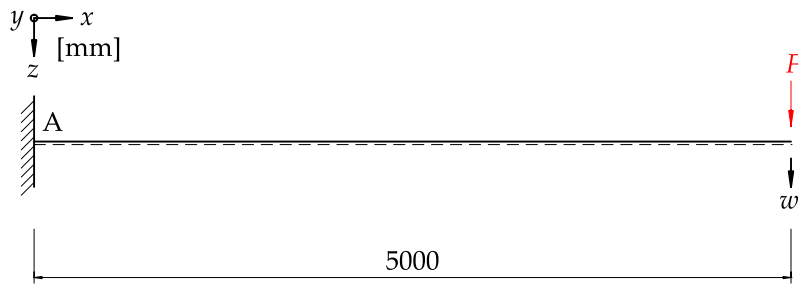


Abbildung 3.4: Statisches System des Kragarms

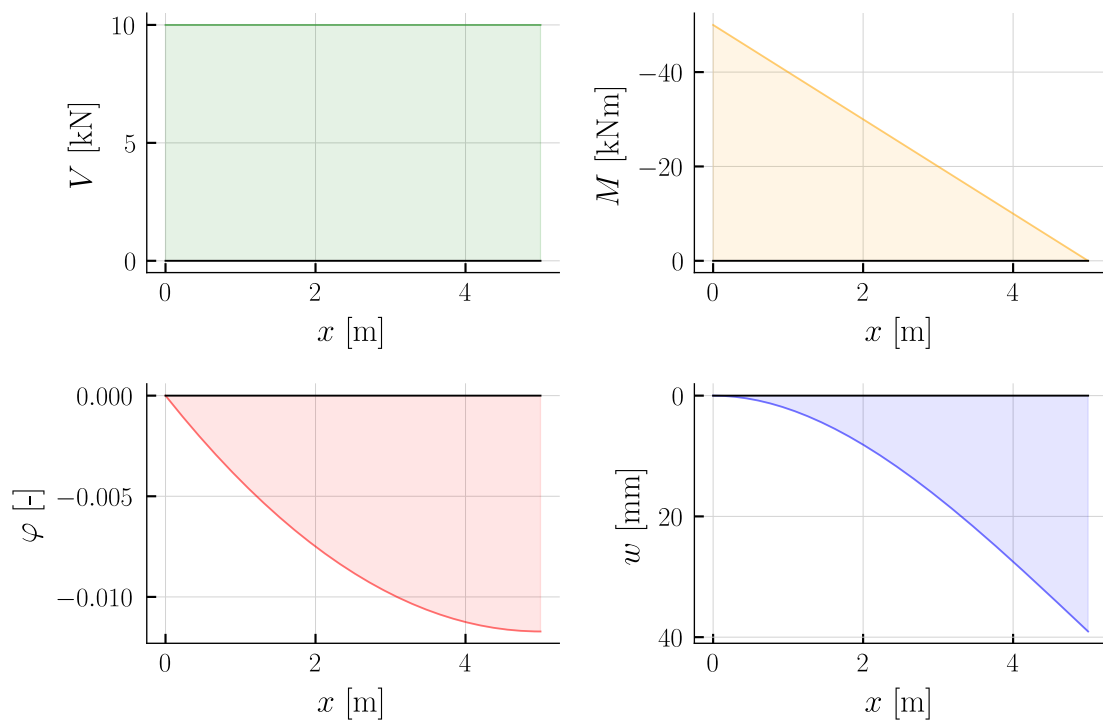


Abbildung 3.5: Schnittkräfte des Systems aus Abbildung 3.4 für die Last  $F_1$

Die maximale Verformung am Endpunkt des Kragarms beträgt:

$$w_{1,Bending,F1} = 39.06\text{mm} \quad (3.1)$$

Das analoge Vorgehen führt für die Laststufe  $F_2$  zu den Zustandslinien der Schnittgrößen gemäss der Abbildung 3.6.

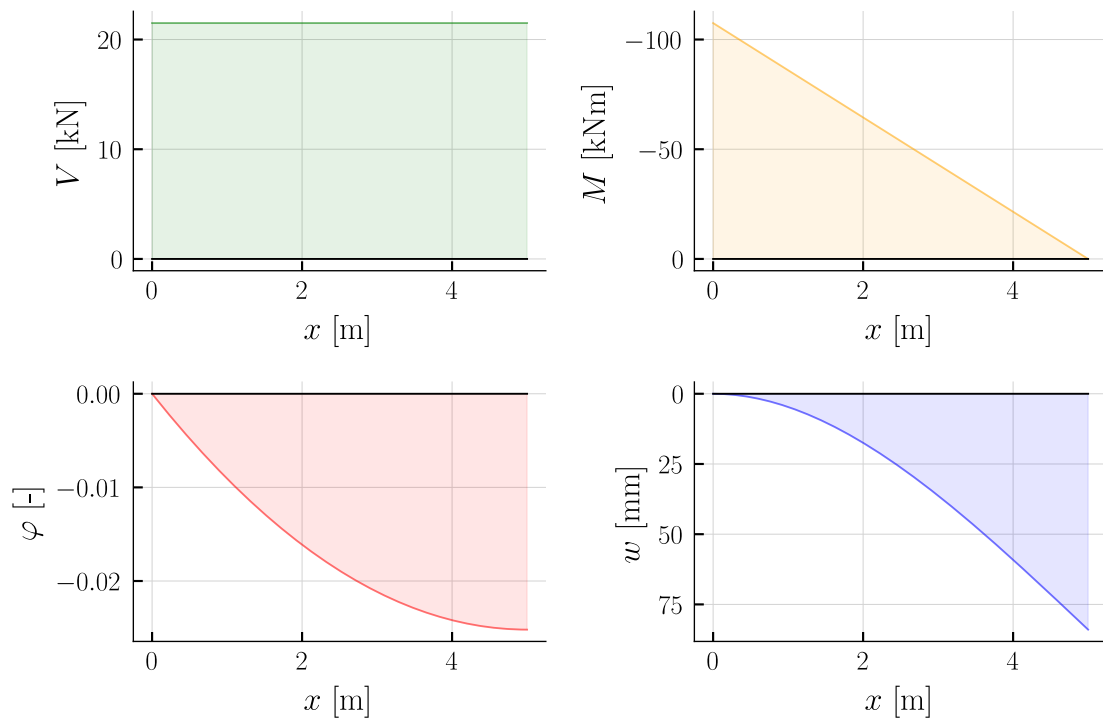


Abbildung 3.6: Schnittkräfte des Systems aus Abbildung 3.4 für die Last  $F_2$

Da ein durchwegs linear-elastisches Biegeverhalten vorausgesetzt wird, entspricht der Faktor der Erhöhung der Verformung dem Quotient der beiden Laststufen.

$$\frac{w_{1,Bending,F2}}{w_{1,Bending,F1}} = \frac{F_2}{F_1} \quad (3.2)$$

Dabei entspricht die maximale Biegeverformung am Ende des Kragarms:

$$w_{1,Bending,F2} = 83.98 \text{ mm} \quad (3.3)$$

## 3.2 Verformung der Drehfeder

Zur Bestimmung der Verformung am Ende des Kragarms des Systems mit der Drehfeder wird die Arbeitsgleichung angewendet. Dazu wird an einem virtuellen System eine Einzellast eingeführt, an der Stelle an dem die Verformung bestimmt werden soll. Dargestellt ist dies in Abbildung 3.7.

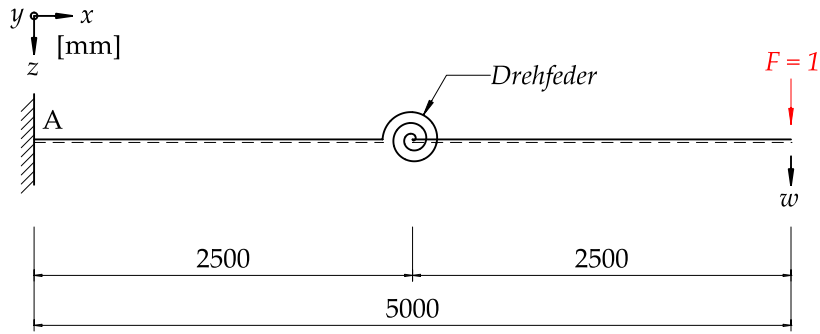


Abbildung 3.7: Statisches System des Kragarms im virtuellen Kräftezustand

Die entsprechenden Verläufe der Querkraft und des Biegemoments zeigt die Abbildung 3.8 für das virtuelle System.

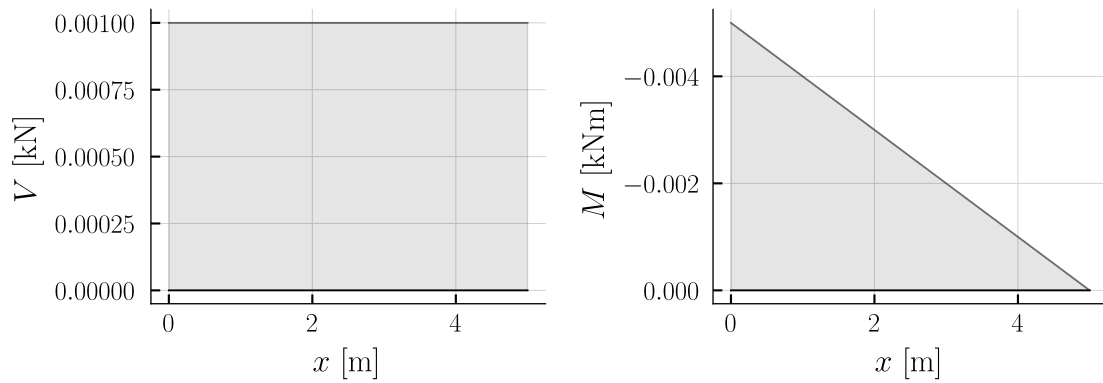


Abbildung 3.8: Schnittkräfte des virtuellen Systems aus Abbildung 3.7

Die Verformung der Drehfeder kann abschliessend mit der Gleichung 3.4 bestimmt werden.

$$w_{Spring} = \bar{M} \frac{M}{k_{\varphi}} = \bar{M} \varphi \quad (3.4)$$

Die Verdrehung lässt sich aus der Federcharakteristik mit dem Biegemoment an der Stelle der Drehfeder bestimmen. Die Abbildung 3.9 zeigt die Position der Laststufen im Diagramm.

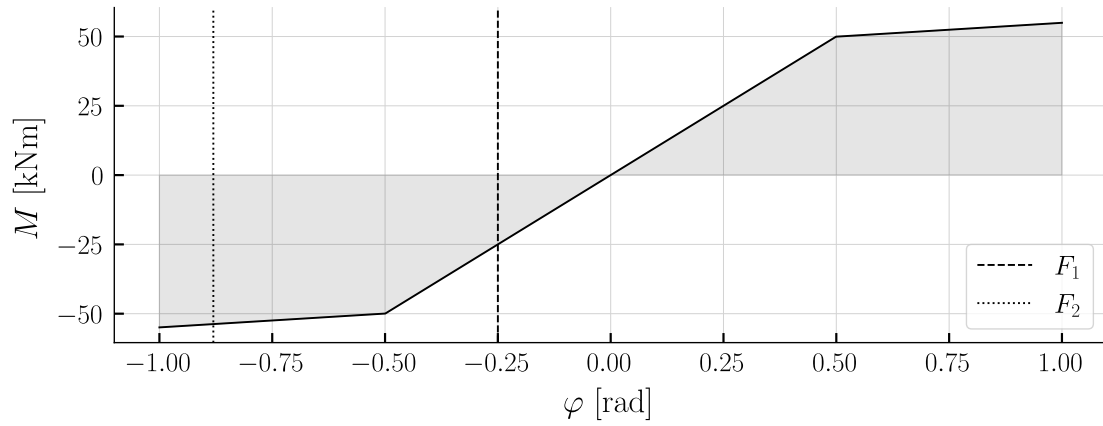


Abbildung 3.9: Charakteristik der Drehfeder mit Bestimmung der Verdrehung anhand der Laststufen

Angewendet auf das System der Abbildung 3.1 folgen für die beiden Laststufen die Deformationen der Drehfeder zu:

$$w_{1,spring,F1} = 625.0\text{mm} \quad (3.5)$$

$$w_{1,spring,F2} = 2201.3\text{mm} \quad (3.6)$$

Dazu gilt es den Anteil aus der Biegeverformung zu addieren. Die totale Verformung folgt zu:

$$w_{1,tot,F1} = 664.1\text{mm} \quad (3.7)$$

$$w_{1,tot,F2} = 2285.0\text{mm} \quad (3.8)$$

### 3.3 Stabstatikmodell

Das statische System, gemäss Abbildung 3.1, wird mittels der Statiksoftware AxisVM X7 modelliert.

$$w_{tot,F1} = 664.06\text{mm} \quad (3.9)$$



Abbildung 3.10: Verformungen in  $z$  Richtung mit FE für  $F_2$

$$w_{tot,F2} = 2285.24\text{mm} \quad (3.10)$$

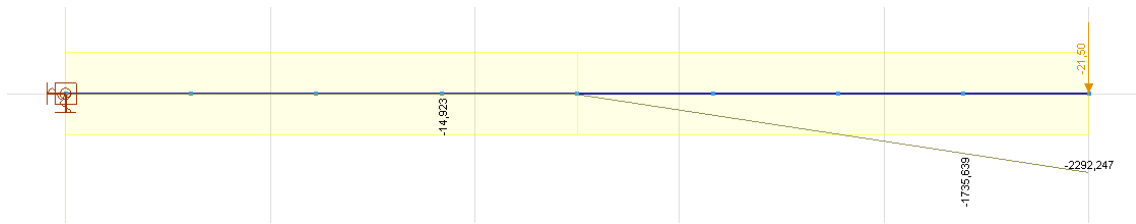
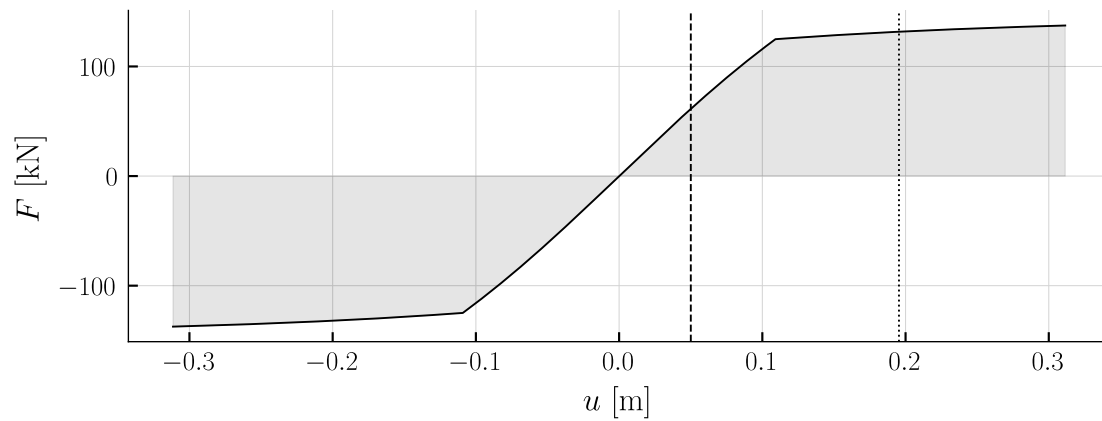


Abbildung 3.11: Verformungen in  $z$  Richtung mit FE für  $F_2$

## 3.4 Mit Wegfeder

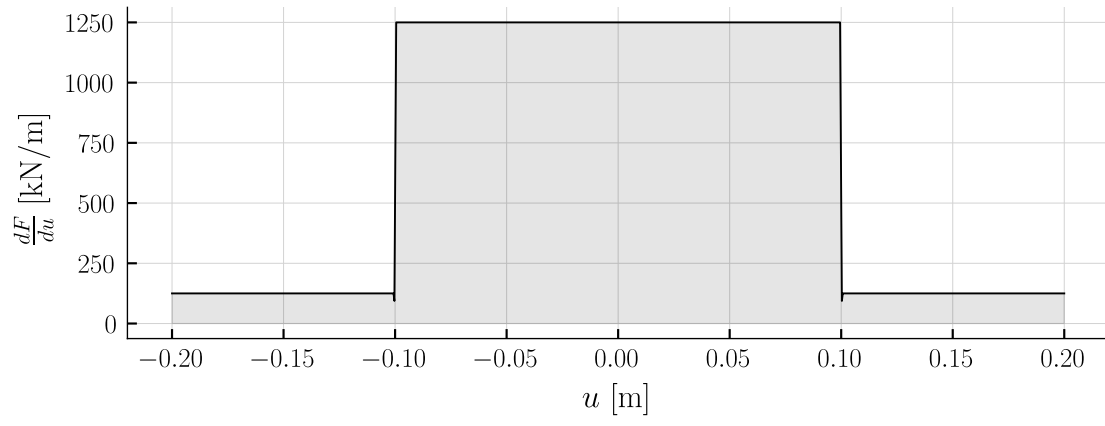
### 3.4.1 Federgesetz



$$k_{1x} = \frac{1250.0\text{kN}}{\text{m}} \quad (3.11)$$

$$k_{2x} = \frac{125.0\text{kN}}{\text{m}} \quad (3.12)$$

$$\alpha = 0.1 \quad (3.13)$$



$$F_0 = -124.9\text{kN} \quad (3.14)$$

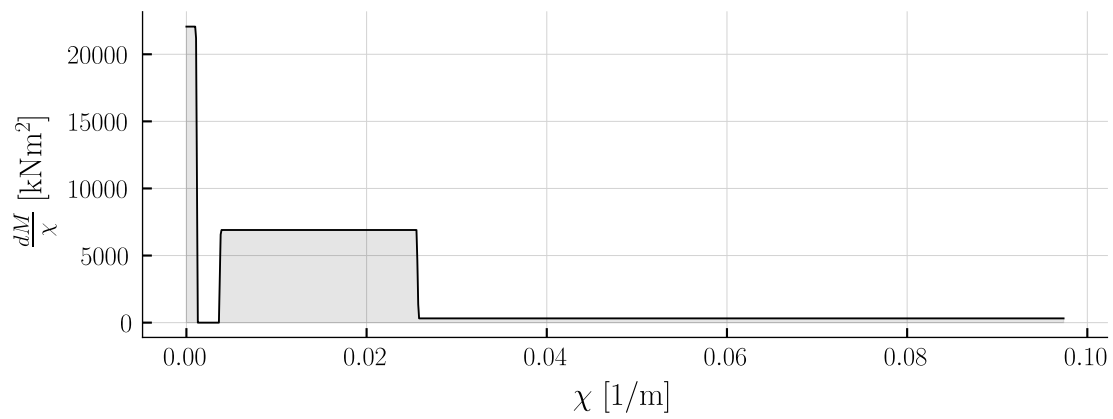
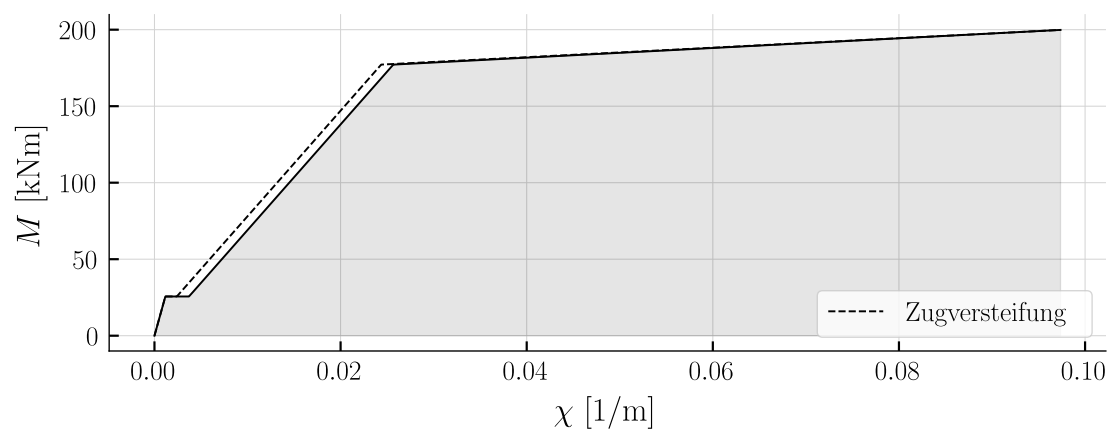
$$u_0 = -100.3\text{mm} \quad (3.15)$$



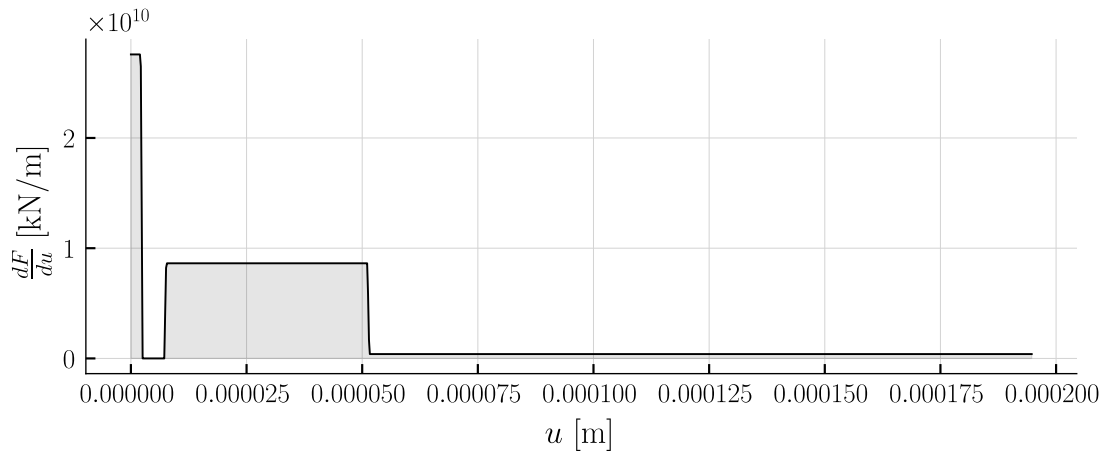
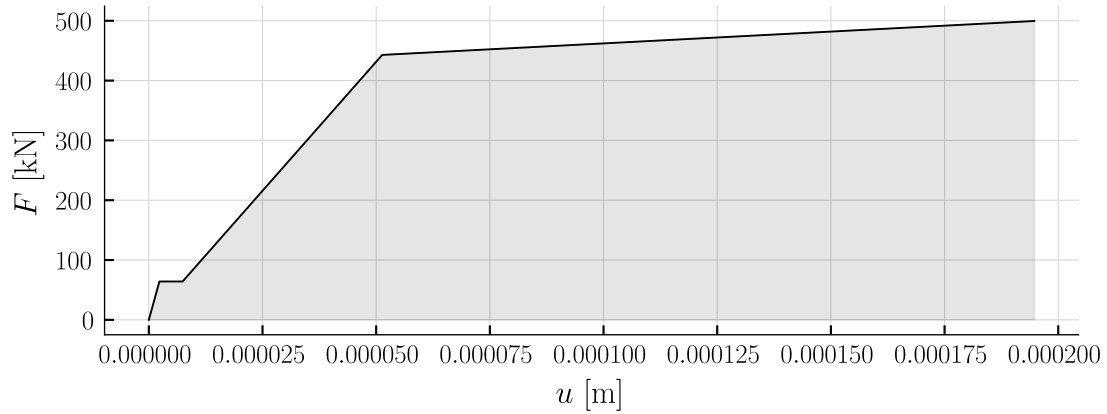
## 4 Versuchsnachrechnung

### 4.1 Dreipunktbiegeversuch

#### 4.1.1 Drehfedercharakteristik



### 4.1.2 Wegfedercharakteristik



$$k_{1x} = \frac{395264.9 \text{ kN}}{\text{m}} \quad (4.1)$$

$$k_{2x} = \frac{8629749.9 \text{ kN}}{\text{m}} \quad (4.2)$$

$$\alpha = 0.046 \quad (4.3)$$

$$EA = 86297.499 \text{ kN} \quad (4.4)$$

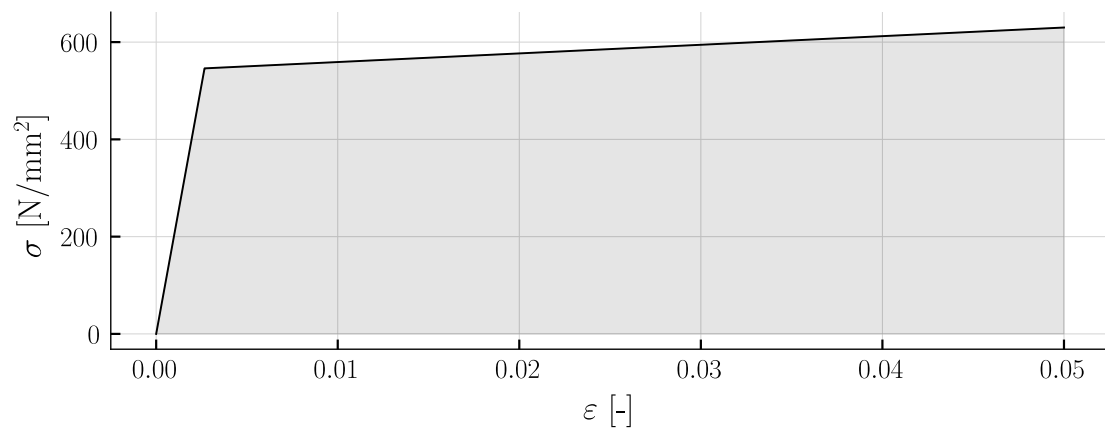
#### 4.1.2.1 Schiebung

Es wird das nicht-lineare Spannungs-Dehnungs-Verhalten der Schubbewehrung berücksichtigt. Zur Umwandlung in ein Kraft-Verformungs-Diagramm bzw. in eine Wegfedercharakteristik wird ein Spannungsfeld ermittelt. Aus diesem lässt sich die Querschnittsfläche der Schubbewehrung bestimmen. Durch Multiplikation mit der

Spannung der Stahlkennlinie resultiert die erforderliche Kraft. Die bekannte Dehnung aus der Stahlkennlinie wird über den Hebelarm der inneren Kräfte zu einer Verformung umgewandelt. Wichtig dabei ist die Elementlänge der biegesteifen Stäbe im FEM-Modell. Dazu wird die Verformung um den Faktor gemäss Gleichung 4.5 reduziert, bzw. die Steifigkeit der Feder um diesen Faktor erhöht.

$$\gamma_{Element} = \frac{z \cdot \cot(\theta)}{n_{Element}} \quad (4.5)$$

Wichtig dabei ist, mit der Kombination zwischen Biegegelenk und “Schubgelenk” kann das Rissplateau zu numerischen Problemen führen.




---

#### A3V2 Schubsteifigkeit

---

$$A_{sw} = 198.0 \text{ mm}^2$$

$$E_{sw} = \frac{205000 \text{ N}}{\text{mm}^2}$$

$$\phi_{sw} = 6.0 \text{ mm}$$

$$b_w = 800.0 \text{ mm}$$

$$\theta_{c3} = 34.3^\circ$$

$$E_{sh} = \frac{1775.0 \text{ N}}{\text{mm}^2}$$

$$S_{sw} = 80.0 \text{ mm}$$

$$a_{sw} = \frac{2.47 \cdot 10^3 \text{ mm}^2}{\text{m}}$$

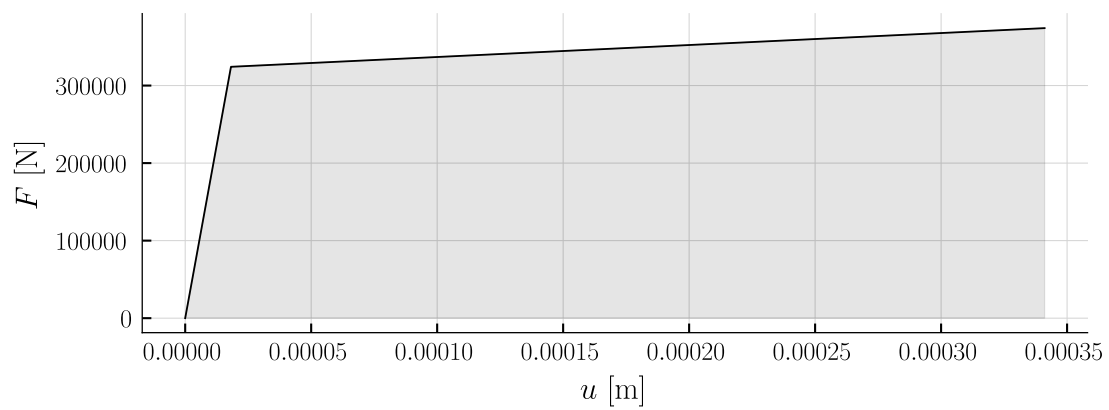
$$\rho_{sw} = 0.309\%$$

$$z_{approx} = 140 \text{ mm}$$

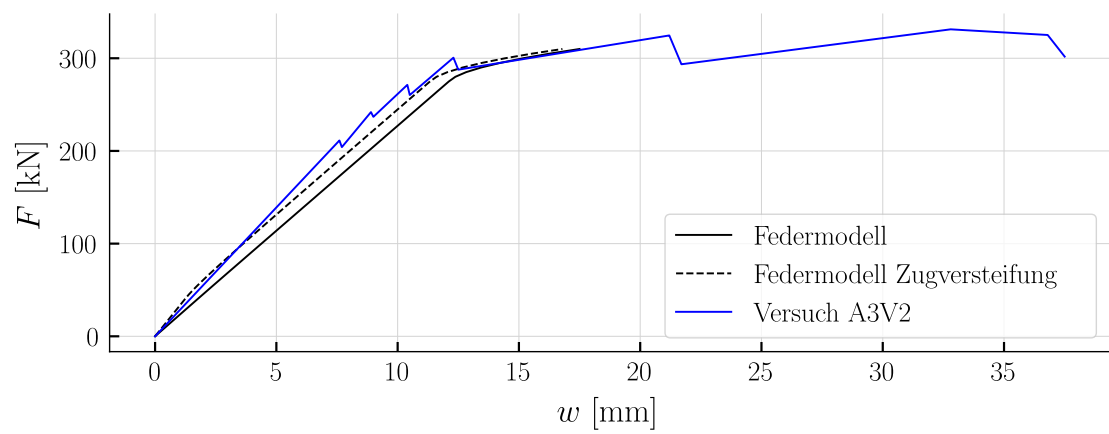

---

#### 4.1.2.1.1 Bewehrungseigenschaften

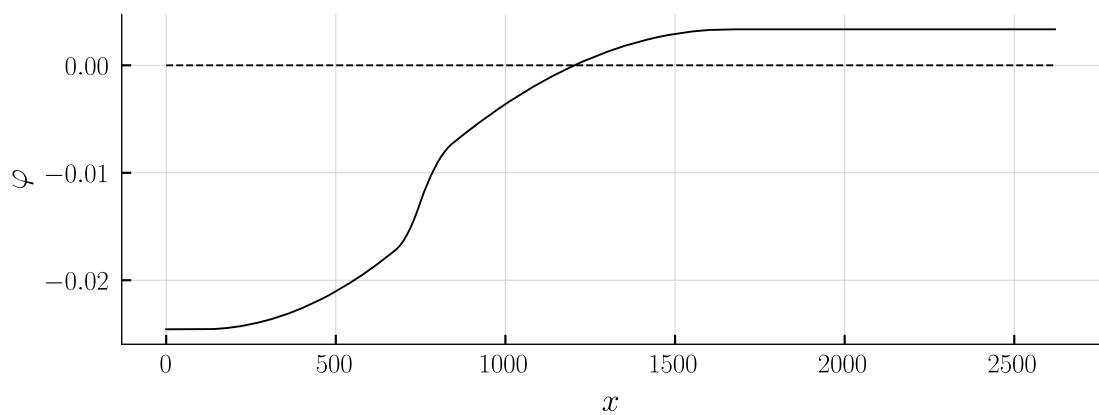
$$\gamma_{Element} = 21.0 \quad (4.6)$$



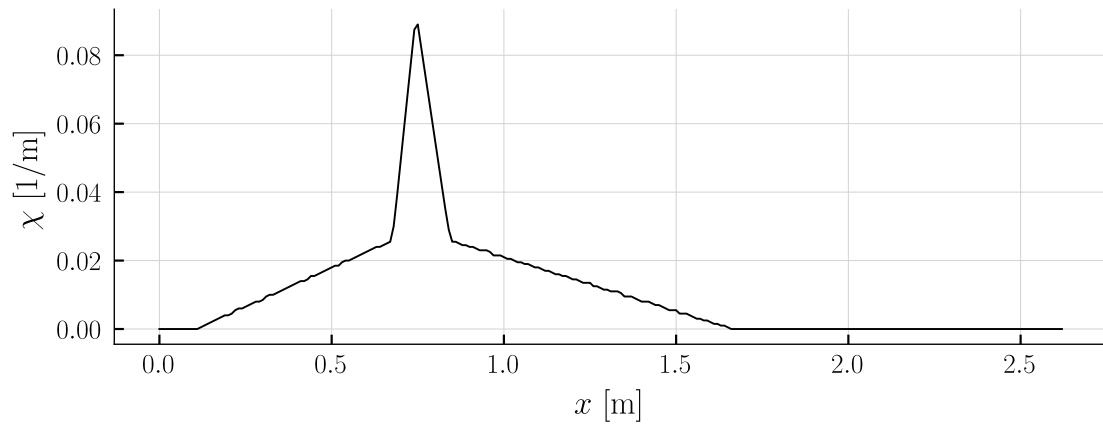
### 4.1.3 Versuchsvergleich



#### 4.1.3.1 Verdrehungsverlauf



#### 4.1.3.2 Krümmungsverlauf



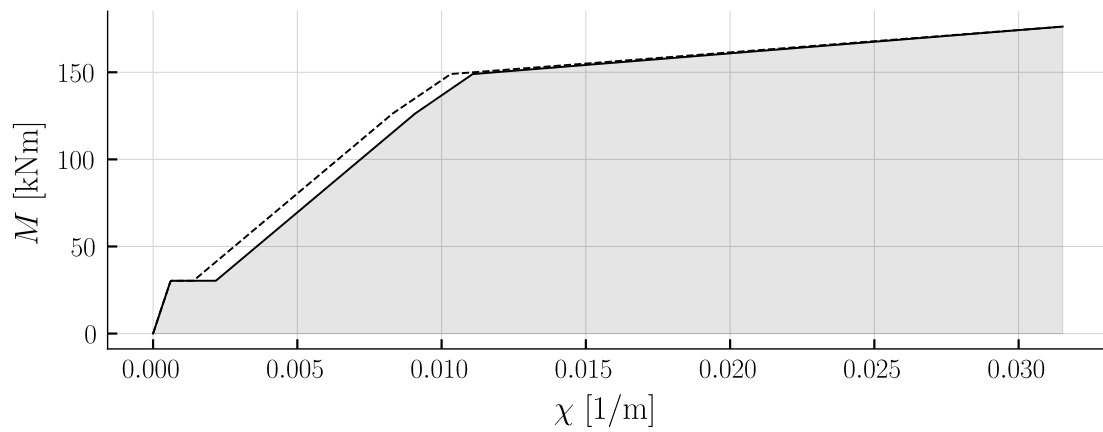
#### 4.1.4 Fachwerkmodell

$$\varnothing_{staender} = 27.5\text{mm} \quad (4.7)$$

$$\varnothing_{zuggurt} = 53.7\text{mm} \quad (4.8)$$

### 4.2 Vierpunktbiegeversuch

#### 4.2.1 Drehfedercharakteristik

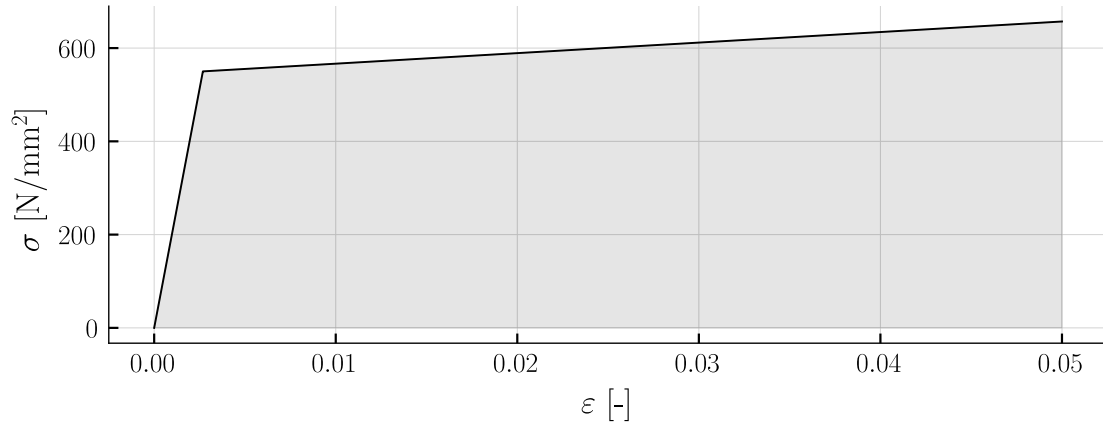


## 4.2.2 Wegfedercharakteristik

### 4.2.2.1 Schiebung

Es wird das nicht-lineare Spannungs-Dehnungs-Verhalten der Schubbewehrung berücksichtigt. Zur Umwandlung in ein Kraft-Verformungs-Diagramm bzw. in eine Wegfedercharakteristik wird ein Spannungsfeld ermittelt. Aus diesem lässt sich die Querschnittsfläche der Schubbewehrung bestimmen. Durch Multiplikation mit der Spannung der Stahlkennlinie resultiert die erforderliche Kraft. Die bekannte Dehnung aus der Stahlkennlinie wird über den Hebelarm der inneren Kräfte zu einer Verformung umgewandelt. Wichtig dabei ist die Elementlänge der biegesteifen Stäbe im FEM-Modell. Dazu wird die Verformung um den Faktor gemäss Gleichung 4.5 reduziert, bzw. die Steifigkeit der Feder um diesen Faktor erhöht.

Wichtig dabei ist, mit der Kombination zwischen Biege gelenk und “Schubgelenk” kann das Rissplateau zu numerischen Problemen führen.



$$\phi_{sw} = 4.3\text{mm} \quad (4.9)$$

$$A_{sw} = 29.0\text{mm}^2 \quad (4.10)$$

$$S_{sw} = 300.0\text{mm} \quad (4.11)$$

$$a_{sw} = \frac{96.8\text{mm}^2}{\text{m}} \quad (4.12)$$

$$b_w = 170.0\text{mm} \quad (4.13)$$

$$\rho_{sw} = 0.0569\% \quad (4.14)$$

$$z_{approx} = 359\text{mm} \quad (4.15)$$

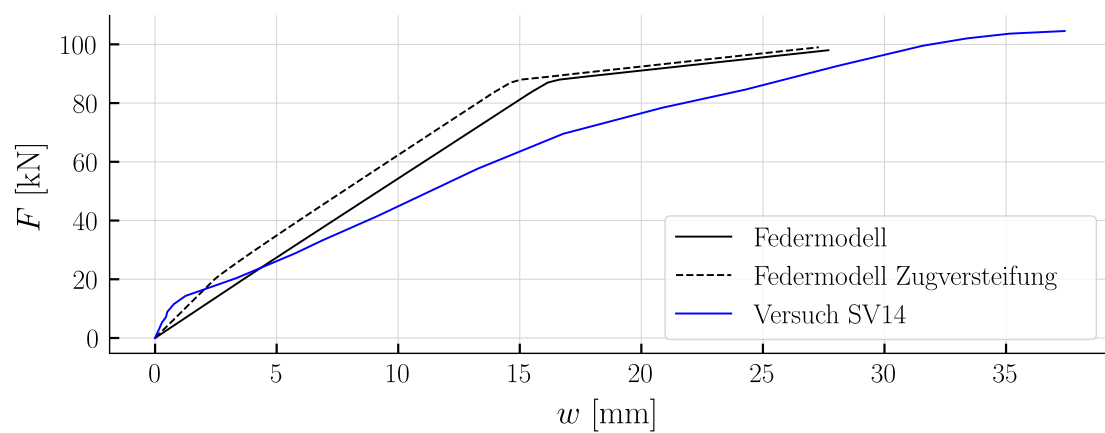
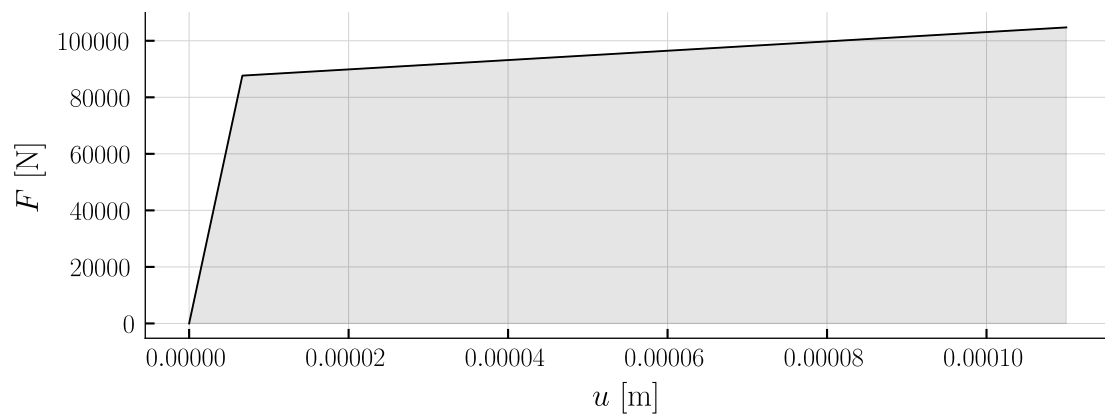
$$E_{sw} = \frac{205000\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (4.16)$$

$$E_{sh} = \frac{2261.0\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (4.17)$$

$$\theta_{c3} = 12.3^\circ \quad (4.18)$$

#### 4.2.2.1.1 Bewehrungseigenschaften

$$\gamma_{Element} = 165.0 \quad (4.19)$$



1. Gitz P (2024) Ansätze zur Verformungsberechnung. HSLU Technik & Architektur